



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**O POTENCIAL EFETIVO  
E A RESTAURAÇÃO DE SIMETRIAS**

**Marcílio Veras Cardoso**

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**O POTENCIAL EFETIVO  
E A RESTAURAÇÃO DE SIMETRIAS**

**Marcílio Veras Cardoso**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C268p Cardoso, Marcílio Veras.  
O potencial efetivo e a restauração de simetrias / Marcílio Veras  
Cardoso. – Campina Grande, 2013.  
47 f. Color

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".  
Referências.

1. Potencial Efetivo. 2. Defeitos Topológicos. 3. Temperatura Finita.  
I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

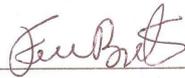
CDU 539.12-12(043)

**MARCÍLIO VERAS CARDOSO**

**O POTENCIAL EFETIVO E A RESTAURAÇÃO DE SIMETRIAS**

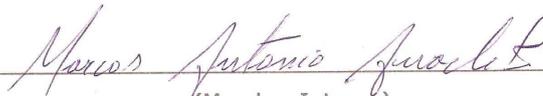
Dissertação aprovada em 27/03/2013

**BANCA EXAMINADORA**



(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro Interno)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro Externo)

Profa. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire  
Departamento de Física - UEPB

*Dedico esse trabalho aos meus pais,  
assim como tudo em minha vida  
e a todos aqueles que em mim  
acreditaram.*

*A Deus, por ser Deus.*

# AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, sugestão, estímulo, paciência e competência com que conduziu este trabalho.

Aos Profs. Diego Cogollo, Fábio Dahia, Lincoln Araújo e Rômulo Rodrigues pela colaboração que recebi durante minha fase de preparação.

Aos professores constituintes da Banca Examinadora que contribuíram para que fosse alcançado o objetivo do trabalho.

Aos meus pais José Cosmo Cardoso e Analice Veras Cardoso que enfrentou comigo todos os obstáculos.

À minha esposa Ana Karla Nascimento por estar do meu lado me dando apoio e motivação.

Aos meus irmãos Marcio e Marciele pelo constante incentivo.

Aos demais familiares.

Aos colegas Adiel Lemos, Cícero Alécio, Igor Eloy, Júlio Cesar, Luiz Eduardo, Mikael Souto, Pablo Rafael, Pablo Sampaio, Patricio Felix, Raoni Moreira, Romeu Castro e Thiago Guerra por tudo que passamos juntos, pois cada um sabe sua contribuição.

Aos demais colegas de pós-graduação, graduação, funcionários e demais professores da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência.

A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

*Boi com sede bebe lama,  
Barriga seca não dá sono.  
(Petrúcio Amorim)*

*Quem tem o mel, dá o mel.  
Quem tem o fel, dá o fel.  
Quem nada tem, nada dá.  
(Anônimo)*

*Bem-aventurado o homem que não anda  
segundo o conselho dos ímpios, nem se  
detém no caminho dos pecadores, nem se  
assenta na roda dos escarnecedores.  
Antes tem o seu prazer na lei do senhor,  
e na sua lei medita de dia e de noite.  
Pois será como a árvore plantada junto a  
ribeiros de águas, a qual dá o seu fruto no  
seu tempo; as suas folhas não cairão, e  
tudo quanto fizer prosperará  
Salmos 1:1-3.*

## RESUMO

Neste trabalho vamos fazer correções quânticas ao potencial clássico de uma teoria com simetria  $Z_N$  na intenção de entender os efeitos quânticos da teoria via correções radiativas do potencial efetivo em um loop. Para que isso aconteça é preciso que os  $n$  campos que compõem a teoria com simetria discreta, tenha valores esperado de vácuo não nulo minimizando o potencial. No entanto, sabemos que o potencial possui termos de interação, e que se olharmos para o vácuo quântico que tem interpretação física de estado de partículas, estes termos produzirão correções ao potencial e obteremos o verdadeiro valor esperado de vácuo da teoria que minimiza o potencial efetivo. Com isso esperamos que surja o fenômeno de quebra espontânea de simetria cuja finalidade é produzir defeitos topológicos tipo paredes de domínio e junções. No presente estudo também avançaremos na introdução de efeitos de temperatura finita via mecanismo de Matsubara.

**Palavras-chave:** Potencial efetivo, Defeitos Topológicos, Temperatura Finita

## ABSTRACT

In this work we make quantum corrections to the potential of a classical theory with symmetry  $Z_N$  with the intention of understanding the effects quantum of theory via the radiative corrections of effective potential in a loop. For this to happen we need the  $n$  fields that make up the theory with discrete symmetry, expected values have nonzero vacuum that minimizes the potential. However, we know that the potential has interaction terms, and that if we look at the quantum vacuum that has physical interpretation of the state of particles, these terms yield corrections to the potential and obtain the true vacuum expectation value of the theory that minimizes the effective potential. With this we hope that arises the phenomenon of spontaneous symmetry breaking whose purpose is to produce topological defects like domain walls and junctions. In the present study advance the introduction of finite temperature effects via mechanism Matsubara.

**Keywords:** Potential effective, Topological Defects, Finite Temperature

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoria Quântica de Campos e a Quebra Espontânea de Simetria</b>	<b>3</b>
2.1 Formalismo Lagrangeano na Teoria Quântica de Campos . . . . .	3
2.2 Quebra Espontânea de Simetria Discreta . . . . .	5
2.3 Quebra Espontânea de Simetria Contínua Global . . . . .	8
2.4 Uma Análise da Simetria para Sistemas Físicos . . . . .	12
<b>3 Defeitos Topológicos no Universo Primordial</b>	<b>19</b>
3.1 Paredes de Domínios . . . . .	21
3.2 Cordas Cósmicas . . . . .	23
3.3 Monopolos Magnéticos . . . . .	24
3.4 Paredes de Domínio com Simetria $Z_2 \times Z_3$ . . . . .	25
<b>4 O Potencial Efetivo e sua Conexão com a Temperatura Finita</b>	<b>29</b>
4.1 O Funcional Gerador das Funções de Green . . . . .	29
4.2 Ação Efetiva e Potencial Efetivo . . . . .	33
4.3 Conexividade com a Temperatura Finita . . . . .	36
4.4 Paredes de Domínio com Simetria $Z_2 \times Z_3$ em Temperatura Finita . . . . .	38
<b>5 Considerações Finais</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>

# Lista de Figuras

2.1	Potencial escalar $V(\phi)$ , quando $\mu^2 > 0$ . . . . .	6
2.2	Potencial escalar $V(\phi)$ , quando $\mu^2 < 0$ . . . . .	8
2.3	Gráfico que representa o potencial denominado de chapéu mexicano. . . . .	9
2.4	Potencial do chapéu mexicano quando $\mu > 0$ (simetria de rotação). . . . .	9
2.5	Fixação de um dos mínimos. . . . .	10
3.1	Esquema da representação da expansão do Universo na Era inflacionária [16]. . . . .	20
3.2	Esquema de uma solução tipo parede de domínio, com largura $(a\lambda)^{-1}$ . . . . .	22
3.3	Esquema da representação de defeitos tipo corda cósmica. . . . .	23
3.4	Esquema da representação do potencial complexo de acordo com a temperatura crítica $T_c$ . . . . .	24
3.5	Representação esquemática de defeitos tipo monopolos. . . . .	24
3.6	Representação do potencial $V(\sigma)$ para uma bolsa de falso vácuo, neste ponto o mínimo é ligeiramente mais alto, $\sigma = \sigma_0 = 1$ . . . . .	26
3.7	Representação de uma junção tripla. . . . .	27
3.8	Representação de uma rede hexagonal. . . . .	28
3.9	Representação de uma rede hexagonal com linhas tracejadas. As linhas tracejadas indicam a malha dupla, formada por triângulos equiláteros. . . . .	28
4.1	Representação gráfica das funções de Green para duas e quatro partículas, no caso livre. . . . .	31
4.2	Representação gráfica das funções de Green para duas e quatro partículas, no caso não livre. . . . .	31
4.3	Representação gráfica das funções de Green conexas para duas e quatro partículas, caso não livre. . . . .	32
4.4	Representação do comportamento I), segunda situação. Para o potencial $V_{eff}(\sigma, \chi)$ em uma temperatura $T = T_\sigma^c - 2$ . . . . .	41
4.5	Representação do comportamento I), terceira situação. Para o potencial $V_{eff}(\sigma, \chi)$ em uma temperatura $T = T_\sigma^c + 2$ . . . . .	41
4.6	Representação do comportamento II), primeira situação. Para o potencial $V_{eff}(\chi, \phi)$ em uma temperatura $T = T_\sigma^c - 2$ . . . . .	42
4.7	Representação do comportamento II), segunda situação. Para o potencial $V_{eff}(\chi, \phi)$ em uma temperatura $T = T_\sigma^c + 2$ . . . . .	42

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho nossa intenção é de compreender com maior profundidade o vácuo quântico e sua importância para o estudo da quebra espontânea de simetria. Com esse objetivo vamos analisar os métodos funcionais em uma teoria quântica de campos que pode ser descrita através das integrais de trajetória ou de Feynman, com vistas ao entendimento do potencial efetivo [1, 2].

No ponto de vista quântico o potencial efetivo possui termos de interação que pode gerar interpretações físicas no estado fundamental. Esses termos produzirão correções quânticas ao potencial clássico e obteremos o verdadeiro valor esperado de vácuo da teoria com o potencial efetivo renormalizado.

Com isso, esperamos que surja o fenômeno de quebra espontânea de simetria, que tem como finalidade produzir massa para o campo de gauge sem destruir a renormalizabilidade da teoria. Isto é importante, pois quando um termo de massa para o campo de gauge é introduzido diretamente na lagrangeana do sistema em geral perde-se a invariância de gauge da teoria. Então, podemos evitar esse impasse se o termo de massa aparecer espontaneamente como consequência da quebra de simetria interna (todo tipo de simetria que não se refere as coordenadas do espaço-tempo) do sistema [3].

Para que aconteça tal feito, é preciso que os campos que compõe a teoria tenha valores esperados de vácuo não nulo que minimiza o potencial, campos com essa carac-

terísticas são chamados de campo de Higgs (campo escalar que apresenta um valor não nulo no vácuo) que com o qual geramos massa para o campo de gauge sem destruir a renormalização da teoria.

Finalmente, para tornar o cenário cosmológico mais realístico vamos associar este fenômeno de quebra espontânea de simetria associado a efeitos térmicos, via mecanismo de Matsubara, o que produz aplicações direta na cosmologia gerando defeitos topológicos que são classificados de acordo com a simetria do vácuo[4]. Então, para o nosso caso analisaremos uma teoria com simetria discreta  $Z_N$ . Com isso, esperamos que os  $n$  campos que compõem a teoria, tenha tais características, cujo objetivo é produzir defeitos topológicos tipo paredes de domínios e junções.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, descrevemos o formalismo utilizado na teoria quântica de campos e o fenômeno da quebra espontânea de simetria para sistemas físicos. No Capítulo 3, fizemos uma análise do surgimento dos defeitos topológicos na Era Inflacionária do Universo Primordial no âmbito da teoria do Big Bang. Enfatizando que durante a evolução do universo ocorreram diversas transições de fases térmicas provocando sucessivas quebra espontânea de simetria dando origem a diferentes tipos de defeitos topológicos que são caracterizados de acordo com a variedade do vácuo. Verifiquemos ainda a construção de paredes de domínios com simetria  $Z_2 \times Z_3$  [5]. No Capítulo 4, apresentamos um breve resumo de Métodos Funcionais em Teoria Quântica de Campos, com vistas ao entendimento do Potencial Efetivo. Em seguida faremos uma conexão com a Temperatura Finita investigando as temperaturas críticas que possam formar cada defeito. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos comentários a respeito deste trabalho e dos resultados obtidos, colocando nossas perspectivas futuras. Ao longo deste trabalho utilizamos o sistema de unidades natural em que  $\hbar = c = 1$ , e o tensor da métrica  $g$  é diagonal com elementos  $[1, -1, -1, -1]$ .

## Capítulo 2

# Teoria Quântica de Campos e a Quebra Espontânea de Simetria

Uma das ideias mais profundas da física teórica é que as interações entre partículas são ditadas por teorias de Gauge. A conexão entre simetrias e leis de conservação é melhor discutido pelo formalismo lagrangeano da Teoria Quântica de Campos (TQC)[6, 7]. Neste capítulo trataremos dos conceitos básicos da TQC e da quebra de simetria.

### 2.1 Formalismo Lagrangeano na Teoria Quântica de Campos

Em TQC, inicialmente analisamos a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$ , que é uma função dos campos  $\phi_i$  e de suas derivadas  $\partial_\mu\phi_i$ . Tratando as coordenadas do espaço e do tempo de forma igual, escrevemos a equação de Euler-Lagrange, na forma

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) = 0. \quad (2.1.1)$$

Conforme o spin das partículas, a lagrangeana se modifica. A seguir, são analisados três modelos usando o contexto de TQC.

1 - Lagrangeana para um campo escalar de spin 0

A lagrangeana para um campo escalar  $\phi$  é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.1.2)$$

Aplicando a equação acima na equação (2.1.1), obtemos a equação de movimento para o campo  $\phi$  que pode ser escrita como

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0, \quad (2.1.3)$$

que é conhecida como equação de Klein-Gordon, que descreve partículas de spin 0 e massa  $m$ .

2 - Lagrangeana para um campo spinorial de spin  $\frac{1}{2}$

Consideremos a seguinte lagrangeana para o campo  $\psi$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (2.1.4)$$

Vamos tratar o campo  $\psi$  e o seu adjunto  $\bar{\psi}$ , ( $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ ) como campos independentes. Aplicando a equação de Euler-Lagrange a  $\bar{\psi}$ , obtemos

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0. \quad (2.1.5)$$

Esta é a equação de Dirac que descreve uma partícula livre de spin  $\frac{1}{2}$  e massa  $m$ . Por outro lado, se aplicarmos a equação de Euler-Lagrange a  $\psi$ , obtemos a equação de Dirac para o campo adjunto, assim

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (2.1.6)$$

3 - Lagrangeana para um campo vetorial de spin 1 com massa  $m$

Consideremos um campo vetorial  $A_\mu$  descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^\nu A_\nu, \quad (2.1.7)$$

onde,  $F_{\mu\nu} \equiv (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ . Substituindo na equação acima (2.1.7), produz

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}m^2A^\nu A_\nu, \quad (2.1.8)$$

aplicando a equação de Euler-Lagrange. Ou seja, (2.1.1) e o gauge de Lorentz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , temos

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0. \quad (2.1.9)$$

Esta é a equação de Proca que descreve uma partícula de spin 1 e massa  $m$ . A lagrangeana para um sistema particular não tem um significado único. Podemos sempre multiplicar  $\mathcal{L}$  por uma constante, ou adicionar uma divergência,  $(\partial_\mu A^\mu)$ , onde  $M^\mu$  é qualquer função de  $\phi$  e de  $\partial_\mu \phi$ . Isto se cancela quando aplicamos a equação de Euler-Lagrange e não afeta as equações de movimento dos campos.

Nos modelos apresentados somente existem campos livres, ou seja, as partículas que eles representam não sofrem interações nem se encontram na presença de qualquer fonte.

## 2.2 Quebra Espontânea de Simetria Discreta

Seja um sistema físico descrito por um campo escalar real  $\phi$  tal que a sua lagrangeana seja dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.2.10)$$

cujo potencial é

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4. \quad (2.2.11)$$

Ele simplesmente descreve um campo escalar com massa  $\mu$ , que é determinado pelo coeficiente de termos quadráticos do campo. Já o termo que contém  $\phi^4$  é de auto interação, e  $\lambda$  é uma constante de acoplamento [6]. Toda teoria com potenciais escalares de quarta ordem são essenciais para o mecanismo de Higgs, cosmologia e solitons [8].

A única simetria interna deste modelo é a invariância sob a transformação discreta

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi. \quad (2.2.12)$$

No vácuo, estado de menor energia, correspondem a valores de  $\phi$  que minimizam o potencial escalar  $V(\phi)$ . Estes mínimos satisfazem a expressão

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0. \quad (2.2.13)$$

Há duas formas possíveis:

I) Quando  $\mu^2 > 0$ , o potencial tem um mínimo apenas em  $\phi = 0$ , cujo valor esperado de vácuo (v.e.v<sub>0</sub>) do operador campo escalar  $\hat{\phi}$ , é

$$\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = 0, \quad (2.2.14)$$

sendo a situação descrita pela Figura 2.1, e não há quebra de simetria;

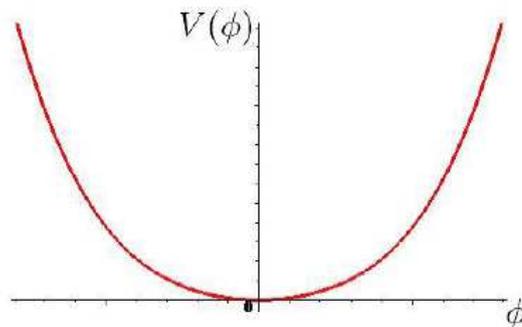


Figura 2.1: Potencial escalar  $V(\phi)$ , quando  $\mu^2 > 0$ .

II) Quando  $\mu^2 < 0$ , o potencial possui mínimos diferentes de zero, os quais não são fixos por causa da simetria (2.2.12) e são dados por

$$\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = \phi_c, \quad (2.2.15)$$

onde

$$\phi_c = \pm (-\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (2.2.16)$$

É claro que a escolha de qualquer um destes mínimos quebra a simetria, pois nenhum deles é invariante sob a transformação (2.2.12). No entanto é bastante simples

definir um novo campo com v.e.v<sub>0</sub> nulo. Para isto temos que

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi_c, \quad (2.2.17)$$

vemos que, para esse novo campo temos

$$\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle = 0. \quad (2.2.18)$$

Quando  $\mathcal{L}$  se expressa como uma função de  $\tilde{\phi}$ , obviamente quebramos a simetria de reflexão  $\tilde{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi}$ . O campo  $\tilde{\phi}$  mede flutuações em torno do ponto assimétrico  $\phi_c$ . Portanto, a lagrangeana, dada pela expressão (2.2.10), em termos de  $\tilde{\phi}$ , pode ser descrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \mu^2 (\tilde{\phi} + \phi_c)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\tilde{\phi} + \phi_c)^4, \quad (2.2.19)$$

que expandindo produz

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \mu^2 \tilde{\phi}^2 - \mu^2 \tilde{\phi} \phi_c - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_c^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \lambda \tilde{\phi}^4 - \lambda \tilde{\phi}^3 \phi_c - \frac{3}{2} \lambda \tilde{\phi}^2 \phi_c^2 - \lambda \tilde{\phi} \phi_c^3 - \frac{1}{4} \lambda \phi_c^4, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

como os coeficientes dos termos lineares,  $\tilde{\phi}$ , anulam-se no mínimo, podemos reescrever a lagrangeana para o campo escalar em torno do valor esperado de vácuo na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + \mu^2 \tilde{\phi}^2 - \frac{1}{4} \lambda \tilde{\phi}^4 - \lambda \tilde{\phi}^3 \phi_c - \frac{1}{4} \lambda \phi_c^4. \quad (2.2.21)$$

O termo cúbico  $\tilde{\phi}^3$  implica que a simetria é espontaneamente quebrada, sendo a situação descrita pela Figura 2.2.

A massa do campo  $\tilde{\phi}$  é dada por

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{\phi}^2} = -2\mu^2, \quad (2.2.22)$$

O sinal negativo é justificado pelo fato de que usamos  $\mu^2 < 0$  e precisamos que a massa do campo seja positiva.

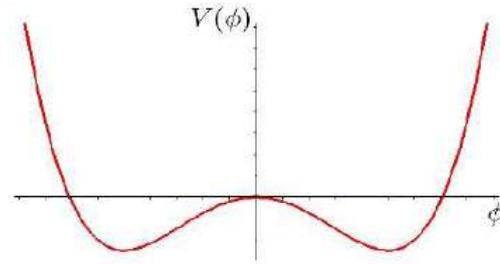


Figura 2.2: Potencial escalar  $V(\phi)$ , quando  $\mu^2 < 0$ .

## 2.3 Quebra Espontânea de Simetria Contínua Global

Para abordar esse modelo vamos repetir o procedimento acima para uma campo escalar complexo, definido por

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2). \quad (2.3.23)$$

A lagrangeana para essa teoria pode ser descrita como

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V(\bar{\varphi}\varphi), \quad (2.3.24)$$

cujo potencial é

$$V(\bar{\varphi}\varphi) = \mu^2 \bar{\varphi}\varphi + \frac{1}{4} \lambda (\bar{\varphi}\varphi)^2, \quad (2.3.25)$$

O termo  $\bar{\varphi}\varphi = (\phi_1^2 + \phi_2^2)$  representa uma simetria rotacional no potencial [Figura 2.3]. Este potencial é conhecido como chapéu mexicano. Portanto, este modelo é invariante sob transformação global do grupo  $U(1)$

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha} \varphi, \quad (2.3.26)$$

exibindo um círculo de mínimos degenerados, sendo  $\alpha$  uma constante arbitrária.

O estado fundamental é obtido minimizando o potencial do chapéu mexicano

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \bar{\varphi} \left( \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda (\bar{\varphi}\varphi) \right) = 0. \quad (2.3.27)$$

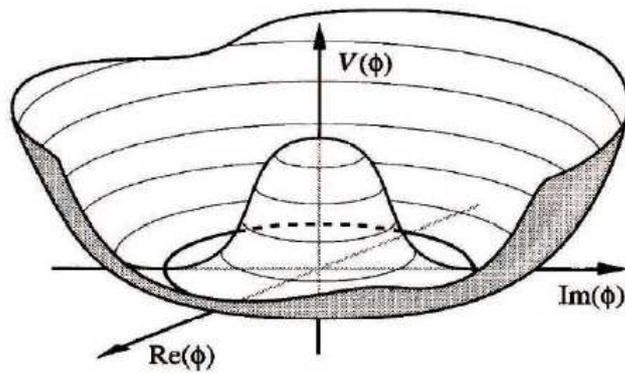


Figura 2.3: Gráfico que representa o potencial denominado de chapéu mexicano.

Novamente há duas situações possíveis:

I) Quando  $\mu^2 > 0$ , temos que o potencial exibe um mínimo tal que o v.e.v<sub>0</sub> do operador campo  $\hat{\varphi}$  é

$$\langle 0 | \hat{\varphi} | 0 \rangle = 0, \quad (2.3.28)$$

não havendo, portanto, quebra espontânea de simetria. Como está ilustrado na Figura 2.4.

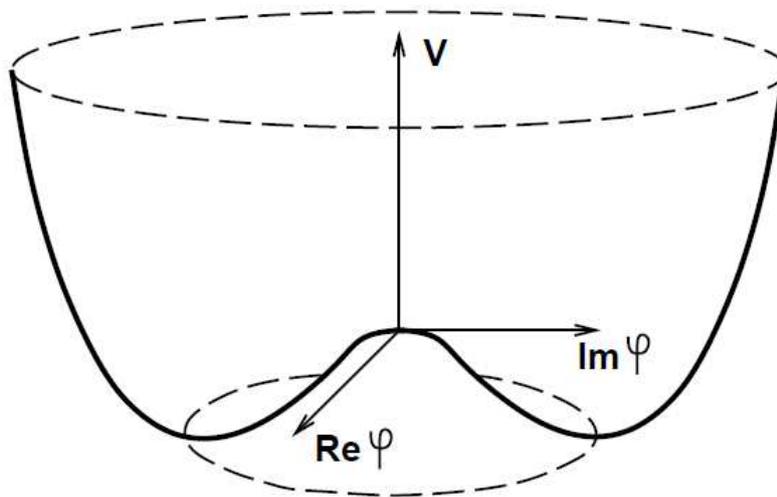


Figura 2.4: Potencial do chapéu mexicano quando  $\mu > 0$  (simetria de rotação).

II) Quando  $\mu^2 < 0$ , o mínimo será em um "ponto"  $\varphi_c$  diferente de zero, cujo v.e.v é

$$\langle 0 | \hat{\varphi} | 0 \rangle = \varphi_c, \quad (2.3.29)$$

onde

$$|\varphi_c|^2 = -2\mu^2/\lambda. \quad (2.3.30)$$

A escolha ou fixação de um desses infinitos mínimos, sem que haja perda de generalidade, leva-nos a definir um novo campo  $\tilde{\varphi}$  tendo v.e.v nulo,

$$\langle 0 | \tilde{\varphi} | 0 \rangle = 0, \quad (2.3.31)$$

pois a origem do novo sistema de referência escolhido, no qual  $\tilde{\varphi}$  está definido, agora está em cima dos pontos de mínimo  $\varphi_c$ , como apresenta a Figura 2.5.

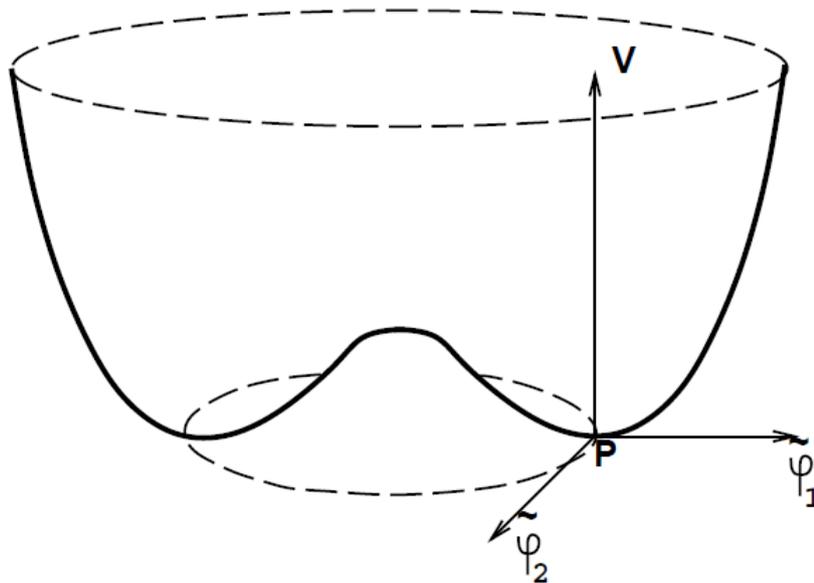


Figura 2.5: Fixação de um dos mínimos.

A fixação de um dos mínimo na equação (2.3.30) pode ser feita fazendo um deslocamento para o novo sistema de referência, de módulo  $v/\sqrt{2}$  é uma rotação de ângulo (ou fase)  $\delta$ , ou seja,

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{2}} v e^{i\delta}, \quad (2.3.32)$$

onde

$$v^2 = (-4\mu^2/\lambda). \quad (2.3.33)$$

Usando as equações (2.3.23), (2.3.29) e (2.3.32). Obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \hat{\phi}_1 | 0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \hat{\phi}_2 | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v e^{i\delta}, \quad (2.3.34)$$

como  $\delta$  é arbitrário, por simplicidade escolhamos ele igual a zero, logo

$$\langle 0 | \hat{\phi}_1 | 0 \rangle + i \langle 0 | \hat{\phi}_2 | 0 \rangle = v, \quad (2.3.35)$$

comparando os termos da igualdade acima ficamos

$$\langle 0 | \hat{\phi}_1 | 0 \rangle = v, \quad (2.3.36)$$

e

$$\langle 0 | \hat{\phi}_2 | 0 \rangle = 0. \quad (2.3.37)$$

Assim o único campo que possui v.e.v não nulo é  $\hat{\phi}_1$ . Portanto, para que a condição da equação (2.3.31) seja satisfeita, temos que definir,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 &= \hat{\phi}_1 - v \\ \tilde{\phi}_2 &= \hat{\phi}_2. \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Esta escolha ou fixação de mínimos quebra espontaneamente a simetria do sistema, pois a partir da lagrangeana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - \mu^2 \bar{\varphi} \varphi - \frac{1}{4} \lambda (\bar{\varphi} \varphi)^2, \quad (2.3.39)$$

podemos escrever, usando as definições da equação (2.3.38),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\mu \tilde{\phi}_1 \right) \left( \partial^\mu \tilde{\phi}_1 \right) + \left( \partial_\mu \tilde{\phi}_2 \right) \left( \partial^\mu \tilde{\phi}_2 \right) + 2\mu^2 \tilde{\phi}_1^2 \right] \\ &- \frac{1}{16} \lambda \left[ \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2 \right]^2 - \frac{1}{4} \lambda v \tilde{\phi}_1 \left[ \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2 \right] - \frac{1}{4} \mu^2 v^2, \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

a qual não é mais invariante frente à transformação de gauge do grupo  $U(1)$ . Notamos que a componente  $\tilde{\phi}_1$  tem uma massa positiva  $-2\mu^2$  dada por

$$\frac{d^2V}{d\phi_1^2}\Big|_{(\phi_1,\phi_2)=(v,0)} = -2\mu^2. \quad (2.3.41)$$

e a componente  $\tilde{\phi}_2$  não possui massa,

$$\frac{d^2V}{d\phi_2^2}\Big|_{(\phi_1,\phi_2)=(v,0)} = 0. \quad (2.3.42)$$

O aparecimento de partículas sem massa, chamadas de bósons de Goldstone, é uma característica geral de quebra espontânea de simetrias globais. Isto é válido, de acordo com o teorema de Goldstone [9, 10].

## 2.4 Uma Análise da Simetria para Sistemas Físicos

A simetria tem tido um papel fundamental na compreensão da Física de Partículas. Sendo um dos conceitos mais importantes de toda a Ciência, em linguagem matemática, simetria poderia definir-se como uma operação geométrica que deixa um objeto inalterado [11].

A premissa básica da grande unificação é que as simetrias conhecidas das partículas elementares resultaram de um grupo de simetria maior que após uma transição de fase (quebra de simetria), parte dessa simetria é perdida, gerando um grupo de simetria menor, assim as mudanças de grupo de simetria [12, 13]. Isto pode ser representado matematicamente como

$$G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1). \quad (2.4.43)$$

Aqui, cada seta representa a simetria de transição de fase de ruptura onde as mudanças de forma da matéria ocorrem e os grupos  $(G, H, SU(3), etc)$  representam os diferentes tipos de material, especificamente as simetrias que as exposições da matéria sofre já que estão associadas com as diferentes forças fundamentais da natureza. Estas forças fundamentais são as seguintes:

- **Electromagnetismo:** O grupo  $U(1)$  está associado com as forças elétricas e magnéticas, isto é, fenómenos tais como a eletricidade e luz. Foi a grande conquista de Maxwell no final do século XIX para unificar efeitos elétricos e magnéticos em uma única teoria matemática o eletromagnetismo.
- **Força nuclear fraca:** Esta é a força nuclear associado radioatividade em muitos núcleos instáveis. Em particular, associa-se com o decaimento de um nêutron em um próton. A força fraca nuclear foi unificado com o electromagnetismo por Weinberg e Salam em finais dos anos setenta, no que é conhecido como a teoria eletrofraca e que é descrito pelo grupo  $SU(2) \times U(1)$ . Previsões deste modelo padrão unificado foram confirmados no acelerador de partículas do CERN, em Genebra, no início dos anos 1980.
- **Força nuclear forte:** O grupo  $SU(3)$  está associada com a força nuclear forte que une prótons e nêutrons dentro dos núcleos. A teoria matemática que descreve as partículas elementares, quarks e glúons, nesta teoria é conhecida como cromodinâmica quântica (QCD).
- **Gravidade:** A mais fraca de todas as forças, a força gravitacional, não está incluído no esquema acima. A unificação das outras forças fundamentais com a gravidade é um dos grandes desafios enfrentados pela física teórica.

Assim podemos evidenciar que realmente a compreensão da Física de Partícula tem sido quase sempre associada com a identificação de um grupo (conjunto de elementos dotados de operações específicas) de invariância num sistema [8, 14]. Começando com o grupo de simetria de Poincaré que engloba as transformações de Lorentz e as transformações no espaço-tempo para o grupo de invariância de isospin de  $SU(2)$  na física nuclear e o grupo de simetria  $SU(3)$  das interações fortes.

Além disso, o Teorema de Noether estabelece que a simetria implica nas leis de conservação. Uma vez que, se uma ação é invariante sob um grupo de transformações

(simetria), então há uma ou mais quantidades conservadas (constantes de movimento) que são associadas a estas transformações. De modo que ficamos:

- Translação Temporal: implica na conservação da Energia;
- Translação Espacial: implica na conservação do Momento;
- Rotações: implica na conservação do Momento Angular.

É importante frisar que a carga elétrica é também uma quantidade conservada. Onde, a simetria contínua que está associada a esta conservação é a simetria de Gauge que pode ser:

- Global: Leva a conservação da Carga Elétrica;
- Local: Define a própria forma da interação eletromagnética.

Outro fato curioso é que cada uma das interações citadas acima, exceto a gravitacional, tem um grupo de rotações associados. Uma simetria rotacional corresponde a observar que podemos rodar um objeto em torno de um dado eixo de forma a que ele fique inalterado. E mais vamos perceber ainda que as simetrias contínuas contêm as simetrias discretas.

Dessa forma, vamos analisar a formação de algumas simetrias. Lembrando que a simetria do espaço tempo que engloba o grupo de Poincaré e o grupo de Lorentz não são compactas, pois seus parâmetros são infinitos. Uma mudança de um referencial para outro implica na mudança das coordenadas do espaço tempo, dada por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu, \quad (2.4.44)$$

onde o parâmetro  $b^\mu$  representa uma translação e  $\Lambda^\mu_\nu x^\nu$  é a parte homogênea com  $\Lambda^\mu_\nu$  sendo a matriz de transformação. Já as simetrias internas ou de isospin são compactas. Pois, os seus parâmetros são finitos, grupos de rotações, parâmetros variam entre 0 e  $n$  ou  $2\pi$ . Assim as simetrias podem ser:

I) Contínuas: que engloba os grupos;  $U(1)$  que representa uma simetria rotacional dada pela equação (2.3.26) e o grupo  $SO(2)$  das rotações das matrizes especiais ortogonais de duas dimensões, então para este caso podemos escrever

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4.45)$$

outros exemplos podem ser obtidos utilizando as Matrizes de Pauli.

II) Discretas: que são as simetrias inversas ou de reflexão dada pela equação (2.2.12), ou ainda

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ -\phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.4.46)$$

Por outro lado, analisando o determinante do grupo  $U(1)$ , temos

$$\det\Lambda = -1 \Rightarrow \text{simetrias discretas}, \quad (2.4.47)$$

$$\det\Lambda = 1 \Rightarrow \text{simetrias contínuas}. \quad (2.4.48)$$

Dê modo que, os grupos  $U(1) \sim SO2$  são isomorfos, pois atuam nos campos da mesma forma, ou seja

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = e^{i\alpha}\varphi, \quad (2.4.49)$$

Sendo assim, podemos analisar como se dá à formação das simetrias:

i) Considere a lagrangeana para um campo escalar real  $\phi$ , descrita pela equação (2.1.2).

Então, aplicando a simetria de reflexão dada em (2.2.12), ficamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \frac{1}{2}m^2\phi'^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu(-\phi)\partial^\mu(-\phi) - \frac{1}{2}m^2(-\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

Note que,  $\mathcal{L}$  é invariante frente a transformação  $\mathcal{L}'$ , obtemos assim, uma simetria de reflexão  $Z_2$  com elementos  $(0, 1)$ .

Por outro lado, fazendo  $\phi' = e^{i\alpha}\phi$ , produz

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \frac{1}{2}m^2\phi'^2 \\ &= \frac{e^{2i\alpha}}{2}\partial_\mu(\phi)\partial^\mu(\phi) - \frac{1}{2}m^2(e^{2i\alpha})^2.\end{aligned}\quad (2.4.51)$$

Logo  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}'$ , assim não possui simetria  $U(1)$ .

ii) Considere uma lagrangeana para um campo complexo  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ . Assim, aplicando uma simetria de reflexão  $\varphi \rightarrow \varphi' = -\varphi$ . Obtemos

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}'\partial^\mu\varphi' - \frac{1}{2}m^2|\varphi'|^2. \quad (2.4.52)$$

Assim percebe-se que,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ . Portanto, possui simetria discreta de reflexão.

Agora, aplicando uma simetria contínua  $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\alpha}\varphi$ , com  $\alpha$  constante. Produz

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\partial_\mu(e^{-i\alpha}\bar{\varphi})\partial^\mu(e^{i\alpha}\varphi) - \frac{1}{2}m^2|e^{i\alpha}\varphi'|^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2.\end{aligned}\quad (2.4.53)$$

Logo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ . Com isso, temos uma simetria contínua global  $U(1)$ .

Note que, o grupo das simetrias contínuas contém o grupo das simetrias discretas.

Desse modo, seja uma  $\mathcal{L}$ , dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4, \quad (2.4.54)$$

o termo  $\lambda\phi^4$ , mantém a simetria discreta e não respeita a simetria contínua. Enquanto, para uma  $\mathcal{L}$ , dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4, \quad (2.4.55)$$

o termo  $\lambda|\varphi|^4$ , respeita ambas as simetrias.

Dessa forma, podemos obter as simetrias  $Z_3$  e  $Z_4$ , respectivamente. A simetria  $Z_3$  é a simetria do triângulo. Então, seja  $\mathcal{L}$ , escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \lambda|\varphi|^3. \quad (2.4.56)$$

Fazendo  $\varphi' = e^{i\alpha}\varphi$ , ficamos

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\varphi}' \partial^\mu \varphi' - \lambda |\varphi'|^3. \quad (2.4.57)$$

Note que, para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ , temos  $e^{i\alpha}\varphi^3 = 1$ . Ou melhor

$$e^{i\alpha}\varphi^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha = 1. \quad (2.4.58)$$

Assim, obtemos a simetria  $Z_3$ , com os elementos  $(0, 2\pi/3, 4\pi/3)$ .

Para simetria  $Z_4$ , simetria do quadrado, vamos utilizar a seguinte densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - \lambda |\varphi|^4. \quad (2.4.59)$$

Analogamente, obtemos

$$e^{i\alpha}\varphi^4 = \cos 4\alpha + i \operatorname{sen} 4\alpha = 1. \quad (2.4.60)$$

Com isso, encontramos a simetria  $Z_4$ , com os elementos  $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/4)$ .

A simetria está prevalecente na Ciência, podemos encontra-la em todas as direções. E, na Física de partículas, a existência de simetrias de gauge permite-nos estabelecer, de forma clara e sem ambiguidades, a forma como as partículas elementares interagem entre si. As experiências confirmam os princípios de simetria com um grau de precisão estarrecedor.

A importância cosmológica da quebra de simetria é devido ao fato de que as simetrias são restauradas em alta temperatura. Para temperaturas extremamente altas no início do universo, vamos mesmo conseguir um grande estado unificado G. Vista a partir do momento da criação para frente, o universo vai passar por uma sucessão de transições de fase em que a força nuclear forte se tornará diferenciada e, em seguida, a força nuclear fraca e o eletromagnetismo.

É com esse pensamento que vamos analisar a possibilidade de uma rede de defeitos que vive dentro de uma parede de domínio para um modelo de três campos escalares

reais com simetria discreta  $Z_2 \times Z_3$ . O campo que governa a simetria  $Z_2$ , após a sua quebra espontânea de simetria gera uma parede de domínio curva, na forma esférica que aprisiona os outros dois campos com uma simetria  $Z_3$ . Que por sua vez, quando sua simetria é quebrada produz uma rede hexagonal formada pelas junções triplas de paredes de domínios.

## Capítulo 3

# Defeitos Topológicos no Universo Primordial

A cosmologia é o estudo científico das propriedades macroscópicas do Universo como um todo. Uma das teorias mais apropriadas sobre a evolução do Universo está baseada na teoria do Big Bang, que apresenta, até o presente momento, uma boa concordância com as observações experimentais, tal como a radiação cósmica de fundo [15].

A teoria do Big Bang, parte do pressuposto de que todo o Universo estava concentrado em um único ponto. Toda matéria estava na forma de energia a pressões e temperaturas infinitas. Houve uma desestabilização e esse ponto teria explodido e expandido dando origem ao espaço e ao tempo. Segundo essa teoria, ao se expandir o Universo também se resfriou o que determinou sucessivas transformações da energia liberada que se materializou-se na forma de partículas e antipartículas que se criavam e se aniquilavam a todo instante gerando fótons. O excesso de matéria em relação antimatéria deu origem ao universo que conhecemos hoje.

Um dos modelos utilizados para explicar a formação de estruturas no universo, tais como galáxias e seus aglomerados, é o modelo inflacionário. O Universo passou pela Era Inflacionária entre  $10^{-38}$ s e  $10^{-32}$ s [Figura 3.1]. Neste período o Universo passou

por uma fase de expansão exponencial. Ele aproximadamente dobrava de tamanho a cada  $10^{-34}$ s.

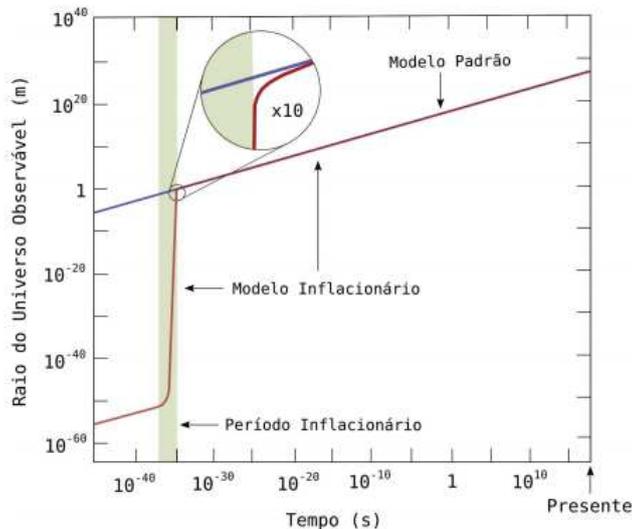


Figura 3.1: Esquema da representação da expansão do Universo na Era inflacionária [16].

Estas bruscas mudanças causaram diversas quebra espontânea de simetria. Por esse motivo, o Universo precisava encontrar configurações que minimizassem sua energia. Por haver diversas possibilidades, formaram-se os defeitos topológicos [17].

Teorias de gauge com quebra espontânea de simetria, como as teorias de grande unificação, tem sido de fundamental importância para a compreensão da formação de defeitos topológicos no universo primordial. Para tais teorias, as simetrias conhecidas na física de partículas elementares resultam de sucessivas quebra de simetria de um grupo de simetria maior e estes processos dão origem a diferentes tipos de defeitos. Durante a evolução do universo, onde a temperatura vai gradativamente diminuindo, tais quebra de simetria se manifestam através de diversas transições de fases térmicas que deram origem a diferentes tipos de objetos tais como parede de domínio, cordas cósmicas e monopólos magnéticos, dependendo da classificação da variedade do vácuo da teoria [13, 18, 19].

### 3.1 Paredes de Domínios

Este defeito é caracterizado pela presença de uma região fechada, limitada ou não na forma de paredes. No modelo padrão com simetria  $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$  a teoria de campos escalares pode ser vista como sendo apenas um setor escalar de uma Teoria de Campos, considerando apenas os campos escalares e seu potencial com uma determinada simetria [20].

Com potenciais escalares com um único campo pode-se obter soluções solitônicas, sólitons estes que podem representar paredes de domínios, isso depende da simetria envolvida na situação. Sólitons são soluções relacionadas a teoria de Campos não-lineares, essas soluções correspondem a concentração de energia que se propagam sem se deformar, como pode ser verificado em [8]. Para uma simetria  $Z_2$  esses sólitons vão representar paredes de domínios como uma interface que separa dois domínios de um material ferromagnético [21].

Vamos utilizar uma Lagrangeana que envolve apenas um campo escalar, com esta Lagrangeana podemos observar uma parede de domínio,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3.1.1)$$

O potencial escalar,  $V(\phi)$ , deve ser escolhido adequadamente para que seja possível a obtenção de paredes de domínios,

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2} (\phi^2 - a^2)^2, \quad (3.1.2)$$

onde  $a$  é uma constante com dimensão de energia [22]. Este potencial escalar possui uma simetria  $Z_2$  e apresenta a mesma forma do potencial da figura 2.2.

Este modelo contempla uma transição de fase na temperatura crítica  $T_c \sim a$ . Para temperaturas acima da  $T_c$ , o sistema apresenta grandes flutuações em  $\phi$ , entretanto a média destas flutuações é nula. Quando a temperatura está abaixo de  $T_c$ , o campo deve obrigatoriamente escolher aleatoriamente entre um dos mínimos, fazendo com que o valor médio das flutuações deixe de ser nulo. Deste modo podemos dizer que

em  $T_c$ , o sistema sofre uma transição de fase com quebra espontânea de simetria.

Para  $T > T_c$  há simetria de reflexão ( $\phi \rightarrow -\phi$ ), e para  $T < T_c$  esta simetria é espontaneamente quebrada. Como o sistema consiste de dois domínios, é razoável esperarmos que estejam separados de algum modo. Tal fronteira caracteriza uma parede de domínios.

A equação de movimento para uma configuração estática de campo, por exemplo  $\phi = \phi(r)$  é dada por:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (3.1.3)$$

A equação (3.1.3) possui solução conhecida, pois trata-se de uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. A qual possui a seguinte solução,

$$\phi(r) = a \tanh[a\lambda(r - r_0)]. \quad (3.1.4)$$

Esta solução representa uma parede de domínio que possui largura  $\frac{1}{a\lambda}$ , região limitada pelas retas em verde como podem ser observadas no gráfico representado pela Figura (3.2), região esta que localiza a maior concentração de energia. Essa solução também costuma ser chamada de kink.

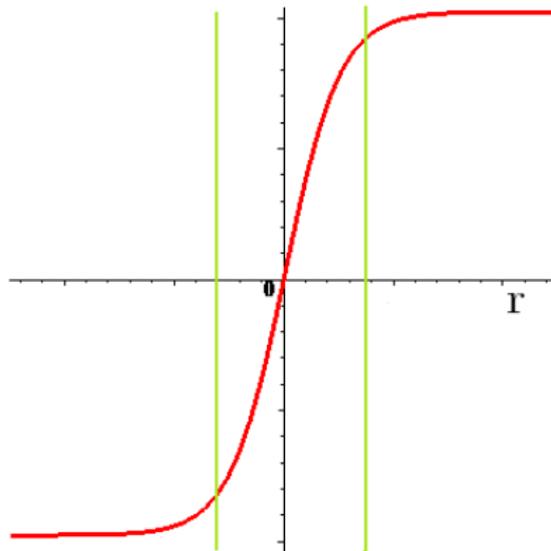


Figura 3.2: Esquema de uma solução tipo parede de domínio, com largura  $(a\lambda)^{-1}$ .

## 3.2 Cordas Cóslicas

Esta classe de singularidades é caracterizada pela presença de regiões finas como tubos fechados ou não e comprimento limitado ou infinito, como mostra a Figura (3.3).

Considere o modelo de um campo escalar complexo cuja densidade lagrangeana

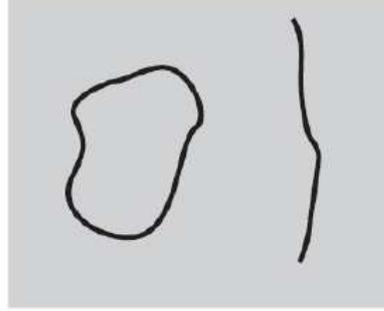


Figura 3.3: Esquema da representação de defeitos tipo corda cósmica.

para uma teoria de campos, pode ser escrita como [13, 22].

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - V(\phi), \quad (3.2.5)$$

sendo

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2} (\phi \bar{\phi} - a^2)^2. \quad (3.2.6)$$

Como já foi discutido na seção 2.3, este potencial forma um círculo no plano complexo, obedecendo à transformação global do grupo  $U(1)$ . Analogamente ao caso anterior, este campo também apresenta uma temperatura crítica  $T_c \sim a$ , na qual, ocorre uma transição de fase com quebra espontânea de simetria para temperaturas abaixo de  $T_c$ , Figura (3.4).

De modo análogo as paredes de domínio, as cordas cósmicas são topologicamente estáveis. Elas não podem desaparecer a menos que haja um antidefeito tipo corda, com exceção ao caso em que a corda cósmica forma uma região fechada. Esta região poderá reduzir seu raio interno até desaparecer por completo.

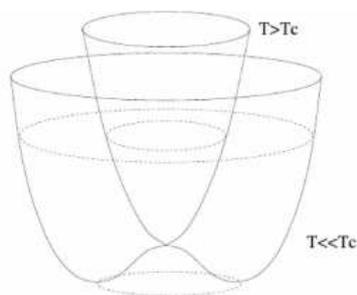


Figura 3.4: Esquema da representação do potencial complexo de acordo com a temperatura crítica  $T_c$ .

### 3.3 Monopolos Magnéticos

Este tipo de defeito, por sua vez, é caracterizado pela presença de pequenos pontos com cargas magnéticas [Figura (3.5)]. Acredita-se que defeitos tipo monopolos tenham sido formados durante diversos tipos de transições de fases [13].

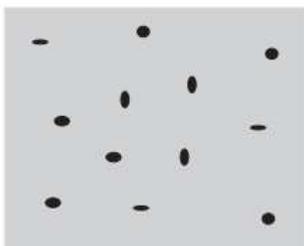


Figura 3.5: Representação esquemática de defeitos tipo monopolos.

Assim como os defeitos tipo paredes, os monopolos são extremamente densos. Para a escala de GUT (Grand Unified Theories), supõe-se que a massa de um monopolo tenha sido da ordem de  $10^{16}$  GeV, gerando algo conhecido como o problema dos monopolos, já que os efeitos de tal densidade de massa deveriam ser observados atualmente. Desse modo, o problema dos monopolos foi a principal motivação para a teoria inflacionária, na qual a densidade dos monopolos poderia ter sido reduzida praticamente a zero [17].

Em uma teoria de campos, se aumentarmos o número de componentes reais de  $\phi$  para 3 e considerarmos o seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (3.3.7)$$

com

$$\phi^2 = \sum_{k=1}^3 \phi_k^2, \quad (3.3.8)$$

obteremos uma densidade de lagrangiana capaz de prever defeitos pontuais em sua quebra de simetria [13, 22]. Neste caso, temos que os estados degenerados de vácuo são os pontos de uma esfera bidimensional. A simetria quebrada aqui é do tipo  $O(3)$ .

### 3.4 Paredes de Domínio com Simetria $Z_2 \times Z_3$

As teorias da Física de Partículas baseia-se na compreensão do conceito de simetria. Sendo aissim, no caso do Modelo Padrão, as partículas elementares que interagem via forças nucleares forte e fraca são descritas pelos grupos  $SU(2) \times SU(3)$ . Temos, portanto, uma motivação para considerar um modelo que possui a simetria  $Z_2 \times Z_3$ , que é um subgrupo discreto (centro do grupo) de  $SU(2) \times SU(3)$ . Por esta razão introduzimos o modelo descrito em [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\sigma, \phi, \chi) \\ & + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi - f \sigma \bar{\psi} \psi + \lambda(\phi + \chi) \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

O modelo contém três campos escalares reais acoplados via potencial  $V(\sigma, \phi, \chi)$ . O campo spinorial está acoplado com os campos escalares via acoplamento de Yukawa  $f \sigma \bar{\psi} \psi$  e  $\lambda(\phi + \chi) \bar{\psi} \psi$  [23]. Temos que o potencial é escolhido para fornecer o padrão esférico para uma rede de paredes de domínios na sua superfície, dado por

$$\begin{aligned} V(\sigma, \phi, \chi) = & \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 (\sigma - \sigma_0)^2 + \lambda^2 (\phi^2 + \chi^2)^2 - \lambda^2 \phi (\phi^2 + 3\chi^2) \\ & + \left[ \lambda \mu \left( \sigma - \frac{1}{2} \sigma_0 \right)^2 - \frac{9}{4} \lambda^2 \right] (\phi^2 + \chi^2) + \epsilon \sigma^3, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

onde  $\epsilon\sigma^3$ , gera um pequeno deslocamento no potencial em  $\sigma = \sigma_0$ .

Neste cenário, a quebra espontânea da simetria  $Z_2$  produz uma parede de domínios sob a troca  $\sigma \rightarrow \sigma - \frac{1}{2}\sigma_0$ . Esta parede é uma armadilha para os outros dois campos  $\phi$  e  $\chi$  com uma simetria  $Z_3$  na sua superfície, a qual dar lugar a uma rede de paredes de domínios devido à quebra da simetria  $Z_3$  dentro da parede [24, 25]. Então, na superfície,  $\sigma \simeq \frac{1}{2}\sigma_0$ , os campos  $\phi$  e  $\chi$  desenvolvem vácuos diferentes de zero, com três fases distintas, contribuindo para formar junções de paredes de domínios e, então, uma rede.

Agora, usando as equações de movimento, veremos que no falso vácuo ( $\sigma = \sigma_0$ ) e verdadeiro vácuo ( $\sigma = 0$ ) os campos  $\phi$  e  $\chi$  são diferentes de zero. Para os campos escalares  $\phi, \chi = 0$  e o campo fermiônico  $\psi = 0$ , a teoria (3.4.9) – (3.4.10) permite que o campo  $\sigma$  forme uma solução solitônica que descreverá esta superfície. Figura (3.6).

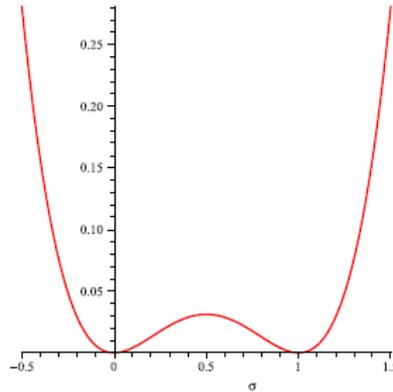


Figura 3.6: Representação do potencial  $V(\sigma)$  para uma bolsa de falso vácuo, neste ponto o mínimo é ligeiramente mais alto,  $\sigma = \sigma_0 = 1$ .

É possível mostrar que as soluções das equações diferenciais de primeira ordem são soluções das equações de movimento. Então para o campo  $\sigma$ , temos

$$\frac{d\sigma}{dr} = \mu\sigma(\sigma - \sigma_0) = W_\sigma, \quad (3.4.11)$$

onde  $W = \mu(\sigma^3/3 - \sigma^2\sigma_0/2)$ , pode ser visto como um superpotencial o que define o potencial como  $V(\sigma, 0, 0) = 1/2W_\sigma^2$  [26]. Então, integrando a equação (3.4.11), obte-

mos

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 1 - \tanh \frac{\mu\sigma_0(R - R_0)}{2} \right]. \quad (3.4.12)$$

Note que, esta solução para ( $R \simeq R_0$ ) na superfície, com o campo  $\sigma$  indo para  $1/2\sigma_0$ , representa aproximadamente [15] uma parede esférica com uma tensão dada por

$$t_h \simeq |W(\sigma_0) - W(0)| = \frac{1}{6}\mu\sigma_0^3. \quad (3.4.13)$$

Desse modo, no regime  $\sigma \simeq 1/2\sigma_0$ , os campos escalares  $\phi$  e  $\chi$  com a simetria  $Z_3$ , descrevem junções triplas de paredes de domínios. A Figura 3.7, permite a formação de uma rede de defeitos que é um arranjo simétrico das junções de defeitos [27].

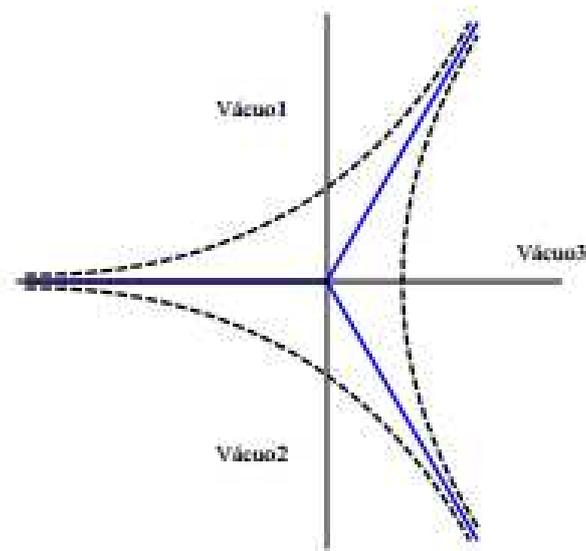


Figura 3.7: Representação de uma junção tripla.

Dependendo da simetria  $Z_N$  do modelo, podem existir redes de defeitos quadradas, hexagonais e dodecagonais [28]. Dentro das formas das redes de defeitos as mais que nos chama a atenção são as hexagonais, devido a facilidade de formação e a sua semelhança com o grafeno. Estas redes hexagonais podem ser construídas a partir de modelos que tem simetria  $Z_3$ . Como foi mencionado acima, com esta simetria

favorece o aparecimento de junção tripla. A partir desta junção pode-se formar uma rede hexagonal [11]. Nas Figuras (3.7) e (3.9), os vértices formam uma junção tripla e podemos identificar os hexágonos do arranjo com os vácuos do sistema (1; 2; 3) de modo que dois vácuos com uma mesma borda comum do hexágono, não tenham o mesmo índice.

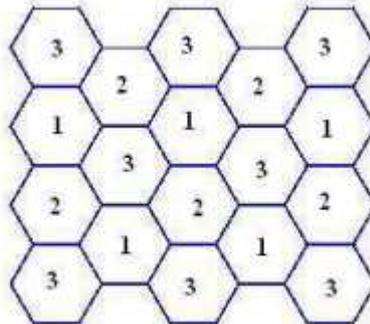


Figura 3.8: Representação de uma rede hexagonal.

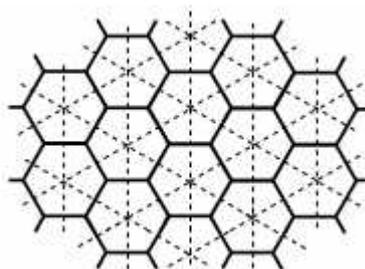


Figura 3.9: Representação de uma rede hexagonal com linhas tracejadas. As linhas tracejadas indicam a malha dupla, formada por triângulos equiláteros.

Na aproximação de parede fina, cada segmento da rede pode ser representado por uma parede de domínios (kink) da forma

$$\phi_Z = \frac{3}{4}, \quad (3.4.14)$$

$$\chi_Z = \frac{3}{4} \sqrt{3} \tanh \sqrt{\frac{27}{8}} \lambda (Z - Z_0). \quad (3.4.15)$$

Os outros segmentos podem ser obtidos fazendo uma rotação de  $120^\circ$  e  $240^\circ$  no plano dos campos  $\phi$  e  $\chi$  respectivamente.

## Capítulo 4

# O Potencial Efetivo e sua Conexão com a Temperatura Finita

### 4.1 O Funcional Gerador das Funções de Green

A forma mais usual de quantização de campos é descrita através das integrais de trajetória ou de Feynman [2, 3, 29, 30, 31, 32, 33], dada por

$$W[J] = \langle 0|0 \rangle^J = N \int D\phi e^{i \int (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J\phi) d^4x}, \quad (4.1.1)$$

onde  $W[J]$  ou  $\langle 0, 0 \rangle^J$  é a amplitude de transição vácuo-a-vácuo na presença de uma fonte externa  $J$ ,  $N$  é a constante de normalização e  $\mathcal{L}$  lagrangiana do sistema.

O funcional  $W[J]$ , também conhecido como o funcional gerador das funções de Green, pode ser escrito em termos de uma expansão funcional,

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n g^n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (4.1.2)$$

sendo  $g^{(n)}$  a função de Green de  $n$  partículas com spin nulo, dada por

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0}. \quad (4.1.3)$$

Numa teoria para uma partícula livre, descrita pela lagrangiana do primeiro modelo da Seção 2.1. O funcional de vácuo  $W[J]$ , pode ser calculado usando a equação (4.1.1), obtendo-se

$$W[J] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_1) J(x_2)}, \quad (4.1.4)$$

onde

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}, \quad (4.1.5)$$

é o propagador de Feynman. De modo que, podemos associar este propagador com as funções de Green apresentadas na equação (4.1.3). Então, para duas partículas temos

$$g^{(2)}(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2), \quad (4.1.6)$$

para o caso de quatro partículas, ficamos

$$\begin{aligned} g^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (i^2) \left[ \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) \right. \\ &\quad + \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) \\ &\quad \left. + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3) \right], \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

e assim por diante, com  $g^{(n)} = 0$ , para  $n$  ímpar, no caso livre.

Para uma teoria com um termo de interação do tipo  $(\lambda/4!)\phi^4$ , onde a mesma é descrita pela lagrangiana da Seção 2.2, temos que o  $W[J]$  assume a forma

$$W[J] = \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int}\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] W_0[J], \quad (4.1.8)$$

onde  $\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ . De modo análogo, podemos encontrar as funções de Green para o caso da teoria como interação. Daí

$$\begin{aligned} g^{(2)}(x_1, x_2) &= i \left[ \Delta_F(x_1 - x_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \lambda \int d^4x i \Delta_F(x_1 - x) i \Delta_F(x - x) i \Delta_F(x - x_2) + O(\lambda^2) \right] \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

e

$$\begin{aligned} g^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (i^2) \left[ \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda \Delta_F(x_1 - x_2) \int d^4x i \Delta_F(x_3 - x) i \Delta_F(x - x) i \Delta_F(x - x_4) \dots \left. \right] \\ &\quad - i \lambda \int d^4x i \Delta_F(x_1 - x) i \Delta_F(x_2 - x) i \Delta_F(x_3 - x) i \Delta_F(x_4 - x) \\ &\quad + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

A fim de tornar mais intuitiva as representações matemáticas para a Eletrodinâmica Quântica (QED), usaremos a notação gráfica. Assim, podemos representar estas funções de Green por gráficos de Feynman. Figuras (4.1) e (4.2).

$$g_0^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \text{---} x_2$$

$$g_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_3 \\ x_2 \text{---} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_4 \\ x_2 \text{---} x_3 \end{array}$$

Figura 4.1: Representação gráfica das funções de Green para duas e quatro partículas, no caso livre.

$$g^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \text{---} x_2 + \frac{1}{2} x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + \dots$$

$$g^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} \bigcirc \text{---} x_4 \end{array} + \dots + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} \times \text{---} x_4 \end{array}$$

Figura 4.2: Representação gráfica das funções de Green para duas e quatro partículas, no caso não livre.

Nas Figuras (4.1) e (4.2) cada círculo representa um loop de correção quântica exigida por causa do termo de interação que é o vértice quadrilinear, representado graficamente pelo X na expansão cujo fator é  $-i\lambda$ . Portanto, cada gráfico na expansão foi construído a partir dos vértices e propagadores da teoria. Toda linha cujas extremidades terminam em vértices é chamada linha interna e qualquer outra que possuir alguma extremidade solta é chamada linha externa.

As funções de Green encontradas anteriormente são desconexas. No entanto é mais conveniente trabalhar com funções de Green conexas. Para isto, introduzimos um funcional gerador  $X[J]$  para funções de Green conexas, definido por

$$W[J] = \langle 0|0 \rangle^J = e^{iX[J]}. \quad (4.1.11)$$

No formalismo de integrais de trajetória, a equação (4.1.11) é equivalente a (4.1.1), podendo ser reescrita como

$$e^{iX[J]} = N \int d\phi e^{i[S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)]}, \quad (4.1.12)$$

onde

$$S[\phi] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + V(\phi(x)) \right], \quad (4.1.13)$$

é a ação clássica. No entanto, podemos representar (4.1.11) de forma análoga à (4.1.2), da seguinte forma

$$iX[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n G^n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (4.1.14)$$

onde, temos que

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n X[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0}. \quad (4.1.15)$$

Para o caso de uma partícula livre, obtemos

$$iX[J] = -\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_1) J(x_2), \quad (4.1.16)$$

de onde não é difícil concluir que,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = g^{(2)}(x_1, x_2), \quad (4.1.17)$$

com  $G^n = 0$  para  $n > 2$ .

Para o caso com interação, as funções de Green conexas são das graficamente pela Figura (4.3)

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \text{---} x_2 + \frac{1}{2} x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} x_2 + \dots$$

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_3 \quad x_4 \end{array}$$

Figura 4.3: Representação gráfica das funções de Green conexas para duas e quatro partículas, caso não livre.

## 4.2 Ação Efetiva e Potencial Efetivo

O campo clássico  $\phi_c(x)$  é definido como a derivada funcional de  $X[J]$  com respeito a  $J(x)$ . Daí

$$\phi_c(x) = \frac{\delta X[J]}{\delta J(x)} = \langle 0|\widehat{\phi}|0\rangle^J. \quad (4.2.18)$$

No limite em que a perturbação tende a zero  $J \rightarrow 0$  na expressão (4.2.18), encontramos o vácuo quântico que pode ser diferente do vácuo clássico. Por apresentar quebra espontânea de simetria que é caracterizada por um campo com valor esperado de vácuo não nulo.

Então, interpretamos  $\phi_c(x)$  como o valor esperado de vácuo normalizado de um operador  $\widehat{\phi}$  na presença de uma fonte externa  $J(x)$ . De modo que, devemos tratar esse valor esperado,  $\phi_c(x)$ , como uma variável conjugada de  $J(x)$ .

Com isso, aplicando a transformada funcional de Legendre em  $X[J]$ , obtemos

$$\Gamma[\phi_c(x)] = X[J(x)] - \int d^4x J(x)\phi_c(x), \quad (4.2.19)$$

onde, o funcional  $\Gamma[\phi_c(x)]$  é o gerador das funções de Green *1PI* (irreduzíveis a uma partícula única). O qual é chamado de ação efetiva.

Em virtude de estarmos tratando de uma teoria com interações haverá correções quânticas. Com isso, não podemos calcular exatamente  $\phi_c(x)$  e  $\Gamma[\phi_c(x)]$ . Em geral fazemos uma expansão funcional. Dada por

$$\Gamma[\phi_c(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x \dots \int d^4x_n \Gamma^n(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_n), \quad (4.2.20)$$

onde,  $\Gamma^n(x_1, \dots, x_n)$  se refere as funções de Green *1PI*, também conhecida como funções vértice de n-pontos.

Formalmente, podemos escrever  $\Gamma[\phi_c(x)]$  como uma expansão local somada a correções, através da expansão dos campos  $\phi_c(x_i)$ ,  $i \neq 1$ , em torno do ponto  $x_1$ . Assim, temos

$$\Gamma[\phi_c(x)] = \int [-V_{eff}(\phi) + F(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu(\phi) + \dots] d^4x, \quad (4.2.21)$$

onde os coeficientes  $-V_{eff}$  e  $F$  são funções de  $\phi(x)$ .

Para uma configuração de campo constante, isto é  $\phi_c(x) = \phi_c$ , todos os termos da expansão (4.2.21) se anulam, exceto o primeiro, de maneira que

$$\Gamma[\phi_c] = - \int -V_{eff}(\phi_c) d^4x. \quad (4.2.22)$$

Desta forma, a função  $-V_{eff}$  é a generalização quântica do potencial clássico e é denominada potencial efetivo. Então, devemos ter algo como

$$V_{eff}(\phi_c) = V_0(\phi_c) + O(\hbar), \quad (4.2.23)$$

onde  $O(\hbar)$  representa as correções quânticas por meio de expansão em loop. No entanto por simplicidade, só avançaremos o cálculo até a ordem de 1-loop, ou seja

$$V_{eff}(\phi_c) = V_0(\phi_c) + \hbar V_1(\phi_c). \quad (4.2.24)$$

Desse modo, a equação (4.2.22) pode ser rescrita explicitamente como

$$\Gamma_0[\phi_c] + \hbar \Gamma_1[\phi_c] = - \int [-V_0(\phi_c) + \hbar V_1(\phi_c)] d^4x. \quad (4.2.25)$$

Note que, o objetivo agora é calcular a ação efetiva  $\Gamma_1[\phi_c]$  para obtermos a contribuição quântica  $\hbar V_1(\phi_c)$  para o potencial efetivo.

A expansão em loop até a primeira ordem em  $\hbar$  para  $X[J]$  pode ser obtida da equação (4.1.12). Lembrando que a ação pode ser expressada por

$$S[\phi, J] = S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x). \quad (4.2.26)$$

Então, expandindo  $S[\phi]$  funcionalmente em torno de um campo  $\phi_0$  fazendo um deslocamento no campo  $\phi$  da forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi_0 + \hbar^{1/2}\phi(x), \quad (4.2.27)$$

de modo que

$$\begin{aligned} S[\phi_0, \phi] = S[\phi_0] &+ \hbar^{1/2} \int d^4x \frac{\delta S[\phi(x)]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\phi_0} \phi(x) \\ &+ \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\phi=\phi_0} \phi(y) + \dots, \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

e considerando que  $\phi_0$  minimiza a ação clássica temos que

$$\left. \frac{\delta S[\phi(x)]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\phi_0} = -J(x), \quad (4.2.29)$$

com isso, podemos reescrever (4.2.26) como

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0} \phi(y). \quad (4.2.30)$$

Note que, a parte linear de (4.2.28) é cancelada pela parte linear, também, submetida a (4.2.27) de  $S[\phi, J]$  explicitamente dada por (4.2.26).

Nesta expansão, apenas tomamos a primeira contribuição não clássica representada pela primeira potência inteira de  $\hbar$  para assegurarmos uma correção quântica a nível de 1-loop.

Agora usando (4.1.12) na qual introduziremos o parâmetro  $\hbar$  de modo a compensar a introdução feita em (4.2.27) a qual faz aparecer este parâmetro em (4.2.30), temos que

$$\begin{aligned} \int d\phi e^{i\hbar^{-1} \left[ S[\phi_0, J] + \frac{\hbar}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0} \phi(y) \right]} &= \\ \exp \left\{ (i\hbar^{-1} S[\phi_0, J]) \int d\Phi e^{i \left[ \frac{1}{2} \Phi i \Delta^{-1}(\phi_0; x, y) \Phi \right]} \right\} &= \\ \exp \left\{ i\hbar^{-1} S[\phi_0, J] - \frac{1}{2} \text{LnDet} i \Delta^{-1}(\phi_0; x, y) \right\} &= \\ \exp \{ i\hbar^{-1} X[J] \}, & \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

onde usamos o fato de que,

$$\left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0} = i \Delta^{-1}(\phi_0; x, y), \quad (4.2.32)$$

sendo  $i \Delta^{-1}(\phi_0; x, y) = M$  é o inverso do propagador do campo bosônico  $\phi$  no espaço de Minkowski e também que

$$\int d\phi e^{i \left( \frac{1}{2} \Phi M \Phi \right)} = (\text{Det} M)^{-1/2}, \quad (4.2.33)$$

onde é uma continuação analítica de uma integral Gaussiana para um caso de integração funcional. Assim, de (4.2.31) temos que

$$X[J] = S[\phi_0, J] + i\hbar \frac{1}{2} \text{LnDet} M. \quad (4.2.34)$$

Aplicando (4.2.34) na transformada funcional Legendre apresentada em (4.2.19), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_0] &= S[\phi_0, J] + i\hbar\frac{1}{2}LnDetM - \int d^4x J(x)\phi_0(x) \\ &= S[\phi_0, J] + i\hbar\frac{1}{2}LnDetM.\end{aligned}\quad (4.2.35)$$

A segunda parcela em (4.2.35) é exatamente a ação efetiva,  $\Gamma[\phi_0]$ , que precisamos para encontrar  $V_1[\phi_0]$ . Então, para  $\phi_0 = \phi_c$  (constante), usando (4.2.22) e (4.2.25), encontramos

$$- \int d^4x V_{eff} = - \int d^4x V_0(\phi_c) + i\hbar\frac{1}{2}LnDetM. \quad (4.2.36)$$

A equação (4.2.36), pode ser reescrita no espaço dos momentos como

$$- \int d^4x V_{eff} = - \int d^4x V_0(\phi_c) + i\hbar\frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} LnM. \quad (4.2.37)$$

Então, evidenciando o potencial efetivo, ficamos

$$V_{eff} = V_0(\phi_c) - i\hbar\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} LnM. \quad (4.2.38)$$

A extensão deste resultado para vários campos bosônicos acoplados, usando (4.2.31) é imediata. Logo

$$V_{eff}(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = V_0(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) - i\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} LnDetM, \quad (4.2.39)$$

onde,  $M$  é uma matriz diagonalizável. Além disso, fizemos  $\hbar = 1$  para que continuemos com a convenção adotada desde do início.

### 4.3 Conexividade com a Temperatura Finita

Para tornar o cenário mais realístico introduziremos os efeitos da Temperatura, para analisarmos o cenário cosmológico, uma vez que se sabe que, a evolução cosmológica ocorre por meio de expansão e refrigeração. Então, o fenômeno de quebra espontânea de simetria aqui torna-se fundamental para a geração de defeitos topológicos

tipo paredes de domínios e junções. Em direção a esse objetivo, a fim de investigar como os estados de vácuo do sistema de  $n$  campos escalares reais acoplados com simetria discreta  $Z_N$  muda quando as correções da temperatura finita são introduzidas [4, 29, 34, 35, 36] .

Analisando apenas o loop (correções quânticas) para  $n$  campos, temos

$$V_1(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Ln Det M, \quad (4.3.40)$$

onde a matriz  $M$  é

$$M = \begin{pmatrix} k^2 + V_{\phi_{c1}\phi_{c1}} & V_{\phi_{c1}\phi_{c2}} & \cdots & V_{\phi_{c1}\phi_{cn}} \\ V_{\phi_{c2}\phi_{c1}} & k^2 + V_{\phi_{c2}\phi_{c2}} & \cdots & V_{\phi_{c2}\phi_{cn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{\phi_{cn}\phi_{c1}} & V_{\phi_{cn}\phi_{c2}} & \cdots & k^2 + V_{\phi_{cn}\phi_{cn}} \end{pmatrix} \quad (4.3.41)$$

Continuando com a configuração de campos uniformes, Lembrando que  $M$  é diagonalizável escrevemos (4.3.40) como

$$V_1(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [Ln(k^2 + M_1^2) + Ln(k^2 + M_2^2) + \dots + Ln(k^2 + M_n^2)]. \quad (4.3.42)$$

Para obtermos os efeitos térmicos vamos usar o mecanismo de Matsubara. Daí

$$\int dk_0 \rightarrow \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty}, \quad k_0 \rightarrow \frac{2n\delta\pi}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad (4.3.43)$$

onde,  $T$  é a temperatura. Neste caso podemos reescrever (4.3.42), como

$$V_1(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = \frac{1}{2\beta} \sum_i^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{4-1}k}{(2\pi)^{4-1}} Ln\left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + E_{M_i}^2\right), \quad (4.3.44)$$

sendo,  $E_{M_i}^2 = \vec{k}^2 + M_i^2$ , com  $M_1^2 = V_{\phi_{c1}\phi_{c1}}$ ,  $M_2^2 = V_{\phi_{c2}\phi_{c2}}, \dots$ ,  $M_n^2 = V_{\phi_{cn}\phi_{cn}}$ . Agora, trabalhando no espaço-tempo. Neste caso, após executar a soma e a integração temos, levando em conta apenas os efeitos de altas temperaturas

$$V_1(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = \frac{1}{24\beta^2} (M_1^2 + M_2^2 + \dots + M_n^2), \quad (4.3.45)$$

ou melhor,

$$V_1(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = \frac{T^2}{24} (V_{\phi_{c1}\phi_{c1}} + V_{\phi_{c2}\phi_{c2}} + \dots + V_{\phi_{cn}\phi_{cn}}). \quad (4.3.46)$$

Finalmente, o potencial efetivo relacionado aos efeitos térmicos é dado por

$$V_{eff}(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) = V_0(\phi_c^1, \phi_c^2, \dots, \phi_c^n) + \frac{T^2}{24} (V_{\phi_{c1}\phi_{c1}} + V_{\phi_{c2}\phi_{c2}} + \dots + V_{\phi_{cn}\phi_{cn}}). \quad (4.3.47)$$

Dê forma análoga, podemos reescrever o potencial efetivo relacionado a efeitos térmicos pode ser escrito em uma forma mais compacta na intenção de analisarmos o seu comportamento. Assim, vamos considerar um sistema de três campos escalares reais acoplados com simetria discreta  $Z_2 \times Z_3$ . Desse modo, ficamos

$$V_{eff}(\phi_c^1, \phi_c^2, \phi_c^3) = V_0(\phi_c^1, \phi_c^2, \phi_c^3) + \frac{T^2}{24} (V_{\phi_{c1}\phi_{c1}} + V_{\phi_{c2}\phi_{c2}} + V_{\phi_{c3}\phi_{c3}}). \quad (4.3.48)$$

## 4.4 Paredes de Domínio com Simetria $Z_2 \times Z_3$ em Temperatura Finita

Devido à possibilidade de aplicações à cosmologia, vamos agora estudar o potencial efetivo à temperatura finita para o modelo apresentado na seção (3.4), onde vimos três campos escalares reais acoplados com simetria discreta  $Z_2 \times Z_3$ , gerando uma rede de paredes de domínios vivendo em uma parede de domínios devido a sua quebra espontânea de simetria. Na intenção de restaurar a simetria e observar como se realiza a formação dessas redes de defeitos em temperatura finita [4, 37].

Então, fazendo uma conexão entre os potenciais das equações (3.4.10) e (4.3.48), encontramos o novo potencial em temperatura finita, dada por

$$\begin{aligned} V_{eff}(\sigma, \phi, \chi) &= \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2(\sigma - \sigma_0)^2 + \lambda^2(\phi^2 + \chi^2)^2 - \lambda^2\phi(\phi^2 + 3\chi^2) \\ &+ \lambda\mu\left(\sigma - \frac{1}{2}\sigma_0\right)^2(\phi^2 + \chi^2) - \frac{9}{4}\lambda^2(\phi^2 + \chi^2) + \epsilon\sigma^3 \\ &+ \frac{T^2}{24}\left[6\mu^2\sigma^2 - 6\mu^2\sigma\sigma_0 + \mu^2\sigma_0^2 + 2\lambda\mu\phi^2 + 2\lambda\mu\chi^2 + 16\lambda^2\phi^2\right. \\ &\left.+ 16\lambda^2\chi^2 + 4\lambda\mu\sigma^2 + 4\lambda\mu\sigma_0 + \lambda\mu\sigma_0^2 - 9\lambda^2\right], \end{aligned} \quad (4.4.49)$$

onde  $\phi_c^1 = \sigma$ ,  $\phi_c^2 = \phi$  e  $\phi_c^3 = \chi$ . Então, para restaurarmos a simetria  $Z_2 \times Z_3$  quebrada espontaneamente é necessário que as componentes de massa dos campos, dada por

$$m^2_{\phi_i\phi_i}(T) = \frac{\partial^2 V_T}{\partial \phi_i^2} \Big|_{\phi_i=0}, \quad (4.4.50)$$

tornem-se positiva a partir de alguma temperatura crítica  $T^c$  na qual  $m^2_{\phi_i\phi_i}(T_i^c) = 0$ , com  $i = 1, 2, 3$  correspondendo aos respectivos campos apresentados acima. Desse modo, podemos escrever as componentes de massa dos campos relacionado ao potencial efetivo  $V_{eff}(\sigma, \phi, \chi)$  dado na equação (4.4.49) da seguinte forma

$$m^2_{\sigma\sigma}(T) = \bar{V}_{\sigma\sigma} + \frac{T^2}{24}(\bar{V}_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \bar{V}_{\phi\phi\sigma\sigma} + \bar{V}_{\chi\chi\sigma\sigma}), \quad (4.4.51)$$

$$m^2_{\phi\phi}(T) = \bar{V}_{\phi\phi} + \frac{T^2}{24}(\bar{V}_{\sigma\sigma\phi\phi} + \bar{V}_{\phi\phi\phi\phi} + \bar{V}_{\chi\chi\phi\phi}), \quad (4.4.52)$$

$$m^2_{\chi\chi}(T) = \bar{V}_{\chi\chi} + \frac{T^2}{24}(\bar{V}_{\sigma\sigma\chi\chi} + \bar{V}_{\phi\phi\chi\chi} + \bar{V}_{\chi\chi\chi\chi}). \quad (4.4.53)$$

Onde as barras indica que as derivadas devem ser calculadas nos pontos  $\sigma = \sigma_0/2, \phi = 0$  e  $\chi = 0$ . Sendo assim, Os valores de temperaturas críticas para os quais as componentes de massa dos campos, representadas nas equações (4.4.51), (4.4.52) e (4.4.53), sejam anuladas, são dadas respectivamente por

$$(T_\sigma^c) = \frac{3\mu\sigma_0^2}{3\mu + 2\lambda}, \quad (4.4.54)$$

$$(T_\phi^c) = \frac{27\lambda}{\mu + 8\lambda}, \quad (4.4.55)$$

$$(T_\chi^c) = \frac{27\lambda}{\mu + 8\lambda}. \quad (4.4.56)$$

Simetria existe quando não há quebra espontânea de simetria. Assim, conforme ao que relatamos no Capítulo 3, os defeitos topológicos estão intimamente associados com algum tipo de quebra de simetria no sistema físico.

No entanto, nesse novo cenário de temperatura finita vamos poder verificar a real

existência desses defeitos. Haja em vista que, esses defeitos podem aparecer simultaneamente ou não.

A partir desta análise e de acordo com as equações (4.4.51), (4.4.52) e (4.4.53) onde evidenciam que as componentes de massa são funções uniformemente crescentes de  $T$ , podemos analisar através de dois casos como se dá esse comportamento:

i) para  $T < T^c$ , os campos deve obrigatoriamente "escolher aleatoriamente" entre um dos mínimos, fazendo com que o valor médio das flutuações não seja nulo. Neste caso, a simetria sofre uma transição de fase com quebra espontânea de simetria.

ii) para temperaturas  $T > T^c$ , o sistema apresenta grandes flutuações em torno dos mínimos, entretanto a média dessas flutuações é nula. Com isso, as simetrias são restauradas voltando a ter uma simetria de reflexão.

Então, baseado nesses argumentos vamos investigar três tipos de comportamento regidos por temperaturas diferentes.

I) Usando o campo  $\sigma$  como referência e fazendo  $\phi = 0$ , com  $(T_\sigma^c) < (T_\chi^c)$ .

Consideremos  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $\sigma_0 = 1$ . Obtemos  $T_\sigma^c = \frac{3}{7}$ , nessas condições o comportamento do sistema nos intervalos, fica da seguinte forma:

- $T_\sigma^c < T < T_\chi^c$ , apresenta a possibilidade de termos apenas um defeito gerado pelo campo  $\chi$ ;
- $T < T_\sigma^c < T_\chi^c$ , apresenta quebra espontânea de simetria em ambos os setores, gerando defeitos topológicos. Figura (4.4);
- $T_\sigma^c < T_\chi^c < T$ , apresenta uma restauração completa da simetria em ambos os setores, não há portanto defeitos topológicos. Figura (4.5).

II) Agora, usando o campo  $\chi$  como referência e fazendo  $\sigma = 0$ .

Consideremos  $\mu = 1$  e  $\lambda = 2$ . Obtemos  $T_\chi^c = \frac{54}{17}$ , nessas condições o comportamento do sistema nos intervalos, torna-se:

- $T < T_\chi^c = T_\phi^c$ , apresenta quebra espontânea de simetria em ambos os setores,

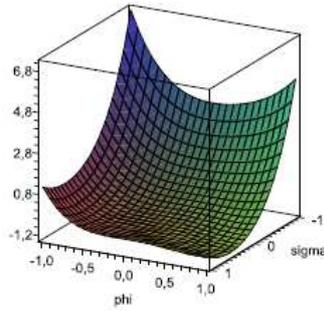


Figura 4.4: Representação do comportamento I), segunda situação. Para o potencial  $V_{eff}(\sigma, \chi)$  em uma temperatura  $T = T_\sigma^c - 2$ .

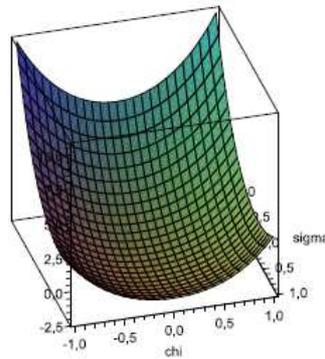


Figura 4.5: Representação do comportamento I), terceira situação. Para o potencial  $V_{eff}(\sigma, \chi)$  em uma temperatura  $T = T_\sigma^c + 2$ .

gerando defeitos topológicos. Figura (4.6);

- $T_\chi^c = T_\phi^c < T$ , apresenta uma restauração completa da simetria em ambos os setores, não há portanto defeitos topológicos. Figura (4.7).

III) Finalmente, temos o caso análogo ao primeiro comportamento, ou seja, o campo  $\sigma$  como referência, fazendo  $\chi = 0$ ,  $(T_\sigma^c) < (T_\phi^c)$  e  $T_\sigma^c = \frac{3}{7}$ , (para  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 2$  e  $\sigma_0 = 1$ ) nos intervalos. Logo:

- $T_\sigma^c < T < T_\phi^c$ , apresenta a possibilidade de termos apenas um defeito gerado pelo campo  $\phi$ ;
- $T < T_\sigma^c < T_\phi^c$ , apresenta quebra espontânea de simetria em ambos os setores, gerando defeitos topológicos.

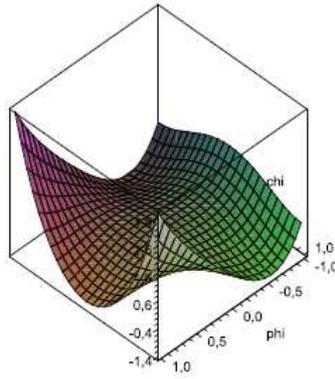


Figura 4.6: Representação do comportamento II), primeira situação. Para o potencial  $V_{eff}(\chi, \phi)$  em uma temperatura  $T = T_\sigma^c - 2$ .

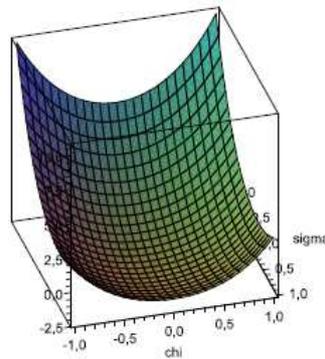


Figura 4.7: Representação do comportamento II), segunda situação. Para o potencial  $V_{eff}(\chi, \phi)$  em uma temperatura  $T = T_\sigma^c + 2$ .

- $T_\sigma^c < T_\phi^c < T$ , apresenta uma restauração completa da simetria em ambos os setores, não há portanto defeitos topológicos.

Este contexto de temperatura finita nos permitiu analisar a real existência dos defeitos topológicos tipo paredes de domínios e junções. Em virtude de sua grande contribuição para a cosmologia foi possível investigarmos as temperaturas críticas para as quais cada um dos defeitos na teoria era formado. Contribuindo assim, para a compreensão de como se dá a formação de uma rede de defeitos que vive dentro de uma parede de domínio para um modelo de três campos escalares reais com simetria discreta  $Z_2 \times Z_3$ .

## Capítulo 5

# Considerações Finais

Neste trabalho tivemos a oportunidade de analisar alguns fundamentos da Teoria Quântica de Campos, destacando um dos pressupostos básicos desta teoria que é o campo possuir caráter local, ou seja, as equações que governam a evolução de um campo num ponto do espaço-tempo dependem somente do comportamento do campo e de suas derivadas naquele ponto, pois a equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange. Esse pressuposto de localidade implica uma noção de interações e excitações pontuais dos campos.

Dando uma ênfase maior ao fenômeno de quebra espontânea de simetria, verifiquemos a sua importância em sistemas físicos que apresentam transição de fase em um meio material que foi introduzido na Física de partículas elementares com o intuito de descrever teorias de gauge. Com esse embasamento, percebemos a sua importância cosmológica, procurando entender a estrutura e evolução do Universo tais como formação de estruturas tipo defeitos topológicos e não-topológicos.

Uma vez que, durante a evolução do universo, onde a temperatura vai gradativamente diminuindo, tais quebra de simetria se manifestam através de diversas transições de fases térmicas que deram origem a diferentes tipos de defeitos topológicos, parede de domínio, cordas cósmicas e monopólos magnéticos, que são caracterizados de acordo com a variedade do vácuo. Por outro lado, fomos a busca da compreensão de como se dá a formação dos defeitos não-topológicos. Desse modo, estudamos o comportamento

de uma rede de defeitos que vive dentro de uma parede de domínio para um modelo de três campos escalares reais com simetria discreta  $Z_2 \times Z_3$ . O campo que governa a simetria  $Z_2$ , após a sua quebra espontânea de simetria gera uma parede de domínio curva, na forma esférica que aprisiona os outros dois campos com uma simetria  $Z_3$ . Que por sua vez, quando sua simetria é quebrada produz uma rede hexagonal formada pelas junções triplas de paredes de domínios.

Finalmente, fizemos um breve resumo de Métodos Funcionais em Teoria Quântica de Campos, com vistas ao entendimento do Potencial Efetivo. Para tornar o cenário cosmológico mais realístico introduzimos os efeitos de temperatura finita, onde analisamos o potencial efetivo à temperatura finita para o modelo de três campos escalares reais acoplados com simetria discreta  $Z_2 \times Z_3$ , gerando uma rede de paredes de domínios vivendo em uma parede de domínios devido a sua quebra espontânea de simetria. Na intenção de restaurar a simetria e observar como se realiza a formação dessas redes de defeitos investiguemos as temperaturas críticas que possam formar cada defeito. Como perspectivas futuras, pretendemos generalizar esse trabalho para uma teoria com simetria discreta  $Z_N$ . Com isso, esperamos que os  $n$  campos que compõem a teoria, tenha valores esperados de vácuo não nulo que minimiza o potencial, cujo objetivo é produzir defeitos topológicos tipo paredes de domínios e junções.

# Bibliografia

- [1] J.J.P. Sobrinho e A.C. Tort, Ver. Bras. Ens. Fís. 23, 401 (2001).
- [2] R. Jackiw, Phys.Rev. D 9, 1686 (1974).
- [3] F.A. Brito: Dissertação de Mestrado: Potenciais Efetivos em Sistemas Tipo Chern-Simons, (Universidade Federal da Paraíba, UFPB, 1997).
- [4] F.A. Brito and D. Bazeia, Phys. Rev. D56, 7869 (1997).
- [5] D. Bazeia and F.A. Brito, Phys. Rev. D62, 101701 (R) (2000).
- [6] F. Halzen, A.D. Martin, Quarks and Leptons An Intoductory Course in Modern Particle Physics, (1984).
- [7] H. Goldstein, Classical Mechanics, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1980).
- [8] M. Kaku, Quantum Field Theory A Modern Introduction - (Oxford University Press, 1993).
- [9] J. Goldstone, Nuovo Cimento, 19 (1961) 154.
- [10] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys.Rev.127 (1962) 965.
- [11] D. Bazeia, Scalar fields: from domain walls to nanotubes and fulerenes. Brazilian Journal of Physics, Brazil, v. 32, n. 4, p. 869-879, 2002.
- [12] <http://www.damtp.cam.ac.uk/cosmos/legacy/Public/galaxy.html>
- [13] T.W.B. Kibble, Aust.J.Phys.50,697 (1997)

- [14] H.S.Jesuino: Dissertação de Mestrado: Paredes de Domínios Supercondutoras e Condensação Taquiônica (Universidade Federal de Campina Grande - UFCG).
- [15] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990).
- [16] [http://byss.uoregon.edu/js/imagens/inflation\(3\)](http://byss.uoregon.edu/js/imagens/inflation(3)).
- [17] A.M. Srivastava, *Pranama-J.Phys.*,53,10691999.
- [18] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge/UK, 1994).
- [19] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, 1985).
- [20] F.A. Brito, H.S. Jesuino. Multi-scalar tachyon potential on non-BPS domain walls. *The Journal of High Energy Physics (Online)*, v. 2010, p. 31, 2010.
- [21] N.Hatayama, R.Konno, *J. Phys. Conf. Ser.* 200 012056, 2010.
- [22] T. Vachaspati, *Lectures on Cosmic Topological Defects. Summer School on Astroparticle Physics and Cosmology, Trieste (2000)*.
- [23] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. D* 13, 3398 (1976).
- [24] H.S.M. Coxeter, *Regular Complex Polytopes, Second Edition* Cambridge University Press, New York, (1991).
- [25] V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Class. Quant. Grav.* 18,1535 (2001).
- [26] D. Bazeia and F.A. Brito, *Phys. Rev. D* 61, 105019 (2000).
- [27] D. Bazeia and F.A. Brito, *Phys. Rev. Lett.* 84, 1094 (2000).
- [28] P. M. Saffin. Tiling with Almost-BPS-Invariant Domain-Wall Junctions. *Physical Review Letters*, v. 83, p. 4249-4252, 1999.

- [29] A.F. Rodrigues, A Integral de Feynman das Origens as Teoria, CBPF, 2010 (Notas de Aula)
- [30] J.C. Romão, Introdução a Teoria de Campos, Parte 1 e 2, Instituto Técnico Superior, 2010 (Notas de Aula).
- [31] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, 1th Ed. Addison-Wesley, 1995.
- [32] P. Raimond, Field Theory: A Modern Primer, 2nd Ed., Addison-Wesley, Reading MA, 1989.
- [33] W. Greiner, J. Reinhardt, Field Quantization, 1th Ed., Springer, 1996.
- [34] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D 9, 3320 (1974).
- [35] S. Weinberg, Phys. Rev. D 9, 3357 (1974).
- [36] R. Jackiw, Phys.Rev. D 9, 1686 (1974).
- [37] W.M.S. Silva: Dissertação de Mestrado: Rede de Defeitos em Estrelas de Sólitos em Temperatura Finita (Universidade Federal de Campina Grande, UFCG, 2010).