



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Andréa Freire dos Santos

Utilização de um formalismo quântico unificado da polarização e da coerência no estudo da informação quântica codificada na luz

Campina Grande, PB
28 de Setembro de 2018

ANDRÉA FREIRE DOS SANTOS

Utilização de um formalismo quântico unificado da polarização e da coerência no estudo da informação quântica codificada na luz

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. BERTÚLIO DE LIMA BERNARDO

Campina Grande, PB

28 de Setembro de 2018

S237u Santos, Andréa Freire dos.
Utilização de um formalismo quântico unificado da polarização e da coerência no estudo da informação quântica codificada na luz / Andréa Freire dos Santos. – Campina Grande, 2018.
62 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo".
Referências.

1. Física – Informação Quântica. 2. Operadores de Kraus. 3. Grau de Coerência. 4. Física Quântica. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Título.

CDU 530.145(043)

ANDRÉA FREIRE DOS SANTOS

Utilização de um formalismo quântico unificado da polarização e da coerência no estudo da informação quântica codificada na luz

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em Física pela Universidade Federal de Campina Grande. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFPG
Orientador

Prof. Dr. Joao Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFPG
Examinador interno

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
Departamento de Física - DF/UFPG
Examinador Externo

Campina Grande, 28 de Setembro de 2018

*Dedico este trabalho ao meu pai que infelizmente,
não se encontra mais entre nós, e mesmo assim, continua a me motivar;
e a minha mãe, o maior exemplo de força e coragem que um ser humano pode ter.*

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade dada todos os dias ao amanhecer. A minha mãe, por suportar a minha falta, confiar e entender que um filho deve buscar novos horizontes. A meus irmãos: Amanda, Andreza, Antônio, Anderson e Alison, pelo carinho, motivação e paciência. A Francisca, pelas longas conversas, risos, até choros, durante esses dois anos, via canal da paciência. Aos companheiros de ideal, pelas palavras de incentivo. A Guacira, por todas as experiências vividas: no departamento de ensino, na divisão de apartamento, nos passeios, bares (embora beber não seja o meu forte) e nas tarefas mais fáceis e difíceis. A Potira Melo, pela compaixão, dedicando seu tempo para contribuir. A Everaldo, por me acolher em Campina Grande e me tolerar por dois anos, dividindo apartamento, sempre com atenção, nenhuma discórdia e muito carinho.

Ao meu orientador Bertúlio, por sua simplicidade e compreensão, sempre paciente e motivador. Aos professores do programa, por compartilhar seus conhecimentos. À Capes, por financiar minhas despesas durante a jornada, e a UFCG pelo acolhimento.

Resumo

O processo da manutenção da informação quântica em nível atômico encara um problema que é a decoerência. Durante as interações, um sistema composto sofre diferentes mudanças que só podem ser representadas pelo operador densidade. A luz, tendo seu comportamento de partícula, pode ser usada na codificação da informação quântica (os fótons), através da polarização. Neste trabalho, nós analisamos a interação entre um conjunto de fótons com dois tipos de ambientes, descrevendo seus constituintes através dos operadores de Kraus. Utilizando o método da matriz densidade reduzida, pudemos representar juntamente os comportamentos da coerência e polarização de maneira simples pela teoria de unificação entre estes graus de liberdade. Quantificamos a perda dos graus de coerência e polarização quando temos ambientes em que um provoca mudanças apenas na coerência da fase durante o espalhamento dos fótons, e o outro quando estas mudanças dependem da polarização dos fótons. Em nosso formalismo, é possível determinar, com o uso dos parâmetros de Stokes, o tipo de polarização do estado. O estudo mostra que tipos de ambientes devem ser evitados no processo de transmissão de informação quântica.

Palavras-chave: Operadores de Kraus, grau de coerência, grau de polarização, decoerência, parâmetros de Stokes.

Abstract

The processing of information at the atomic level faces a problem which is decoherence. During the interactions with an environment, a composite system suffers different changes that can only be represented by its density operator. Since light has its particle behavior, it can be used to encode quantum information (in the photons), through its polarization. In this study, we analyze the interaction between a group of photons with two types of environment, describing its constituents through the Kraus operators formalism. By using the reduced density matrix method, we could represent together the behavior of coherence and polarization in a simple way by means of the unification theory between these degrees of freedom. We quantify the loss of the coherence and polarization degrees when we have environments which cause changes only in coherence of the phase during the scattering of photons and the other when these changes depend upon the polarization of the photons. In our formalism, it is possible to determine, by using the Stokes parameters, the type of polarization state. The study also shows which kind of environment should be prevented in the process of transmission of quantum information.

Keywords: Kraus Operators, degree of coherence, degree of polarization, Decoherence, Stokes parameters.

Conteúdo

Introdução	1
1 Fundamentação teórica	4
1.1 Operador densidade.....	4
1.1.1 Evolução do operador densidade	7
1.2 Operador densidade reduzida	8
1.2.1 Medidas de um observável	9
1.3 Polarização clássica	10
1.3.1 Polarização dos fótons.....	11
1.4 Parâmetros de Stokes.....	14
2 Operadores de Kraus	17
2.1 Representação matemática dos operadores de Kraus.....	18
2.1.1 Da operação unitária.....	20
2.1.2 Aplicação dos operadores de Kraus e os canais quânticos	20
3 Decoerência e efeitos resultantes de dois tipos de ambientes	25
3.1 Matriz densidade, graus de coerência e polarização	25
3.1.1 Decoerência e a medida de von Neumann.....	26
3.1.2 Teoria da unificação e os graus de coerência e polarização	28
3.2 Aplicação do método de unificação no estudo da decoerência	35
3.2.1 Decoerência e mudanças de fases aleatórias	35

3.2.2	Decoerência, despolarização e ambiente	37
4	Conclusão	41
A	Matriz densidade reduzida e ambientes	43
A.1	Obtenção dos operadores de Kraus da seção 3.2.....	43
	Bibliografia	48

Introdução

Nos dias atuais, os fenômenos associados à natureza da luz são melhores entendidos graças às descobertas de que a luz tem seu caráter dual: ondulatório e corpuscular. No século XVII, Newton defendia que a luz tinha o caráter corpuscular, sendo que os corpos minúsculos possuíam a condição de transportar energia e sofrer reflexões e refrações [1]. Em 1801, Thomas Young em seu experimento de dupla fenda mostrou que, ao passar um feixe de luz por duas fendas, o comportamento obtido no anteparo era semelhante ao de uma onda na superfície da água, onde os máximos e mínimos das amplitudes da onda se encontram formando padrões de interferência, as franjas de interferências claras e escuras [2, 3]. Em 1900, Max Planck introduziu o comportamento corpuscular da luz na explicação da radiação do corpo negro, e logo após, em 1905, Einstein publica seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico mostrando o comportamento da luz como partícula, os fótons [3]. Posteriormente, de Broglie demonstra que a partícula também tem um comportamento ondulatório, chamando este feito de ondas de matéria. Schrödinger preocupou-se em encontrar uma equação de onda para as ondas de matéria de de Broglie, no entanto, qual seria a interpretação física da equação? Qual a relação entre onda e partícula a ela associada e a que corresponderia a amplitude de probabilidade e intensidade da onda?[3] A unificação dessa dualidade onda-partícula foi resolvida em 1927 por Born [4], propondo que uma partícula está associada a uma onda, incluindo assim o caráter probabilístico, sendo o quadrado da amplitude dessa onda a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em um determinado ponto do espaço.

A partir dos estudos de Newton, Huygens e Fresnel sobre refração, concluiu-se que as ondas de luz são transversais[3]. Devido à essa classificação, as ondas luminosas podem apresentar polarização, por serem ondas em que a direção de vibração é perpendicular a direção de propagação. Sendo a luz composta por fótons, então podemos obter informação sobre eles através da polarização. Na teoria da informação clássica, a unidade fundamental da informação é o bit, que assume valores 0 ou 1 por vez [5]. Na informação quântica o

conceito de bit é generalizado para o de qubit, uma superposição (combinação linear) de 0 e 1 [6]. Isso implica que, se enviarmos uma informação através da luz, e o fóton usado para codificar essa informação apresentar combinações lineares de polarização horizontal e vertical, poderemos, através das probabilidades, obter como resultado de uma medida, os valores 0 ou 1 de acordo com a regra probabilística de Born [7]. No entanto, um problema enfrentado na manutenção da informação quântica por sistemas a nível atômico é a decoerência, que causa a perda do grau de coerência entre os estados de um sistema qualquer durante a interação com seu ambiente. O fato de termos uma correlação entre os graus de liberdade de polarização e coerência [8], à medida que consideramos a polarização durante a interação, o grau de polarização também será afetado.

Neste trabalho, usaremos o formalismo do operador densidade, que será discutido detalhadamente no capítulo 1, para representar o estado de um sistema, sabendo que este representa tanto estados mistos quanto estados puros. Recorreremos ao uso do operador densidade reduzida que fornece todas as informações sobre a visibilidade de interferência e a informação da localização dos estados de um sistema formado por um conjunto de fótons. Nós iremos observar a interação deste conjunto de fótons com dois tipos de ambientes: um que tem a característica de causar perda de coerência da fase durante o espalhamento dos fótons, e o outro onde essa mudança depende da polarização dos fótons.

O operador densidade reduzida será mapeado, e os elementos que mapeiam de forma discreta a dinâmica da interação entre este sistema e seu ambiente são os chamados operadores de Kraus, discutidos no capítulo 2.

Usaremos como base para observar os graus de coerência e polarização, as equações obtidas pela teoria de unificação da polarização e da coerência, desenvolvida por Bernardo [9], onde a partir de uma abordagem clássica, o autor faz uma abordagem quântica representando o estado de conjunto de fótons sob as condições do experimento de dupla fenda, um estado puro, com o operador densidade; e obtém estes graus, onde a validade é estendida também para estados misturados. Por fim, observaremos o comportamento do

estado de polarização dos fótons usando os parâmetros de Stokes, que são os observáveis que descrevem conjuntamente o estado de polarização de um feixe de luminoso.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

1.1 Operador densidade

Como representar um estado quântico que não é completamente conhecido? O estado $|\psi\rangle$ pode representar uma coleção, ou ensemble de sistemas físicos desde que sejam igualmente preparados. Se tomarmos como exemplo o experimento de Stern–Gerlach (SG) (figura 1.1), onde um feixe de átomos de prata sai diretamente de um forno com orientações de spins aleatórias e é submetido a um campo magnético inhomogêneo, isso resulta em uma divisão do feixe em duas componentes de momento magnético, que por um fator de proporcionalidade, seria o mesmo que o spin S dos átomos [10, 11]. Antes de passar pelo campo, o feixe tem orientações de spin aleatórias. Disso tiramos que o estado $|\psi\rangle$ não é suficiente para representar um feixe aleatório. Do feixe que emerge do forno, digamos que **70%** sejam representados por $|\psi\rangle$ e **30%** por $|\varphi\rangle$. A esse ensemble é dado o nome de estado misturado¹. Os estados $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ são estados puros. As porcentagens **70%** e **30%** são pesos probabilísticos clássicos que satisfazem a condição $\sum_i p_i = \mathbf{1}$.

Na figura 1.1, o feixe de átomos é dividido em $|\mathbf{0}_z\rangle$ e $|\mathbf{1}_z\rangle$; **50%** dos átomos formam um sistema físico idêntico com de spin $|S_z+\rangle$ e os outros **50%** com spin $|S_z-\rangle$ (são as componentes de spin S na direção z). Esses kets são exemplos de estados puros e a saída

¹Estado misturado é um ensemble de estados puros, cada um com peso probabilístico.

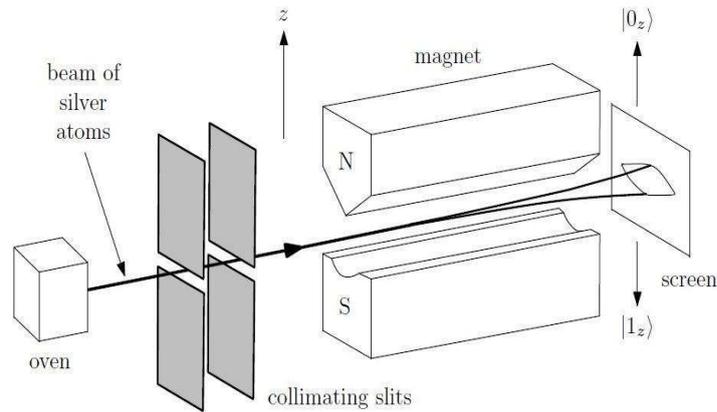


Figura 1.1: Experimento de Stern-Gerlach, com campo magnético orientado na direção z [12].

50 – 50, é um exemplo de estado misturado. Nesse caso, quando falamos de polarização da luz, seriam estados $|H\rangle$ e $|V\rangle$, os dois estados linearmente independentes, horizontal e vertical. Se um feixe de luz é uma mistura dos dois na mesma proporção, então esse feixe é um feixe despolarizado.

A medida de um observável num conjunto de estados misturados, ou melhor, o valor médio de um observável \hat{O} , é dado pela média sobre o conjunto dos kets de base de \hat{O} , definido como²

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{O} \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle \\
 \langle \hat{O} \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \phi^j \rangle \langle \phi^j | \psi_i \rangle \\
 \langle \hat{O} \rangle &= \sum_i p_i \sum_{\phi^j} \langle \psi_i | \phi^j \rangle \langle \phi^j | \psi_i \rangle \\
 \langle \hat{O} \rangle &= \sum_i \sum_{\phi^j} p_i \langle \phi^j | \psi_i \rangle^2, \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

sendo $|\phi^j\rangle$ os autovetores de \hat{O} . O elemento da soma $\langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle$ nos dá o valor esperado de

²Sendo $\hat{O} = \sum_{\sigma'} \sigma' |\sigma'\rangle \langle \sigma'|$.

Quando \hat{O} é aplicado em um autovetor, $\hat{O}|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$.

\hat{O} para o estado $|\psi_i\rangle$. Com isso, a equação (1.1) carrega um sentido quântico e clássico em termos de probabilidade: onde p_i é a probabilidade do estado $|\psi\rangle$ ser encontrado no ensemble que está sendo medido, e σ^j é o autovalor referente a probabilidade de encontrarmos o estado $|\psi_i\rangle$ em um autovetor $|\sigma^j\rangle$ de \hat{O} .

Tomando a equação (1.1), usando uma base $|a^j\rangle$ e fazendo o uso da relação de completudeza³, temos

$$[\hat{O}] = \sum_i p_i \sum_{a^j} \sum_{a^{jj}} (\psi_i|a^j) (a^j|\hat{O}|a^{jj}) (a^{jj}|\psi_i). \quad (1.2)$$

Fazendo a separação dos termos que não dependem do observável \hat{O} e tendo em vista que p_i não depende da dimensionalidade das bases $\{a^j, a^{jj}\}$, o valor médio de \hat{O} é $[\hat{O}]$

$$= \sum_i p_i \sum_{a^{jj}} (a^{jj}|\psi_i) (\psi_i|a^j) \sum_{a^j} (a^j|\hat{O}|a^{jj}). \quad (1.3)$$

Definimos então o operador densidade como [13]:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|. \quad (1.4)$$

O operador densidade ρ é uma forma de representar um sistema quântico e ele contém toda a informação física que podemos obter sobre o ensemble analisado [13]. Os elementos da matriz densidade desse operador tem a forma:

$$(a^{jj}|\rho|a^j) = \sum_i p_i (a^{jj}|\psi_i) (\psi_i|a^j).$$

Substituindo a equações (1.4) em (1.3), nós obtemos

$$\begin{aligned} [\hat{O}] &= \sum_{a^j} \sum_{a^{jj}} (a^{jj}|\rho|a^j) (a^j|\hat{O}|a^{jj}); \\ [\hat{O}] &= \text{tr}(\rho\hat{O}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\sum_{a^{rr}} |a^{rr}\rangle \langle a^{rr}| = \mathbf{1}.$$

Propriedades do operador densidade [14]:

1 - $\text{tr} \rho = \mathbf{1}$, ρ satisfaz a condição de normalização.

2 - $\rho = \rho^\dagger$ é hermitiano.

3 - $\rho \geq \mathbf{0}$, é positivo.

4 - $\text{tr} \rho^2 = \mathbf{1}$, o operador densidade representa um estado quântico puro.

5 - $\text{tr} \rho^2 \leq \mathbf{1}$, o operador densidade representa um estado quântico misturado.

1.1.1 Evolução do operador densidade

A dinâmica de um ket de estado $|\psi\rangle$ é governada pelo operador de evolução temporal [13],

$$\hat{U} = \exp \frac{-i\hat{H}t}{\hbar}, \quad (1.6)$$

em que \hat{H} é o operador hamiltoniano do sistema. A evolução de um estado ocorre de acordo com a equação de Schrödinger [10]

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (1.7)$$

onde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ com h sendo a constante de Planck. A evolução do operador densidade ρ é comandada pela evolução dos kets de estado, onde $|\psi(\mathbf{0})\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$. Aplicando o operador unitário \hat{U} em $|\psi(\mathbf{0})\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, \mathbf{0}) |\psi(\mathbf{0})\rangle &= |\psi(t)\rangle \\ \rightarrow |\psi(t)\rangle &= \exp \frac{-i\hat{H}t}{\hbar} |\psi(\mathbf{0})\rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Em $t = \mathbf{0}$ o operador densidade é

$$\rho(\mathbf{0}) = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.9)$$

para $t = 0$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_i \left(p_i \frac{\partial |\psi_i\rangle}{\partial t} \langle \psi_i| + p_i |\psi_i\rangle \frac{\partial \langle \psi_i|}{\partial t} \right).$$

substituindo $\frac{\partial |\psi_i(t)\rangle}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \sum_i \left(p_i \frac{-i\hat{H}}{\hbar} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| + p_i |\psi_i\rangle \left(\frac{i}{\hbar} \langle \psi_i| \hat{H} \right) \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{-i}{\hbar} \hat{H} \rho - \rho \hat{H} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \rho], \end{aligned} \tag{1.12}$$

que é chamada equação de von Neumann [15]. Se ρ comutar com H , então ρ é constante [13].

1.2 Operador densidade reduzida

Veremos mais adiante que ao interagir um sistema quântico com outro, os dois podem criar correlações, e isto impede que tratemos os sistemas separadamente. Na verdade, nós não podemos falar em separação quando da interação surge um sistema físico emaranhado. Estamos interessados em obter do sistema físico total, apenas informação estatística de um certo subsistema. Para isso, usamos o operador densidade reduzida. Digamos que um sistema S interagiu com um sistema E , o operador densidade reduzida será [16]:

$$\rho_S = \text{tr}_E(\rho), \tag{1.13}$$

⁴Da equação de Schrödinger

$$\frac{\partial |\psi_i(t)\rangle}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} \hat{H} |\psi_i(t)\rangle, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \langle \psi_i(t)|}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi_i(t)| \hat{H}. \tag{1.11}$$

∂t k^i

em que o uso do tr sobre os estados do sistema E nos garante que, durante as medições, possamos tirar a informação de S sem nos preocupar com o sistema E, que a partir de agora chamaremos de *ambiente* E.

1.2.1 Medidas de um observável

Qualquer $|\psi\rangle \in H = H_S \otimes H_E$, que não represente um sistema emaranhado, podemos representar o estado de cada um dos dois subsistemas pelos seus kets de estado nos seus espaços de Hilbert separadamente [16]. Caso o sistema se encontre emaranhado, esta separação não acontece. Todavia, é possível medir um observável dinâmico qualquer de um dos subsistemas. Seja $\hat{O} = \hat{O}_S \otimes I_E$ um operador do subsistema S, onde I_E é o operador identidade no espaço de Hilbert H_E , e recordando do resultado da equação (1.5), segue que

$$\begin{aligned}
 [\hat{O}] &= \sum_{k,l} (\langle \varphi_l | \langle \psi_k | \rho(\hat{O}_S \otimes I_E) | \psi_k \rangle | \varphi_l \rangle) [\hat{O}] \\
 &= \sum_{k,l} (\langle \psi_k | \left(\sum_{l=1}^k (\langle \varphi_l | \rho | \varphi_l \rangle) \hat{O}_S \right) | \psi_k \rangle) \\
 [\hat{O}] &= \sum_k (\langle \psi_k | \text{tr}_E \rho \hat{O}_S | \psi_k \rangle) \\
 [\hat{O}] &= \sum_k (\langle \psi_k | \rho_S \hat{O}_S | \psi_k \rangle) \\
 [\hat{O}] &= \text{tr}_S(\rho_S \hat{O}_S). \tag{1.14}
 \end{aligned}$$

Para medir uma variável dinâmica do subsistema E é só tomar $\hat{O} = I_S \otimes \hat{O}_E$ e fazer as substituições devidas, que obteremos $[\hat{O}] = \text{tr}_E(\rho_E \hat{O}_E)$. Uma vantagem de usar o traço é que ele não depende das bases de H_S e H_E e é executado numa base ortonormal qualquer

1.3 Polarização clássica

A luz é um tipo de onda eletromagnética que é composta por campos elétricos e magnéticos variando no espaço e no tempo, perpendiculares entre si e à direção de propagação da onda. Quando a componente do campo elétrico se mantém oscilando apenas em uma direção, dizemos que a luz está polarizada. Neste caso especial, dizemos que a luz está plano polarizada ou linearmente polarizada. Uma luz linearmente polarizada pode apresentar polarizações no eixo x , no eixo y , ou uma combinação linear dos dois eixos [2]. Além da polarização linear, figura 1.2, o vetor campo elétrico pode oscilar elipticamente, com oscilações das componentes fora de fase ou circularmente, oscilações com diferenças de fases 90° ou múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ (sentido horário do vetor campo elétrico indica polarização circular à esquerda e sentido anti-horário indica circular à direita) [17]. Para obter uma luz polarizada, basta que passemos a mesma por um polarizador. Um

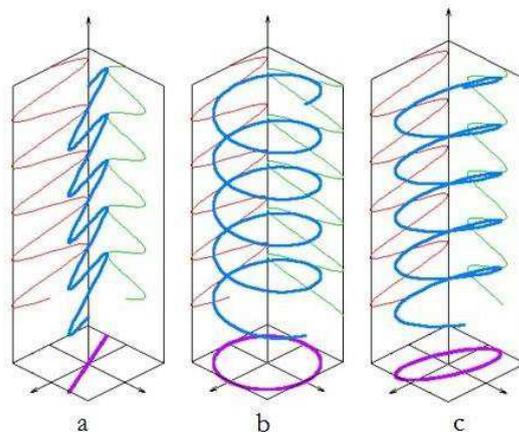


Figura 1.2: Propagação das componentes do vetor campo elétrico. Na figura *a* o vetor campo elétrico oscila linearmente; na *b* circularmente, e na *c*, elipticamente.

caso da luz não polarizada é a luz natural ou comum (luz solar por exemplo), ela possui campos elétricos oscilando em direções aleatórias. Embora exista uma mudança aleatória do campo elétrico com o tempo, ele não deixa de ser perpendicular à direção de propagação da onda. O que ocorre para que a luz natural não seja polarizada é que, o tempo de

transição na emissão de luz por átomos é muito pequeno, dessa forma, a cada 10^{-8} s um átomo emite um fóton com polarização aleatória [17]. A luz pode apresentar também um grau de polarização, denominada polarização parcial. Uma forma de quantificar o grau de polarização e descrever o estado de polarização da luz é através dos parâmetros de Stokes que veremos a seguir.

1.3.1 Polarização dos fótons

Um feixe de luz linearmente polarizado que se propaga na direção z é descrito pelo vetor campo elétrico [18]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde as componentes elétricas reais são [18]:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi_x), \quad (1.15)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_y), \quad (1.16)$$

sendo E_{0x} e E_{0y} as amplitudes das componentes do campo, ω a frequência da onda e ϕ_x e ϕ_y as fases; k é o número de onda equivalente a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, onde λ é o comprimento de onda.⁵ Em termos de polarização, quando $E_x = 0$, a onda está polarizada na direção y; quando $E_y = 0$, a onda está polarizada na direção x; quando $E_x = iE_y$, onda polarizada circularmente à direita e se $E_y = -iE_x$, temos que a onda é polarizada circularmente à esquerda.

Ao passarmos uma onda polarizada 45° por um polarizador x, a energia total da

⁵As componentes complexas do campo elétrico são:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_x \exp(ik_z z - i\omega t), \quad (1.17)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_y \exp(ik_z z - i\omega t). \quad (1.18)$$

onda é reduzida pela metade, já que a componente y é absorvida pelo polarizador, $E = E_x$ e $E_y = 0$. A energia da onda que passou pelo polarizador é:

$$\frac{|E_x|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2} = \frac{|E_x|^2}{|E|^2} \quad (1.19)$$

Quanticamente, para uma onda de frequência ω , a sua energia total obedece à relação [18]:

$$E = nk\omega, \quad (1.20)$$

sendo n o número de fótons. Se essa onda luminosa for composta apenas por 1 fóton e ele já passou por um polarizador que o deixou com polarização E_x , neste caso, substituiremos a componente E_x por $|H\rangle^6$. Se esse mesmo fóton passar novamente por um polarizador que forme um ângulo θ com o eixo x , o estado de polarização desse fóton será:

$$|H^i\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle, \quad (1.21)$$

em que $\sin\theta$ e $\cos\theta$ são as amplitudes análogas à E_{0x} e E_{0y} . Classicamente, a amplitude da onda transmitida seria $|E_x| = |E|\cos\theta$. Neste caso, a intensidade da onda transmitida seria reduzida por um fator $\cos^2\theta$ mais fraca do que a energia que tinha antes de passar por esse polarizador [19]. Para fótons, essa questão é analisada em termos de probabilidade. Se passarmos novamente esse fóton, com polarização $|H^i\rangle$ por um terceiro polarizador $|H\rangle$, qual será a probabilidade do fóton passar e aparecer no estado $|H\rangle$? A amplitude de probabilidade do fóton que está no estado $|H^i\rangle$ ser encontrado em $|H\rangle$ é:

$$\begin{aligned} \langle H|H^i\rangle &= \cos\theta \langle H|H\rangle + \sin\theta \langle H|V\rangle \\ \langle H|H^i\rangle &= \cos\theta, \end{aligned} \quad (1.22)$$

⁶ $|H\rangle$ representa um estado de polarização horizontal e como iremos mencionar, $|V\rangle$ representa o estado de polarização do fóton na vertical, assim, uma combinação linear desses dois estados, resultam em um estado $|\psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$.

ea probabilidade de cada fóton ser encontrado no estado $|H\rangle$ é $|(H|H\rangle)|^2 = \cos^2\theta$. Então, o fóton é transmitido em algumas ocasiões e não em outras.

As polarizações circulares à direita $|R\rangle$ e à esquerda $|L\rangle$ possuem a mesma amplitude de serem encontradas nos estados $|H\rangle$ e $|V\rangle$, porém existe uma diferença de 90° entre as duas. As polarizações circulares são representadas por:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle), \quad (1.23)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle). \quad (1.24)$$

O vetor de estado de polarização de um fóton é dado por:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\langle\psi| = [\alpha^* \ \beta^*]$ seu dual, com $*$ indicando amplitudes complexas conjugadas. Os estados de polarização quânticos são:

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Esses estados conservam o produto interno e a condição de normalização

$$(H|H) = 1, (V|V) = 1, (R|R) = 1, (L|L) = 1. \quad (1.26)$$

Uma combinação linear dos estados de $|\psi\rangle$ é do tipo:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle.$$

Uma medida projetiva no estado $|H\rangle$, ou seja, passar $|\psi\rangle$ por um polarizador x , implica

em:

$$|H\rangle\langle H|\psi\rangle = \alpha|H\rangle\langle H| + \beta|H\rangle\langle V| = \alpha|H\rangle\langle H|, \quad (1.27)$$

só que, com probabilidade: $|\langle H|\psi\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = |\alpha|^2$.

1.4 Parâmetros de Stokes

Em 1852, George Gabriel Stokes [20, 21, 22] mostram que o comportamento de um feixe luminoso pode ser representado em termos de quatro observáveis: os chamados parâmetros de Stokes. Considerando um feixe de luz monocromático, os parâmetros de Stokes em um ponto P qualquer são [23]:

$$S_0(\mathbf{r}) = (E_x^*(\mathbf{r})E_x(\mathbf{r}) + E_y^*(\mathbf{r})E_y(\mathbf{r})), \quad (1.28)$$

$$S_1(\mathbf{r}) = (E_x^*(\mathbf{r})E_x(\mathbf{r}) - E_y^*(\mathbf{r})E_y(\mathbf{r})), \quad (1.29)$$

$$S_2(\mathbf{r}) = (E_x^*(\mathbf{r})E_y(\mathbf{r}) + E_y^*(\mathbf{r})E_x(\mathbf{r})), \quad (1.30)$$

$$S_3(\mathbf{r}) = i[(E_y^*(\mathbf{r})E_x(\mathbf{r}) - E_x^*(\mathbf{r})E_y(\mathbf{r}))], \quad (1.31)$$

onde S_0 representa a intensidade total do feixe, S_1 a quantidade de polarização linear horizontal e vertical, S_2 a quantidade de polarização nas direções **+45°** e **-45°**, e S_3 a quantidade de polarização circular à direita e à esquerda. Além disso os parâmetros de Stokes satisfazem à relação [20, 24]:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (1.32)$$

Se a luz for completamente polarizada temos a igualdade da equação (1.31) satisfeita. No caso em que S_0^2 é maior, a luz é não polarizada ou parcialmente polarizada. Podemos obter o grau de polarização de um feixe de luz através dos parâmetros de Stokes [20],

onde

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)}}{S_0} \quad (1.33)$$

com $0 \leq P \leq 1$. I_{pol} representa a intensidade do feixe polarizado, I_{tot} a intensidade total do feixe. Caso $P = 0$ o feixe é não polarizado, se $P = 1$ o feixe é polarizado, e para $0 \leq P \leq 1$ o feixe é parcialmente polarizado. Como os parâmetros de Stokes são descritos em termos de intensidades, esses observáveis são reais já que é um produto quadrático de E e E^\dagger , onde [25]

$$I = E^\dagger E = E_1^\dagger E_1 + E_2^\dagger E_2 \quad (1.34)$$

$$J = \begin{bmatrix} E_1 E_1^\dagger & E_1 E_2^\dagger \\ E_2 E_1^\dagger & E_2 E_2^\dagger \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

A matriz J apresentado em (1.36) é a matriz de coerência e I é a irradiância sendo,

$$I = \text{tr}\{J\}. \quad (1.36)$$

A matriz J é expandida em termos de um conjunto complexo de matrizes 2x2, [25]

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + S_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + S_2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + S_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Essas matrizes são as matrizes de Pauli e os parâmetros de Stokes acima, em termos de matrizes de Pauli, resultam em [25]:

$$S_\mu = \text{tr}\{J\sigma_\mu\}, \quad (1.38)$$

para qual $\mu = \mathbf{0, 1, 2, 3}$. Para um ensemble de fótons, em termos da matriz densidade, temos [26]

$$S_\mu = \text{tr} \rho \sigma_\mu. \quad (1.39)$$

Cada parâmetro de Stokes representa um tipo de polarização e são os análogos das médias das matrizes de Pauli para a polarização. Do experimento de SG citado na seção 1.1, quando o campo magnético está direcionado sobre o eixo z, temos as componentes de spin S_{z+} e S_{z-} . Ao realizarmos uma rotação no eixo para x, por exemplo, obtemos componentes de spin deste eixo, e se tratando de polarização, é o mesmo que medir o parâmetro S_1 .

Capítulo 2

Operadores de Kraus

A realidade de um sistema físico está marcada de interações indesejadas com o mundo exterior [27], os sistemas quânticos abertos [15] e destas interações indesejadas surgem os ruídos quânticos [27, 28]. Um exemplo de ruído quântico é quando temos um elétron que tem uma determinada orientação de spin, e o mesmo interage com partículas carregadas, que por sua vez afetam o estado qubit desse elétron [27, 29]. Uma forma de estudar a dinâmica de um sistema conjunto, sistema - ambiente, é considerar que os dois formam um sistema quântico fechado e usar os operadores de Kraus [30]. Esses operadores mapeiam o estado de um subsistema, codificando o efeito do ambiente no subsistema de interesse [31]. Seu formalismo descreve mudanças discretas no tempo no sistema [29, 30]. Para uma descrição contínua no tempo, usa-se as equações mestras [14, 32, 12, 33].

O postulado da mecânica quântica sobre a dinâmica de um sistema nos diz que um sistema fechado evolui no tempo através de uma transformação unitária [15]:

$$\rho^j = \hat{U}(t, t_0) \rho \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (2.1)$$

onde \hat{U} é obtido da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = H(t) \hat{U}(t, t_0),$$

que nos leva à equação de von Neumann

$$ik \frac{\partial \rho^j}{\partial t} = [\mathbf{H}, \rho^j],$$

que fornece um conjunto de equações para cada constituinte da interação sistema-ambiente. Em nosso estudo, estamos interessados na dinâmica de um dos subsistemas, onde partindo da equação (2.1), chegaremos aos operadores que descrevem a dinâmica do subsistema de interesse.

2.1 Representação matemática dos operadores de Kraus

Considere dois sistemas formando um sistema total composto (**1 + 2**). O estado do sistema total é descrito por um espaço de Hilbert H_{12} , onde $H_{12} = H_1 \otimes H_2$, em que H_1 e H_2 são os espaços de Hilbert individuais. Suponha que, do sistema composto, queremos obter apenas informação sobre o subsistema 1. Para isso, tomemos inicialmente o operador densidade cujas correlações entre 1 e 2 ainda não ocorreram, e que o sistema 2 se encontra em um estado puro da forma:

$$\rho_{12} = \rho_1 \otimes |E_0\rangle_2 \langle E_0|_2, \quad (2.2)$$

onde $\rho_2 = |E_0\rangle_2 \langle E_0|_2$. A dinâmica para t diferente de zero é representada pelo operador de evolução temporal unitário \hat{U}_{12} , de modo que ρ_{12} será

$$\rho_{12}^t = \hat{U}_{12} (\rho_1 \otimes |E_0\rangle_2 \langle E_0|_2) \hat{U}_{12}^\dagger. \quad (2.3)$$

Estamos interessados na matriz densidade do subsistema 1, ρ_1^t . Para isso, devemos

retirar o traço sobre os estados do subsistema 2, de modo que

$$\begin{aligned}
 \rho_1^i &= \text{Tr}_2\{\widehat{U}_{12}(\rho_1 \otimes |E_0\rangle_2 \langle E_0|_2)\widehat{U}_{12}^\dagger\} \\
 \rho_1^j &= \text{Tr}_2\{\widehat{U}_{12}|E_0\rangle_2 \rho_1 \langle E_0|_2 \widehat{U}_{12}^\dagger\} \\
 \rho_1^k &= \sum_l \langle E_l|_2 \widehat{U}_{12}|E_0\rangle_2 \rho_1 \langle E_0|_2 \widehat{U}_{12}^\dagger|E_l\rangle_2,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $\{|E_l\rangle\}$ é uma base ortonormal definida no espaço de Hilbert H_2 associado ao sistema 2 [29].

Definimos então os operadores de Kraus como [14, 29]

$$K_l = \langle E_l| U_{12} |E_0\rangle. \tag{2.5}$$

Os operadores de Kraus atuam no espaço do subsistema 1. Esses operadores obedecem à condição $\sum_l K_l^\dagger K_l = I_s$ [12], (usaremos S ao tratarmos do sistema 1). I_s é o operador identidade no espaço de Hilbert H_s . Substituindo a equação (2.5) em (2.4), obtemos o operador densidade reduzida

$$\rho_1^j = \sum_l K_l \rho_1 K_l^\dagger. \tag{2.6}$$

A soma desses operadores atuando no operador densidade do subsistema 1, da origem aos mapas lineares, que levam o operador densidade 1 de uma entrada para uma saída. O ato de não nos interessarmos pelo subsistema 2, medir mas não registrar suas medidas, submete ρ_1 ao mapa [14, 29, 33, 34]

$$M(\rho_1) = \rho_1^j = \sum_l K_l \rho_1 K_l^\dagger. \tag{2.7}$$

Esse mapa linear dá origem aos canais quânticos. Os canais quânticos levam um estado de uma parte para outra que receberá o estado modificado, e os operadores de Kraus são os elementos que fazem as operações desse canal.

Propriedades do mapa linear [34]:

1 - $\rho_1^j = \rho_1^{j\dagger}$ é hermitiano;

2 - Preserva o traço: $\text{tr}(\rho_1^j) = \text{tr}(\rho_1) = \mathbf{1}$;

3 - Preserva a positividade: $(\psi | \rho_1^j | \psi)_1 \geq \mathbf{0}$.

2.1.1 Da operação unitária

Numa transformação unitária composta, cada operador unitário referente aos subsistemas terão sua base produto. Considerando que essas bases são:

$$\{|\Phi_i\rangle\}, \{|\Psi_i\rangle\} \in H_{12}, \quad (2.8)$$

cuja dimensão é a do espaço de Hilbert H_{12} . Assim, o operador unitário é representado como:

$$\hat{U} = \sum_i |\Phi_i\rangle \langle \Psi_i|. \quad (2.9)$$

Essas bases $\{|\Phi_i\rangle\}, \{|\Psi_i\rangle\}$ podem ser escritas como base produto [30]

$$\begin{aligned} |\Phi_i\rangle &= \sum_{m,n} a_{m,n} |S_m E_n\rangle, \\ |\Psi_i\rangle &= \sum_{k,l} b_{k,l} |S_k E_l\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{U} = \sum_i \sum_{m,n,k,l} a_{m,n} b_{k,l}^* |S_m E_n\rangle \langle S_k E_l|, \quad (2.10)$$

em que $k, m = \mathbf{0}, \dots, d_S - \mathbf{1}$; $l, n = \mathbf{0}, \dots, d_E - \mathbf{1}$.

2.1.2 Aplicação dos operadores de Kraus e os canais quânticos

1 - Canal defasagem

Este canal de defasagem é um tipo de canal bem real que descreve a perda de informação sem perdas de energia [33]. Consideremos a seguinte representação

$$\begin{aligned} |S_0E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|S_0\bar{E}_0\rangle + \sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle, \\ |S_1E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|S_1E_0\rangle + \sqrt{P}|S_1\bar{E}_2\rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\{S_0, S_1\}$ são os estados do sistema. Após a evolução, podemos observar que o ambiente que estava no estado inicial $|E_0\rangle$ muda para os estados $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ com probabilidade (P) e pode se manter em $|E_0\rangle$ com probabilidade $(\mathbf{1}-P)$, diferente do sistema que não sofre nenhuma transição. Do mapa acima, temos:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \sqrt{\mathbf{1}-P}|S_0E_0\rangle\langle S_0E_0| + \sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle\langle S_0E_0| \\ &+ \sqrt{\mathbf{1}-P}|S_1E_0\rangle\langle S_1E_0| + \sqrt{P}|S_1\bar{E}_2\rangle\langle S_1E_0|, \end{aligned} \quad (2.12)$$

com isso, traçando sobre os estados ambiente, o primeiro operador que encontramos é:

$$\begin{aligned} K_0 &= \langle E_0| \left(\sqrt{\mathbf{1}-P}|S_0E_0\rangle\langle S_0E_0| + \sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle\langle S_0E_0| \right) |E_0\rangle \\ &+ \langle E_0| \left(\sqrt{\mathbf{1}-P}|S_1E_0\rangle\langle S_1E_0| + \sqrt{P}|S_1\bar{E}_2\rangle\langle S_1E_0| \right) |E_0\rangle. \end{aligned}$$

ou seja,

$$K_0 = \sqrt{\mathbf{1}-P}(|S_0\rangle\langle S_0| + |S_1\rangle\langle S_1|) = \sqrt{\mathbf{1}-P}I, \quad (2.13)$$

que matricialmente é representado como:

$$K_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{1}-P} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{1}-P} \end{pmatrix}.$$

Para K_1 temos:

$$K_1 = (E_1 | (\sqrt{1-P} |S_0E_0\rangle + \sqrt{P} |S_0E_1\rangle) (S_0E_0|E_0) \\ + (E_1 | (\sqrt{1-P} |S_1E_0\rangle + \sqrt{P} |S_1E_2\rangle) (S_1E_0|E_0) ,$$

que resulta em

$$K_1 = \sqrt{P} |S_0\rangle \langle S_0|, \quad (2.14)$$

e matriz

$$K_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para K_2 temos:

$$K_2 = (E_2 | (\sqrt{1-P} |S_0E_0\rangle + \sqrt{P} |S_0E_1\rangle) (S_0E_0|E_0) \\ + (E_2 | (\sqrt{1-P} |S_1E_0\rangle + \sqrt{P} |S_1E_2\rangle) (S_1E_0|E_0) ,$$

resultando em

$$K_2 = \sqrt{P} |S_1\rangle \langle S_1|, \quad (2.15)$$

com a matriz correspondente

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{P} \end{pmatrix}$$

2 - Canal amortecimento de amplitude

Esse tipo de canal envolve a dissipação da energia, devido à influência do ambiente sobre o sistema quântico em questão [33]. Tomemos como exemplo um átomo excitado que espontaneamente perde energia e emite um fóton. O mapa da operação quântica

deste sistema é:

$$\begin{aligned} |S_0E_0\rangle &\rightarrow |S_0E_0\rangle, \\ |S_1E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P}|S_1E_0\rangle + \sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Podemos notar que $|S_0\rangle$ é o estado fundamental e $|S_1\rangle$ é o estado excitado do átomo. O sistema perde energia, vai para o nível fundamental, e o ambiente tem a probabilidade (P) de receber um fóton da transição. Da transformação unitária

$$\hat{U} = |S_0E_0\rangle\langle S_0E_0| + \sqrt{1-P}|S_1E_0\rangle\langle S_1E_0| + \sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle\langle S_1E_0|, \quad (2.17)$$

temos que os operadores de Kraus adquirem a seguinte forma:

$$K_0 = (E_0|S_0E_0\rangle\langle S_0E_0|E_0) + (E_0|\sqrt{1-P}|S_1E_0\rangle\langle S_1E_0| + \sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle\langle S_1E_0||E_0),$$

que resulta em

$$K_0 = |S_0\rangle\langle S_0| + \sqrt{1-P}|S_1\rangle\langle S_1|, \quad (2.18)$$

com a matriz correspondente

$$K_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix}.$$

Para K_1 ,

$$K_1 = (E_1|\sqrt{P}|S_0\bar{E}_1\rangle\langle S_1E_0| + \sqrt{1-P}|S_1E_0\rangle\langle S_1E_0||E_0),$$

que é

$$K_1 = \sqrt{P}|S_1\rangle\langle S_0|, \quad (2.19)$$

com a matriz equivalente

$$K_1 = \begin{bmatrix} \square & \sqrt{\square} \\ \mathbf{0} & P^{-1} \\ \square & \square \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} .$$

Capítulo 3

Decoerência e efeitos resultantes de dois tipos de ambientes

3.1 Matriz densidade, graus de coerência e polarização

Nesta seção faremos uma pequena abordagem do método utilizado por Bernardo [9] sobre a teoria da matriz densidade de unificação da polarização e coerência quântica de um conjunto de fótons, que deriva de uma abordagem clássica [35]. Essa teoria mostra como o grau de polarização de um conjunto de fótons que se propaga no espaço livre muda, e como tanto o grau de coerência quanto o de polarização do estado dos fótons interagindo com um ambiente podem desaparecer. A aplicação do método no estudo da interação com um ambiente que é a causa da decoerência é alvo desta pesquisa, onde faremos na seção 3.2 o uso do método e os detalhes da obtenção da matriz densidade para ambientes que fornecem informação sobre o estado de posição, e no caso em que este fornecimento depende da polarização dos fótons. Iniciaremos o capítulo estudando a abordagem de medida de von Neumann.

3.1.1 Decoerência e a medida de von Neumann

Segundo a interpretação de Copenhague, um observador clássico causa o colapso da função de onda. A medida é a interação entre o aparelho de medida clássico e o objeto quântico [36]. Von Neumann tentou descrever quanticamente um processo de medida, onde a interação entre um sistema qualquer com um ambiente passa a ser tratada de acordo com as leis quânticas. O ambiente fornecerá então durante a medida, as informações sobre a localização, por exemplo, de um determinado sistema.

Quando temos um estado quântico do tipo

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle, \quad (3.1)$$

onde a_i são coeficientes complexos, e $|\psi_i\rangle$ a base do espaço de Hilbert; interagindo com um ambiente, de modo que a linearidade da equação de Schrödinger permite que a combinação sistema-ambiente evolua da forma [12]

$$|\psi\rangle |e_r\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle |e_r\rangle \longrightarrow |\Psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle |e_i\rangle, \quad (3.2)$$

em que o estado $|e_r\rangle$ representa o estado preparado inicialmente antes da interação, e os estados $|e_i\rangle$ são os estados do ambiente após a interação. Essa equação representa a abordagem de medida quântica de von Neumann. Digamos que $|\psi\rangle$ se encontre em uma superposição

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle). \quad (3.3)$$

A dinâmica de interação que ocorre é:

$$|\psi_1\rangle |e_0\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle |e_1\rangle, \quad (3.4)$$

$$|\psi_2\rangle |e_0\rangle \longrightarrow |\psi_2\rangle |e_2\rangle, \quad (3.5)$$

ou seja, esse estado evoluído é [12]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)|e_0\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle|e_1\rangle + |\psi_2\rangle|e_2\rangle). \quad (3.6)$$

A partir das equações (3.2) e (3.6), podemos notar que não é possível tratar os estados do sistema separados dos estados do ambiente. Se o ambiente se encontrar no estado $|e_1\rangle$, significa que o sistema estará no estado $|\psi_1\rangle$, se se encontrar-se em $|e_2\rangle$, o sistema está no estado $|\psi_2\rangle$. Essa inseparabilidade é a característica do que conhecemos por *emaranhamento*, e ele surge durante a interação sistema-ambiente. Assim, a propriedade de coerência que os estados de $|\psi\rangle$ possuíam passa a ser compartilhada com o ambiente. O ato de medir resultante da interação do ambiente com os estados do sistema leva à perda de coerência entre os estados do sistema [12, 37]. Uma vez que, o ambiente obtém informação suficiente sobre a localização dos estados de $|\psi\rangle$, a superposição desaparece e eles se tornam bem localizados; esse processo é chamado de decoerência. A interação além de levar à decoerência das superposições entre os estados do sistema, leva também à auto seleção dos estados classicamente observados [12, 38, 39, 40]. Sendo assim, a auto seleção induzida pelo ambiente como consequência da decoerência nos leva a extrair da essência quântica a nossa percepção clássica.

A questão é que esses estados estáveis são os observados por nós. A natureza parece restringir as informações da nossa natureza humana a apenas os estados conhecidos como clássicos. É como se não importasse o caminho, sempre iremos, com nossa curiosidade (a medida), chegar no mesmo lugar. O ambiente tem assim um papel de canal de comunicação, um meio com várias cópias desses estados como ilustrado na figura 3.1. Como visto, enquanto o sistema perde coerência de fase, nós observamos cada fragmento do ambiente.

Com base nisso, a proposta é estudar a dinâmica do sistema para dois tipos de ambiente, e analisar como ela nos fornece o grau de coerência e polarização para um conjunto de fótons quando o estado dos fótons é alterado, recorrendo a matriz densidade

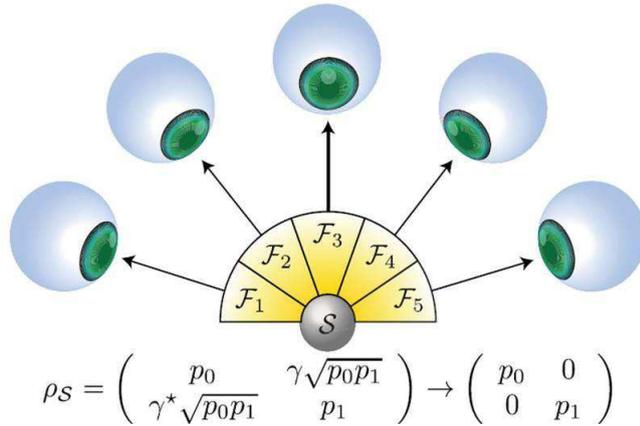


Figura 3.1: Observadores obtêm informação sobre os estados do sistema usando o monitoramento dos fragmentos do ambiente, enquanto o sistema está perdendo coerência de fase [41].

reduzida. Além disso, iremos analisar o comportamento dos parâmetros de Stokes durante a interação, onde através destes, podemos observar a dinâmica do estado de polarização dos fótons em um ponto qualquer.

3.1.2 Teoria da unificação e os graus de coerência e polarização

No experimento da dupla fenda de Young, ao passar fótons pelas aberturas (fendas), os mesmos serão detectados em uma tela, como na figura 3.2. Considerando os estados de posição de cada fóton ao passar pelas fendas B_0 e B_1 como $|\mathbf{0}\rangle$ e $|\mathbf{1}\rangle$, com $|H\rangle$ e $|V\rangle$ sendo os estados de polarização linear horizontal e vertical de cada fóton, o estado quântico puro formado sob essas condições neste experimento será:

$$|\varphi\rangle = \alpha|H, \mathbf{0}\rangle + \beta|H, \mathbf{1}\rangle + \gamma|V, \mathbf{0}\rangle + \delta|V, \mathbf{1}\rangle, \quad (3.7)$$

onde, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. Usando a representação do operador densidade para um estado puro temos

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha\gamma^* & \alpha\delta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 & \beta\gamma^* & \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* & \gamma\beta^* & |\gamma|^2 & \gamma\delta^* \\ \delta\alpha^* & \delta\beta^* & \delta\gamma^* & |\delta|^2 \end{pmatrix},$$

em que $(*)$ representa o complexo conjugado.

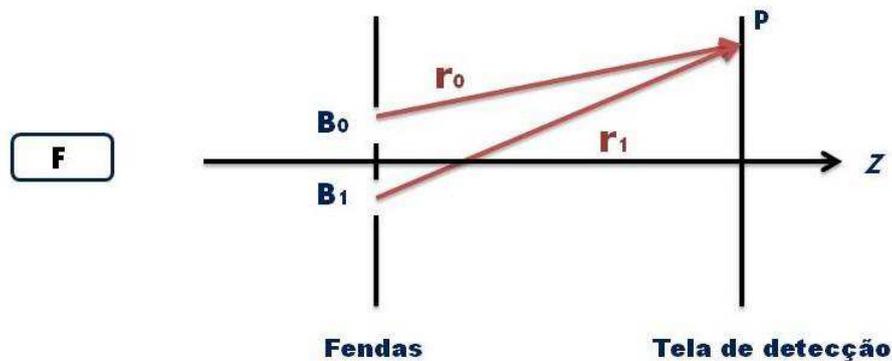


Figura 3.2: Representação ilustrativa do experimento de dupla fenda, onde um conjunto de fótons emitidos por F colidem com um anteparo contendo duas fendas B_0 e B_1 . Em seguida, serão detectados na tela de detecção, em que cada fóton terá dois caminhos possíveis: r_0 e r_1 .

A densidade de probabilidade de encontrarmos um fóton em algum ponto na tela de detecção, tendo em vista que as polarizações horizontais e verticais não interferem entre si [9], é

$$\rho(P) = (H,P|\rho|H,P) + (V,P|\rho|V,P), \quad (3.8)$$

onde $|H, \mathbf{0}\rangle$ e $|V, \mathbf{0}\rangle$ são os estados localizados em P. Se o comprimento de onda dos fótons for muito maior que a largura das fendas, as funções de onda dos fótons serão esféricas e as amplitudes de probabilidade de encontrar fótons em P, com polarização horizontal e

vertical, vindos de B_0 e B_1 serão:

$$\varphi_{H,V}^P(\mathbf{r}_0) = (H,P|H,\mathbf{0}) = (V,P|V,\mathbf{0}) = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad (3.9)$$

$$\varphi_{H,V}^P(\mathbf{r}_1) = (H,P|H,\mathbf{1}) = (V,P|V,\mathbf{1}) = \frac{e^{ikr_1}}{r_1}, \quad (3.10)$$

em que i é a unidade imaginária, k é o número de onda, r_0 e r_1 são as distâncias entre as fendas B_0 e B_1 até o ponto P , respectivamente. Substituindo as equações (3.9) e (3.10) em (3.8), a densidade de probabilidade será representada por

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{P}) = & \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_0^2} + \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_1^2} + \frac{\rho_{12}e^{ik(r_0-r_1)}}{r_0r_1} + \frac{\rho_{21}e^{ik(r_1-r_0)}}{r_1r_0} \\ & + \frac{\rho_{34}e^{ik(r_0-r_1)}}{r_0r_1} + \frac{\rho_{43}e^{ik(r_1-r_0)}}{r_1r_0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sabendo que ρ é hermitiano $\rho_{xy} = \rho_{yx}^*$ e tomando a parte real, temos

$$\rho(\mathbf{P}) = \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_0^2} + \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_1^2} + \frac{2\text{Re}[(\rho_{12} + \rho_{34})e^{ik(r_0-r_1)}]}{r_0r_1}. \quad (3.12)$$

Fechando a fenda B_1 a equação de densidade de probabilidade da equação (3.12) fica

$$\rho_0(\mathbf{P}) = \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_0^2}. \quad (3.13)$$

No caso em que B_0 estiver fechada, temos

$$\rho_1(\mathbf{P}) = \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_1^2}, \quad (3.14)$$

mostrando que as densidades de probabilidade quando temos uma das fendas fechadas são as densidades de probabilidade individuais de cada fóton ser encontrado em um ponto P . A partir de (3.13) e (3.14) podemos reescrever a equação (3.12) como

$$\rho(\mathbf{P}) = \rho_0(\mathbf{P}) + \rho_1(\mathbf{P}) + 2 \frac{\rho_0(\mathbf{P}) \rho_1(\mathbf{P}) \text{Re}[\mu e^{ik(r_0-r_1)}]}{\rho_0(\mathbf{P}) + \rho_1(\mathbf{P})}, \quad (3.15)$$

onde

$$\mu = \frac{\sqrt{\rho_{12} + \rho_{34}}}{\sqrt{\rho_{11} + \rho_{33}} \sqrt{\rho_{22} + \rho_{44}}}, \quad (3.16)$$

tratar-se do parâmetro que representa o grau de coerência¹ entre as ondas que emergem de cada fenda formando um padrão de interferência na tela de detecção, representado pelo último termo da equação (3.15). O grau de coerência possui valores entre $0 \leq \mu \leq 1$, onde o último termo da equação (3.15) representa interferência máxima quando $\mu = 1$ e sem o padrão de interferência quando $\mu = 0$. Sabemos da seção 1.4 que os parâmetros de Stokes são usados para descrever o estado de polarização da luz, e a partir deles obtemos o grau de polarização. Para encontrar o grau de polarização dos fótons [9], focamos em uma fenda de cada vez. Para os fótons vindos da fenda B_0 com a versão quântica dos parâmetros de Stokes sendo:

$$S_0^{(0)} = \text{tr}[|H, \mathbf{0}\rangle\langle H, \mathbf{0}| \rho] + \text{tr}[|V, \mathbf{0}\rangle\langle V, \mathbf{0}| \rho] = \rho_{11} + \rho_{33}, \quad (3.17)$$

$$S_1^{(0)} = \text{tr}[|H, \mathbf{0}\rangle\langle H, \mathbf{0}| \rho] - \text{tr}[|V, \mathbf{0}\rangle\langle V, \mathbf{0}| \rho] = \rho_{11} - \rho_{33}, \quad (3.18)$$

$$S_2^{(0)} = \text{tr}[|V, \mathbf{0}\rangle\langle H, \mathbf{0}| \rho] + \text{tr}[|H, \mathbf{0}\rangle\langle V, \mathbf{0}| \rho] = \rho_{31} + \rho_{13}, \quad (3.19)$$

$$S_3^{(0)} = i\{\text{tr}[|H, \mathbf{0}\rangle\langle V, \mathbf{0}| \rho] - \text{tr}[|V, \mathbf{0}\rangle\langle H, \mathbf{0}| \rho]\} = i(\rho_{13} - \rho_{31}), \quad (3.20)$$

temos que o grau de polarização desses fótons será, de acordo com a equação (1.32) dado por [9]:

$$p_0 = \frac{1}{S_0} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \frac{1}{\rho_{11} + \rho_{33}} \sqrt{4(\rho_{11}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{31})}, \quad (3.21)$$

com os possíveis valores $0 \leq p_0 \leq 1$. Para os fótons vindos da fenda B_1 , o grau de

¹Quando duas ondas luminosas se sobrepõem, os estados mantêm uma correlação entre as fases das ondas que estão associadas a cada fóton. De acordo com a interação local, essas correlações podem ser perdidas ou mantidas em um certo grau.

polarização será [9]:

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4(\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{24}\rho_{42})}{(\rho_{22} + \rho_{44})} \right). \quad (3.22)$$

Os graus de coerência e polarização desenvolvidos na teoria são válidos tanto para estados puros como para estados misturados, já que dependem dos elementos da matriz de densidade e para uma matriz densidade mista não será diferente. Essa é uma das vantagens de usar a matriz densidade, e, como vimos, a polarização e a coerência derivam de uma única abordagem quântica que é o operador densidade. Pela equação (3.7) podemos observar que toda a descrição foi feita para um estado puro. Em seu artigo, Bernardo [9] faz aplicações das equações de graus de coerência e polarização para estados misturados.

Como aplicação para o estudo da decoerência, Bernardo parte de um estado conjunto não correlacionado

$$\rho(\mathbf{0}) = \rho_s(\mathbf{0}) \otimes \rho_E(\mathbf{0}), \quad (3.23)$$

sendo $\rho_s(\mathbf{0})$ a matriz que representa o estado dos fótons e que contém todas as informações sobre a coerência e polarização (uma matriz de estado misturado)² e a matriz ρ_E uma matriz $\rho_E(\mathbf{0}) = \sum_i p_i |E_i\rangle \langle E_i|$. Do estudo sobre os operadores de Kraus no capítulo 2, vimos que dois sistemas abertos podem ser considerados como um sistema isolado. Um sistema isolado evolui de acordo com um operador de evolução unitária $\hat{U}(t)$, equação (2.1), que nos leva à equação da matriz densidade reduzida (2.6)

$$\rho_1^j = \sum_l K_l \rho_1 K_l^\dagger,$$

²O operador densidade para um estado misturado é $\rho = \sum_i p_i \rho_i$, cuja representação matricial é:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

onde K_i são os operadores de Kraus.

A interação ocorre em dois tipos de ambientes: um refrativo e o outro birrefringente.

No ambiente refrativo a transformação unitária que ocorre leva ao seguinte mapa:

$$\begin{aligned}
 |H, \mathbf{0}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|H, \mathbf{0}, E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{H}, \mathbf{0}, E_1\rangle, \\
 |H, \mathbf{1}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|H, \mathbf{1}, E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{H}, \mathbf{1}, E_2\rangle, \\
 |V, \mathbf{0}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|V, \mathbf{0}, E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{V}, \mathbf{0}, E_1\rangle, \\
 |V, \mathbf{1}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|V, \mathbf{1}, E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{V}, \mathbf{1}, E_2\rangle.
 \end{aligned}$$

O estado $|E_0\rangle$ representa o estado preparado inicialmente do ambiente. Os estados $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ são os estados em que encontramos o ambiente após a interação com os fótons vindos das fendas B_0 e B_1 . O parâmetro P é a probabilidade de encontrarmos o ambiente em um dos estados após a interação em um intervalo de tempo Δt , e $\sqrt{\mathbf{1}-P}$ é a probabilidade de não haver interação entre os fótons e o ambiente. A matriz densidade reduzida encontrada pela equação (2.6) é

$$\rho_s = \begin{bmatrix} \rho_{11} & (\mathbf{1}-P)\rho_{12} & \rho_{13} & (\mathbf{1}-P)\rho_{14} \\ (\mathbf{1}-P)\rho_{21} & \rho_{22} & (\mathbf{1}-P)\rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & (\mathbf{1}-P)\rho_{32} & \rho_{33} & (\mathbf{1}-P)\rho_{34} \\ (\mathbf{1}-P)\rho_{41} & \rho_{42} & (\mathbf{1}-P)\rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix}.$$

Assumindo que $P(t) = \Gamma \Delta t$, onde Γ é a probabilidade de haver uma interação entre um fóton e um constituinte do ambiente por unidade de tempo. Note que $P = \Gamma \Delta t \leq \mathbf{1}$ [33]. Após um tempo $t = n\Delta t$, temos que os termos $(\mathbf{1}-P)$ assumem a forma $(\mathbf{1}-P)^n = (\mathbf{1} - \Gamma t/n)^n \approx e^{-\Gamma t}$, considerando que $n \rightarrow \infty$. Assim, a matriz densidade é reescrita

como

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-\Gamma t} & \rho_{13} & \rho_{14}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{21}e^{-\Gamma t} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{31} & \rho_{32}e^{-\Gamma t} & \rho_{33} & \rho_{34}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{41}e^{-\Gamma t} & \rho_{42} & \rho_{43}e^{-\Gamma t} & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

De acordo com a equação (3.16), o grau de coerência entre os estados do sistema tem um decaimento da forma:

$$\mu(t) = \frac{(\rho_{12} + \rho_{34})e^{-\Gamma t}}{\sqrt{(\rho_{11} + \rho_{33})(\rho_{22} + \rho_{44})}} = \mu(\mathbf{0})e^{-\Gamma t}. \quad (3.25)$$

O tipo de ambiente refrativo não perturba o grau de polarização, apenas as fases relativas entre os estados de posição dos fótons com relação às fendas B₀ e B₁ [9].

O outro tipo de ambiente que consideraremos aqui é o birrefringente. Esse tipo de ambiente perturba o sistema de modo que as mudanças de fase dependerão das polarizações. O mapa da interação entre o sistema e o ambiente tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} |H, \mathbf{0}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P}|H, \mathbf{0}, E_0\rangle + \sqrt{P}|H, \mathbf{0}, \bar{E}_1\rangle, \\ |H, \mathbf{1}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P}|H, \mathbf{1}, E_0\rangle + \sqrt{P}|H, \mathbf{1}, \bar{E}_2\rangle, \\ |V, \mathbf{0}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P}|V, \mathbf{0}, E_0\rangle + \sqrt{P}|V, \mathbf{0}, \bar{E}_3\rangle, \\ |V, \mathbf{1}, E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P}|V, \mathbf{1}, E_0\rangle + \sqrt{P}|V, \mathbf{1}, \bar{E}_4\rangle. \end{aligned}$$

Procedendo de forma similar ao caso anterior, temos que a matriz densidade reduzida encontrada fica

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-\Gamma t} & \rho_{13}e^{-\Gamma t} & \rho_{14}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{21}e^{-\Gamma t} & \rho_{22} & \rho_{23}e^{-\Gamma t} & \rho_{24}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{31}e^{-\Gamma t} & \rho_{32}e^{-\Gamma t} & \rho_{33} & \rho_{34}e^{-\Gamma t} \\ \rho_{41}e^{-\Gamma t} & \rho_{42}e^{-\Gamma t} & \rho_{43}e^{-\Gamma t} & \rho_{44} \end{pmatrix}.$$

Assim como o grau de coerência que será $\mu(t) = \mu(\mathbf{0})e^{-\Gamma t}$, os graus de polarização,

equações (3.21) e (3.22) também decaem no tempo sob a forma:

$$p_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{4(\rho_{11}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{31}e^{-2\Gamma t})}{(\rho_{11} + \rho_{33})^2} \right], \quad (3.26)$$

e

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{4(\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{24}\rho_{42}e^{-2\Gamma t})}{(\rho_{22} + \rho_{44})^2} \right]. \quad (3.27)$$

A partir da teoria da matriz de unificação, de uma forma simples podemos obter os graus de coerência e polarização para a evolução temporal da matriz densidade do sistema que representa os fótons.

3.2 Aplicação do método de unificação no estudo da decoerência

A partir de agora veremos detalhadamente uma aplicação da matriz de unificação para um ambiente que interage com o sistema causando mudanças nas fases entre os estados dos fótons, e também quando essa mudança depende do estado de polarização dos fótons. Logo em seguida, observaremos o comportamento do estado de polarização dos fótons através dos parâmetros de Stokes.

3.2.1 Decoerência e mudanças de fases aleatórias

Como vimos anteriormente, o ambiente codifica informações sobre os estados do sistema. Suponhamos que o conjunto de fótons se propague em um ambiente formado por partículas distribuídas, por exemplo, as impurezas em uma fibra ótica [42]. Como consequência, essas partículas alteram as fases entre os estados dos fótons emergentes das posições **0** e **1** de forma aleatória e descorrelacionada durante a transmissão, devido ao espalhamento contínuo na propagação dos fótons nesse tipo de ambiente. Cada interação

é representada por uma transformação unitária modificando os estados do ambiente como segue no mapa abaixo:

$$\begin{aligned}
|H, \mathbf{0}\rangle|E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|H, \mathbf{0}\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{H}, \mathbf{1}\rangle|E_1\rangle, \\
|H, \mathbf{1}\rangle|E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|H, \mathbf{1}\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{H}, \mathbf{0}\rangle|E_2\rangle, \\
|V, \mathbf{0}\rangle|E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|V, \mathbf{0}\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{V}, \mathbf{1}\rangle|E_1\rangle, \\
|V, \mathbf{1}\rangle|E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1}-P}|V, \mathbf{1}\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|\bar{V}, \mathbf{0}\rangle|E_2\rangle,
\end{aligned}$$

onde as modificações sofridas pelo estado do ambiente dependem apenas das correlações entre os estados dos fótons, mudando para $|E_1\rangle$ se os fótons emergem da posição $\mathbf{0}$ e para $|E_2\rangle$ se eles emergem da posição $\mathbf{1}$. Como consequência da colisão com as partículas do ambiente, o estado de localização dos fótons muda de $\mathbf{0}$ para $\mathbf{1}$, vindos de $\mathbf{0}$, e de $\mathbf{1}$ para $\mathbf{0}$, os vindos da posição $\mathbf{1}$. O parâmetro P é a probabilidade de que essas mudanças ocorram nos estados do ambiente; todavia, pode não ocorrer mudanças e o ambiente se manter em $|E_0\rangle$ com probabilidade $(\mathbf{1}-P)$.

Pela equação (2.5), encontramos três operadores de Kraus:

$$K_0 = \sqrt{\mathbf{1}-P}(|H, \mathbf{0}\rangle\langle H, \mathbf{0}| + |H, \mathbf{1}\rangle\langle H, \mathbf{1}| + |V, \mathbf{0}\rangle\langle V, \mathbf{0}| + |V, \mathbf{1}\rangle\langle V, \mathbf{1}|), \quad (3.28)$$

$$K_1 = \sqrt{P}(|\bar{H}, \mathbf{1}\rangle\langle H, \mathbf{0}| + |\bar{V}, \mathbf{1}\rangle\langle V, \mathbf{0}|), \quad (3.29)$$

$$K_2 = \sqrt{P}(|\bar{H}, \mathbf{0}\rangle\langle H, \mathbf{1}| + |\bar{V}, \mathbf{0}\rangle\langle V, \mathbf{1}|), \quad (3.30)$$

de acordo com o cálculo no apêndice A. Substituindo na equação (2.6), resulta na matriz densidade reduzida

$$\hat{\rho}_s = \begin{bmatrix}
(\mathbf{1}-P)\rho_{11} + P\rho_{22} & (\mathbf{1}-P)\rho_{12} & (\mathbf{1}-P)\rho_{13} + P\rho_{24} & (\mathbf{1}-P)\rho_{14} \\
(\mathbf{1}-P)\rho_{21} & (\mathbf{1}-P)\rho_{22} + P\rho_{11} & (\mathbf{1}-P)\rho_{23} & (\mathbf{1}-P)\rho_{24} + P\rho_{13} \\
(\mathbf{1}-P)\rho_{31} + P\rho_{42} & (\mathbf{1}-P)\rho_{32} & (\mathbf{1}-P)\rho_{33} + P\rho_{44} & (\mathbf{1}-P)\rho_{34} \\
(\mathbf{1}-P)\rho_{41} & (\mathbf{1}-P)\rho_{42} + P\rho_{31} & (\mathbf{1}-P)\rho_{43} & (\mathbf{1}-P)\rho_{44} + P\rho_{33}
\end{bmatrix}.$$

Para um intervalo de tempo Δt , os elementos da matriz densidade anterior decaem na forma

$$\hat{\rho}_s = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t} \rho_{11} + s \rho_{22} & e^{-\Gamma t} \rho_{12} & e^{-\Gamma t} \rho_{13} + s \rho_{24} & e^{-\Gamma t} \rho_{14} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{21} & e^{-\Gamma t} \rho_{11} + s \rho_{22} & e^{-\Gamma t} \rho_{23} & e^{-\Gamma t} \rho_{24} + s \rho_{13} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{31} + s \rho_{42} & e^{-\Gamma t} \rho_{32} & e^{-\Gamma t} \rho_{33} + s \rho_{44} & e^{-\Gamma t} \rho_{34} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{41} & e^{-\Gamma t} \rho_{42} + s \rho_{31} & e^{-\Gamma t} \rho_{43} & e^{-\Gamma t} \rho_{44} + s \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

onde o símbolo s representa $(\mathbf{1} - e^{-\Gamma t})$.

Podemos notar que após várias interações, a probabilidade $(\mathbf{1}-P)$ acaba se tornando $(\mathbf{1}-P)^n$ e isso implica que, durante a dinâmica, fica inevitável que o ambiente não codifique toda a informação necessária sobre a localidade dos estados dos fótons, exceto para os termos da diagonal principal que são os estados que se mantem balanceados durante as interações, o que representa a conservação do número de fótons durante a propagação. Todos os termos de superposição evoluem para uma mistura de estados incoerentes [43].

O grau de coerência, equação (3.16), será:

$$\mu(t) = \frac{(\rho_{12} + \rho_{34})e^{-\Gamma t}}{\rho_{11}e^{-\Gamma t} + s\rho_{22} + \rho_{33}e^{-\Gamma t} + s\rho_{44} \quad \rho_{22}e^{-\Gamma t} + s\rho_{11} + \rho_{44}e^{-\Gamma t} + s\rho_{33}}, \quad (3.32)$$

que tende a zero, significando a perda da visibilidade do padrão de interferência.

3.2.2 Decoerência, despolarização e ambiente

Analisaremos aqui quando a interação entre os fótons e as partículas do ambiente causam mudanças aleatórias locais nas fases dos estados dos fótons durante o espalhamento, e estas mudanças, considerando que o ambiente é birrefringente, cada uma dependerá do estado de polarização $|H\rangle$ e $|V\rangle$ que os fótons possuem, de modo que a

transformação unitária nos fornece o seguinte mapa:

$$\begin{aligned}
 |H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |H, \mathbf{1}\rangle |E_1\rangle, \\
 |H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |H, \mathbf{0}\rangle |E_2\rangle, \\
 |V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |V, \mathbf{1}\rangle |E_3\rangle, \\
 |V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |V, \mathbf{0}\rangle |E_4\rangle,
 \end{aligned}$$

onde temos $(\mathbf{1} - P)$ novamente como a probabilidade de não interagir e P de ocorrer interação. A partir da equação (2.5), encontramos 5 operadores de Kraus:

$$K_0 = \sqrt{\mathbf{1} - P} (|H, \mathbf{0}\rangle \langle H, \mathbf{0}| + |H, \mathbf{1}\rangle \langle H, \mathbf{1}| + |V, \mathbf{0}\rangle \langle V, \mathbf{0}| + |V, \mathbf{1}\rangle \langle V, \mathbf{1}|), \quad (3.33)$$

$$K_1 = \sqrt{P} |H, \mathbf{1}\rangle \langle H, \mathbf{0}|, \quad (3.34)$$

$$K_2 = \sqrt{P} |H, \mathbf{0}\rangle \langle H, \mathbf{1}|, \quad (3.35)$$

$$K_3 = \sqrt{P} |V, \mathbf{1}\rangle \langle V, \mathbf{0}|, \quad (3.36)$$

$$K_4 = \sqrt{P} |V, \mathbf{0}\rangle \langle V, \mathbf{1}| \quad (3.37)$$

que ao serem substituídos na (2.6) nos fornece

$$\hat{\rho}_s = \begin{pmatrix}
 (\mathbf{1} - P)\rho_{11} + P\rho_{22} & (\mathbf{1} - P)\rho_{12} & (\mathbf{1} - P)\rho_{13} & (\mathbf{1} - P)\rho_{14} \\
 (\mathbf{1} - P)\rho_{21} & (\mathbf{1} - P)\rho_{22} + P\rho_{11} & (\mathbf{1} - P)\rho_{23} & (\mathbf{1} - P)\rho_{24} + P\rho_{14} \\
 (\mathbf{1} - P)\rho_{31} & (\mathbf{1} - P)\rho_{32} & (\mathbf{1} - P)\rho_{33} + P\rho_{44} & (\mathbf{1} - P)\rho_{34} \\
 (\mathbf{1} - P)\rho_{41} & (\mathbf{1} - P)\rho_{42} & (\mathbf{1} - P)\rho_{43} & (\mathbf{1} - P)\rho_{44} + P\rho_{33}
 \end{pmatrix}.$$

Para várias interações, a matriz de densidade evoluída fica

$$\hat{\rho}_s = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t} \rho_{11} + s\rho_{22} & e^{-\Gamma t} \rho_{12} & e^{-\Gamma t} \rho_{13} & e^{-\Gamma t} \rho_{14} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{21} & e^{-\Gamma t} \rho_{22} + s\rho_{11} & e^{-\Gamma t} \rho_{23} & e^{-\Gamma t} \rho_{24} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{31} & e^{-\Gamma t} \rho_{32} & e^{-\Gamma t} \rho_{33} + s\rho_{44} & e^{-\Gamma t} \rho_{34} \\ e^{-\Gamma t} \rho_{41} & e^{-\Gamma t} \rho_{42} & e^{-\Gamma t} \rho_{43} & e^{-\Gamma t} \rho_{44} + s\rho_{33} \end{pmatrix}.$$

O grau de coerência é igual ao da equação (3.32), causando a destruição da visibilidade do padrão de interferência. Além de causar mudanças aleatórias nas fases, essas mudanças dependem da polarização dos fótons. Assim, os graus de polarização para cada fóton emergente das posições 0 e 1, das equações (3.21) e (3.22), decairão sob a forma

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{4[(\rho_{11}e^{-\Gamma t} + s\rho_{22}) \cdot (\rho_{33}e^{-\Gamma t} + s\rho_{44}) - (\rho_{13}\rho_{31})e^{-\Gamma t}](s\rho_{22} + s\rho_{44} + \rho_{11}e^{-\Gamma t} + \rho_{33}e^{-\Gamma t})^2}{s\rho_{44} + \rho_{11}e^{-\Gamma t} + \rho_{33}e^{-\Gamma t}} \right], \quad (3.38)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{4[(\rho_{22}e^{-\Gamma t} + s\rho_{11}) \cdot (\rho_{44}e^{-\Gamma t} + s\rho_{33}) - (\rho_{24}\rho_{42})e^{-\Gamma t}](s\rho_{11} + s\rho_{33} + \rho_{22}e^{-\Gamma t} + \rho_{44}e^{-\Gamma t})^2}{s\rho_{33} + \rho_{22}e^{-\Gamma t} + \rho_{44}e^{-\Gamma t}} \right]. \quad (3.39)$$

Observemos agora como o estado de polarização se comporta durante a evolução do operador densidade reduzida. Pelas equações (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20), temos que a dinâmica dos parâmetros de Stokes possui a seguinte forma:

$$S_0^{(0)} = \rho_{11} + \rho_{33} = (\rho_{11}e^{-\Gamma t} + s\rho_{22}) + (\rho_{33}e^{-\Gamma t} + s\rho_{44}), \quad (3.40)$$

$$S_1^{(0)} = \rho_{11} - \rho_{33} = (\rho_{11}e^{-\Gamma t} + s\rho_{22}) - (\rho_{33}e^{-\Gamma t} + s\rho_{44}), \quad (3.41)$$

$$S_2^{(0)} = e^{-\Gamma t} \rho_{31} + e^{-\Gamma t} \rho_{13}, \quad (3.42)$$

$$S_3^{(0)} = i(e^{-\Gamma t} \rho_{31} - e^{-\Gamma t} \rho_{13}), \quad (3.43)$$

A figura 3.3 mostra o decaimento exponencial do parâmetro S_2 dos fótons vindos de **0**, considerando que os mesmos possuem um estado de polarização inicial diagonal. Os outros parâmetros não apresentam esse comportamento. Esse estado preparado inicial-

mente na diagonal não possibilita valores não nulos de polarização horizontal ou vertical, ou circulares, que são quantificados por S_1 e S_3 , e a intensidade S_0 de acordo com a figura 3.4, se mantém constante durante as medidas (existe uma conservação do número de fótons durante a propagação). Assim, pela relação (1.31), temos inicialmente que o estado é polarizado com a igualdade satisfeita, que pode ser também observada claramente pelos gráficos, e que durante as interações o parâmetro S_2 indica que o grau de polarização decai.

O comportamento dos observáveis que representam o estado de polarização dos fótons, mostra que o estado evoluirá para um estado despolarizado.

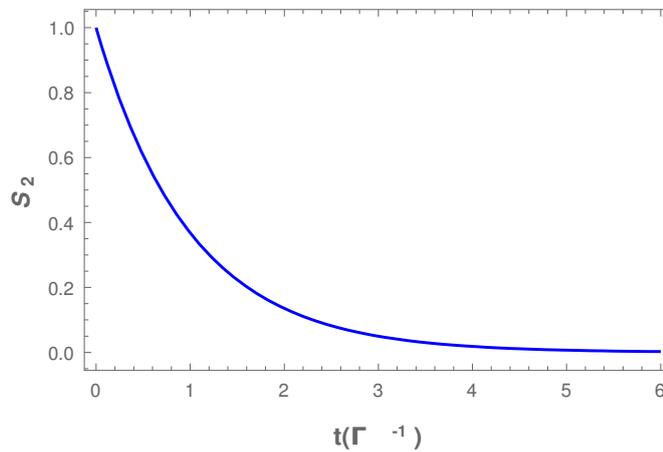


Figura 3.3: Evolução do parâmetro S_2 , que durante a evolução da matriz densidade reduzida decai exponencialmente.

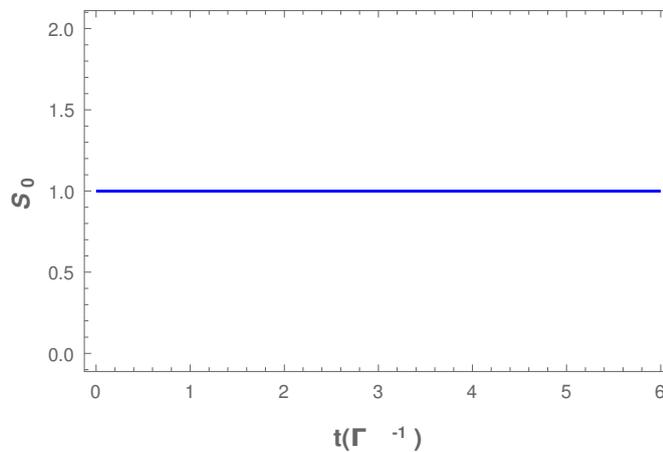


Figura 3.4: Evolução do parâmetro S_0 , que se mantém constante durante a evolução da matriz densidade reduzida.

Capítulo 4

Conclusão

Tendo em vista que o que diferencia os mundos quântico e clássico seja principalmente a existência da superposição de estados, notamos que o que é clássico surge da essência quântica, e a questão da não observabilidade de um padrão de interferência de um sistema macroscópico provém do quanto o ambiente está codificando as informações desse sistema, ou seja, do quanto o ambiente perturba os estados do sistema. Podemos notar que é irreversível a perda do grau de coerência devido à interação, e isso não requer um observador clássico, como sugere a interpretação de Copenhague, onde o observador macroscópico causa o colapso da função de onda. Nos casos aqui considerados, as interações que ocorrem entre o sistema e o ambiente redistribuem a coerência contida inicialmente apenas no sistema para que façam parte também dos estados do ambiente. Esse processo, que para muitos corpos é quase inevitável, destrói o grau de coerência quando olhamos apenas para o sistema; fato que promove o surgimento do mundo clássico como o conhecemos.

A decoerência é um processo irreversível [12], e dependendo dos canais de interação, teremos influência no grau de polarização, implicando uma correlação entre essas duas propriedades. No primeiro ambiente, onde nos restringimos a apenas mudanças na coerência da fase, o estado de polarização se mantém polarizado e com polarização diagonal. Por um lado, nós mantemos o grau de polarização. No entanto, o número de interações

é proporcional ao tempo, então, a superposição evoluiu para um estado incoerente. No segundo ambiente, tanto o grau de polarização quanto o de coerência sofrem modificações devido às características do ambiente, e isso nos leva a observar a influência do ambiente no grau de polarização. No caso em que codificamos informação na polarização dos fótons, esse estudo revela de forma simples que tipos de ambientes precisam ser evitados no processamento e na transmissão da informação quântica.

Apêndice A

Matriz densidade reduzida e ambientes

A.1 Obtenção dos operadores de Kraus da seção 3.2

O mapa linear

$$\begin{aligned} |H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P} |H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\bar{H}, \mathbf{1}\rangle |E_1\rangle, \\ |H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P} |H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\bar{H}, \mathbf{0}\rangle |E_2\rangle, \\ |V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P} |V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\bar{V}, \mathbf{1}\rangle |E_1\rangle, \\ |V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle &\rightarrow \sqrt{1-P} |V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |\bar{V}, \mathbf{0}\rangle |E_2\rangle, \end{aligned}$$

é regrado pela seguinte operação unitária:

$$\begin{aligned} \hat{U} = & \sqrt{1-P} (|H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle \langle H, \mathbf{0}| \langle E_0|) + \sqrt{P} (|\bar{H}, \mathbf{1}\rangle |E_1\rangle \langle H, \mathbf{0}| \langle E_0|) \\ & + \sqrt{1-P} (|H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle \langle H, \mathbf{1}| \langle E_0|) + \sqrt{P} (|\bar{H}, \mathbf{0}\rangle |E_2\rangle \langle H, \mathbf{1}| \langle E_0|) \\ & + \sqrt{1-P} (|V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle \langle V, \mathbf{0}| \langle E_0|) + \sqrt{P} (|\bar{V}, \mathbf{1}\rangle |E_1\rangle \langle V, \mathbf{0}| \langle E_0|) \\ & + \sqrt{1-P} (|V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle \langle V, \mathbf{1}| \langle E_0|) + \sqrt{P} (|\bar{V}, \mathbf{0}\rangle |E_2\rangle \langle V, \mathbf{1}| \langle E_0|), \end{aligned}$$

que nos fornece os operadores de Kraus de acordo com a equação (2.5)

$$\begin{aligned}
 K_0 &= (E_0 | \sqrt{1-P} |\overline{H}, \mathbf{0}\rangle | E_0 \rangle (H, \mathbf{0} | (E_0 |) | E_0 \rangle + (E_0 | \sqrt{1-P} |\overline{H}, \mathbf{1}\rangle | E_0 \rangle (H, \mathbf{1} | (E_0 |) | E_0 \rangle \\
 &\quad + (E_0 | \sqrt{1-P} |\overline{V}, \mathbf{0}\rangle | E_0 \rangle (V, \mathbf{0} | (E_0 |) | E_0 \rangle + (E_0 | \sqrt{1-P} |\overline{V}, \mathbf{1}\rangle | E_0 \rangle (V, \mathbf{1} | (E_0 |) | E_0 \rangle), \\
 K_1 &= (E_1 | \sqrt{P} |\overline{H}, \mathbf{1}\rangle | E_1 \rangle (H, \mathbf{0} | (E_0 | + \sqrt{P} |\overline{V}, \mathbf{1}\rangle | E_1 \rangle (V, \mathbf{0} | (E_0 |) | E_0 \rangle), \\
 K_2 &= (E_2 | \sqrt{P} |\overline{H}, \mathbf{0}\rangle | E_2 \rangle (H, \mathbf{1} | (E_0 | + \sqrt{P} |\overline{V}, \mathbf{0}\rangle | E_2 \rangle (V, \mathbf{1} | (E_0 |) | E_0 \rangle).
 \end{aligned}$$

As equações anteriores podem ser representadas também como

$$K_0 = \sqrt{1-P} (|\overline{H}, \mathbf{0}\rangle (H, \mathbf{0} | + |H, \mathbf{1}\rangle (H, \mathbf{1} | + |V, \mathbf{0}\rangle (V, \mathbf{0} | + |V, \mathbf{1}\rangle (V, \mathbf{1} |), \quad (\text{A.1})$$

$$K_1 = \sqrt{P} (|\overline{H}, \mathbf{1}\rangle (H, \mathbf{0} | + |V, \mathbf{1}\rangle (V, \mathbf{0} |), \quad (\text{A.2})$$

$$K_2 = \sqrt{P} (|\overline{H}, \mathbf{0}\rangle (H, \mathbf{1} | + |V, \mathbf{0}\rangle (V, \mathbf{1} |). \quad (\text{A.3})$$

Para obter as matrizes dos operadores de Kraus, consideremos

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} | \mathbf{1} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{1} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{1} \rangle & | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{1} \rangle \end{matrix} \\
 |H, \mathbf{0}\rangle &= \begin{matrix} | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \end{matrix}, |H, \mathbf{1}\rangle = \begin{matrix} | \mathbf{1} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \end{matrix}, |V, \mathbf{0}\rangle = \begin{matrix} | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{1} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \end{matrix}, |V, \mathbf{1}\rangle = \begin{matrix} | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{0} \rangle \\ | \mathbf{1} \rangle \end{matrix}, \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

com as respectivas representações duais,

$$\langle H, \mathbf{0} | = \begin{matrix} - & \Sigma & - & \Sigma \\ | \mathbf{1} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle \end{matrix}, \langle H, \mathbf{1} | = \begin{matrix} - & \Sigma & - & \Sigma \\ | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{1} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle \end{matrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\langle V, \mathbf{0} | = \begin{matrix} - & \Sigma & - & \Sigma \\ | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{1} \rangle & | \mathbf{0} \rangle \end{matrix}, \langle V, \mathbf{1} | = \begin{matrix} - & \Sigma & - & \Sigma \\ | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{0} \rangle & | \mathbf{1} \rangle \end{matrix}. \quad (\text{A.6})$$

Com isso, as matrizes de cada operador acima são:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \sqrt{1-P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \\ \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-P} + \sqrt{P} & \sqrt{1-P} \\ \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1-P} \\ \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

onde I é a matriz identidade. Temos também que

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \sqrt{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{1-P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{P} & \sqrt{P} \\ \sqrt{P} & \sqrt{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{1-P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{P} + \sqrt{1-P} & \sqrt{P} \\ \sqrt{P} & \sqrt{P} \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{P} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1-P} & 1 \\ \sqrt{1-P} & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

e

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \sqrt{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{1-P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \\ \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sqrt{P} + \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \\ \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{P} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \\ \sqrt{1-P} & \sqrt{1-P} \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Substituindo esses ingredientes nas equações (2.6), temos

$$\begin{aligned}
 \rho_s = & \sqrt{(\mathbf{1} - P)^2} (I \cdot \rho \cdot I^\dagger) + \sqrt{P^2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\
 & \sqrt{P^2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

Efetuada a multiplicação entre as matrizes, encontramos

$$\hat{\rho}_s = \begin{bmatrix} (\mathbf{1} - P)\rho_{11} + P\rho_{22} & (\mathbf{1} - P)\rho_{12} & (\mathbf{1} - P)\rho_{13} + P\rho_{24} & (\mathbf{1} - P)\rho_{14} \\ (\mathbf{1} - P)\rho_{21} & (\mathbf{1} - P)\rho_{22} + P\rho_{11} & (\mathbf{1} - P)\rho_{23} & (\mathbf{1} - P)\rho_{24} + P\rho_{13} \\ (\mathbf{1} - P)\rho_{31} + P\rho_{42} & (\mathbf{1} - P)\rho_{32} & (\mathbf{1} - P)\rho_{33} + P\rho_{44} & (\mathbf{1} - P)\rho_{34} \\ (\mathbf{1} - P)\rho_{41} & (\mathbf{1} - P)\rho_{42} + P\rho_{31} & (\mathbf{1} - P)\rho_{43} & (\mathbf{1} - P)\rho_{44} + P\rho_{33} \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora o segundo mapa, cuja forma é

$$\begin{aligned}
 |H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle & \rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |H, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |H, \mathbf{1}\rangle |E_1\rangle, \\
 |H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle & \rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |H, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |H, \mathbf{0}\rangle |E_2\rangle, \\
 |V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle & \rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |V, \mathbf{0}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |V, \mathbf{1}\rangle |E_3\rangle, \\
 |V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle & \rightarrow \sqrt{\mathbf{1} - P} |V, \mathbf{1}\rangle |E_0\rangle + \sqrt{P} |V, \mathbf{0}\rangle |E_4\rangle,
 \end{aligned}$$

e cuja transformação unitária é tal que

$$\begin{aligned} \hat{U} = & \sqrt{1 - P(|H, \mathbf{0}| | E_0)} (H, \mathbf{0} | (E_0)) + \sqrt{P(|H, \mathbf{1}| | E_1)} (H, \mathbf{0} | (E_0)) \\ & + \sqrt{1 - P(|H, \mathbf{1}| | E_0)} (H, \mathbf{1} | (E_0)) + \sqrt{P(|H, \mathbf{0}| | E_2)} (H, \mathbf{1} | (E_0)) \\ & + \sqrt{1 - P(|V, \mathbf{0}| | E_0)} (V, \mathbf{0} | (E_0)) + \sqrt{P(|V, \mathbf{1}| | E_3)} (V, \mathbf{0} | (E_0)) \\ & + \sqrt{1 - P(|V, \mathbf{1}| | E_0)} (V, \mathbf{1} | (E_0)) + \sqrt{P(|V, \mathbf{0}| | E_4)} (V, \mathbf{1} | (E_0)). \end{aligned}$$

A partir da equação (2.5), nós encontramos os respectivos operadores de Kraus,

$$\begin{aligned} K_0 = & (E_0 | \sqrt{1 - P(|H, \mathbf{0}| | E_0)} (H, \mathbf{0} | (E_0)) | E_0) + (E_0 | \sqrt{1 - P(|H, \mathbf{1}| | E_0)} (H, \mathbf{1} | (E_0)) | E_0) \\ & + (E_0 | \sqrt{1 - P(|V, \mathbf{0}| | E_0)} (V, \mathbf{0} | (E_0)) | E_0) + (E_0 | \sqrt{1 - P(|V, \mathbf{1}| | E_0)} (V, \mathbf{1} | (E_0)) | E_0), \quad K_1 = (E_1 | \\ & \sqrt{P(|H, \mathbf{1}| | E_1)} (\overline{H, \mathbf{0}} | (E_0)) | E_0), \\ K_2 = & (E_2 | \sqrt{P(|\overline{H, \mathbf{0}}| | E_2)} (H, \mathbf{1} | (E_0)) | E_0), \\ K_3 = & (E_3 | \sqrt{P(|\overline{V, \mathbf{1}}| | E_3)} (V, \mathbf{0} | (E_0)) | E_0), \\ K_4 = & (E_4 | \sqrt{P(|\overline{V, \mathbf{0}}| | E_4)} (V, \mathbf{1} | (E_0)) | E_0), \end{aligned}$$

que resultam em

$$\begin{aligned} K_0 = & \sqrt{1 - P(|H, \mathbf{0}|)} (H, \mathbf{0} | + |H, \mathbf{1}|) (H, \mathbf{1} | + |V, \mathbf{0}|) (V, \mathbf{0} | + |V, \mathbf{1}|) (V, \mathbf{1} |), \quad K_1 = \\ & \sqrt{P(|H, \mathbf{1}|)} (\overline{H, \mathbf{0}} |), \\ K_2 = & \sqrt{P(|H, \mathbf{0}|)} (H, \mathbf{1} |), \\ K_3 = & \sqrt{P(|\overline{V, \mathbf{1}}|)} (V, \mathbf{0} |), \\ K_4 = & \sqrt{P(|\overline{V, \mathbf{0}}|)} (V, \mathbf{1} |). \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na equação (2.6), e seguindo os passos descritos anteriormente, nós encontramos a matriz

$$\hat{\rho}_s = \begin{pmatrix} (\mathbf{1} - P)\rho_{11} + P\rho_{22} & (\mathbf{1} - P)\rho_{12} & (\mathbf{1} - P)\rho_{13} & (\mathbf{1} - P)\rho_{14} \\ (\mathbf{1} - P)\rho_{21} & (\mathbf{1} - P)\rho_{22} + P\rho_{11} & (\mathbf{1} - P)\rho_{23} & (\mathbf{1} - P)\rho_{24} + P\rho_{14} \\ (\mathbf{1} - P)\rho_{31} & (\mathbf{1} - P)\rho_{32} & (\mathbf{1} - P)\rho_{33} + P\rho_{44} & (\mathbf{1} - P)\rho_{34} \\ (\mathbf{1} - P)\rho_{41} & (\mathbf{1} - P)\rho_{42} & (\mathbf{1} - P)\rho_{43} & (\mathbf{1} - P)\rho_{44} + P\rho_{33} \end{pmatrix}$$

Bibliografia

- [1]B. V. d. C. Silva, “Controvérsias sobre a natureza da luz: uma aplicação didática,” Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.
- [2]D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, “Fundamentos de física: Volume 4: Óptica e física moderna. 9ª edição,” 2012.
- [3]M. Nussenzveig, “Física básica: ótica, relatividade e física quântica,” 2002.
- [4]R. M. Eisberg, R. Resnick, L. Cota Araiza, *et al.*, *Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas*. 1994.
- [5]M. d. O. T. Cunha, “Noções de informação quântica,” 2012.
- [6]B. Schumacher, “Quantum coding,” *Physical Review A*, vol. 51, no. 4, p. 2738, 1995.
- [7]L. Davidovich, “Os quanta de luz e a ótica quântica,” *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, vol. 37, no. 4, 2015.
- [8]D. F. James, “Change of polarization of light beams on propagation in free space,” *JOSA A*, vol. 11, no. 5, p. 1641, 1994.
- [9]B. de Lima Bernardo, “Unified quantum density matrix description of coherence and polarization,” *Physics Letters A*, vol. 381, no. 28, p. 2239, 2017.
- [10]G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of quantum computation and information: Volume I: Basic Concepts*. World Scientific Publishing.

- [11]M. Fox, *Quantum optics: an introduction*, vol. 15. OUP Oxford, 2006.
- [12]M. A. Schlosshauer, *Decoherence: and the quantum-to-classical transition*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13]J. Sakurai and J. Napolitano, *Mecânica Quântica Moderna*. bookman, 2013.
- [14]A. Ableitinger, R. Bertlmann, K. Durstberger, B. Hiesmayr, and P. Krammer, “Decoherence of open quantum systems,” 2008.
- [15]H.-P. Breuer, F. Petruccione, *et al.*, *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [16]A. de Toledo Piza, “Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, sistemas quânticos abertos e decoerência,” *Notas de aula, Escola de Física Teórica-USP*, 2009.
- [17]R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, vol. 1. Basic books, 2011.
- [18]G. A. Baym, “Lectures on quantum mechanics,” 1969.
- [19]L. Feynman and R. B. Leighton, “Sands, the feynman lectures on physics vol. 3,” 1964.
- [20]D. H. Goldstein, *Polarized Light, revised and expanded*. CRC press, 2003.
- [21]M. Walker, “Matrix calculus and the stokes parameters of polarized radiation,” *American Journal of Physics*, vol. 22, no. 4, p. 170, 1954.
- [22]G. G. Stokes, “On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources,” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 9, p. 399, 1851.
- [23]O. Korotkova and E. Wolf, “Generalized stokes parameters of random electromagnetic beams,” *Optics Letters*, vol. 30, no. 2, p. 198, 2005.

- [24]Y. Zhou, Z. He, and S. Sato, “A novel method for determining the cell thickness and twist angle of a twisted nematic cell by stokes parameter measurement,” *Japanese journal of applied physics*, vol. 36, no. 5R, p. 2760, 1997.
- [25]R. W. Schmieder, “Stokes-algebra formalism,” *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, vol. 59, p. 297, 1969.
- [26]J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey, and P. G. Kwiat, “Photonic state tomography,” *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 52, p. 105, 2005.
- [27]R. B. Griffiths, “Quantum channels, kraus operators, povms,” *Quantum Computation and Quantum Information Theory Course Notes, Carnegie Mellon University (Spring 2010)*, 2010.
- [28]L. Viola and S. Lloyd, “Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems,” *Physical Review A*, vol. 58, no. 4, p. 2733, 1998.
- [29]M. A. Nielsen and I. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2002.
- [30]J. Maziero, “The kraus representation for the dynamics of open quantum systems,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, no. 2, 2016.
- [31]S. Omkar, R. Srikanth, and S. Banerjee, “The operator-sum-difference representation of a quantum noise channel,” *Quantum Information Processing*, vol. 14, no. 6, p. 2255, 2015.
- [32]P. Štelmachovič and V. Bužek, “Dynamics of open quantum systems initially entangled with environment: Beyond the kraus representation,” *Physical Review A*, vol. 64, no. 6, p. 062106, 2001.
- [33]J. Preskill, “Lecture notes for ph219/cs219: Quantum information chapter 3,” 2015.

- [34]G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of quantum computation and information: Volume II: Basic Tools and Special Topics*. World Scientific, 2007.
- [35]E. Wolf, “Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams,” *Physics letters A*, vol. 312, no. 5-6, p. 263, 2003.
- [36]N. P. Neto, *Teorias e interpretações da mecânica quântica*. Editora Livraria da Física, 2010.
- [37]E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. J. Giulini, J. Kupsch, and I.-O. Stamatescu, *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [38]W. H. Zurek, “Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical,” *Reviews of modern physics*, vol. 75, no. 3, p. 715, 2003.
- [39]H. Ollivier and W. H. Zurek, “Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations,” *Physical review letters*, vol. 88, no. 1, p. 017901, 2001.
- [40]K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, and V. Vedral, “The classical-quantum boundary for correlations: discord and related measures,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 84, no. 4, p. 1655, 2012.
- [41]M. Zwolak and W. H. Zurek, “Complementarity of quantum discord and classically accessible information,” *Scientific reports*, vol. 3, p. 1729, 2013.
- [42]P. Wai and C. Menyuk, “Polarization decorrelation in optical fibers with randomly varying birefringence,” *Optics letters*, vol. 19, no. 19, p. 1517, 1994.
- [43]W. H. Zurek, “Quantum darwinism,” *Nature Physics*, vol. 5, no. 3, p. 181, 2009.