



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS**

**FERRAMENTAS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS PARA A**  
**DESCRIÇÃO DA SECAGEM DE SÓLIDOS NA FORMA**  
**DE CILINDROS E DE ELIPSÓIDES**

**AUTORA: Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva**

**ORIENTADORES: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Josivanda P. Gomes**

**Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva**

**Campina Grande, PB, março de 2012**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA DE PROCESSOS**



**FERRAMENTAS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS PARA A  
DESCRIÇÃO DA SECAGEM DE SÓLIDOS NA FORMA  
DE CILINDROS E DE ELIPSÓIDES**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Doutorado em Engenharia de Processos da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Processos.

**AUTOR: Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva**

**ORIENTADORES: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Josivanda P. Gomes**  
**Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva**

**Campina Grande, PB**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586f

Silva, Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e.

Ferramentas analíticas e numéricas para a descrição da secagem de sólidos na forma de cilindros e de elipsóides / Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva. – Campina Grande, 2012.

254. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Orientadores: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Josivanda P. Gomes e Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva.

Referências.

1. Coordenadas Cilíndricas e Generalizadas. 2. Difusão. 3. Soluções Analíticas e Numéricas. 4. Volumes Finitos. 5. Regime Transiente. 6. Banana-Passa. I. Título.

CDU 634.563 (043)


MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOURADO DE  
**CLEIDE MARIA DINIZ PEREIRA DA SILVA E SILVA** APRESENTADA AO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS DO  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
CAMPINA GRANDE.

Tese de Doutorado **aprovada com distinção** em 23 de março de 2012



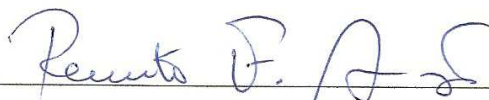
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Josivanda Palmeira Gomes – Orientadora

UFCG/CTRN/UAEA<sub>g</sub>



Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva – Orientador

UFCG/CCT/UAF



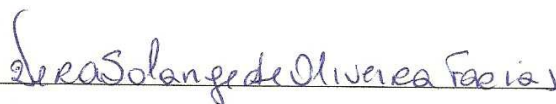
Dr. Renato Fonseca Aragão – Examinador externo

UFCG/CTRN/ UAEA<sub>g</sub>



Prof. Dr. Fernando Fernandes Vieira – Examinador externo

UEPB/DESA/CCT



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Vera Solange de Oliveira Farias – Examinadora externa

UFCG/CES/UAE



Prof. Dr. Vital Araújo Barbosa de Oliveira – Examinador externo

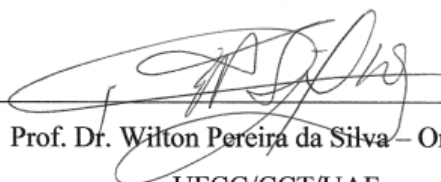
UEPB/CCT/UAF

Campina Grande, março de 2012  
PB, Brasil

Este exemplar corresponde à versão final da Tese de Doutorado em Engenharia de Processos, defendida por Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva e aprovada pela banca examinadora em 23 de março de 2012.

  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Josivanda Palmeira Gomes – Orientadora

UFCG/CTRN/UAEAg

  
Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva – Orientador

UFCG/CCT/UAF

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:

Aos meus pais José Florêncio da Silva e Maria José Diniz Silva (*in memoriam*) pelo apoio durante toda a minha trajetória de vida, sempre me incentivando na busca do conhecimento.

Ao meu querido esposo Wilton Pereira da Silva pelo grandioso incentivo, apoio, compreensão e dedicação em todas as horas.

Aos meus filhos Cleiton, Diogo e Uilma, e também às minhas noras Aline e Virgínia, pelo apoio e incentivo.

À minha neta Júlia, por compreender a minha ausência durante a elaboração deste trabalho.

À minha irmã Eliane, pelo valioso apoio e incentivo.

À Marladdy, que sempre esteve comigo em todos os momentos dedicado a este trabalho.

"É melhor lançar-se à luta em busca do triunfo mesmo expondo-se ao insucesso, que formar fila com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito; e vivem nessa penumbra cinzenta sem conhecer nem vitória nem derrota."

Theodore Roosevelt

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me dado força, paciência, persistência, determinação, conforto, saúde e a paz necessária à conclusão de mais uma etapa da minha formação acadêmica.

Ao professor Dr. Wilton Pereira da Silva pela inestimável orientação, pelo incentivo, pelas críticas sempre construtivas, pela amizade e confiança depositada em mim, além da paciência em todos os momentos de dúvidas, pelo carinho e pelas palavras de incentivo que não me deixaram desanimar nunca.

A professora Dra. Josivanda Palmeira pela orientação, incentivo, empenho na orientação e na realização dos experimentos, pelas sugestões sempre construtivas, guiando-me no caminho certo.

Aos membros da Banca Examinadora por disponibilizarem tempo na apreciação deste trabalho, e pelas sugestões que, com certeza contribuirão para a versão final deste trabalho.

Aos meus professores Antônio Gilson Barbosa de Lima (Matemática aplicada à Engenharia de Processos e Condução de Calor), Wilton Pereira da Silva (Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional I e II, O Visual Fortran na Solução de Problemas Numéricos e Seminário II), Alexandre José de Melo Queiroz (Seminário I).

À Universidade Federal de Campina Grande, especialmente à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos, pela oportunidade proporcionada.

Ao coordenador do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Processos, professor Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima, pelo apoio e atenção.



Aos que compõe o Laboratório de Armazenamento e Processamento de Produtos Agrícolas da Unidade Acadêmica de Engenharia Agrícola do Centro de Tecnologia e Recursos Naturais da Universidade Federal de Campina Grande, PB. Especialmente ao Prof. Dr. Mário Eduardo Rangel Moreira Cavalcanti Mata, Dr. Renato Aragão e Paulo de Almeida Farias, pelo apoio dispensado na realização deste trabalho.

Aos colegas que estiveram presentes ajudando na realização da secagem. Wilton Pereira da Silva, Vanessa Santiago, Denise Amaral, Jossyl Amorim, Fernando Gama, João Carlos Soares de Melo, Clenilson Ferreira da Silva, Valério Carlos de Almeida Cruz, Márlis Hudson de Aguiar, Emmanuel Fabiano Marques da Silva e Tiago M. T. Oliveira. Muito obrigado a todos.

Aos meus colegas de doutorado, pelo companheirismo e amizade. Em especial a Denise Amaral, Vanessa Santiago e João Carlos Soares.

À minha amiga Vera Solange de Oliveira Farias pela amizade, estímulo e valiosas contribuições.

De maneira muito especial ao meu querido e amado esposo Wilton Pereira da Silva pelo seu amor, amizade, compreensão, incentivo e incansável apoio. Nas horas mais difíceis, meu esposo foi a minha maior fortaleza e inspiração para a realização deste trabalho.

A todos os autores referenciados.

Por fim, aos não menos importantes, demais amigos e familiares pelo apoio. Agradeço de coração a todos vocês.

# Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>xv</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>xxx</b>
<b>NOMENCLATURA.....</b>	<b>xxxiii</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>xxxviii</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>xxxix</b>
<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 – Justificativa.....	4
1.2 – Objetivos gerais.....	4
1.3 – Objetivos específicos.....	5
1.3 – Principais contribuições deste trabalho.....	6
<b>CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>7</b>
2.1 – Informação sobre a banana.....	9
2.2 – Secagem de frutas.....	11
2.3 – Mecanismos de secagem.....	13
2.4 – Tipos de secagem.....	14
2.5 – Simulação da secagem.....	16
2.5.1 – Modelos empíricos.....	17
2.5.2 – Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis.....	18
2.5.3 – Modelos de difusão líquida.....	19
2.6 – Equação de transporte.....	21
2.7 – Equação de difusão.....	21
2.8 – Solução da equação de difusão.....	22
2.8.1 – Solução analítica na descrição de problemas difusivos.....	24
2.8.2 – Método numérico para a solução de problemas difusivos.....	25

2.8.3 – Formulação para os métodos numéricos.....	27
2.9 – Sistema de coordenadas generalizadas.....	29
2.9.1 – Métricas de uma transformação.....	30
2.9.2 – Métricas de uma transformação inversa.....	34
2.10 – Equação de difusão em coordenadas generalizadas.....	35
2.11 – Equação de difusão em coordenadas curvilíneas ortogonais.....	36
2.11.1 – Equação de difusão em coordenadas cilíndricas.....	37
2.11.2 – Equação de difusão em coordenadas esferoidais oblato.....	38
<b>CAPÍTULO 3 – MATERIAL E MÉTODOS.....</b>	<b>41</b>
Parte A: Modelagem matemática.....	41
3.1 – Hipóteses para a obtenção da solução analítica para a equação de difusão.....	42
3.2 – Solução analítica da equação de difusão para a geometria cilíndrica.....	42
3.3 – Razão de umidade.....	50
3.4 – Determinação de parâmetros termo-físicos.....	50
3.5 – Cilindro finito: solução numérica da equação de difusão.....	52
3.5.1 – Hipóteses para a obtenção da solução numérica para a equação de difusão.....	53
3.5.2 – Solução numérica da equação de difusão: geometria cilíndrica.....	53
3.5.3 – Discretização: volumes internos.....	56
3.5.4 – Volume de controle na fronteira leste: condição de contorno convectiva.....	58
3.5.5 – Volume de controle na fronteira oeste: simetria radial.....	60
3.5.6 – Simetria axial.....	62
3.5.7 – Parâmetro $\Gamma^\Phi$ .....	63
3.6 – Valor médio de $\Phi$ .....	64
3.7 – Equação de difusão bidimensional em domínio arbitrário.....	65
3.7.1 – Discretização da equação de difusão bidimensional em domínio arbitrário.....	66
3.7.2 – Discretização em coordenadas generalizadas: volumes internos.....	67
3.7.3 – Discretização em coordenadas generalizadas: fronteira sul.....	72

3.7.4 – Discretização em coordenadas generalizadas: volume de controle a noroeste.....	77
3.8 – Sólidos obtidos por revolução de áreas planas.....	82
3.9 – Determinação de $\bar{\Phi}$ .....	85
3.10 – Avaliação de $\Gamma^\Phi$ nas faces dos volumes de controle.....	87
3.11 – Discretização em coordenadas generalizadas e cilíndricas: consistências.....	88
3.11.1 – Volumes internos: consistência.....	90
3.12 – Concepção para o otimizador desenvolvido para as soluções numéricas.....	91
3.13 – Software desenvolvido para o cilindro finito.....	96
3.13.1 – Avaliador de expressões e a linguagem Fortran.....	96
3.13.2 – Análise comparativa.....	97
3.13.3 – Interface gráfica.....	97
3.13.4 – Validação do solver desenvolvido para o cilindro finito.....	98
Parte B: Metodologia experimental.....	99
3.14 - Material e procedimentos experimentais.....	99
3.14.1 – Material experimental.....	99
3.14.2 – Procedimentos experimentais.....	102
3.15 – Medidas efetuadas.....	105
3.16 – Malha: Banana inteira.....	106
<b>CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>108</b>
4.1 – Validação das ferramentas analíticas.....	109
4.1.1 – Modelo 1: Condição de contorno do primeiro tipo.....	110
4.1.2 – Modelo 2: condição de contorno do terceiro tipo.....	112
4.2 – Solução numérica: interface gráfica do software “Finite Cylinder”.....	113
4.2.1 – Menus e caixas de diálogos.....	114
4.2.2 – Arquivos gerados durante uma simulação numérica.....	117
4.3 – Solução numérica para o cilindro finito: teste de consistência.....	119
4.4 – Solução numérica para o cilindro finito: simetria axial.....	125
4.5 – Teste de coerência.....	128
4.6 – Validação com a solução analítica: parâmetro termo-físico constantes...	129

4.7 – Validação da solução numérica supondo volume e difusividade variáveis.....	130
4.8 – Secagem de banana em pedaços: Solução analítica.....	134
4.9 – Otimização usando a solução analítica.....	136
4.9.1 – Cinéticas de secagem a 40 °C.....	142
4.9.2 – Cinética de secagem 50 °C.....	143
4.9.3 – Cinética de secagem a 60 °C.....	145
4.9.4 – Cinética de secagem a 70 °C.....	146
4.9.5 – Discussão sobre a descrição da cinética de secagem usando a solução analítica.....	148
4.10 – Distribuição do teor de umidade no interior do cilindro.....	149
4.10.1 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 40 °C.....	149
4.10.2 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 50 °C.....	157
4.10.3 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 60 °C.....	165
4.10.4 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 70 °C.....	173
4.11 – Equação de Arrhenius.....	182
4.11.1 – Difusividade efetiva de massa.....	182
4.11.2 – Coeficiente transferência convectivo de massa.....	184
4.11.3 – Discussão sobre a consideração de parâmetros constantes.....	185
4.12 – Secagem de banana em pedaços: Solução Numérica.....	186
4.12.1 – Encolhimento: expressão para o volume.....	186
4.12.1.1 – Temperatura de 40,0 °C.....	188
4.12.1.2 – Temperatura de 50,0 °C.....	190
4.12.1.3 – Temperatura de 60,0 °C.....	191
4.12.1.4 – Temperatura de 70,0 °C.....	192
4.12.2 – Difusividade efetiva de massa: expressão para a difusividade.....	194
4.12.3 – Otimização usando a solução numérica.....	194
4.12.3.1 – Temperatura de 40 °C.....	195
4.12.3.2 – Temperatura de 50 °C.....	197

4.12.3.3 – Temperatura de 60 °C.....	199
4.12.3.4 – Temperatura de 70 °C.....	201
4.12.4 – Discussão sobre os resultados obtidos para a solução numérica.....	203
4.13 – Distribuição de umidade no interior do cilindro finito.....	203
4.13.1 – Temperatura de 40 °C.....	204
4.13.2 – Temperatura de 50 °C.....	205
4.13.3 – Temperatura de 60 °C.....	206
4.13.4 – Temperatura de 70 °C.....	207
4.14 – Tempo de secagem versus comprimento.....	208
4.14.1 – Discussão sobre modelos de secagem.....	210
4.15 – Secagem de bananas inteiras: solução numérica para elipsóides.....	212
4.15.1 – Banana inteira: elipsoide.....	213
4.15.2 – Equação que descreve a variação do volume adimensional $V/V_0$ ...	213
4.15.3 – Malhas bidimensionais.....	216
4.15.4 – Otimizações e cinéticas de secagem.....	218
4.15.5 – Distribuição de erros.....	221
4.15.6 – Distribuição de umidade.....	222
4.15.7 – Expressão para a difusividade efetiva.....	225
4.15.8 – Coeficiente de transferência convectiva de massa.....	228
<b>CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES .....</b>	<b>230</b>
5.1 – Conclusões.....	230
5.1.1 – Ferramentas analíticas.....	230
5.1.2 – Solução numérica: cilindro finito.....	231
5.1.3 – Secagem de bananas.....	232
5.2 – Sugestões para trabalhos futuros.....	234
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>235</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 –	Formulações de interpolação no tempo.....	28
FIGURA 2.2 –	Sistemas de coordenadas cartesianas e de coordenadas generalizadas.....	30
FIGURA 3.1 –	a) Interseção de um cilindro infinito e de uma parede infinita; (b) Cilindro finito de raio R e comprimento C.....	43
FIGURA 3.2 –	(a) Cilindro finito de raio R e comprimento L; (b) Fatia simétrica do cilindro definida pelo ângulo $\theta$ ; (c) Retângulo para a definição da malha bidimensional.....	54
FIGURA 3.3 –	(a) Malha bidimensional para a solução numérica da equação de difusão no cilindro; (b) Elemento da malha bidimensional destacando o ponto nodal P.....	54
FIGURA 3.4 –	Volume de controle para a geometria cilíndrica.....	55
FIGURA 3.5 –	Tipos de volumes de controle.....	55
FIGURA 3.6 –	Volume de controle interno de ponto nodal P e seus vizinhos ao norte (N), ao sul (S), a oeste (W) e a leste (E).....	56
FIGURA 3.7 –	Volume de controle no contorno leste e seus vizinhos.....	58
FIGURA 3.8 –	Volume de controle na face oeste e seus vizinhos.....	61
FIGURA 3.9 –	Simetria axial: (a) retângulo inteiro; (b) metades simétricas do retângulo; (c) detalhe da malha geratriz.....	62
FIGURA 3.10 –	Fragmento da malha no domínio transformado mostrando o volume de controle interno (P) e seus vizinhos ao norte (N), ao sul (S), a leste (E), a oeste (W), a noroeste (NW), a nordeste (NE), a sudoeste (SW) e a sudeste (SE).....	67
FIGURA 3.11 –	Fragmento da malha no domínio transformado mostrando o volume de controle sul (P) e seus vizinhos ao norte (N), a leste (E), a oeste (W), a noroeste (NW) e a nordeste (NE).....	72
FIGURA 3.12 –	Volume de controle no contorno sul do fragmento de malha destacando: o vetor $\vec{V}_{12}$ na face sul, o vetor $\vec{V}_{1P}$ e a distância $\Delta n_s$ do ponto nodal à face sul.....	73

FIGURA 3.13 –	Fragmento da malha no domínio transformado mostrando o volume de controle P a noroeste e seus vizinhos ao sul (S), a leste (E) e sudeste (SE).....	78
FIGURA 3.14 –	Obtenção de um sólido gerado através da rotação de uma área plana em torno do eixo y.....	82
FIGURA 3.15 –	(a) Volume de controle P obtido pela rotação, em torno de y, de uma área contida num plano vertical. As faces “f” e “b” são referentes a <i>front</i> (anterior) e <i>back</i> (posterior); (b) Sistema de coordenadas generalizadas definido pelos eixos $\xi$ , $\eta$ e $\gamma$ sobre os contornos do volume de controle.....	83
FIGURA 3.16 –	Dois volumes de controle com coeficientes de transporte iguais a: (a) $\Gamma_P^\Phi$ e $\Gamma_E^\Phi$ ; (b) $\Gamma_{eq}^\Phi$ . Para ambas as situações, o nó P dista $d_P$ da face comum e o nó E, $d_E$ .....	87
FIGURA 3.17 –	O retângulo no plano xy, ao girar um ângulo $\theta$ em torno do eixo de rotação y, gera uma fatia do cilindro finito.....	89
FIGURA 3.18 –	Sistema operacional e características do computador usado nesta pesquisa.....	98
FIGURA 3.19 –	Cacho de banana anã, que foi utilizado no experimento.....	100
FIGURA 3.20 –	Faca utilizada para o corte das bananas: (a) destaque da bitola de 2,5 cm; (b) destaque da lamina de corte.....	100
FIGURA 3.21 –	Paquímetro digital, escala milimetrada e o termo-higrômetro digital.....	101
FIGURA 3.22 –	Balança digital utilizado no experimento para as realizar as pesagens.....	101
FIGURA 3.23 –	Secador de sementes de laboratório.....	102
FIGURA 3.24 –	Estufa com circulação ar.....	102
FIGURA 3.25 –	Banana com o grau de maturação utilizado nos experimentos..	103
FIGURA 3.26 –	Os cestos na bandeja do secador com as bananas, nos quatros comprimentos estudados, cortados com as bitolas de: (a) 20,0mm; (b) 10,0 mm; (c) 25,0 mm (d) 15,0 mm.....	104
FIGURA 3.27 –	(a) Metade da banana com casca, (b) A metade da banana descascada, utilizada para a geração da malha.....	106



FIGURA 4.1 –	(a) Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo; (b) cinética de secagem de rizomas de <i>Curcuma longa</i> para a condição de contorno do primeiro tipo.....	110
FIGURA 4.2 –	Dispersão de erros para a cinética de secagem com condição de contorno do primeiro tipo, mostrando: (a) erro médio, (b) ajuste polinomial (terceiro grau).....	111
FIGURA 4.3 –	(a) Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo; (b) cinética de secagem de rizomas de <i>Curcuma longa</i> para a condição de contorno do terceiro tipo.....	112
FIGURA 4.4 –	Dispersão de erros para a cinética de secagem, com condição de contorno do terceiro tipo: (a) erro médio, (b) ajuste polinomial (terceiro grau).....	112
FIGURA 4.5 –	Tela principal do <i>software</i> desenvolvido.....	113
FIGURA 4.6 –	Menu “Finite Cylinder”.....	114
FIGURA 4.7 –	Arquivo com todos os dados a serem informados.....	114
FIGURA 4.8 –	Caixa de mensagem que mostra o tempo de execução.....	115
FIGURA 4.9 –	Menu “General”.....	115
FIGURA 4.10 –	Caixa de diálogo para aquisição de dados para o gráfico 2D.....	116
FIGURA 4.11 –	Caixa de diálogo para aquisição de dados para o gráfico 3D.....	116
FIGURA 4.12 –	Itens de menu “Information”.....	117
FIGURA 4.13 –	Item “Exit”.....	117
FIGURA 4.14 –	Dados relativos ao teste de consistência para a solução numérica, considerando o cilindro finito com volume e propriedades termo-físicas constantes.....	120
FIGURA 4.15 –	Malha bidimensional que gera o cilindro finito, destacando os volumes de controle a nordeste e a sudeste.....	120
FIGURA 4.16 –	Cinética de secagem para os volumes de controle: a) a nordeste, b) a sudeste.....	121
FIGURA 4.17 –	Superposição das duas cinéticas: a nordeste e a sudeste.....	121
FIGURA 4.18 –	Malha bidimensional que gera o cilindro finito, destacando os volumes de controle a noroeste e a sudoeste.....	123
FIGURA 4.19 –	Cinéticas de secagem para os volumes de controle: a) a noroeste, b) a sudoeste.....	123

FIGURA 4.20 –	Superposição das duas cinéticas para os volumes de controle: a noroeste e a sudoeste.....	124
FIGURA 4.21 –	Dados relativos à imposição de simetria axial para o cilindro finito, com volume e difusividade constantes.....	125
FIGURA 4.22 –	Teor de umidade médio adimensional no cilindro finito: (a) sem simetria axial; (b) com simetria axial.....	126
FIGURA 4.23 –	Superposição das duas cinéticas no cilindro finito: sem simetria axial e com simetria axial.....	126
FIGURA 4.24 –	(a) Metade simétrica da malha destacando os seguintes volumes de controle: 1 (sudoeste), 2 (sudeste) e 3 (nordeste); (b) Posição dos pontos 1, 2 e 3 no cilindro.....	128
FIGURA 4.25 –	Teor de umidade local em função do tempo nas regiões definidas por: 1 (sudoeste), 2 (sudeste) e 3 (nordeste).....	128
FIGURA 4.26 –	Superposição das cinéticas de secagem da solução e numérica.	129
FIGURA 4.27 –	Dados para a cinética de secagem considerando um cilindro com volume e difusividade variáveis, com condição de contorno convectiva.....	130
FIGURA 4.28 –	Gráfico da cinética de secagem de bananas utilizando os <i>softwares</i> : a) Finite Cylinder, b) Infinite Cylinder.....	132
FIGURA 4.29 –	Gráfico da superposição das duas cinéticas utilizando os dois <i>softwares</i> .....	132
FIGURA 4.30 –	Esboço da malha para a simulação de um cilindro infinito.....	133
FIGURA 4.31 –	Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 40 °C, para os comprimentos de: (a) C = 10,00 mm; (b) C = 16,70 mm; (c) C = 20,80 mm e (d) C = 25,50mm.....	137
FIGURA 4.32 –	Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 50 °C, para os comprimentos de: (a) C = 10,60 mm; (b) C = 17,49 mm; (c) C = 21,00 mm e (d) C = 28,93mm.....	138

FIGURA 4.33 –	Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 60 °C, para os comprimentos de: (a) C = 10,35 mm; (b) C = 17,45 mm; (c) C = 21,69 mm e (d) C = 27,34 mm.....	139
FIGURA 4.34 –	Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 70 °C, para os comprimentos de: (a) C = 11,98 mm; (b) C = 16,73 mm; (c) C = 21,71 mm e (d) C = 27,30 mm.....	140
FIGURA 4.35 –	Gráficos das simulações das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, usando a solução analítica para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para os comprimentos de: (a) C = 10,00 mm, (b) C = 16,70 mm, (c) C = 20,80 mm, (d) C = 25,50 mm.....	142
FIGURA 4.36 –	Gráfico da simulação das cinéticas de secagem usando a solução analítica, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, com os comprimentos estudados.....	143
FIGURA 4.37 –	Gráficos das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, usando a solução analítica para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para os comprimentos: a) C = 10,60 mm, b) C = 17,49 mm, c) C = 21,00 mm, d) C = 28,93 mm.....	144
FIGURA 4.38 –	Gráfico da simulação das cinéticas de secagem para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para os comprimentos estudados.....	144
FIGURA 4.39 –	Gráficos das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, usando a solução analítica para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para os comprimentos de: a) C = 10,35 mm, b) C = 17,45 mm, c) C = 21,69 mm, d) C = 27,34 mm.....	145
FIGURA 4.40 –	Gráfico da simulação das cinéticas de secagem para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para os comprimentos estudados.....	146

FIGURA 4.41 –	Gráficos das cinéticas de secagem de bananas em pedaços usando a solução analítica, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para os comprimentos de: a) C = 11,98 mm, b) C = 16,73 mm, c) C = 21,71 mm, d) C = 27,30 mm.....	147
FIGURA 4.42 –	Gráfico da simulação das cinéticas de secagem para a temperatura de 70,0 °C, para os comprimentos estudados.....	147
FIGURA 4.43 –	(a) Cilindro finito destacando uma seção circular onde será analisada a distribuição de umidade; (b) Posições em que a distribuição de umidade será analisada: 1) contorno circular superior; 2) seção circular a C/4 da metade do cilindro; 3) seção circular na metade do cilindro.....	149
FIGURA 4.44 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando as distribuições de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,00 mm e raio de 15,25 mm, no tempo específico de 261 min.....	150
FIGURA 4.45 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,00 mm e raio de 15,25 mm no tempo específico de 261 min.....	151
FIGURA 4.46 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando as distribuições de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento de 15,65 mm e raio de 16,70 mm, no tempo específico de 471°min.....	152

FIGURA 4.47 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento de 15,65 mm e raio de 16,70 mm para o tempo específico de 471 min.....	153
FIGURA 4.48 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento 20,80 mm e raio de 16,44 mm, no tempo específico de 687 min.....	154
FIGURA 4.49 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento 20,80 mm e raio de 16,44 mm para o tempo de 687 min.....	155
FIGURA 4.50 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, comprimento de 25,50 mm e raio de 17,00 mm, no tempo específico de 783 min.....	156
FIGURA 4.51 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, com o cilindro de comprimento de 25,50 mm e o raio de 17,00 mm, no tempo específico de 783 min.....	157

FIGURA 4.52 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,60 mm e raio de 14,42 mm, no tempo específico de 201 min.....	158
FIGURA 4.53 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,60 mm e raio de 14,42 mm, no tempo específico de 201 min.....	159
FIGURA 4.54 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 17,49 mm e raio de 13,41 mm, no tempo específico de 417 min.....	160
FIGURA 4.55 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 17,49 mm e raio de 13,41 mm, para o tempo específico de 417 min.....	161
FIGURA 4.56 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,00 mm e raio de 13,86 mm, no tempo específico de 465 min.....	162

FIGURA 4.57 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,00 mm e raio de 13,86 mm, para o tempo específico de 465 min.....	163
FIGURA 4.58 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento de 28,93 mm e raio de 13,24 mm, no tempo específico de 609 min.....	164
FIGURA 4.59 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento de 28,93 mm e raio de 13,24 mm, no tempo específico de 609 min.....	165
FIGURA 4.60 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para o cilindro de comprimento de 10,35 mm e raio de 15,58 mm, no tempo específico de 146 min.....	166
FIGURA 4.61 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para o cilindro de comprimento de 10,35 mm e raio de 15,58 mm, no tempo específico de 146 min.....	167

FIGURA 4.62 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 17,45 mm e raio de 15,66 mm, no tempo específico de 274 min.....	168
FIGURA 4.63 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 17,45 mm e raio de 15,66 mm no tempo específico de 274 min.....	169
FIGURA 4.64 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 21,69 mm e raio de 16,56 mm, no tempo específico de 334 min.....	170
FIGURA 4.65 –	Gráfico da evolução da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 21,69 mm e raio de 16,56 mm, no tempo específico de 334 min.....	171
FIGURA 4.66 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 27,34 mm e raio de 16,57 mm, no tempo específico de 430 min.....	172



FIGURA 4.67 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 27,34 mm e raio de 16,57 mm e no tempo específico de 430 min.....	173
FIGURA 4.68 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 11,98 mm e raio de 12,42 mm para no específico de 108 min...	174
FIGURA 4.69 –	Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 11,98 mm e raio de 12,42 mm e o tempo específico de 108 min.....	175
FIGURA 4.70 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 16,73 mm e raio de 12,28 mm, no tempo específico de 167 min.....	176
FIGURA 4.71 –	Gráfico da evolução de distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C no tempo específico de 167 min.....	177

FIGURA 4.72 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,71 mm e raio de 13,64 mm, no tempo específico de 221 min.....	178
FIGURA 4.73 –	Gráfico da evolução de distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,71 mm e raio de 13,64 mm para o tempo específico de 221 min.....	179
FIGURA 4.74 –	Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: a) contorno circular superior; b) círculo a C/4 da metade do cilindro; c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 27,30 mm e raio de 13,13 mm no tempo específico de 257 min.....	180
FIGURA 4.75 –	Gráfico da evolução de distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) no contorno superior, (b) círculo a C/4 da metade do cilindro e (c) no centro do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o cilindro de comprimento 27,30 mm e raio de 13,13 mm e o tempo específico de 257 min.....	181
FIGURA 4.76 –	Difusividade efetiva versus temperatura para os comprimentos básicos de: (a) 10,0 mm; (b) 15,00 mm; (c) 20,00; mm; (d) 25,00 mm.....	183
FIGURA 4.77 –	Coeficiente convectivo versus a temperatura para os comprimentos básicos de: (a) 10,0; mm; (b) 15,0 mm; (c) 20,0 mm; (d) 25,0 mm.....	184

FIGURA 4.78 –	Volume adimensional $V/V_0$ versus Razão de umidade $\bar{X}^*$ para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C para os comprimentos: (a) C = 10,00mm; (b) C = 15,00 mm; (c) C = 20,00 mm; (d) C = 25,00 mm.....	189
FIGURA 4.79 –	Volume adimensional $V/V_0$ versus Razão de umidade $\bar{X}^*$ para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C para os comprimentos: (a) C = 10,00mm; (b) C = 15,00 mm; (c) C = 20,00 mm; (d) C = 25,00 mm.....	190
FIGURA 4.80 –	Volume adimensional $V/V_0$ versus Razão de umidade $\bar{X}^*$ para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para os comprimentos: (a) C = 10,00mm; (b) C = 15,00 mm; (c) C = 20,00 mm; (d) C = 25,00 mm.....	192
FIGURA 4.81 –	Volume adimensional $V/V_0$ versus Razão de umidade $\bar{X}^*$ para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para os comprimentos: (a) C = 10,00mm; (b) C = 15,00 mm; (c) C = 20,00 mm; (d) C = 25,00 mm.....	193
FIGURA 4.82 –	Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura do ar de secagem de 40 °C, para as bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 10,00 mm; (b) 16,70 mm; (c) 20,80 mm e (d) 25,50 mm.....	196
FIGURA 4.83 –	Gráfico da cinética de secagem, para a temperatura de 40,0 °C, com todos os comprimentos estudados.....	197
FIGURA 4.84 –	Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura de 50,0 °C, para bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 10,60 mm; (b) 17,49 mm; (c) 21,00 mm e (d) 28,93 mm.....	198
FIGURA 4.85 –	Gráfico das cinéticas de secagem, para a temperatura de 50,0°C.....	199
FIGURA 4.86 –	Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura de 60 °C, para bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 10,35 mm; (b) 17,45 mm; (c) 21,69 mm e (d) 27,34 mm.....	200
FIGURA 4.87 –	Gráfico das cinéticas de secagem, para a temperatura de 60,0°C, com todos os comprimentos estudados.....	201

FIGURA 4.88 –	Cinética de secagem obtidas para a temperatura de 70 °C, para bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 11,98 mm; (b) 16,73 mm; (c) 21,71 mm e (d) 27,30 mm.....	202
FIGURA 4.89 –	Gráfico das cinéticas de secagem, para a temperatura de 70,0°C.....	202
FIGURA 4.90 –	Metade do cilindro finito destacando a área retangular onde será analisada a distribuição de umidade.....	203
FIGURA 4.91 –	Distribuição de umidade (fora de escala) para T = 40 °C: (a) e (b) C = 10,00 mm; (c) e d) C = 16,70 mm; (e) e (f) C = 20,80 mm; (g) e (h) C = 25,50 mm.....	204
FIGURA 4.92 –	Distribuição de umidade (fora de escala) para T = 50 °C: (a) e (b) C = 10,60 mm; (c) e d) C = 17,49 mm; (e) e (f) C = 21,00 mm; (g) e (h) C = 28,93 mm.....	205
FIGURA 4.93 –	Distribuição de umidade (fora de escala) para T = 60 °C: (a) e (b) C = 10,35 mm; (c) e (d) C = 17,45 mm; (e) e (f) C = 21,96 mm; (g) e (h) C = 27,34 mm.....	206
FIGURA 4.94 –	Distribuição de umidade (fora de escala) para T = 70 °C: (a) e (b) C = 11,98 mm; (c) e d) C = 16,73 mm; (e) e (f) C = 21,71 mm; (g) e (h) C = 27,30 mm.....	207
FIGURA 4.95 –	Gráficos (com faixa de confiança) do tempo para a razão de umidade de 0,90 versus o comprimento, para a temperatura do ar de secagem de: (a) 40,0 C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.....	209
FIGURA 4.96 –	Razão de umidade versus volume adimensional da banana inteira, para as temperaturas do ar de secagem de: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.....	214
FIGURA 4.97 –	Gráfico da relação entre $V/V_0$ e $X^*$ plotado em um mesmo eixo.....	215
FIGURA 4.98 –	Gráfico da evolução da retração do volume nos instantes inicial, 200, 400, 600, 800 e 1000 min e final para as temperaturas: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.....	216

FIGURA 4.99 –	(a) Metade da banana, mostrando um quarto da elipse; (b) malha estrutura não-ortogonal mostrando os limites Norte (N), Sul (S), Leste (E) e Oeste (W).....	217
FIGURA 4.100 –	Malha estruturada não-ortogonal 32 x 40. A metade simétrica da banana é gerada pela revolução da área geratriz em torno do eixo y.....	218
FIGURA 4.101 –	Cinética de secagem obtida para banana inteira nas seguintes temperaturas: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0°C.....	220
FIGURA 4.102 –	Gráfico das cinéticas de secagem, para todas as temperaturas estudadas.....	220
FIGURA 4.103 –	Gráfico da distribuição de erro para a temperatura do ar de secagem de: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 ° e (d) 70,0 °C.	221
FIGURA 4.104 –	Gráfico da distribuição de umidade para 40,0 °C nos instantes: (a) t = 200 min; (b) t = 400 min; (c) t = 600 min; (d) t = 800 min.....	222
FIGURA 4.105 –	Gráfico da distribuição de umidade para 50,0 °C nos instantes: (a) t = 200 min; (b) t = 400 min; (c) t = 600 min; (d) 800 min.....	223
FIGURA 4.106 –	Gráfico da distribuição de umidade para 60,0 °C nos instantes: (a) t = 200 min; (b) t = 400 min; (c) t = 600 min; (d) t = 800 min.....	223
FIGURA 4.107 –	Gráfico da distribuição de umidade para 70,0 °C nos instantes: (a) t = 200 min; (b) t = 400 min; (c) t = 600 min; (d) t = 800 min.....	224
FIGURA 4.108 –	Gráficos de contorno representando a distribuição de umidade no interior da metade da banana em t = 200 min, nas temperaturas: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C (d) 70,0 °C.	225
FIGURA 4.109 –	Difusividades efetivas para as quatro temperaturas em função da razão de umidade local.....	226
FIGURA 4.110 –	Difusividade efetiva de massa D em função da temperatura T e da razão de umidade local X* .....	227
FIGURA 4. 111 –	Coefficiente convectivo versus a temperatura.....	228

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 –	Equações empíricas para a cinética de secagem de produtos...	17
TABELA 3.1 –	Algumas raízes da equação característica para o cilindro infinito, dada pela Eq. (3.14), para números de Biot pequenos	48
TABELA 3.2 –	Algumas raízes da equação característica para o cilindro infinito, dada pela Eq. (3.14), para números de Biot grandes.....	48
TABELA 3.3 –	Algumas raízes da equação característica para a parede infinita, dada pela Eq. (3.15), para números de Biot pequenos.....	49
TABELA 3.4 –	Algumas raízes da equação característica para a parede infinita (3.15) para números de Biot grandes.....	49
TABELA 4.1 –	Resultados obtidos para os dois modelos.....	113
TABELA 4.2 –	Valores de X em alguns instantes de tempo escolhidos aleatoriamente, para os volumes de controle a nordeste e a sudeste.....	122
TABELA 4.3 –	Valor do teor de umidade local em alguns instantes de tempo escolhidos aleatoriamente, para dois volumes de controle (VC): a noroeste e a sudoeste.....	124
TABELA 4.4 –	Resultados para o teor de umidade médio adimensional calculado com e sem simetria axial, para tempos escolhidos aleatoriamente.....	127
TABELA 4.5 –	Valor do teor de umidade médio em alguns instantes de tempo.....	131
TABELA 4.6 –	Difusividades nas interfaces leste e oeste de cada volume de controle para 29,9 °C em $t = 121,7391h$ ; $D_{ef} \times 10^7 (m^2 h^{-1})$ .....	133
TABELA 4.7 –	Informações sobre as condições do ar ambiente (temperatura e umidade relativa), e do ar de secagem (velocidade, temperatura e a umidade relativa).....	134
TABELA 4.8 –	Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C.....	135

TABELA 4.9 –	Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C.....	135
TABELA 4.10 –	Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 60,0°C.....	135
TABELA 4.11 –	Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 70,0°C.....	136
TABELA 4.12 –	Informações sobre os resultados para a otimização, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, usando a solução analítica.....	141
TABELA 4.13 –	Informações sobre os resultados para a otimização, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para a solução analítica.....	141
TABELA 4.14 –	Informações sobre os resultados para a otimização para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para a solução analítica.....	141
TABELA 4.15 –	Informações sobre os resultados da cinética de secagem da banana em pedaços para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para a solução analítica.....	141
TABELA 4.16 –	Resultados obtidos para a energia de ativação, o fator pré-exponencial de Arrhenius e os indicadores estatísticos.....	183
TABELA 4.17 –	Coefficiente de transferência convectivo de massa, versus a temperatura.....	185
TABELA 4.18 –	Resultados do coeficiente de correlação R entre o volume adimensional ( $V/V_0$ ) e a razão de umidade média ( $\bar{X}^*$ ).....	187
TABELA 4.19 –	Informações sobre as equações do volume adimensional, o volume inicial para T = 40,0 °C, para todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados.....	188
TABELA 4.20 –	Informações sobre as equações do volume adimensional, o volume inicial para T = 50,0 °C, para todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados.....	191
TABELA 4.21 –	Equações para o volume e os indicadores estatísticos, volume inicial para a temperatura de 60,0 °C, e todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados.....	191

TABELA 4.22 – Informações sobre as equações e o volume inicial para a temperatura de 70,0 °C, e todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados e os indicadores estatísticos.....	193
TABELA 4.23 – Resultados para as otimizações na temperatura de 40,0 °C.....	195
TABELA 4.24 – Resultados para as otimizações na temperatura de 50,0 °C.....	198
TABELA 4.25 – Resultados para as otimizações para a temperatura de 60,0 °C.....	199
TABELA 4.26 – Resultados para as otimizações para a temperatura de 70,0 °C.....	201
TABELA 4.27 – Informações sobre o parâmetro de ajuste e o indicador estatístico.....	209
TABELA 4.28 – Informações sobre as condições do ar de secagem e do ar ambiente.....	212
TABELA 4.29 – Informações sobre as bananas inteiras, incluindo o tempo t de secagem.....	212
TABELA 4.30 – Informações sobre as equações do volume adimensional.....	214
TABELA 4.31 – Informações sobre os resultados da otimização, para a banana inteira.....	219
TABELA 4.32 – Erro médio para a banana inteira.....	222
TABELA 4.33 – Valores da difusidade $D \times 10^8$ ( $m^2 \cdot min^{-1}$ ) em função de T e $\bar{X}^*$ .....	226
TABELA 4.34 – Resultado do ajuste da Equação (4.10) e os indicadores estatísticos.....	227
TABELA 4.35 – Resultado do ajuste da Equação (4.3) e os indicadores estatísticos.....	229



## NOMENCLATURA

### Letras Latinas

$A_p, A_w, A_e, A_n, A_s$ – Coeficientes da equação de difusão discretizada	[-]
$A_{nw}, A_{ne}, A_{se}, A_{sw}$ – Coeficientes da equação de difusão discretizada	[-]
a, b, c, d – Parâmetros de ajuste	[-]
$A_{n1}, A_{m2}$ – Coeficiente da solução analítica dependente da posição	[-]
$Bi$ – Número de Biot de transferência de massa.	[-]
$B$ – Termo independente de $\Phi$ na equação de difusão discretizada	[-]
$B_{n1}, B_{m2}$ – Coeficiente da solução analítica para o teor de umidade médio	[-]
$C$ – Comprimento do cilindro	[mm]
$c_p$ – Calor específico à pressão constante	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$D$ – Difusividade efetiva de massa	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$D_0$ – Fator de Arrhenius	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$d$ – diâmetro do cilindro	[mm]
$d_p$ – Distância do nó de um volume de controle a uma fronteira	[m]
$d_E$ – Distância do nó leste a uma fronteira	[m]
$f_d$ – Relação entre duas distâncias	[-]
$f$ – Fator multiplicativo indicando a modificação de uma distância	[-]
$E_a$ – Energia de ativação	[J mol <sup>-1</sup> ]
E, W, N, S, P – Pontos nodais	[-]
$h$ – Coeficiente de transferência convectiva de massa	[W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]
$J$ – Jacobiano da transformada	[m <sup>3</sup> ]
$J_0, J_1$ – Funções de Bessel de primeira espécie de ordens zero e um	[-]
$k$ – Condutividade térmica	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$L$ – Distância do centro da elipse ao foco	[m]
$m$ – Massa	[kg]
$m_{H_2O}$ – Massa de água	[kg]
$m_e$ – Massa de equilíbrio	[kg]
$m_s$ – Massa seca	[kg]

$n$ – índice de parâmetro	[-]
$N$ – Número de elementos de cada série	[-]
$N_i$ – Número de pontos experimentais	[-]
$P$ – Número de parâmetros	[s]
$r$ – Posição radial, coordenada cilíndrica	[m]
$r_e$ – Posição radial da fronteira “e”	[m]
$r_p$ – Posição radial do ponto nodal “P”	[m]
$r^q$ – Posição radial $r$	
$r_w$ – Posição radial da fronteira “w”	[m]
$R$ – Constante universal dos gases ideais	[Jmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$R$ – Raio do cilindro	[m]
$R^2$ – Coeficiente de determinação	[-]
$\Delta r$ – Largura de um volume de controle	[m]
$S$ – Termo fonte da equação de difusão	[-]
$S_C$ – Componente constante do termo fonte linearizado	[-]
$S_P$ – Componente do termo fonte linear em $\Phi$	[-]
$S^\Phi$ – Termo fonte da equação de transporte	[-]
$t$ – Tempo de secagem	[s]
$t_i$ – Tempo referente ao $i$ -ésimo ponto experimental	[s]
$t_i^{\text{sim}}$ – Tempo referente ao $i$ -ésimo ponto simulado	[s]
$T$ – Temperatura	[°C]
$T_i$ – Temperatura inicial	[°C]
$\overline{UR}$ – Umidade relativa do ar	[%]
$\Delta V$ – Volume elementar	[m <sup>3</sup> ]
$V$ – Volume do cilindro por unidade de comprimento	[m <sup>3</sup> ]
$\vec{v}$ – Vetor velocidade do meio	[m/s <sup>2</sup> ]
$V_i$ – Volume do volume de controle por unidade de comprimento	[m <sup>3</sup> ]
$V_{ij}$ – Componente de tensor métrico	[-]
$x, y, z$ – Eixos cartesianos	[-]
$X$ – Teor de umidade numa dada posição (base seca)	[kg kg <sup>-1</sup> ]

$\bar{X}$ – Teor de umidade médio (base seca)	[ kg kg <sup>-1</sup> ]
$\bar{X}_{bs}$ – Teor de umidade médio em base seca	[-]
$\bar{X}_{bu}$ – Teor de umidade médio em base úmida	[-]
$X_i$ – Teor de umidade inicial (base seca)	[ kg kg <sup>-1</sup> ]
$X_{eq}$ – Teor de umidade de equilíbrio (base seca)	[ kg kg <sup>-1</sup> ]
$\bar{X}^*$ – Razão de umidade	[-]
$X^*$ – Razão de umidade local ou Teor de umidade local	[-]
$\bar{X}_i^{ana}$ – Teor de umidade obtido analiticamente	[ kg kg <sup>-1</sup> ]
$\bar{X}_i^{exp}$ – Teor de umidade experimental	[ kg kg <sup>-1</sup> ]
$\bar{X}_i^{sim}$ – Teor de umidade simulado	[ kg kg <sup>-1</sup> ]
$x_\xi, y_\xi, z_\xi$ – Derivadas parciais de x, y e z em relação $\xi$	[m]
$x_\xi, y_\xi, z_\xi$ – Derivadas de x, y e z em relação $\xi$	[m]
$x_\xi, y_\xi, z_\xi$ – Derivadas de x, y e z em relação $\xi$	[m]
$z$ – Coordenada cilíndrica	[-]

### Letras Gregas

$\alpha_{ij}$ – Parâmetros da equação de difusão discretizada	[-]
$\alpha$ – Difusividade térmica	[ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\alpha_n$ – Raízes da função de Bessel de primeira espécie de ordem zero	[-]
$\theta$ – Ângulo entre duas direções, fator peso da média ponderada	[rad]
$\mu_n$ – Raízes da equação característica	[-]
$\delta\Phi_i$ – Desvio do i-ésimo valor experimental de $\Phi$	[-]
$\Phi$ – Variável dependente de transporte	[-]
$\Phi_P, \Phi_E, \Phi_W, \Phi_N, \Phi_S$ – Variáveis dependentes em equação discretizada	[-]
$\Phi_b$ – Variável de transporte no contorno leste	[-]
$\bar{\Phi}$ – Valor médio de $\Phi$	[-]
$\Phi_i$ – Variável dependente de transporte do i-ésimo volume de controle	[-]

$\delta\Phi_i$	– desvio do i-ésimo valor experimental de $\Phi$	[-]
$\Phi^{\text{exp}}$	– Valor experimental de $\Phi$	[-]
$\Phi_i^{\text{exp}}$	– Valor experimental de $\Phi$ correspondente ao i-ésimo ponto experimental	[-]
$\Phi^{\text{sim}}$	– Valor simulado de $\Phi$	[-]
$\Phi_i^{\text{sim}}$	– Valor simulado de $\Phi$ correspondente ao i-ésimo ponto experimental	[-]
$\Phi_\infty$	– Variável de transporte para fluido	[-]
$\phi_e''$	Fluxo de $\Phi$ por unidade de área no contorno leste	[-]
$\phi_s''$	Fluxo de $\Phi$ por unidade de área no contorno sul	[-]
$\Gamma^\Phi$	– Coeficiente de transporte	[-]
$\Gamma_e^\Phi$	– Coeficiente de transporte na interface entre “P” e “E”	[-]
$\Gamma_E^\Phi$	– Coeficiente de transporte do ponto nodal E	[-]
$\Gamma_P^\Phi$	– Coeficiente de transporte no ponto nodal P	[-]
$\Gamma_w^\Phi$	– Coeficiente de transporte na interface entre “w” e “P”	[-]
$\Gamma_n^\Phi$	– Coeficiente de transporte na interface entre “N” e “P”	[-]
$\Gamma_s^\Phi$	– Coeficiente de transporte na interface entre “S” e “P”	[-]
$\lambda$	– Coeficiente de transporte	[-]
$\xi, \eta, \gamma$	– Eixos curvilíneos	[-]
$\rho$	– Densidade (massa específica)	[kg m <sup>-3</sup> ]
$\mu_{n1}, \mu_{m2}$	– Raízes de equações característica	[-]
$\sigma$	– Desvio padrão	[-]
$1/\sigma_i^2$	– Peso estatístico do i-ésimo ponto experimental	[-]
$\chi^2$	– Qui-quadrado	[-]
$\nabla$	– Gradiente	[-]
$\nabla \cdot$	– Divergente	[-]
$\Delta$	– Variação	[-]

## **Sobrescritos**

0 – Tempo anterior

e – Face leste do volume de controle

P – Nó do volume de controle em estudo

q – Expoente da posição radial r

## **Subscritos**

eq – Equilíbrio

e, w, n e s – Fronteiras leste, oeste, norte e sul de um volume de controle

ne, nw, se, sw, fe, fw, be, bw, fn, fs, bn, bs – Vizinhos de um volume de controle

E, W, N, S – Ponto nodal: leste, oeste, norte e sul de um volume de controle

i – Inicial

s – Seco

bs – Base seca

bu – Base úmida

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar o fenômeno da difusão transiente de massa em sólidos com formas cilíndricas e elipsoidais. O estudo apresenta soluções para a equação de difusão com condição de contorno do terceiro tipo. Foram desenvolvidas ferramentas analíticas (otimizador acoplado à solução analítica) e numéricas para a descrição da difusão de massa em produtos com as formas mencionadas. Para as soluções numéricas propostas, a equação de difusão bidimensional foi discretizada usando o método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita, usando coordenadas cilíndricas e generalizadas. Para a solução numérica em coordenadas cilíndricas, foi desenvolvido um software na plataforma Windows, utilizando a linguagem de programação Fortran, incluindo a interface gráfica com o usuário. O software gerou resultados coerentes e consistentes em todos os testes efetuados, e foi validado para cilindros tanto com parâmetros termo-físicos constantes quanto variáveis. Pode-se concluir que as ferramentas desenvolvidas são adequadas para o estudo de problemas difusivos em geral. As ferramentas desenvolvidas foram usadas para descrever o processo de secagem de bananas inteiras e em pedaços cilíndricos de vários comprimentos. Na descrição, foram usados dois modelos. No primeiro modelo foram considerados volume e difusividade efetiva de massa constantes e, no segundo, estes parâmetros foram considerados variáveis. Conclui-se que o segundo modelo descreve o processo melhor que o primeiro, com excelentes indicadores estatísticos na descrição da cinética de secagem.

Palavras-chave: Coordenadas cilíndricas e generalizadas, difusão, soluções analíticas e numéricas, volumes finitos, regime transiente, banana-passa.

## ABSTRACT

This work has the objective of studying the transient diffusion phenomena of mass in solids with cylindrical and ellipsoidal shape. The study presents solutions for the diffusion equation with boundary condition of the third kind. Analytical (optimizer coupled with the analytical solution) and numerical tools were developed for the description of the diffusion of mass in products with the mentioned shapes. For the numerical solutions proposed, the two-dimensional diffusion equation was discretized using the finite volume method, with fully implicit formulation, using cylindrical and generalized coordinates. For the numerical solution in cylindrical coordinates it was developed a software in the Windows platform, using the programming language Fortran, including graphic interface with the user. The software generated consistent results in all of the tests performed, and was validated for cylinders with constant or variable thermo-physical parameters. We can conclude that the tools developed are appropriate to the study of diffusive problems in general. The developed tools were used to describe drying of whole bananas and in cylindrical pieces, with several lengths. Two models were used to describe the process. Model 1, with constant volume and mass diffusivity; and model 2, in which these parameters were considered variable. Model 2 is better than model 1, and the statistical indicators are excellent in the description of the drying kinetics.

Keywords: Cylindrical and generalized coordinates, diffusion, analytical and numerical solutions, finite volume, transient regime, dried banana.

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

Em diversos setores como, por exemplo, indústrias de materiais cerâmicos, de papel, de produtos farmacêuticos, de madeira, dentre outras, o mecanismo da secagem constitui uma das etapas essenciais do processo produtivo. Na indústria de alimentos, de uma forma geral, a secagem é uma etapa importante não só do ponto de vista econômico, mas também do ponto de vista da qualidade do produto final. No caso específico do setor agrícola, a secagem visa à conservação dos produtos por um período de tempo muito maior do que aquele em que seriam conservados sem este recurso. Por isto, este método de preservação deve ser realizado logo após a colheita (SILVA, 1995; FIOREZE, 2004), evitando o desperdício. Em adição, a secagem reduz substancialmente o peso e o volume do produto, minimizando, assim, custos com empacotamento, transporte e armazenamento (OKOS et al., 1992; SILVA, C., 2010).

Desde épocas remotas, o homem procura maneiras de armazenar alimentos para o consumo durante a época de escassez. No início, isto era feito de forma intuitiva, mas já se sabia que a umidade contida nos alimentos contribuía não só para a sua rápida deterioração, mas também para a infestação de pragas. Já se percebia, então, que a



secagem era um dos recursos que poderia ser utilizado na conservação de vários alimentos como, por exemplo, produtos agrícolas. Geralmente, a secagem de tais produtos era feita em terreiros, utilizando-se a ação do vento e do sol para a remoção de água, isto é, o processo era realizado de forma natural.

Em geral, os produtos agrícolas são colhidos em um curto período de tempo, mas muitos destes produtos como o arroz e o feijão, devem ser consumidos ao longo de todo ano. No período de grande oferta, parte de seu valor comercial é perdida, porque os mercados são regulados pela lei da oferta e procura. Por outro lado, na entressafra ocorre uma elevação de preços, devido à sua escassez. Para diminuir este efeito, vêm sendo estudadas formas de secagem a baixo custo, que possibilitem o armazenamento e a preservação da qualidade de um produto por longos períodos, dando ao produtor uma maior margem de manobra quanto à melhor época para a negociação de seus produtos.

A secagem pode ser realizada de maneira artificial ou natural. No caso da secagem artificial, o método mais comum para produtos agrícolas é aquecer o ar, diminuindo a sua umidade relativa e, então, transferindo-o em uma dada velocidade, para o ambiente em que ele é colocado em contato com o produto. Ocorre, então, um contínuo processo de transferência de calor do ar para o interior do produto submetido à secagem. Simultaneamente, ocorre a transferência de umidade do interior do produto para a sua superfície e da superfície para o ar, na forma de vapor (BROOKER et al., 1992; LIMA, 1999; SILVA, 2007).

Para enfatizar a importância do processo de secagem no setor agrícola, as frutas, que possuem um alto teor de umidade, podem ser destacadas por serem altamente perecíveis, com um curto tempo de prateleira. Após a colheita, dispõe-se de poucos dias para o seu consumo *in-natura*. Para prolongar a sua vida útil e aproveitar o excesso da safra, são feitas geléias, doces, compotas, entre outras, ou é utilizado o recurso do resfriamento. Existem, ainda, os recursos da desidratação e da secagem. No caso específico da secagem de algumas frutas, além do prolongamento da vida útil, este mecanismo resulta nas chamadas passas, que são muito apreciadas em praticamente todo o mundo, o que agrega ainda mais valor ao produto.

No Brasil há uma grande variedade de frutas tropicais que são consumidas *in-natura*, devido ao preço baixo e à alta produção. Pode-se citar o caju, cujo maior

interesse da indústria é no fruto, conhecido como castanha. O pseudofruto chamado pedúnculo do caju, ou simplesmente caju, como é conhecido (ARAGÃO, 2007; MARQUES et al., 2007), é aproveitado na indústria de sucos, de doces e de produtos desidratados, em pequena escala. Em geral, parte da produção é simplesmente descartada. Ainda com relação a frutos com grande potencial de aproveitamento econômico através do recurso da secagem, podem ser citados o abacaxi, a maçã, a pêra, a uva, a ameixa e a banana, dentre outros.

Na literatura são reportados diversos trabalhos sobre a secagem de frutas que resultam em passas, que é um produto mais nobre do que a fruta *in natura* (MARQUES et al., 2007). As frutas secas mais comercializadas são as passas de uva, de ameixa e de banana, que são bem aceitas pelo consumidor. Por isto, torna-se viável o estudo da secagem destes produtos, dentre os quais a banana, visando à preservação da qualidade do produto final, e também das propriedades organolépticas, agregando ainda mais valor que o da simples conservação, como no caso do resfriamento, que também é usado para alguns frutos.

O Brasil é o quarto produtor mundial de banana (FAO, 2011), sendo também um dos maiores consumidores (SOUSA, 2002; BAINI e LANGRISH, 2007). Do ponto de vista biológico, a banana é um dos frutos que apresenta uma das maiores perdas por decomposição pós-colheita, visto que ela é altamente perecível (SOUSA, 2002). Acrescente-se a isto a falta de conhecimento, por parte de alguns produtores, de medidas que podem ser tomadas para evitar danos físicos e, conseqüentemente, a perda do produto.

Com esta pesquisa pretende-se colocar à disposição de interessados, subsídios teóricos no tocante à transferência de massa nos processos de secagem de sólidos cuja forma possa ser aproximada por cilindros finitos e elipsóides, como a banana, incluindo as variações dimensionais, e considerando as propriedades termo-físicas variáveis. Há diversos trabalhos na literatura sobre a secagem de bananas, muitos dos quais usam soluções analíticas da equação de difusão para descrever o processo. A obtenção de tais soluções requer o estabelecimento de hipóteses simplificadoras como, por exemplo, o descarte de variações dimensionais e de parâmetros termo-físicos, e ainda o uso de geometrias simples (MATTEO et al., 2003; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; SAYKOVA et al., 2009; SILVA et al., 2009a; SILVA et al., 2010b) ao invés da

geometria real do produto. Com relação às simplificações adotadas por trabalhos encontrados na literatura, muitas vezes a condição de contorno do primeiro tipo é usada na solução da equação de difusão (DOYMAZ e PALA, 2002; LIMA et al., 2004a; LIMA et al., 2004b; SILVA et al., 2008b; SILVA et al., 2009a; RAMOS et al., 2010; SILVA, C., 2010). Por outro lado, mesmo em trabalhos mais minuciosos (LIMA, 1999; OLIVEIRA e LIMA, 2002; CARMO, 2004; WU et al., 2004; OLIVEIRA, 2006), que fazem inclusive o acoplamento da transferência de massa com a de energia, além de adotarem geometrias mais complexas, a representação de sólidos é feita de forma aproximada, que possibilita a geração de uma malha ortogonal a ser usada na solução numérica da equação de difusão.

### **1.1 – Justificativa**

Apesar da farta literatura disponível sobre secagem, usando modelos de difusão, há uma escassez de pesquisas deste mecanismo em corpos cilíndricos usando soluções numéricas e, particularmente, em elipsóides definidos por malhas estruturadas não-ortogonais, com volume e difusividade variáveis.

Deve-se observar que a secagem é um importante redutor do processo de deterioração de produtos agrícolas, possibilitando o seu armazenamento por longos períodos de tempo. Tal mecanismo reduz significativamente o peso e o volume do produto, o que contribui para o barateamento de seu próprio armazenamento, embalagem e transporte. Como uma importância adicional, a secagem agrega ainda mais valor a alguns tipos de produtos, por resultarem em outros produtos de grande valor comercial como, por exemplo, a banana-passa. Assim, o tema “formas eficientes de secagem” possibilita justificar os objetivos deste trabalho, e serão enumerados a seguir.

### **1.2 – Objetivo geral**

O objetivo deste trabalho é desenvolver ferramentas analíticas e numéricas para descrever processos difusivos em sólidos cilíndricos e em elipsóides. Tais ferramentas devem possibilitar a descrição do problema o mais próximo possível da situação física

real. Como exemplo de aplicação das ferramentas desenvolvidas, será feito um estudo teórico-experimental da secagem de bananas.

### 1.3 – Objetivos específicos

A presente pesquisa tem os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar soluções analíticas e numéricas em duas dimensões para o problema da difusão transiente de massa, usando a teoria da difusão líquida, pressupondo condição de contorno do terceiro tipo, para corpos com formas de cilindros e de elipsóides;
- Desenvolver algoritmos de otimização para a determinação de parâmetros termo-físicos tanto através de soluções analíticas quanto de soluções numéricas, a partir de dados experimentais;
- Desenvolver um software computacional, na plataforma Windows, incluindo a interface com o usuário, para simular o processo de difusão de massa em corpos com as formas mencionadas;
- Simular a distribuição do teor de umidade no interior do sólido estudado, e sua respectiva cinética de difusão, utilizando-se de modelos matemáticos a serem desenvolvidos;
- Estudar o efeito da retração ocorrida no produto devido à secagem;
- Modelar e estudar o efeito do fenômeno de difusão de massa em bananas, considerando-as como cilindros finitos e elipsóides;
- Aplicar os modelos analíticos e numéricos desenvolvidos no estudo da secagem de bananas inteiras e em pedaços;
- Realizar experimentos relativos à secagem de bananas inteiras e em pedaços, usando ar quente em várias temperaturas. Comparar os resultados experimentais com aqueles obtidos através das simulações analíticas e numéricas, determinando os coeficientes de transferência de massa: difusivo

no interior e convectivo na superfície do produto, para várias condições de secagem;

- Estudar os efeitos das considerações adotadas nos diversos modelos sobre os coeficientes de transporte;
- Obter correlações matemáticas para os coeficientes de difusão e de transferência convectiva de massa, como função dos parâmetros de secagem e das dimensões do sólido.

#### **1.4 – Principais contribuições deste trabalho**

Com esta pesquisa pretende-se oferecer as seguintes contribuições:

- Um otimizador, a ser acoplado à solução analítica bidimensional da equação de difusão para o cilindro finito. Com isto, pode-se determinar a difusividade efetiva e o coeficiente de transferência convectivo de massa a partir de dados experimentais para a cinética do transporte de água em um produto com a forma mencionada;
- Estudo detalhado de soluções numéricas para a equação de difusão em sólidos na forma de cilindros finitos e de elipsóides, pressupondo parâmetros termo-físicos variáveis, para a condição de contorno do terceiro tipo;
- Um software com interface gráfica, que possibilitará simular a cinética do transporte de água em sólidos na forma de cilindros, e também determinar a difusividade efetiva e o coeficiente de transferência convectiva de massa para estas geometrias, via otimização;
- Um modelo para a descrição da cinética de secagem de bananas, o mais próximo possível da situação física a ser investigada, considerando: condição de contorno convectiva, geometria real do produto, difusividade efetiva variável (em função da razão de umidade local) e volume variável (em função da razão de umidade média).

## **CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

A responsável pela deterioração pós-colheita dos produtos agrícolas, de um modo em geral, é a água contida nestes produtos. Então, a remoção de grande parte desta água seria a solução para aumentar o tempo de armazenamento destes produtos. Um dos métodos de remoção é a secagem de tais produtos.

Quando se realiza uma secagem, ocorrem modificações nas características físicas, químicas e biológicas do produto submetido ao processo. Por isto, devem ser realizados estudos que prevejam as condições ótimas para a realização da secagem, como também estudos visando o barateamento dos custos do processo. Quando se usa ar quente, se a temperatura do ar de secagem for muito alta, o produto pode ser inutilizado para algumas funções como, por exemplo, a função germinativa, ou até mesmo a função alimentícia. Altas temperaturas do ar de secagem podem, também, produzir danos como fissuras, que causam a perda de qualidade final do produto.

Por outro lado, sabe-se que quanto maior for a temperatura do ar, menor será o tempo de secagem, o que pode contribuir para a diminuição dos custos do processo.

Desta forma, deve-se buscar uma temperatura ótima para o ar de secagem, observando-se que cada produto requer um estudo particular para a determinação de tal temperatura. Por outro lado, quando a velocidade do ar de secagem é aumentada, até um certo valor limite, o processo ocorre mais rapidamente (CÁRCEL et al., 2007). Entretanto, o custo de se produzir ar quente em grandes velocidades torna-se maior que em velocidades menores e, então, mais uma vez, é necessário estudar qual é a melhor velocidade do ar para que a secagem seja realizada com êxito, mas sem onerar excessivamente o custo do processo.

Há, na literatura, uma gama imensa de estudos que analisam condições de secagem para que se possa, preservando a qualidade final do produto, minimizar o custo do processo. A descrição do mecanismo de transporte de água pode ser feita através de várias teorias, e uma delas é a teoria da difusão líquida. Esta é uma teoria que vem ganhando muitos adeptos, nas mais diversas áreas de pesquisa como, por exemplo, na secagem de grãos (CARMO e LIMA, 2005; GONELI et al., 2007; RESENDE et al., 2008; HACIHAFIZOGLU et al., 2008), de frutas (QUEIROZ e NEBRA, 2001; SILVA et al., 2009b; SILVA, C., 2010), de madeira (LIU e SIMPSON, 1999; RICARDEZ et al., 2005) e de materiais cerâmicos (CHEMKHI e ZAGROUBA, 2005; SILVA, 2007; SILVA, J., 2009; FARIAS, V., 2011;), entre outros.

Na maioria dos trabalhos encontrados na literatura sobre a descrição de secagens usando a teoria da difusão líquida, a forma geométrica dos sólidos é geralmente aproximada por uma placa, um cilindro ou uma esfera (GASTÓN et al., 2002; GASTON et al., 2003; PARK et al., 2004; EFREMOV e KUDRA, 2005; HACIHAFIZOGLU et al., 2008; SILVA et al., 2009a; FARIAS et al., 2009; SILVA et al., 2010a; SILVA, C., 2010). Normalmente, esta aproximação é feita para facilitar a resolução da equação da difusão que, para estas geometrias, dentre outras, possuem soluções analíticas. Um outro aspecto a ser considerado na solução da equação de difusão é a adequada condição de contorno para descrever o processo. No caso do uso de ar quente, duas condições de contorno são empregadas: Dirichlet (LIMA et al., 2004a; SILVA et al., 2007; SILVA et al., 2008a; SILVA et al., 2009a; SILVA et al., 2009b; SILVA, C., 2010) e Cauchy (QUEIROZ, 1994; OLIVEIRA e LIMA, 2002; TERUEL et al., 2003; BENNAMOUN e BELHAMRI, 2006; SILVA et al., 2010a;

SILVA et al., 2010b; SILVA, C., 2010). Se uma solução analítica for usada para descrever um processo de secagem, mais hipóteses simplificadoras são requeridas para que tal solução possa ser obtida. Dentre estas hipóteses, pode-se ressaltar volume e difusividade constantes, além de meio homogêneo e isotrópico (OLIVEIRA e LIMA, 2002; LIMA et al., 2004a; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; MELLADO, 2007; OLEK e WERES, 2007; CARMO e LIMA, 2008).

Em processos de secagem de produtos, de uma forma geral, e de produtos agrícolas, em particular, ocorre uma acentuada retração, devido à perda de água. Assim, uma correta descrição do processo deve levar em consideração este fenômeno. Conforme observou Silva, C. (2010), a modificação na estrutura interna de um produto causada pela forte retração ocorrida durante a secagem deve afetar a difusividade de massa. Assim, em um modelo matemático que esteja o mais próximo possível da realidade, a difusividade de massa deve ser considerada variável ao longo do processo (LIMA, 1999; SILVA, 2007; SILVA et al., 2008a; MARIANI et al., 2008; SILVA et al., 2009b; SILVA, C., 2010, FARIAS, V., 2011). Em geral, nestes casos, a descrição da secagem através de modelos de difusão não pode mais ser feita através de soluções analíticas e, conseqüentemente, soluções numéricas devem ser utilizadas.

Diante do exposto, este capítulo visa a apresentar uma revisão da literatura sobre a secagem de produtos em geral e, em particular, de sólidos porosos na forma de cilindros finitos e de elipsóides, abordando os tópicos anteriormente mencionados. Será dada ênfase para um produto em particular: bananas.

## **2.1 – Informações sobre a banana**

A palavra banana é originária das línguas serra-leonesa e liberiana (costa ocidental da África), a qual foi simplesmente incorporada pelos portugueses à sua língua (NASCENTE et al., 2005).

As sementes das bananeiras primitivas, que eram férteis, teriam tido 2 cm de comprimento. Não eram comestíveis, e num acidente genético de duas espécies selvagens *Musa acuminata* (A) e *Musa balbisiana* (B) (ITAL, 1995), criou-se a planta



com três cromossomos, ao invés de dois. O fruto resultante possui apenas sementes que se apresentam como pequenos pontos escuros localizados no eixo central da fruta (PEARCE, 2003). A planta que produz a fruta comestível, por consequência, só se reproduz assexuadamente, de modo que todas as bananeiras de uma mesma variedade são geneticamente idênticas.

Segundo Moreira (1999), as bananeiras existem no Brasil desde antes do seu descobrimento. Quando Cabral aqui chegou, encontrou os indígenas comendo banana *in natura* de um cultivar muito digestivo que se supõe tratar-se do cultivar “Branca” e outro, rico em amido, que precisava ser cozido antes do consumo, chamado de “Pacoba” que deve ser o cultivar Pacova. A palavra pacoba, em guarani, significa banana. Com o decorrer do tempo, verificou-se que o cultivar “Branca” predominava na região litorânea e o “Pacova”, na Amazônica.

A banana é uma das frutas mais consumidas no mundo, sendo explorada na maioria dos países tropicais (NASCENTE et al., 2005). Segundo Katekawa (2006) é a “fruta predileta do mundo”. O Brasil é um dos líderes mundiais na produção e consumo de banana (NOGUEIRA e PARK, 1992; BAINI e LANGRISH, 2007; FAO, 2011). A banana é uma das frutas mais apreciadas pelos consumidores brasileiros, principalmente devido às suas características sensoriais. É um alimento energético, rico em carboidratos e sais minerais, como sódio, magnésio, fósforo e potássio, médio teor em açúcares e vitaminas A e C; e também as vitaminas B1, B2 e B6, contendo pouca gordura e proteína (GOUVEIA et al., 2004; NASCENTE et al., 2005).

Este fruto possui um custo de produção relativamente baixo, e constitui parte importante da renda de muitos pequenos produtores agrícolas. Faz parte da dieta das camadas mais carentes da população, sobretudo no meio rural (CORDEIRO, 2000; BARROSO, 2009).

Apesar de ser colhida em quantidade e qualidade praticamente iguais, ao longo do ano, a fruta deve ser consumida em até 25 dias após a colheita. Do total de bananas colhidas, somente cerca de 40 a 50% chegam efetivamente às mãos dos consumidores (BAINI e LANGRISH, 2007). Segundo Tagliari e Franco (1994), isso ocorre devido às

perdas causadas por danos ocorridos do plantio até a colheita, e também pela falta de planejamento do manejo da lavoura. O desperdício ocorre principalmente no momento da colheita, no amontoamento dos cachos, nas embalagens de madeira, no transporte e no manuseio das frutas nas feiras e supermercados. Do ponto de vista biológico, é uma das frutas que apresenta uma das maiores perdas por decomposição pós-colheita, pois é altamente perecível e, além disso, não permite o uso de frio para o armazenamento (BORDIN, 1998; SOUSA, 2002).

A secagem da banana resulta em um alimento muito apreciado: banana-passa. Neste caso, este recurso agrega ainda mais valor que aqueles decorrentes da simples conservação (KATEKAWA, 2006; SILVA, C., 2010). Assim, uma pequena revisão sobre a secagem de frutas será feita a seguir.

## **2.2 – Secagem de frutas**

De uma forma geral, no período da safra de um fruto há um excesso de oferta do produto e, com isto, o preço cai. Geralmente, o desperdício de frutos é muito grande e, há muito tempo, o homem procura maneiras de conservar tais produtos. A industrialização é a forma indicada para o seu aproveitamento como geléia, sucos concentrados, néctares, doces compotas, cristalizados, chips e passas, dentre os processos de aproveitamento industrial (CANO-CHAUCA et al., 2002). Por exemplo, a produção de banana-passa requer baixo investimento inicial e boas perspectivas de lucratividade. O mercado interno está em expansão e o mercado externo continua inexplorado pelo Brasil. Vale lembrar que a obtenção de banana-passa é feita mediante a secagem natural ou artificial da fruta madura, comumente a partir da banana nanica e da banana nanicão. Entretanto, a secagem de frutas ainda se constitui em uma operação complexa e pouco compreendida, principalmente no que se refere à seleção e controle das condições do processo para a manutenção da qualidade final do produto. De acordo com Nihjhuis et al. (1996), a preservação da qualidade de frutas desidratadas depende de fatores como a característica da matéria-prima, temperatura, umidade relativa do ar de secagem, além de tipo de secador, entre outros. O emprego de parâmetros inadequados para a secagem de determinado produto pode causar diminuição de aroma, alterações na cor, textura e sabor, além da perda de nutrientes.

Frutas e legumes secos vêm ganhando importância comercial, e tornou-se um importante setor da indústria agrícola brasileira. Estima-se que cerca de 30-40% da produção de frutas e vegetais é perdida nos países em desenvolvimento (JAYARAMAN e GUPTA, 1995; KARIM e HAWLADER, 2005; BAINI e LANGRISH, 2007). Assim, a necessidade de reduzir tais perdas tem grande importância econômica para estes países. Tal redução pode ser obtida usando-se, por exemplo, técnicas adequadas de secagem (KARIM e HAWLADER, 2005). A secagem deste tipo de produto exige especial atenção dos pesquisadores por ser importante fonte de vitaminas e minerais, que não podem ser degradados durante o processo, já que são essenciais para a vida do homem.

Muitas frutas, especiarias e legumes são secos depois de serem cortados em pedaços ou em fatias. Mulet et al. (2005) realizou diversos experimentos usando ar quente, em diversas temperaturas e diferentes amostras de cúrcuma com casca e sem casca, cortados como cilindros finitos de tamanhos e diâmetros variados. Eles constataram que a casca dificulta a remoção de água e que o tamanho das peças cortadas e o diâmetro tem relação direta com o tempo de secagem. Da mesma forma, em experimentos realizados com bananas cortadas em fatias, foi verificado que a espessura destas fatias tem influência na difusividade (NGUYEN e PRICE, 2007) e, por conseguinte, sobre a secagem do produto.

Baini e Langrish (2007) fizeram um estudo experimental da secagem contínua e intermitente de bananas, usando secadores solares. Eles compararam os dados experimentais obtidos com modelos difusivos e empíricos. Os autores concluíram que os modelos empíricos testados são aplicáveis na descrição da cinética de secagem contínua, mas não da secagem intermitente. Nos dois casos, os modelos difusivos descreveram melhor a cinética da secagem de bananas. Particularmente, os autores consideraram que os modelos difusivos são adequados para prever o período de relaxação que ocorre na secagem intermitente. Eles constataram, ainda, que o teor de açúcar da banana em diferentes graus de maturação teve um efeito insignificante sobre as curvas de secagem.

Fernando et al. (2011) fizeram vários experimentos de secagem com diferentes espessuras de fatias cilíndricas de banana, mandioca e abóbora, para avaliar o coeficiente de difusão durante a secagem. Os autores concluíram que o coeficiente de difusão é influenciado pelo quadrado da espessura das amostras, e que o modelo obtido para correlacionar o coeficiente de difusão com a espessura de corte foi adequado para descrever a cinética de secagem.

### **2.3 – Mecanismos de secagem**

Na literatura, a migração de água do interior de um corpo para o meio externo é explicada por meio de vários mecanismos. As explicações mais usadas pelos pesquisadores são baseadas nos seguintes mecanismos de transporte (BROOKER et al., 1992; LIMA, 1999; NASCIMENTO, 2002; CARMO, 2004; FIOREZE, 2004; ARAGÃO, 2007):

- a) Movimento de líquido devido à diferença de concentração de umidade (difusão de líquido);
- b) Movimento de líquido devido às forças capilares (difusão capilar);
- c) Movimento de líquido devido à difusão de umidade na superfície dos poros (difusão na superfície);
- d) Movimento de líquido devido às forças osmóticas (difusão osmótica);
- e) Movimento de vapor devido à diferença de concentração de vapor (difusão de vapor);
- f) Movimento do vapor devido à diferença de temperatura (difusão térmica);
- g) Movimento de vapor devido à diferença de pressão (fluxo hidrodinâmico).

O transporte de água no interior de um corpo pode ocorrer através de um único mecanismo, ou de dois, ou ainda de vários mecanismos simultaneamente. Assim,

dependendo dos vários mecanismos considerados na explicação do transporte de água, pode-se estabelecer uma teoria para o processo.

Existem, na literatura, várias teorias para descrever o processo da secagem, e algumas destas teorias serão mencionadas a seguir:

- Teoria da difusão líquida;
- Teoria da condensação-evaporação;
- Teoria capilar;
- Teoria de Luikov;
- Teoria de Krischer;
- Teoria de Philip de Vries.

Maiores informações sobre tais teorias (e outras) podem ser obtidas, por exemplo, em Farias (2002), Carmo (2004) e Silva, C. (2010).

De acordo com alguns autores, tais como Brooker et al. (1992) e Fioreze (2004), a teoria que considera a migração de água no interior do sólido apenas devido à difusão líquida é resultado de uma simplificação na descrição do movimento migratório. Apesar desta simplificação, a difusão líquida descreve bem o transporte de água do interior do produto para várias situações de interesse, e vem ganhando ampla adesão por parte dos pesquisadores (LIMA, 1999; CARMO, 2000; NASCIMENTO, 2002; WU et al., 2004; CARMO, 2004; LIMA et al., 2004a; SILVA et al., 2007; SILVA, 2007; MELLADO, 2007; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; ARAGÃO, 2007; SILVA et al., 2008a; HACIHAFIZOGLU et al., 2008; SILVA, C., 2010).

## **2.4 – Tipos de secagem**

Os métodos utilizados para o processamento da secagem de produtos agrícolas são diversos, e de uma maneira geral podem ser classificados como natural e artificial. A secagem natural consiste no processamento do produto no próprio campo de cultivo, ou em um terreiro. O ar que seca o produto é proveniente dos ventos e a energia

utilizada emana do sol (SILVA, 1995; FIOREZE, 2004). Este método de secagem tem baixo custo para a sua implementação, e não necessita de mão de obra especializada. Entretanto, a sua utilização está condicionada às condições climáticas. Neste método de secagem, o campo de plantio é ocupado por muito tempo, e o produto fica sujeito à ação de pássaros e roedores, e à contaminação por fungos (FIOREZE, 2004). Este método não é adequado ao processamento de grandes volumes de grãos devido ao baixo rendimento e à vinculação do controle do processo a fatores climáticos (SILVA, 1995).

A secagem artificial tem a interferência do homem no sentido de melhorar e acelerar o processo através de recursos não-naturais controlados, o que permite reduzir rapidamente o teor de umidade dos produtos recém-colhidos evitando, assim, alterações metabólicas e minimizando a ação de fungos e insetos. Apesar de ter um custo mais elevado que o custo da secagem natural, este recurso é amplamente usado em grandes produções devido ao controle e à rapidez proporcionados pelo processo (SILVA, 1995). A secagem artificial pode ser feita com o uso de um fluxo de ar sobre o produto, e ainda a vácuo, a frio, por microondas, dentre outras possibilidades. Detalhes sobre estes tipos de secagem podem ser encontrados, por exemplo, em Silva, C. (2010). No caso do uso de fluxo de ar, existe a secagem a baixa temperatura (ar natural ou levemente aquecido) e secagem a alta temperatura (devido a fluxos de ar aquecido artificialmente).

De acordo com a teoria da difusão líquida, uma parte do calor aquece o corpo e a outra parte vaporiza a água líquida que foi transferida para a sua superfície, sendo que o vapor produzido é retirado das vizinhanças pelo fluxo de ar. A difusão ocorre devido aos gradientes de temperatura (difusão de calor) e de concentração da umidade (difusão de massa). O meio não se movimenta enquanto que massa e energia são transferidas de molécula a molécula (MOHSENIN, 1980). Na literatura, o tipo mais comum de secagem de alimentos é aquele que usa ar quente na remoção de água, e é utilizado largamente na indústria como, por exemplo, na secagem de macarrão (INAZU e IWASAKI, 2000), carnes e pescado (TELLO-PANDURO et al., 2004; TRUJILLO et al., 2004), e meios porosos em geral (COUSSOT, 2000; LI et al., 2004; SCHWARTZ et al., 2005).

## 2.5 – Simulação da secagem

Com o objetivo de descrever o transporte de água no interior de produtos, em muitos trabalhos reportados na literatura somente os dados experimentais são apresentados (DEDIC e ZLATANOVIC, 2001; GOUVEIA et al., 2003). Entretanto, para uma descrição detalhada do transporte de água, modelos matemáticos devem ser usados. Vários modelos são reportados na literatura e, dentre esses, podem ser citados os modelos empíricos (GOUVEIA et al., 2002; BAINI e LANGRISH, 2007; GOYAL et al., 2007; MARTINAZZO et al., 2007), os modelos de difusão (OLIVEIRA e LIMA, 2002, LIMA et al., 2004a; NASCIMENTO et al., 2005; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; CARMO e LIMA, 2008; BAINI e LANGRISH, 2008; SILVA et al., 2009d; SILVA, C., 2010) e o modelo de Darcy (PINHEIRO et al., 1998). O objetivo do uso desses modelos é correlacionar os dados experimentais da secagem a uma equação matemática que vai representar a cinética de secagem do produto. Deve-se observar que alguns desses modelos possibilitam prever a distribuição de umidade no interior do produto, em qualquer instante de tempo.

Geralmente, a secagem de grãos é feita em camada espessa. Entretanto, experimentos sobre a secagem de tais produtos em camada fina possibilitam obter informações que correlacionam as variáveis de interesse (temperatura, velocidade do ar de secagem, duração do processo, energia consumida, teores de umidade inicial e final, dentre outras). Tais informações permitem a realização de simulações para a previsão do processo de secagem em camada espessa. Por outro lado, segundo Fioreze (2004), a secagem de frutas é um exemplo típico de secagem que ocorre em camada fina.

Conforme foi mencionado, existe, na literatura, uma gama de modelos matemáticos que podem ser utilizados para descrever a secagem de produtos alimentícios como grãos e frutas. De maneira geral, estes modelos estão divididos em grupos, dentre os quais podem ser citados:

- Modelos empíricos;
- Modelos baseados na termodinâmica dos processos reversíveis;
- Modelos de difusão líquida.

### 2.5.1 – Modelos empíricos

Um modelo empírico consiste numa correlação direta entre o teor de umidade médio e o tempo de secagem. Segundo Silva (2007), o modelo empírico geralmente descreve bem a cinética de secagem, mas não possibilita visualizar a distribuição de umidade no interior do produto, em um instante de tempo previamente especificado. Neste caso, já que não se pode prever a distribuição de água com a utilização de um modelo empírico, não se pode, também, prever as regiões de maiores tensões hídricas (e térmicas) no interior do produto. Assim, não se pode exercer um maior controle sobre as condições de secagem de forma a evitar danos ao produto durante o processo. Além disso, segundo Bains e Langrish (2007), modelos empíricos não são adequados para descrever a cinética de secagem intermitente. Apesar destas limitações, os modelos empíricos são muito encontrados na literatura, e na Tabela 2.1 são apresentadas algumas equações empíricas referentes a esses modelos.

Tabela 2.1 – Equações empíricas para a cinética de secagem de produtos.

Nº	Nome do modelo	Modelo empírico
1	Newton	$\bar{X} = X_{eq} + (X_i - X_{eq}) \exp(-at)$
2	Page	$\bar{X} = X_{eq} + (X_i - X_{eq}) \exp(-at^b)$
3	Henderson e Pabis	$\bar{X}^* = a \exp(-bt)$
4	Dois termos	$\bar{X}^* = a \exp(-bt) + b \exp(-ct)$
5	Wang e Sing	$\bar{X}^* = 1 + at + bt^2$
6	Midilli	$\bar{X}^* = a \exp(-bt^c) + dt$
7	Aproximação da difusão	$\bar{X}^* = a \exp(-bt) + (1 - a) \exp(-ct)$
8	Thompson	$t = a \ln(\bar{X}^*) + b[\ln(\bar{X}^*)]^2$

Fonte: Corrêa et al. (2007)

Nas equações apresentadas na Tabela 2.1, os parâmetros envolvidos são definidos como segue:



$X_{eq}$  é o teor de umidade de equilíbrio;

$X_i$  é o teor de umidade inicial;

$\bar{X}$  é o teor de umidade médio;

a, b e c são constantes.

Na Tabela 2.1 foi definido o termo  $\bar{X}^* = (\bar{X} - X_{eq}) / (X_i - X_{eq})$ , e tal termo é o teor de umidade adimensional, também chamado de razão de umidade.

Cano-Chauca et al. (2004) ajustaram dados experimentais da secagem de banana, em três temperaturas diferentes, ao modelo exponencial  $\bar{X}^* = a \exp(-kt)$ . Mediante a análise de regressão não-linear, os autores consideraram o ajuste satisfatório, com um coeficiente de determinação superior a 0,90.

Corrêa et al. (2007) usaram 12 modelos empíricos para descrever curvas da cinética de secagem do feijão. Baseados em parâmetros estatísticos, os autores concluíram que a metade dos modelos testados representava bem a cinética de secagem. Dentre estes, o modelo de Page, pela sua simplicidade e pela disseminação no meio científico, foi o selecionado pelos autores para descrever o processo.

Carlesso et al. (2007) utilizaram 5 modelos empíricos para representar a cinética de secagem por convecção em camada fina de maracujá-amarelo. Segundo os autores, dentre os modelos utilizados, o que melhor descreveu a cinética de secagem foi o modelo exponencial duplo, que envolve quatro parâmetros de ajuste.

### **2.5.2 – Modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis**

Usando conceitos baseados em termodinâmicos dos processos irreversíveis, Fortes (1978), e ainda Fortes e Okos (1980) propuseram que a força motriz para transferência isotérmica, tanto para a fase líquida quanto para a fase de vapor, é dada por gradientes do teor de umidade de equilíbrio, e não do teor de umidade. Tal proposta tem como fundamentação a hipótese de equilíbrio local. A força motriz para

transferência de líquido e vapor é dada pelo gradiente do potencial químico, que por sua vez é uma função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Os autores afirmaram que a água em meios capilares porosos pode até mover-se em sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio. A teoria proposta foi usada em vários trabalhos de pesquisa como, por exemplo, na secagem de grãos de trigo. Cada grão de trigo foi considerado como uma esfera por Fortes et al. (1981). Os mesmos dados experimentais foram estudados por Oliveira (2006), que considerou cada grão como um elipsóide.

### **2.5.3 – Modelos de difusão líquida**

No modelo difusivo, a movimentação de líquido dentro do produto é explicada unicamente pela diferença de concentração de umidade, e matematicamente é representado pela equação de difusão. Tal modelo considera a resistência interna e externa aos fluxos de massa, e é capaz de prever a distribuição de umidade no interior de um sólido, em um dado instante de tempo. Frequentemente é usado para descrever o transporte de água em meios porosos, em geral, e em particular é usado com a finalidade de descrever a secagem de corpos úmidos.

Naturalmente, se um processo de secagem for descrito por um modelo difusivo, a equação de difusão tem que ser resolvida. Para resolvê-la, várias hipóteses devem ser estabelecidas. Por exemplo, quanto às condições de contorno, no caso de secagem usando ar quente, deve ser estabelecido se a condição de contorno adequada é a de equilíbrio (LIMA et al., 2004a; SILVA et al., 2007; SILVA et al., 2008a; SILVA et al., 2009a; SILVA et al., 2009b; SILVA et al., 2010b; SILVA, C., 2010), ou a convectiva (QUEIROZ e NEBRA, 2001; OLIVEIRA e LIMA, 2002; TERUEL et al., 2003; BENNAMOUN e BELHAMRI, 2006; SILVA et al., 2009a; SILVA, C., 2010). Uma outra hipótese que deve ser estabelecida é referente ao coeficiente de difusividade de massa que, em vários trabalhos de pesquisa, é considerado constante (OLIVEIRA e LIMA, 2002; LIMA et al., 2004b; NASCIMENTO et al., 2005; SILVA, Alex, et al., 2009; SILVA et al., 2009a; SILVA et al., 2010b). Entretanto, segundo alguns pesquisadores, a difusividade de massa é um parâmetro variável ao longo do processo

(LIMA, 1999; NASCIMENTO, 2002; SILVA et al., 2008a; SILVA, C., 2010; FARIAS, V., 2011). Ainda com relação às hipóteses para a solução da equação de difusão, deve-se estabelecer se a variação dimensional do sólido durante o processo pode ser descartada (LÓPES e ALVARADO, 2007; SILVA et al., 2009a; SILVA et al., 2009d; SILVA et al., 2010b), ou se o encolhimento é tão significativo que deve ser considerado (NASCIMENTO et al., 2005; SILVA, 2007; SILVA et al., 2008a; MARIANI et al., 2008; SILVA, C., 2010; FARIAS, V., 2011). Com relação ao meio, é comum em vários trabalhos de pesquisa estabelecer a hipótese de que o sólido seja homogêneo e isotrópico (BARONAS et al., 1999; SILVA, C., 2010; FARIAS, V., 2011) mas existem, na literatura, alguns trabalhos de pesquisa sobre secagem que consideram a heterogeneidade e anisotropia do produto (PERRÉ e TURNER, 2002). Em diversos trabalhos, a geometria do corpo é aproximada para esferas, paredes e, cilindros (NASCIMENTO, 2002; CHEMKHI e ZAGROUBA, 2005; ABSI et al., 2005; BAUMER e MARIANI; 2005; LÓPEZ et al., 2005). Em outros trabalhos, a forma do sólido é aproximada para geometrias mais complexas como os esferóides oblatos e prolatos (LIMA, 1999; CARMO, 2004; WU et al., 2004; OLIVEIRA, 2006). Dependendo das hipóteses estabelecidas para a descrição do processo de secagem, soluções da equação de difusão podem ser obtidas através de expressões analíticas, o que é bastante comum na descrição da secagem de vários produtos (OLIVEIRA e LIMA, 2002; FARIAS, 2002; MATTEO et al., 2003; LÓPES e ALVARADO, 2007). Entretanto, quanto mais as hipóteses estabelecidas se aproximam das condições reais de secagem, mais difícil se torna a determinação de soluções analíticas para descrever o processo. Nestes casos, soluções numéricas são comumente utilizadas (NASCIMENTO, 2002; WU et al., 2004; CARMO, 2004; OLIVEIRA, 2006; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; SILVA, 2007; RAFIEE et al., 2008).

Em geral, os pesquisadores obtêm soluções da equação de difusão para condições específicas de secagem, e nem sempre tais soluções podem ser utilizadas por outros pesquisadores. Normalmente, em cada trabalho de pesquisa, a equação de difusão deve ser resolvida. Por isto, a seguir, será feita uma rápida revisão em que as equações de transporte e de difusão são apresentadas, seguindo-se dos vários recursos disponíveis para a solução da equação de difusão.

## 2.6 – Equação de transporte

A equação de transporte para um volume elementar pode ser escrita do seguinte modo (SLATTERY, 1999; BIRD et al., 2001; MALISKA, 2004):

$$\frac{\partial (\lambda\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\lambda \vec{v} \Phi) = \nabla \cdot (\Gamma^\Phi \nabla \Phi) + S, \quad (2.1)$$

em que:

$\Phi$  é a variável dependente de interesse;

$\lambda$  e  $\Gamma^\Phi$  são coeficientes de transporte;

$\vec{v}$  é o vetor velocidade do meio;

$S$  é o termo fonte.

O primeiro termo da Equação (2.1) é o termo transiente que indica a variação da grandeza de interesse por unidade de tempo, em um instante  $t$ , dentro de um volume infinitesimal. O segundo termo indica a variação da grandeza de interesse por unidade de tempo e volume, devido à transferência de massa para o volume infinitesimal e é chamado de termo advectivo. O terceiro termo indica a variação da grandeza dentro do volume infinitesimal por difusão e é chamado de termo difusivo. O último termo dá a taxa de geração dentro do volume infinitesimal e é chamado de termo fonte.

## 2.7 – Equação de difusão

A equação da difusão é obtida da equação geral do transporte (equação da conservação), Equação (2.1), para a qual o termo advectivo é nulo. Então, a Equação (2.1) resulta em:

$$\frac{\partial (\lambda\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (\Gamma^\Phi \nabla \Phi) + S. \quad (2.2)$$

A Equação (2.2) pode ser usada para descrever vários processos difusivos como, por exemplo, resfriamento ou aquecimento, certos tipos de congelamento, absorção de água por produtos e secagem. Para o caso específico de secagem, fazendo  $\lambda = 1$ ,  $\Gamma^\Phi = D$ ,  $\Phi = X$  e  $S = 0$ , a Equação (2.2) torna-se

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla X), \quad (2.3)$$

em que:

$X$  é o teor de umidade em base seca, num instante  $t$ ;

$D$  é a difusividade efetiva de massa.

Impondo-se  $\lambda = \rho c_p$  ( $\rho$  é a densidade e  $c_p$  é o calor específico),  $\Gamma^\Phi = k$  (condutividade térmica),  $\Phi = T$  (temperatura), a Equação (2.2) torna-se a equação de condução de calor:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) + S. \quad (2.4)$$

## 2.8 – Soluções da equação de difusão

Para solucionar a equação da difusão, devem ser estabelecidas hipóteses acerca da situação física a ser estudada, conforme foi mencionado no item 2.5.3. Uma delas é com relação à forma do corpo em estudo. Conforme foi mencionado, na literatura são encontrados muitos trabalhos em que a forma real do corpo é aproximada para geometrias simples como paredes infinita e finita, esfera, cilindros infinito e finito, placa retangular e paralelepípedo, dentre outras. Em adição, também são frequentemente encontrados trabalhos de pesquisa que não levam em consideração a variação dimensional do corpo e nem a variação da difusividade ao longo do processo. Para estas hipóteses, se houver uma distribuição uniforme da grandeza de interesse no início do processo, a equação de difusão pode ser resolvida analiticamente (LIMA,

1999; LIU e SIMPSON, 1999; CARMO, 2004; BAUMER e MARIANI, 2005; LÓPEZ et al., 2005; ABSI et al., 2005; CHEMKHI e ZAGROUBA, 2005). Muitas destas soluções analíticas da equação de difusão estão disponíveis, de forma geral, em Luikov (1968), Crank (1992), Incropera e De Witt (1992), Silva et al. (2008a), Saykova et al. (2009); Silva, W. (2009) e Silva, C. (2010).

Quando as hipóteses mencionadas no parágrafo anterior não são satisfeitas, em geral a descrição de um processo difusivo envolve a solução numérica da equação de difusão. Tais soluções são encontradas até mesmo para geometrias simples como, por exemplo, o cilindro infinito (AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; SILVA, C., 2010; SILVA et al., 2010b), o cilindro finito (MULET et al., 2005; SILVA et al., 2009b), esfera (SILVA et al., 2010a) e paralelepípedo (NASCIMENTO, 2002; NASCIMENTO et al., 2005). Para estas geometrias, a solução numérica envolve a equação de difusão escrita nos seguintes sistemas de coordenadas: cilíndricas, esféricas e cartesianas. Se a geometria do sólido estudado é mais complexa que as geometrias referidas anteriormente, normalmente a solução numérica requer a construção de uma malha que pode ser estruturada ou não-estruturada.

No caso da utilização de malhas estruturadas, normalmente a solução numérica envolve a equação de difusão escrita em coordenadas generalizadas. Dois casos de malhas estruturadas merecem destaque: malhas ortogonais e não ortogonais. Se a geometria do sólido é tal que seja possível construir malhas ortogonais no domínio, em geral estas malhas são preferidas porque a equação de difusão pode ser escrita de forma mais simples, em coordenadas generalizadas, e o esforço computacional é relativamente pequeno na solução do problema. Na literatura foram encontradas soluções numéricas da equação de difusão aplicadas a formas geométricas como esferóides oblatos e prolatos, que possibilitam a geração de malhas ortogonais no domínio. Neste caso, o problema de difusão pode ser resolvido considerando parâmetros termo-físicos constantes ou variáveis, com ou sem encolhimento, e uma distribuição inicial de umidade qualquer sobre o domínio (LIMA, 1999; LIMA et al., 2002; CARMO, 2000; LIMA e NEBRA, 2000; FARIAS, 2002; CARMO, 2004; LIMA et al., 2004a; LI et al., 2004; WU et al., 2004; CARMO e LIMA, 2005; OLIVEIRA, 2006; MELO et al., 2008; CARMO e LIMA, 2008).

Se a geometria do sólido for tão complexa que não possibilite a geração de malhas ortogonais no domínio, a solução numérica da equação de difusão através de coordenadas generalizadas fica subordinada à geração de malhas estruturadas não-ortogonais. Nestes casos, a solução do problema envolve, também, os chamados termos cruzados, decorrentes da não-ortogonalidade da malha, e o esforço computacional é significativamente maior que no caso de malhas ortogonais. Apesar disso, o leque de soluções é muito mais abrangente, se estendendo a praticamente qualquer domínio (SILVA, 2007; SILVA et al., 2009c; SILVA et al., 2009d; SILVA et al., 2009e; SILVA et al., 2010a; FARIAS, V., 2011).

### 2.8.1 – Soluções analíticas na descrição de problemas difusivos

Na literatura, a equação de difusão é utilizada na descrição da transferência de calor e de massa em inúmeros trabalhos. Diversos processos físicos tais como secagem, absorção de líquidos, aquecimento, resfriamento e certos tipos de congelamento são descritos pela equação de difusão (SANDER et al., 2003; ROBERTS e TONG, 2003; WU et al., 2004; CARMO e LIMA, 2005; CAVALCANTI et al., 2005; PIROZZI e AMENDOLA, 2005; AMENDOLA e TERUEL, 2005; SILVA et al., 2010a; SILVA et al., 2011a). No caso das soluções analíticas, a forma do corpo objeto de estudo é aproximada para geometrias simples como parede infinita, esfera ou cilindro infinito, supondo a difusividade e o volume com valores constantes.

Para geometrias simples, a equação da difusão unidimensional pode ser escrita na forma (ÖZISIK, 1990; SILVA, 2007):

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r^q} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^q \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

em que  $\Phi$  é a variável de interesse. Tanto essa variável pode ser o teor de umidade (X) na difusão de massa, quanto a temperatura (T) na condução de calor. O expoente q define o sistema de coordenadas a ser utilizado na solução da equação de difusão unidimensional:

- $q = 0$  implica em parede infinita (coordenadas cartesianas);
- $q = 1$  implica em cilindro infinito (coordenadas cilíndricas);
- $q = 2$  implica em esfera (coordenadas esféricas).

Vários livros-texto são encontrados na literatura propondo soluções analíticas para a Equação (2.5) usando, principalmente, o método de separação de variáveis (LUIKOV, 1968; CRANK, 1992; FIOREZE, 2004).

Embora menos frequentes, existem também trabalhos de pesquisa propondo soluções analíticas da equação de difusão para geometrias mais complexas, usando o método de Galerkin (FARIAS, 2002; LIMA et al., 2004a; HACIHAFIZOGLU et al., 2008; MELO et al., 2008; SILVA, Alex et al., 2009).

Uma grande vantagem oferecida por soluções analíticas é a possibilidade de se conhecer a variável de interesse em qualquer ponto do domínio, em qualquer instante de tempo. Entretanto, conforme já foi observado, para a obtenção de uma solução analítica devem ser estabelecidas hipóteses simplificadoras como, por exemplo, volume e difusividade constantes, geometrias simples, distribuição de umidade inicial uniforme, meio homogêneo e isotrópico, dentre outras. Mesmo se tais hipóteses não puderem ser satisfeitas em um determinado estudo, uma solução analítica ainda é útil como uma ferramenta de validação de soluções numéricas desenvolvidas para tal estudo.

### **2.8.2 – Métodos numéricos para a solução de problemas difusivos**

Quando um problema difusivo é tão complexo que não é possível resolvê-lo através de soluções analíticas, pode-se resolver tal problema através de soluções numéricas. Na solução numérica, um domínio contínuo é substituído por um domínio discreto, e a equação diferencial parcial é substituída por equações algébricas, uma para cada volume de controle. Este método tem a vantagem de resolver a equação de difusão para as mais complexas situações como, por exemplo, volume e difusividade variáveis, geometria qualquer, meio não-homogêneo e não-isotrópico (GASTÓN et al., 2002; NASCIMENTO, 2002; MALISKA, 2004; SILVA, 2007; FARIAS, V., 2011).



Existem diversos métodos para solucionar a equação de difusão numericamente, dentre os quais podem ser citados:

- Método das Diferenças Finitas (MDF);
- Método dos Elementos Finitos (MEF);
- Método dos Volumes Finitos (MVF).

O método das diferenças finitas (MDF) historicamente foi empregado na área da mecânica dos fluidos. Como os escoamentos são altamente não-lineares, pois envolve as equações de Navier-Stokes, os pesquisadores do MDF se concentraram na tentativa de dominar as não-linearidades decorrentes dos termos advectivos e do acoplamento entre as equações. A sua implementação computacional é simples, pois é resolvida na forma diferencial, com a aproximação numérica dos operadores. Como exemplos de uso do MDF podem ser citados os trabalhos de Amendola e Queiroz (2007), Mariani et al. (2008), Ismail et al. (2008) e Thuwapanichayanan et al (2011).

Já o método dos elementos finitos (MEF) divide o domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos, que mantém as mesmas propriedades do domínio contínuo, e cada elemento é definido por nós. Na formulação do elemento deve-se escolher uma função aproximada para representar a solução dentro de cada elemento (ou subdomínios). Essa função deve conter coeficientes não conhecidos que serão determinados de forma a minimizar o erro na solução. Esses coeficientes devem ser escritos em função dos valores da grandeza em estudo, obtidos para os nós. As funções aproximadas mais comuns são os polinômios, que devem ser determinados utilizando métodos diretos ou iterativos para a solução de sistemas lineares.

Alguns pontos importantes para a utilização do MEF são destacados a seguir:

- 1) A solução é conhecida para qualquer ponto do domínio, graças ao conceito de função de interpolação;
- 2) A equação é resolvida na forma integral, ou seja, a equação diferencial é satisfeita segundo algum critério de minimização do resíduo;
- 3) Os sistemas matriciais obtidos são, em geral, simétricos, o que simplifica a sua solução;
- 4) A implementação computacional do MEF é complexa, porém é genérica.

São reportados na literatura diversos trabalhos em que o MEF foi utilizado e, dentre estes, podem ser destacados: Gastón et al. (2002), Barreto et al. (2006), Rafiee et al. (2008) e Janjai et al. (2010).

O método dos volumes finitos (MVF) é um dos métodos mais empregados na discretização de equações diferenciais parciais. Isto se deve ao fato deste método não apresentar problemas de instabilidade ou convergência, garantindo que em cada volume discretizado, a propriedade em questão obedece à lei da conservação, dando uma característica conservativa. Como se trabalha com volumes de controle, há conservação no nível de volumes finitos. Este método é largamente utilizado na resolução de problemas envolvendo transferência de calor e/ou massa, e em mecânica dos fluidos. Na literatura, inúmeros trabalhos que utilizam este método são encontrados, dentre os quais podem ser citados: Lima (1999), Wu et al. (2004), Nascimento et al. (2005), Silva (2007), Silva et al. (2007), Silva et al. (2008a), Silva et al. (2009c) Silva, C. (2010) e Farias, V., (2011).

### **2.8.3 – Formulações para os métodos numéricos**

Em geral, em um método numérico usado para resolver a equação de difusão, é possível estabelecer três formulações, de acordo com o tempo que é definido para

representar a grandeza de interesse ao se expressar as derivadas espaciais. A Figura 2.1 mostra as três possibilidades de interpolação no tempo, que são representadas pela seguinte expressão (MALISKA, 2004):

$$\Phi^\theta = \theta \Phi + (1 - \theta) \Phi^0. \quad (2.6)$$

onde  $\theta$  é o fator peso da média ponderada.

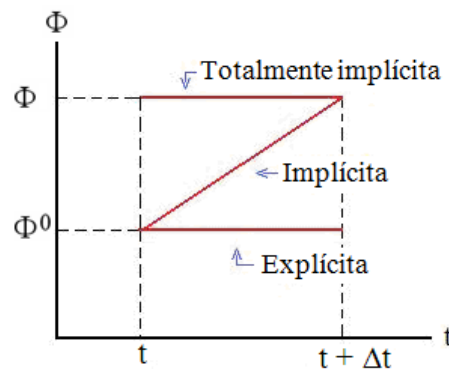


Figura 2.1 – Formulações de interpolação no tempo.

Na Equação (2.6), fazendo  $\theta = 0$  tem-se a formulação explícita, conforme é destacado na Figura 2.1. Nessa formulação, a variável de interesse para expressar as derivadas espaciais é avaliada no instante inicial ( $t$ ) do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) e, portanto, o seu valor já é conhecido ( $\Phi = \Phi^0$ ). Neste caso, a discretização resulta em um conjunto de equações que podem ser resolvidas uma a uma. Assim, a variável de interesse para cada volume de controle pode ser determinada para o novo nível de tempo ( $t + \Delta t$ ), sem a necessidade de que um sistema de equações seja resolvido. Essa formulação tem uma limitação com relação à magnitude do intervalo de tempo que deve ser adotado para avançar no tempo, de forma a manter a estabilidade da solução numérica (SILVA, W., 2009).

Diversos trabalhos na literatura usam a formulação explícita para resolver a equação de difusão numericamente como, por exemplo, Pirozzi e Amendola (2002),

Póvoas et al. (2002), Ismail et al. (2008), Prakotmak et al. (2010) e Thuwapanichayanan et al. (2011).

Quando  $\theta$  é feito igual a 1, na Equação (2.6), tem-se a formulação totalmente implícita. A variável de interesse é definida, nas derivadas espaciais, no final do intervalo de tempo, caracterizando o acoplamento das equações. Tem-se, portanto, que resolver um sistema de equações, para cada intervalo de tempo. A vantagem dessa formulação consiste no fato dela ser incondicionalmente estável, para qualquer intervalo de tempo estipulado. Assim, pode-se avançar no tempo em intervalos sem um limite prefixado de magnitude. Por exemplo, pode-se atingir o regime permanente dando um único salto no nível de tempo, atribuindo ao intervalo de tempo um valor suficientemente grande.

Muitos pesquisadores trabalham com esta formulação, e alguns exemplos podem ser mencionados: Carmo e Lima (2008), Silva et al. (2009b), Silva et al. (2009d), Silva et al. (2009e) Silva, C. (2010) e Farias, V., (2011).

Na formulação implícita é imposta a condição  $0 < \theta < 1$ . Nessa formulação a variável de interesse na definição das derivadas espaciais é dada pela média geométrica dada entre  $\Phi$  e  $\Phi^0$ , conforme a Equação (2.6). Essa formulação é conhecida como formulação de Crank-Nicolson e foi usada, por exemplo, por Gastón et al. (2002), Amendola e Teruel (2005).

## 2.9 – Sistema de coordenadas generalizadas

No processos difusivos considerando a geometria real do sólido de interesse, é necessário resolver a equação de difusão em um sistema de coordenadas coincidentes com a fronteira do sólido. Devido a isso, será feita uma pequena revisão dos fundamentos sobre os quais se baseia o seguinte assunto: “coordenadas generalizadas”. Tal revisão será apresentada a seguir, baseando-se em Maliska (2004), Silva (2007) e Silva, W., (2009).

Dado um ponto P conforme é mostrado na Figura 2.2, deseja-se localizá-lo através de dois sistemas de eixos, em que um deles é o sistema de eixos cartesianos  $xyz$ , e o outro é um sistema de eixos em coordenadas generalizadas  $\xi\eta\gamma$ . Um sistema de coordenadas generalizadas possui eixos que podem ser curvilíneos e não-ortogonais entre si, e é também chamado de sistema transformado.

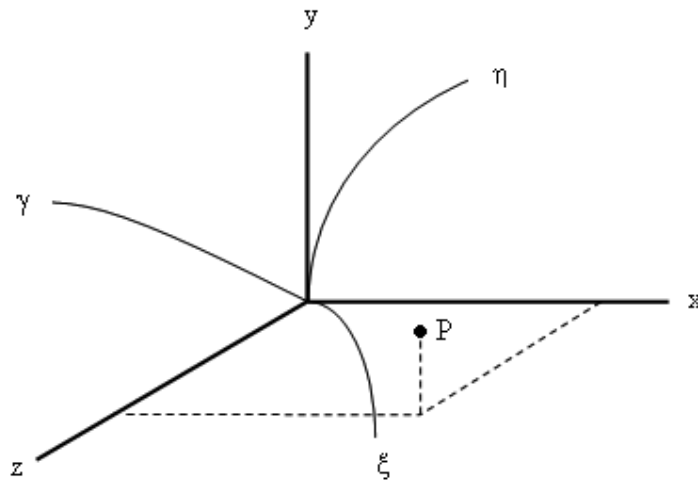


Figura 2.2 – Sistemas de coordenadas cartesianas e de coordenadas generalizadas.

Fonte: Silva (2007)

Conforme os fundamentos apresentados tornam-se óbvio, que até mesmo o sistema de coordenadas cartesianas é um caso particular de coordenadas generalizadas.

### 2.9.1 Métricas de uma transformação

Podem-se relacionar as coordenadas do ponto P nos dois sistemas de eixos coordenados mostrados na Figura 2.2 observando, inicialmente, que  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  podem ser dados em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , do seguinte modo:

$$\xi = \xi(x,y,z), \quad (2.7)$$

$$\eta = \eta(x,y,z), \quad (2.8)$$

$$\gamma = \gamma(x,y,z) . \quad (2.9)$$

Deve ser observado que  $\xi(x,y,z)$ ,  $\eta(x,y,z)$  e  $\gamma(x,y,z)$  são funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Então, se tais funções forem conhecidas, as coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  podem ser determinadas para um ponto cujas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  sejam conhecidas. Em adição a isto, as diferenciais totais dessas funções podem ser dadas, na forma matricial, do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

em que termos do tipo  $t_m$  representam a derivada parcial de uma variável  $t$  em relação a uma outra  $m$ :  $\partial t / \partial m$ . Compactamente, a Equação (2.10) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[DT] = [A][DF], \quad (2.11)$$

em que  $[DT]$  é um vetor no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta, \gamma)$ , freqüentemente chamado de domínio transformado, e  $[DF]$  é o seu correspondente no sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , também denominado de domínio físico. Comparando as Equações (2.10) e (2.11), tem-se:

$$[A] = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Uma vez conhecidas as coordenadas do ponto  $P$  no domínio transformado, suas coordenadas no domínio físico podem ser obtidas através de funções dadas do seguinte modo:

$$x = x(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.13)$$

$$y = y(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.14)$$

$$z = z(\xi, \eta, \gamma). \quad (2.15)$$

Usando o mesmo raciocínio anterior, tem-se:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

ou, compactamente,

$$[DF] = [B][DT], \quad (2.17)$$

onde

$$[B] = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

A Equação (2.17) pode ser usada para expressar  $[DT]$  se tal equação for multiplicada pela matriz inversa de  $[B]$ , dada por  $[B]^{-1}$ . Então, lembrando que o produto  $[B]^{-1}[B]$  é a matriz identidade, pode-se obter a seguinte relação:

$$[DT] = [B]^{-1} [DF]. \quad (2.19)$$

Comparando a Equação (2.19) com a Equação (2.11), tem-se:

$$[A] = [B]^{-1}. \quad (2.20)$$

A inversa de uma matriz é determinada pela transposta da matriz dos cofatores dividida pelo determinante da matriz original, e tal informação possibilita escrever:

$$[B]^{-1} = J \begin{bmatrix} (y_{\eta}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\eta}) & -(x_{\eta}z_{\gamma} - x_{\gamma}z_{\eta}) & (x_{\eta}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\eta}) \\ -(y_{\xi}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\xi}) & (x_{\xi}z_{\gamma} - x_{\gamma}z_{\xi}) & -(x_{\xi}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\xi}) \\ (y_{\xi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\xi}) & -(x_{\xi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\xi}) & (x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}) \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

em que

$$J = \frac{1}{|B|} = |A|. \quad (2.22)$$

Na Equação (2.22) J é definido como o jacobiano da transformação de coordenadas. Como o jacobiano é igual ao inverso do determinante da matriz [B], deve ser, também, igual ao determinante da matriz [A]. Dessa forma, pode-se escrever:

$$J = [x_{\xi}(y_{\eta}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\eta}) - x_{\eta}(y_{\xi}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\xi}) + x_{\gamma}(y_{\xi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\xi})]^{-1}. \quad (2.23)$$

Da Equação (2.20), com a matriz [A] dada pela Equação (2.12) e a matriz [B]<sup>-1</sup> dada pela Equação (2.21), tem-se:

$$\xi_x = J (y_{\eta}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\eta}), \quad (2.24)$$

$$\xi_y = -J (x_{\eta}z_{\gamma} - x_{\gamma}z_{\eta}), \quad (2.25)$$

$$\xi_z = J (x_{\eta}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\eta}), \quad (2.26)$$



$$\eta_x = -J (y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi), \quad (2.27)$$

$$\eta_y = J (x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi), \quad (2.28)$$

$$\eta_z = -J (x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi), \quad (2.29)$$

$$\gamma_x = J (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \quad (2.30)$$

$$\gamma_y = -J (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi), \quad (2.31)$$

$$\gamma_z = J (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi). \quad (2.32)$$

As expressões definidas pelas Equações de (2.24) até (2.32) são chamadas de métricas da transformação do sistema  $(x, y, z)$  para o sistema  $(\xi, \eta, \gamma)$ .

### 2.9.2 Métricas de uma transformação inversa

As métricas de uma transformação inversa podem, também, ser obtidas de forma simples, comparando a matriz inversa  $[A]^{-1}$ , que pode ser obtida da Equação (2.12), com a matriz  $[B]$ , dada pela Equação (2.18). Fazendo a comparação, os seguintes resultados são obtidos:

$$x_\xi = \frac{\eta_y \gamma_z - \eta_z \gamma_y}{J}, \quad (2.33)$$

$$x_\eta = -\frac{\xi_y \gamma_z - \xi_z \gamma_y}{J}, \quad (2.34)$$

$$x_\gamma = \frac{\eta_z \xi_y - \eta_y \xi_z}{J}, \quad (2.35)$$

$$y_\xi = -\frac{\eta_x \gamma_z - \eta_z \gamma_x}{J}, \quad (2.36)$$

$$y_\eta = \frac{\xi_x \gamma_z - \xi_z \gamma_x}{J}, \quad (2.37)$$

$$y_\gamma = -\frac{\xi_x \eta_z - \xi_z \eta_x}{J}, \quad (2.38)$$

$$z_\xi = \frac{\eta_x \gamma_y - \eta_y \gamma_x}{J}, \quad (2.39)$$

$$z_\eta = -\frac{\xi_x \gamma_y - \xi_y \gamma_x}{J}, \quad (2.40)$$

$$z_\gamma = \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{J}. \quad (2.41)$$

## 2.10 – Equação de difusão em coordenadas generalizadas

Em coordenadas generalizadas, a Equação (2.2) é escrita do seguinte modo (MALISKA, 2004; SILVA, 2007):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\lambda \Phi}{J} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( V_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + V_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \frac{\Gamma^\Phi}{J} \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( V_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + V_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \frac{\Gamma^\Phi}{J} \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( V_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + V_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \frac{\Gamma^\Phi}{J} \right] + \frac{S}{J}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde:

$$V_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2, \quad (2.43)$$

$$V_{12} = V_{21} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z, \quad (2.44)$$

$$V_{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2, \quad (2.45)$$

$$V_{13} = V_{31} = \xi_x \gamma_x + \xi_y \gamma_y + \xi_z \gamma_z, \quad (2.46)$$

$$V_{23} = V_{32} = \eta_x \gamma_x + \eta_y \gamma_y + \eta_z \gamma_z, \quad (2.47)$$

$$V_{33} = \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2. \quad (2.48)$$

### 2.11 – Equação de difusão em coordenadas curvilíneas ortogonais

No caso do sistema de eixos curvilíneos serem ortogonais, a equação de difusão pode ser reescrita de forma mais simples do que a forma em que foi escrita através da Equação (2.42). Esta forma mais simples pode ser obtida diretamente da Equação (2.42), por eliminação dos termos cruzados, ou conforme é mostrado a seguir.

Se as coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$  puderem ser expressas por funções analíticas dadas por:

$$x = x(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.49)$$

$$y = y(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.50)$$

$$z = z(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.51)$$

em que  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  são eixos ortogonais, a equação de difusão é dada por (BUTKOV, 1978):

$$h_\xi h_\eta h_\gamma \frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{h_\eta h_\gamma}{h_\xi} \right) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \frac{h_\xi h_\gamma}{h_\eta} \right) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( \frac{h_\xi h_\eta}{h_\gamma} \right) \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right] \quad (2.52)$$

onde:

$$h_\xi = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2}, \quad (2.53)$$

$$h_\eta = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2}, \quad (2.54)$$

e

$$h_\gamma = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right)^2}. \quad (2.55)$$

Dessa forma, a equação de difusão pode ser obtida para vários sistemas de coordenadas com eixos perpendiculares, como será visto a seguir.

### 2.11.1 – Equação de difusão em coordenadas cilíndricas

Para o sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , as coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são expressas do seguinte modo:

$$x = r \cos\theta, \quad (2.56)$$

$$y = r \sin\theta, \quad (2.57)$$

e

$$z = z, \quad (2.58)$$

em que  $r \equiv \xi$  e  $\theta \equiv \eta$  e  $z \equiv \gamma$ . Assim, de acordo com as Equações de (2.53) a (2.55), tem-se:

$$h_r = 1, \quad (2.59)$$

$$h_\theta = r, \quad (2.60)$$

e

$$h_\gamma = 1. \quad (2.61)$$

Substituindo os três últimos resultados na Equação (2.52), obtém-se:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right), \quad (2.62)$$

que é a equação de difusão em coordenadas cilíndricas.

### 2.11.2 – Equação de difusão em coordenadas esferoidais oblatos

Para o sistema de coordenadas esferoidais oblatos, as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser expressas em função de  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  do seguinte modo:

$$x = L \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \gamma, \quad (2.63)$$

$$y = L \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)(1 - \gamma^2)}, \quad (2.64)$$

e

$$z = L\xi\eta. \quad (2.65)$$

onde  $L$  é a distância do centro da elipse ao foco. Assim, podem-se determinar as seguintes expressões:

$$h_\xi = L \sqrt{\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{(\xi^2 + 1)}}, \quad (2.66)$$

$$h_\eta = L \sqrt{\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \eta^2)}}, \quad (2.67)$$

e

$$h_\gamma = L \sqrt{\frac{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}{(1 - \gamma^2)}}. \quad (2.68)$$

Neste caso, a Equação (2.52) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = & \frac{1}{L^2(\eta^2 + \xi^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 + 1)\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{L^2(\eta^2 + \xi^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2)\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \\ & \frac{\sqrt{(1 - \gamma^2)}}{L^2(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( (\sqrt{1 - \gamma^2})\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

que é a equação de difusão escrita no sistema de coordenadas oblato.

Com esta revisão bibliográfica, ficam estabelecidos os fundamentos para a definição da modelagem matemática referente às ferramentas analíticas e numéricas a serem desenvolvidas neste trabalho. Tal modelagem será apresentada no Capítulo 3.

## **CAPÍTULO 3 – MATERIAL E MÉTODOS**

Neste capítulo são apresentados os modelos matemáticos necessários para o desenvolvimento das ferramentas a serem disponibilizadas para a simulação do transporte de água em alguns sólidos porosos. Tais sólidos podem ter a forma de cilindros finitos e também de elipsóides. Em adição, são definidos os testes para a validação das ferramentas desenvolvidas. Por último, são estabelecidos os critérios referentes à metodologia experimental para a secagem de bananas.

### **Parte A: Modelagem matemática**

No presente trabalho, o modelo da difusão líquida para o transporte de água em camada fina é considerado adequado para descrever o fenômeno. Este é um modelo amplamente aceito na literatura (DOYMAZ e PALA, 2002; BELLO et al., 2004; THAKUR e GUPTA, 2006), e será usado tanto para uma geometria cilíndrica quanto para um elipsóide. Conforme Silva, C. (2010) reportou em sua dissertação de mestrado, a condição de contorno de equilíbrio é insatisfatória na descrição da secagem de bananas



inteiras. Assim, apenas modelos matemáticos envolvendo a condição de contorno do terceiro tipo são considerados no presente trabalho.

São apresentadas, a seguir, as soluções analíticas e numéricas para equação de difusão escrita em coordenadas cilíndricas, a serem utilizadas para descrever um processo difusivo em um cilindro finito. É apresentada, ainda, a solução numérica da equação de difusão escrita em coordenadas generalizadas, a ser usada para descrever um processo difusivo em um elipsóide.

### **3.1 – Hipóteses para a obtenção da solução analítica para a equação de difusão**

Inicialmente, a solução analítica da equação de difusão será apresentada para um cilindro finito, em que o processo difusivo é sujeito às seguintes hipóteses:

- o cilindro deve ser considerado homogêneo e isotrópico;
- a distribuição do teor de umidade dentro do cilindro deve ter simetria radial e tem que ser inicialmente uniforme;
- as condições do meio de secagem permanecem as mesmas durante todo o processo;
- o único mecanismo de transporte de água dentro do sólido é a difusão líquida;
- as dimensões do cilindro não variam durante a difusão;
- a difusividade efetiva não varia durante o processo;
- a condição de contorno é do terceiro tipo.

### **3.2 – Solução analítica da equação de difusão para a geometria cilíndrica**

Para as hipóteses estabelecidas anteriormente, a equação de difusão tem solução analítica para várias geometrias simples, dentre as quais a geometria referente ao cilindro

finito. Vale salientar que um cilindro finito pode ser obtido pela interseção de dois sólidos ainda mais simples: o cilindro infinito e a parede infinita, conforme a Figura 3.1(a).

Com a finalidade de apresentar a solução analítica da equação de difusão para um meio no qual a geometria é definida por um cilindro finito de raio  $R$  e comprimento  $C$ , tal geometria é esquematizada através da Figura 3.1(b), dada a seguir.

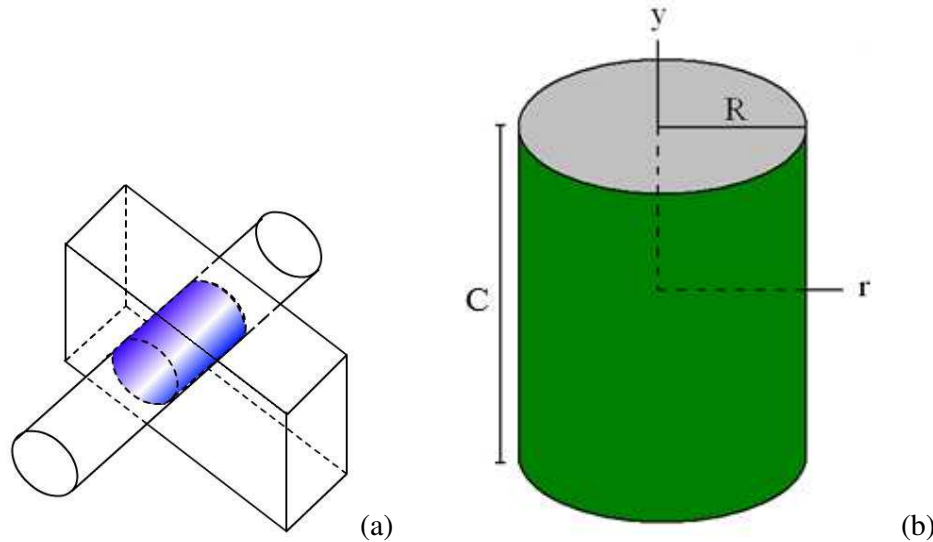


Figura 3.1 – (a) Interseção de um cilindro infinito e de uma parede infinita; (b) Cilindro finito de raio  $R$  e comprimento  $C$ .

Para a geometria cilíndrica apresentada na Figura 3.1(b), a equação de difusão bidimensional aplicada à difusão de uma propriedade pode ser escrita, em coordenadas cilíndricas, com base na Equação (2.62), pressupondo as hipóteses estabelecidas ( $\partial\Phi/\partial\theta = 0$ ), da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\Phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma^{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma^{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + S, \quad (3.1)$$

em que:

$\Phi$  é a variável dependente de interesse no processo difusivo;

$\lambda$  e  $\Gamma^\Phi$  são os parâmetros de processo;

S é um termo fonte.

Na Equação (3.1),  $r$  é definido em relação ao eixo central do cilindro e, juntamente com  $y$  (em substituição a  $z$ , na Equação (2.62)), define a posição de um ponto no interior do sólido a ser estudado.

Fazendo  $\lambda = 1$ ,  $\Gamma^\Phi = D$  (difusividade efetiva de massa),  $\Phi = X$  (teor de umidade em base seca) e  $S = 0$ , a Equação (3.1) pode ser reescrita para descrever o transporte de umidade em um sólido considerado como um cilindro finito, do seguinte modo:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial X}{\partial y} \right), \quad (3.2)$$

A solução analítica a ser apresentada neste trabalho para a Equação (3.2) é referente à condição de contorno convectiva, também chamada de condição de contorno do terceiro tipo, ou ainda condição de contorno de Cauchy. Esta condição é expressa através da imposição de igualdade entre o fluxo interno (difusivo) na superfície do cilindro finito e o fluxo externo (convectivo) nas vizinhanças desta superfície:

$$-D \frac{\partial X(r, y, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = h \left[ X(r, y, t) \Big|_{r=R} - X_{\text{eq}} \right], \quad (3.3)$$

e

$$-D \frac{\partial X(r, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm C/2} = h \left[ X(r, y, t) \Big|_{y=\pm C/2} - X_{\text{eq}} \right], \quad (3.4)$$

em que cada variável das equações anteriores será definida mais à frente.

Para um cilindro homogêneo e isotrópico, de raio  $R$  e comprimento  $C$ , com teor de umidade inicial uniformemente distribuído  $X_i$ , com teor de umidade de equilíbrio  $X_{eq}$ , a solução  $X(r,y,t)$  da Equação (3.2), para as condições de contorno definidas pelas Equações (3.3) e (3.4), é obtida por separação de variáveis (LUIKOV, 1968; CRANK, 1992) e resulta em:

$$X(r, y, t) = X_{eq} - (X_{eq} - X_i) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,1} A_{m,2} J_0\left(\mu_{n,1} \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_{m,2} \frac{y}{C/2}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{\mu_{n,1}^2}{R^2} + \frac{\mu_{m,2}^2}{(C/2)^2}\right) Dt\right]. \quad (3.5)$$

Conforme foi mencionado anteriormente, nesta solução apresentada está implícita a idéia de que um cilindro finito pode ser obtido pela interseção de dois sólidos ainda mais simples: um cilindro infinito de raio  $R$  e uma parede infinita de espessura  $C$ .

Retornando à Equação (3.5), deve ser observado que  $X(r,y,t)$  é o teor de umidade em base seca numa posição  $(r,y)$  do cilindro num instante  $t$ , e  $D$  é a difusividade efetiva de massa. Ainda com relação à Equação (3.5), os coeficientes  $A_{n,1}$  e  $A_{m,2}$  são definidos como segue:

$$A_{n,1} = \frac{2Bi_1}{J_0(\mu_{n,1})(Bi_1^2 + \mu_{n,1}^2)}, \quad (3.6)$$

e

$$A_{m,2} = (-1)^{m+1} \frac{2Bi_2(Bi_2^2 + \mu_{m,2}^2)^{1/2}}{\mu_{m,2}(Bi_2^2 + Bi_2 + \mu_{m,2}^2)}. \quad (3.7)$$

Nas Equações (3.6) e (3.7), as variáveis referentes aos termos de cada segundo membro serão definidos mais à frente. Por outro lado, a expressão para o valor médio do teor de umidade, num instante  $t$ , é dada da seguinte forma:

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{V} \int X(r, y, t) dV. \quad (3.8)$$

A solução da equação de difusão para o valor médio  $\bar{X}(t)$  num cilindro finito em um instante  $t$  é obtida pela substituição da Equação (3.5) na Equação (3.8), e é dada por:

$$\bar{X}(t) = X_{eq} - (X_{eq} - X_i) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,1} B_{m,2} \exp \left[ - \left( \frac{\mu_{n,1}^2}{R^2} + \frac{\mu_{m,2}^2}{(C/2)^2} \right) Dt \right], \quad (3.9)$$

onde  $\bar{X}(t)$  é o teor de umidade médio em base seca no instante  $t$ .

O coeficiente  $B_{n,1}$  é definido do seguinte modo:

$$B_{n,1} = \frac{4Bi_1^2}{\mu_{n,1}^2 (Bi_1^2 + \mu_{n,1}^2)}, \quad (3.10)$$

em que  $Bi_1$  é o número de Biot referente ao cilindro infinito, e é dado por

$$Bi_1 = \frac{hR}{D}. \quad (3.11)$$

O coeficiente  $B_{m,2}$  é definido como segue:

$$B_{m,2} = \frac{2Bi_2^2}{\mu_{m,2}^2 (Bi_2^2 + Bi_2 + \mu_{m,2}^2)}, \quad (3.12)$$

e nesta expressão  $Bi_2$  é o número de Biot referente à parede infinita, sendo dada pela expressão

$$Bi_2 = \frac{hC/2}{D}. \quad (3.13)$$

Nas Equações (3.3), (3.4), (3.11) e (3.13),  $h$  é o coeficiente de transferência convectiva de massa e, na solução apresentada, foi imposto o mesmo valor de  $h$  para todas as superfícies do cilindro.

Nas Equações (3.6) e (3.10),  $\mu_{n,1}$  são as raízes da equação característica para o cilindro infinito, e são calculadas através da seguinte equação transcendental:

$$\frac{J_0(\mu_{n,1})}{J_1(\mu_{n,1})} = \frac{\mu_{n,1}}{Bi_1}, \quad (3.14)$$

sendo  $J_0$  e  $J_1$  as funções de Bessel de primeiro tipo de ordens 0 e 1, respectivamente.

Nas Equações (3.7) e (3.12),  $\mu_{m,2}$  são as raízes da equação característica para a parede infinita, e são calculadas através da seguinte equação transcendental:

$$\cot \mu_{m,2} = \frac{\mu_{m,2}}{Bi_2}. \quad (3.15)$$

Do exposto, as Equações (3.5) e (3.9) podem ser utilizadas para quaisquer números de Biot de interesse. No presente trabalho, visando à implementação computacional da Equação (3.9), as primeiras 16 raízes da Equação (3.14) foram determinadas para 452 números de Biot distintos, referentes ao cilindro infinito, cobrindo a região de 0 (correspondendo a uma resistência infinita ao fluxo de água na superfície) até 200 (que em termos práticos corresponde à uma condição de contorno de equilíbrio na superfície). Obviamente, os cálculos efetuados resultam em um grande banco de dados, com 7232 valores de raízes, e a sua apresentação se torna inviável no presente texto. Mas apenas como exemplo, algumas das primeiras raízes para pequenos valores do número de Biot referentes ao cilindro infinito serão apresentadas na Tabela 3.1, dada a seguir.

Tabela 3.1 – Algumas raízes da equação característica para o cilindro infinito, dada pela Eq. (3.14), para números de Biot pequenos.

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
0,005	0,099938	3,833010	7,016299	10,17396	13,32407
0,010	0,141245	3,834315	7,017012	10,17445	13,32444
0,015	0,172881	3,835619	7,017724	10,17494	13,32482
0,020	0,199501	3,836922	7,018437	10,17543	13,32519
0,025	0,222910	3,838225	7,019149	10,17592	13,32557

Conforme foi estabelecido, para fins de aplicação neste trabalho, os dezesseis primeiros termos da série infinita referentes ao cilindro infinito, foram utilizados. Ainda como exemplo, para números de Biot próximos da condição de contorno de equilíbrio, algumas raízes referentes ao cilindro infinito também são apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Algumas raízes da equação característica para o cilindro infinito, dada pela Eq. (3.14), para números de Biot grandes.

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
42,0	2,348303	5,390906	8,452804	11,52076	14,59280
50,0	2,357242	5,411197	8,483989	11,56208	14,64330
70,0	2,370728	5,441938	8,531584	11,62579	14,72218
100,0	2,380902	5,465207	8,567832	11,67473	14,78342
200,0	2,392832	5,492553	8,610594	11,73279	14,85659

Conforme foi mencionado, ao todo foram determinados 7232 valores de raízes para cilindros infinitos, e a sua apresentação completa se torna inviável no presente texto, embora todos os valores estejam presentes no software desenvolvido. O principal objetivo da solução analítica apresentada é realizar processos de otimização visando à determinação da difusividade efetiva e do coeficiente de transferência convectiva de massa, a partir de dados experimentais.

Similarmente ao que foi feito para o cilindro infinito, as primeiras 16 raízes da Equação (3.15) foram determinadas para 472 números de Biot distintos, referentes à parede infinita, cobrindo a região de números de Biot de 0 até 200. Como exemplo, algumas das primeiras raízes para pequenos valores do número de Biot referentes à parede infinita são apresentadas na Tabela 3.3, dada a seguir.

Tabela 3.3 – Algumas raízes da equação característica para a parede infinita, dada pela Equação (3.15), para números de Biot pequenos.

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
0,005	0,070652	3,14318	6,28398	9,42531	12,5668
0,012	0,109326	3,14541	6,28509	9,42605	12,5673
0,016	0,126155	3,14668	6,28573	9,42648	12,5676
0,020	0,140952	3,14795	6,28637	9,42690	12,5680
0,025	0,157458	3,14953	6,28716	9,42743	12,5684

Ainda como exemplo, para números de Biot elevados, isto é, para situações próximas da condição de contorno de equilíbrio, algumas raízes referentes à parede infinita também são apresentadas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Algumas raízes da equação característica para a parede infinita, dada pela Equação (3.15), para números de Biot grandes.

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$
42,0	1,53428	4,60322	7,67328	10,7451	13,8193
50,0	1,54001	4,62025	7,70116	10,7832	13,8666
70,0	1,54868	4,64611	7,74380	10,8419	13,9406
100,0	1,55525	4,66577	7,77637	10,8871	13,9981
200,0	1,56298	4,68895	7,81493	10,9409	14,0669

Vale salientar que todas as raízes das equações transcendentais referentes ao cilindro infinito, Equação (3.14), e à parede infinita, Equação (3.15), foram calculadas usando o LAB Fit Curve Fitting Software (SILVA et al. 2004), que dispõe de uma ferramenta para a determinação de raízes de equações transcendentais.



### 3.3 – Razão de umidade

A Equação (3.9) pode ser rearranjada para expressar a razão de umidade, que é definida do seguinte modo:

$$\bar{X}^* = \frac{\bar{X}(t) - X_{eq}}{X_i - X_{eq}}. \quad (3.16)$$

Neste trabalho, os dados experimentais obtidos para a cinética de secagem serão utilizados na forma adimensional com o uso da Equação (3.16).

### 3.4 – Determinação de parâmetros termo-físicos

O otimizador desenvolvido por Silva et al. (2010b) e acoplado à solução analítica referente a um cilindro infinito será adaptado neste trabalho para a determinação de parâmetros termo-físicos referentes a um cilindro finito. Tais parâmetros são a difusividade efetiva e o coeficiente de transferência convectiva de massa. Assim, a função objetivo a ser minimizada é dada pelo qui-quadrado referente ao ajuste da curva simulada aos dados experimentais (BEVINGTON e ROBINSON, 1992; TAYLOR, 1997; SILVA e SILVA, 1998):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \left[ \bar{X}_i^{\text{exp}} - \bar{X}_i^{\text{ana}}(D, Bi_1) \right]^2 \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (3.17)$$

onde  $\bar{X}_i^{\text{exp}}$  é o teor de umidade médio experimental referente ao ponto  $i$ ;  $\bar{X}_i^{\text{ana}}$  é o teor de umidade médio correspondente ao ponto  $i$ , obtido através da solução analítica da equação de difusão;  $\sigma_i$  é o desvio padrão do teor de umidade médio experimental relativo ao ponto  $i$ ;  $D$  é a difusividade efetiva,  $N_p$  é o número de pontos experimentais e  $Bi$  é o número de Biot.

Deve ser observado que, para um número de Biot especificado, o qui-quadrado depende de um único parâmetro de processo: a difusividade efetiva. Assim, para um

conjunto de dados experimentais, para cada número de Biot especificado, um “D” ótimo pode ser determinado através da minimização do qui-quadrado, usado como função objetivo. Se  $\sigma_i$  não for conhecido, ou seja, se os seus valores não foram obtidos nos experimentos realizados para a cinética de secagem, estes parâmetros devem ser feitos artificialmente iguais a 1 para todos os pontos experimentais, isto é, todos os pontos devem ter o mesmo peso estatístico. Em termos práticos, passa-se a minimizar o resíduo, ao invés do qui-quadrado.

Com  $Bi_1$  especificado, a Equação (3.17) dá o qui-quadrado em função do valor da difusividade, que é um dos parâmetros que se deseja determinar. Para a determinação de um primeiro intervalo que contenha o valor de D referente ao menor qui-quadrado, inicialmente pode-se atribuir um valor próximo de zero para D, que é substituído na Equação (3.9), dada com uma certa quantidade de termos (no presente trabalho, dezesseis termos para cada somatório). Então,  $\bar{X}_i^{ana}$  pode ser calculado, o que possibilita determinar  $\chi^2$  através da Equação (3.17). No otimizador desenvolvido por Silva et al. (2010b), este primeiro valor para D é igual a  $1 \times 10^{-20}$ . Então, o valor de D é dobrado, e um novo  $\chi^2$  é calculado. O novo qui-quadrado é comparado com o valor anterior. Se o novo valor for menor, D é dobrado novamente, e outro valor de  $\chi^2$  é calculado, seguindo-se da comparação com o valor anterior de  $\chi^2$ . Este procedimento é repetido até que o último  $\chi^2$  calculado seja maior que o valor anterior. Dessa forma, o último e o antepenúltimo valores de D definem um intervalo grosseiro que contém o ponto de mínimo para  $\chi^2$ .

Subdividindo este primeiro intervalo determinado para D em n valores para a difusividade, podem-se determinar n novos valores de  $\chi^2$  correspondentes aos novos valores de D estipulados neste intervalo. Desta forma, pode-se determinar um novo mínimo para  $\chi^2$ , mais refinado, e o processo pela busca por D referente a  $\chi^2$  mínimo pode prosseguir até que um critério de convergência seja satisfeito.

O procedimento descrito anteriormente pode ser repetido para todos os 452 números de Biot que cobrem todo o domínio de 0 até 200. Após a varredura de todos os números de Biot ( $Bi_1$ ), é feita a identificação do menor qui-quadrado entre todos os

mínimos determinados, o que possibilita identificar o número de Biot adequado ao processo difusivo.

Comparando as Equações (3.11) e (3.13), pode-se escrever que  $Bi_2 = C Bi_1 / (2R)$ . Assim, ao estipular um valor para  $Bi_1$ ,  $Bi_2$  também é definido. Caso as raízes da equação transcendental não estejam definidas nas tabelas para um dado  $Bi_2$ , elas são calculadas por interpolação linear.

O código do otimizador para a solução analítica referente ao cilindro finito foi criado utilizando-se um computador Intel Pentium IV com 2 GB (RAM). A compilação do código fonte foi feita no estúdio Compaq Visual Fortran (CVF) 6.6.0 Professional Edition, usando uma opção de programação denominada QuickWin Application, enquanto que a plataforma foi Windows Vista. O critério de convergência estipulado neste trabalho para o qui-quadrado foi  $1 \times 10^{-15}$ .

Uma vez que a difusividade efetiva tenha sido determinada, a Equação (3.5) pode ser usada para determinar a distribuição do teor de umidade como função do raio  $r$ , entre 0 e  $R$ , e da posição  $y$ , entre  $-C/2$  e  $C/2$ , para um dado instante de tempo.

### 3.5 – Cilindro finito: solução numérica da equação de difusão

Quando a equação de difusão é resolvida analiticamente, uma solução exata é obtida. Isto é uma vantagem com relação à solução numérica. Mas soluções analíticas são obtidas apenas para situações especiais, muitas vezes pouco realistas, o que não raro distorce a situação física envolvida. Como uma solução analítica em geral é apresentada na forma de uma série infinita, para que os resultados sejam extraídos, ela deve ser truncada, usando-se apenas um determinado número de termos (PIROZZI e AMÊNDOLA, 2005). Dessa forma, a solução analítica perde uma de suas vantagens, pois passa a ter uma solução aproximada, ao invés da solução exata. Já a solução numérica da equação de difusão possibilita aproximar o modelo objeto de estudo para as condições físicas mais próximas da situação real. Por exemplo, pode-se eliminar restrições com relação às

propriedades termo-físicas e às dimensões do sólido, além da eliminação de restrições com relação à geometria.

### 3.5.1 – Hipóteses para a obtenção de solução numérica para a equação de difusão

O modelo matemático utilizado para a solução numérica da equação de difusão para um cilindro finito pressupõe as seguintes hipóteses:

- cilindro finito de raio  $R$  e comprimento  $C$ ;
- o sólido tem de ser homogêneo e isotrópico;
- a distribuição espacial do teor de umidade no interior do sólido deve ter simetria radial;
- o único mecanismo de transporte de água dentro do sólido é o mecanismo da difusão;
- o raio e o comprimento do cilindro podem variar durante a difusão;
- os parâmetros de processo podem variar durante a difusão.

### 3.5.2– Solução numérica da equação de difusão: geometria cilíndrica

A equação de difusão para o cilindro finito foi resolvida através do método numérico dos volumes finitos (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004; SILVA, 2007), com uma formulação totalmente implícita. Esta formulação foi escolhida porque a solução obtida é incondicionalmente estável, para qualquer intervalo de tempo estipulado.

Na Figura 3.2 são apresentados: (a) o cilindro finito, (b) uma fatia simétrica deste cilindro, na qual os volumes de controle serão definidos, e (c) o retângulo no plano vertical que divide tal fatia em duas regiões simétricas.

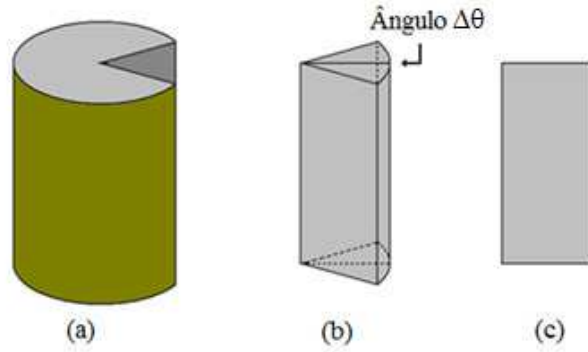


Figura 3.2. – (a) Cilindro finito de raio R e comprimento C; (b) Fatia simétrica do cilindro definida pelo ângulo  $\Delta\theta$ ; (c) Retângulo para a definição da malha bidimensional.

Devido à hipótese de simetria radial, pode-se estudar somente a fatia ilustrada na Figura 3.2(b) para resolver a equação de difusão. Assim, no retângulo da Figura 3.2(c) pode ser criada uma malha bidimensional, conforme é mostrado na Figura 3.3(a). Esta figura destaca, na parte (b), um elemento retangular da malha. A partir desta malha bidimensional, pode-se expressar o volume de cada volume de controle:  $\Delta\theta r_p \Delta r \Delta y$ , onde  $r_p$  define a posição do ponto nodal do elemento da malha com relação ao eixo do cilindro.

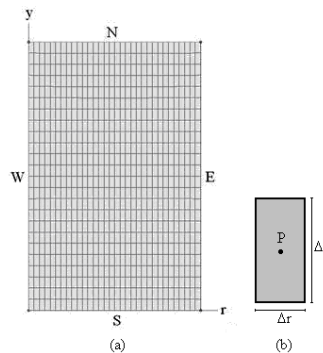


Figura 3.3 – (a) Malha bidimensional para a solução numérica da equação de difusão no cilindro; (b) Elemento da malha bidimensional destacando o ponto nodal P.

A partir do que foi estabelecido, pode-se observar que um volume de controle definido para cada elemento da malha bidimensional tem o aspecto mostrado na Figura 3.4. Deve ser observado que cada elemento da malha retangular divide o volume de controle em duas partes simétricas.

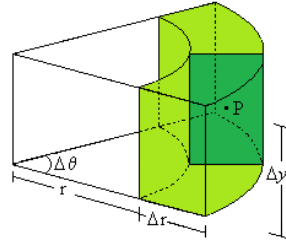


Figura 3.4 – Volume de controle para a geometria cilíndrica.

Uma inspeção na Figura 3.3(a) possibilita observar que, no domínio bidimensional, foi criada uma malha uniforme cujos elementos retangulares possuem lados  $\Delta r$  (horizontal) e  $\Delta y$  (vertical). Na malha existem 9 tipos de elementos distintos, conforme se observa na Figura 3.5. Tais elementos são: internos, ao sul, ao norte, a leste, a oeste, a nordeste, a noroeste, a sudeste e a sudoeste.

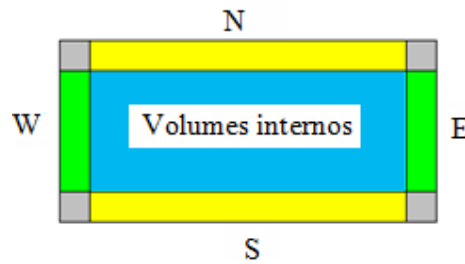


Figura 3.5 – Tipos de volumes de controle.

Usando o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita para integrar a Equação (3.1) no espaço ( $\Delta\theta$   $r_p$   $\Delta r$   $\Delta y$ ) e no tempo ( $\Delta t$ ), obtém-se o seguinte resultado para um volume de controle P:

$$\frac{(\lambda_p \Phi_P - \lambda_p^0 \Phi_P^0)}{\Delta t} r_p \Delta r \Delta y = \left( r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_e - r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_w \right) \Delta y + \left( \Gamma_n^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n - \Gamma_s^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_s \right) r_p \Delta r + (S_C + S_P \Phi_P) r_p \Delta r \Delta y, \tag{3.18}$$

em que o sobrescrito zero significa que o termo deve ser avaliado no tempo  $t$ , anterior ao tempo de interesse, enquanto que os termos sem sobrescrito são avaliados no tempo de interesse  $t + \Delta t$ . Os subscritos “e”, “w”, “s” e “n” significam, respectivamente, as fronteiras

leste, oeste, sul e norte de um volume de controle considerado, enquanto que P é o ponto nodal deste volume de controle. Na Equação (3.18), deve-se observar que o termo fonte foi escrito na forma linearizada, e que tal equação independe de  $\Delta\theta$ , o que ocorre devido à hipótese de simetria radial.

### 3.5.3 – Discretização: volumes internos

Os volumes de controle internos não têm contato com o meio externo e, por isso, tem vizinhos ao norte, ao sul, a leste e a oeste. Na Figura 3.6 é destacado um volume de controle interno de ponto nodal P e seus vizinhos, em um fragmento da malha bidimensional retangular.

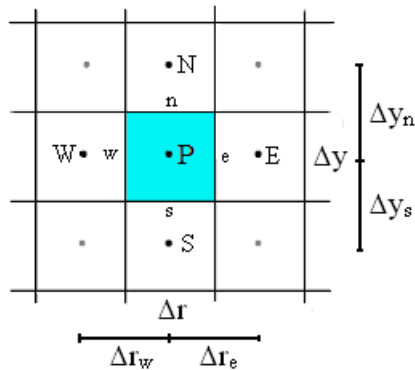


Figura 3.6 – Volume de controle interno de ponto nodal P e seus vizinhos ao norte (N), ao sul (S), a oeste (W) e a leste (E).

Por meio de uma inspeção da Figura 3.6 podem-se definir as derivadas da Equação (3.18) do seguinte modo:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta r_e}, \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta r_w}, \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_n}, \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_s}. \quad (3.22)$$

Relembrando que a malha retangular é uniforme, deve-se observar que, então, tem-se  $\Delta r_e = \Delta r_w = \Delta r$  e  $\Delta y_n = \Delta y_s = \Delta y$ . Substituindo as Equações de (3.19) a (3.22) na Equação (3.18), uma nova equação pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \lambda_P \frac{r_P \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P - \lambda_P^0 \frac{r_P \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 &= r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta r} \Delta y - \\ & r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta r} \Delta y + \Gamma_n^\Phi \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y} r_P \Delta r - \\ & \Gamma_s^\Phi \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y} r_P \Delta r + S_c r_P \Delta r \Delta y + S_p r_P \Delta r \Delta y \Phi_P. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Organizando os termos de forma apropriada, é obtida a seguinte equação algébrica para os volumes de controle internos:

$$A_P \Phi_P = A_e \Phi_E + A_w \Phi_W + A_n \Phi_N + A_s \Phi_S + B, \quad (3.24)$$

em que:

$$A_P = \lambda_P \frac{r_P \Delta r \Delta y}{\Delta t} + r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_P \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_P \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_P \Delta r \Delta y \quad (3.25)$$

$$A_e = r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.26)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.27)$$

$$A_n = r_P \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.28)$$



$$A_s = r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \tag{3.29}$$

$$B = \lambda_p^0 \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_p^0 + S_C r_p \Delta r \Delta y . \tag{3.30}$$

Naturalmente, a imposição de  $S_P$  negativo contribui para a positividade do coeficiente  $A_P$ .

### 3.5.4 – Volume de controle na fronteira leste: condição de contorno convectiva

Na fronteira leste os volumes de controles estão em contato com o meio externo (a leste) e com os vizinhos ao norte, ao sul e a oeste, como pode ser visto na Figura 3.7.

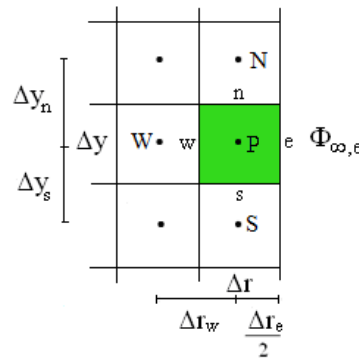


Figura 3.7 – Volume de controle no contorno leste e seus vizinhos.

Deve ser lembrado que a condição de contorno estabelecida para a discretização é a condição de contorno convectiva. Esta condição é expressa através da imposição de igualdade entre o fluxo interno (difusivo) no contorno do cilindro finito e o fluxo externo (convectivo) nas vizinhanças deste contorno. Por outro lado, o fluxo difusivo a leste é dado do seguinte modo:

$$\phi_c'' = -\Gamma_c^\Phi \frac{\Phi_c - \Phi_P}{\Delta r/2} . \tag{3.31}$$

onde  $\Phi_e$  é o valor de  $\Phi$  no contorno leste.

Já o fluxo convectivo a leste é expresso por:

$$\phi_e'' = h_e (\Phi_e - \Phi_{\infty,e}). \quad (3.32)$$

Igualando a Equação (3.31) à Equação (3.32) e isolando  $\Phi_e$ , tem-se:

$$\Phi_e = \frac{h_e \Phi_{\infty,e} + \frac{2\Gamma_e^\Phi}{\Delta r} \Phi_P}{\frac{2\Gamma_e^\Phi}{\Delta r} + h_e}. \quad (3.33)$$

Substituindo a Equação (3.33) na Equação (3.32), e fazendo as devidas simplificações, obtém-se o fluxo por unidade de área no contorno leste, relativo ao volume de controle analisado. Tal fluxo é dado por:

$$\phi_e'' = \frac{(\Phi_P - \Phi_{\infty,e})}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_e^\Phi}}. \quad (3.34)$$

Assim, a Equação (3.31) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\Gamma_e^\Phi \frac{\Phi_e - \Phi_P}{\Delta r/2} = \frac{(\Phi_{\infty,e} - \Phi_P)}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_e^\Phi}}. \quad (3.35)$$

A Equação (3.35) pode ser substituída diretamente na Equação (3.18). Por outro lado, todas as outras derivadas necessárias para a discretização da equação de difusão

referente ao volume de controle P no contorno leste já foram definidas: Equações de (3.20) a (3.22). Então, fazendo as devidas substituições na Equação (3.18) e organizando os termos, obtém-se:

$$A_P \Phi_P = A_w \Phi_w + A_n \Phi_n + A_s \Phi_s + B, \quad (3.36)$$

em que:

$$A_P = \lambda_P \frac{r_P \Delta r \Delta y}{\Delta t} + \frac{r_e \Delta y}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_e^\Phi}} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_P \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_P \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_P r_P \Delta r \Delta y \quad (3.37)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.38)$$

$$A_n = r_P \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.39)$$

$$A_s = r_P \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.40)$$

$$B = \lambda_P^0 \frac{r_P \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 + \frac{r_e \Delta y}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_e^\Phi}} \Phi_{\infty,e} + S_C r_P \Delta r \Delta y. \quad (3.41)$$

### 3.5.5 – Volume de controle na fronteira oeste: simetria radial

Para a malha retangular já definida, na fronteira oeste os volumes de controle estão em contato com o centro do cilindro (a oeste) e com os vizinhos ao norte, ao sul e a leste, como pode ser visto na Figura 3.8.

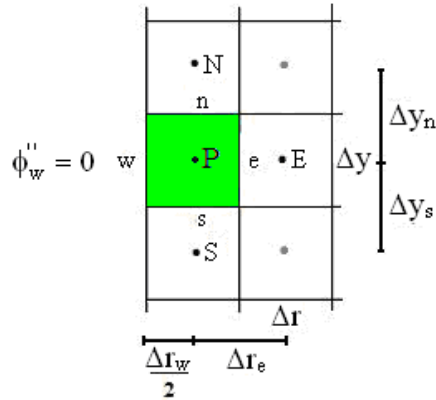


Figura 3.8 – Volume de controle na face oeste e seus vizinhos.

Devido à condição de simetria radial, o fluxo na fronteira oeste é igual a zero:  $\phi''_w = 0$ . Com esta informação, e com as derivadas já definidas pelas Equações (3.19), (3.21) e (3.22) devidamente substituídas na Equação (3.18), após a organização dos termos tem-se:

$$A_P \Phi_P = A_e \Phi_E + A_n \Phi_N + A_s \Phi_S + B, \quad (3.42)$$

em que

$$A_P = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y \quad (3.43)$$

$$A_e = r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.44)$$

$$A_n = r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.45)$$

$$A_s = r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.46)$$

$$B = \lambda_P^0 \frac{r_P \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 + S_C r_P \Delta r \Delta y. \quad (3.47)$$

Da mesma forma que as equações discretizadas foram obtidas para os volumes de controle internos, a leste e a oeste, elas também devem ser obtidas para os demais tipos de volumes de controle.

### 3.5.6 – Simetria axial

Se, além da simetria radial, houver também simetria axial, pode-se tirar proveito deste fato e resolver numericamente o problema difusivo apenas para uma metade simétrica da malha, conforme é mostrado na Figura 3.9.

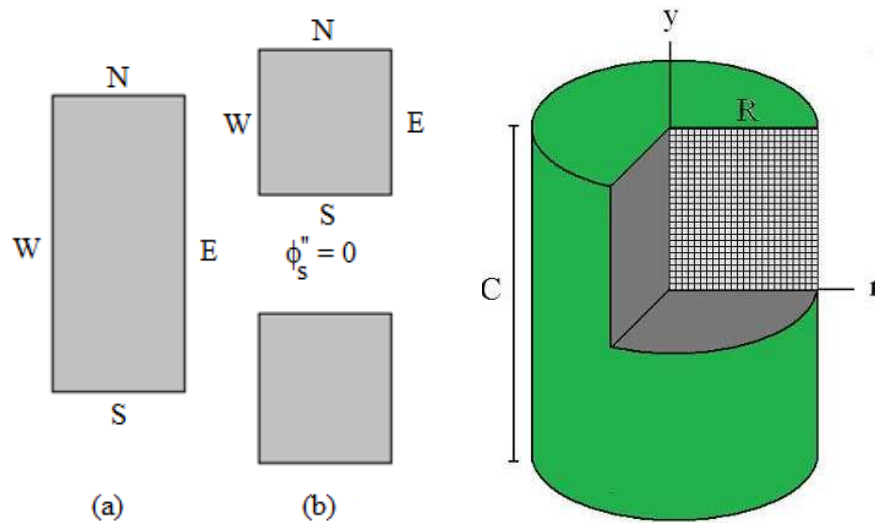


Figura 3.9 – Simetria axial: (a) retângulo inteiro; (b) metades simétricas do retângulo; (c) detalhe da malha geratriz.

Neste caso de simetria axial, basta impor a condição de fluxo zero para, por exemplo, o contorno sul da metade superior destacada na Figura 3.9(b). Para o volume de controle a sudeste desta metade, por exemplo, tem-se:

$$A_P \Phi_P = A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + B, \quad (3.48)$$

em que:

$$A_p = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + \frac{r_e \Delta y}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_e^\Phi}} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y \quad (3.49)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.50)$$

$$A_n = r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.51)$$

$$B = \lambda_p^0 \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_p^0 + \frac{r_e \Delta y}{\frac{1}{h_e} + \frac{\Delta r}{2\Gamma_e^\Phi}} \Phi_{\infty,e} + S_C r_p \Delta r \Delta y. \quad (3.52)$$

### 3.5.7 – Parâmetro $\Gamma^\Phi$

Para os pontos nodais, o parâmetro de processo  $\Gamma^\Phi$  pode ser calculado através de uma relação apropriada entre tal parâmetro e a variável dependente  $\Phi$  (SILVA, 2007; SILVA, C., 2010), do seguinte modo:

$$\Gamma^\Phi = f(\Phi, a, b), \quad (3.53)$$

onde “a” e “b” são parâmetros que ajustam a solução numérica aos dados experimentais, sendo determinados por otimização.

Para as interfaces dos volumes de controle, por exemplo, na interface “e”, supondo uma malha uniforme, a seguinte expressão deve ser usada para determinar o parâmetro  $\Gamma^\Phi$  (PATANKAR, 1980; SILVA, 2007; SILVA, C., 2010):

$$\Gamma_e^\Phi = \frac{2\Gamma_E^\Phi \Gamma_P^\Phi}{\Gamma_E^\Phi + \Gamma_P^\Phi}. \quad (3.54)$$

onde  $\Gamma_E^\Phi$  e  $\Gamma_P^\Phi$  são os valores do parâmetro  $\Gamma^\Phi$  nos pontos nodais E e P, respectivamente.

Vale salientar que as Equações (3.53) e (3.54) são necessárias porque a discretização da equação de difusão foi realizada de forma a considerar a difusividade tanto constante quanto variável. Por outro lado, deve ser mencionado que, para as interfaces oeste, norte e sul, expressões similares à expressão da Equação (3.54) são também usadas para cada volume de controle, e que esta expressão é válida para malha uniforme.

Embora a Equação (3.54) seja válida para  $\Gamma^\Phi$  variável, ela também pode ser usada para  $\Gamma^\Phi$  constante. Neste caso, fazendo  $\Gamma_E^\Phi = \Gamma^\Phi$  e  $\Gamma_P^\Phi = \Gamma^\Phi$ , a equação resulta em  $\Gamma_e^\Phi = \Gamma^\Phi$ , como esperado. Por outro lado, se  $\Gamma^\Phi$  é constante os coeficientes A das Equações (3.24), (3.36), (3.42) e (3.48) são calculados somente uma vez. Já o coeficiente B é calculado em cada estepe de tempo, porque o valor de B depende do teor de umidade  $\Phi_p^0$ , que tem um valor distinto em cada estepe de tempo, para cada volume de controle.

Por outro lado se o parâmetro  $\Gamma^\Phi$  é variável, os coeficientes A são calculados em cada estepe de tempo, devido a não-linearidades causadas pela variação no parâmetro  $\Gamma^\Phi$ . Neste caso, um refinamento adequado no tempo é requerido, de forma que os erros devido às não-linearidades podem ser desprezados.

Para volumes de controle nos contornos, o valor de  $\Gamma^\Phi$  não pode ser determinado pela Equação (3.54) (ou equações similares) e, por isto, tal valor pode ser feito igual ao valor deste parâmetro no ponto nodal do respectivo volume de controle (SILVA, W. 2009).

### 3.6 – Valor médio de $\Phi$

O valor médio de  $\Phi$  pode ser obtido por uma média ponderada, usando o volume de cada volume de controle como o peso da ponderação. Neste caso, tem-se:

$$\bar{\Phi} = \frac{\sum \Phi_p V_p}{\sum V_p} \quad (3.55)$$

onde  $V_p$  é o volume do volume de controle, dado por:

$$V_p = \Delta\theta r_p \Delta r \Delta y \quad (3.56)$$

Dessa forma, para uma malha uniforme,  $\bar{\Phi}$  é determinado pela expressão:

$$\bar{\Phi} = \frac{\sum \Phi_p V_p}{\sum r_p}. \quad (3.57)$$

### 3.7 – Equação de difusão bidimensional em domínio arbitrário

Retomando à Equação (2.42) do Capítulo 2 para um sólido que não tenha fluxo da grandeza de interesse  $\Phi$  ao longo de  $\gamma$ , tem-se:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = 0, \quad (3.58a)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \left( V_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + V_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \frac{\Gamma^\Phi}{J} \right] = 0. \quad (3.58b)$$

Assim, a equação de difusão bidimensional em domínio arbitrário pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( V_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \frac{\Gamma^\Phi}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( V_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \frac{\Gamma^\Phi}{J} \right] + \frac{S}{J}. \quad (3.59)$$

A Equação (3.59) é também chamada de equação da difusão bidimensional no domínio transformado. As equações (2.43), (2.44) e (2.45) do Capítulo 2 podem ser reescritas, para o caso bidimensional, do seguinte modo:



$$V_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad (3.60)$$

$$V_{12} = V_{21} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad (3.61)$$

$$V_{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2, \quad (3.62)$$

Fazendo  $V_{ij} = J^2 \alpha_{ij}$ , com  $i$  e  $j$  variando de 1 até 2, pode-se reescrever a Equação (3.59) do seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \alpha_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) J \Gamma^\Phi \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \alpha_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) J \Gamma^\Phi \right] + \frac{S}{J}. \quad (3.63)$$

As expressões para o Jacobiano  $J$  e para os tensores métricos  $\alpha_{ij}$  serão obtidas nas próximas seções, para um sólido de revolução, a ser estudado.

### 3.7.1 – Discretização da equação de difusão bidimensional em domínio arbitrário

Na discretização da equação de difusão em domínio arbitrário será utilizado o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita. A Equação (3.63) será integrada no espaço e no tempo, para um volume  $(\Delta \xi \Delta \eta)$  (no domínio transformado), num intervalo de tempo  $\Delta t$ . Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0}{J_p} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} = & \left[ \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_e + \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_e \right] - \\ & - \left[ \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_w + \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_w \right] + \\ & + \left[ \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_n \right] - \\ & - \left[ \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_s \right] - \frac{(S_p \Phi_p + S_C)}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta, \end{aligned} \quad (3.64)$$

em que o termo fonte foi escrito na forma linearizada.

Na Equação (3.64), o sobrescrito zero significa que o termo deve ser avaliado no tempo  $t$  anterior ao tempo de interesse, enquanto que os termos sem sobrescrito são avaliados no tempo de interesse,  $t + \Delta t$ . Os subscritos “e”, “w”, “n” e “s” significam, respectivamente, as fronteiras leste, oeste, norte e sul de um volume de controle considerado, sendo P o ponto nodal deste volume, conforme pode ser visualizado na Figura 3.10.

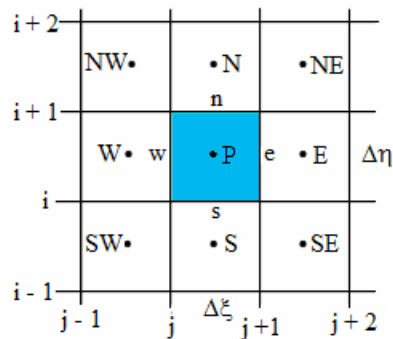


Figura 3.10 – Fragmento da malha no domínio transformado mostrando o volume de controle interno (P) e seus vizinhos ao norte (N), ao sul (S), a leste (E), a oeste (W), a noroeste (NW), a nordeste (NE), a sudoeste (SW) e a sudeste (SE).

Para finalizar a discretização da Equação (3.64), o domínio é dividido em uma malha com 9 tipos de volumes de controle distintos: os volumes internos, ao norte, ao sul, a leste, a oeste, a nordeste, a sudeste, a sudoeste e a noroeste. Tais tipos de volumes de controle já foram mostrados na Figura 3.5 do Item 3.6.2, para o caso de um retângulo gerador de um cilindro finito.

### 3.7.2 – Discretização em coordenadas generalizadas: volumes internos

Na Figura 3.10 é destacado um volume de controle interno de ponto nodal P e seus vizinhos num fragmento de malha do domínio transformado.

Para finalizar a discretização da Equação (3.64), as expressões para as derivadas devem ser obtidas. Então, fazendo uma inspeção na Figura 3.10, pode-se expressar as seguintes derivadas:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\frac{(\Phi_N + \Phi_{NE})}{2} - \frac{(\Phi_S + \Phi_{SE})}{2}}{2\Delta \eta} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\frac{(\Phi_N + \Phi_{NW})}{2} - \frac{(\Phi_S + \Phi_{SW})}{2}}{2\Delta \eta} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4\Delta \eta}$$

(3.65a-h)

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\frac{(\Phi_E + \Phi_{SE})}{2} - \frac{(\Phi_W + \Phi_{NW})}{2}}{2\Delta \xi} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\frac{(\Phi_E + \Phi_{SE})}{2} - \frac{(\Phi_W + \Phi_{SW})}{2}}{2\Delta \xi} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta \eta}$$

Substituindo as Equações (3.65a-h) na Equação (3.64), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0}{J_p} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} &= \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} (\Phi_E - \Phi_P) + \\
&+ \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi (\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}) - \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} (\Phi_P - \Phi_W) - \\
-\frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi (\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}) &+ \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi (\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}) + \\
&+ \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\Phi_N - \Phi_P) - \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi (\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}) - \\
-\alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\Phi_P - \Phi_S) &+ \frac{(S_p \Phi_p + S_c)}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Reorganizando a Equação (3.66), obtém-se uma equação algébrica, dada por:

$$\begin{aligned}
A_p \Phi_p &= A_w \Phi_w + A_e \Phi_e + A_s \Phi_s + A_n \Phi_n + A_{sw} \Phi_{sw} + A_{se} \Phi_{se} + \\
&+ A_{nw} \Phi_{nw} + A_{ne} \Phi_{ne} + B
\end{aligned} \tag{3.67}$$

em que:

$$A_p = \frac{\lambda_p}{J_p} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} + \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} - \frac{S_p}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta$$

$$A_w = \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

$$A_e = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi$$

$$A_s = -\frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta}$$

$$A_n = \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (3.68a-j)$$

$$A_{sw} = \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{12s} J_s \Gamma_s^\Phi$$

$$A_{se} = -\frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{12s} J_s \Gamma_s^\Phi$$

$$A_{nw} = -\frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{12n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

$$A_{ne} = \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

$$B = \frac{\lambda_p^0}{J_p} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} \Phi_p^0 + \frac{S_C}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta.$$

Na Equação (3.64), os termos  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  ou  $\alpha_{21}$  e  $\alpha_{22}$  e o Jacobiano  $J$  devem ser calculados nas faces leste, oeste, norte e sul de cada volume de controle, sendo que o Jacobiano deve ainda ser calculado no ponto nodal  $P$ . Portanto, a determinação destes termos pressupõe o conhecimento das métricas da transformação, que devem ser determinadas pelas derivadas parciais  $x_\xi$ ,  $x_\eta$ ,  $y_\xi$  e  $y_\eta$ , que serão determinados na próxima seção. Dessa forma, devem ser estabelecidas expressões para estas derivadas, tanto para o ponto nodal  $P$  do volume de controle em análise quanto para os seus vizinhos ao norte, ao sul, a leste e a oeste. As coordenadas dos pontos de interesse são conhecidas a partir da geração da malha. Tais pontos são as interseções das linhas  $\xi$  com as linhas  $\eta$ . Observando a Figura 3.10, percebe-se que o volume de controle de ponto nodal  $P$  é limitado, no domínio transformado, pelas linhas  $\xi = j$  e  $\xi = j + 1$  e ainda pelas linhas  $\eta = i$  e  $\eta = i + 1$ , sendo que  $x$  e  $y$  são as coordenadas das interseções destas linhas, no domínio físico.

A Figura 3.10 apresenta um fragmento de malha no domínio transformado, que pode ser usado para determinar as expressões para as derivadas das coordenadas  $x$  e  $y$  no ponto nodal  $P$  de um volume de controle interno em relação a  $\xi$  e a  $\eta$ , como segue:

$$x_{\xi}^p = \frac{x_e - x_w}{\Delta\xi} = \left[ \frac{x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{2} - \frac{x_{i,j} + x_{i+1,j}}{2} \right] \cdot \frac{1}{\Delta\xi}$$

$$y_{\xi}^p = \frac{y_e - y_w}{\Delta\xi} = \left[ \frac{y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{2} - \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j}}{2} \right] \cdot \frac{1}{\Delta\xi}$$

(3.69a-d)

$$x_{\eta}^p = \frac{x_n - x_s}{\Delta\eta} = \left[ \frac{x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1}}{2} - \frac{x_{i,j} + x_{i,j+1}}{2} \right] \cdot \frac{1}{\Delta\eta}$$

$$y_{\eta}^p = \frac{y_n - y_s}{\Delta\eta} = \left[ \frac{y_{i+1,j} + y_{i+1,j+1}}{2} - \frac{y_{i,j} + y_{i,j+1}}{2} \right] \cdot \frac{1}{\Delta\eta}$$

Com um raciocínio similar, pode-se determinar as métricas para as fronteiras norte, sul, leste e oeste. Como exemplo, para a fronteira oeste de um volume interno  $P$ , pode-se escrever:

$$x_{\xi}^w = \left[ \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j+1}}{2} - \frac{x_{i,j-1} + x_{i+1,j-1}}{2} \right] \cdot \frac{1}{2\Delta\xi}$$

$$y_{\xi}^w = \left[ \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1}}{2} - \frac{y_{i,j-1} + y_{i+1,j-1}}{2} \right] \cdot \frac{1}{2\Delta\xi}$$

(3.70a-d)

$$x_{\eta}^w = \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\Delta\eta}$$

$$y_{\eta}^w = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta\eta}.$$

### 3.7.3 – Discretização em coordenadas generalizadas: fronteira sul

Como exemplo de discretização da equação de difusão para volumes nas fronteiras, será utilizado o volume de controle P na fronteira sul. Um fragmento da malha no domínio transformado pode ser observado na Figura 3.11.

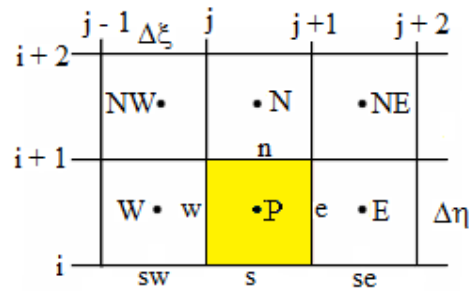


Figura 3.11 – Fragmento da malha no domínio transformado mostrando o volume de controle sul (P) e seus vizinhos ao norte (N), a leste (E), a oeste (W), a noroeste (NW) e a nordeste (NE).

A condição de contorno convectiva para um volume de controle localizado na fronteira sul da malha é definida pela seguinte igualdade:

$$-\Gamma_s^{\Phi} \frac{(\Phi_p - \Phi_s)}{\Delta n_s} = h_s (\Phi_{\infty s} - \Phi_s), \tag{3.71}$$

onde  $h_s$  é o coeficiente de transferência convectivo de massa na face sul do volume de controle e  $\Phi_{\infty s}$  é o valor da variável  $\Phi$  referente ao fluido na vizinhança externa do corpo em estudo, na mesma face sul. Por outro lado,  $\Delta n_s$  representa a distância física entre o

ponto nodal do volume de controle e a face sul. Tal distância pode ser determinada através da Figura 3.12.

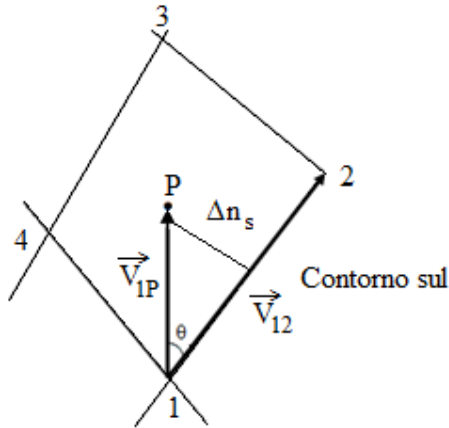


Figura 3.12 – Volume de controle no contorno sul do fragmento de malha no domínio físico destacando: o vetor  $\vec{V}_{12}$  na face sul, o vetor  $\vec{V}_{1P}$  e a distância  $\Delta n_s$  do ponto nodal à face sul.

As coordenadas dos pontos 1, 2, 3 e 4 são definidas na geração da malha, enquanto que as coordenadas do ponto nodal P são calculadas pela média aritmética:

$$x_p = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad (3.72a-b)$$

$$y_p = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

Do triângulo retângulo observado na Figura 3.12,  $\Delta n_s$  pode ser definido por:

$$\Delta n_s = |\vec{V}_{1P}| \sin \theta. \quad (3.73)$$

Como os vetores  $\vec{V}_{12}$  e  $\vec{V}_{1P}$  já estão definidos, porque as coordenadas dos vértices são conhecidas, pode-se escrever  $\Delta n_s$  através do produto vetorial entre estes vetores, do seguinte modo:



$$\Delta n_s = \frac{|\bar{V}_{12} \times \bar{V}_{1p}|}{|\bar{V}_{12}|} \quad (3.74)$$

Da Equação (3.71) obtém-se a expressão para a variável de interesse  $\Phi$  no contorno sul do volume de controle estudado, dada do seguinte modo:

$$\Phi_s = \frac{\Phi_P + f_s \Phi_{\infty s}}{1 + f_s}. \quad (3.75)$$

Analogamente, expressões semelhantes são obtidas para os contornos dos seus vizinhos a leste (face se) e a oeste (face sw). Os resultados são apresentados abaixo:

$$\Phi_{se} = \frac{\Phi_E + f_{se} \Phi_{\infty se}}{1 + f_{se}} \quad (3.76a-b)$$

$$\Phi_{sw} = \frac{\Phi_W + f_{sw} \Phi_{\infty sw}}{1 + f_{sw}}$$

Nas equações (3.75) e (3.76) o fator  $f$ , de forma genérica, é dado do seguinte modo:

$$f = \frac{h \Delta n}{\Gamma^\Phi} \quad (3.77)$$

O fluxo por unidade de área no contorno sul do volume de controle em estudo pode ser obtido pela substituição da Equação (3.75) em um dos membros da Equação (3.71). Então, obtém-se:

$$\Phi_s'' = \frac{\Phi_{\infty s} - \Phi_P}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta n_s}{\Gamma_s^\Phi}}. \quad (3.78)$$

O fluxo através de uma área em que um dos lados está em  $\xi$ , no contorno sul do volume de controle em estudo, é dado por (SILVA, 2007; SILVA, 2009):

$$\Phi'_s = \frac{\sqrt{\alpha_{22s}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta n_s}{\Gamma_s^\Phi}} (\Phi_{\infty s} - \Phi_P). \quad (3.79)$$

Na equação de difusão escrita na forma discretizada, dada pela Equação (3.64), é possível identificar a expressão para o fluxo na face sul com a Equação (3.79):

$$-\left[ \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_s \right] = \frac{\sqrt{\alpha_{22s}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta n_s}{\Gamma_s^\Phi}} (\Phi_{\infty s} - \Phi_P). \quad (3.80)$$

Com as Equações de (3.75) a (3.77) e uma inspeção na Figura (3.11), as derivadas em relação  $\eta$  podem ser escritas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_e = \frac{1}{4\Delta \eta} & \left[ \Phi_N + \Phi_{NE} - \frac{(1-f_s)}{(1+f_s)} \Phi_P - \frac{(1-f_{se})}{(1+f_{se})} \Phi_E - \right. \\ & \left. - 2 \left( \frac{f_s}{(1+f_s)} \Phi_{\infty s} + \frac{f_{se}}{(1+f_{se})} \Phi_{\infty se} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.81a-b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_w = \frac{1}{4\Delta \eta} & \left[ \Phi_N + \Phi_{NW} - \frac{(1-f_s)}{(1+f_s)} \Phi_P - \frac{(1-f_{sw})}{(1+f_{sw})} \Phi_W - \right. \\ & \left. - 2 \left( \frac{f_s}{(1+f_s)} \Phi_{\infty s} + \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \Phi_{\infty sw} \right) \right]. \end{aligned}$$

As demais derivadas necessárias para a discretização da equação de difusão referentes ao volume de controle no contorno sul são iguais às do volume interno, e dadas pelas equações (3.65). Substituindo estas derivadas e as Equações (3.81) na Equação (3.64), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_P \Phi_P - \lambda_P^0 \Phi_P^0}{J_P \Delta t} \Delta \xi \Delta \eta &= \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi (\Phi_E - \Phi_P) + \\
&+ \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \left[ -\frac{(1-f_s)}{(1+f_s)} \Phi_P - \frac{(1-f_{se})}{(1+f_{se})} \Phi_E + \Phi_{NE} + \Phi_N - \right. \\
&- 2 \left( \frac{f_{se}}{(1+f_{se})} \Phi_{\infty se} + \frac{f_s}{(1+f_s)} \Phi_{\infty s} \right) \left. \right] - \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi (\Phi_P - \Phi_W) - \\
&- \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \left[ -\frac{(1-f_{sw})}{(1+f_{sw})} \Phi_W - \frac{(1-f_s)}{(1+f_s)} \Phi_P + \Phi_N + \Phi_{NW} - \right. \\
&- 2 \left( \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \Phi_{\infty sw} + \frac{f_s}{(1+f_s)} \Phi_{\infty s} \right) \left. \right] + \\
&+ \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi (\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}) + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\Phi_N - \Phi_P) + \\
&+ \frac{\sqrt{\alpha_{22s}}}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta n_s}{\Gamma_s^\Phi}} (\Phi_{\infty s} - \Phi_P) + \frac{(S_P \Phi_P + S_C)}{J_P} \Delta \xi \Delta \eta. \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Organizando os termos semelhantes da Equação (3.82), obtém-se a seguinte equação algébrica:

$$A_P \Phi_P = A_e \Phi_E + A_w \Phi_W + A_n \Phi_N + A_{ne} \Phi_{NE} + A_{nw} \Phi_{NW} + B, \tag{3.83}$$

em que os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
A_P &= \frac{\lambda_P}{J_P} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} + \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{(1-f_s)}{(1+f_s)} + \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - \\
&- \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{(1-f_s)}{(1+f_s)} + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + \frac{\sqrt{\alpha_{22s}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta n_s}{\Gamma_s^\Phi}} - \frac{S_P}{J_P} \Delta \xi \Delta \eta
\end{aligned}$$

$$A_e = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{(1-f_{se})}{(1+f_{se})} + \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

$$A_w = \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} + \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{(1-f_{sw})}{(1+f_{sw})} - \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

(3.84a-f)

$$A_n = \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}$$

$$A_{ne} = \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

$$A_{nw} = -\frac{1}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi - \frac{1}{4} \alpha_{12n} J_n \Gamma_n^\Phi$$

$$B = \frac{\lambda_p^0}{J_p} \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta t} \Phi_p^0 - \frac{1}{2} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \left( \frac{f_s}{(1+f_s)} \Phi_{\infty s} + \frac{f_{se}}{(1+f_{se})} \Phi_{\infty se} \right) \\ + \frac{1}{2} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \left( \frac{f_s}{(1+f_s)} \Phi_{\infty s} + \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \Phi_{\infty sw} \right) + \\ + \frac{\sqrt{\alpha_{22s}} \Delta\xi}{\frac{1}{h_s} + \frac{\Delta n_s}{\Gamma_s^\Phi}} \Phi_{\infty s} + \frac{S_C}{J_p} \Delta\xi\Delta\eta.$$

No caso de um volume de controle do contorno sul, as derivadas para a determinação dos tensores métricos  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  e  $\alpha_{22}$  e o Jacobiano da transformada  $J$  são as mesmas do volume internos com exceção de  $x_\eta^s$  e  $y_\eta^s$ . Para estas derivadas deve-se impor as seguintes condições  $x_\eta^s = x_\eta^p$  e  $y_\eta^s = y_\eta^p$ . Observação semelhante deve ser feita para cada um dos demais contornos da malha: norte, leste e oeste.

### 3.7.4 – Discretização em coordenadas generalizadas: volume de controle a noroeste

Como exemplo, a discretização da equação de difusão ainda será feita para o volume de controle a noroeste, que é mostrado na Figura 3.13.

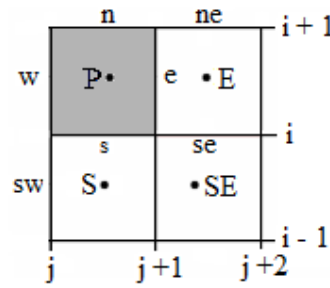


Figura 3.13 – Fragmento da malha no domínio transformado mostrando o volume de controle P a noroeste e seus vizinhos ao sul (S), a leste (E) e sudeste (SE).

A determinação da expressão para a grandeza  $\Phi_n$ , no contorno norte (Figura 3.13), é feita analogamente à da face sul, impondo-se a seguinte igualdade:

$$-\Gamma_n^\Phi \frac{\Phi_n - \Phi_P}{\Delta n_n} = h_n (\Phi_n - \Phi_{\infty n}). \quad (3.85)$$

Da Equação (3.85) obtém-se a expressão para a variável  $\Phi$  no contorno norte do volume de controle estudado, que é dada do seguinte modo:

$$\Phi_n = \frac{\Phi_P + f_n \Phi_{\infty n}}{1 + f_n}. \quad (3.86)$$

Analogamente, expressões semelhantes são obtidas para os demais contornos vizinhos, e os resultados são apresentados a seguir:

$$\Phi_w = \frac{\Phi_P + f_w \Phi_{\infty w}}{1 + f_w}, \quad (3.87a-c)$$

$$\Phi_{ne} = \frac{\Phi_E + f_{ne} \Phi_{\infty ne}}{1 + f_{ne}},$$

$$\Phi_{sw} = \frac{\Phi_S + f_{sw} \Phi_{\infty SW}}{1 + f_{sw}},$$

Por outro lado, o fluxo por unidade de área no contorno norte do volume de controle em estudo pode ser obtido pela substituição da Equação (3.86) em um dos membros da Equação (3.85), o que dá:

$$\Phi_n'' = \frac{\Phi_P - \Phi_{\infty n}}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}}. \quad (3.88)$$

O fluxo através de uma área em que um dos lados está em  $\xi$ , no contorno norte do volume de controle em estudo, é dado por:

$$\Phi_n' = \frac{\sqrt{\alpha_{22n}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}} (\Phi_P - \Phi_{\infty n}). \quad (3.89)$$

Por outro lado, na equação de difusão escrita na forma discretizada, dada pela Equação (3.64), é possível identificar a expressão para o fluxo na face norte, que pode ser igualado à Equação (3.89):

$$-\left[ \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_n \right] = \frac{\sqrt{\alpha_{22n}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}} (\Phi_P - \Phi_{\infty n}). \quad (3.90)$$

Analogamente, pode-se determinar o fluxo por unidade de área no contorno oeste do volume de controle em estudo:

$$\Phi_w'' = \frac{\Phi_{\infty SW} - \Phi_P}{\frac{1}{h_w} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_w^\Phi}}, \quad (3.91)$$

Pode-se, também, determinar o fluxo através da face oeste:

$$\Phi'_w = \frac{\sqrt{\alpha_{11w}} \Delta \eta}{\frac{1}{h_w} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_w^\Phi}} (\Phi_{\infty sw} - \Phi_P) \quad (3.92)$$

Na Equação (3.64), a expressão para o fluxo na face oeste pode ser igualada à Equação (3.92):

$$-\left[ \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_w + \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_w \right] = \frac{\sqrt{\alpha_{11w}} \Delta \eta}{\frac{1}{h_w} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_w^\Phi}} (\Phi_{\infty w} - \Phi_P). \quad (3.93)$$

Com as Equações (3.87) e uma inspeção na Figura (3.13), pode-se escrever as derivadas que diferem daquelas para os volumes internos, dadas do seguinte modo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_e = \frac{1}{4\Delta \eta} \left[ \left( \frac{(1-f_{ne})}{(1+f_{ne})} \Phi_E + \frac{(1-f_n)}{(1+f_n)} \Phi_P \right) + 2 \left( \frac{f_{ne}}{(1+f_{ne})} \Phi_{\infty ne} + \frac{f_n}{(1+f_n)} \Phi_{\infty n} \right) - \Phi_{SE} - \Phi_S \right] \quad (3.94a-b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_s = \frac{1}{4\Delta \xi} \left[ \Phi_E + \Phi_{SE} - \left( \frac{(1-f_w)}{(1+f_w)} \Phi_P + \frac{(1-f_{sw})}{(1+f_{sw})} \Phi_S \right) - 2 \left( \frac{f_w}{(1+f_w)} \Phi_{\infty w} + \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \Phi_{\infty sw} \right) \right].$$

Substituindo estas derivadas, dadas pelas Equações (3.94), as demais derivadas dadas pelas Equações (3.65) e ainda as Equações (3.90) e (3.93) na Equação (3.64), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_P \Phi_P - \lambda_P^0 \Phi_P^0}{J_P \Delta t} \Delta \xi \Delta \eta = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} (\Phi_E - \Phi_P) + \\
& + \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \left[ \left( \frac{(1-f_n)}{(1+f_n)} \Phi_P + \frac{(1-f_{ne})}{(1+f_{ne})} \Phi_E \right) + 2 \left( \frac{f_{ne}}{(1+f_{ne})} \Phi_{\infty ne} + \frac{f_n}{(1+f_n)} \Phi_{\infty n} \right) \right. \\
& \quad \left. - \Phi_{SE} - \Phi_S \right] + \frac{\sqrt{\alpha_{11w}} \Delta \eta}{\frac{1}{h_w} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_w^\Phi}} (\Phi_{\infty w} - \Phi_P) - \frac{\sqrt{\alpha_{22n}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_n^\Phi}} (\Phi_P - \Phi_{\infty n}) \\
& - \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \left[ \Phi_E - \Phi_{SE} \left( \frac{(1-f_w)}{(1+f_w)} \Phi_P + \frac{(1-f_{sw})}{(1+f_{sw})} \Phi_S \right) - \right. \\
& \quad \left. - 2 \left( \frac{f_w}{(1+f_w)} \Phi_{\infty w} + \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \Phi_{\infty sw} \right) \right] \\
& - \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\Phi_P - \Phi_S) + \frac{(S_P \Phi_P + S_C)}{J_P} \Delta \xi \Delta \eta. \tag{3.95}
\end{aligned}$$

Organizando os termos semelhantes da Equação (3.95), esta pode ser reescrita assim:

$$A_P \Phi_P = A_e \Phi_E + A_s \Phi_S + A_{se} \Phi_{SE} + B, \tag{3.96}$$

em que:

$$\begin{aligned}
A_P = & \frac{\lambda_P}{J_P} \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t} + \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{(1-f_n)}{(1+f_n)} + \frac{\sqrt{\alpha_{11w}} \Delta \eta}{\frac{1}{h_w} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_w^\Phi}} + \frac{\sqrt{\alpha_{22n}} \Delta \xi}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_n^\Phi}} + \\
& + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} - \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{(1-f_w)}{(1+f_w)} - \frac{S_P}{J_P} \Delta \xi \Delta \eta,
\end{aligned}$$

$$A_e = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{(1-f_{ne})}{(1+f_{ne})} - \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi,$$

(3.97a-e)

$$A_s = \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} - \frac{1}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{(1-f_{sw})}{(1+f_{sw})},$$



$$A_{se} = -\frac{1}{4}\alpha_{12e}J_e\Gamma_e^\Phi - \frac{1}{4}\alpha_{21s}J_s\Gamma_s^\Phi,$$

$$B = \frac{\lambda_P^0}{J_P} \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta t} \Phi_P^0 + \frac{\sqrt{\alpha_{11w}}\Delta\eta}{\frac{1}{h_w} + \frac{\Delta n_w}{\Gamma_w^\Phi}} \Phi_{\infty w} + \frac{\sqrt{\alpha_{22n}}\Delta\xi}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}} \Phi_{\infty n} +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha_{21s}J_s\Gamma_s^\Phi \left( \frac{f_w}{(1+f_w)} \Phi_{\infty w} + \frac{f_{sw}}{(1+f_{sw})} \Phi_{\infty sw} \right)$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha_{12e}J_e\Gamma_e^\Phi \left( \frac{f_n}{(1+f_n)} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{ne}}{(1+f_{ne})} \Phi_{\infty ne} \right) + \frac{S_C}{J_P} \Delta\xi\Delta\eta.$$

Equações similares podem ser obtidas para os outros tipos de volumes controles, usando o mesmo raciocínio.

### 3.8 – Sólidos obtidos por revolução de áreas planas

Nesta seção, será analisada a aplicação da equação de difusão para um sólido obtido por revolução de áreas bidimensionais, como mostra a Figura 3.14.

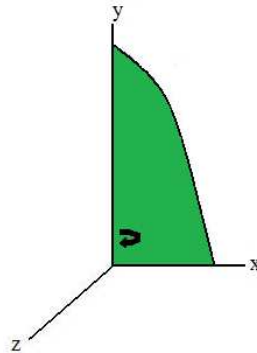


Figura 3.14 – Obtenção de um sólido gerado através da rotação de uma área plana em torno do eixo y.

Segundo Silva (2007), o volume de controle gerado por rotação de um ângulo  $\theta$ , em torno de  $y$ , de área elementar contida no plano  $xy$ , pode ser obtido conforme mostra a Figura 3.15. Pressupondo difusão axi-simétrica com relação a  $y$ , isto implica em não haver fluxo da grandeza  $\Phi$  na direção  $\gamma$  perpendicular a área de geratriz do volume de controle.

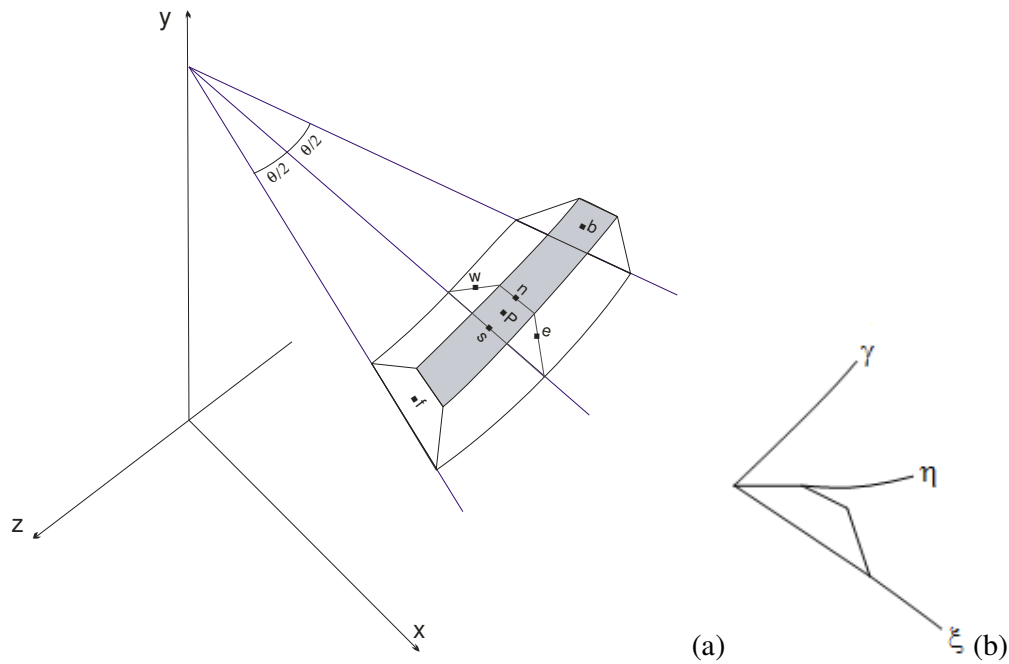


Figura 3.15 – (a) Volume de controle P obtido pela rotação, em torno de y, de uma área contida num plano vertical. As faces “f” e “b” são referentes a *front* (anterior) e *back* (posterior); (b) Sistema de coordenadas generalizadas definido pelos eixos  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\gamma$  sobre os contornos do volume de controle. (Fonte: Silva, 2007)

Na Figura 3.15 observa-se que a área definida por  $\xi$  e  $\eta$  está contida no plano físico  $xy$  e, portanto, tais eixos são perpendiculares a  $z$ . Então variações em  $\xi$  e  $\eta$  ocorrem com  $z$  constante. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_\gamma &= 0 \\
 y_\gamma &= 0 \\
 z_\xi &= 0 \\
 z_\eta &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.98a-d}$$

Portanto, a estrutura do determinante, através do qual o jacobiano da transformação é definido, é dada do seguinte modo:

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & 0 \\ y_\xi & y_\eta & 0 \\ 0 & 0 & z_\gamma \end{vmatrix} \quad (3.99)$$

Neste caso, o jacobiano da transformação é dado por:

$$J^{-1} = z_\gamma (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi). \quad (3.100)$$

Levando em consideração as Equações (3.98), e ainda que as métricas da transformação são dadas pelas Equações de (2.24) a (2.29), tais métricas podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta z_\gamma \\ \xi_y &= -J x_\eta z_\gamma \\ \xi_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.101a-f)$$

$$\begin{aligned} \eta_x &= -J y_\xi z_\gamma \\ \eta_y &= -J y_\xi z_\gamma \\ \eta_z &= 0. \end{aligned}$$

Então, pode-se determinar as componentes do tensor métrico  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  ou  $\alpha_{21}$  e  $\alpha_{22}$  usando as Equações de (3.60) a (3.62) e as Equações (3.101), lembrando que  $V_{ij} = J^2 \alpha_{ij}$ :

$$\alpha_{11} = z_\gamma^2 (x_\eta^2 + y_\eta^2). \quad (3.102)$$

Com o mesmo procedimento, os demais tensores métricos podem ser determinados, com os resultados dados a seguir:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -z_\gamma^2 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta), \quad (3.103)$$

e

$$\alpha_{22} = z_\gamma^2 (x_\xi^2 + y_\xi^2). \quad (3.104)$$

Para a métrica  $z_\gamma^P$ , com uma inspeção na Figura 3.15, obtém-se:

$$z_\gamma^P = \frac{z_f^P - z_b^P}{\Delta\gamma} = \theta_{r_p} \frac{1}{\Delta\gamma}, \quad (3.105)$$

onde os índices “f” e “b” referem-se a *front* e *back*, respectivamente, como pode ser observado na Figura 3.15. Assim,  $z_f^P$  e  $z_b^P$  são coordenadas “*front*” e “*back*” do volume de controle de ponto nodal P. Deve-se observar que  $r_p$  é a distância do ponto nodal P ao eixo de rotação  $y$ , e essa distância é dada por:

$$r_p = \frac{x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j}}{4}. \quad (3.106)$$

De maneira similar às equações discretizadas que foram obtidas para os volumes de controle nas fronteiras sul e noroeste, podem-se obter equações discretizadas para os volumes de controle ao norte, leste, oeste e para os volumes de controle a nordeste, sudeste e sudoeste da malha. Assim, um sistema de equações em  $\Phi$  é obtido e pode ser resolvido, por exemplo, usando o método de Gauss-Seidel.

Como uma última observação, se o contorno oeste da malha for um eixo de simetria, como mostrado nas Figuras 3.14 e 3.15, pode-se impor  $h_w = 0$  nas equações discretizadas, simplificando-as antes da implementação computacional.

### 3.9 – Determinação de $\bar{\Phi}$

O valor médio da variável de interesse, num domínio bidimensional contínuo, é calculado da seguinte maneira (SILVA, 2007; SILVA, W., 2009; FARIAS, V., 2011):

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{\int_V \Phi(x, y, t) dV}{\int_V dV} \quad (3.107)$$

Discretizando a Equação (3.107) para o sólido de interesse, obtém-se a seguinte equação (SILVA, 2007; SILVA, W., 2009; FARIAS, V., 2011):

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \Phi_{ij} \Delta V'_{ij} \quad (3.108)$$

com

$$V = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \Delta V'_{ij}, \quad (3.109)$$

onde  $V$  é o volume do sólido,  $i$  e  $j$  definem a posição do volume de controle na malha bidimensional,  $\Delta V'_{ij}$  é o valor do volume deste volume de controle, enquanto  $N_i$  e  $N_j$  definem o número de linhas  $\eta$  e  $\xi$ , respectivamente. Por outro lado, em todo este trabalho, foi estabelecido que as linhas  $\xi$  e  $\eta$  devem ser numeradas sequencialmente, através de números inteiros a partir de 1, o que significa  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ . Assim, o volume de um volume de controle pode ser escrito da seguinte maneira (MALISKA, 2004; SILVA, 2007, SILVA, W., 2009; FARIAS, V., 2011):

$$\Delta V'_{ij} = \frac{1}{J_{ij}}, \quad (3.110)$$

em que  $J_{ij}$  é o jacobiano da transformação para um ponto nodal  $P$ , e foi denotado por  $J_P$ . Pode-se, então, reescrever a Equação (3.108) da seguinte maneira:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\sum \frac{1}{J_P}} \sum \Phi_P \frac{1}{J_P}, \tag{3.111}$$

em que o somatório deve ser aplicado a todos os volumes de controle.

### 3.10 – Avaliação de $\Gamma^\Phi$ nas faces dos volumes de controle

A discretização da equação de difusão requer o conhecimento dos valores de  $\Gamma^\Phi$ , não no ponto nodal, mas nas faces leste, oeste, norte e sul de cada volume de controle, conforme pode ser verificado através da Equação (3.64). Obviamente que, se  $\Gamma^\Phi$  for constante em todo domínio, este é o valor para todas as faces do volume de controle. Entretanto, se este parâmetro for variável, deve ser determinado para todas as faces de cada volume de controle.

Se  $\Gamma^\Phi$  for variável no domínio, a estimativa de seu valor em uma face comum a dois volumes de controle pode ser feita tomando como base a Figura 3.16. A parte (a) desta figura apresenta um volume de controle P e o seu vizinho a leste (E), e cada um dos dois tem um valor específico para o coeficiente de transporte,  $\Gamma_P^\Phi$  e  $\Gamma_E^\Phi$ , respectivamente. A parte (b) da Figura 3.16 apresenta um domínio equivalente, com coeficiente de transporte constante e igual a  $\Gamma_{eq}^\Phi$  para os dois volumes de controle.

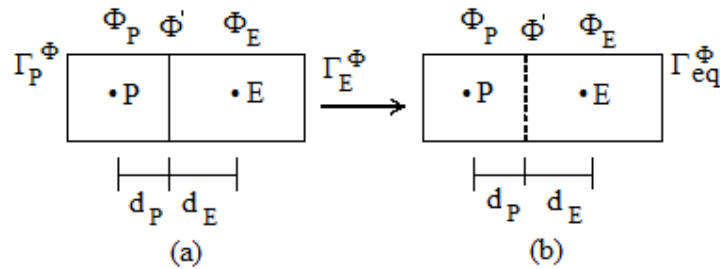


Figura 3.16 – Dois volumes de controle com coeficientes de transporte iguais a:  
 (a)  $\Gamma_P^\Phi$  e  $\Gamma_E^\Phi$  (b)  $\Gamma_{eq}^\Phi$ . Para ambas as situações, o nó P dista  $d_P$  da face comum e o nó E,  $d_E$ .

O valor de  $\Gamma_{eq}^\Phi$ , é o valor equivalente da propriedade em todo o domínio da Figura 3.16(b) e que, portanto, é o valor de  $\Gamma^\Phi$  na face comum entre P e E. Tal valor é dado por:

$$\Gamma_{eq}^\Phi = \frac{\Gamma_P^\Phi \Gamma_E^\Phi}{f_d \Gamma_E^\Phi + (1 - f_d) \Gamma_P^\Phi}, \quad (3.112)$$

onde:

$$f_d = \frac{d_P}{d_P + d_E}, \quad (3.113)$$

em que  $d_P$  e  $d_E$  são as distâncias da fronteira “e” aos pontos nodais P e E, respectivamente. Nos pontos nodais,  $\Gamma^\Phi$  deve ser calculado por uma função adequada que relacione a variável de interesse  $\Phi$  em cada ponto nodal. Detalhes desta dedução podem ser vistos em Silva (2007), Silva, W. (2009) e Farias, V. (2011).

### 3.11 – Discretização em coordenadas generalizadas e cilíndricas: consistência

Com a finalidade de analisar a consistência entre as discretizações obtidas para o cilindro finito (coordenadas cilíndricas), e para sólidos de revolução (coordenadas generalizadas), foi feito o estudo detalhado a seguir. Na Equação (3.64), os termos  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{12}$  ou  $\alpha_{21}$  e o Jacobiano J serão definidos para um retângulo que, por revolução, gera um cilindro finito.

O retângulo gerador do cilindro está contido no plano xy ou  $\xi\eta$  na Figura 3.17, e pode girar um ângulo  $\theta$  através do eixo de rotação y.

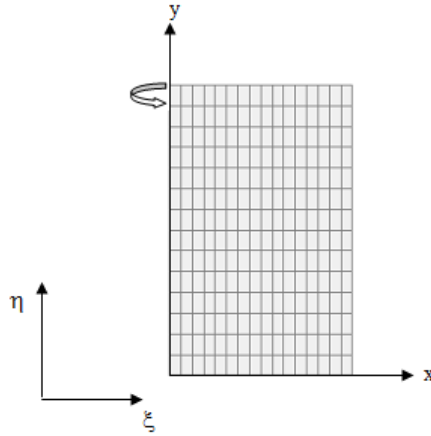


Figura 3.17 – O retângulo no plano  $xy$ , ao girar um ângulo  $\theta$  em torno do eixo de rotação  $y$ , gera uma fatia do cilindro finito.

Para a situação descrita, as seguintes métricas podem ser definidas:

$$x_{\eta} = 0, \quad (3.114)$$

$$y_{\xi} = 0, \quad (3.115)$$

$$z_{\gamma} = r\theta. \quad (3.116)$$

A Equação (3.116) é resultado da Equação (3.105), em que foi pressuposto  $\Delta\gamma = 1$ . Por outro lado, de acordo com a Equação (3.103), tem-se:

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0. \quad (3.117)$$

Este é um resultado previsível posto que  $\alpha_{12}$  e  $\alpha_{21}$  são termos relativos à não-ortogonalidade da malha. Por outro lado, de acordo com as Equações (3.102) e (3.104) levando em consideração a Equação (3.116), tem-se, respectivamente:

$$\alpha_{11} = \frac{\Delta y^2}{\Delta \eta^2} \theta^2 r^2. \quad (3.118)$$

e



$$\alpha_{22} = \frac{\Delta x^2}{\Delta \xi^2} \theta^2 r^2. \quad (3.119)$$

De acordo com a Equação (3.99), o jacobiano da transformação é, então, definido por:

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta y}{\Delta \eta} & 0 \\ 0 & 0 & r\theta \end{vmatrix}, \quad (3.120)$$

o que leva ao resultado:

$$J = \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\theta r \Delta x \Delta y}. \quad (3.121)$$

### 3.11.1 – Volumes internos: consistência

Substituindo as Equações de (3.117) a (3.119) e a Equação (3.121) nas Equações (3.68a-j), lembrando que  $\Delta x = \Delta r$  e fazendo as simplificações, obtém-se:

$$A_p = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y \quad (3.122)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.123)$$

$$A_e = r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.124)$$

$$A_s = r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.125)$$

$$A_n = r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \quad (3.126)$$

$$B = \frac{\lambda_p^0 r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_p^\Phi + S_C r_p \Delta r \Delta y. \quad (3.127)$$

Os seguintes coeficientes são iguais a zero, porque são relativos aos termos cruzados:

$$A_{sw} = A_{se} = A_{nw} = A_{ne} = 0. \quad (3.128)$$

Deve-se observar que os resultados independem do ângulo  $\theta$ , que foi simplificado na determinação das expressões para os coeficientes. Isto é obvio posto que, por hipótese, existe simetria de revolução.

Quando os resultados recém obtidos são analisados, percebe-se que são iguais aos que já foram obtidos para o cilindro finito usando coordenadas cilíndricas, conforme as Equações de (3.25) a (3.30). Portanto a consistência das duas discretizações é verificada. De maneira análoga, todos os outros volumes de controle foram analisados e os resultados foram, como esperado, coincidentes. Assim, pode-se afirmar que as discretizações para o cilindro finito (coordenadas cilíndricas) e para o sólido de revolução (coordenadas generalizadas) são consistentes.

### 3.12 – Concepção para o otimizador desenvolvido para as soluções numéricas

O otimizador desenvolvido por Silva, C. (2010) e acoplado à solução numérica para um cilindro infinito será adaptado neste trabalho, para a solução numérica referente ao cilindro finito, e a outros sólidos de revolução. Com este objetivo, deve ser observado que um dos métodos de otimização disponíveis na literatura é o método inverso (CARBONERA et al., 2003; MARIANI et al., 2008; SILVA, C., 2010), em que são atribuídos valores aos parâmetros de interesse; seguido da solução da equação que

descreve o sistema, sendo que os resultados obtidos são comparados aos dados experimentais relativos a tal sistema. A partir da comparação, novos valores para os parâmetros são estabelecidos, e o processo continua até que os resultados simulados possam ser considerados suficientemente próximos dos resultados experimentais.

Vale salientar que as soluções numéricas possibilitam assumir que  $\Gamma^\Phi$  possa variar com  $\Phi$ . A partir disto, uma metodologia numérica será utilizada para simular a cinética de um processo difusivo, baseando-se nos estudos desenvolvidos por Silva (2007) e Silva, C. (2010). Em especial, uma vez escolhida uma expressão  $\Gamma^\Phi = f(\Phi, a, b)$ , na qual  $\Gamma^\Phi$  pode depender de  $\Phi$ , o método inverso será usado no desenvolvimento de um otimizador que determina os valores ótimos dos parâmetros “a” e “b” e de “h” (coeficiente de transferência convectiva), minimizando uma função objetivo.

Tendo sido realizada uma simulação numérica para a qual existam dados experimentais disponíveis, o desvio padrão inerente à simulação pode ser calculado como segue. Considerando o i-ésimo ponto experimental  $(t_i, \bar{\Phi}_i)$  de uma grandeza genérica  $\Phi$ , inicialmente deve ser identificado se existe um ponto da simulação com a mesma abscissa  $t_i$ . Neste caso, o desvio  $\delta\Phi_i$  deve ser calculado diretamente da expressão (ver, por exemplo, TAYLOR, 1997; SILVA e SILVA, 1998; SILVA, C., 2010).

$$\delta\Phi_i = \bar{\Phi}_i - \bar{\Phi}^{\text{sim}}, \quad (3.129)$$

em que  $\bar{\Phi}^{\text{sim}}$  é o valor médio de  $\Phi$  obtido na simulação para  $t = t_i$ .

Caso a abscissa  $t_i$  do ponto experimental tenha um valor que esteja entre dois valores simulados,  $t_i^{\text{sim}}$  e  $t_{i+1}^{\text{sim}}$ , o valor de  $\bar{\Phi}^{\text{sim}}$  pode ser calculado por interpolação linear, através da expressão (Silva, 2007):

$$\bar{\Phi}^{\text{sim}} = \frac{\bar{\Phi}_i^{\text{sim}} - \bar{\Phi}_{i+1}^{\text{sim}}}{t_{i+1}^{\text{sim}} - t_i^{\text{sim}}} (t_{i+1}^{\text{sim}} - t_i) + \bar{\Phi}_{i+1}^{\text{sim}}, \quad (3.130)$$

o que possibilita a utilização da Equação (3.129) para o cálculo do desvio referente ao  $i$ -ésimo ponto experimental. Dessa forma, todos os elementos necessários para o cálculo do desvio padrão relativos ao ajuste tornam-se conhecidos. Assim, supondo que todos os pontos experimentais tenham o mesmo peso estatístico, o desvio padrão pode ser calculado através da expressão (TAYLOR, 1997; SILVA e SILVA, 1998; SILVA, C., 2010).

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N_p - p)} \sum_{i=1}^{N_p} (\delta\Phi_i)^2}, \quad (3.131)$$

onde  $N_p$  é o número de pontos experimentais,  $p$  é o número de parâmetros que ajustam a curva simulada aos dados experimentais, sendo que  $(N_p - p)$  define o número de graus de liberdade referente ao ajuste.

Conforme já foi mencionado, um dos objetivos deste trabalho é possibilitar a determinação de parâmetros de uma expressão proposta para  $\Gamma^\Phi$ , e do coeficiente de transferência convectiva de massa,  $h$ , a partir de dados experimentais, através do recurso da minimização de uma função objetivo. A razão disto é que para a descrição completa de um problema difusivo, há a necessidade da determinação de uma expressão para  $\Gamma^\Phi$  e  $h$ . Para tal, um algoritmo de otimização foi desenvolvido a partir dos seguintes requisitos:

- minimização do qui-quadrado relativo ao processo de ajustamento de uma curva simulada aos dados experimentais;
- utilização do algoritmo de Levenberg-Marquardt (ver, por exemplo, PRESS et al., 1996), com correções seqüenciais dos parâmetros.

Conforme se sabe, a expressão para o qui-quadrado envolvendo o ajuste de uma função explícita usada como um modelo (regressão) ou de uma curva simulada a dados experimentais é dada por (TAYLOR, 1997; SILVA e SILVA, 1998; SILVA, C., 2010).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \left( \bar{\Phi}_i^{\text{exp}} - \bar{\Phi}_i^{\text{sim}} \right)^2 \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (3.132)$$

onde  $N_p$  é o número de dados experimentais,  $1/\sigma_i^2$  é o peso estatístico referente ao  $i$ -ésimo ponto experimental sendo que, na ausência de informações, em geral, tais pesos são feitos iguais à unidade. Vale salientar que  $\sigma_i$  é o desvio padrão do valor médio de  $\Phi_i$ . Obviamente, o qui-quadrado depende de  $\bar{\Phi}^{\text{sim}}$  que, por sua vez, depende de  $\Gamma^\Phi$  e do coeficiente de transferência convectiva de massa  $h$ . Em geral,  $\Gamma^\Phi$  pode ser expresso por uma função  $f(\Phi, a, b)$  em que “a” e “b” são constantes que podem ser determinadas via minimização da função objetivo. Neste trabalho, a função objetivo é definida pelo qui-quadrado referente ao ajuste, o que é expresso através da Equação (3.132).

Se o processo difusivo é tal que o valor de  $h$  possa ser considerado constante e  $\Gamma^\Phi$  é dado pela Equação (3.53), os parâmetros podem ser determinados através da minimização da função objetivo, envolvendo os seguintes passos:

Passo 1) Informe os valores iniciais dos parâmetros “a”, “b” e “h”. Resolva a equação da difusão e determine o qui-quadrado;

Passo 2) Informe o valor para a correção de “h”;

Passo 3) Corrija o parâmetro “h”, mantendo os valores dos parâmetros “a” e “b” constantes. Resolva a equação da difusão e calcule o novo qui-quadrado;

Passo 4) Compare o último valor calculado para o qui-quadrado com o anterior. Se o último valor for menor, retorne ao passo 2. Caso contrário, diminua a última correção do valor de “h” e avance para o passo 5;

Passo 5) Informe o valor para a correção de “a”;

- Passo 6) Corrija o parâmetro “a”, mantendo os valores dos parâmetros “b” e “h” constantes. Resolva a equação da difusão e calcule o novo qui-quadrado;
- Passo 7) Compare o último valor calculado do qui-quadrado com o anterior. Se o último valor for menor, retorne ao passo 5. Caso contrário, diminua a última correção do valor de “a” e avance para o passo 8;
- Passo 8) Informe o valor para a correção de “b”;
- Passo 9) Corrija o parâmetro “b”, mantendo os valores dos parâmetros “a” e “h” constantes. Resolva a equação da difusão e calcule o novo qui-quadrado;
- Passo 10) Compare o último valor calculado do qui-quadrado com o anterior. Se o último valor for menor, retorne ao passo 8. Caso contrário, diminua a última correção do valor de “b” e avance para o passo 11;
- Passo 11) Comece um novo ciclo, voltando ao passo 2, até atingir a convergência para os parâmetros “a”, “b” e “h”.

Em cada ciclo, o valor da correção de cada parâmetro pode ser inicialmente modesto, compatível com a tolerância de convergência imposta ao problema. Então, para um determinado ciclo, em cada retorno aos passos 2, 5 ou 8, o valor da nova correção pode ser multiplicado pelo fator 2. Se a correção inicialmente informada não minimizar a função objetivo, tal valor deve ser multiplicado pelo fator -1. Note que, se a difusividade for constante, os passos 8, 9 e 10 não são necessários. Por outro lado, os valores iniciais dos parâmetros podem ser estimados através de valores obtidos para produtos similares, disponíveis na literatura, ou através de correlações empíricas.

Deve ser observado que o segundo indicador estatístico a ser utilizado para a análise da qualidade dos ajustes a serem realizados é o coeficiente de determinação  $R^2$  (TAYLOR, 1997; SILVA e SILVA, 1998; SILVA, C, 2010).

### 3.13 – Software desenvolvido para o cilindro finito

Para o cilindro finito, será desenvolvido um *software*, incluindo a interface com o usuário. Basicamente, o software pode ser usado em duas situações: 1) simulação de um problema difusivo, quando os parâmetros termo-físicos são conhecidos; 2) determinação dos parâmetros termo-físicos por otimização, quando um conjunto de dados experimentais é conhecido.

Devido ao fato do *software* desenvolvido simular problemas difusivos com propriedades termo-físicas tanto constantes quanto variáveis, há a necessidade da informação de expressões matemáticas, por parte do usuário, indicando como um parâmetro varia em função de outros. Como se sabe, em um *software*, expressões são lidas através de caixas de diálogo como *strings* e, portanto, devem ser convertidas em funções matemáticas para poderem ser avaliadas. Entretanto, os estúdios de programação em Fortran não disponibilizam a ferramenta conversora de *strings* em funções matemáticas. Por isso, foi feita uma pesquisa na Internet, em busca de avaliadores de expressões (*function parser*) para a linguagem de programação Fortran, pois tal linguagem será utilizada em todo o pacote computacional a ser desenvolvido.

#### 3.13.1 – Avaliadores de expressões e a linguagem Fortran

Conforme foi mencionado, em softwares com interface gráfica há a necessidade de que uma variável literal informada por um usuário em uma caixa de diálogo seja transformada em uma expressão matemática. Isto é feito através de códigos específicos denominados de *parsers* ou *evaluators*. Repetidas buscas na Internet indicaram que apenas três avaliadores de expressões, também denominados genericamente por *function parsers*, foram desenvolvidos, em código aberto, para a linguagem Fortran. Um destes avaliadores foi desenvolvido na Austrália por Midgley (2002). O segundo *parser* em código aberto disponível na Internet foi desenvolvido na Alemanha, por Schmehl (2003). O terceiro *parser* foi desenvolvido no Brasil, por Silva et al. (2005).

### 3.13.2 – Análise comparativa

Foi feita uma análise comparativa entre o *parser* desenvolvido por Silva et al. (2005) e os dois outros avaliadores de funções em código aberto, disponíveis na Internet (MIDGLEY, 2002; SCHMEHL, 2003). O resultado completo dos testes realizados está disponível no link <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/functionparser.htm>, enquanto que alguns destes testes são apresentados no próprio artigo publicado por Silva et al. (2005). Os testes consistiram na realização de cinco milhões de iterações para vinte e cinco expressões distintas, com a medição do tempo que cada avaliador de expressões gastou para realizar tal tarefa. Os testes foram realizados num computador Intel™ Pentium III, 128 Mb de memória RAM. A compilação foi feita no estúdio Compaq Visual Fortran (CVF) 6.5.0, utilizando-se a opção de programação QuickWin Application. O tempo gasto para o cálculo de cada expressão devidamente compilada também foi medido, para que se tenha uma noção do quão lento é um *parser* em Fortran, em comparação com o menor tempo possível, que é o da expressão compilada. A diferenciação na performance dos avaliadores foi baseada unicamente no tempo gasto para a execução das tarefas porque, como esperado, foi observado que os resultados numéricos de todos eles foram equivalentes, e compatíveis com o resultado numérico da expressão compilada.

Após os testes para a escolha do *parser*, foi observado que o código desenvolvido por Silva et al. (2005) apresentou uma performance superior aos dois outros, e por isso tal *parser* foi acoplado ao código fonte do *software* em desenvolvimento para resolver a equação de difusão referente à geometria cilíndrica.

### 3.13.3 – Interface gráfica

Para que um número maior de usuários possa usar o *software* em desenvolvimento, ficou estabelecido que a comunicação software-usuário deveria ser feita em Inglês. Tal comunicação deve ser estabelecida, além das caixas de diálogo, através dos seguintes menus: “Finite Cylinder”, “General”, “Information” e “Exit”. O primeiro menu deve conter os seguintes itens: “New Dataset”, “Open Dataset”, “Simulate” e “Results”. Já o segundo menu deve oferecer outras opções para o usuário, além da solução da equação de difusão, e deve conter os seguintes itens: “Graph 2D”, “Graph 3D”, “Calculator of the Windows” e



“Calculator of the software”. O terceiro menu deve conter os itens: “Help”, “Home page”, “Send E-mail” e “About”. Por último, o menu “Exit” deve possibilitar ao usuário o encerramento do *software*. Deve ser mencionado que foi criada uma subrotina que detecta erros matemáticos, em substituição à subrotina *default*, “Matherrq”, posto que esta última, apesar de informar um erro matemático, quando ele é detectado, encerra o aplicativo, o que não é desejado para o *software* desenvolvido, já que ele deve ser executado em laço infinito, e apenas deve ser encerrado pelo usuário.

### 3.13.4 – Validação do *solver* desenvolvido para o cilindro finito

Para validar o *software* a ser desenvolvido, serão feitas análises de consistência e de coerência de resultados. Numa segunda etapa, serão realizadas simulações para as quais uma outra solução, analítica ou numérica, seja conhecida. Em seguida será feita a comparação de resultados.

Todas as análises serão realizadas em um computador e sistema operacional definidos através da Figura 3.18.



Figura 3.18 – Sistema operacional e características do computador usado nesta pesquisa.

No processo de validação, serão extraídos dados da literatura e os resultados lá obtidos foram comparados com aqueles obtidos no presente trabalho. Em todos os testes as unidades dos valores de parâmetros utilizados são pertencentes ao Sistema Internacional (SI), a menos de uma indicação ao contrário. Para a solução numérica proposta para o cilindro finito, os sistemas de equações provenientes da discretização da equação de difusão foram resolvidos via TDMA em associação com o método de Gauss-Seidel (linha a linha), sendo imposta uma tolerância de  $1 \times 10^{-8}$ , a menos de uma indicação em contrário. Já para os sistemas de equações decorrentes de geometrias arbitrárias obtidas por revolução foi usado o método de Gauss-Seidel com a mesma tolerância mencionada.

Gráficos de contorno devem ser utilizados para dar uma indicação visual dos resultados obtidos. Para tal, serão utilizados dois programas específicos. Um deles é denominado Contour Plot (SILVA, W., 2010), e pode ser utilizado para uma geometria bidimensional qualquer, cuja malha seja conhecida. Outro programa, desenvolvido neste trabalho, foi utilizado especificamente para a geometria cilíndrica. Já gráficos 2D, representando os valores médios de soluções analíticas e numéricas ao longo do tempo, serão traçados com a utilização do LAB Fit Curve Fitting Software (SILVA e SILVA, 2009).

## **Parte B: Metodologia experimental**

### **3.14 - Material e procedimentos experimentais**

Nesta seção será apresentada a matéria-prima estudada neste trabalho, bem como os procedimentos experimentais a serem utilizados.

#### **3.14.1 – Material experimental**

A matéria-prima utilizada foi a banana *Musa acuminata* subgrupo Cavendish cv nanica (Figura 3.19), adquirida na feira da Prata, em Campina Grande, do proprietário do Sítio Honorato no município de Alagoa Nova, Edmilson Gonçalves da Silva, conhecido por Neginho Preá.



Figura 3.19 – Cacho de banana anã, que foi utilizado no experimento.

Para que os pedaços cilíndricos de banana tivessem o mesmo comprimento, foi utilizada uma faca especialmente criada para este fim, com bitolas de 10,00; 15,00; 20,00 e 25,00 mm, conforme é mostrado na Figura 3.20.

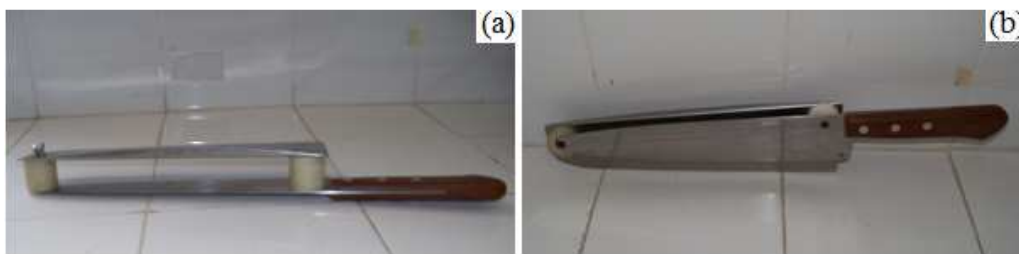


Figura 3.20 – Faca utilizada para o corte das bananas: (a) destaque da bitola de 25,00 mm; (b) destaque da lâmina de corte.

Para a medição do comprimento e do diâmetro, foi utilizado um paquímetro digital TDS marca Digimess, modelo 100.174L, com resolução de 0,01 mm e fundo de escala de 150 mm, e também foi usada uma escala milimetrada, para medir o comprimento da banana inteira. Para a medida da temperatura e da umidade relativa do ar no ambiente foi utilizado um Termo-higrômetro digital da Minipa modelo MTH 1362W, que pode ser observado na Figura 3.21.



Figura 3.21 – Paquímetro digital, escala milimetrada e o termo-higrômetro digital.

As pesagens foram feitas utilizando uma balança digital da marca Diagtech, com resolução de 0,001 g e capacidade máxima de 510 g, como mostra a Figura 3.22.



Figura 3.22 – Balança digital utilizado no experimento para as realizar as pesagens.

Foi utilizado um secador convectivo com fluxo vertical, com peneiras removíveis, “Secador de sementes de laboratório da SELETC”, modelo S.S.4500W, mostrado na Figura 3.23.



Figura 3.23 – Secador de sementes de laboratório.

Para obter a massa seca foi utilizada uma estufa com circulação de ar, mostrada na Figura 3.24.



Figura 3.24 – Estufa com circulação ar.

### 3.14.2 – Procedimentos experimentais

O trabalho foi conduzido no Laboratório de Armazenamento e Processamento de Produtos Agrícolas da Unidade Acadêmica de Engenharia Agrícola, do Centro de Tecnologia e Recursos Naturais da Universidade Federal de Campina Grande, PB.

As bananas foram colhidas com a casca totalmente verde, e amadureceram naturalmente. Foram transportadas ao laboratório, em cachos, e em seguida foram despencadas e selecionadas, descartando-se os frutos com algum dano. Depois, foram colocadas em sextos, e deixadas à temperatura ambiente. O grau de maturação foi amarelo com muitas pintas pretas (escala 7, na classificação de Haendler (HAENDLER, 1964)), como pode ser visto na Figura 3.25.



Figura 3.25 – Banana com o grau de maturação utilizado nos experimentos.

Atingido o grau de maturação desejado, as bananas foram descascadas, e novamente, foram selecionadas as bananas com o diâmetro entre 26,00 e 34,00 mm, para o experimento com banana em pedaços cilíndricos. Já para os experimentos com as bananas inteiras, além do diâmetro foi observado o comprimento médio de 157,00 mm.

Após as bananas terem sido selecionadas, elas foram cortadas com a faca apresentada na Figura 3.20, usando as bitolas para cada tamanho selecionado de 10,00; 15,00; 20,00 e 25,00 mm. Então, os pedaços das bananas foram colocadas em cestos de tela fina de alumínio, medindo 13,0 por 13,0 cm, identificados por um número. Os cestos foram inicialmente pesados e, em seguida, os pedaços de bananas foram neles depositados com, em média, de 7 a 12 pedaços de bananas com o mesmo comprimento. Em seguida, o conjunto foi levado à balança, sendo anotado o seu peso inicial. Com os experimentos das bananas inteiras, as bananas selecionadas foram colocadas nos cestos e também foram feitas as pesagens.

Após estes procedimentos, os cestos foram colocados na bandeja do secador que já tinha sido ligado e regulado para a temperatura 40,0 °C e nos demais experimentos para as

temperaturas do ar de secagem de 50,0; 60,0 e 70,0 °C. A velocidade do ar de secagem foi fixada em 1,5 m/s. Para medir a velocidade do ar de secagem foi utilizado um anemômetro de palheta com leitura digital da marca Instrutemp, modelo MDA-II, em todos os experimentos.

Na Figura 3.26, mostram-se os cestos com os vários tamanhos das bananas colocados na bandeja do secador, no início da secagem.



Figura 3.26 – Cestos na bandeja do secador com as bananas, com os quatro comprimentos estudados, cortados com as bitolas de: (a) 20,00 mm; (b) 10,00 mm; (c) 25,00 mm (d) 15,00 mm.

O registro da perda de água foi feito usando o método do gravimétrico. Para cada experimento, o produto foi pesado no começo da secagem e em intervalos de 5 min por cerca de 2 hs. Depois de 10, 15, 20, 25, 30 min, e em seguida de 1, 2, 4, 6, 12 e 24 h no final do processo. A fim de determinar o teor de umidade de equilíbrio, a secagem prosseguiu até a massa atingir o seu valor de equilíbrio. Nestes mesmos intervalos de tempo foram medidos o raio e o comprimento. O mesmo procedimento foi realizado com as bananas inteiras.

No mesmo intervalo de tempo em que foi registrada a perda de água, também foram registrados a temperatura e a umidade relativa do ar ambiente. Após o término de cada experimento foram calculadas as médias tanto para a temperatura como para umidade relativa do ar ambiente, anotados na Tabela 4.7 a ser provida no Capítulo 4.

### 3.15 – Medidas efetuadas

Após a realização dos experimentos com bananas em pedaços, foi registrado, em cada instante de tempo, a massa total (massa da banana + massa do cesto). Para determinar-se a massa  $m$  das bananas, a massa do cesto foi subtraída da massa total.

Utilizando o programa GRAPSI - Programa Computacional para o Cálculo das Propriedades Psicrométricas do Ar (MELO, 2004), foi possível determinar a umidade relativa do ar de secagem, que está anotada na Tabela 4.7 a ser provida no Capítulo 4.

Após ter atingido o teor de umidade de equilíbrio, as amostras foram deixadas por mais 24 horas no secador, nas mesmas condições de secagem. Então, foram levadas para a estufa com a temperatura de aproximadamente 105 °C, e retiradas após 4 horas. As amostras foram colocadas no dissecador até atingirem a temperatura ambiente, quando, então, foram pesadas sendo obtidas as massas secas, que estão relacionadas nas Tabelas 4.8 a 4.11, a ser provida no Capítulo 4.

Também foram determinados o teor de umidade em base seca ( $\bar{X}_{bs} = (m - m_s)/m_s$ ), a razão de umidade  $\bar{X}^*$ , dada pela Equação (3.16). Devido ao volume de informações, tais dados não serão apresentados em tabelas e sim nos gráficos da cinética de secagem a serem apresentados no Capítulo 4.

O volume dos pedaços de banana, em cada instante, pode ser determinado a partir dos dados obtidos para as suas dimensões (comprimento e diâmetro), da seguinte maneira:

$$V = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 C \quad (3.133)$$

onde  $V$  é o volume do pedaço de banana,  $d$  é o diâmetro e  $C$  é o comprimento. Na solução numérica da equação de difusão utilizou-se apenas a metade do volume, já que foi considerada a simetria axial, para ganhar tempo computacional.



### 3.16 – Malha: Banana inteira

Para resolver a equação de difusão numericamente para a banana inteira, inicialmente será gerada uma malha.

Será gerada a malha para apenas a metade da banana, como pode ser vista na Figura 3.27.

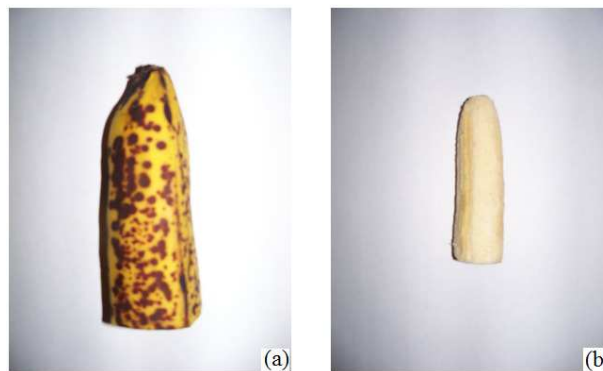


Figura 3.27 – (a) Metade da banana com casca, (b) A metade da banana descascada, utilizada para a geração da malha.

Para a banana inteira a expressão para o cálculo do volume é:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \frac{C}{2} \quad (3.134)$$

onde  $d$  é o diâmetro e  $C$  é o comprimento da banana inteira.

O estágio de maturação escolhido para as bananas dos experimentos de secagem foi o de bananas amarelas com pintas pretas que corresponde à escala 7 na classificação de Haendler (1964). Este estado foi escolhido porque o produto apresenta um mínimo de amido (1,0-2,5%) e um máximo de açúcar (17,5-19,09%), o que é adequado para a produção de bananas-passas. Caso se desejasse obter outro tipo de produto com baixo teor

de açúcar, o aconselhável seria a secagem de bananas verdes (19,5-21,5% de amido e 0,1-2,0% de açúcar).

Quanto à secagem dos pequenos pedaços cilíndricos de bananas, este recurso diminui o tempo do processo, e normalmente é utilizado com o objetivo de trituração do produto final visando à produção de farinhas. Neste caso, normalmente o produto é seco até atingir o estado vítreo.

## **CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Para validar as ferramentas analíticas desenvolvidas (algoritmo de otimização e solução analítica da equação de difusão para o cilindro finito), dados disponíveis na literatura foram utilizados. A validação foi feita por comparação dos resultados obtidos com as ferramentas desenvolvidas neste trabalho e aqueles disponíveis na literatura.

Quanto às soluções numéricas para o cilindro finito e elipsóides, foram realizados testes de coerência e de consistência envolvendo volumes de controle simetricamente posicionados. Com relação à validação, propriamente dita, foram analisados processos difusivos envolvendo cilindros com volume e difusividade constantes, e também com volume e difusividade variáveis, utilizando-se dados disponíveis na literatura.

Todas as ferramentas proposta foram usadas para descrever a secagem de bananas inteiras e em pedaços cilíndricos.

#### 4.1 – Validação das ferramentas analíticas

Nos testes realizados para validar o otimizador e a solução analítica relativos ao cilindro finito, foi assumido um valor constante e igual à unidade para o parâmetro de transporte  $\lambda$ . As ferramentas desenvolvidas foram aplicadas a dados experimentais de secagem. Foi pressuposto uma distribuição inicial uniforme para o teor de umidade ( $\Phi \equiv X$ ), admitindo-se ainda, a difusividade efetiva de massa ( $\Gamma^\Phi \equiv D$ ), o coeficiente de transferência convectiva de massa ( $h$ ) e as dimensões do sólido ( $r$  e  $C$ ) constantes durante todo o processo.

Como as ferramentas analíticas propostas envolvem a condição de contorno do terceiro tipo, para simular um processo com a condição de contorno do primeiro tipo foi necessário supor um valor muito grande para o número de Biot ( $Bi = 200$ ).

Para a validação das ferramentas analíticas, foram utilizados os dados obtidos por Mulet et al. (2005), referentes à cinética de secagem de rizomas de *Curcuma longa*. Em um de seus experimentos, os pesquisadores utilizaram rizomas descascados e cortados em pedaços cilíndricos, com altura de 10,0 mm e raio de 5,0 mm. A temperatura do ar de secagem foi mantida em 70 °C e a sua velocidade em 4,5 m s<sup>-1</sup>. O conjunto de dados obtidos foram analisados pelos autores na forma adimensional, usando a Equação (3.16). Na análise dos dados, os autores consideraram a condição de contorno de Dirichlet. No experimento, Mulet et al. (2005) não determinaram as incertezas dos teores de umidades médios experimentais e, por isto, no presente trabalho, os pesos estatísticos foram todos considerados iguais a 1. Por outro lado, no presente trabalho, os pares  $(t, \bar{X}^*)$  para todos os pontos da cinética de secagem foram obtidos pela digitalização do gráfico que representa esta cinética de secagem. Como os dados experimentais estão escritos na forma adimensional, na Equação (3.9) deve-se impor os seguintes valores:  $X_i = 1$  e  $X_{eq} = 0$ .

Para as condições de secagem utilizadas no experimento, os modelos da difusão líquida parece ser razoável, apesar de uma possível anisotropia e heterogeneidade do meio. No presente trabalho, foi suposto que essas características ocorrem em uma escala pequena e podem, portanto, serem descartadas, assim como o encolhimento

(BARONAS et al., 2001; KULASIRI e WOODHEAD, 2005; MULET et al., 2005; RICARDEZ et al., 2005; OLEK e WERES, 2007; SILVA et al., 2010b).

A Equação (3.9) foi ajustada ao conjunto de dados experimentais usando as ferramentas analíticas desenvolvidas, e os resultados obtidos, considerando as condições de contorno de Dirichlet (modelo 1) e de Cauchy (modelo 2), são apresentados a seguir. A comparação entre os dois modelos é feita utilizando os indicadores estatísticos qui-quadrado ( $\chi^2$ ) e coeficiente de determinação ( $R^2$ ), e também o erro médio e a distribuição de erros sobre as curvas simuladas.

#### 4.1.1 – Modelo 1: Condição de contorno do primeiro tipo

A otimização supondo um número de Biot infinito (estipulado como 200) e difusividade efetiva desconhecida resulta em:  $D = 3,46 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ; com  $R^2 = 0,9988$  e  $\chi^2 = 1,7095 \times 10^{-3}$ . A relação entre o qui-quadrado e a difusividade efetiva pode ser observada na Figura 4.1(a), nas proximidades do ponto ótimo. Utilizando o valor obtido para a difusividade efetiva, a simulação da cinética de secagem juntamente com os dados experimentais podem ser mostrados através Figura 4.1(b).

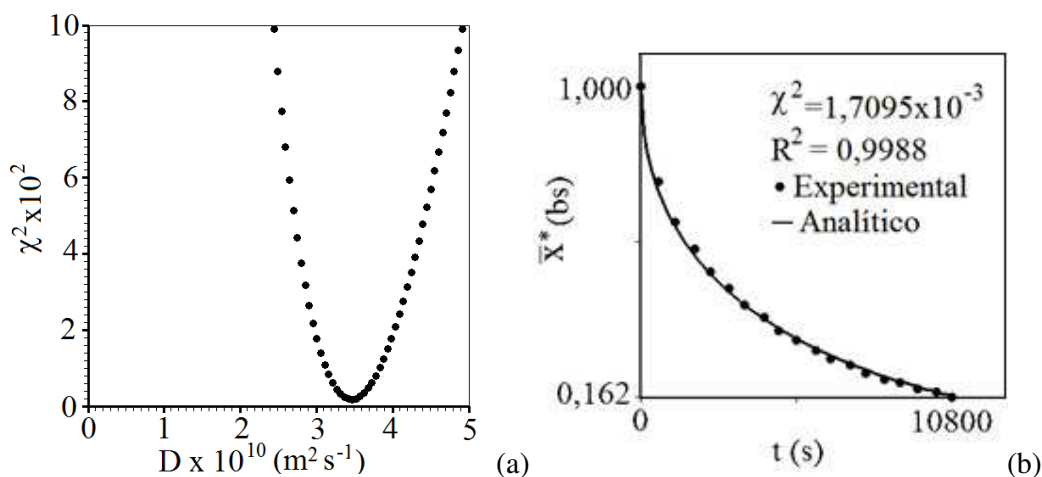


Figura 4.1 – (a) Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo; (b) cinética de secagem de rizomas de *Curcuma longa* para a condição de contorno do primeiro tipo.

O resultado obtido no presente trabalho para a difusividade efetiva de massa e aquele obtido por Mulet et al. (2005) foram exatamente iguais, ou seja  $D = 3,46 \times 10^{-10}$

$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . Isto possibilita afirmar que as ferramentas desenvolvidas usando a solução analítica para o cilindro finito apresentam resultados corretos na descrição da secagem de sólidos cilíndricos.

Os indicadores estatísticos obtidos parecem ser razoáveis. No entanto, a Figura 4.1(b) indica que os primeiros pontos experimentais estão acima da curva simulada, enquanto que os últimos estão abaixo dessa curva. Isto significa que não há uma distribuição aleatória dos pontos experimentais em torno da curva simulada. Assim, definindo o erro de um ponto  $i$  através da expressão

$$\text{erro}_i = \bar{X}_i^{\text{exp}} - \bar{X}_i^{\text{ana}}, \quad (4.1)$$

em que  $\bar{X}_i^{\text{exp}}$  é o teor de umidade médio do  $i$ -ésimo ponto experimental e  $\bar{X}_i^{\text{ana}}$  é o correspondente valor obtido através da solução analítica. Os gráficos de dispersão para o modelo 1 podem ser visualizados na Figura 4.2.

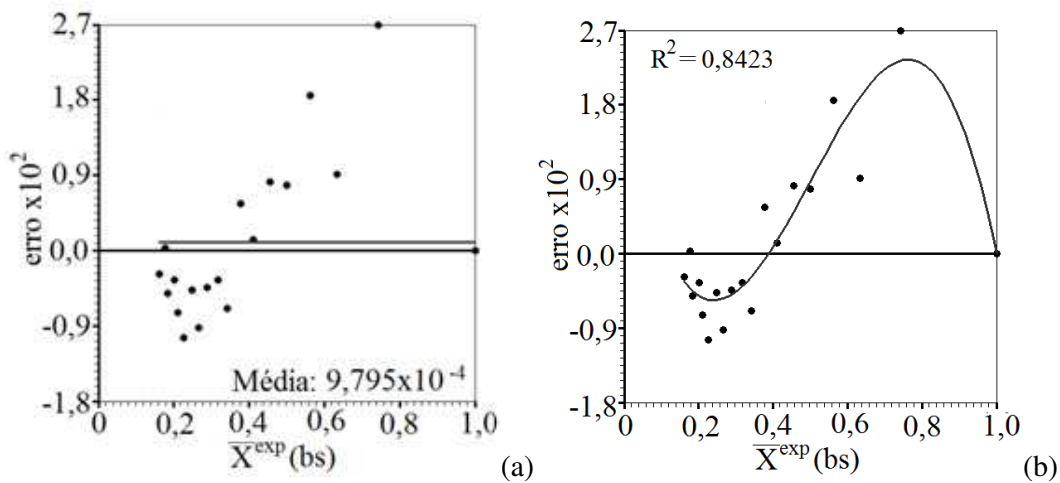


Figura 4.2 – Dispersão de erros para a cinética de secagem com condição de contorno do primeiro tipo, mostrando: (a) erro médio, (b) ajuste polinomial (terceiro grau).

Uma inspeção na Figura 4.2 permite afirmar que os erros estão fortemente correlacionados com os valores do teor de umidade médio experimental. Por exemplo, é possível ajustar um polinômio de terceiro grau aos pares  $(\bar{X}^{\text{exp}}, \text{erro})$ , com um certo sucesso. Assim, apesar dos bons indicadores estatísticos resultantes do modelo 1, a adequação de um segundo modelo será investigada neste trabalho.

4.1.2 – Modelo 2: Condição de contorno do terceiro tipo

Um processo de otimização considerando o número de Biot para a transferência de massa e a difusividade efetiva com valores desconhecidos (condição de contorno do terceiro tipo) resulta em:  $D = 3,85 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $h = 4,62 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$  ( $Bi_1 = 60,0$ ), com  $R^2 = 0,9996$  e  $\chi^2 = 3,5596 \times 10^{-4}$ . A relação entre qui-quadrado e o número de Biot para a transferência de massa pode ser observado na Figura. 4.3(a). Usando os valores obtidos para D e h, a simulação cinética de secagem, juntamente com os dados experimentais, podem ser mostrados por meio da Figura 4.3(b).

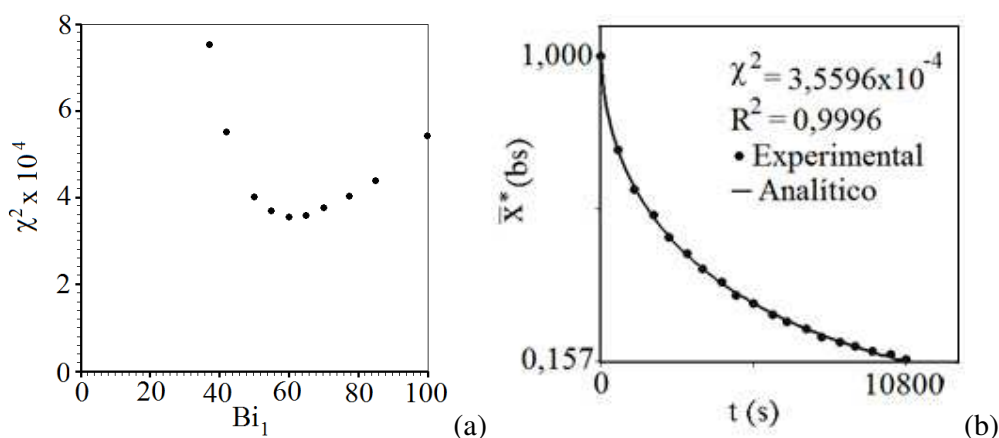


Figura 4.3 – (a) Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo; (b) cinética de secagem de rizomas de *Curcuma longa* para a condição de contorno do terceiro tipo.

Os gráficos de dispersão para o modelo 2 podem ser visualizados através da Figura 4.4.

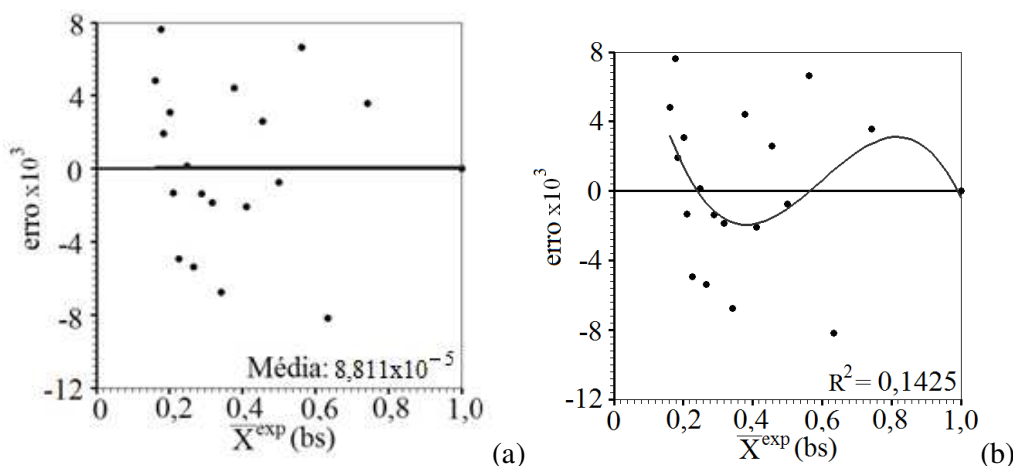


Figura 4.4 – Dispersão de erros para a cinética de secagem, com condição de contorno do terceiro tipo: (a) erro médio, (b) ajuste polinomial (terceiro grau).

A Figura 4.4 possibilita perceber que o erro médio é muito próximo de zero, e praticamente não existe correlação entre os erros e o teor de umidade adimensional.

Os resultados obtidos para os dois processos de otimização foram resumidos na Tabela 4.1, que também apresenta os indicadores estatísticos para os dois modelos.

Tabela 4.1 – Resultados obtidos para os dois modelos.

	D (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	h (m s <sup>-1</sup> )	$\chi^2 \times 10^3$	R <sup>2</sup>	Erro médio x 10 <sup>4</sup>	Distribuição de erros
Modelo 1	3,46 x 10 <sup>-10</sup>	-	1,7095	0,9988	9,7950	Tendenciosa
Modelo 2	3,85 x 10 <sup>-10</sup>	4,62 x 10 <sup>-6</sup>	0,35596	0,9996	0,8811	Aleatória

#### 4.2 – Solução numérica: interface gráfica do software “Finite Cylinder”

A tela principal do *software* desenvolvido para o cilindro finito, usando a solução numérica proposta neste trabalho, tem o aspecto mostrado através da Figura 4.5.

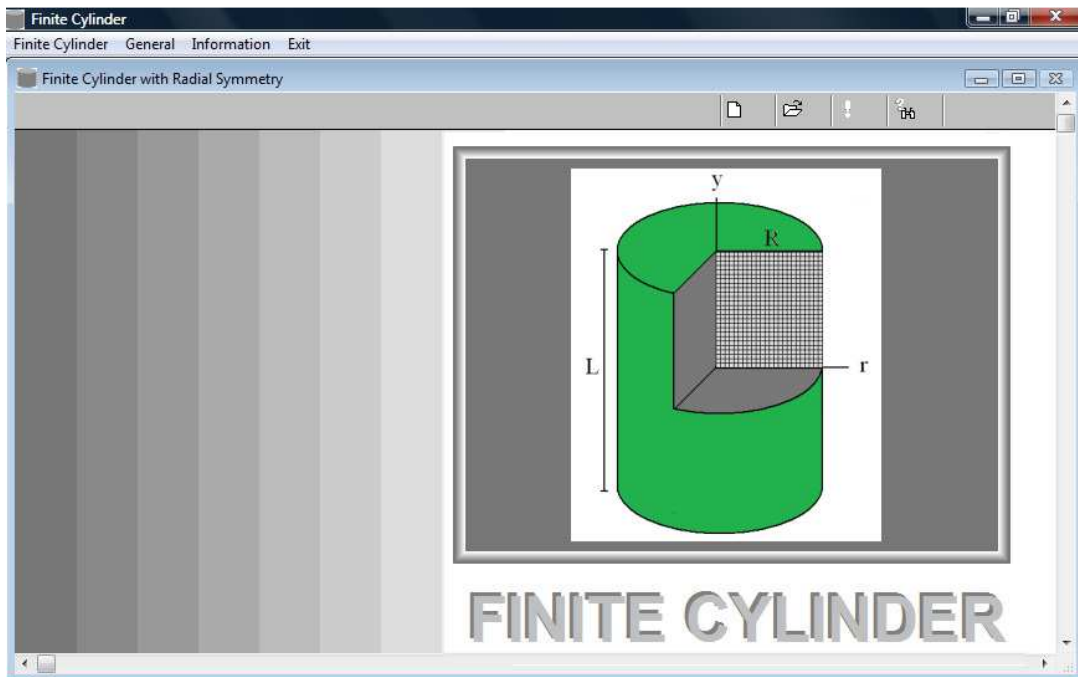


Figura 4.5 – Tela principal do *software* desenvolvido.



O *software* foi desenvolvido pressupondo que possa ser usado até mesmo por usuários inexperientes, e para tal foi criada uma interface gráfica intuitiva e simples, através de menus, que serão resumidamente apresentados a seguir.

#### 4.2.1 – Menus e caixas de diálogos

O primeiro menu é o “Finite Cylinder” que, ao ser clicado, abre seqüencialmente um conjunto de quatro itens que podem ser vistos na Figura 4.6.

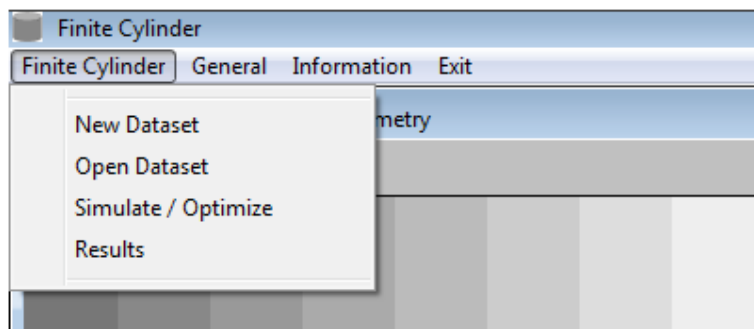


Figura 4.6 – Menu “Finite Cylinder”.

O primeiro item, denominado “New Dataset”, é usado para a informação de um novo conjunto de dados. Os dados para uma simulação (ou otimização) tem o aspecto mostrado na Figura 4.7.

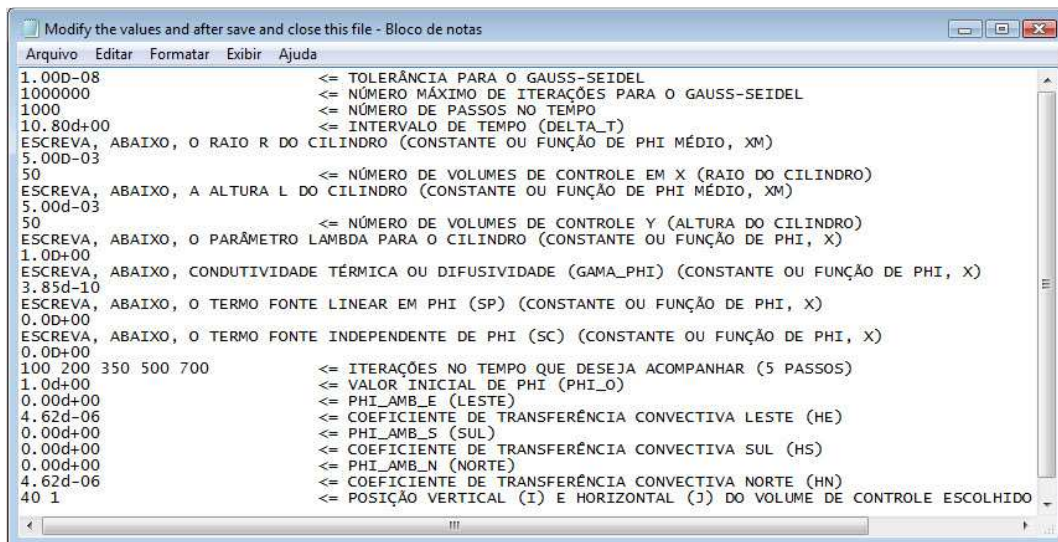


Figura 4.7 – Arquivo com todos os dados a serem informados.

Depois da informação de um novo conjunto de dados, contidos no arquivo da Figura 4.7, tal arquivo deve ser salvo. Para realizar uma simulação (ou otimização) referente a tais dados, basta clicar na opção de interesse, na caixa de diálogo que aparece. Para abrir um conjunto de dados anteriormente salvo basta clicar em “Open Dataset” (Figura 4.6). Depois de uma simulação, por exemplo é informado, através, de uma caixa de mensagem, o tempo gasto na realização de tal simulação, conforme pode-se observar na Figura 4.8.

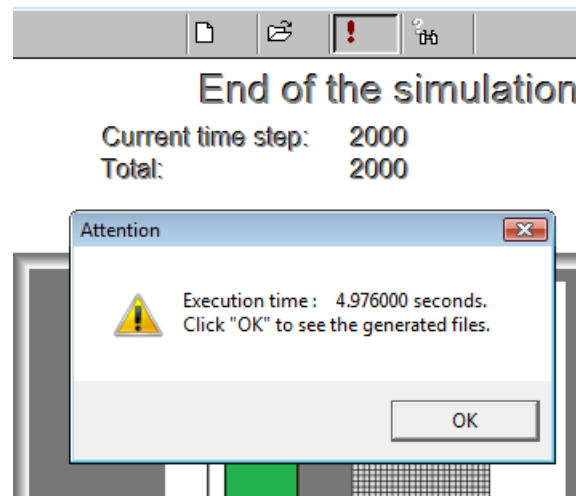


Figura 4.8 – Caixa de mensagem que mostra o tempo de execução.

Após uma simulação pode-se clicar no item de menu “Results” (Figura 4.6), para acessar todos os arquivos gerados durante a simulação. Estes arquivos serão detalhados no item 4.2.2.

O segundo menu do *software* desenvolvido é o “General”. Quando clicado, este menu abre quatro itens, como é mostrado na Figura 4.9.

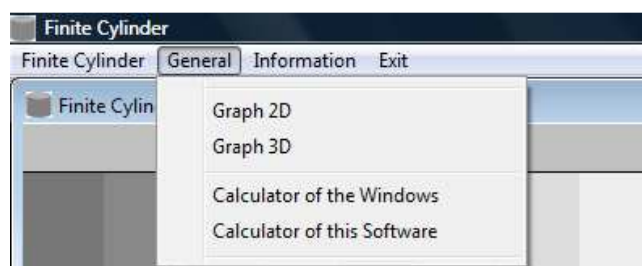


Figura 4.9 – Menu “General”.

No primeiro item deste menu, denominado “Graph 2D”, é apresentada uma caixa de diálogo onde, primeiramente, escolhe-se a cor da linha do gráfico. Deve-se, posteriormente, informar a função e o intervalo de  $x$  para a representação da mesma, e ainda escrever o título do gráfico e nomear os eixos, como mostra a Figura 4.10. Em seguida, deve-se clicar em “OK” que o gráfico 2D é desenhado.

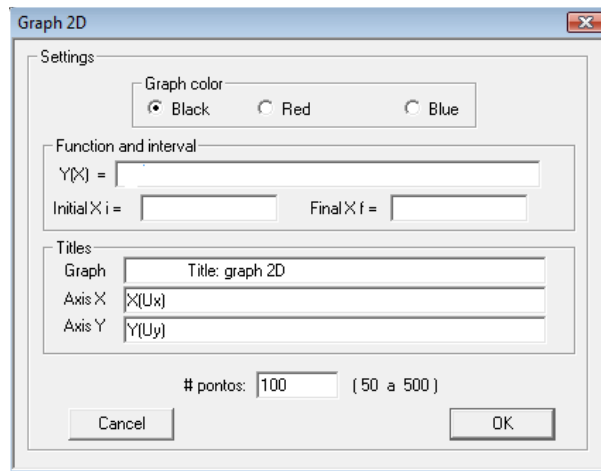


Figura 4.10 – Caixa de diálogo para aquisição de dados para o gráfico 2D.

O segundo item do menu “General” é o “Graph 3D” que, de maneira similar ao item anterior, desenha um gráfico em 3D. A caixa de diálogo para as informações pode ser visualizada na Figura 4.11.

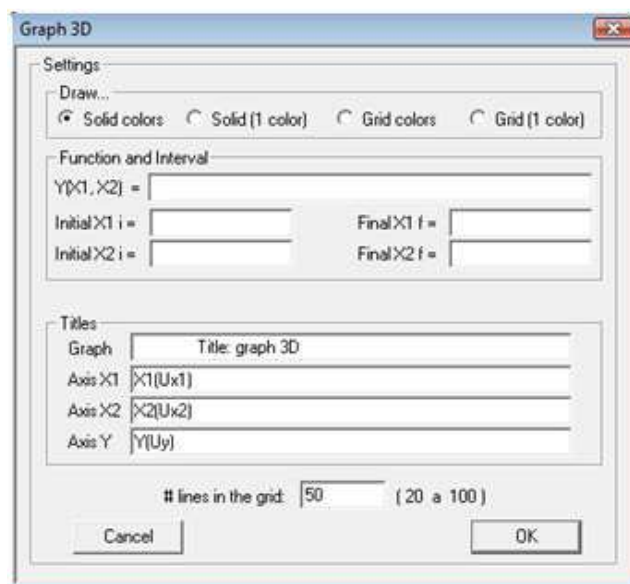


Figura 4.11 – Caixa de diálogo para aquisição de dados para o gráfico 3D.

No terceiro item do menu “General” tem-se a opção de utilizar a calculadora do Windows e, no quarto item, pode-se utilizar a calculadora criada no próprio *software*.

O menu “Information”, depois de clicado, também abre, sequencialmente, 4 itens, como é mostrado na Figura 4.12.

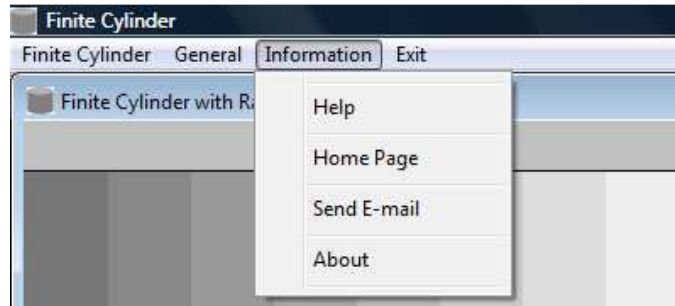


Figura 4.12 – Itens de menu “Information”.

No primeiro item deste menu são obtidas informações de ajuda sobre a utilização do *software*. No segundo item, “Home Page”, o usuário acessa o sítio do *software*, a ser criado. No terceiro item existe a opção de envio de e-mail para a autora e, no quarto, obtém-se informações gerais sobre o *software*.

No quarto menu, “Exit”, o usuário tem a opção de fechar o *software*. Tal menu pode ser visualizado na Figura 4.13.

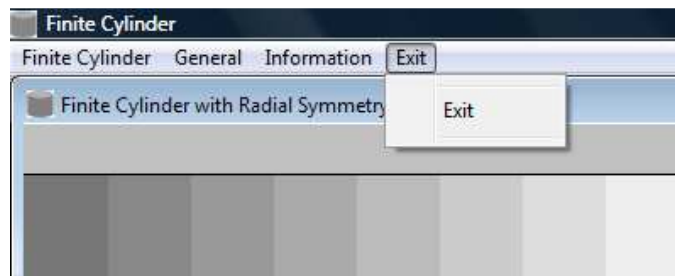


Figura 4.13 – Item “Exit”.

#### 4.2.2 – Arquivos gerados durante uma simulação numérica

Em cada simulação do *software*, são gerados os seguintes arquivos:

- Average value.txt: apresenta os resultados obtidos para os valores de  $\bar{\Phi}$  ao longo do tempo;
- Chosen node.txt: apresenta os resultados obtidos para os valores de  $\Phi$  no volume de controle escolhido pelo usuário ao longo do tempo;
- Grid.txt: apresenta as coordenadas (r,y) das interseções das linhas da malha retangular geratriz do cilindro;
- Maxmin.txt: apresenta os valores máximo e mínimo de  $\Phi$  durante toda a simulação;
- North-east.txt; North-west.txt; South-east.txt; South-west.txt: apresenta os resultados obtidos para o valor de  $\Phi$  nos volumes de controle a nordeste, a noroeste, a sudeste e a sudoeste ao longo do tempo;
- Phi0.txt; Phi1.txt; Phi2.txt; Phi3.txt; Phi4.txt; Phi5.txt; Phi6.txt: apresenta o valor de  $\Phi$  em cada volume de controle da malha, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Radial chosen 0.txt; Radial chosen 1.txt; Radial chosen 2.txt; Radial chosen 3.txt; Radial chosen 4.txt; Radial chosen 5.txt; Radial chosen 6.txt: apresenta o valor de  $\Phi$  em cada volume de controle escolhido pelo usuário, ao longo do raio, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Radial inferior 0.txt; Radial inferior 1.txt; Radial inferior 2.txt; Radial inferior 3.txt; Radial inferior 4.txt; Radial inferior 5.txt; Radial inferior 6.txt: apresenta o valor de  $\Phi$  em cada volume de controle ao longo do raio, na

posição inferior do cilindro, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);

- Radial superior 0.txt; Radial superior 1.txt; Radial superior 2.txt; Radial superior 3.txt; Radial superior 4.txt; Radial superior 5.txt; Radial superior 6.txt: apresenta o valor de  $\Phi$  em cada volume de controle ao longo do raio, na posição superior do cilindro, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Gama\_phi 0.txt; Gama\_phi 1.txt; Gama\_phi 2.txt; Gama\_phi 3.txt; Gama\_phi 4.txt; Gama\_phi 5.txt; Gama\_phi 6.txt: apresenta o valor de  $\Gamma^\Phi$  nas interfaces de cada volume de controle, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Dimensions.txt: apresenta as dimensões do cilindro ao longo do tempo;
- Dataset.txt: apresenta o conjunto de dados utilizados na simulação.

O *software* apresentado para o estudo de processos difusivos em um cilindro finito é considerado como uma das contribuições deste trabalho.

#### 4.3 – Solução numérica para o cilindro finito: teste de consistência

Para analisar os resultados da solução numérica da equação de difusão para o cilindro finito, primeiramente será considerado que as dimensões e as propriedades termo-físicas do sólido sejam constantes durante todo o processo. O teste de consistência para a solução numérica foi feito usando dados disponíveis na Seção 4.1 para a condição de contorno do terceiro tipo. O arquivo de dados utilizados é apresentado na da Figura 4.14.

```

CURCUMA_CILINDRO_INTEIRO - Bloco de notas
Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda
1.00D-08          <= TOLERÂNCIA PARA O GAUSS-SEIDEL
1000000          <= NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES PARA O GAUSS-SEIDEL
2000             <= NÚMERO DE PASSOS NO TEMPO
5.4d+00          <= INTERVALO DE TEMPO (DELTA_T)
ESCREVA, ABAIXO, O RAIO R DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
5.00D-03
50               <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM X (RAIO DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, A ALTURA L DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
10.00d-03
100             <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O PARÂMETRO LAMBDA PARA O CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.0d+00
ESCREVA, ABAIXO, CONDUTIVIDADE TÉRMICA OU DIFUSIVIDADE (GAMA_PHI) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
3.85d-10
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE LINEAR EM PHI (SP) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0d+00
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE INDEPENDENTE DE PHI (SC) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0d+00
100 200 350 500 700 <= ITERAÇÕES NO TEMPO QUE DESEJA ACOMPANHAR (5 PASSOS)
1.0d+00          <= VALOR INICIAL DE PHI (PHI_0)
0.00d+00        <= PHI_AMB_E (LESTE)
4.62d-06        <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA LESTE (HE)
0.00d+00        <= PHI_AMB_S (SUL)
4.62d-06        <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA SUL (HS)
0.00d+00        <= PHI_AMB_N (NORTE)
4.62d-06        <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA NORTE (HN)
50 25           <= POSIÇÃO VERTICAL (I) E HORIZONTAL (J) DO VOLUME DE CONTROLE ESCOLHIDO
  
```

Figura 4.14 – Dados relativos ao teste de consistência para a solução numérica, considerando o cilindro finito com volume e propriedades termo-físicas constantes.

Como a malha tem nove tipos de volumes de controle diferentes, na Figura 4.15 é apresentado um esquema desta malha, destacando os volumes de controle a nordeste e a sudeste. Estes volumes de controles estão simetricamente localizados na malha, e espera-se que eles apresentem os mesmos resultados, após a simulação do processo difusivo, quando as condições externas são as mesmas a norte, leste e sul, conforme os dados da Figura 4.14. Por isto, os teores de umidade ao longo do tempo para estes dois volumes de controle serão analisados.

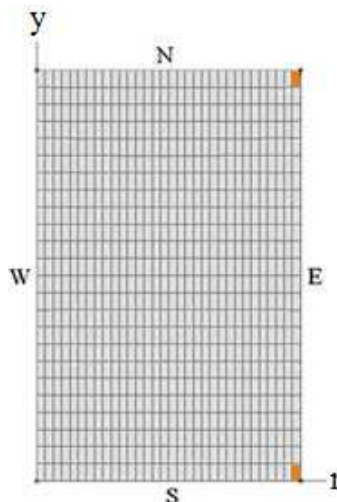


Figura 4.15 – Esquema de uma malha bidimensional que gera um cilindro finito, destacando os volumes de controle a nordeste e a sudeste.

Para se ter uma idéia sobre as cinéticas de secagem referentes aos dois volumes de controle, foram traçados os dois gráficos mostrados nas Figuras 4.16(a) (nordeste) e 4.16(b) (sudeste).

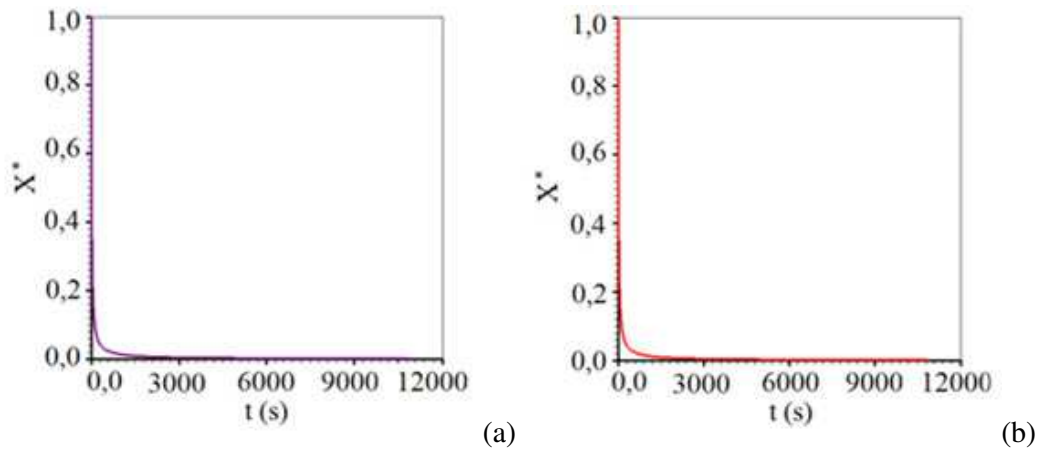


Figura 4.16 – Cinéticas de secagem para os volumes de controle:

(a) a nordeste, (b) a sudeste.

Para visualizar possíveis diferenças (ou semelhanças) entre tais gráficos, eles foram traçados em superposição, em um mesmo sistema de eixos, conforme é mostrado na Figura 4.17.

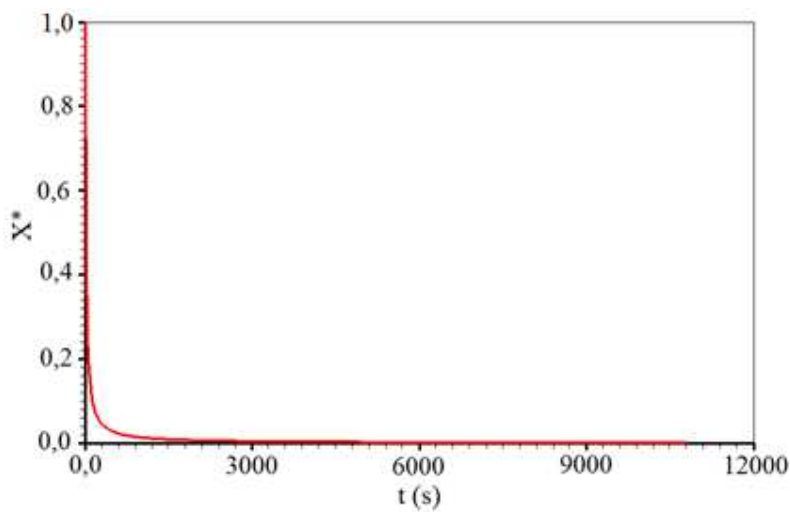


Figura 4.17 – Superposição das duas cinéticas: a nordeste e a sudeste.



Uma rápida inspeção na Figura 4.17 torna possível afirmar que as duas cinéticas são visualmente coincidentes. De acordo com este teste, embora não se possa afirmar que os resultados obtidos sejam corretos, pode-se assegurar que tais resultados são consistentes.

Para se ter uma idéia quantitativa sobre os valores de  $\Phi (\equiv X)$ , na Tabela 4.2 são mostrados alguns instantes de tempo, que foram escolhidos aleatoriamente, e os correspondentes resultados para os valores médios dos teores de umidade referentes aos dois volumes de controle analisados.

Tabela 4.2 – Valores de X em alguns instantes de tempo escolhidos aleatoriamente, para os volumes de controle a nordeste e a sudeste.

t (s)					
V. C.	102,6	302,4	502,2	808,2	1004,4
Nordeste	0,12841069	0,04496957	0,02688950	0,01650559	0,01307289
Sudeste	0,12841069	0,04496957	0,02688950	0,01650559	0,01307289

Tabela 4.2 – Continuação.

t (s)					
V. C.	3002,4	5000,4	8008,2	9001,8	10800,0
Nordeste	0,00396078	0,00218439	0,0012053	0,00102594	0,00078635
Sudeste	0,00396078	0,00218439	0,0012053	0,00102594	0,00078635

O tempo de execução para este teste foi de aproximadamente 26,5 segundos. Por outro lado, ao analisar os valores para o teor de umidade ao longo do tempo na Tabela 4.2, observa-se uma coincidência de resultados, dentro da tolerância estipulada para o Gauss-Seidel (tolerância de  $10^{-8}$ ).

Continuando com os testes de consistência, serão analisados os volumes de controle a noroeste e a sudoeste. Na Figura 4.18, um esquema da malha e os volumes de controle a noroeste e a sudoeste são destacados. É esperado que os mesmos apresentem resultados equivalentes para a cinética secagem, já que também estão simetricamente posicionados, e as condições externas a norte, sul e leste são iguais.

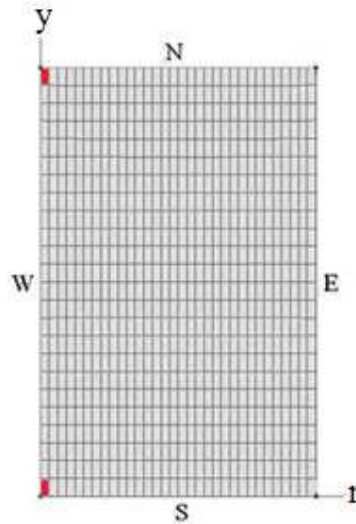


Figura 4.18 – Esquema de uma malha bidimensional que gera um cilindro finito, destacando os volumes de controle a noroeste e a sudoeste.

Na Figura 4.19 são apresentadas as cinéticas de secagem relativas aos volumes de controles a noroeste e a sudoeste.

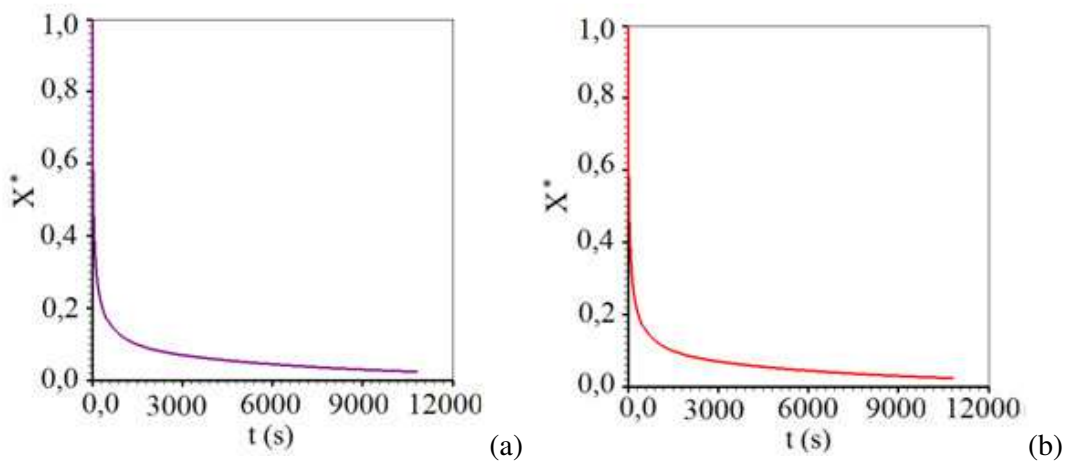


Figura 4.19 – Cinéticas de secagem para os volumes de controle:

(a) a noroeste, (b) a sudoeste.

A superposição das duas cinéticas de secagem é apresentada na Figura 4.20.

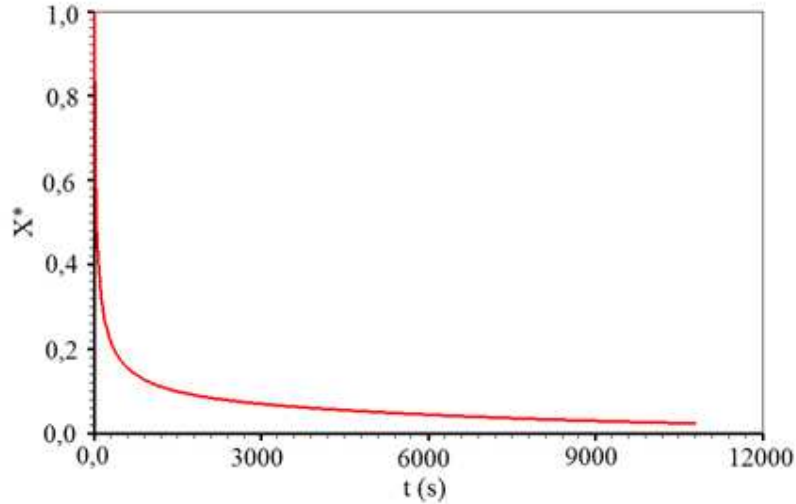


Figura 4.20 – Superposição das duas cinéticas para os volumes de controle: a noroeste e a sudoeste.

Uma inspeção da Figura 4.20 possibilita afirmar que os últimos resultados obtidos também são consistentes.

Na Tabela 4.3 são apresentados alguns teores de umidade adimensional para os dois volumes de controles mencionados, para alguns instantes de tempo.

Tabela 4.3 – Valor do teor de umidade local em alguns instantes de tempo, escolhidos aleatoriamente, para dois volumes de controle (VC): a noroeste e a sudoeste.

	t (s)				
V. C.	102,6	502,2	1004,4	5000,4	10800,0
noroeste	0,36028822	0,16928447	0,12033026	0,05057691	0,02290398
sudoeste	0,36028822	0,16928447	0,12033026	0,05057692	0,02290403

Uma inspeção na Tabela 4.3 possibilita observar uma concordância entre os resultados, dentro da tolerância imposta ao Gauss-Seidel.

Para finalizar os testes de consistência, foram analisados volumes de controles simetricamente posicionados, ao norte e ao sul. Os resultados obtidos, que são omitidas por economia de espaço, tiveram uma excelente concordância, a exemplo dos testes anteriores.

#### 4.4 – Solução numérica para o cilindro finito: simetria axial

Com o objetivo de diminuir o custo computacional, na solução da equação de difusão, será analisada, além da simetria radial, a influência da simetria axial no tempo de execução. Usando, então, apenas a metade superior da malha, conforme observado na Figura 3.9 do Capítulo 3, e impondo a condição de fluxo zero ao sul, espera-se reduzir o custo computacional, tanto relativo ao espaço de memória requerido para armazenamento de dados, quanto ao tempo de execução.

Para verificar a influência do uso de simetria em uma simulação será utilizado o mesmo cilindro da experiência realizada por Mulet et al. (2005), cujos os dados foram apresentados na Seção 4.1. Assim, tanto as dimensões do cilindro finito como os parâmetros termo-físicos usados nesta simulação foram os mesmos empregados no teste de consistência do código computacional, conforme é detalhado na Figura 4.14. Quando a simulação foi realizada sem a consideração da simetria axial, o tempo de execução foi em média, de 26,5 segundos. Nesta simulação foram utilizados 2000 passos de tempo e uma malha com 50 x 100 volumes de controles (Figura 4.14). Para considerar a simetria axial, a Figura 4.21 mostra o arquivo de dados para a simulação, em que se percebe 2000 passos de tempo e uma malha de 50 x 50 volumes de controle, que considera apenas a metade superior do cilindro, com a imposição de fluxo ao sul igual a zero.

```

CURCUMA_SIMETRIA_AXIAL - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
1.00d-08 <= TOLERÂNCIA PARA O GAUSS-SEIDEL
1000000 <= NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES PARA O GAUSS-SEIDEL
2000 <= NÚMERO DE PASSOS NO TEMPO
5.400d+00 <= INTERVALO DE TEMPO (DELTA_T)
ESCREVA, ABAIXO, O RAIÃO R DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
5.00d-03 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM X (RAIO DO CILINDRO)
50 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, A ALTURA L DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
5.00d-03 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
50 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O PARÂMETRO LAMBDA PARA O CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.0d+00 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, CONDUTIVIDADE TÉRMICA OU DIFUSIVIDADE (GAMA_PHI) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
3.85d-10 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE LINEAR EM PHI (SP) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0d+00 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE INDEPENDENTE DE PHI (SC) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0d+00 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
100 200 350 500 700 <= ITERAÇÕES NO TEMPO QUE DESEJA ACOMPANHAR (5 PASSOS)
1.0d+00 <= VALOR INICIAL DE PHI (PHI_0)
0.00d+00 <= PHI_AMB_E (LESTE)
4.62d-06 <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA LESTE (HE)
0.00d+00 <= PHI_AMB_S (SUL)
0.00d+00 <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA SUL (HS)
0.00d+00 <= PHI_AMB_N (NORTE)
4.62d-06 <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA NORTE (HN)
25 25 <= POSIÇÃO VERTICAL (I) E HORIZONTAL (J) DO VOLUME DE CONTROLE ESCOLHIDO
  
```

Figura 4.21 – Dados relativos à imposição de simetria axial para o cilindro finito, com volume e difusividade constantes.

Na Figura 4.21 pode-se observar que o comprimento do novo retângulo que gera o cilindro é a metade do comprimento original, e que o coeficiente de transferência convectiva de massa ao sul é igual a zero, significando que o fluxo de massa ao sul é igual zero (simetria axial). Para a metade da malha, o tempo de processamento foi de 13,6 segundos, ou seja, aproximadamente metade do tempo requerido para a malha inteira. A Figura 4.22(a) apresenta a cinética de secagem sem a consideração da simetria axial, enquanto que a Figura 4.22(b) apresenta a mesma cinética utilizando a simetria axial.

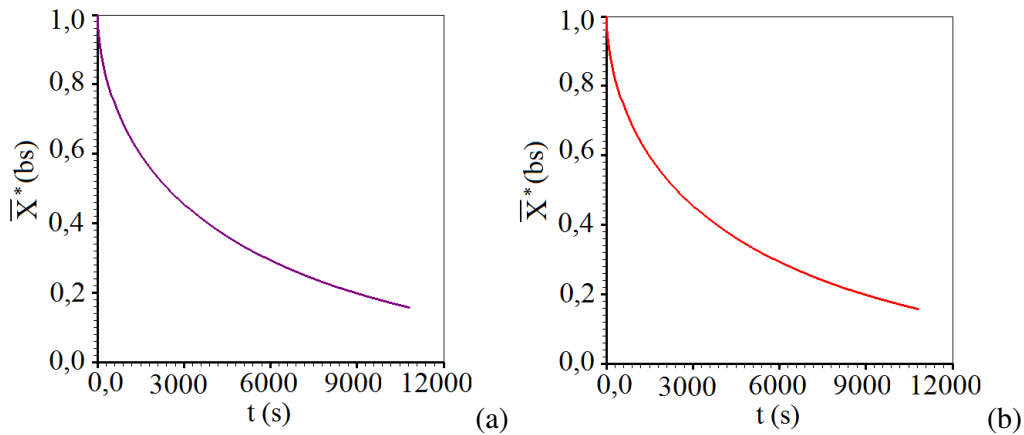


Figura 4.22 – Teor de umidade médio adimensional no cilindro finito: (a) sem simetria axial; (b) com simetria axial.

Na Figura 4.23 é feita a superposição das duas cinéticas, sem e com simetria axial.

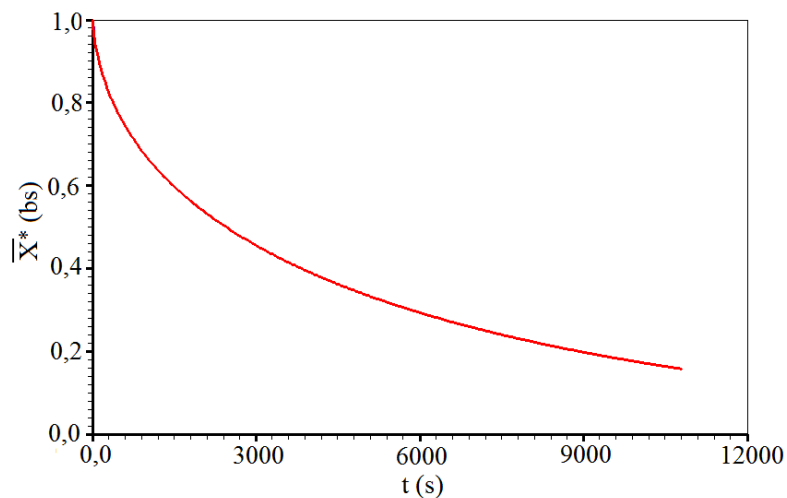


Figura 4.23 – Superposição das duas cinéticas no cilindro finito: sem simetria axial e com simetria axial.

Através da Figura 4.23 pode-se observar que não há diferenças perceptíveis, nas linhas que representam os gráficos, sendo possível afirmar que há uma perfeita concordância entre as duas cinéticas de secagem. Na Tabela 4.4 são apresentados alguns dos resultados obtidos para o teor de umidade médio adimensional, em tempos escolhidos aleatoriamente, com e sem a consideração de simetria axial.

Tabela 4.4 – Resultados para o teor de umidade médio adimensional calculado com e sem simetria axial, para tempos escolhidos aleatoriamente.

$\bar{X}^*$			
t (s)	Sem simetria axial	Com simetria axial	Discrepância percentual
5,40	0,99177427	0,99177427	0,0
10,80	0,98441512	0,98441512	0,0
16,20	0,97773560	0,97773560	0,0
21,60	0,97160039	0,97160039	0,0
27,00	0,96590962	0,96590962	0,0
32,40	0,96058817	0,96058817	0,0
37,80	0,95557852	0,95557852	0,0
...			...
5583,6	0,31007392	0,31007391	$3,2 \times 10^{-06}$
5589,0	0,30984256	0,30984255	$3,2 \times 10^{-06}$
5594,4	0,30961142	0,30961141	$3,2 \times 10^{-06}$
5599,8	0,30938050	0,30938049	$3,2 \times 10^{-06}$
5605,2	0,30914980	0,30914979	$3,2 \times 10^{-06}$
5610,6	0,30891932	0,30891931	$3,2 \times 10^{-06}$
5621,4	0,30868906	0,30868906	$0,0 \times 10^{-06}$
...			...
10767,6	0,15797331	0,15797326	$3,2 \times 10^{-05}$
10773,0	0,15786625	0,15786620	$3,2 \times 10^{-05}$
10778,4	0,15775926	0,15762530	$3,2 \times 10^{-05}$
10783,8	0,15765234	0,15765230	$2,5 \times 10^{-05}$
10789,2	0,15754551	0,15754546	$3,2 \times 10^{-05}$
10794,6	0,15743875	0,15743870	$3,2 \times 10^{-05}$
10800,0	0,15733206	0,15733202	$2,5 \times 10^{-05}$

Por meio de uma inspeção da Tabela 4.4, observa-se que os resultados são equivalentes, com uma pequena diferença da ordem de  $10^{-7}$  para  $\bar{X}^*$  nos tempos finais, o que é compatível com a tolerância imposta nas soluções dos sistemas de equações via Gauss-Seidel em conjunto com TDMA. Assim, mais uma vez, pode-se afirmar que existe uma consistência entre os resultados obtidos com o *software* desenvolvido.

**4.5 – Teste de coerência**

Foi realizado um teste para analisar a coerência de resultados, utilizando uma das metades simétricas da malha. Utilizando o recurso da simetria axial, como é mostrado na Figura 4.24 (fluxo zero ao sul), são destacados, no esquema da malha, os volumes de controles 1 (sudoeste), 2 (sudeste) e 3 (nordeste).

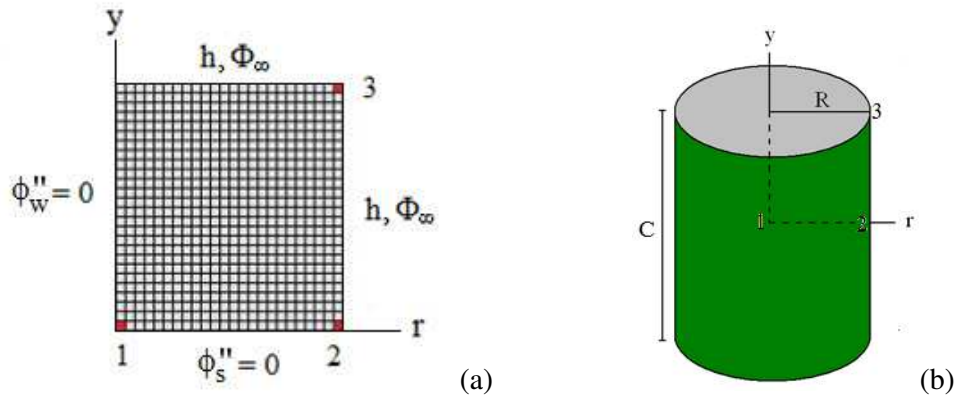


Figura 4.24 – (a) Metade simétrica da malha destacando os seguintes volumes de controle: 1 (sudoeste), 2 (sudeste) e 3 (nordeste); (b) Posição dos pontos 1, 2 e 3 no cilindro.

Na Figura 4.25 são mostradas as cinéticas de secagem para cada um dos três volumes de controle destacados.

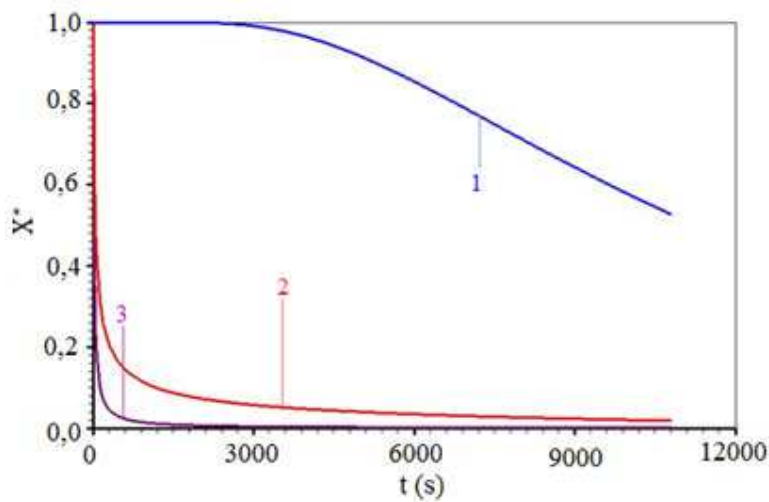


Figura 4.25 – Teor de umidade local em função do tempo nas regiões definidas por: 1 (sudoeste), 2 (sudeste) e 3 (nordeste).

Por meio de uma inspeção da Figura 4.25, nota-se que há uma coerência nos resultados: no volume de controle 1 a secagem ocorre lentamente, como é esperado, já que o mesmo se encontra na região central do cilindro. Por outro lado, o volume de controle 3 (nordeste) seca mais rapidamente porque o mesmo se encontra em contato com o meio externo tanto ao norte quanto a leste. Por último, o volume de controle 2 (sudeste), que está em contato com o meio externo só a leste, seca um pouco mais lentamente do que o volume de controle 3. Estes são os resultados esperados e, portanto, pode-se afirmar que os resultados são coerentes.

#### 4.6 – Validação com a solução analítica: parâmetros termo-físicos constantes

Apesar das conclusões positivas obtidas com relação à consistência e à coerência de resultados, não se pode afirmar até o momento, que tais resultados sejam corretos. Para tal, o *software* desenvolvido tem que ser validado, e inicialmente uma solução analítica será usada com esta finalidade.

A solução analítica da equação de difusão foi resolvida utilizando-se 16 termos em cada somatório. Os dados utilizados nesta validação são referentes à secagem de *Curcuma longa*, e são apresentados na Seção 4.1. Usando tais dados para simular a cinética de secagem, via solução analítica e numérica, e fazendo a superposição das mesmas, obtém-se os resultados mostrados na Figura 4.26.

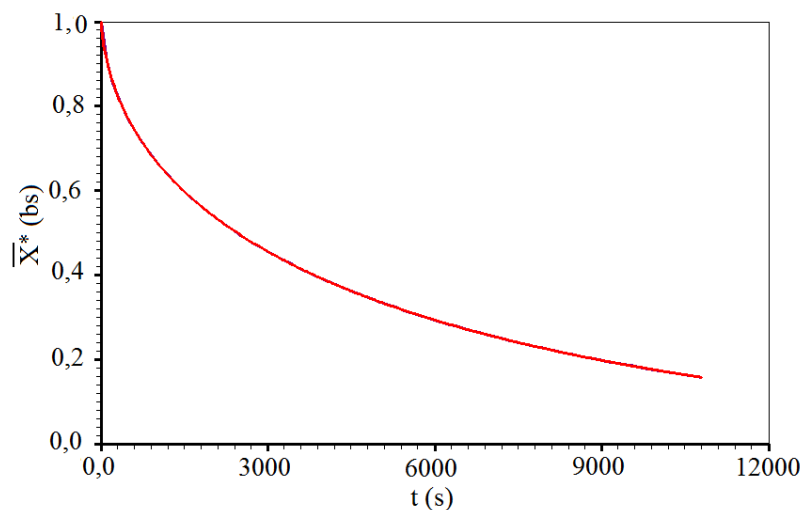


Figura 4.26 – Superposição das cinéticas de secagem das soluções analítica e numérica.



Uma rápida inspeção na Figura 4.26 torna possível verificar que, para os parâmetros termo-físicos constantes, há uma ótima concordância entre a solução numérica proposta e a solução analítica. Como a solução analítica proposta neste trabalho já havia sido validada com resultados da literatura, pode-se afirmar que a solução numérica também é válida para o tipo de problema enfocado.

#### 4.7 – Validação da solução numérica supondo volume e difusividade variáveis

Para continuar a validação do *software* desenvolvido, será utilizado um conjunto de dados em que a difusividade e as dimensões do cilindro são variáveis. Para tal, foram utilizados os dados experimentais de Silva, C. (2010), para a temperatura do ar de secagem igual a 29,9 °C. O arquivo de dados pode ser observado por meio da Figura 4.27. Vale salientar que tais dados experimentais são referentes à secagem de banana, consideradas por Silva, C. (2010) como cilindros infinitos, e a expressão para o raio é dada por:  $r = 0,0163(0,4981 + 0,5979\bar{X})$  em metros, onde  $\bar{X}$  é o teor de umidade médio.

A difusividade efetiva de massa também é variável, e é dada pela seguinte expressão  $D = 3.96 \times 10^{-07} \exp(1,69X)$  em  $m^2 h^{-1}$ , sendo X o teor de umidade local do produto.

```

BANANA_V_VAR_DEF_VAR_TESE - Bloco de notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
1.00D-08 <= TOLERÂNCIA PARA O GAUSS-SEIDEL
1000000 <= NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES PARA O GAUSS-SEIDEL
2000 <= NÚMERO DE PASSOS NO TEMPO
6.090d-02 <= INTERVALO DE TEMPO (DELTA_T)
ESCREVA, ABAIXO, O RAIOS R DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
0.01613 * (0.4981 + 0.5979 * xm)
100 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM X (RAIO DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, A ALTURA L DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
5.00d-03
3 <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O PARÂMETRO LAMBDA PARA O CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.0d+00
ESCREVA, ABAIXO, CONDUTIVIDADE TÉRMICA OU DIFUSIVIDADE (GAMA_PHI) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
3.96d-07 * exp(1.69 * x)
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE LINEAR EM PHI (SP) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0d+00
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE INDEPENDENTE DE PHI (SC) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0d+00
100 200 350 500 700 <= ITERAÇÕES NO TEMPO QUE DESEJA ACOMPANHAR (5 PASSOS)
1.0d+00 <= VALOR INICIAL DE PHI (PHI_0)
0.00d+00 <= PHI_AMB_E (LESTE)
3.83d-04 <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA LESTE (HE)
0.00d+00 <= PHI_AMB_S (SUL)
0.00d+00 <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA SUL (HS)
0.00d+00 <= PHI_AMB_N (NORTE)
0.00d+00 <= COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA CONVECTIVA NORTE (HN)
1 50 <= POSIÇÃO VERTICAL (I) E HORIZONTAL (J) DO VOLUME DE CONTROLE ESCOLHIDO

```

Figura 4.27 – Dados para a cinética de secagem considerando um cilindro com volume e difusividade variáveis, com condição de contorno convectiva.

Para validar o *software* criado no presente trabalho, foi utilizado o *software* “Infinite Cylinder”, desenvolvido na dissertação de mestrado de Silva, C. (2010). Note que, para obter resultados equivalentes ao do “Infinite Cylinder” com o *software* desenvolvido, basta impor a condição de fluxo zero ao norte e ao sul, na malha que gera o cilindro finito. Por outro lado, como não há fluxo axial, o número de volumes de controle ao longo do eixo  $y$  é irrelevante. Nesta validação foram considerados apenas três volumes de controle ao longo de um comprimento arbitrário  $C = 0,005$  m, como pode ser observado na Figura 4.27.

Na Tabela 4.5 tem-se alguns resultados para o teor de umidade médio, em tempos escolhidos aleatoriamente.

Tabela 4.5 – Valor do teor de umidade médio em alguns instantes de tempo.

$\bar{X}^*$		
Tempo (h)	Finite Cylinder	Infinite Cylinder
5,05470	0,8582707673	0,8582707671
80,02260	0,1558039756	0,1558039754
100,0587	0,0942549272	0,0942549271
115,0401	0,0639609078	0,0639609077
120,0339	0,0561054025	0,0561054024
121,8000	0,0535546518	0,0535546518

Observa-se, mais uma vez, uma ótima concordância ( $10^{-9}$ ) entre os dois *softwares*.

O teste para a validação de toda a cinética de secagem também utiliza os dados de Silva, C. (2010) para bananas. A Figura 4.28 mostra os seguintes resultados: (a) *software* desenvolvido (Finite Cylinder), (b) Infinite Cylinder.

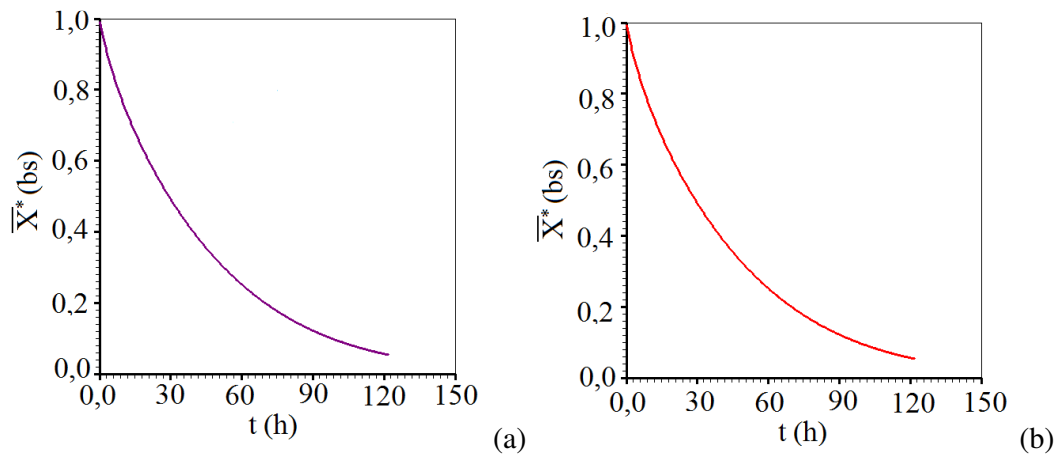


Figura 4.28 – Gráfico da cinética de secagem de bananas utilizando os *softwares*: a) Finite Cylinder, b) Infinite Cylinder.

A Figura 4.29 mostra a superposição das duas cinéticas.

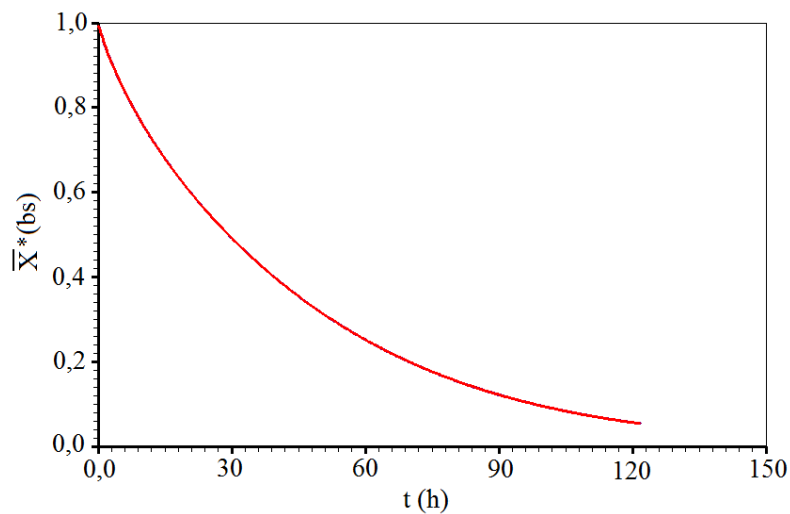


Figura 4.29 – Gráfico da superposição das duas cinéticas utilizando os dois *softwares*.

Fazendo uma inspeção na Figura 4.29, observa-se que houve uma ótima concordância entre os resultados obtidos através dos dois *softwares*.

Para analisar os valores da difusividade variável, alguns volumes de controle foram escolhidos ao longo do raio. Para identificar os volumes de controle na malha, o seu esboço é desenhado e mostrado na Figura 4.30. Na Tabela 4.6 são apresentados alguns dos resultados obtidos.

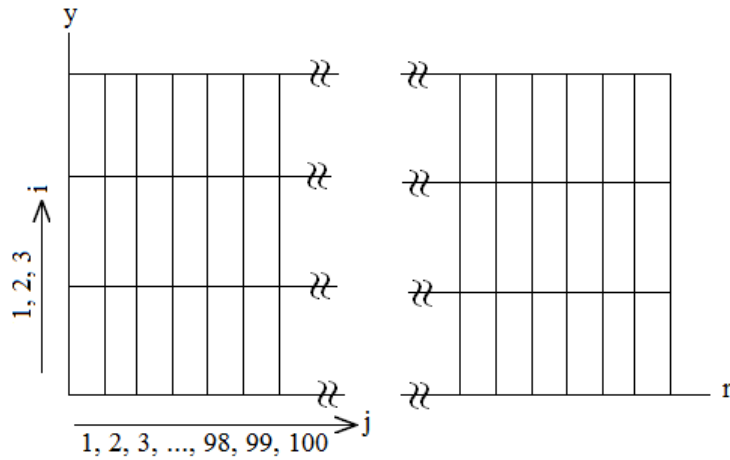


Figura 4.30 – Esboço da malha para a simulação de um cilindro infinito.

Tabela 4.6 – Difusividades nas interfaces leste e oeste de cada volume de controle para 29,9 °C em  $t = 121,7391h$ ;  $D_{ef} \times 10^7$  ( $m^2 h^{-1}$ ).

Volume de Controle (i, j)	Interface leste		Interface oeste	
	Infinite Cylinder	Finite Cylinder	Infinite Cylinder	Finite Cylinder
(1,1)	4,66603	4,66603	4,66610	4,66610
(1,2)	4,66580	4,66580	4,66603	4,66603
(1,3)	4,66541	4,66541	4,66580	4,66580
(1,4)	4,66488	4,66488	4,66541	4,66541
(1,5)	4,66419	4,66419	4,66488	4,66488
(1,6)	4,66335	4,66335	4,66419	4,66419
(1,7)	4,66235	4,66235	4,66335	4,66335
...				
(1,47)	4,50518	4,50518	4,51162	4,51162
(1,48)	4,49863	4,49863	4,50518	4,50518
(1,49)	4,49198	4,49198	4,49863	4,49863
(1,50)	4,48522	4,48522	4,49198	4,49198
(1,51)	4,47835	4,47835	4,48522	4,48522
(1,52)	4,47139	4,47139	4,47835	4,47835
(1,53)	4,46433	4,46433	4,47139	4,47139
...				
(1,94)	4,12020	4,12020	4,12911	4,12911
(1,95)	4,11131	4,11131	4,12020	4,12020
(1,96)	4,10244	4,10244	4,11131	4,11131
(1,97)	4,09359	4,09359	4,10243	4,10244
(1,98)	4,08476	4,08476	4,09359	4,09359
(1,99)	4,07596	4,07596	4,08476	4,08476
(1,100)	4,07157	4,07157	4,07596	4,07596

Ao analisar a Tabela 4.6, percebe-se uma perfeita concordância entre os resultados apresentados pelos dois *softwares*. Assim, o produto “Finite Cylinder”, desenvolvido neste trabalho, é considerado válido para geometrias cilíndricas com simetria radial.

#### 4.8 – Secagem de banana em pedaços: Solução analítica

Inicialmente foram analisadas as secagens das bananas cortadas em pedaços cilíndricos e, para isto, foi utilizada a equação de difusão em coordenadas cilíndricas, com a condição de contorno do terceiro tipo. Os pedaços de bananas foram considerados como uns cilindros finitos com volume e difusividade constantes. As hipóteses utilizadas foram listadas no Capítulo 3, na Seção 3.1, para a solução analítica da equação de difusão.

A partir da metodologia descrita no Capítulo 3, as informações sobre as condições da secagem com ar quente estão disponíveis na Tabela 4.7, para todas as temperaturas do ar de secagem estudadas.

Tabelas 4.7 – Informações sobre as condições do ar ambiente (temperatura e umidade relativa), e do ar de secagem (velocidade, temperatura e a umidade relativa).

Ar ambiente		Ar de secagem		
$\bar{T}_a$ (°C)	$\bar{UR}$ (%)	v (m/s)	T (°C)	$\bar{UR}$ (%)
28,8	57,0	1,50	40,0	31,1
29,0	53,6	1,50	50,0	18,3
28,1	47,4	1,50	60,0	11,1
29,3	44,5	1,50	70,0	7,0

As informações gerais sobre secagem dos pedaços cilíndricos de bananas, tais como o comprimento e o diâmetro, teor de umidade de equilíbrio, inicial e final e ainda a massa seca e ainda o tempo de secagem encontram-se nas Tabelas de 4.8 a 4.11, para cada temperatura do ar de secagem estudada.

Tabela 4.8 – Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C.

Banana						
C (mm)	r (mm)	$\bar{X}_{eq}$ (bs)	$\bar{X}_i$ (bs)	$\bar{X}_f$ (bs)	$m_s$ (g)	t (min)
10,00	15,25	0,1325	3,3529	0,2116	16,562	1305
16,70	15,65	0,1325	3,1249	0,2117	23,076	2355
20,80	16,44	0,1325	3,2212	0,2032	27,535	3435
25,50	17,00	0,1325	3,1537	0,2048	34,477	3915

Tabela 4.9 – Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C.

Banana						
C (mm)	r (mm)	$\bar{X}_{eq}$ (bs)	$\bar{X}_i$ (bs)	$\bar{X}_f$ (bs)	$m_s$ (g)	t (min)
10,60	14,42	0,1160	3,0166	0,2040	17,222	1005
17,49	13,41	0,1160	3,0738	0,2278	25,553	2085
21,00	13,86	0,1160	3,0180	0,2240	25,522	2325
28,93	13,24	0,1160	3,0487	0,2172	28,169	3045

Tabela 4.10 – Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 60,0°C.

Banana						
C (mm)	r (mm)	$\bar{X}_{eq}$ (bs)	$\bar{X}_i$ (bs)	$\bar{X}_f$ (bs)	$m_s$ (g)	t (min)
10,35	15,58	0,0972	3,1311	0,2118	19,668	730
17,45	15,66	0,0972	3,2222	0,2218	31,280	1370
21,69	16,56	0,0972	3,1797	0,2270	36,496	1670
27,34	16,57	0,0972	3,1886	0,2168	44,989	2150

Tabela 4.11– Informações sobre a banana para a temperatura do ar de secagem de 70,0°C.

Banana						
C (mm)	r (mm)	$\bar{X}_{eq}$ (bs)	$\bar{X}_i$ (bs)	$\bar{X}_f$ (bs)	$m_s$ (g)	t (min)
11,98	12,42	0,0834	2,8279	0,2024	18,599	540
16,73	12,28	0,0834	2,9215	0,2150	28,023	835
21,71	13,64	0,0834	2,8342	0,2175	35,178	1105
27,30	13,13	0,0834	2,9312	0,2258	42,467	1285

#### 4.9 – Otimização usando a solução analítica

A metodologia de otimização descrita no Capítulo 3 na Seção 3.4 para o cilindro finito foi incorporada ao software Convective Adsorption – Desorption 2.5, que já dispunha de outras geometrias como cilindro infinito, parede infinita e paralelepípedo. Tal software será utilizado para obter os resultados a seguir.

Ajustando a Equação (3.9) aos dados experimentais, um conjunto de resultados é obtido para os vários números de Biot para transferência de massa. Assim, pode-se estabelecer uma relação entre o qui-quadrado ( $\chi^2$ ) do ajuste e o correspondente número de Biot para transferência de massa ( $Bi$ ), especificado de 0 até 200. Após uma inspeção nestes resultados, pode-se encontrar a região em que o menor qui-quadrado está contido, e o correspondente número de Biot. A relação entre o qui-quadrado e o número de Biot para transferência de massa nas proximidades do ponto ótimo pode ser observada, para cada temperatura de secagem, nas Figuras de 4.31 a 4.34.

Inicialmente, a relação mencionada foi apresentada para a temperatura de 40,0 °C e todos os tamanhos estudados, na Figura 4.31.

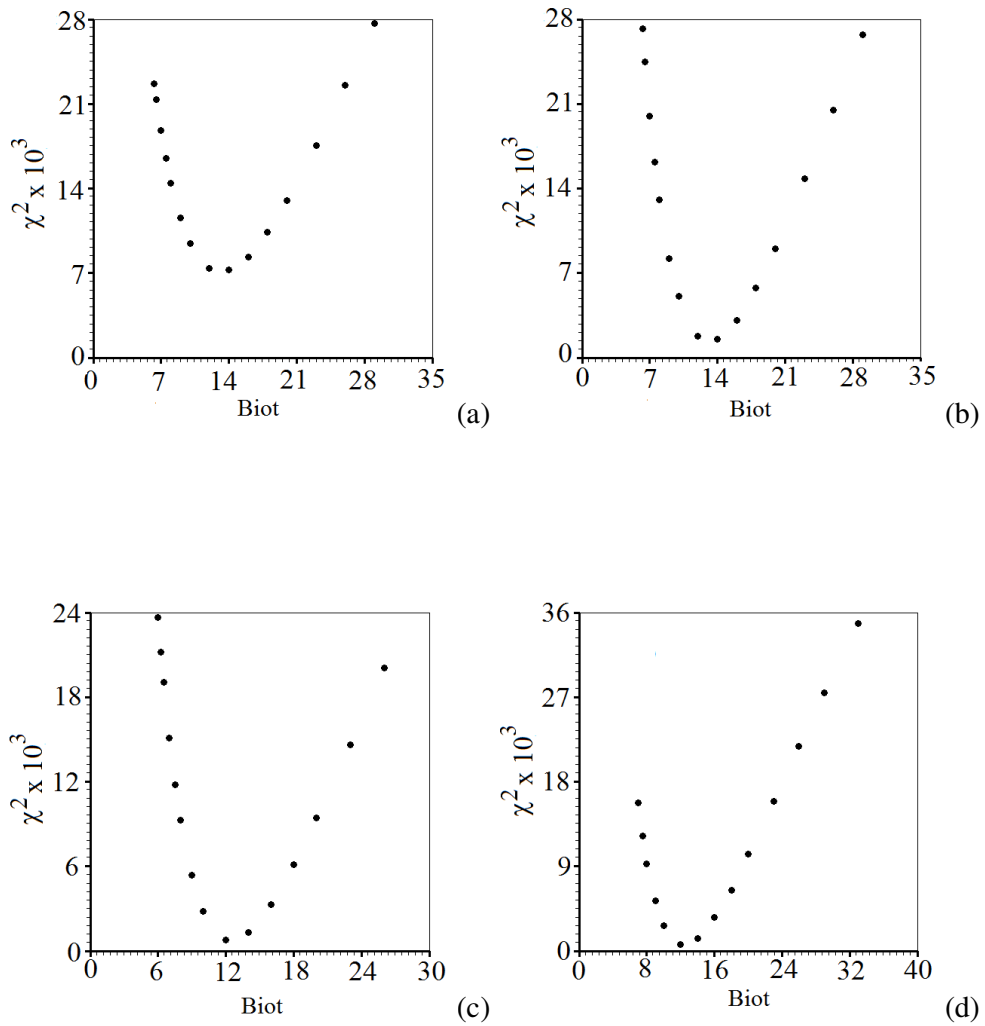


Figura 4.31 – Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para os comprimentos de: (a) C = 10,00 mm; (b) C = 16,70 mm; (c) C = 20,80 mm e (d) C = 25,50mm.

Na Figura 4.32 foi apresentado o qui-quadrado versus o número de Biot nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C.



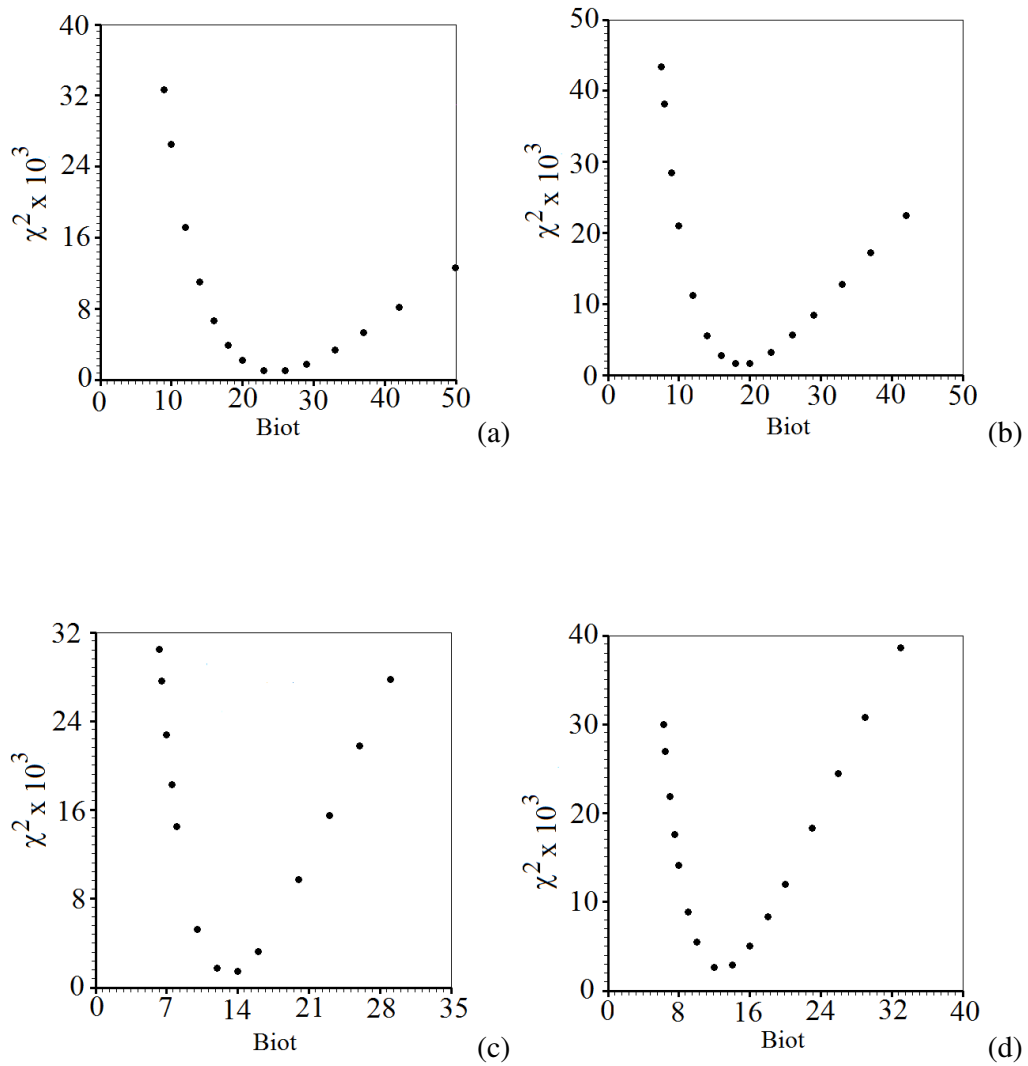


Figura 4.32 – Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para os comprimentos de: (a) C = 10,60 mm; (b) C = 17,49 mm; (c) C = 21,00 mm e (d) C = 28,93mm.

Na Figura 4.33 é apresentado o qui-quadrado versus o número de Biot nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C.

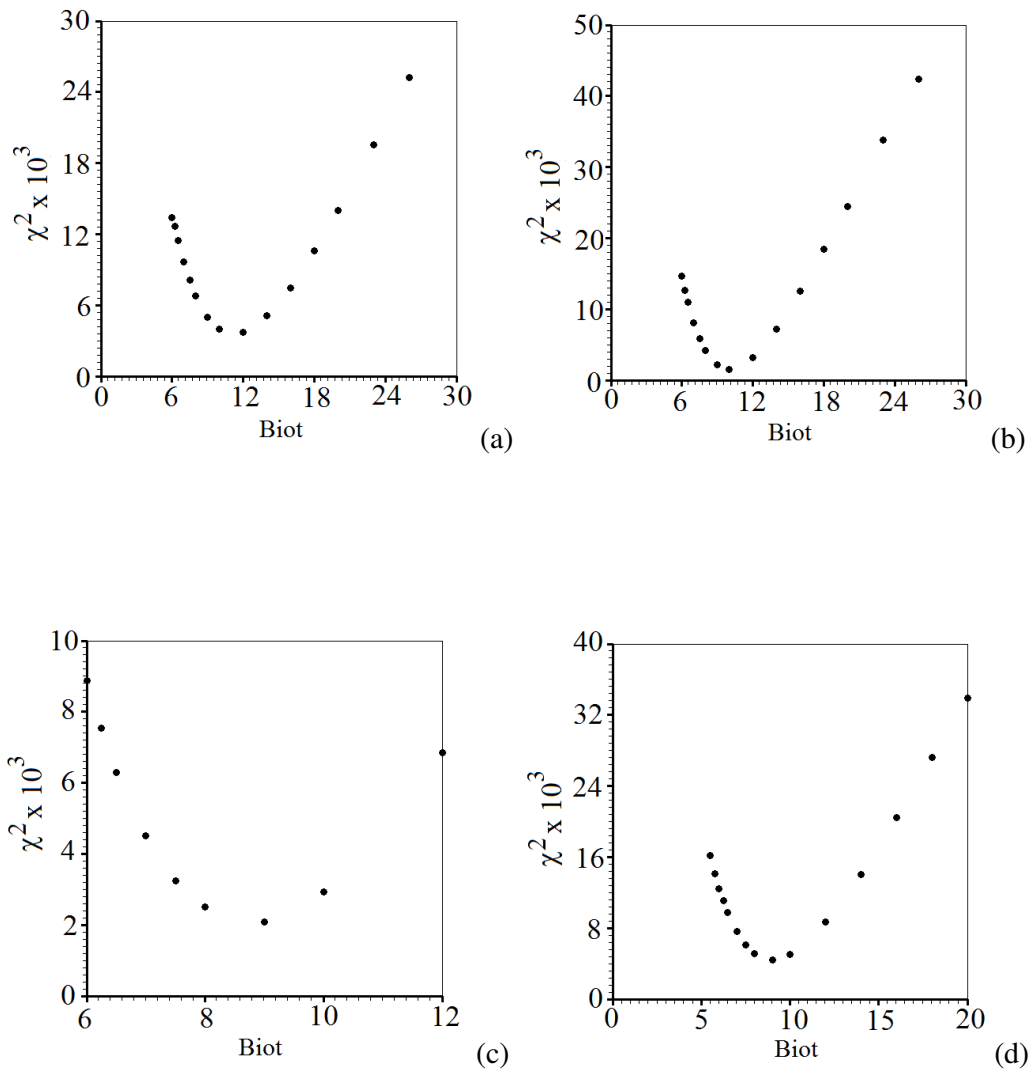


Figura 4.33 – Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para os comprimentos de: (a)  $C = 10,35$  mm; (b)  $C = 17,45$  mm; (c)  $C = 21,69$  mm e (d)  $C = 27,34$ mm.

Na Figura 4.34 é apresentado o qui-quadrado versus o número de Biot nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C.

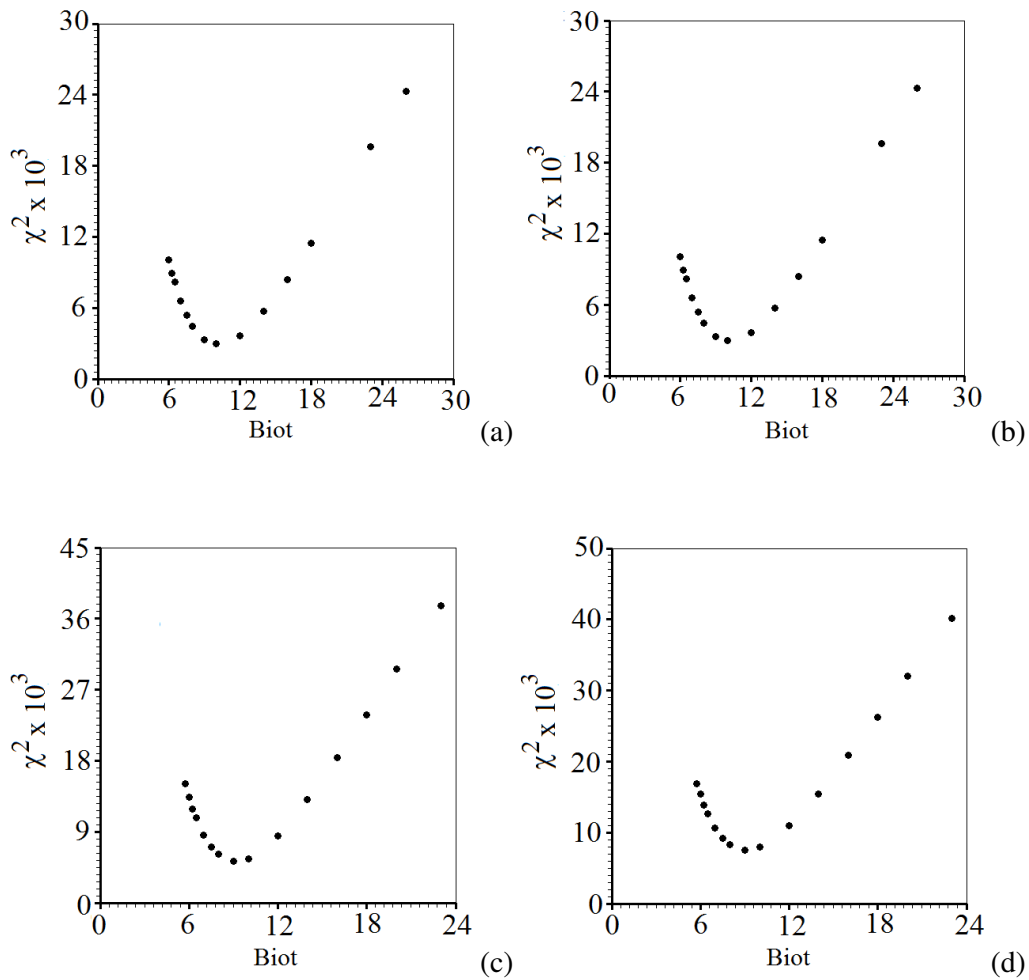


Figura 4.34 – Qui-quadrado nas proximidades do ponto ótimo, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para os comprimentos de: (a)  $C = 11,98$  mm; (b)  $C = 16,73$  mm; (c)  $C = 21,71$  mm e (d)  $C = 27,30$  mm.

O número de Biot para a transferência de massa referente ao menor qui-quadrado correspondente a uma determinada difusividade efetiva e um coeficiente de transferência convectiva de massa. Tais parâmetros, bem como o número de dados experimentais ( $N_i$ ), para todas as temperaturas do ar de secagem estudadas, juntamente com as dimensões dos pedaços e indicadores estatísticos são apresentados nas Tabelas de 4.12 a 4.15.

Tabela 4.12 – Informações sobre os resultados para a otimização, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, usando a solução analítica.

C (mm)	$D_{ef} \times 10^8$ ( $m^2 \text{ min}^{-1}$ )	$h \times 10^5$ ( $m \text{ min}^{-1}$ )	$R^2$	$\chi^2 \times 10^3$	Nº de Biot	$N_i$
10,00	2,4788	2,1944	0,999050	7,143963	13,50	87
16,70	2,5530	2,1203	0,999721	2,209653	13,00	103
20,80	2,5343	1,9269	0,999886	0,743178	12,50	111
25,50	2,7587	1,9473	0,999916	0,697241	12,00	113

Tabela 4.13 – Informações sobre os resultados para a otimização, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para a solução analítica.

C (mm)	$D_{ef} \times 10^8$ ( $m^2 \text{ min}^{-1}$ )	$h \times 10^5$ ( $m \text{ min}^{-1}$ )	$R^2$	$\chi^2 \times 10^3$	Nº de Biot	$N_i$
10,60	2,8304	4,8090	0,999838	0,913062	24,50	76
17,49	2,7151	3,8469	0,999798	1,466130	19,00	94
21,00	3,1189	3,0379	0,999827	1,290713	13,50	95
28,93	3,0871	3,0311	0,999702	2,365764	13,00	98

Tabela 4.14 – Informações sobre os resultados para a otimização, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para a solução analítica.

C (mm)	$D_{ef} \times 10^8$ ( $m^2 \text{ min}^{-1}$ )	$h \times 10^5$ ( $m \text{ min}^{-1}$ )	$R^2$	$\chi^2 \times 10^3$	Nº de Biot	$N_i$
10,35	5,0574	3,7330	0,999420	3,627258	11,50	87
17,45	5,5482	3,5429	0,999802	1,433993	10,00	107
21,69	6,1949	3,1797	0,999792	1,692222	8,50	113
27,34	6,3529	3,2589	0,999604	3,355995	8,50	116

Tabela 4.15 – Informações sobre os resultados para a otimização, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para a solução analítica.

C (mm)	$D_{ef} \times 10^8$ ( $m^2 \text{ min}^{-1}$ )	$h \times 10^5$ ( $m \text{ min}^{-1}$ )	$R^2$	$\chi^2 \times 10^3$	Nº de Biot	$N_i$
11,98	7,7553	6,2442	0,999457	2,481427	10,00	80
16,73	6,7889	4,8373	0,999618	2,317469	8,75	95
21,71	7,3250	4,9675	0,999200	5,232745	9,25	100
27,30	7,0230	4,9477	0,998868	7,514795	9,25	103

Com os parâmetros termo-físicos determinados, a Equação (3.5) é usada para apresentar as simulações da cinética de secagem, juntamente com os dados experimentais. Tais simulações são apresentadas nas Figuras 4.35, 4.37, 4.39 e 4.41,

para todas as temperaturas do ar de secagem estudadas. Nos gráficos, a linha contínua representa a simulação e os pontos representam os dados experimentais.

#### 4.9.1 – Cinéticas de secagem a 40,0 °C

Na Figura 4.35, referente à temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, podem ser observadas as simulações das cinéticas, para os quatros comprimentos  $C$  dos pedaços cilíndricos estudados.

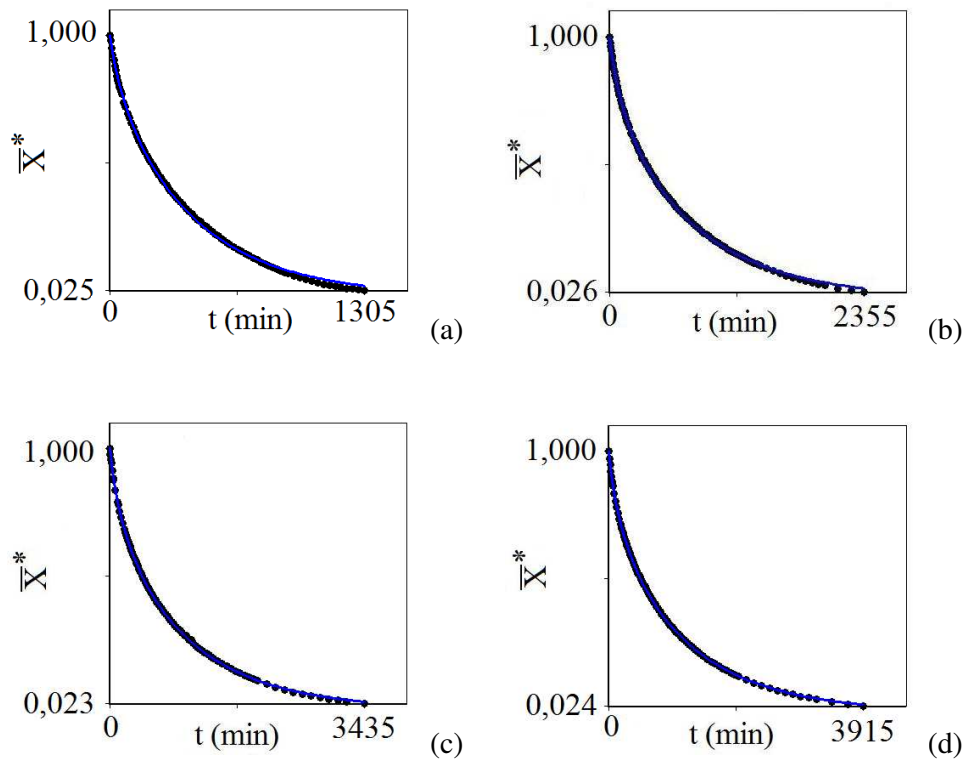


Figura 4.35 – Gráficos das simulações das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, usando a solução analítica para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para os comprimentos de: (a)  $C = 10,00$  mm, (b)  $C = 16,70$  mm, (c)  $C = 20,80$  mm, (d)  $C = 25,50$  mm.

A Figura 4.36 mostra um gráfico com todas as cinética de secagem de bananas em pedaços, para os quatros tamanhos estudados, em um mesmo eixo, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C.

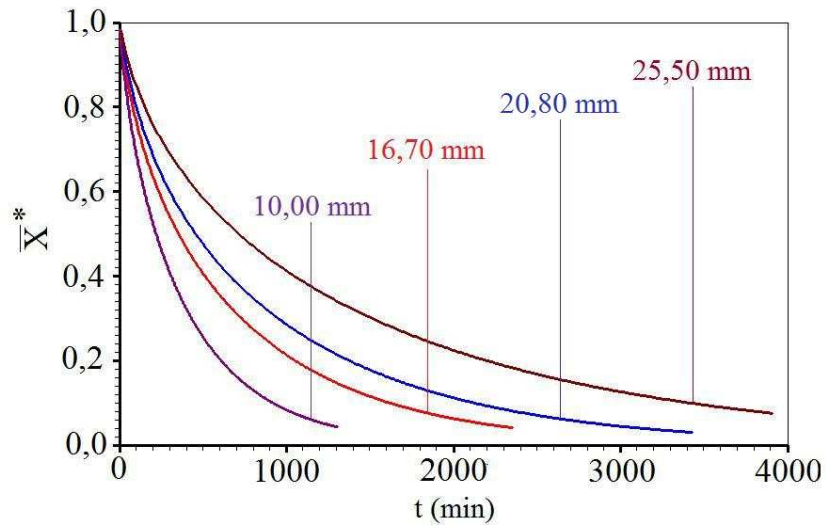


Figura 4.36 – Gráfico da simulação das cinéticas de secagem usando a solução analítica, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, com os comprimentos estudados.

Fazendo uma inspeção na Tabela 4.12 e nos gráficos da Figuras 4.35 e 4.36, pode-se concluir que os indicadores estatísticos são bons. Observa-se, ainda, que a secagem mais rápida ocorre com os pedaços de bananas de menor comprimento (10,00 mm) e a mais lenta ocorre com os pedaços de bananas de maior comprimento (25,50 mm), como era esperado.

#### 4.9.2 – Cinética de secagem 50,0 °C

Na Figura 4.37, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, podem ser observadas as simulações das cinéticas usando a solução analítica para os diversos comprimentos  $C$  estudados.

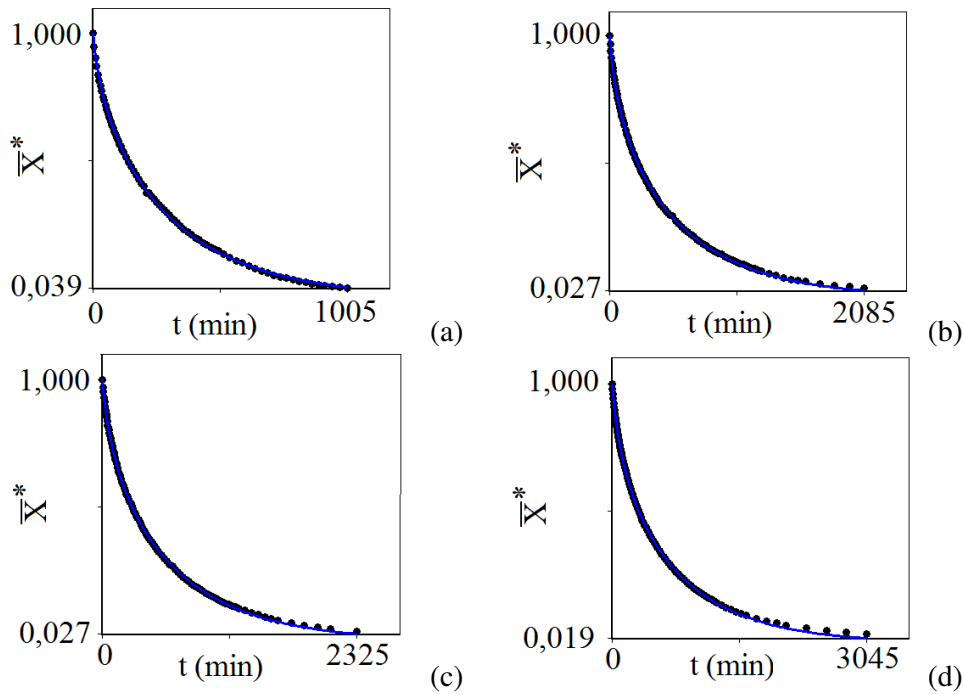


Figura 4.37 – Gráficos das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, usando a solução analítica para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para os comprimentos: (a) C = 10,60 mm, (b) C = 17,49 mm, (c) C = 21,00 mm, (d) C = 28,93 mm.

A Figura 4.38 mostra um gráfico com todas as cinéticas de secagem das bananas em pedaços, para os quatro tamanhos estudados em um mesmo sistema de eixos, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C.

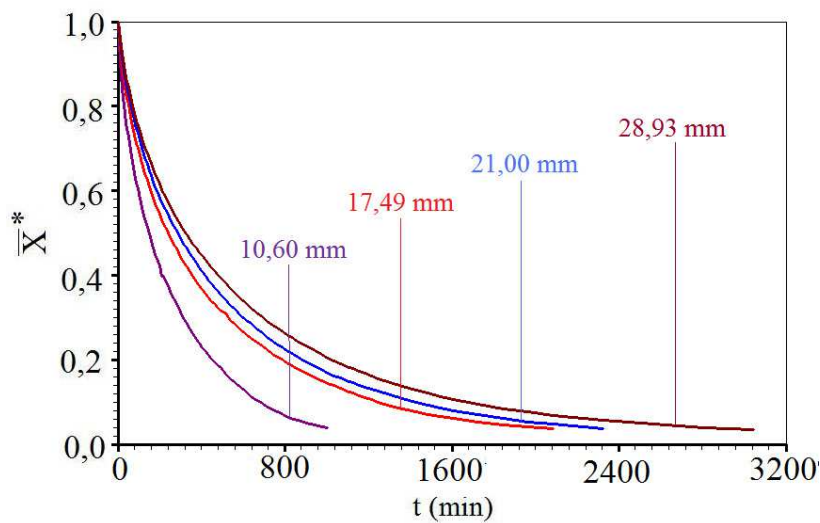


Figura 4.38 – Gráfico da simulação das cinéticas de secagem para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para os comprimentos estudados.

Observa-se que os indicadores estatísticos da Tabela 4.13, mais uma vez são bons, o que pode ser confirmado por uma inspeção visual da Figura 4.37. Na Figura 4.38 pode-se observar que a secagem mais rápida ocorre com os pedaços de bananas de 10,60 mm de comprimento, e a mais lenta ocorreu com os pedaços de bananas de 28,93 mm, como era esperado.

#### 4.9.3 – Cinética de secagem a 60,0 °C

Na Figura 4.39, para a temperatura do ar de secagem de 60 °C, podem ser observadas as cinéticas para os diversos comprimentos estudados.

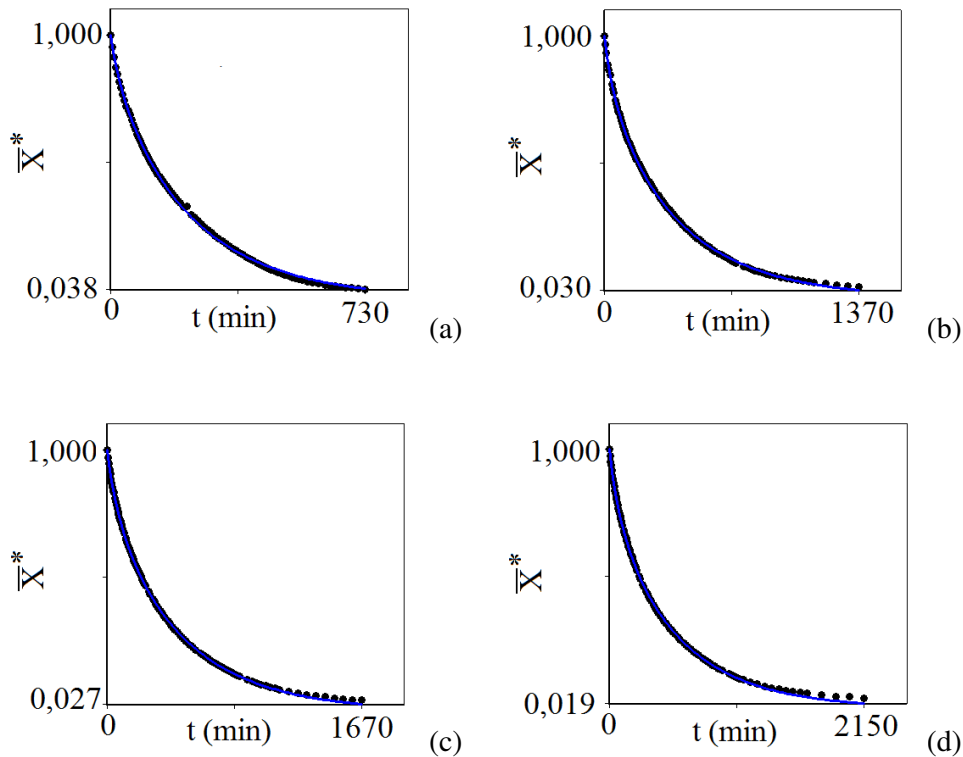


Figura 4.39 – Gráficos das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, usando a solução analítica para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para os comprimentos de: (a)  $C = 10,35$  mm, (b)  $C = 17,45$  mm, (c)  $C = 21,69$  mm, (d)  $C = 27,34$  mm.



Na Figura 4.40, foi plotado um gráfico com todas as curvas das cinéticas de secagem das bananas em pedaços, em um mesmo sistema de eixos.

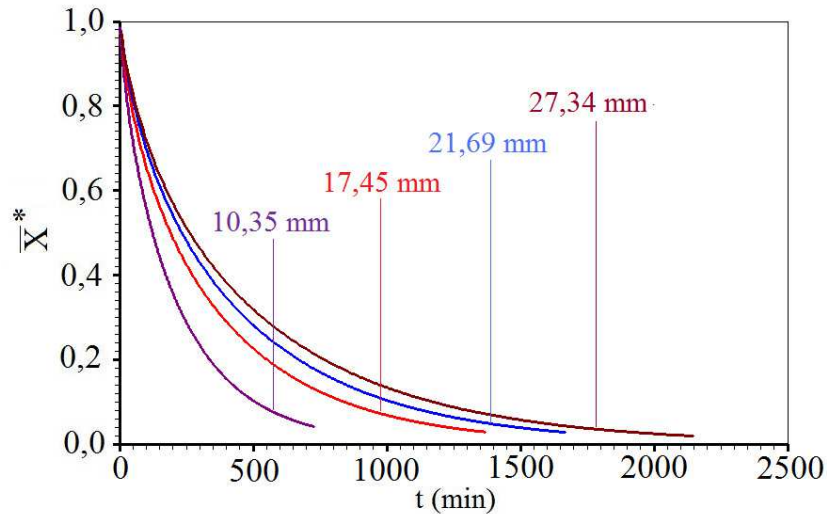


Figura 4.40 – Gráfico da simulação das cinéticas de secagem para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para os comprimentos estudados.

Conforme a Tabela 4.14, observa-se que os indicadores estatísticos, novamente, podem ser considerados bons. Nas Figuras 4.39 e 4.40 observa-se que a secagem mais rápida ocorre com os pedaços de banana de 10,35 mm e a mais lenta ocorre com os pedaços de bananas de 27,34 mm.

#### 4.9.4 – Cinética de secagem a 70,0 °C

Na Figura 4.41, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, podem ser observadas as cinéticas para os diversos comprimentos estudados.

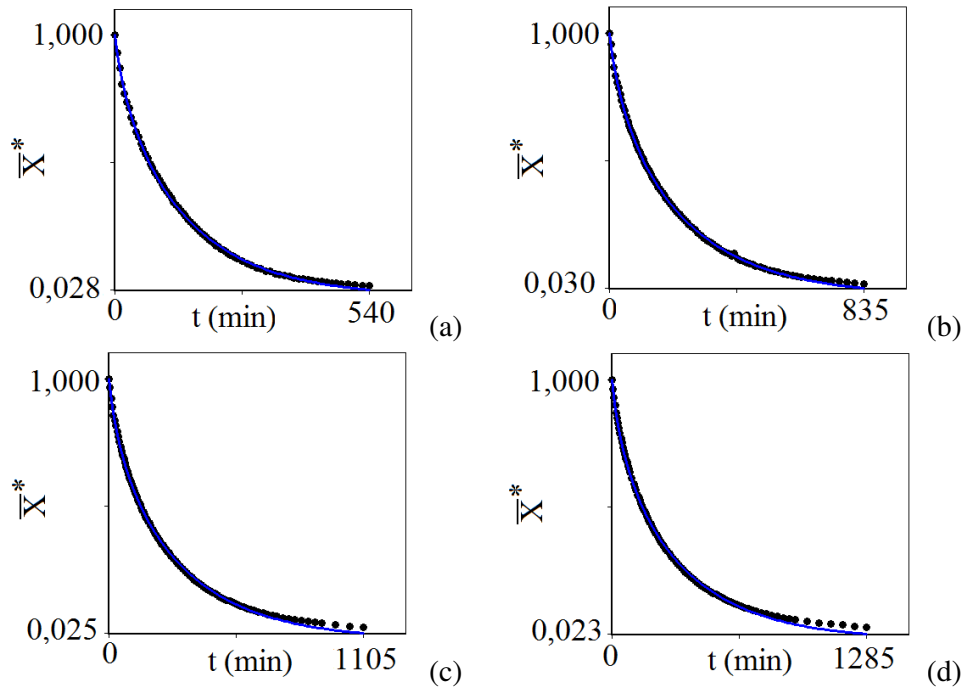


Figura 4.41 – Gráficos das cinéticas de secagem de bananas em pedaços usando a solução analítica, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para os comprimentos de: (a) C = 11,98 mm, (b) C = 16,73 mm, (c) C = 21,71 mm, (d) C = 27,30 mm.

Na Figura 4.42 foi plotado um gráfico com todas as curvas das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, em um mesmo sistema de eixos.

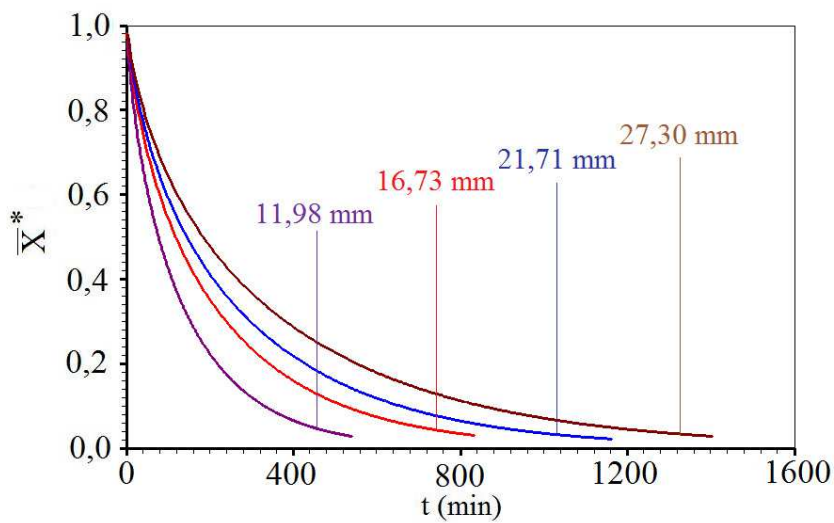


Figura 4.42 – Gráfico da simulação das cinéticas de secagem para a temperatura de 70,0 °C, para os comprimentos estudados.

Na Tabela 4.15, observa-se, que os indicadores estatísticos podem ser considerados bons. Nas Figuras 4.41 e 4.42 observa-se que a secagem mais rápida ocorre com os pedaços de bananas de 11,98 mm, e a mais lenta ocorre com os pedaços de bananas de 27,30 mm, como era esperado.

#### **4.9.5 – Discussão sobre a descrição da cinética de secagem usando a solução analítica**

O teor de umidade de umidade na forma adimensional (razão de umidade) foi usado neste trabalho, pois isto possibilita uma melhor interpretação da cinética de secagem, já que várias cinéticas estão sendo analisadas, com teores de umidade inicial diferentes, e são apresentadas em um mesmo sistema de eixos.

Nos gráficos das cinéticas de secagem, para os quatros comprimentos, e em todas as temperaturas do ar de secagem estudadas, foi observado que, em todos os casos, a secagem ocorre mais rapidamente para os pedaços de bananas de menor comprimento e mais lentamente para os pedaços de bananas de maior comprimento. Pode-se, então, afirmar que o tempo de secagem está relacionado com o comprimento dos pedaços de bananas, ou seja, quanto maior o comprimento do cilindro, mais lenta é a secagem, para uma mesma temperatura. Dessa forma, mais à frente, será proposto uma expressão matemática relacionando o tempo  $t$  de secagem com o comprimento  $C$  dos pedaços cilíndricos. Foi observado que os indicadores estatísticos são bons, em todos os casos. Observou-se, ainda, que quanto maior a temperatura, a secagem ocorreu mais rapidamente, para um dado comprimento do cilindro finito.

Pode-se afirmar, do que foi analisado, que a solução analítica da equação de difusão para o cilindro finito com condição de contorno convectiva descreve satisfatoriamente o processo de secagem. Por outro lado, uma inspeção nas Tabelas de 4.12 a 4.15 possibilita concluir que os números de Biot são significativamente maiores que os obtidos na literatura (QUEIROZ e NEBRA, 2001; FARIAS, R. 2011). Uma explicação para este fato está relacionada com a velocidade do ar de secagem. Farias, R. (2011) secou as bananas em estufas ( $v$  tendendo a zero) e Queiroz e Nebra (2001) usou um secador convectivo com a velocidade do ar entre 0,3 e 0,4  $\text{m s}^{-1}$ . Neste trabalho foi usado ar de secagem com uma velocidade de 1,5  $\text{m s}^{-1}$ .

#### 4.10 – Distribuição do teor de umidade no interior do cilindro

Uma vez que os parâmetros termo-físicos tenham sido determinados usando a Equação (3.9) e o algoritmo de otimização apresentado na Seção 3.4, a Equação (3.5) pode ser usada para determinar a distribuição do teor de umidade como função do raio  $r$ , entre 0 e  $R$ , para um dado instante de tempo. Os gráficos de distribuição serão apresentados no (1) contorno circular superior; (2) no círculo a  $C/4$  da metade do cilindro; (3) no círculo na metade do cilindro, como indicado na Figura 4.43.

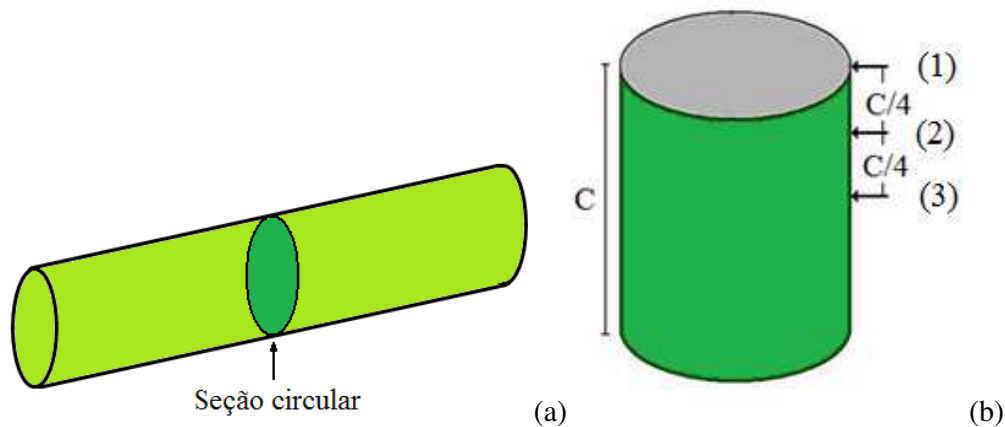


Figura 4.43 – (a) Cilindro finito destacando uma seção circular onde será analisada a distribuição de umidade; (b) Posições em que a distribuição de umidade será analisada: 1) contorno circular superior; 2) seção circular a  $C/4$  da metade do cilindro; 3) seção circular na metade do cilindro.

##### 4.10.1 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 40 °C

As informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 10,00 mm e raio de 15,25 mm, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, no tempo específico de 261 min, podem ser observadas na Figura 4.44, dada a seguir.

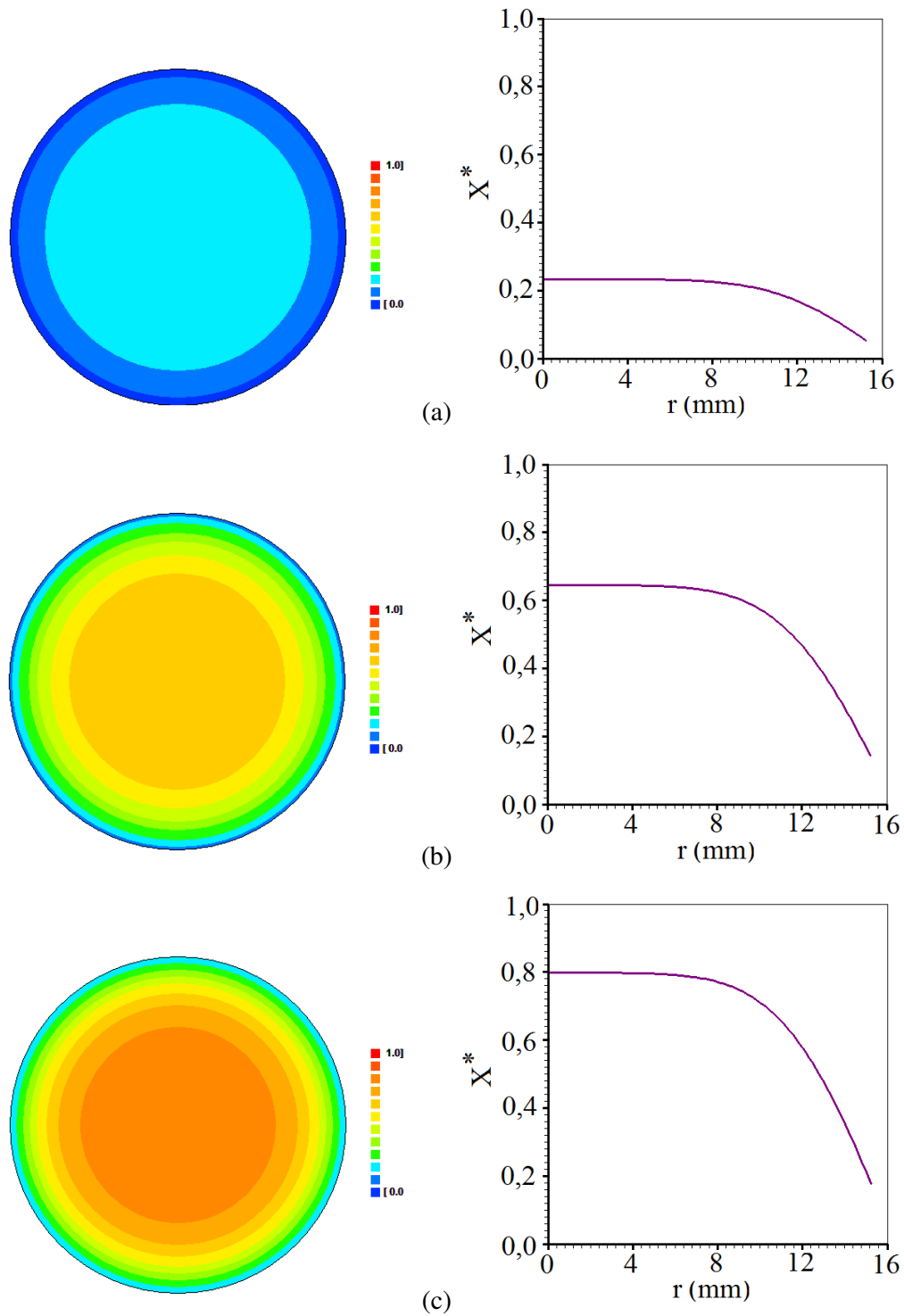


Figura 4.44 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando as distribuições de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,00 mm e raio de 15,25 mm, no tempo específico de 261 min.

Para se ter uma melhor visualização sobre o quanto as três distribuições de umidade em  $t = 261$  min são diferentes, as três curvas foram plotadas em um único sistema de eixos, o que é mostrado através da Figura 4.45.

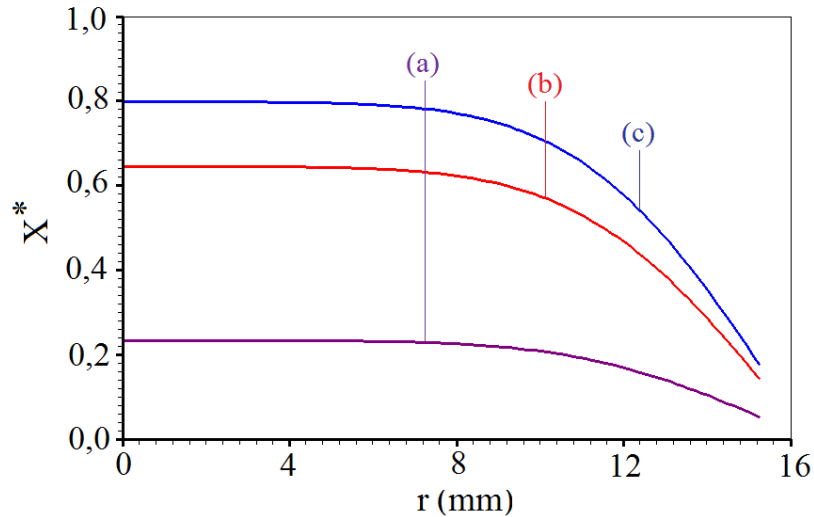


Figura 4.45 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de  $40,0$  °C, para o cilindro de comprimento  $10,00$  mm e raio de  $15,25$  mm no tempo específico de  $261$  min.

Nos gráficos da distribuição de umidade da Figura 4.44 e 4.45, observa-se que a secagem ocorre da superfície para o centro do cilindro e que a região que está em contato com o meio ambiente seca mais rápido do que os que estão mais internamente.

Na Figura 4.45, pode-se ver o quanto são diferentes as distribuições de umidade nas três seções circulares analisadas. Pode-se destacar a seção circular do contorno superior que, em  $t = 261$  min, apresenta uma razão de umidade praticamente constante de  $r = 0$  até  $r = 10,00$  mm.

As informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento  $16,70$  mm e raio de  $15,65$  mm, para a temperatura do ar de secagem de  $40,0$  °C para o tempo específico de  $471$  min podem ser observadas na Figura 4.46, dada a seguir.

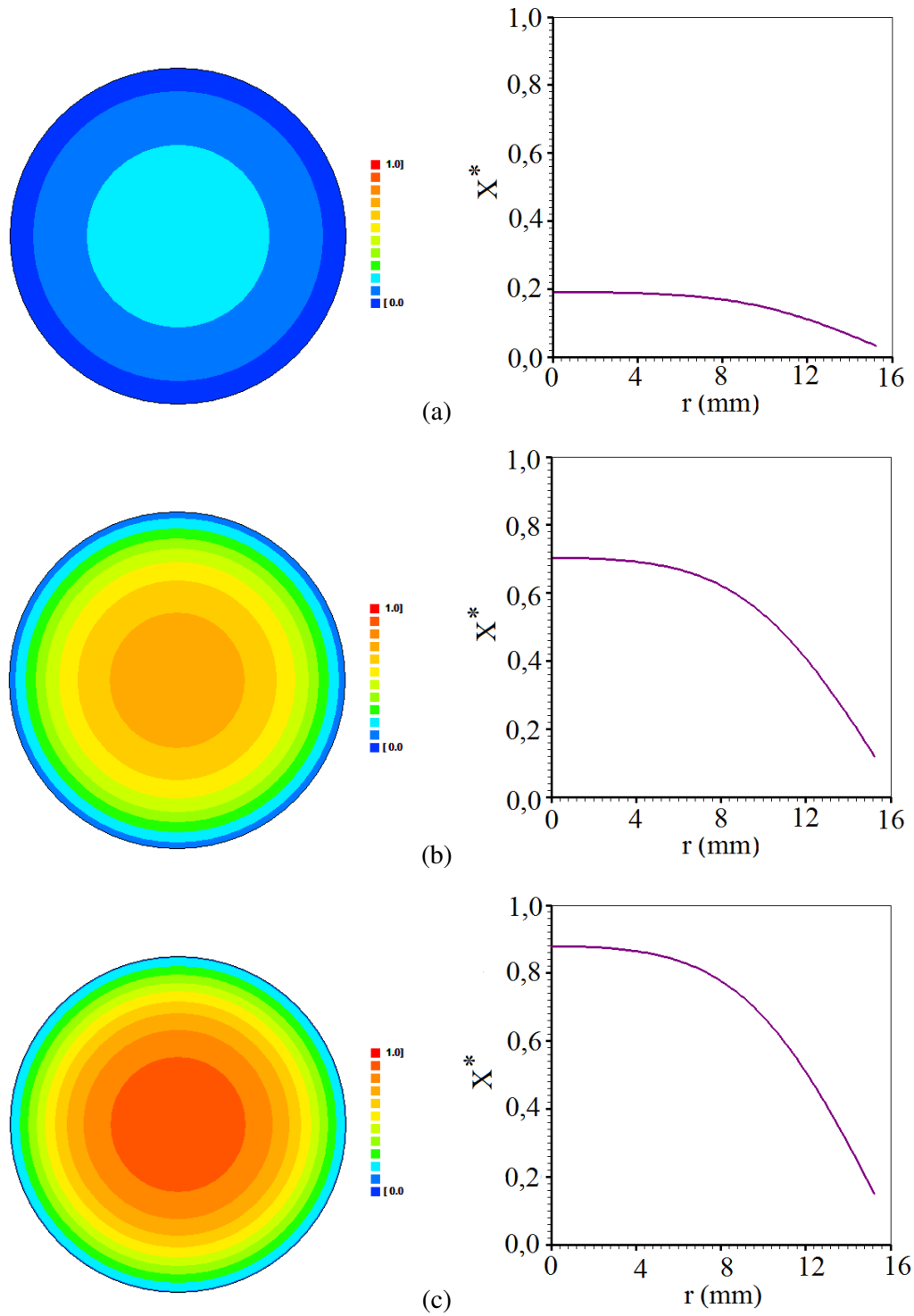


Figura 4.46 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando as distribuições de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento de 15,65 mm e raio de 16,70 mm, no tempo específico de 471 min.

A superposição das três curvas de distribuição de umidade é mostrada na Figura 4.47.

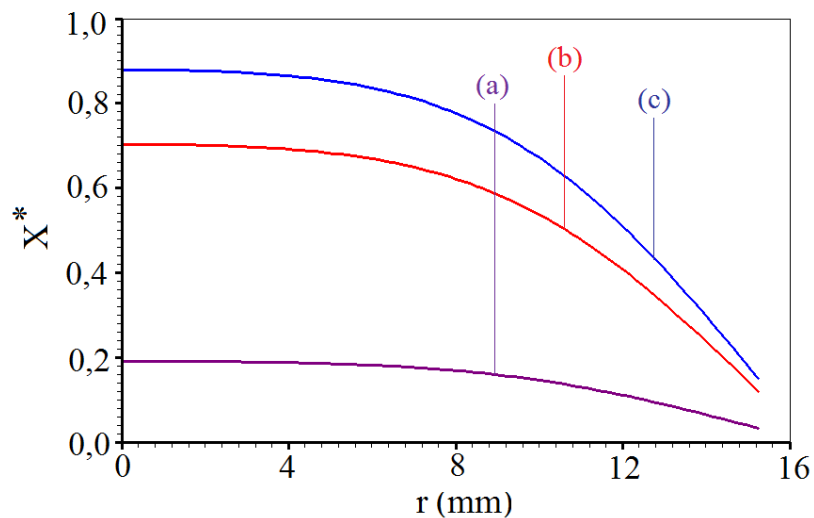


Figura 4.47 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento de 15,65 mm e raio de 16,70 mm para o tempo específico de 471 min.

Novamente, percebe-se, que a razão de umidade no contorno superior é praticamente constante entre  $r = 0$  e  $r = 9,00$  mm.

As informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 20,80 mm e raio de 16,44 mm, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o tempo específico de 687 min, podem ser observadas na Figura 4.48, dada a seguir.



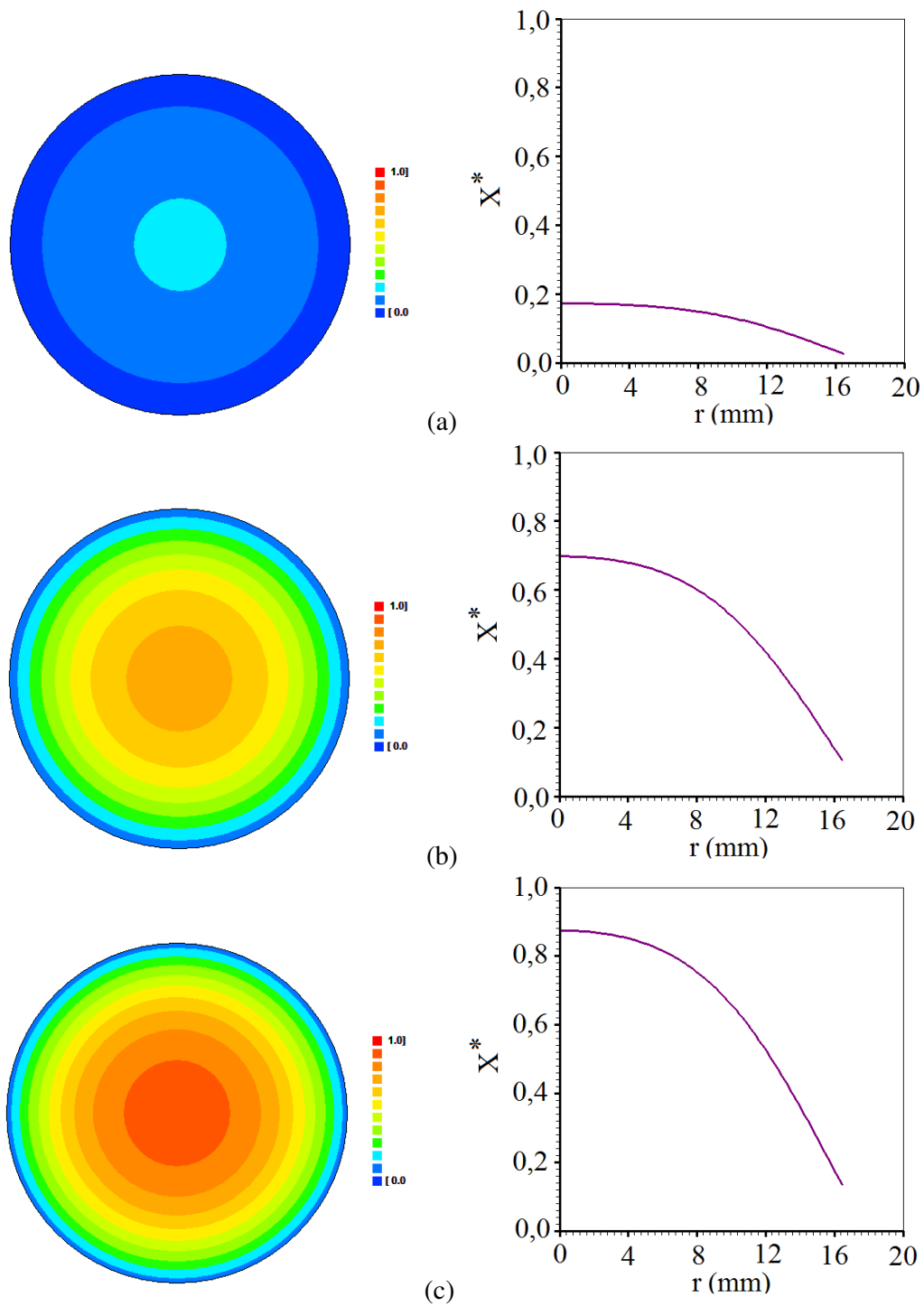


Figura 4.48 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para o cilindro de comprimento 20,80 mm e raio de 16,44 mm, no tempo específico de 687 min.

A superposição das três distribuições de umidade é mostrada na Figura 4.49.

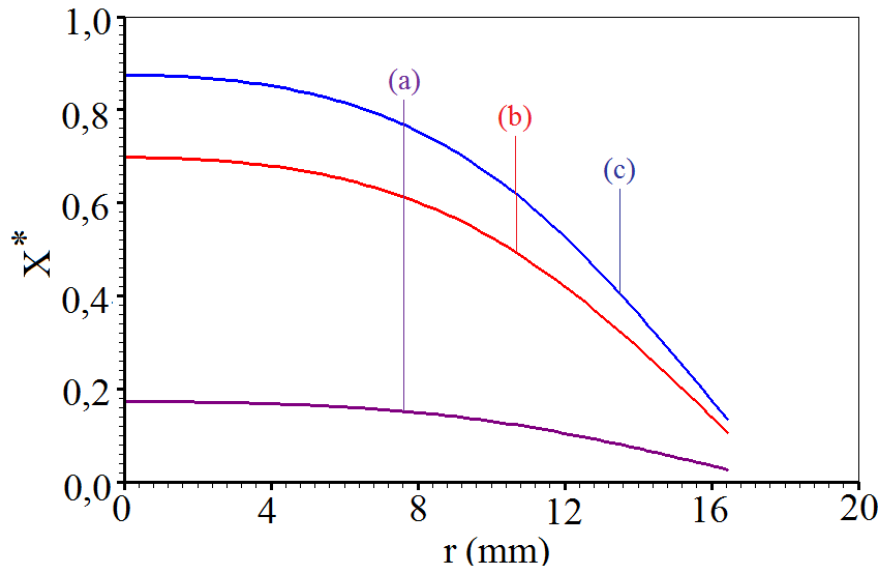


Figura 4.49 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a  $C/4$  da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de  $40,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , para o cilindro de comprimento  $20,80\text{ mm}$  e raio de  $16,44\text{ mm}$  para o tempo de  $687\text{ min}$ .

Uma inspeção da Figura 4.49 possibilita afirmar que a razão de umidade em  $t = 687\text{ min}$  é praticamente constante entre  $r = 0$  e  $r = 8,00\text{ mm}$ .

As informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento  $25,50\text{ mm}$  e raio de  $17,00\text{ mm}$ , para a temperatura do ar de secagem de  $40,0\text{ }^{\circ}\text{C}$  para o tempos específicos de  $783\text{ min}$ , podem ser observadas na Figura 4.50, dada a seguir.

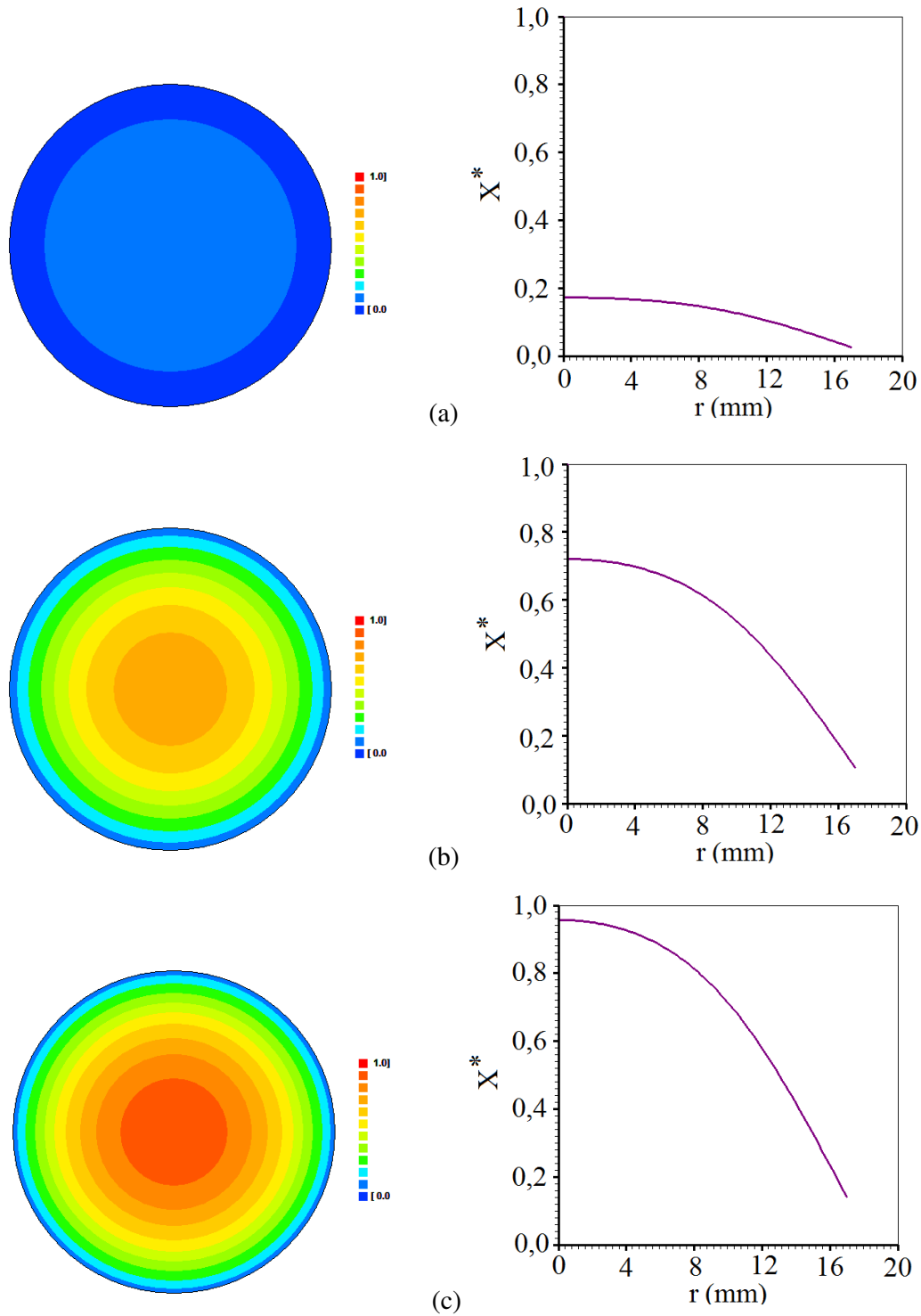


Figura 4.50 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, comprimento de 25,50 mm e raio de 17,00 mm, no tempo específico de 783 min.

A superposição das três curvas de distribuição de umidade, é obtida no gráfico da Figura 4.51.

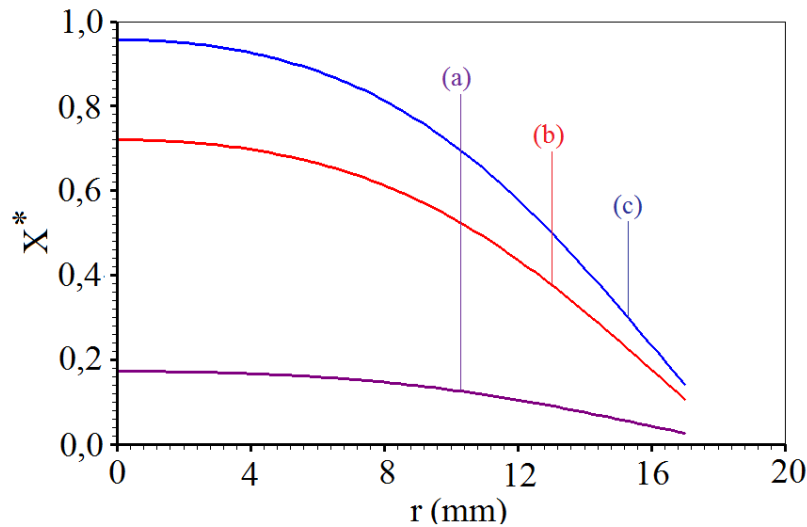


Figura 4.51 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, com o cilindro de comprimento de 25,50 mm e o raio de 17,00 mm, no tempo específico de 783 min.

Observando-se a Figura 4.51 percebe-se que em  $t = 783$  min, a distribuição de umidade na seção circular do contorno superior é praticamente constante de  $r = 0$  até cerca de  $r = 4,00$  mm. Analisando este comportamento para as quatro dimensões apresentado percebe-se que, quanto menor for o comprimento do pedaço cilíndrico, mais uniforme é a distribuição de umidade.

#### 4.10.2 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 50,0 °C

As informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 10,60 mm e raio de 14,42 mm, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C para o tempos específicos de 201 min podem ser observadas na Figura 4.52, dada a seguir.

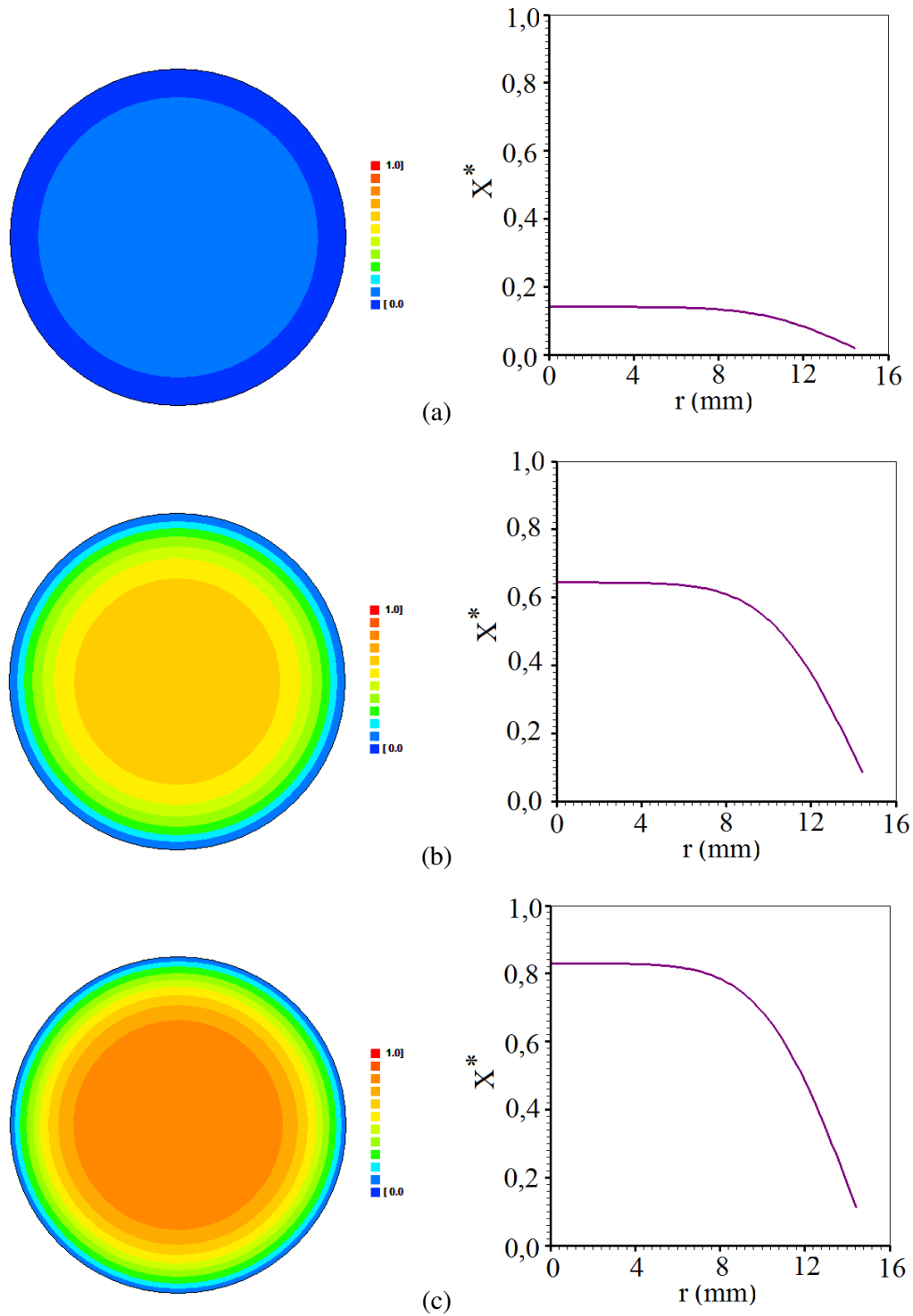


Figura 4.52 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no cilindro em (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,60 mm e raio de 14,42 mm, no tempo específico de 201 min.

A superposição das três curvas de distribuição de umidade é mostrada no gráfico da Figura 4.53.

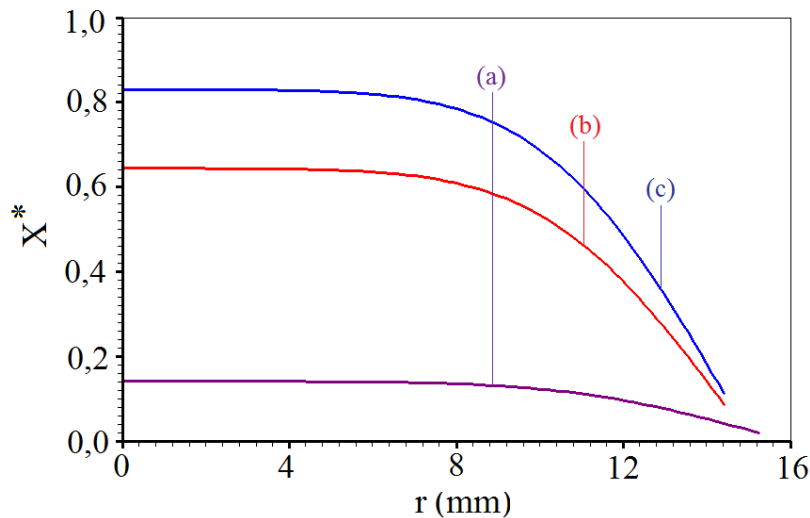


Figura 4.53 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 10,60 mm e raio de 14,42 mm, no tempo específico de 201 min.

Uma inspeção na Figura 4.53 possibilita concluir que a distribuição de umidade se torna mais uniforme, ao longo do raio, à medida em que o círculo analisado está mais próximo do meio externo.

Na Figura 4.54 são mostradas as informações da distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 17,49 mm e raio de 13,41 mm, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C no tempo específico de 417 min.

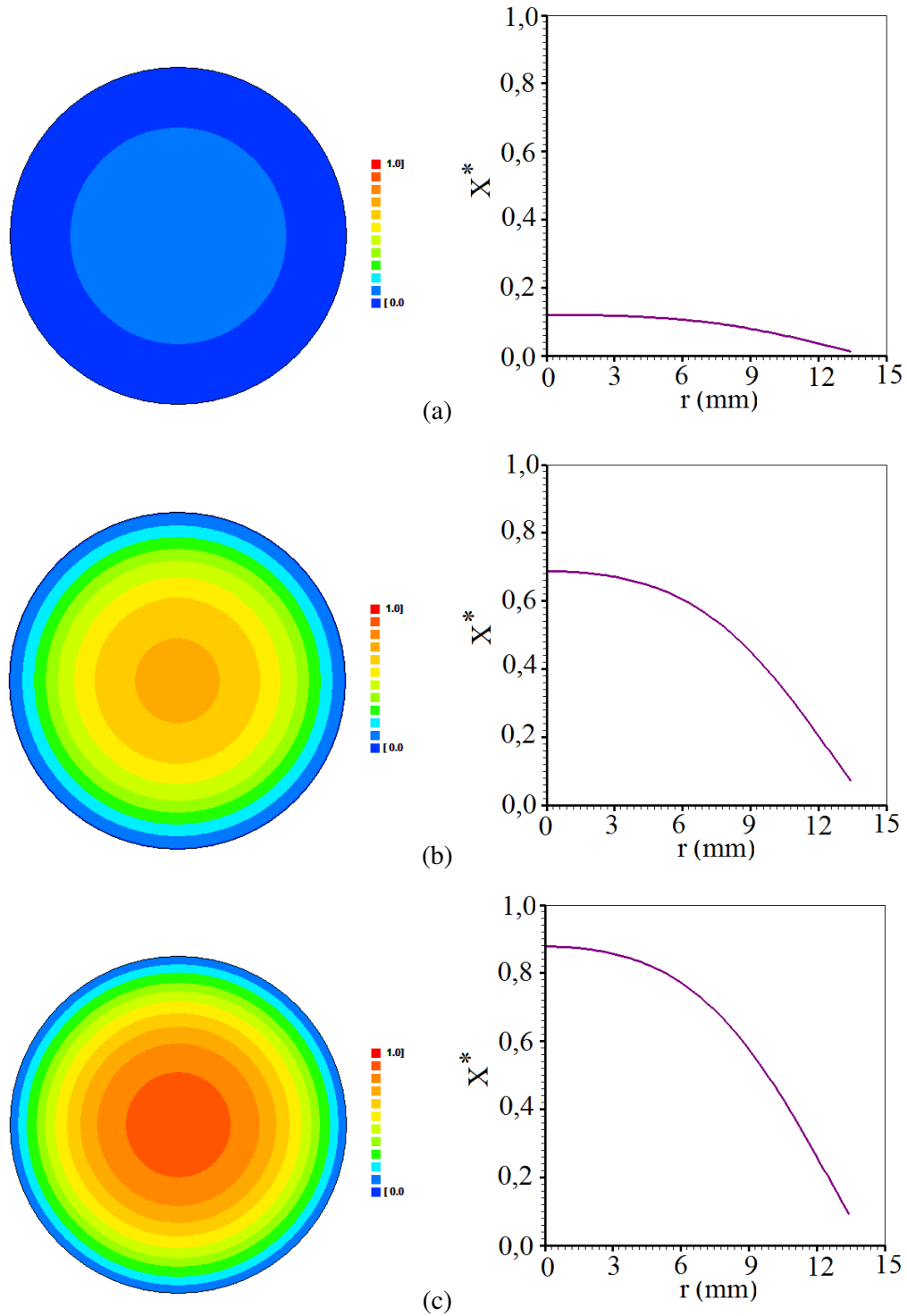


Figura 4.54 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 17,49 mm e raio de 13,41 mm, no tempo específico de 417 min.

Na Figura 4.55, tem-se o gráfico da superposição das três curvas de distribuição de umidade.

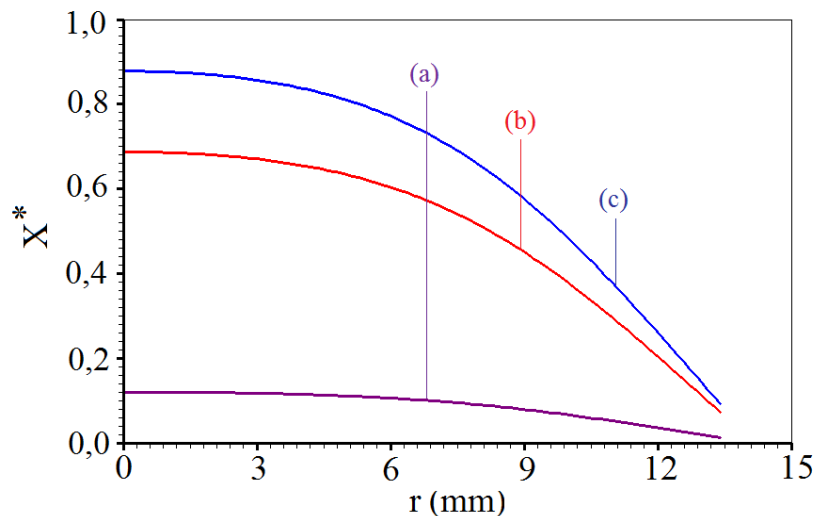


Figura 4.55 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a  $C/4$  da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de  $50,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , para o cilindro de comprimento  $17,49\text{ mm}$  e raio de  $13,41\text{ mm}$ , para o tempo específico de  $417\text{ min}$ .

Através da Figura 4.55, nota-se que o comportamento da distribuição de umidade para  $C = 17,49\text{ mm}$  é semelhante ao comportamento para o cilindro com  $C = 10,60\text{ mm}$ . Quanto mais a seção circular se aproxima do meio externo, mais uniforme é a distribuição de umidade ao longo do raio.

Na Figura 4.56, tem-se informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento  $21,00\text{ mm}$  e raio de  $13,86\text{ mm}$ , para a temperatura do ar de secagem de  $50,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , no tempo específico de  $465\text{ min}$ .



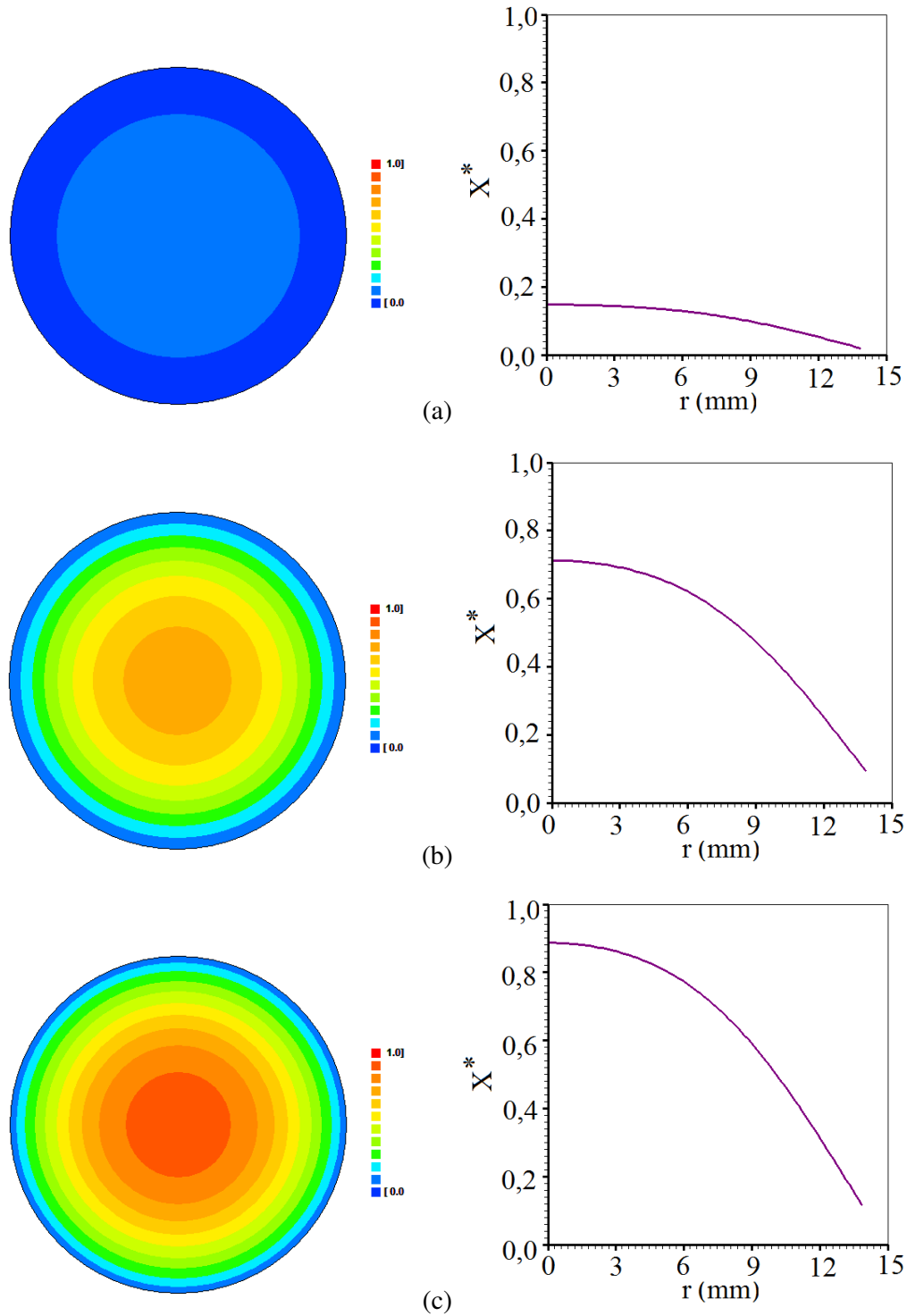


Figura 4.56 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,00 mm e raio de 13,86 mm, no tempo específico de 465 min.

Na Figura 4.57, tem-se o gráfico da superposição das três curvas de distribuição de umidade.

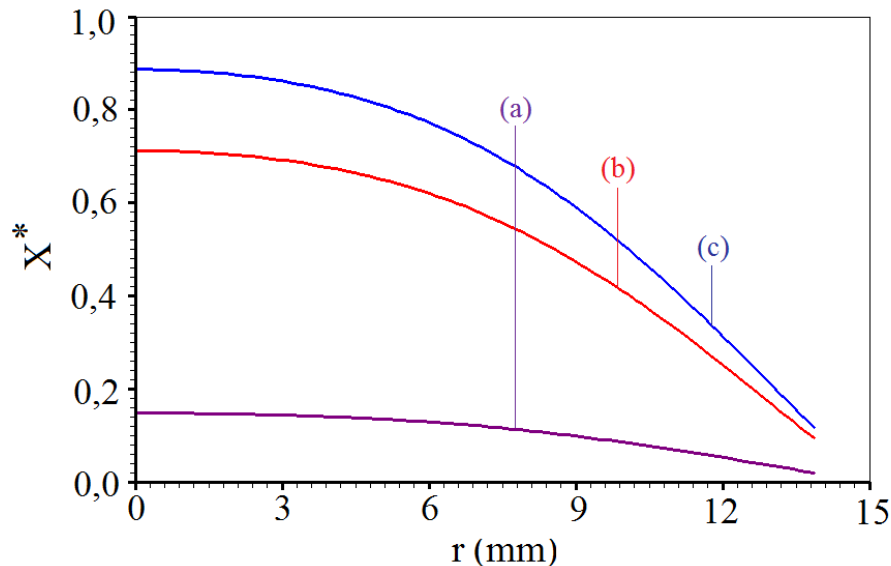


Figura 4.57 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a  $C/4$  da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de  $50,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , para o cilindro de comprimento  $21,00\text{ mm}$  e raio de  $13,86\text{ mm}$ , para o tempo específico de  $465\text{ min}$ .

Semelhantemente aos dois casos anteriores para  $T = 50,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , bem como para todos os casos a  $40,0\text{ }^{\circ}\text{C}$  observa-se que a distribuição de umidade ao longo do raio apresenta os maiores gradientes à medida que o círculo analisado se aproxima do centro do cilindro finito (Figura 4.57).

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento  $28,93\text{ mm}$  e raio de  $13,24\text{ mm}$ , para a temperatura do ar de secagem de  $50,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , e para o tempo específico de  $609\text{ min}$  podem ser observadas na Figura 4.58, dada a seguir.

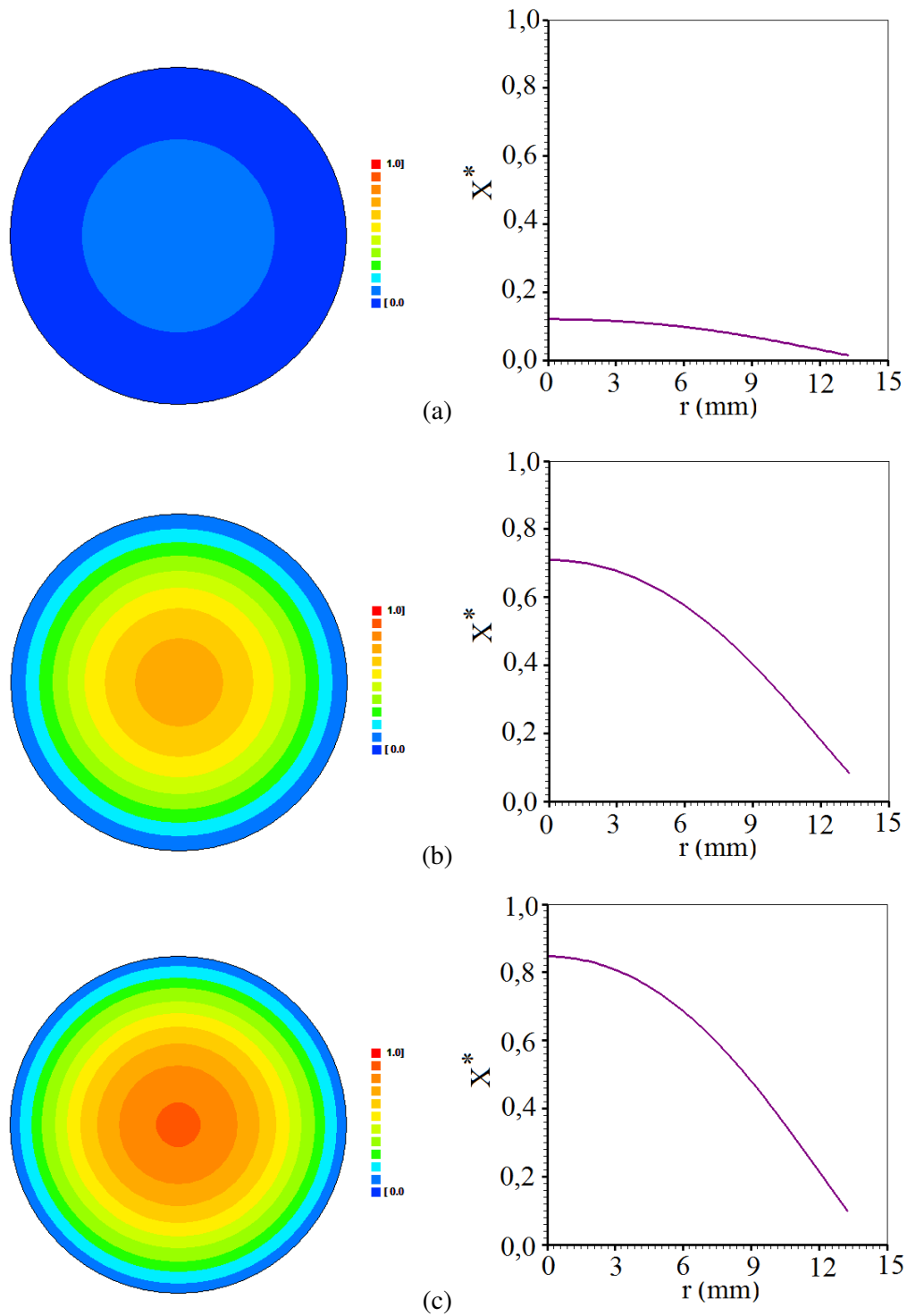


Figura 4.58 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento de 28,93 mm e raio de 13,24 mm, no tempo específico de 609 min.

Para melhor observar o quanto é diferente as distribuições de umidade nos três círculos observados, será desenhado, em um mesmo sistema de eixos, os três casos estudados para a temperatura de 50,0 °C no tempo específico de 609 min.

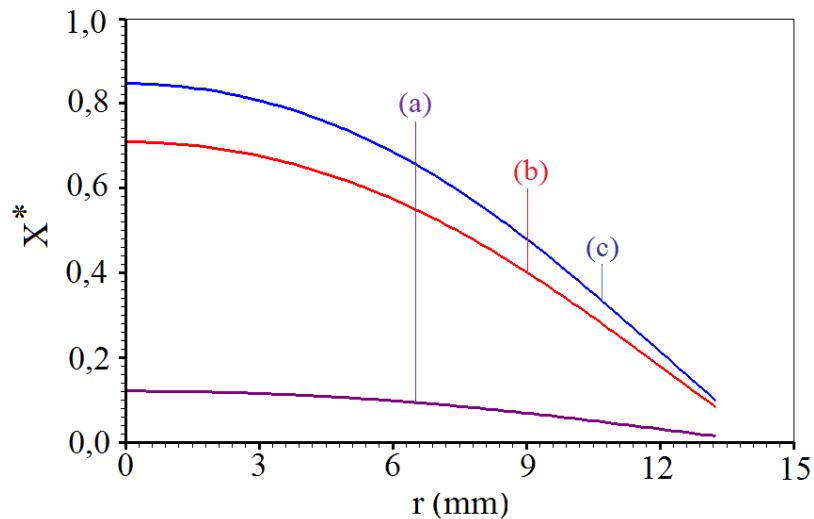


Figura 4.59– Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, para o cilindro de comprimento de 28,93 mm e raio de 13,24 mm, no tempo específico de 609 min.

#### 4.10.3 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 60,0 °C

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 10,35 mm e raio de 15,58 mm, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o tempo específico de 146 min, podem ser observadas na Figura 4.60, dada a seguir.

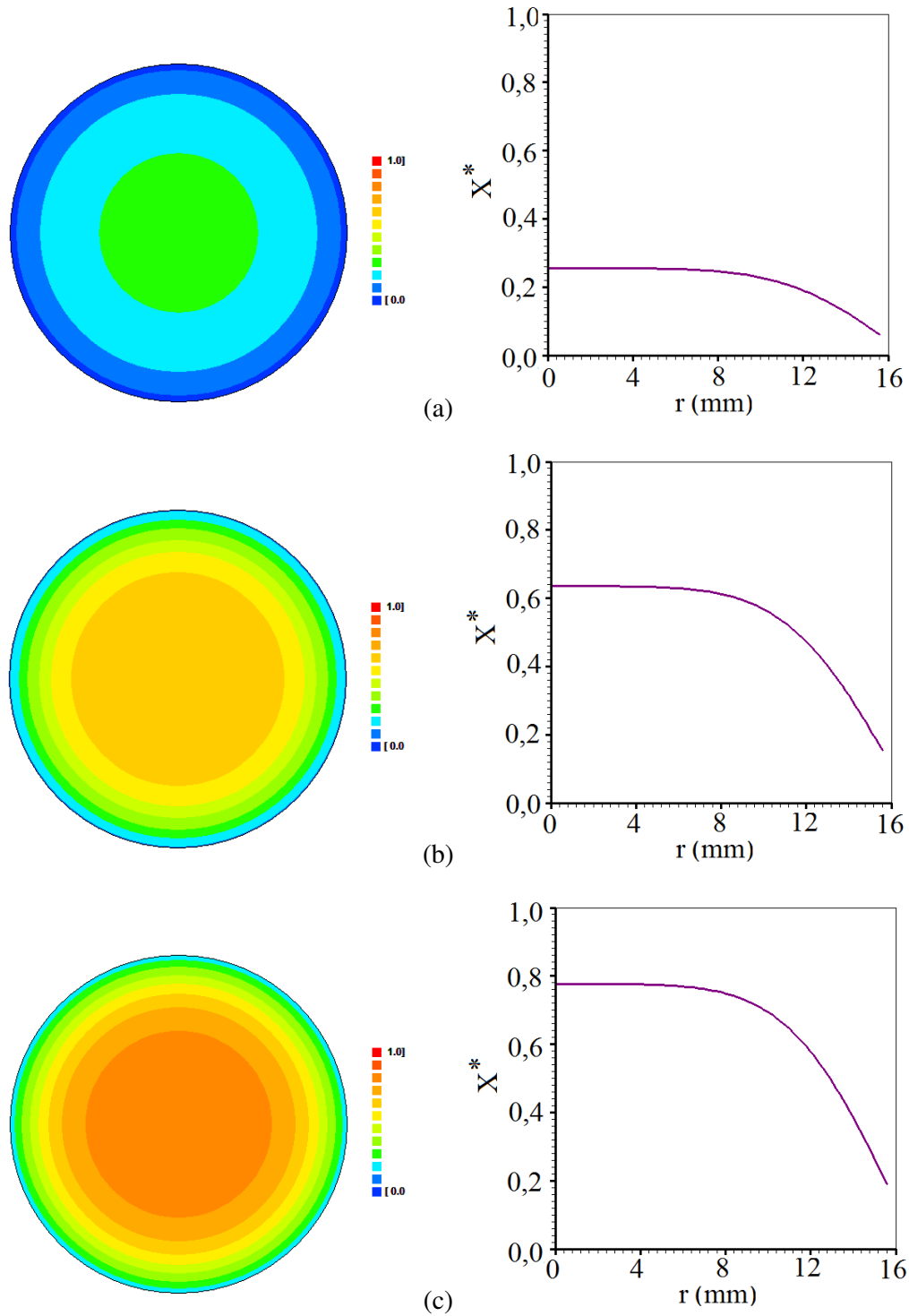


Figura 4.60 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para o cilindro de comprimento de 10,35 mm e raio de 15,58 mm, no tempo específico de 146 min.

Para melhor observar o quanto é diferente as distribuição de umidade nos três círculos observados, será desenhado, em um mesmo sistema de eixos, os três casos estudados para a temperatura de 60,0 °C no tempo específico de 146 min.

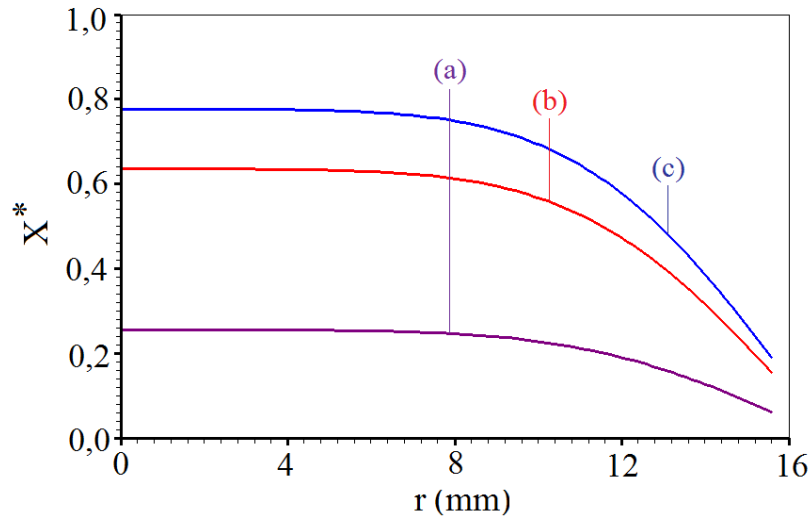


Figura 4.61 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C, para o cilindro de comprimento de 10,35 mm e raio de 15,58 mm, no tempo específico de 146 min.

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 17,45 mm e raio de 15,66 para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o tempos específicos de 274 min podem ser observadas na Figura 4.62 dada a seguir.

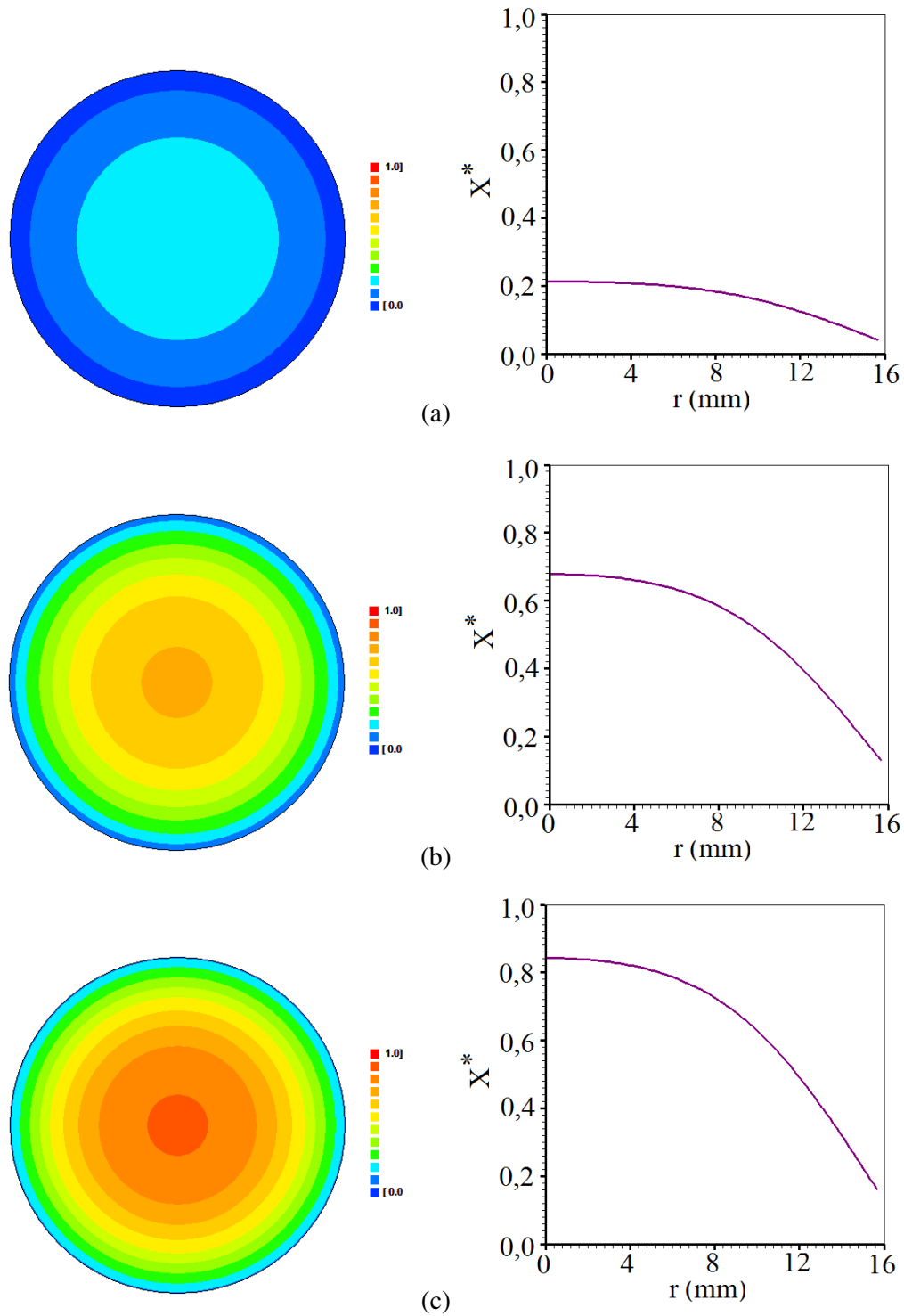


Figura 4.62 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 17,45 mm e raio de 15,66 mm, no tempo específico de 274 min.

Para melhor observar o quanto são diferentes as distribuições de umidade nos três círculos estudados, foi plotado em um mesmo sistema de eixos, os três casos estudados para a temperatura de 60,0 °C, no tempo específico de 274 min, como pode ser observado na Figura 4.63.

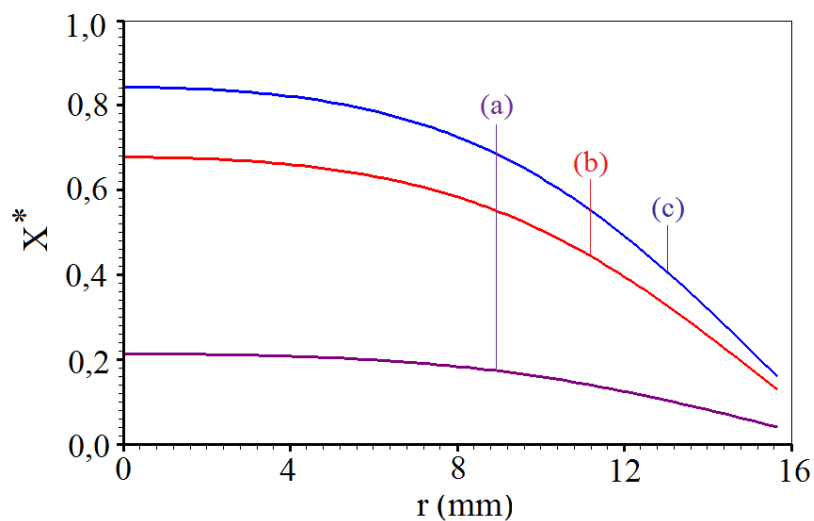


Figura 4.63 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 17,45 mm e raio de 15,66 mm no tempo específico de 274 min.

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 21,69 mm e raio de 16,56 para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o tempo específico de 334 min podem ser observadas na Figura 4.64, dada a seguir.



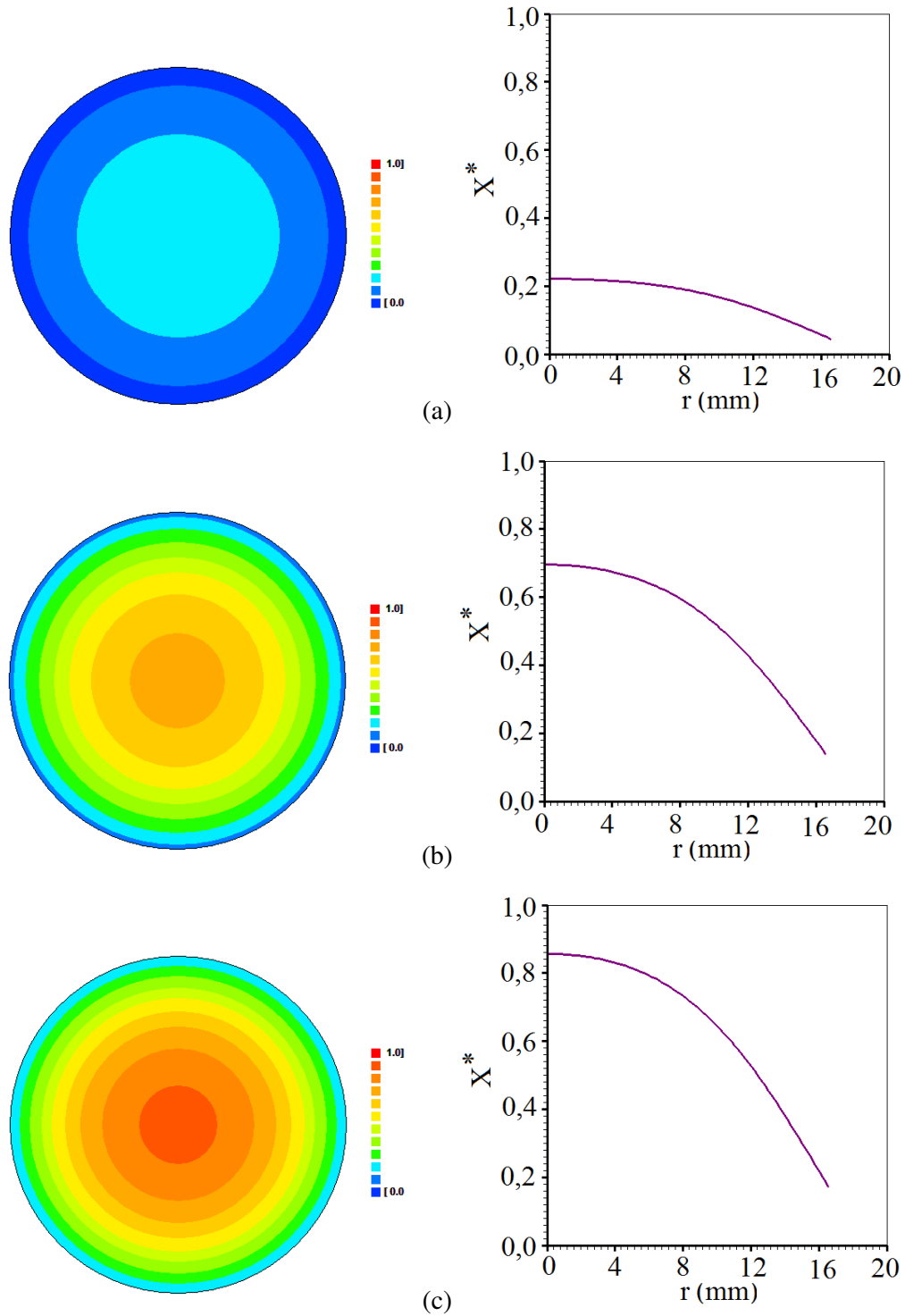


Figura 4.64 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 21,69 mm e raio de 16,56 mm, no tempo específico de 334 min.

Na Figura 4.65 foi plotado, no mesmo sistema de eixos, os três casos estudados, para melhor observar o quanto são diferentes as distribuições de umidade nas três seções circulares estudadas.

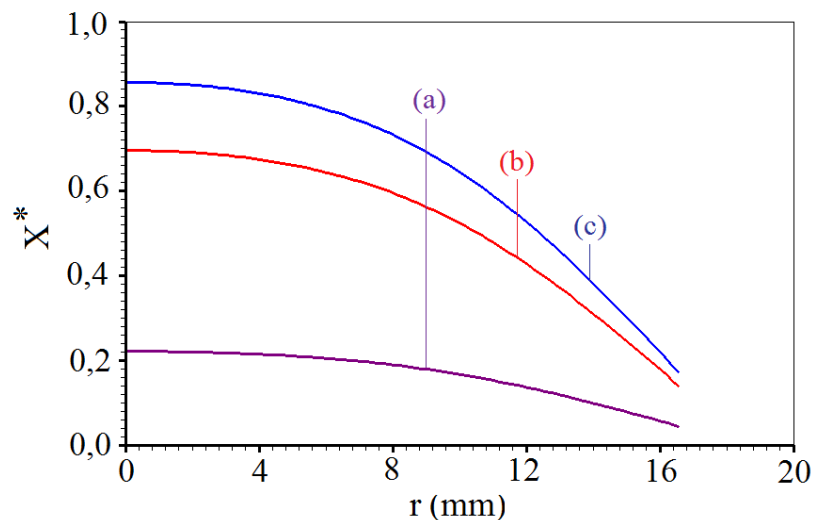


Figura 4.65 – Gráfico da evolução da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 21,69 mm e raio de 16,56 mm, no tempo específico de 334 min.

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 27,34 mm e raio de 16,57 mm, para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o tempo específico de 430 min podem ser observadas na Figura 4.66, dada a seguir.

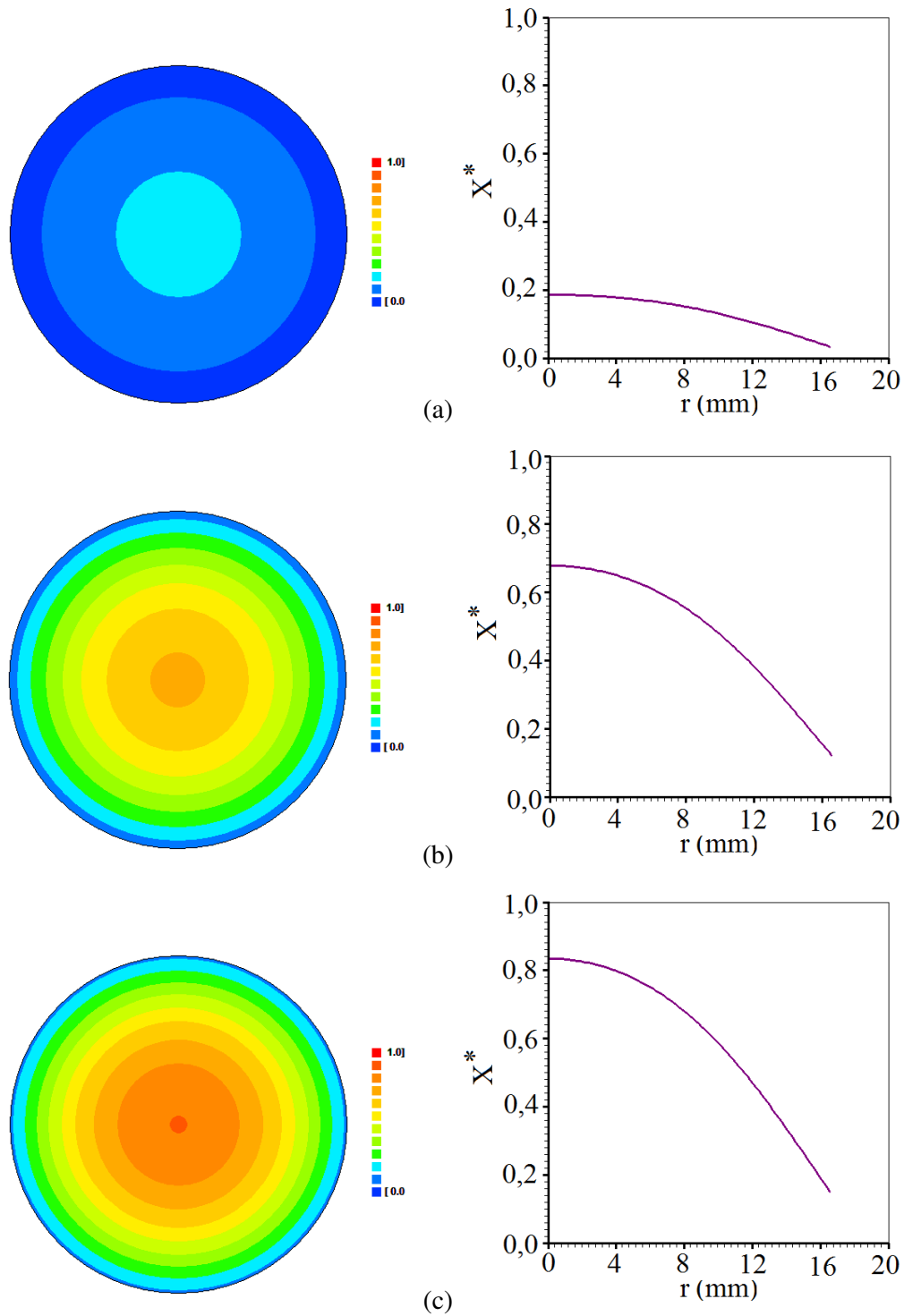


Figura 4.66 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 27,34 mm e raio de 16,57 mm, no tempo específico de 430 min.

Na Figura 4.67 foram desenhados, em um mesmo sistema de eixos, os três casos estudados, para melhor observar o quanto são diferente as distribuições de umidade.

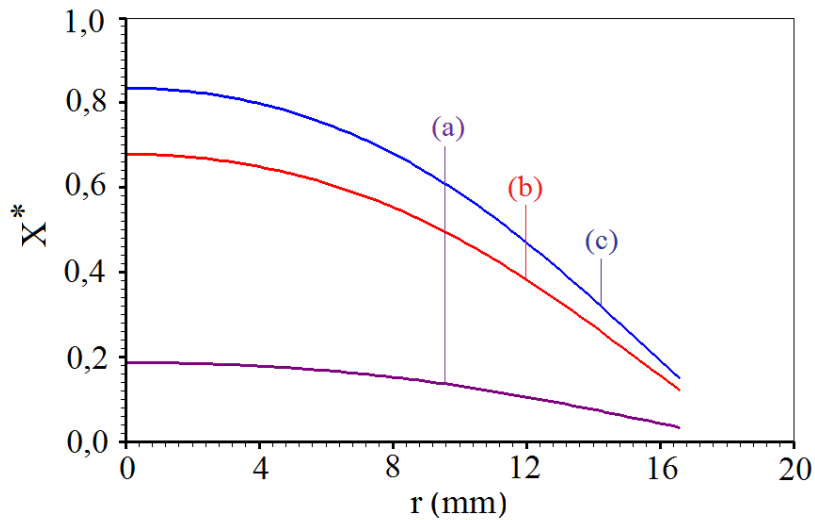


Figura 4.67 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para o cilindro de comprimento 27,34 mm e raio de 16,57 mm e no tempo específico de 430 min.

#### 4.10.4 – Distribuição do teor de umidade: temperatura do ar de secagem de 70,0 °C

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 11,98 mm e raio de 12,42 mm para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o tempos específicos de 108 min podem ser observadas na Figura 4.68, dada a seguir.

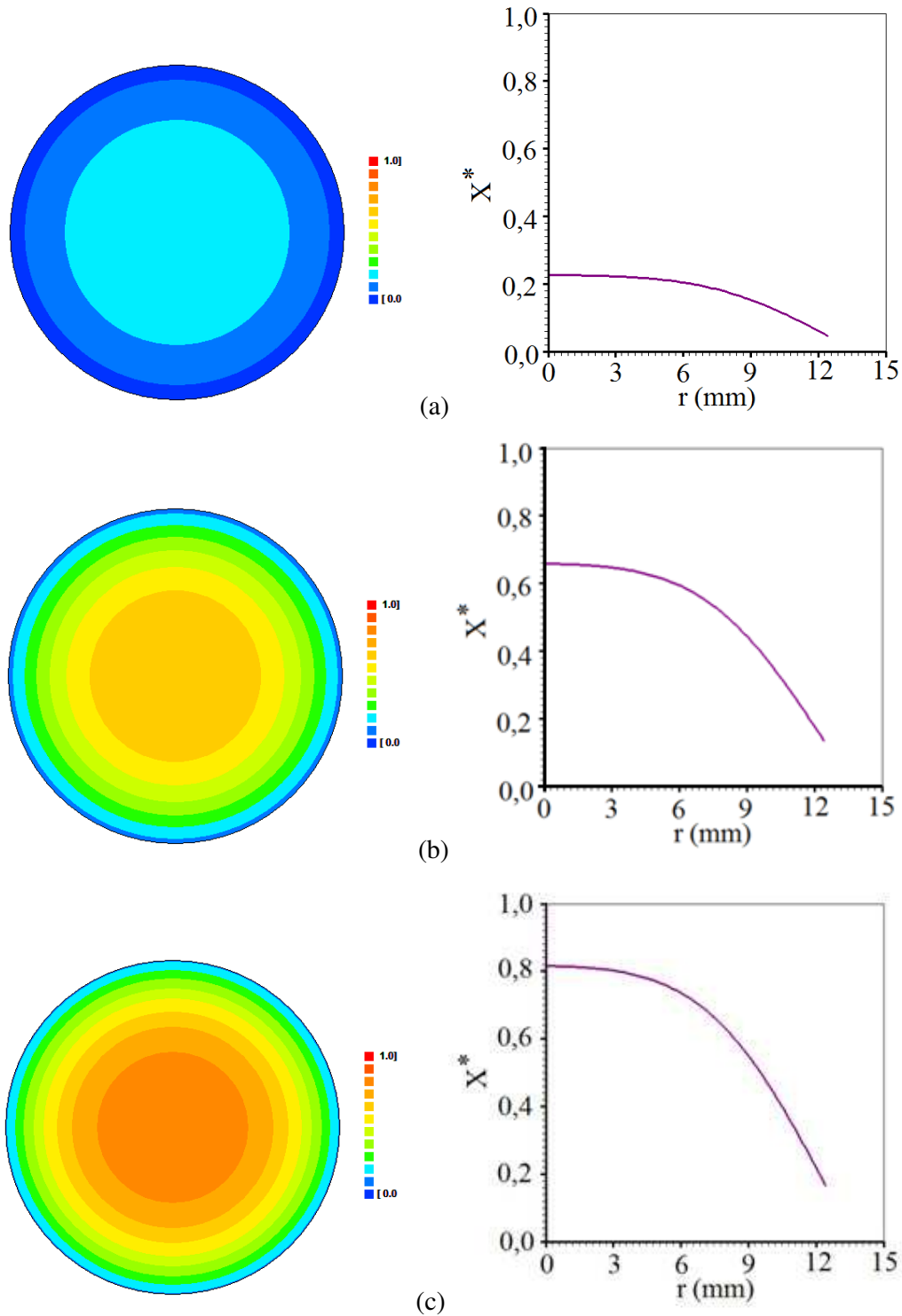


Figura 4.68 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 11,98 mm e raio de 12,42 mm para no específico de 108 min.

Na Figura 4.69, foram desenhados, no mesmo sistema de eixos, os três casos estudados, para melhor observar o quanto são diferentes as distribuições de umidade.

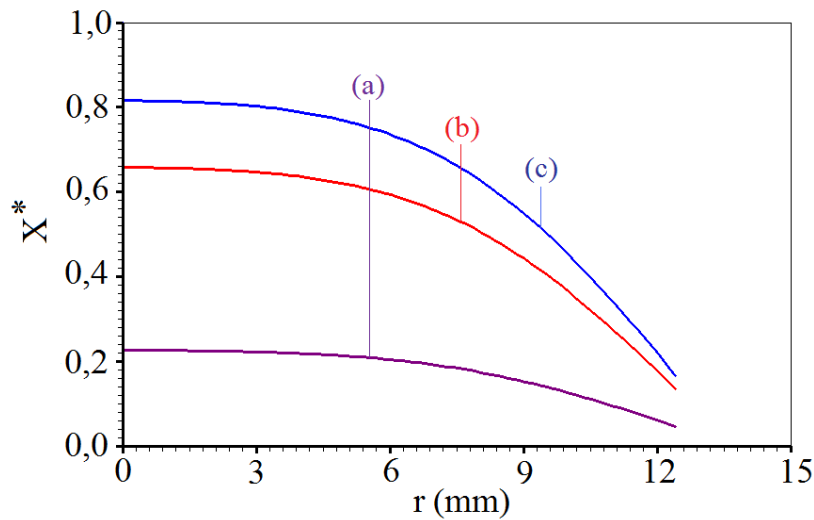


Figura 4.69 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 11,98 mm e raio de 12,42 mm e o tempo específico de 108 min.

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 16,73 mm e raio de 12,28 mm, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para os tempos específicos de 167 min podem ser observadas na Figura 4.70, dada a seguir.

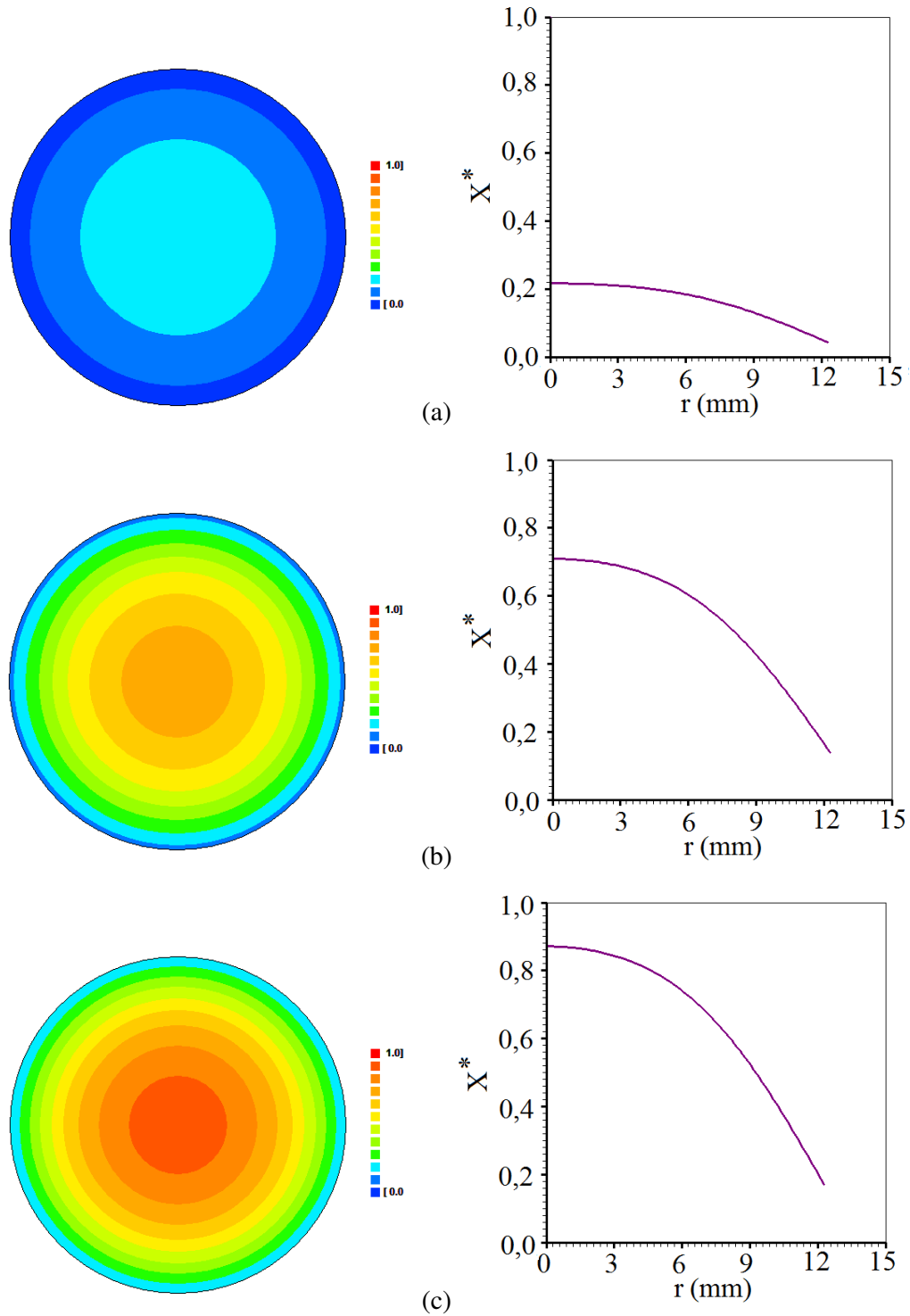


Figura 4.70 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 16,73 mm e raio de 12,28 mm, no tempo específico de 167 min.

Para melhor observar o quanto são diferentes as distribuições de umidade, foram desenhados, em um mesmo sistema de eixos, os três casos estudados para a temperatura de 70,0 °C, no tempo específico de 167 min, como mostra a Figura 4.71.

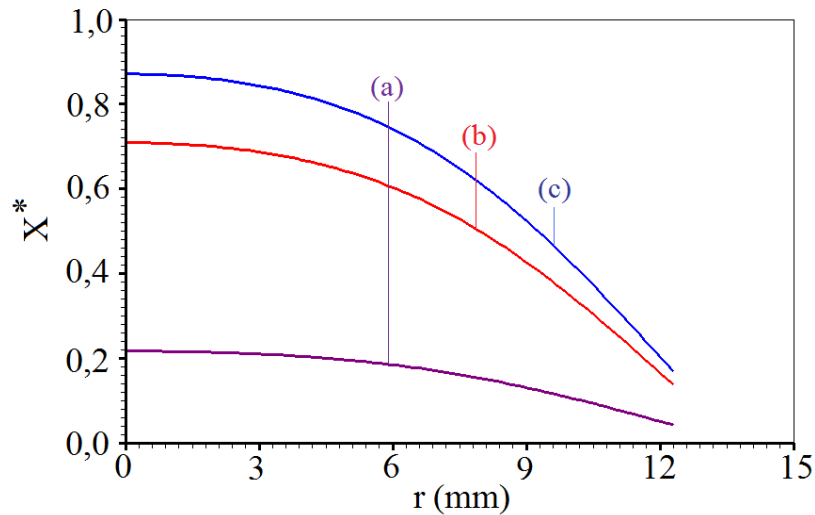


Figura 4.71 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em:  
(a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C no tempo específico de 167 min.

Informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 21,71 mm e raio de 13,64 mm para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o tempo específico de 221 min podem ser observadas na Figura 4.72, dada a seguir.



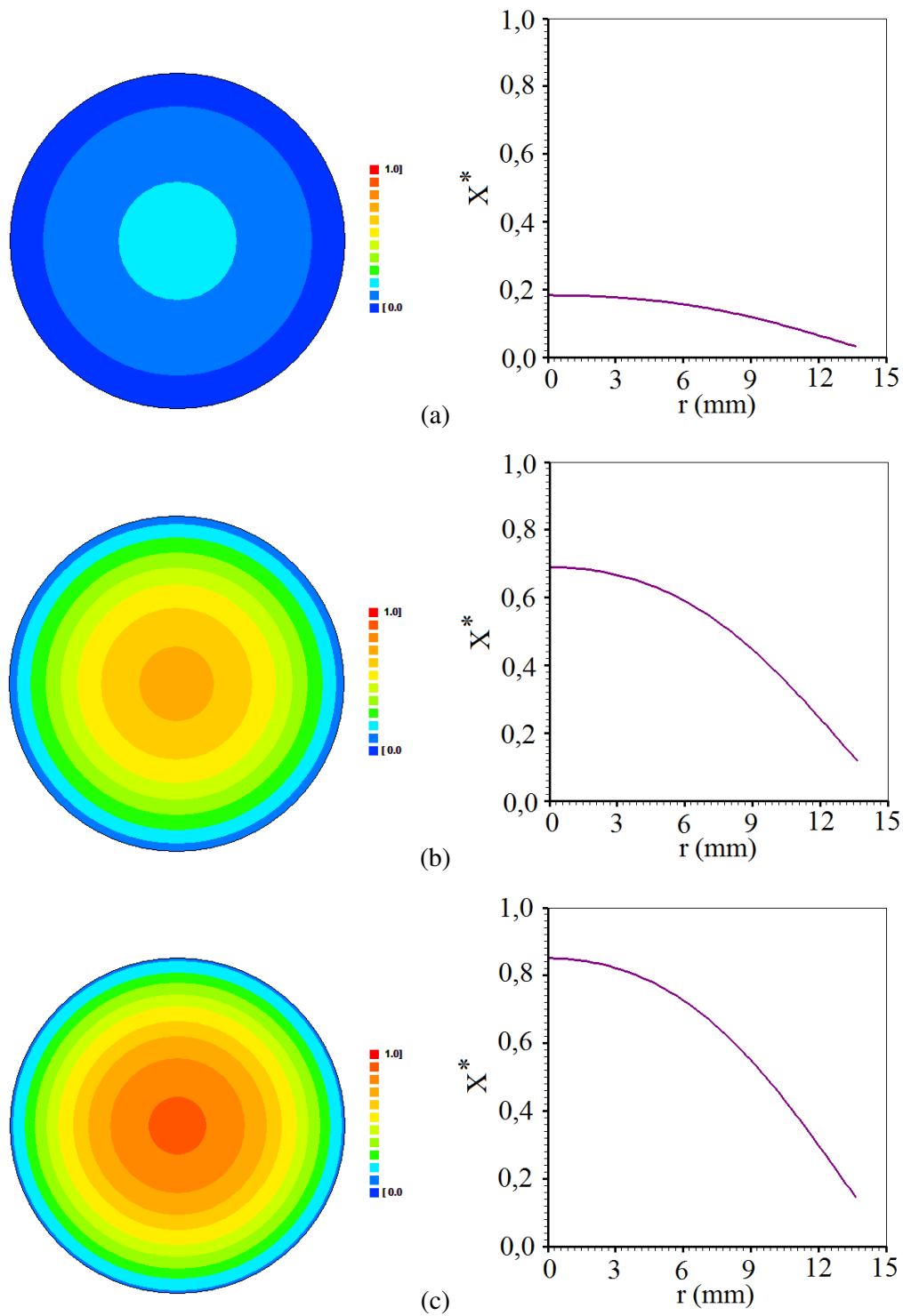


Figura 4.72 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,71 mm e raio de 13,64 mm, no tempo específico de 221 min.

Para melhor observar o quanto são diferentes as distribuições de umidade, foram plotados, em um mesmo sistema de eixos, os três casos estudados para a temperatura de 70,0 °C, e no tempo específico de 221 min, como pode ser observado na Figura 4.73.

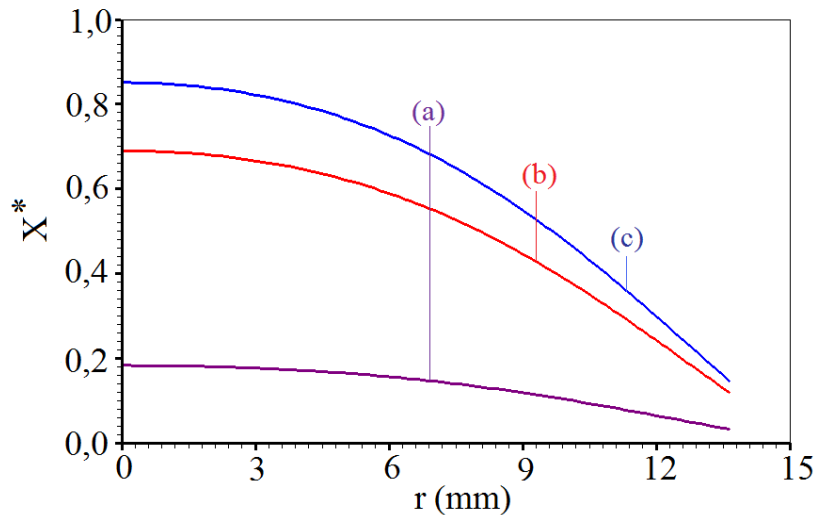


Figura 4.73 – Gráfico da evolução de distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o cilindro de comprimento 21,71 mm e raio de 13,64 mm para o tempo específico de 221 min.

Por último, as informações sobre a distribuição de umidade no interior do cilindro de comprimento 27,30 mm e raio de 13,13 mm, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C no tempo específico de 257 min, podem ser observadas na Figura 4.74, dada a seguir.

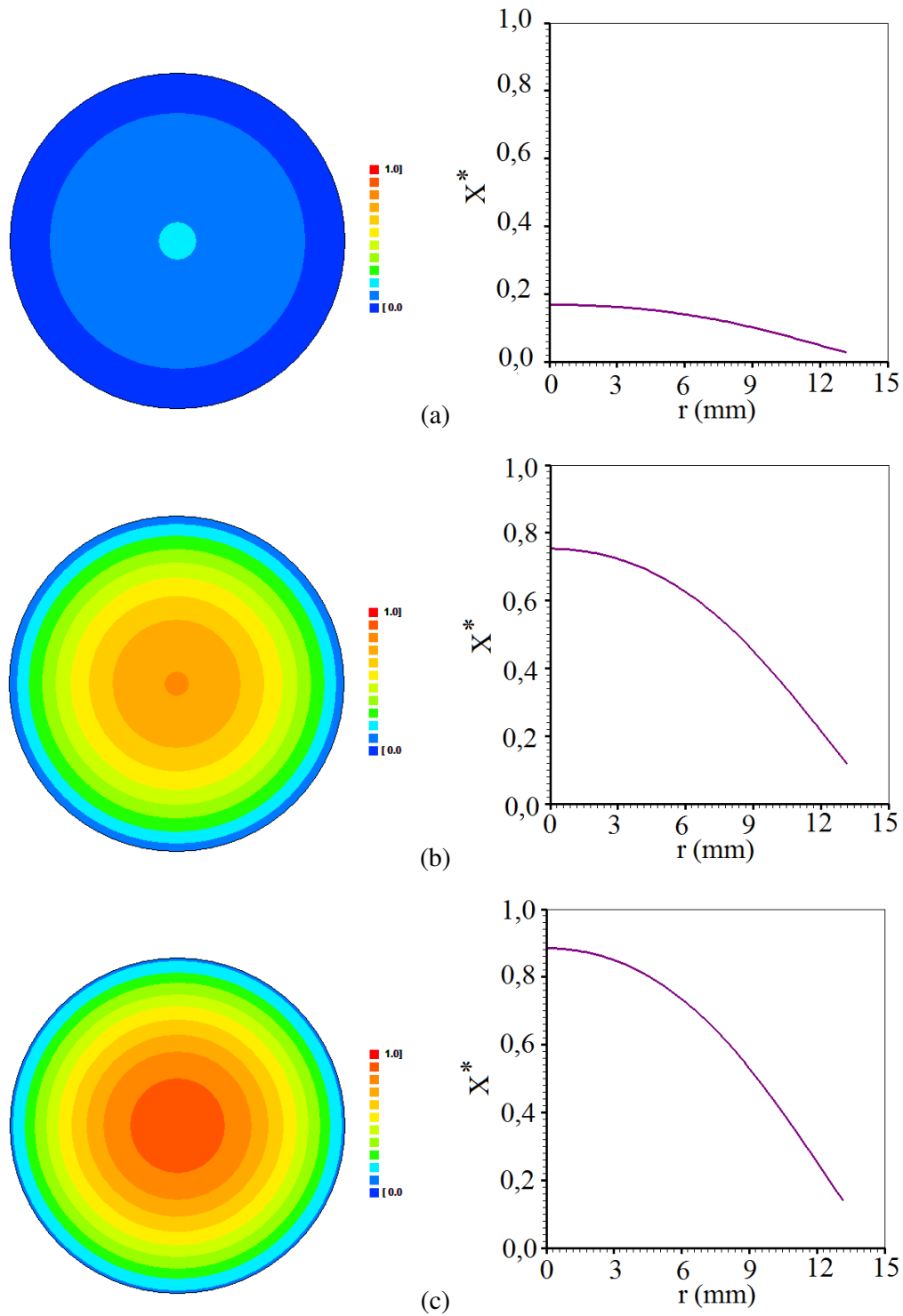


Figura 4.74 – Gráficos de contorno (fora de escala) representando a distribuição de umidade no interior do cilindro em: (a) contorno circular superior; (b) círculo a C/4 da metade do cilindro; (c) círculo na metade do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C para o cilindro de comprimento 27,30 mm e raio de 13,13 mm no tempo específico de 257 min.

As distribuições de umidades, foram plotados em um mesmo sistema de eixos para a temperatura de 70,0 °C, e no tempo específico de 257 min, como pode ser observado na Figura 4.75.

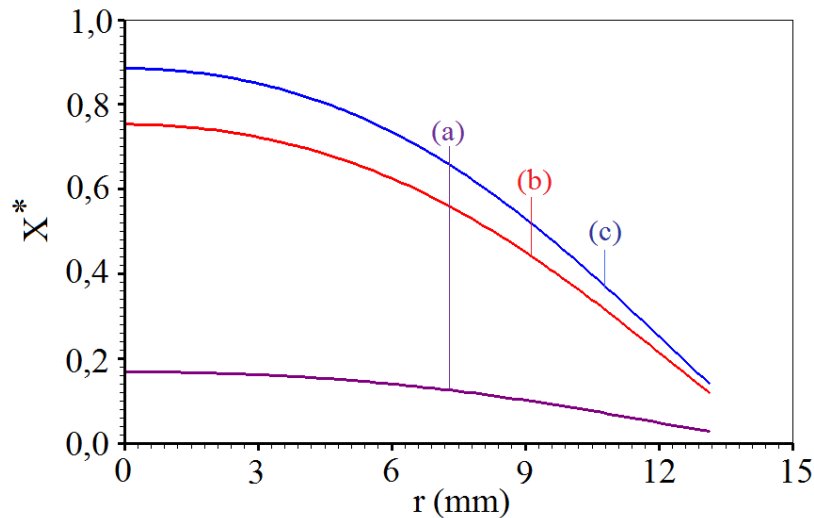


Figura 4.75 – Gráfico da distribuição do teor de umidade no cilindro finito em: (a) no contorno superior, (b) círculo a C/4 da metade do cilindro e (c) no centro do cilindro, para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, para o cilindro de comprimento 27,30 mm e raio de 13,13 mm e o tempo específico de 257 min.

Fazendo-se uma inspeção visual nos gráficos das Figuras de 4.44 a 4.75, envolvendo todas as temperaturas do ar de secagem e comprimentos estudados, observa-se que: no contorno superior, que está em contato com o meio externo, a secagem ocorre mais rapidamente, como era esperado. Já nos círculos a C/4 da metade do cilindro a secagem ocorreu mais lentamente, enquanto que no centro do cilindro o processo foi ainda mais lento. Por outro lado, é interessante observar que a diferença da distribuição entre os dois círculos internos é bem menor quando comparado com a distribuição do círculo externo, o que ocorreu em todos os casos.

Estas informações sobre a distribuição de umidade são significativas porque possibilitam prever regiões de grandes tensões produzidas por gradientes do teor de

umidade, e isto é importante porque estas tensões podem danificar o produto durante a secagem.

#### 4.11 – Equação de Arrhenius

Após a determinação dos parâmetros termo-físicos nas diversas temperaturas do ar de secagem, para os diversos comprimentos dos pedaços cilíndricos de bananas, procurou-se investigar a influência da temperatura do ar de secagem sobre os valores obtidos para tais parâmetros. Para o processo de secagem, este efeito é investigado por uma equação do tipo Arrhenius, que será apresentada a seguir.

##### 4.11.1 – Difusividade efetiva de massa

A difusividade efetiva de massa foi determinada para cada temperatura do ar de secagem estudada. Estas difusividades podem ser relacionadas com as temperaturas do ar de secagem pela equação de Arrhenius (THAKUR e GUPTA, 2006; SILVA et al., 2008b; SILVA et al., 2009a; SILVA, C., 2010), dada por

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{E_a}{R(T + 273,15)}\right), \quad (4.2)$$

onde o parâmetro  $E_a$  é a energia de ativação ( $\text{J mol}^{-1}$ );  $R$  é a constante universal dos gases ideais ( $8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ );  $T$  é a temperatura do ar de secagem ( $^{\circ}\text{C}$ ) e  $D_0$  é o fator pré-exponencial de Arrhenius ( $\text{m}^2 \text{ min}^{-1}$ ).

O uso de regressão não-linear para a Equação (4.2) ajustados aos pares  $(T,D)$ , dados nas Tabelas de 4.12 a 4.15, resulta em energias de ativação e em fatores pré-exponenciais, que podem ser encontrados na Tabela 4.16. Esta tabela apresenta, também, o coeficiente de determinação para cada temperatura estudada. Os gráficos de  $D$  ( $\text{m}^2 \text{ min}^{-1}$ ) versus  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) é mostrados na Figura 4.76.

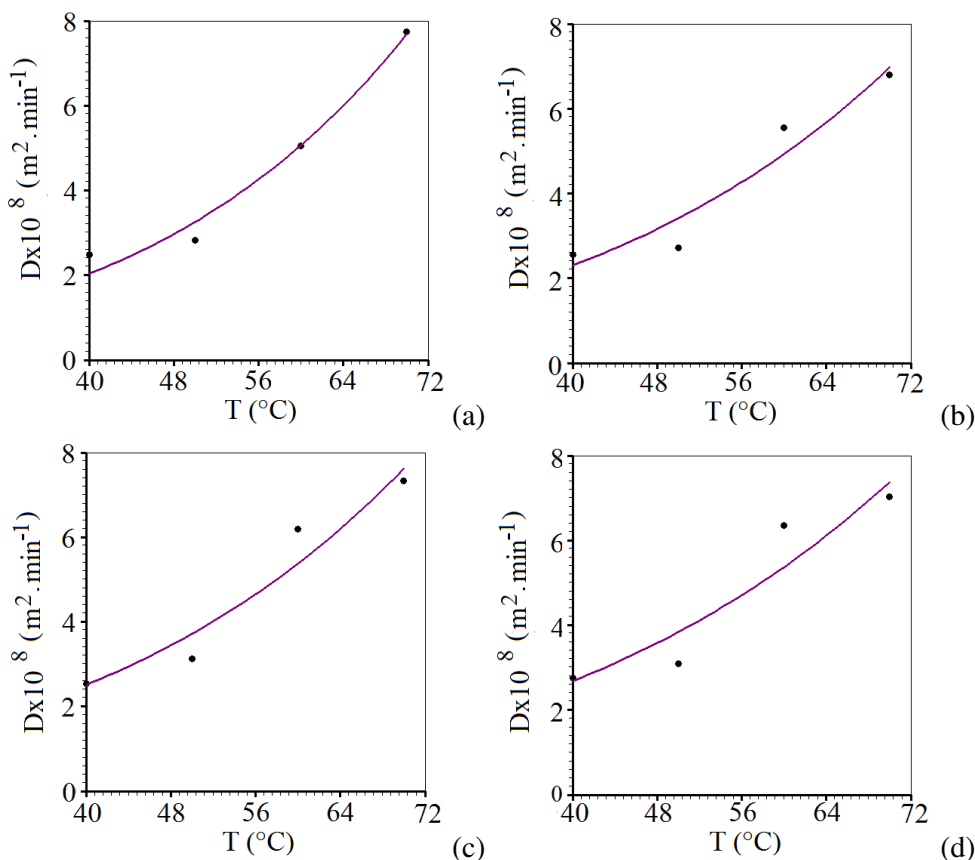


Figura 4. 76 – Difusividade efetiva versus temperatura para os comprimentos básicos de: (a) 10,00 mm; (b) 15,00 mm; (c) 20,00; mm; (d) 25,00 mm.

Na Figura 4.76, a significativa flutuação dos pontos em torno da curva ajustada é atribuída à falta de controle das condições experimentais, tais como temperatura e umidade relativa do ar no ambiente, bem como a flutuação da velocidade do ar de secagem durante o processo.

Tabela 4.16 – Resultados obtidos para a energia de ativação, o fator pré-exponencial de Arrhenius e os indicadores estatísticos.

C (mm)	$D_0 \text{ (m}^2 \text{ min}^{-1}\text{)} \times 10^3$	$E_a/R \text{ (K)}$	$E_a \text{ (kJ mol}^{-1}\text{)}$	$R^2$
10,00	0,8161	4761,5	39,6	0,978892
15,00	7,2526	3964,3	33,0	0,927539
20,00	8,2322	3977,3	33,1	0,9321017
25,00	2,8466	3624,0	30,1	0,8858351

Na Tabela 4.16, “C” é o comprimento básico dos pedaços cilíndricos de bananas.

4.11.2 – Coeficiente transferência convectivo de massa

A dependência do coeficiente de transferência convectivo de massa “h” com a temperatura do ar de secagem, pode ser dada pela a seguinte equação:

$$h = A \exp\left(-\frac{B}{(T+273,15)}\right) \tag{4.3}$$

Os ajustes da Equação (4.3) aos dados das Tabelas de 4.12 a 4.15 relativos aos valores de h e são mostrados na Figura 4.77.

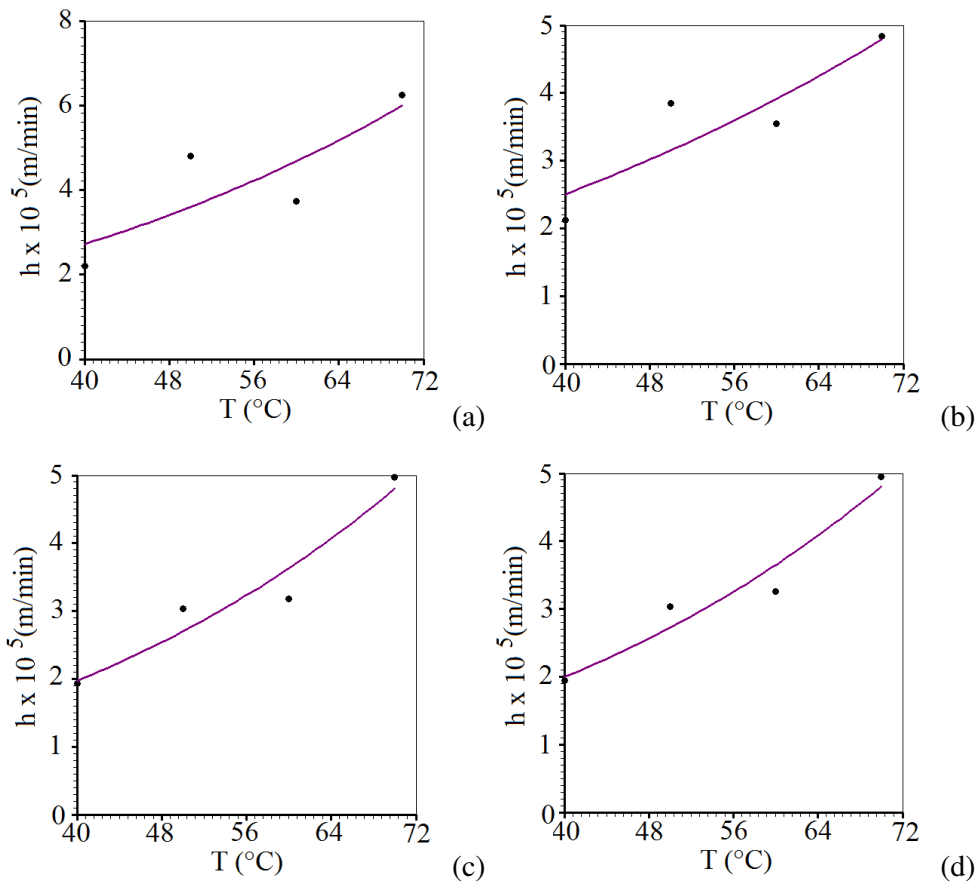


Figura 4.77 – Coeficiente convectivo versus a temperatura para os comprimentos básicos de: (a) 10,00; mm; (b) 15,00 mm; (c) 20,00 mm; (d) 25,00 mm.

Tabela 4.17 – Coeficiente transferência convectivo de massa, versus a temperatura.

C (mm)	A	B	R <sup>2</sup>
10,00	0,227233	2827,9	0,6920227
15,00	0,041860	2323,9	0,7970759
20,00	0,531341	3195,3	0,926831
25,00	0,464892	3149,1	0,941820

Apesar dos comprimentos dos pedaços cilíndricos de bananas terem sido obtidos com bitolas previamente estipuladas (10,00; 15,00 20,00 e 25,00 mm), os comprimentos efetivamente obtidos para cada temperatura tiveram uma certa flutuação de valores. Isto pode ter influenciado os resultados obtidos, que não apresentaram um bom coeficiente de determinação, particularmente para os cilindros de comprimentos básicos de 10,00 e 15,00 cm.

#### 4.11.3 – Discussão sobre a consideração de parâmetros constantes

Em muitos processos de secagem de sólidos cilíndricos, como é o caso de bananas, o encolhimento é tão significativo que este efeito não poderia ser descartado na descrição de tal processo. Em adição, pode acontecer que os parâmetros termo-físicos sejam variáveis, já que a estrutura interna do produto deve sofrer modificações significativas devido ao encolhimento. Nesses casos, a solução analítica pode não ser muito apropriada para descrever o processo difusivo. Tal processo poderia ser descrito de forma mais adequada se fossem considerados o volume e a difusividade variáveis. Neste caso, a equação de difusão deve ser resolvida numericamente.

Com relação às considerações do parágrafo anterior, deve-se observar que, mesmo nesses casos estudados, o otimizador proposto e acoplado à solução analítica da equação de difusão para um cilindro finito é útil. Isto porque, através da metodologia apresentada, podem-se extrair resultados que servem como valores iniciais para outros processos de otimização, particularmente quando tal processo envolve a solução numérica da equação de difusão.

Uma pergunta que poderia ser feita acerca dos resultados obtidos na descrição das cinéticas de secagem via solução analítica (volume e difusividade constantes) é a seguinte: se existe um forte encolhimento durante a secagem, que não foi considerado, porque os resultados são tão bons? Uma possível explicação é a seguinte: durante a



secagem ocorreu um forte encolhimento do produto e, também, uma modificação da difusividade efetiva de massa, devido às modificações ocorridas na estrutura interna do produto em consequência do encolhimento. Como estes dois fenômenos foram simultaneamente desconsiderados, nas hipóteses formuladas para a modelagem matemática da solução analítica, e os resultados foram bons, é possível que os seus efeitos tenham sido mutuamente cancelados.

Embora a determinação das raízes da equação característica do cilindro finito e a sua organização em tabelas acessíveis ao software desenvolvido seja uma tarefa árdua, a implementação computacional do algoritmo é bastante simples e esta é uma característica favorável da metodologia apresentada neste trabalho com relação ao uso da solução analítica da equação de difusão.

Diante dos argumentos apresentados, é de se esperar que as considerações da variação volumétrica e a consequente variação da difusividade efetiva de massa possam produzir resultados ainda melhores que os já obtidos até então. Para tal, a solução numérica será utilizada para determinar parâmetros termo-físicos e descrever as cinéticas de secagem.

#### **4.12 – Secagem de banana em pedaços: Solução Numérica**

Incluindo, agora a variação de volume e da difusividade efetiva de massa, a solução da equação de difusão deve ser numérica. Assim, serão realizados novos processos de otimização para a solução numérica (800 volumes de controle, com 2000 passos no tempo) para as secagens a 40,0; 50,0; 60,0 e 70,0 °C.

Nestas otimizações, a condição de contorno será a convectiva. Para isto, será proposta uma expressão para o volume e outra para a difusividade.

##### **4.12.1 – Encolhimento: expressão para o volume**

Em muitos trabalhos encontrados na literatura o encolhimento é considerado, mas não a possível variação da difusividade efetiva (QUEIROZ, 1994; QUEIROZ e NEBRA, 2001; LIMA et al., 2002).

Neste trabalho, será proposto uma expressão para o volume em função da razão de umidade, e uma outra para a possível conseqüência do encolhimento sobre a difusividade efetiva de massa.

Após a realização dos cálculos dos volumes em cada instante de tempo, foi observado que o encolhimento é, em média, de 70% a 80% do volume inicial. Tal retração não podia deixar de ser levado em consideração. Durante os experimentos já se percebeu visualmente que ocorre um forte encolhimento. Então, procurou-se investigar a relação entre o volume adimensional ( $V/V_0$ ) e a razão de umidade média ( $\bar{X}^*$ ).

Inicialmente, usando o LAB Fit Curve Fitting Software, foram realizadas análises estatísticas para verificar o valor do coeficiente de correlação R entre as duas grandezas: volume adimensional e razão de umidade. Os resultados obtidos são encontrados na Tabela 4.18.

Tabela 4.18 – Resultados do coeficiente de correlação R entre o volume adimensional ( $V/V_0$ ) e a razão de umidade média ( $\bar{X}^*$ ).

T (°C)	C (mm)	R
40,00	10,00	0,9639
	16,70	0,9374
	20,80	0,9703
	25,50	0,9129
50,0	10,60	0,9636
	17,49	0,9697
	21,00	0,9936
	28,93	0,9737
60,0	10,35	0,9452
	17,45	0,9323
	21,69	0,9506
	27,34	0,9754
70,0	11,98	0,9451
	16,73	0,9452
	21,71	0,9302
	27,30	0,9774

Uma inspeção da Tabela 4.18 possibilita concluir que uma relação linear é aceitável entre  $V/V_0$  e  $\bar{X}^*$ . Assim, utilizando LAB Fit Curve Fitting Software, foi plotado o gráfico do volume adimensional versus a razão de umidade usando, nos ajustes, uma função do tipo:

$$\frac{V}{V_0} = a + b\bar{X}^* \quad (4.4)$$

onde  $V$  é o volume da amostra cilíndrica para cada razão de umidade média,  $V_0$  é o volume inicial,  $V/V_0$  é o volume adimensional, “a” e “b” são os parâmetros de ajuste e  $\bar{X}^*$  é a razão de umidade média.

Os gráficos do volume adimensional versus a razão de umidade podem ser visualizados nas Figuras de 4.78 a 4.81, para todas as temperaturas do ar de secagem utilizadas, e para todos os comprimentos estudados de pedaços cilíndricos de bananas.

#### 4.12.1.1 – Temperatura de 40,0 °C

Para os dados experimentais obtidos, usando regressão linear, as relações entre o volume adimensional e a razão de umidade são dadas na Tabela 4.19.

Tabela 4.19 – Informações sobre as equações do volume adimensional, o volume inicial para  $T = 40,0$  °C, para todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados.

$C$ (m) x $10^3$	Equação	$R^2$	$V_0$ (m <sup>3</sup> ) x $10^6$
10,00	$V/V_0 = 0,8201 \bar{X}^* + 0,1791$	0,993173	3,6531
16,70	$V/V_0 = 0,8075 \bar{X}^* + 0,1918$	0,985775	6,4249
20,80	$V/V_0 = 0,8629 \bar{X}^* + 0,1309$	0,970418	8,8305
25,50	$V/V_0 = 0,9089 \bar{X}^* + 0,0820$	0,976850	11,5760

Os gráficos do volume adimensional versus a razão de umidade para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C podem ser observados na Figura 4.78.

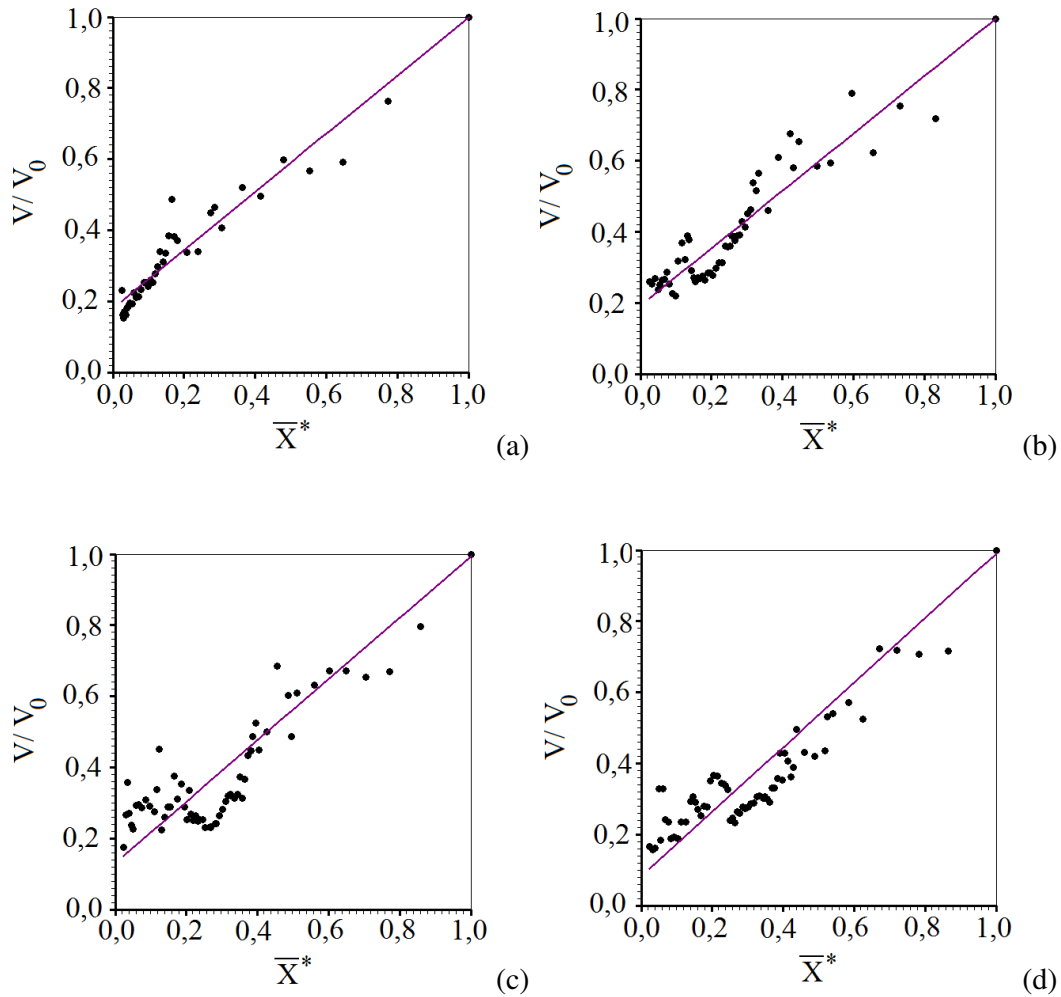


Figura 4.78 – Volume adimensional  $V/V_0$  versus Razão de umidade  $\bar{X}^*$  para a temperatura do ar de secagem de  $40,0\text{ }^\circ\text{C}$  para os comprimentos básicos:  
 (a)  $C = 10,00\text{mm}$ ; (b)  $C = 15,00\text{ mm}$ ; (c)  $C = 20,00\text{ mm}$ ; (d)  $C = 25,00\text{ mm}$ .

Ao serem analisados os gráficos da Figura 4.78, verifica-se que a relação entre  $V/V_0$  e  $\bar{X}^*$  pode ser razoavelmente considerada como uma função linear, pois existe uma distribuição que pode ser considerada aleatória dos pontos experimentais em torno da reta. Também, os indicadores estatísticos são razoáveis, como pode ser visto na Tabela 4.19. Naquela tabela também se encontram as equações que descrevem o volume adimensional em função da razão de umidade, para a temperatura do ar de secagem de  $40,0\text{ }^\circ\text{C}$ , para todos os comprimentos dos pedaços cilíndricos de bananas.

**4.12.1.2 – Temperatura de 50,0 °C**

Gráficos da razão de umidade versus o volume adimensional para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C podem ser observados na Figura 4.79.

Mais uma vez, é observado que o volume varia linearmente em função da razão de umidade.

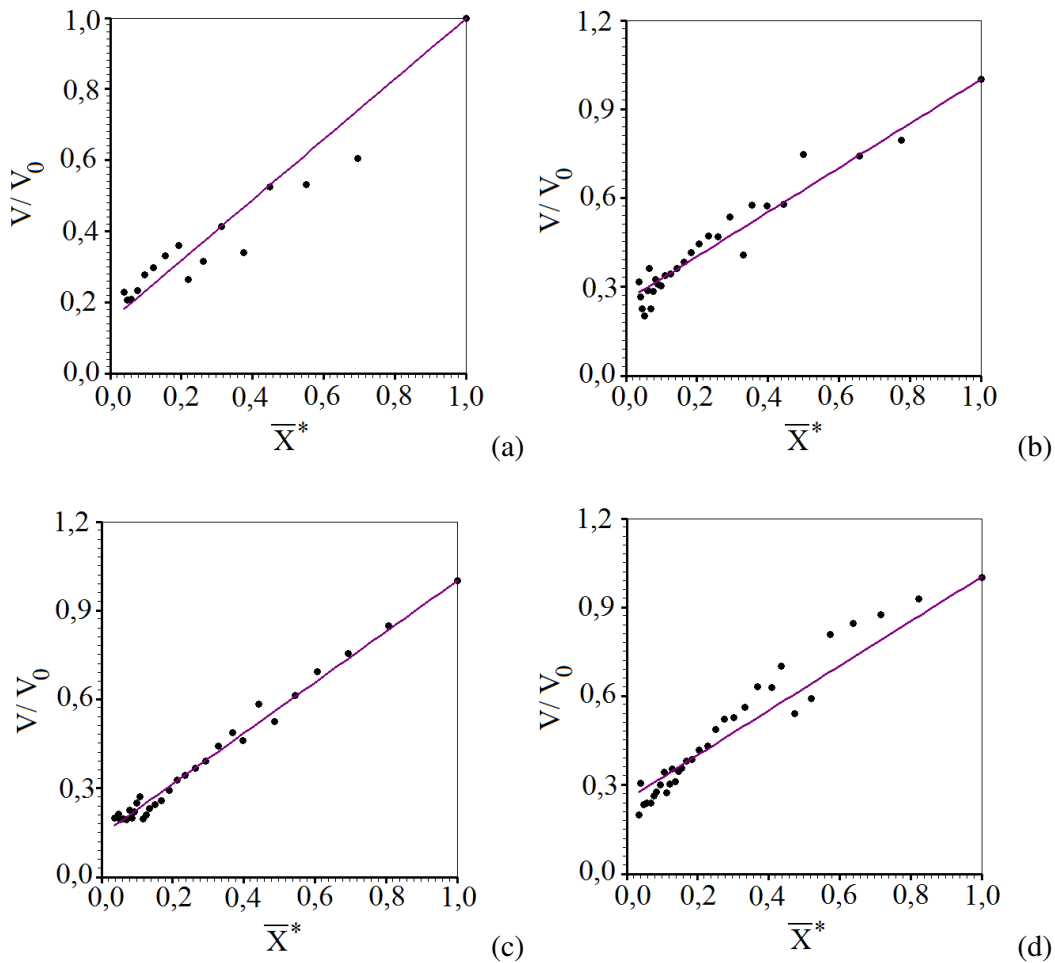


Figura 4.79 – Volume adimensional  $V/V_0$  versus Razão de umidade  $\bar{X}^*$  para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C para os comprimentos básicos: (a)  $C = 10,00$  mm; (b)  $C = 15,00$  mm; (c)  $C = 20,00$  mm; (d)  $C = 25,00$  mm.

Um resumo dos resultados obtidos para os ajustes é dado na Tabela 4.20.

Tabela 4.20 – Informações sobre as equações do volume adimensional, o volume inicial para  $T = 50,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , para todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados.

$C \text{ (m)} \times 10^3$	Equação	$R^2$	$V_0 \text{ (m}^3\text{)} \times 10^6$
10,60	$V/V_0 = 0,8503 \bar{X}^* + 0,1478$	0,989159	3,4598
17,49	$V/V_0 = 0,7482 \bar{X}^* + 0,12524$	0,992113	4,9368
21,00	$V/V_0 = 0,8579 \bar{X}^* + 0,1425$	0,998213	6,3367
28,93	$V/V_0 = 0,7529 \bar{X}^* + 0,2506$	0,985878	7,9661

Para a temperatura do ar de secagem de  $50,0 \text{ }^\circ\text{C}$  foi verificado, mais uma vez, uma forte tendência linear entre  $V/V_0$  e  $\bar{X}^*$ .

#### 4.12.1.3 – Temperatura de $60,0 \text{ }^\circ\text{C}$

Os gráficos do volume adimensional versus a razão de umidade para a temperatura do ar de secagem de  $60,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , bem como as expressões entre estas grandezas são mostrados através da Figura 4.80 e da Tabela 4.21, respectivamente.

Tabela 4.21 – Equações para o volume e os indicadores estatísticos, volume inicial para a temperatura de  $60,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , e todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados.

$C \text{ (m)} \times 10^3$	Equação	$R^2$	$V_0 \text{ (m}^3\text{)} \times 10^6$
10,35	$V/V_0 = 0,7435 \bar{X}^* + 0,2597$	0,969358	3,9997
17,45	$V/V_0 = 0,7677 \bar{X}^* + 0,2270$	0,973687	6,7220
21,69	$V/V_0 = 0,8298 \bar{X}^* + 0,1648$	0,980278	6,3367
27,34	$V/V_0 = 0,8454 \bar{X}^* + 0,1532$	0,990359	11,7913

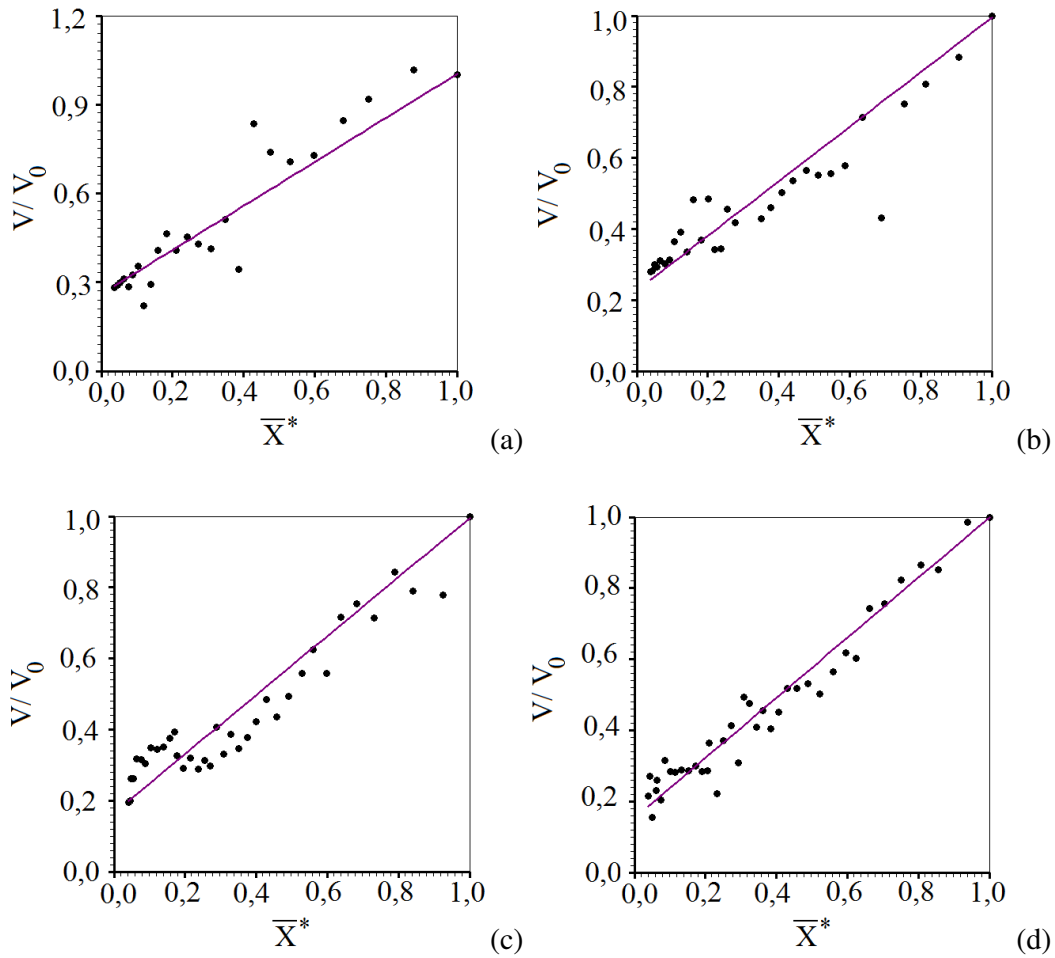


Figura 4.80 – Volume adimensional  $V/V_0$  versus Razão de umidade  $\bar{X}^*$  para a temperatura do ar de secagem de  $60,0\text{ }^\circ\text{C}$  para os comprimentos básicos: (a)  $C = 10,00$  mm; (b)  $C = 15,00$  mm; (c)  $C = 20,00$  mm; (d)  $C = 25,00$  mm.

Tanto nos gráficos da Figura 4.80 como nos dados da Tabela 4.21, nota-se que uma reta se ajusta razoavelmente bem aos dados experimentais.

#### 4.12.1.4 – Temperatura de $70,0\text{ }^\circ\text{C}$

Gráficos do volume adimensional versus da razão de umidade para a temperatura do ar de secagem de  $70,0\text{ }^\circ\text{C}$  são mostrados na Figura 4.81.

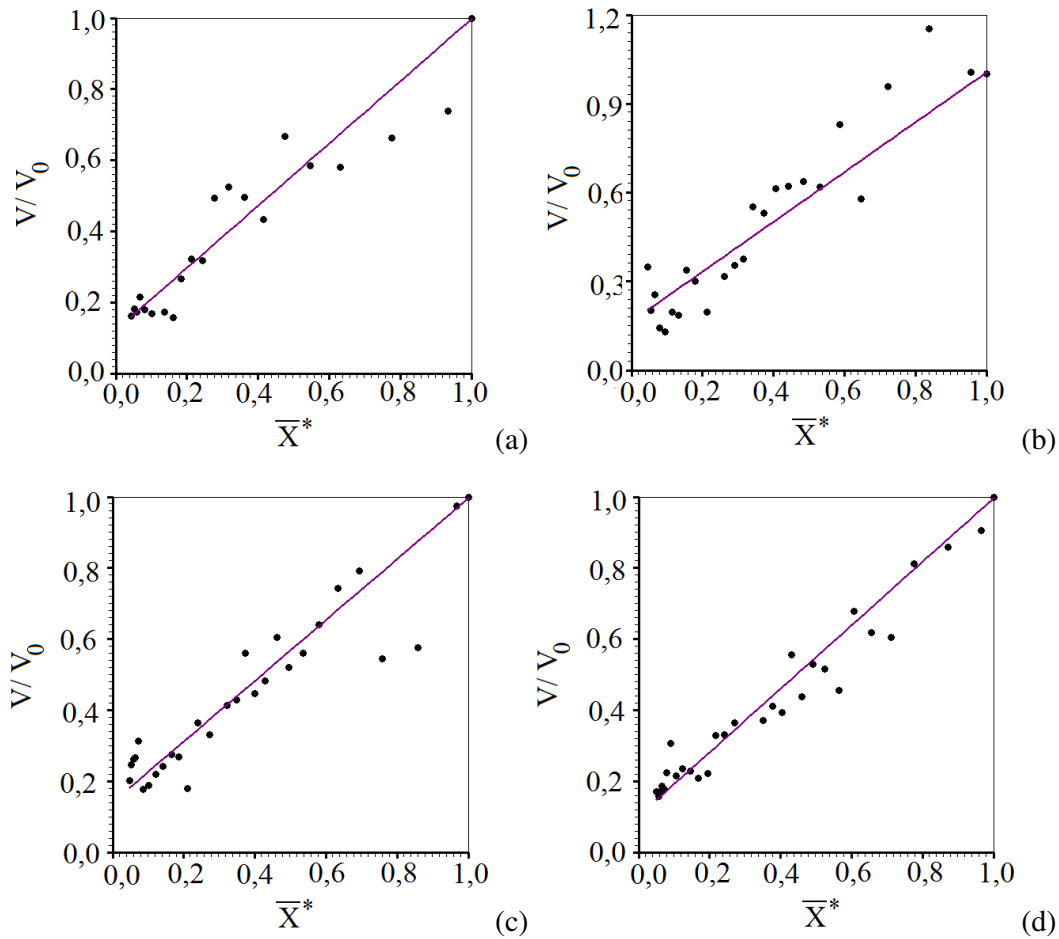


Figura 4.81 – Volume adimensional  $V/V_0$  versus Razão de umidade  $\bar{X}^*$  para a temperatura do ar de secagem de  $70,0\text{ }^\circ\text{C}$  para os comprimentos básicos: (a)  $C = 10,00\text{ mm}$ ; (b)  $C = 15,00\text{ mm}$ ; (c)  $C = 20,00\text{ mm}$ ; (d)  $C = 25,00\text{ mm}$ .

Os resultados obtidos para  $70,0\text{ }^\circ\text{C}$  são sumarizados através da Tabela 4.22.

Tabela 4.22 – Informações sobre as equações e o volume inicial para a temperatura de  $70,0\text{ }^\circ\text{C}$ , e todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados e os indicadores estatísticos.

$C\text{ (m)} \times 10^3$	Equação	$V_0\text{ (m}^3\text{)} \times 10^6$	$R^2$
11,98	$V/V_0 = 0,8759 \bar{X}^* + 0,1215$	2,9052	0,980305
16,73	$V/V_0 = 0,8407 \bar{X}^* + 0,1642$	3,9661	0,959629
21,71	$V/V_0 = 0,8557 \bar{X}^* + 0,1403$	6,3447	0,972398
27,30	$V/V_0 = 0,8938 \bar{X}^* + 0,1027$	7,3929	0,989625



Ao se fazer uma inspeção nos gráficos das Figuras de 4.78 a 4.81 e nas Tabelas de 4.19 a 4.22, pode-se verificar que, para bananas, os ajustes do volume adimensional versus a razão de umidade usando uma reta são bem razoáveis. Esta conclusão se apóia nos coeficientes de determinação obtidos e no fato de que a distribuição dos pontos experimentais em torno da reta pode ser considerada aleatória em todos os gráficos.

#### 4.12.2 – Difusividade efetiva de massa: expressão para a difusividade

Produtos agrícolas, quando submetidos à operação de secagem, sofrem um encolhimento bem acentuado. A banana tem um alto teor de umidade inicial, e isto implica em um encolhimento bastante acentuado. O produto sofre alterações em suas dimensões e na sua forma original, afetando a sua estrutura interna. Assim, deve-se esperar que tais alterações afetem a difusividade efetiva de massa. Por isto, neste item, para propor um modelo de secagem que se aproxima da realidade, além do encolhimento, a difusividade efetiva de massa também será considerada variável.

Segundo vários autores, uma difusividade dada por uma função crescente em função da razão de umidade deve descrever melhor os dados da cinética de secagem do que uma difusividade constante. Neste trabalho, optou-se por uma expressão disponível na literatura para a difusividade efetiva em função da razão de umidade local, dada da seguinte forma (MARINOS-KOURIS e MAROULIS, 1995; SILVA, C., 2010):

$$D = b \exp(aX^*) \quad (4.5)$$

Com a utilização da expressão para a difusividade variável, os parâmetros termo-físicos, podem ser obtidos o conforme o estudo apresentado na Seção 3.12.

#### 4.12.3 – Otimização usando a solução numérica

Para descrever o processo de secagem usando volume e difusividade efetiva de massa variável, foi considerada a condição de simetria axial, que foi tratada no Capítulo 3, no Item 3.5.6. Isto significa que só foi usada a metade do cilindro finito. Para isto, foi usada uma malha 40 x 20, que é adequada para a finalidade desejada. Esta malha foi escolhida baseada em relatos da literatura. Silva (2007), usou uma malha 24 x 24, e esta

já apresentou bons resultados. Assim, neste trabalho foi utilizada uma malha mais refinada, de 40 x 20 volume de controle, para apenas metade do cilindro finito.

A consideração de difusividade variável implica em não-linearidades a serem consideradas na solução numérica da equação de difusão. Os coeficientes “A” do sistema de equações resultante da discretização da equação de difusão dependem da difusividade e, conseqüentemente, da razão de umidade. Entretanto, a razão de umidade é a grandeza a ser determinada em cada passo do tempo. Este problema pode ser contornado diminuindo o intervalo de tempo em que os coeficientes “A” do sistema de equações são considerados constantes. Assim, as soluções numéricas da equação de difusão, durante os processos de otimização, foram realizadas com o tempo total de secagem dividido em 2000 passos, utilizando o software desenvolvido.

#### 4.12.3.1 – Temperatura de 40,0 °C

Realizando as otimizações para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para todos os comprimentos dos pedaços cilíndricos de banana estudados, os resultados são apresentados na Tabela 4.23.

Tabela 4.23 – Resultados para as otimizações na temperatura de 40,0°C.

C (mm)	Numérico	
10,00	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	9,0345686x10 <sup>-9</sup> exp(1,051023X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,6956490x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	2,0174012 x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9997337
16,70	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	9,1798027x 10 <sup>-9</sup> exp(1,396699X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,2276343x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	6,6203263 x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999136
20,80	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	7,5545614x10 <sup>-9</sup> exp(1,842409X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	1,8804452x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	3,5935119 x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999440
25,50	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	6,8760291x10 <sup>-9</sup> exp(2,221775X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	1,8056846x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	4,9338862 x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999356

Os resultados para a simulação da cinética de secagem para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, usando a solução numérica, podem ser observados na Figura 4.82.

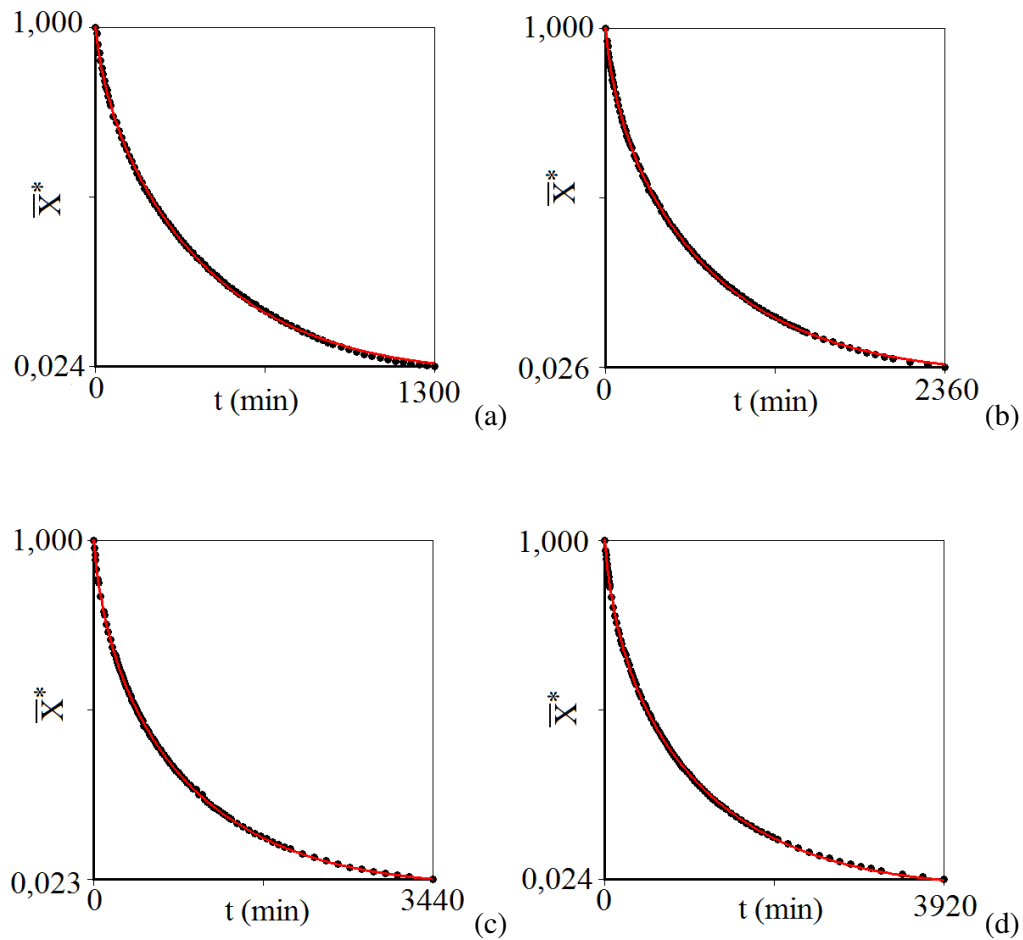


Figura 4.82 – Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura do ar de secagem de 40,0 °C, para as bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 10,00 mm; (b) 16,70 mm; (c) 20,80 mm e (d) 25,50 mm.

A Figura 4.83 mostra todas as cinéticas em um mesmo sistema de eixos.

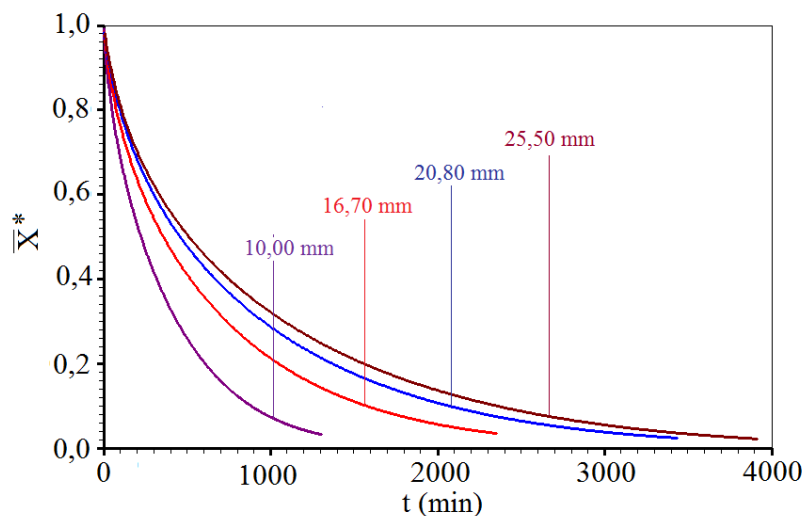


Figura 4.83 – Gráfico da cinética de secagem, para a temperatura de 40,0 °C, com todos os comprimentos estudados.

Na Figura 4.83, são mostradas as cinéticas de secagem para todos os comprimentos estudados em um mesmo sistema de eixos. Pode-se observar que a secagem ocorre mais rapidamente no pedaço de banana de menor comprimento, e o processo vai ficando mais lento à medida que o comprimento do pedaço de banana aumenta.

#### 4.12.3.2 – Temperatura de 50,0 °C

Realizadas as otimizações para a temperatura do ar de secagem de 50,0 °C, e para todos os comprimentos dos pedaços de bananas estudados, os resultados podem ser apresentados através da Tabela 4.24.

Após as otimizações, usando os parâmetros termo-físicos determinados, foi possível realizar as simulações das cinéticas de secagem para a temperatura de 50,0 °C. Tais simulações podem ser observadas através da Figura 4.84.

Tabela 4.24 – Resultados para as otimizações na temperatura de 50,0 °C.

C (mm)	Numérico	
10,60	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	8,6095122x10 <sup>-9</sup> exp(1,941582X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	4,4666973x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	4,6850494x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999141
17,49	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	8,8304057x10 <sup>-9</sup> exp(2,192236X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,7770793x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	4,0059473 x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999433
21,00	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	7,9288105x10 <sup>-9</sup> exp(2,554539X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,2122878x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	7,3335384x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999037
28,93	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	9,5181729x10 <sup>-9</sup> exp(2,321261X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,1673759x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	5,3165079 x10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9999298

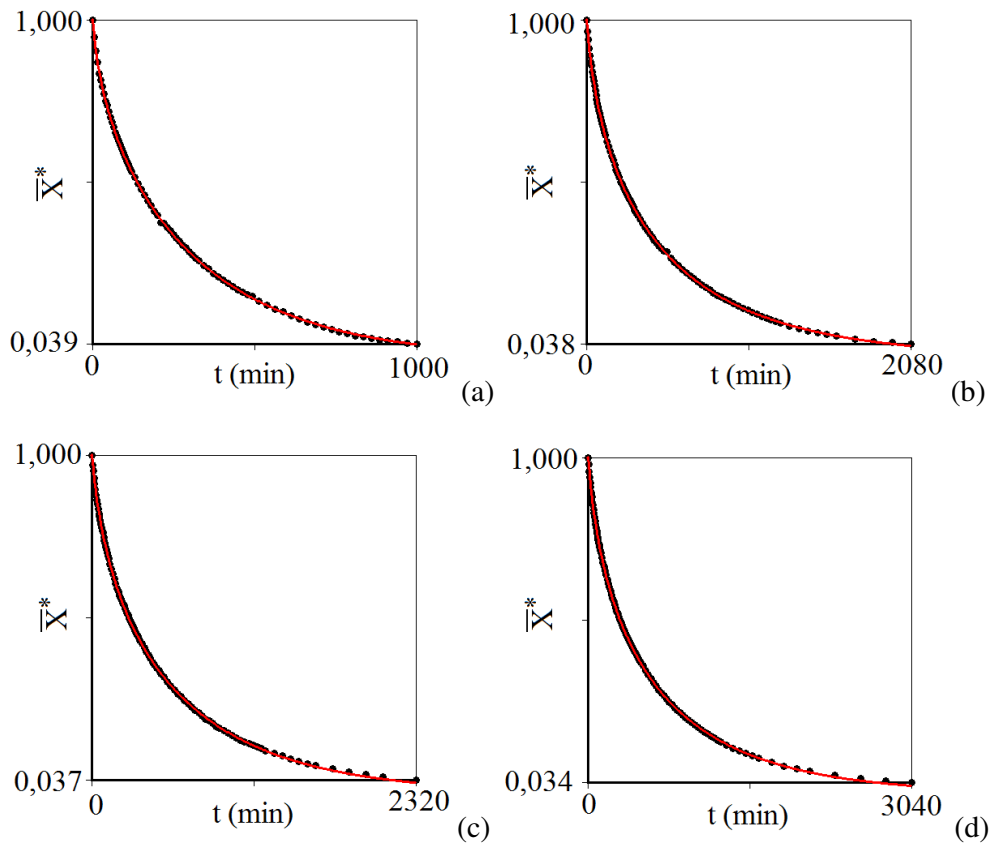


Figura 4.84 – Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura de 50,0 °C, para bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 10,60 mm; (b) 17,49 mm; (c) 21,00 mm e (d) 28,93 mm.

A Figura 4.85 mostra todas as cinéticas de secagem em um mesmo sistema de eixos.

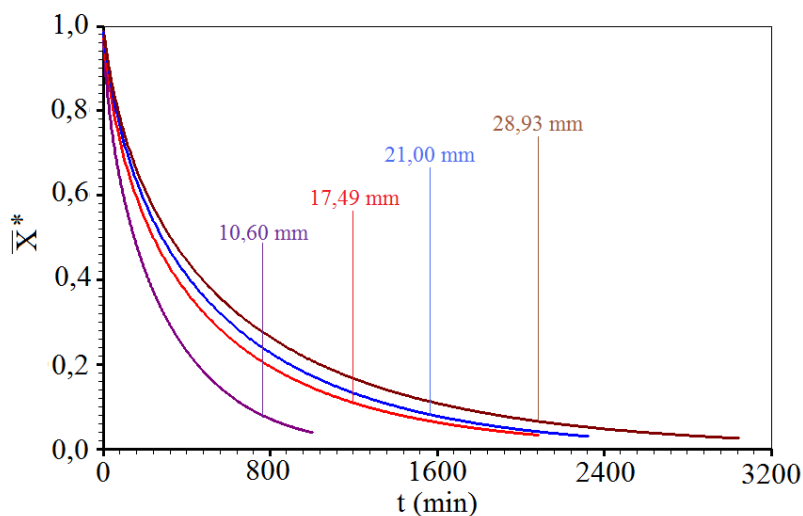


Figura 4.85 – Gráfico das cinéticas de secagem, para a temperatura de 50,0 °C.

#### 4.12.3.3 – Temperatura de 60,0 °C

Realizadas as otimizações para a temperatura do ar de secagem de 60,0 °C para todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 4.25.

Tabela 4.25 – Resultados das otimizações para a temperatura de 60,0 °C.

C (mm)	Numérico	
10,35	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	2,0344190x10 <sup>-9</sup> exp(0,9516569X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	4,2891152x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	1,5430833x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9997474
17,45	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,8819486x10 <sup>-9</sup> exp(1,671459X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	3,2734242x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	1,5614571 x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9997647
21,69	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,6664812x10 <sup>-9</sup> exp(2,273670X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,5723220
	χ <sup>2</sup>	1,5720674x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9997956
27,34	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,5263568x10 <sup>-8</sup> exp(2,652633X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,4269932x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	1,9579376x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9997644

Os resultados para as simulações da cinética de secagem para a temperatura de 60,0 °C podem ser observados na Figura 4.86.

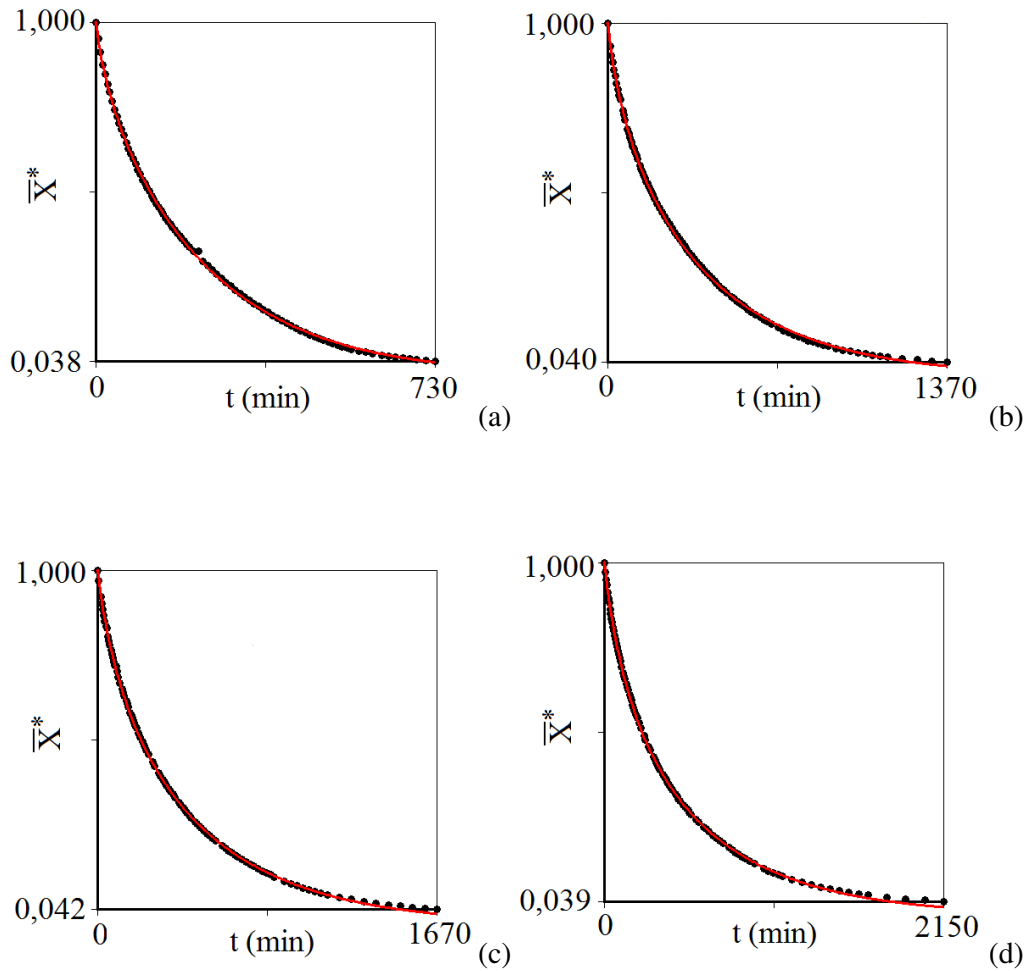


Figura 4.86 – Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura de 60,0 °C para bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 10,35 mm; (b) 17,45 mm; (c) 21,69 mm e (d) 27,34 mm.

A Figura 4.87 apresenta todas as cinéticas em um mesmo sistema de eixos.

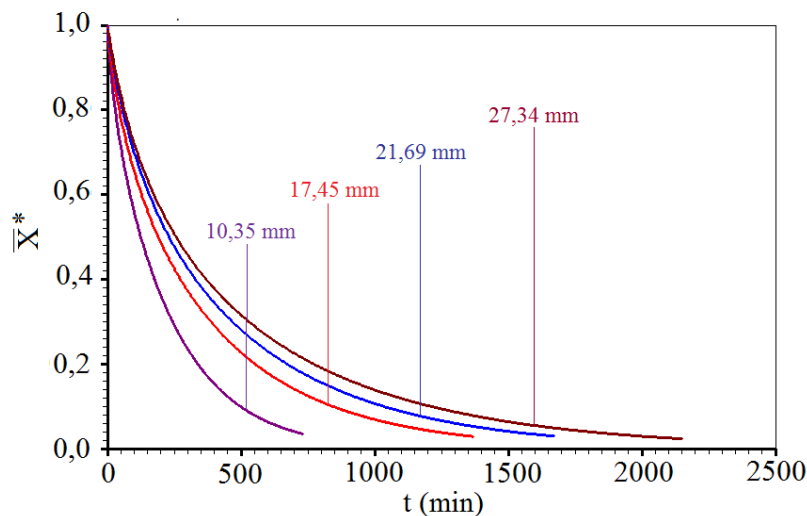


Figura 4.87 – Gráfico das cinéticas de secagem para a temperatura de 60,0 °C.

#### 4.12.3.4 – Temperatura de 70,0 °C

Realizadas as otimizações para a temperatura do ar de secagem de 70,0 °C, usando todos os comprimentos dos pedaços de banana estudados, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 4.26.

Tabela 4.26 – Resultados para as otimizações para a temperatura de 70,0 °C.

C (mm)	Numérico	
11,98	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,9365904x10 <sup>-8</sup> exp(2,275179X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	5,3106000x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	2,0735793 x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9996381
16,73	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,8096696x10 <sup>-8</sup> exp(2,351156X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	3,7824149x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	2,2622996 x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9996144
21,71	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,6818694x10 <sup>-8</sup> exp(2,883718X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	3,3798846 x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	3,1061857x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9995189
27,30	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,3708605x10 <sup>-8</sup> exp(3,344162X*)
	h (m min <sup>-1</sup> )	3,0299125x10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	4,3112184x10 <sup>-3</sup>
	R <sup>2</sup>	0,9992932

Os resultados para a simulação da cinética de secagem para a temperatura de 70,0 °C podem ser observados na Figura 4.88.



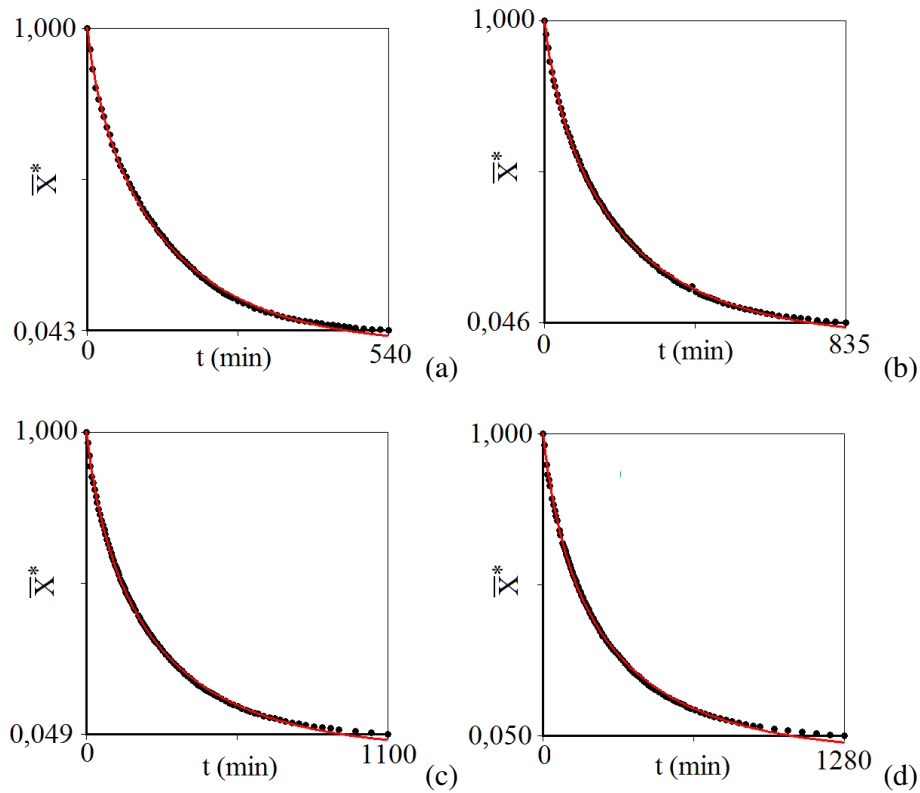


Figura 4.88 – Cinéticas de secagem obtidas para a temperatura de 70,0 °C, para bananas em pedaços com os seguintes comprimentos: (a) 11,98 mm; (b) 16,73 mm; (c) 21,71 mm e (d) 27,30 mm.

A Figura 4.89 apresenta todas as cinéticas em um mesmo sistema de eixos.

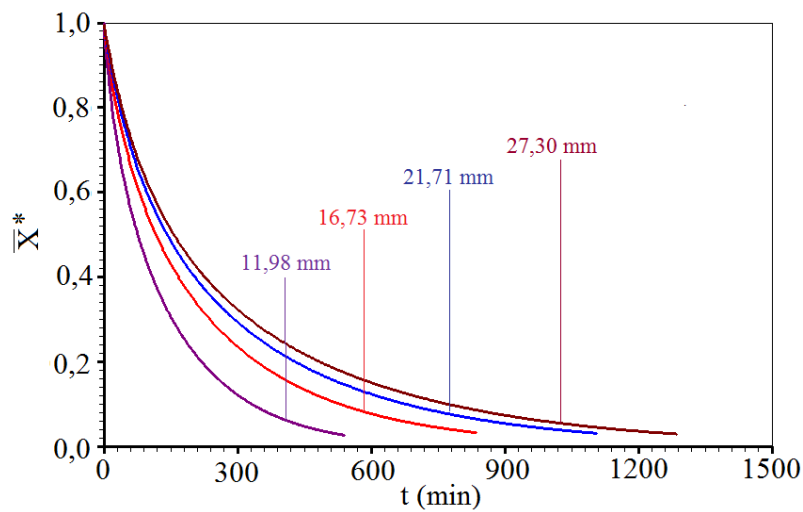


Figura 4.89 – Gráfico das cinéticas de secagem, para a temperatura de 70,0 °C.

#### 4.12.4 – Discussão sobre os resultados obtidos através da solução numérica

Como pode ser visto nas Tabelas de 4.23 a 4.26, os indicadores estatísticos para os resultados obtidos com difusividade e volume variáveis são significativamente melhores do que os resultados obtidos com volume e difusividade constante (Tabelas de 4.12 a 4.15). A consideração do encolhimento e da difusividade efetiva de massa variável produz melhores resultados para a cinética de secagem e, além disso, também retrata melhor a realidade do processo.

Através das Figuras 4.82 a 4.89, percebeu-se que, em todas as temperaturas, o tempo de secagem está relacionado com o comprimento das amostras: quanto mais espessa a amostra, maior é o tempo de secagem, como era esperado. Assim, mais à frente, será proposta uma expressão para a determinação do tempo de secagem em função do comprimento dos pedaços cilíndricos.

#### 4.13 – Distribuição de umidade no interior do cilindro finito

A Figura 4.90 mostra a metade de um cilindro finito destacando a área retangular onde será analisada a distribuição de umidade, para o modelo de secagem envolvendo volume e difusividade variáveis.

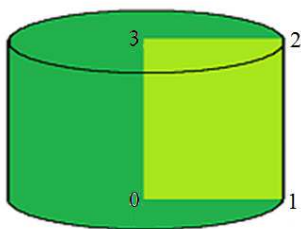


Figura 4.90 – Metade do cilindro finito destacando a área retangular onde será analisada a distribuição de umidade.

Distribuições de umidade em dois tempos específicos serão apresentadas para cada comprimento dos pedaços cilíndricos de bananas. Os gráficos de contorno (fora de escala) com tais distribuições do teor de umidade são apresentados nas Figuras de 4.92 a 4.95, dadas a seguir.

#### 4.13.1 – Temperatura de 40,0 °C

Para a temperatura do ar de secagem em 40,0 °C, as distribuições de umidade no interior do cilindro serão apresentadas em  $t = 100$  min (à esquerda) e em  $t = 650$  min (à direita), conforme pode ser observado na Figura 4.91.

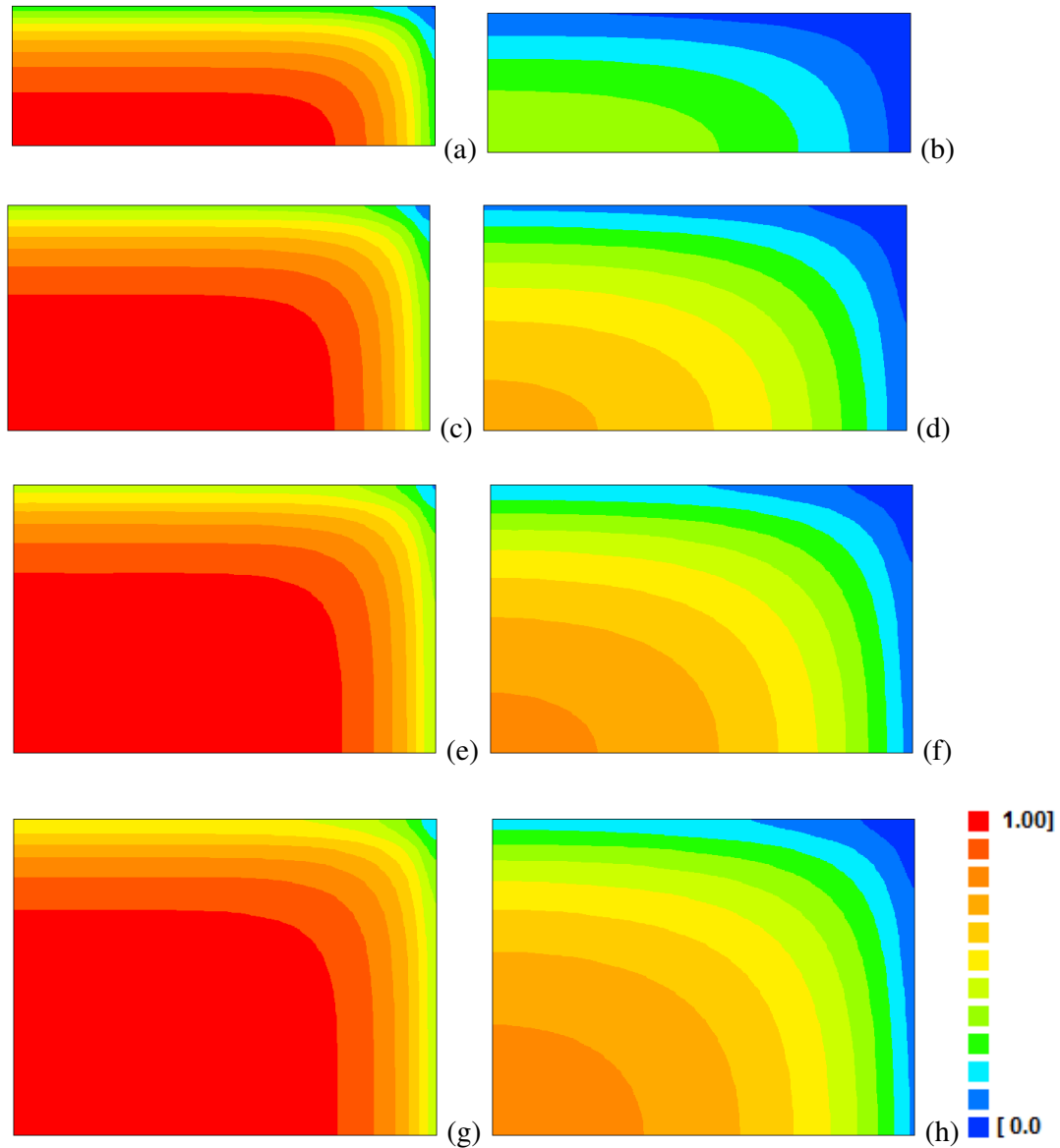


Figura 4.91 – Distribuição de umidade (fora de escala) para  $T = 40,0$  °C: (a) e (b)  $C = 10,00$  mm; (c) e (d)  $C = 16,70$  mm; (e) e (f)  $C = 20,80$  mm; (g) e (h)  $C = 25,50$  mm.

#### 4.13.2 – Temperatura de 50,0 °C

Para a temperatura do ar de secagem em 50,0 °C, as distribuições de umidade no interior do cilindro são apresentadas, novamente, em  $t = 100$  min (à esquerda) e em  $t = 650$  min (à direita), conforme pode ser observado na Figura 4.92.

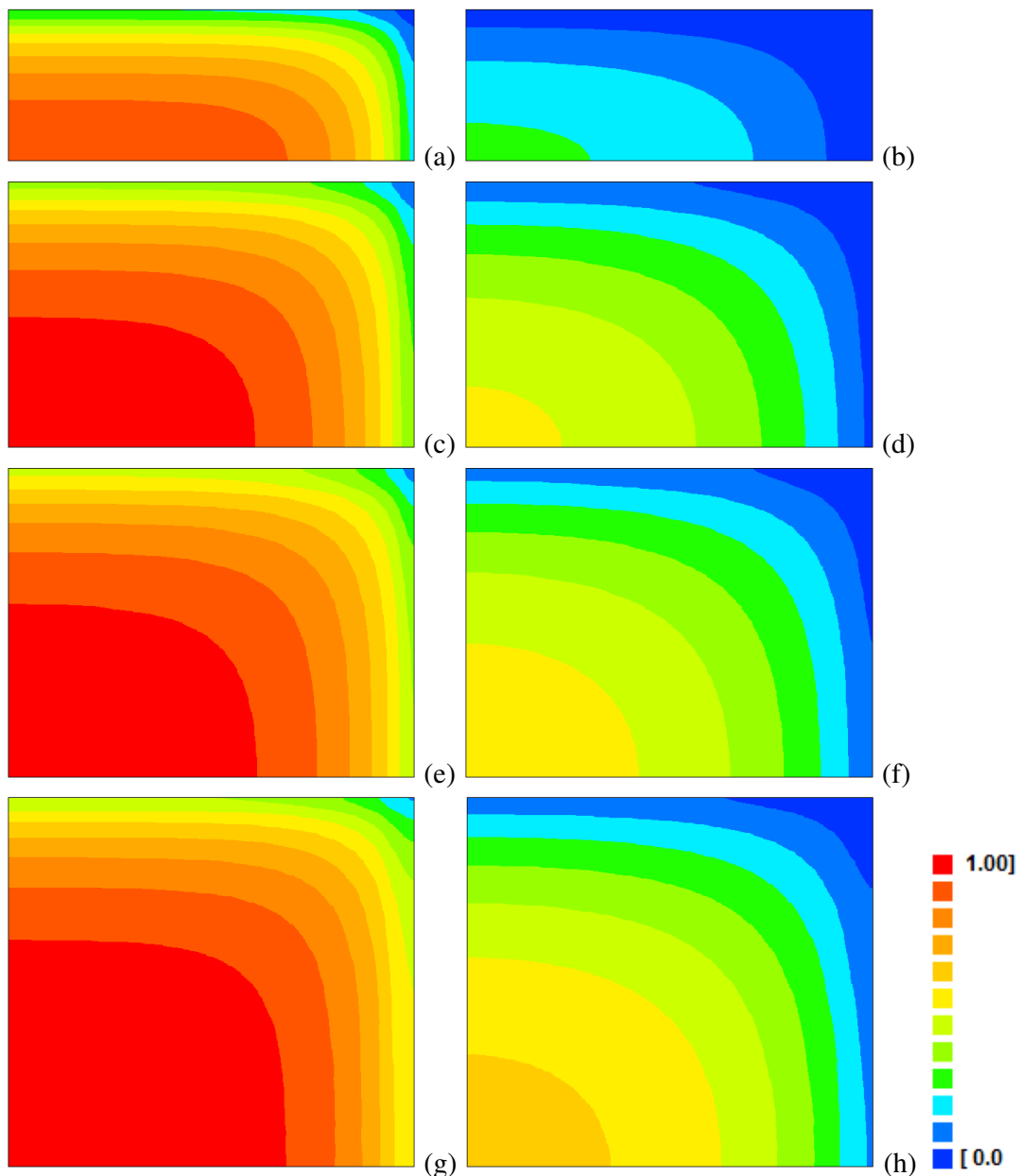


Figura 4.92 – Distribuição de umidade (fora de escala) para  $T = 50,0$  °C: (a) e (b)  $C = 10,60$  mm; (c) e (d)  $C = 17,49$  mm; (e) e (f)  $C = 21,00$  mm; (g) e (h)  $C = 28,93$  mm.

### 4.13.3 – Temperatura de 60,0 °C

Para a temperatura do ar de secagem em 60,0 °C, as distribuições de umidade no interior do cilindro são apresentadas em  $t = 100$  min (à esquerda) e  $t = 650$  min (à direita), conforme é mostrado na Figura 4.93.

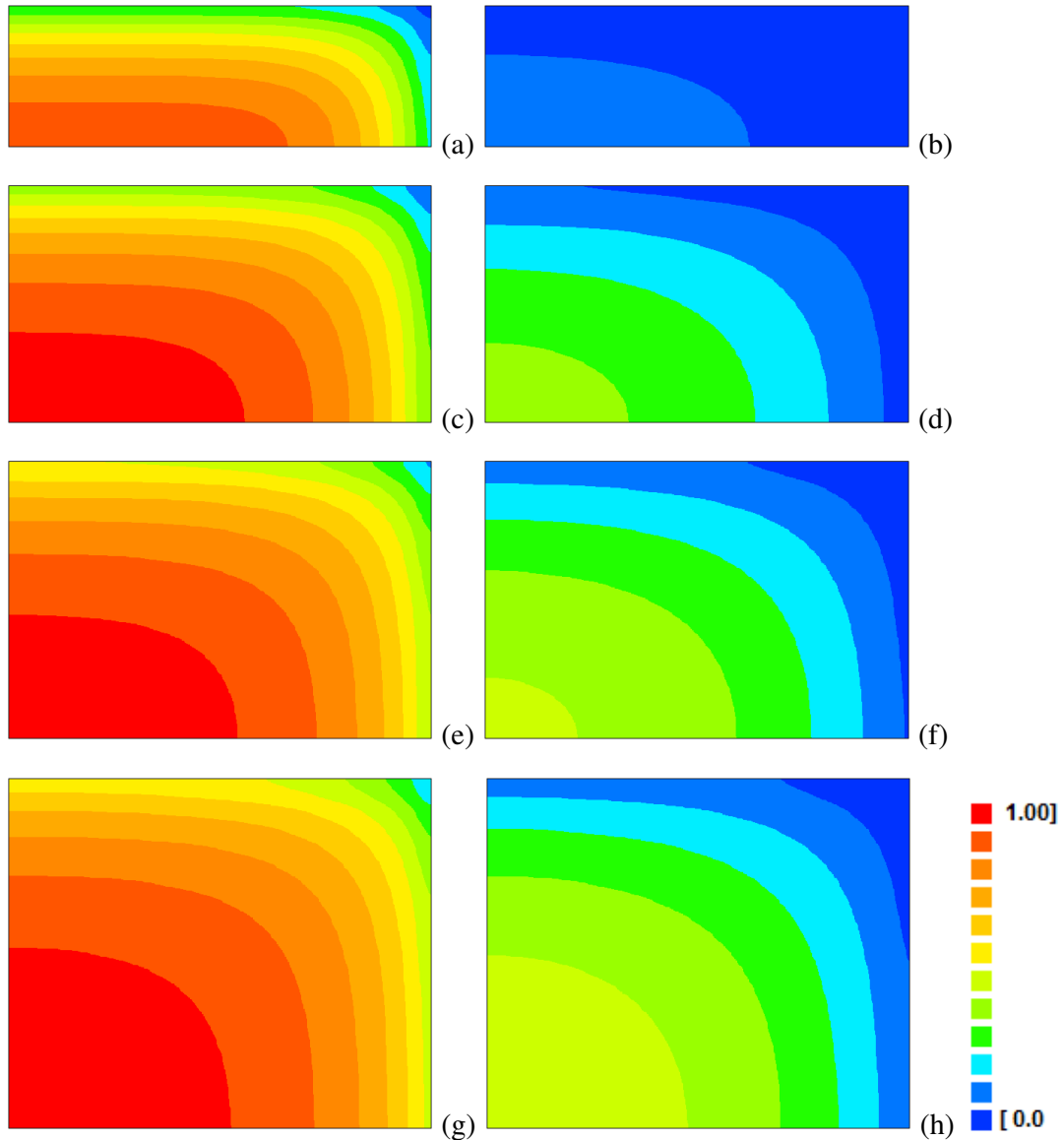


Figura 4.93 – Distribuição de umidade (fora de escala) para  $T = 60,0$  °C: (a) e (b)  $C = 10,35$  mm; (c) e (d)  $C = 17,45$  mm; (e) e (f)  $C = 21,96$  mm; (g) e (h)  $C = 27,34$  mm.

**4.13.4 – Temperatura de 70,0 °C**

Para a temperatura de 70,0 °C, as distribuições de umidade são mostradas na Figura 4.94.

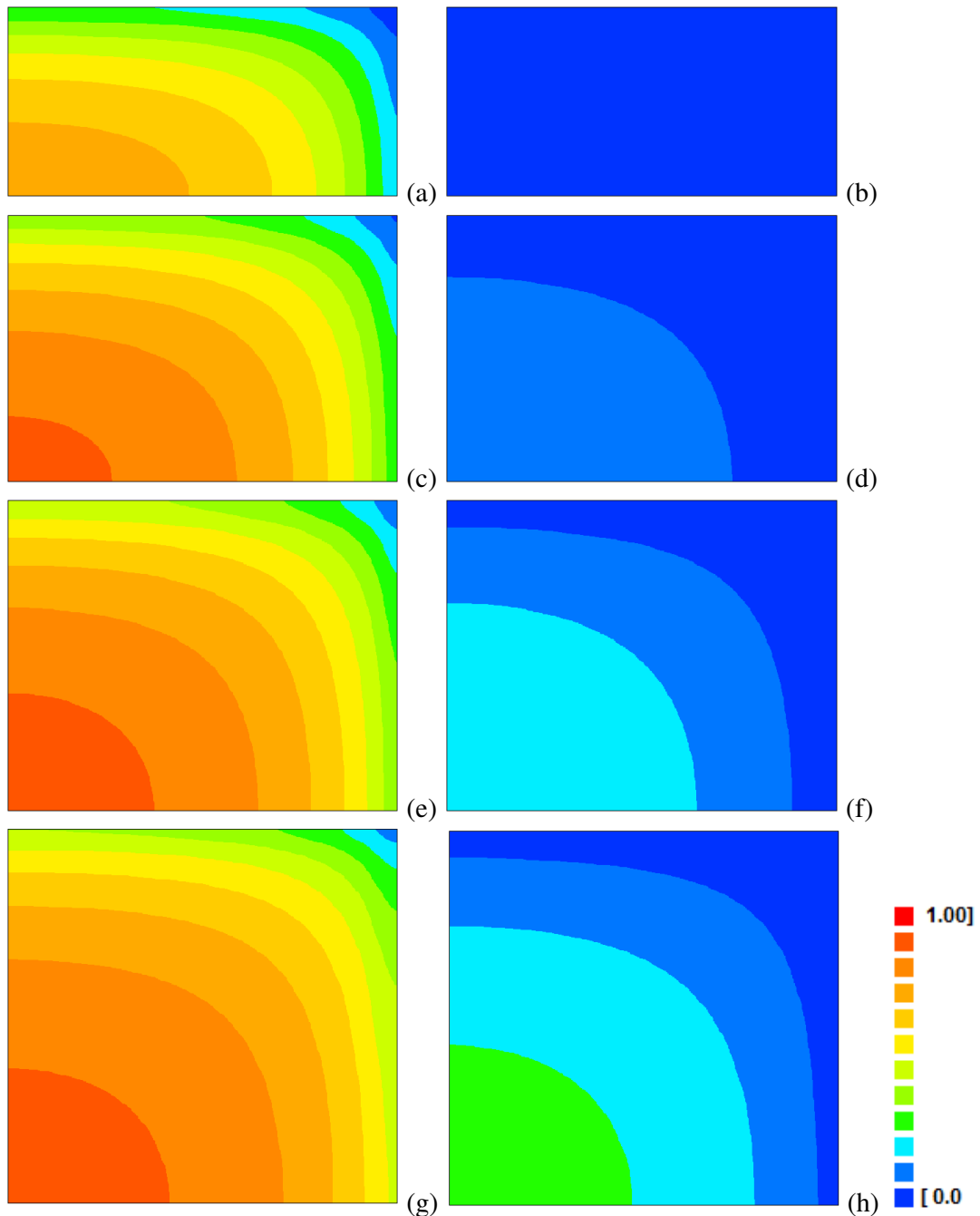


Figura 4.94 – Distribuição de umidade (fora de escala) para  $T = 70,0$  °C: (a) e (b)  $C = 11,98$  mm; (c) e (d)  $C = 16,73$  mm; (e) e (f)  $C = 21,71$  mm; (g) e (h)  $C = 27,30$  mm.

Observando as figuras com as distribuições de umidade, apresentadas nesta seção, verifica-se que a região “2” (Figura 4.90), que está em contato com o meio a norte e a leste, seca mais rápido do que a região “0” que corresponde ao centro do pedaço cilíndrico. Por outro lado, a região “1” que está em contato com o meio somente a leste, tem uma velocidade de secagem intermediária entre as regiões “0” e “2”.

Foi observado que quanto maior for a temperatura do ar de secagem e menor for o comprimento do cilindro, mais rápido ocorre secagem. Pode-se concluir, então, que o tempo de secagem está relacionado com a temperatura do ar e o comprimento dos pedaços. A seguir, serão obtidas expressões para o tempo de secagem em função do comprimento dos pedaços cilíndricos, para uma dada temperatura.

#### 4.14 – Tempo de secagem versus comprimento

Após a conclusão de que o tempo de secagem está relacionado com o comprimento, dos pedaços cilíndricos, para relacionar estas grandezas procurou-se estabelecer uma função linear do tipo:

$$t = a C \quad (4.6)$$

onde  $t$  é o tempo de secagem, em minutos, “ $a$ ” é o parâmetro de ajuste, em  $\text{min mm}^{-1}$ , e “ $C$ ” é o comprimento, em milímetros.

Para uma dada temperatura, os dados do tempo de secagem para uma razão de umidade de 0,20 e o comprimento do pedaço cilíndrico foi relacionado através da Equação (4.6). Para isto, usou-se o LAB Fit Curve Fitting Software. Os gráficos podem ser visto na Figura 4.95, que mostra também a faixa de confiança em cada caso.

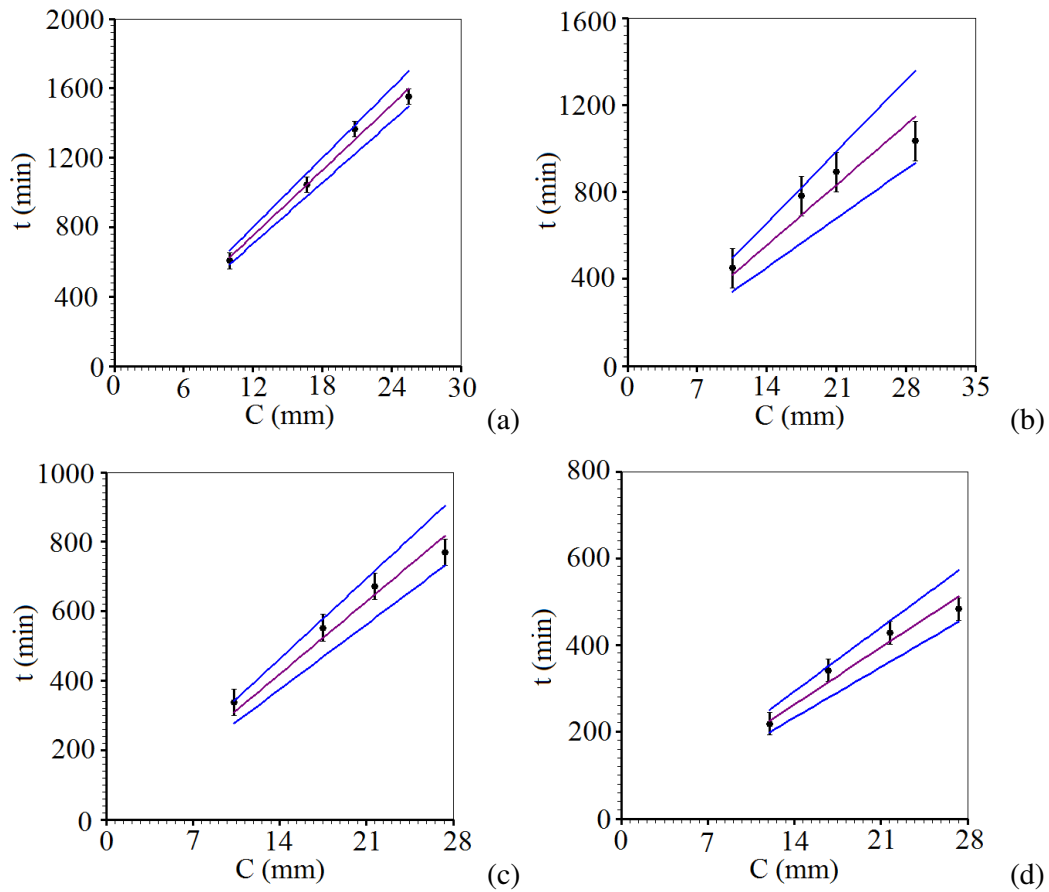


Figura 4.95 – Gráficos (com faixa de confiança) do tempo para a razão de umidade de 0,20 versus o comprimento, para a temperatura do ar de secagem de: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.

Na Tabela 4.27 têm-se as informações sobre o parâmetro “a” e o coeficiente de determinação de cada ajuste.

Tabela 4.27 – Informações sobre o parâmetro de ajuste e o indicador estatístico.

T (°C)	a (min/mm)	R <sup>2</sup>
40,0	(62,6 ± 1,2)	0,9877
50,0	(39,6 ± 2,2)	0,9334
60,0	(29,9 ± 1,0)	0,9848
70,0	(18,8 ± 0,7)	0,9572



Após uma inspeção nos gráficos da Figura 4.95 e nos resultados da Tabela 4.27, verifica-se que os coeficientes de determinação são razoáveis e que as incertezas são relativamente pequenas.

#### 4.14.1 – Discussão sobre modelos de secagem

Através das análises das cinéticas de secagem de bananas em pedaços, para todas as temperaturas estudadas, pode-se concluir que: o modelo envolvendo a não consideração do encolhimento e a consideração da difusividade efetiva de massa constante (solução analítica) apresenta indicadores estatísticos piores do que o modelo em que se considera o encolhimento e a difusividade efetiva de massa variável (solução numérica). Volume e difusividade variáveis representam melhor o fenômeno físico, já que não se pode ignorar o forte encolhimento sofrido pelas bananas durante a secagem. É provável, ainda, que o encolhimento afete a difusividade efetiva de massa, devido às modificações na estrutura interna das bananas.

Observando as Tabelas de 4.12 a 4.15 nota-se que quando foi considerado o volume e difusividade constantes, os indicadores estatísticos foram razoáveis. Assim, parece correto supor que a ausência dos dois efeitos (encolhimento e difusividade variável) resulta em erros que são mutuamente cancelados. Se esta hipótese estiver correta, os bons resultados obtidos com a solução analítica, estão explicados. Por outro lado, quando se considera os dois efeitos, volume e difusividade variáveis os resultados são ainda melhores. Além disso, este último modelo representa melhor o processo físico, por estar mais próximo da realidade.

Na literatura, é muito comum encontrar trabalhos que consideram a difusividade efetiva de massa constante, com o termo de difusão dado por (QUEIROZ e NEBRA, 2001; LIMA et al., 2002; KARIM e HAWLADER, 2005; BAINI e LANGRISH, 2007; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; BAINI e LANGRISH, 2008; KALETA e GÓRNICKI, 2010; RAHMAN e KUMAR, 2011)

$$D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right]. \quad (4.7)$$

Dessa forma, a equação de difusão pode ser resolvida tanto analítica como numericamente, pois a difusividade é considerada independente de  $r$  e de  $y$ . Neste caso, as soluções obtidas funcionam bem, especialmente se a difusividade efetiva de massa varia pouco dentro do produto em um dado instante de tempo  $t$  e, portanto, pode realmente ser considerada constante. A solução também funciona bem se a variação da difusividade efetiva de massa for considerada apenas em função do teor de umidade médio em um dado instante  $t$ , e não da posição no interior do cilindro. No entanto, se a solução é obtida dessa forma, a possibilidade de considerar a difusividade efetiva de massa variável, em função do teor de umidade local, não existe. Então, parece mais adequado considerar o termo difusivo dado da seguinte maneira

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rD \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \left( D \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right), \quad (4.8)$$

que permite supor a difusividade efetiva de massa tanto constante como variável, em função do teor de umidade local, como foi feito neste trabalho.

Para esta última situação, a equação de difusão deve ser resolvida numericamente, como também foi feito neste trabalho. Neste caso, a difusividade efetiva de massa pode ser considerada constante ou variável (em função do teor de umidade local), ampliando o limite de validade da solução numérica obtida. Assim, o modelo com difusividade variável pode ser proposto, resolvido e analisado.

Obviamente, um maior número de parâmetros para expressar a difusividade efetiva de massa deve melhorar o resultado obtido para a simulação da cinética de secagem. Mas o objetivo deste trabalho tem outro foco: em algumas situações físicas, tais como a secagem de bananas, considerar a difusividade efetiva de massa com um valor constante é inadequado do ponto de vista físico.

Como informação adicional, vale a pena mencionar que algumas expressões não mencionadas neste trabalho foram testadas para expressar a difusividade efetiva de massa em função do teor de umidade adimensional local, mas os melhores resultados foram obtidos através da Equação (4.5).

#### 4.15 – Secagem de bananas inteiras: solução numérica para elipsóides

Na secagem de bananas inteiras, para considerar o formato original da banana, foi apresentada a solução numérica da equação de difusão, escrita em coordenadas generalizadas, que foi utilizada para descrever o processo difusivo em um elipsóide, conforme foi detalhado no Item 3.7.2 do Capítulo 3.

As informações sobre as condições da secagem com ar quente estão disponíveis na Tabela 4.28, para todas as temperaturas do ar de secagem estudadas.

Tabelas 4.28 – Informações sobre as condições do ar de secagem e do ar ambiente.

Ar de secagem			Ar ambiente	
T (°C)	$\overline{UR}$ (%)	v (m/s)	$\overline{T}_a$ (°C)	$\overline{UR}$ (%)
40,0	30,5	1,59	29,5	52,0
50,0	20,3	1,84	30,3	59,3
60,0	10,4	1,70	30,2	48,3
70,0	6,6	1,50	30,1	48,4

As informações gerais sobre a secagem de bananas inteiras, tais como o comprimento e o diâmetro, teores de umidade de equilíbrio, inicial e final e ainda o tempo de secagem para cada temperatura encontram-se na Tabela 4.29, para cada temperatura do ar de secagem estudada.

Tabela 4.29 – Informações sobre as bananas inteiras, incluindo o tempo t de secagem.

T (°C)	C (mm)	d (mm)	$\overline{X}_{eq}$ (bs)	$\overline{X}_i$ (bs)	$\overline{X}_f$ (bs)	t (min)
40,0	179,00	31,48	0,1352	3,2162	0,2087	5665
50,0	141,00	29,80	0,1213	3,4336	0,2018	3805
60,0	143,00	29,54	0,1075	3,142	0,2243	2050
70,0	165,00	30,60	0,0936	2,899	0,2278	1680

#### 4.15.1 – Banana inteira: elipsóide

No estudo da secagem de bananas inteiras, a banana foi considerada como um elipsóide, conforme mostra a Figura 3.14, na Seção 3.8 do Capítulo 3. Tal elipsóide foi obtido através da revolução de uma elipse usada como área geratriz. Tal estratégia foi usada visando a uma economia no custo computacional dos processos de otimização.

A dimensão vertical da elipse é a metade do comprimento ( $C/2$ ) e a dimensão horizontal é igual ao raio ( $R$ ) de cada banana estudada. Foi imposto fluxo ao sul igual a zero, já que foi explorada a condição de simetria axial, e a oeste, devido à condição de simetria radial.

Todo o estudo foi realizado utilizando a condição de contorno do terceiro tipo, com volume e difusividade efetiva de massa variáveis. Por conta disso, a equação de difusão foi resolvida numericamente, utilizando o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita, conforme o detalhamento do Capítulo 3.

#### 4.15.2 – Equação que descreve a variação do volume adimensional $V/V_0$

Na literatura são encontrados alguns trabalhos que consideram a variação do volume (LIMA et al., 2002; QUEROZ e NEBRA; 2001) durante a secagem de bananas. Entretanto, a influência direta do encolhimento no valor do coeficiente de difusão não foi considerada nestes trabalhos. Este efeito é esperado devido à redução das dimensões do produto (SILVA et al., 2012), e será considerado no presente trabalho.

Como nas análises feitas com os pedaços cilíndricos da banana, usando o LAB Fit Curve Fitting Software, constatou-se que o volume adimensional  $V/V_0$  varia linearmente com a razão de umidade, e isto fica mais evidente através da Figura 4.96. Por outro lado, os coeficientes de determinação dos ajustes, bem como as expressões para  $V/V_0$  são encontrados na Tabela 4.30.

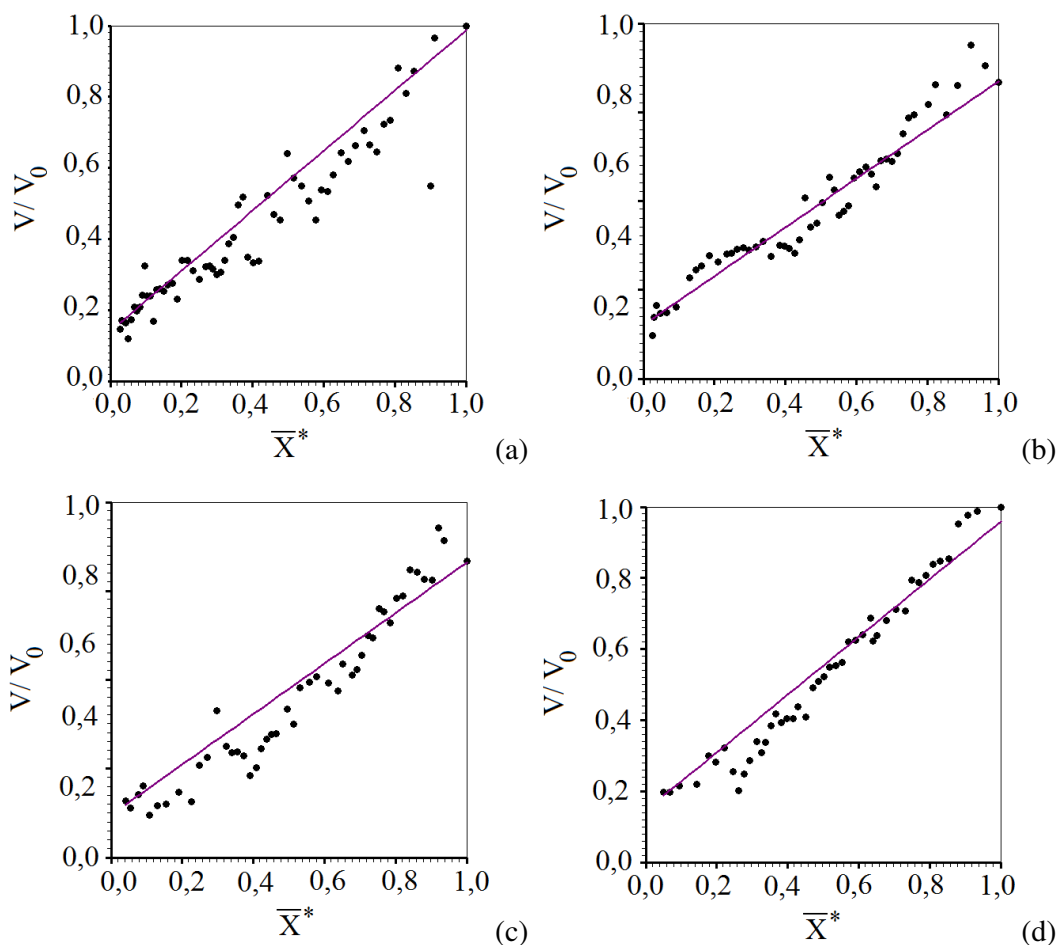


Figura 4.96 – Volume adimensional versus razão de umidade de bananas inteiras, para as temperaturas do ar de secagem de: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.

Tabela 4.30 – Informações sobre as equações para o volume adimensional.

T (°C)	Equação	R <sup>2</sup>	V <sub>0</sub> (m <sup>3</sup> ) x10 <sup>5</sup>
40,0	$V/V_0 = 0,8458 \bar{X}^* + 0,1409$	0,990361	13,9320
50,0	$V/V_0 = 0,8257 \bar{X}^* + 0,1815$	0,994320	9,8343
60,0	$V/V_0 = 0,8530 \bar{X}^* + 0,1432$	0,988734	9,8005
70,0	$V/V_0 = 0,8124 \bar{X}^* + 0,1466$	0,977750	12,1340

Na Figura 4.97, foram plotados os gráficos das relações entre  $V/V_0$  e  $\bar{X}^*$  em um mesmo sistema de eixos, em todas as temperaturas. Após uma inspeção nos gráficos nota-se que as retas são praticamente equivalentes para todas as temperaturas, e este resultado é semelhante ao que foi obtido por Bains e Langrish (2007).

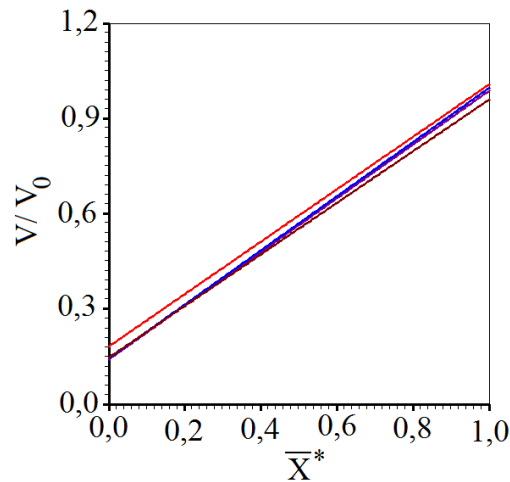


Figura 4.97 – Gráficos das relações entre  $V/V_0$  e  $\bar{X}^*$  para as diferentes temperaturas plotado em um mesmo sistema de eixos.

É importante salientar que as expressões de  $V/V_0$  em função da razão de umidade podem ser consideradas retas porque a descrição da secagem foi feita em temperaturas inferiores à de transição vítrea, na qual o encolhimento praticamente cessa.

O fato da relação entre o volume adimensional e a razão de umidade ser linear reforça a suposição de Lima et al. (2002), de que a variação no volume é igual ao volume da quantidade de água que é retirada durante a secagem de produto agrícola. Naturalmente, se a relação entre  $V/V_0$  e  $\bar{X}^*$  é dada pela Equação (4.4), então a diferenciação desta equação resulta em

$$\Delta V = V_0 b \Delta \bar{X}^* \quad (4.9)$$

ou seja: existe uma proporcionalidade entre  $\Delta V$  e  $\Delta \bar{X}^*$ . Isto significa que se a secagem ocorresse até o teor de umidade de equilíbrio ( $\Delta \bar{X}^* = -1$ ), a variação do volume seria  $\Delta V = -b V_0$ . Para os casos estudados, tais variações seriam, aproximadamente,  $\Delta V = -0,8 V_0$ .

Na Figura 4.98 pode-se observar a evolução da retração do volume, cuja redução foi aproximadamente 82%. É importante observar que as bananas utilizadas no

experimento têm grau de maturação elevado e que nas temperaturas estudadas o produto não atingiu a temperatura vítrea. Assim, a retração ocorreu até o final da secagem. Estes gráficos representam a retração nos tempos de 200, 400, 600, 800 e 1000 min, além dos instantes inicial e final de cada secagem. Uma inspeção da Figura 4.98 possibilita concluir que a retração ocorreu mais acentuadamente nos instantes iniciais da secagem, o que é explicado pela grande perda de água no início do processo.

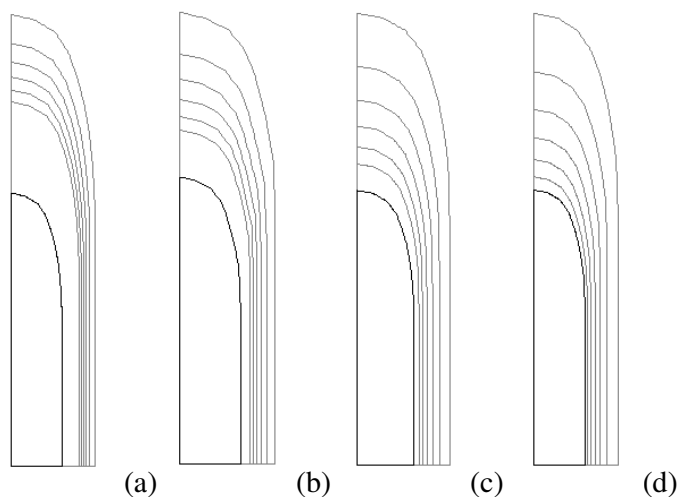


Figura 4.98 – Gráfico da evolução da retração do volume nos instantes inicial, 200, 400, 600, 800 e 1000 min e final para as temperaturas: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.

Conforme já foi mencionado, o encolhimento deve ter influência nos valores do coeficiente de difusão. Isto é esperado devido à “redução dos caminhos de saída de água”, devido à redução das dimensões do produto agrícola. Assim, para as bananas inteiras, também será levado em consideração à difusividade efetiva de massa variável, utilizando-se a Equação (4.5), que já foi usada na descrição da secagem de bananas em pedaços cilíndricos.

#### 4.15.3 – Malhas bidimensionais

Um pedaço de banana foi fotografado (Figura 3.27, Capítulo 3), e a foto foi impressa em uma folha de papel. Nesta cópia foram estabelecidos os contornos da

malha básica, com a marcação dos pontos que formam as linhas norte-sul e leste-oeste, conforme mostra a Figura 4.99(a). Em seguida, esta figura foi digitalizada, o que possibilitou a criação da malha estruturada não-ortogonal  $32 \times 40$ , conforme é mostrado na Figura 4.99 (b). As malhas bidimensionais foram geradas através do software 2D Grid Generation, V 5.1 (<http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/gg.htm>), desenvolvido por Silva (2008c). Essa malha foi escolhida baseada em relatos da literatura. Silva et al. (2011b), usaram uma malha  $20 \times 40$  para estudar o resfriamento de pepinos, e esta malha já apresentou bons resultados. Assim, neste trabalho, foi utilizada uma malha mais refinada,  $32 \times 40$ , para apenas a metade da banana.

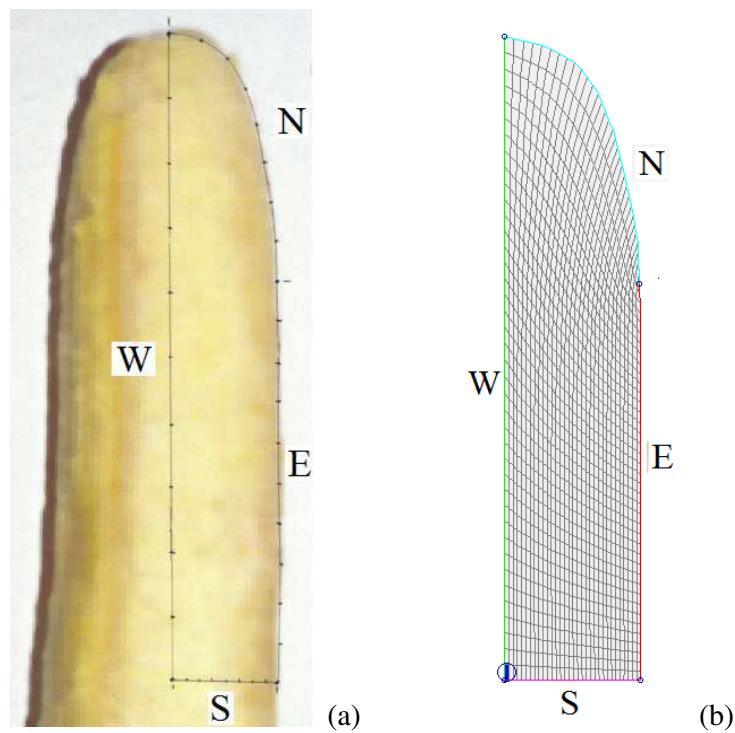


Figura 4.99 – (a) Metade da banana, mostrando um quarto de elipse; (b) malha estruturada não-ortogonal mostrando os limites norte (N), sul (S), leste (E) e oeste (W).

Na Figura 4.100, mostram-se as dimensões de um quarto da elipse que gira em torno do eixo  $y$ , formando o elipsóide que representa a metade da banana. Vale lembrar o uso, neste trabalho, das condições de simetria axial e radial. Com esta malha apresentada, pode-se obter os parâmetros termo-físicos que serão determinados por otimização.



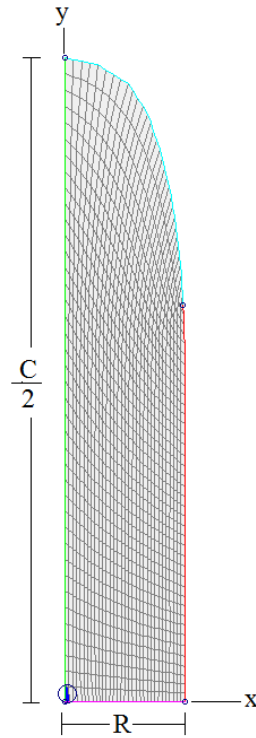


Figura 4.100 – Malha estruturada não-ortogonal 32 x 40. A metade simétrica da banana é gerada pela revolução da área geratriz em torno do eixo y.

#### 4.15.4 – Otimizações e cinéticas de secagem

O algoritmo de otimização, que é baseada no método inverso, foi desenvolvido de acordo com os passos descritos na Seção 3.12 do Capítulo 3.

Após a geração da malha, e com as expressões do volume (Tabela 4.30) e da difusividade (Equação (4.5)) definidos, foi utilizado o software Diffusion RE, desenvolvido por Silva (2008d). Vale lembrar que foram impostas a simetria radial (fluxo a oeste igual a zero) e também a simetria axial (fluxo ao sul igual a zero). Com os parâmetros termo-físicos (expressão para a difusividade  $D$  e o coeficiente de transferência convectiva de massa  $h$ ) determinados, as informações resultantes dos processos de otimização, para todas as temperaturas estudadas, são listadas na Tabela 4.31.

Tabela 4.31 – Informações sobre os resultados dos processos de otimização para bananas inteiras.

T (°C)	Numérico	
40,0	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	8,3763 x 10 <sup>-09</sup> exp(1,9652 X <sup>*</sup> )
	h (m min <sup>-1</sup> )	1,4294 x 10 <sup>-05</sup>
	χ <sup>2</sup>	3,3541 x 10 <sup>-04</sup>
	R <sup>2</sup>	0,999945
50,0	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	1,5566 x 10 <sup>-08</sup> exp(1,8872X <sup>*</sup> )
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,3369 x 10 <sup>-5</sup>
	χ <sup>2</sup>	8,31585 x 10 <sup>-4</sup>
	R <sup>2</sup>	0,999751
60,0	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	2,0152 x 10 <sup>-08</sup> exp(2,317201 X <sup>*</sup> )
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,3757 x 10 <sup>-05</sup>
	χ <sup>2</sup>	7,0756 x 10 <sup>-04</sup>
	R <sup>2</sup>	0,999774
70,0	D (m <sup>2</sup> min <sup>-1</sup> )	2,9639 x 10 <sup>-08</sup> exp (2,1926 X <sup>*</sup> )
	h (m min <sup>-1</sup> )	2,7618 x 10 <sup>-05</sup>
	χ <sup>2</sup>	7,22871x10 <sup>-04</sup>
	R <sup>2</sup>	0,999727

Fazendo uma inspeção na Tabela 4.31, verifica-se que os indicadores estatísticos são bons, e que os valores dos parâmetros termo-físicos aumentam com o aumento da temperatura.

Com os coeficientes transferência convectiva de massa e as expressões para difusividade efetiva de massa determinados, pode-se simular as cinéticas de secagem, para as temperaturas estudadas. Os gráficos que representam as cinéticas de secagem são mostrados na Figura 4.101. Na Figura 4.102 são mostradas todas as cinéticas desenhadas em um mesmo sistema de eixos.

Após uma inspeção nos gráficos da Figura 4.101, observa-se que as linhas que representam as simulações são praticamente coincidentes com os pontos experimentais mostrando, assim, que os resultados são bons. Na Figura 4.102, foi observado que para uma temperatura menor, a secagem ocorre mais lentamente do que para uma temperatura maior do ar de secagem.

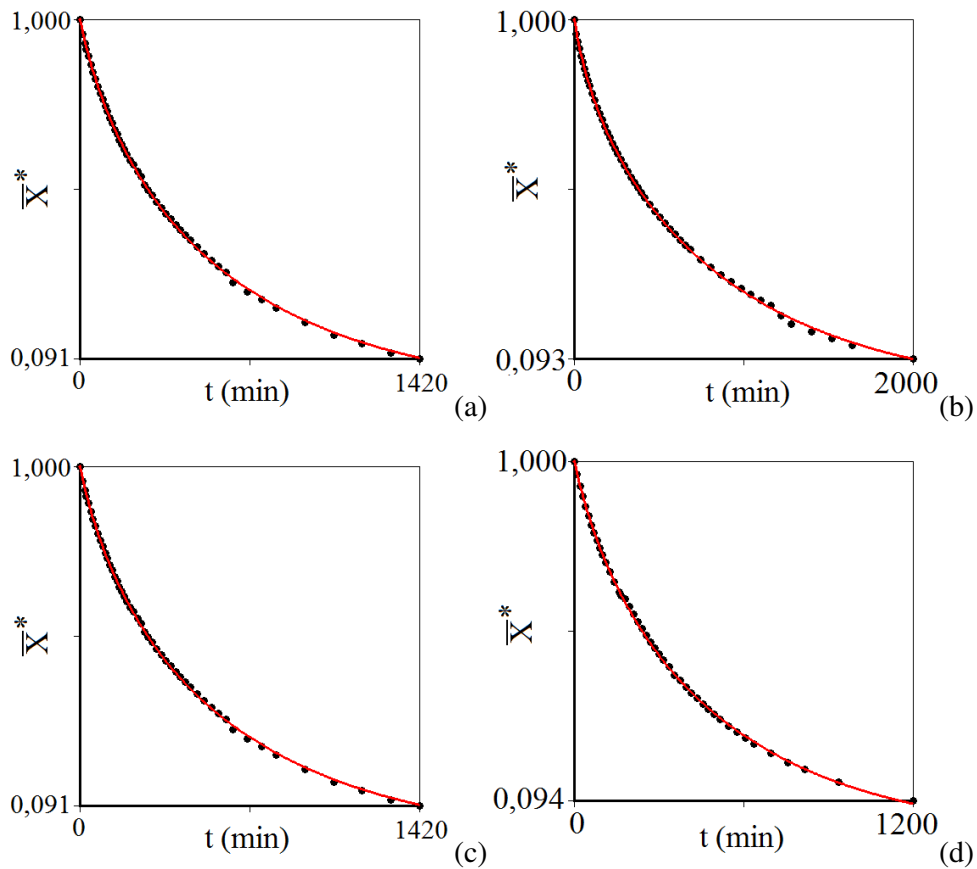


Figura 4.101 – Cinética de secagem obtida para banana inteira nas seguintes temperaturas: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C e (d) 70,0 °C.

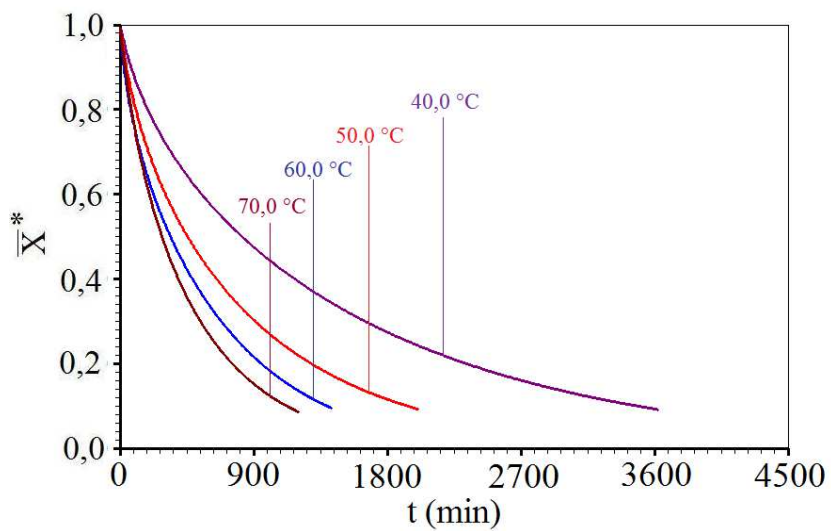


Figura 4.102 – Gráfico das cinéticas de secagem, para todas as temperaturas estudadas.

#### 4.15.5 – Distribuição de erros

Além dos indicadores estatísticos já definidos para a análise da qualidade das otimizações, no presente item também será determinada a distribuição de erros relativa à otimização para cada temperatura. A expressão para o cálculo do erro relativo ao  $i$ -ésimo ponto experimental é dada pela Equação (4.1), obviamente substituindo o termo  $X_i^{\text{ana}}$  por  $X_i^{\text{sim}}$ .

Na Figura 4.103 são mostradas as distribuições de erros e os respectivos valores médios do erro para cada temperatura de secagem de bananas inteiras.

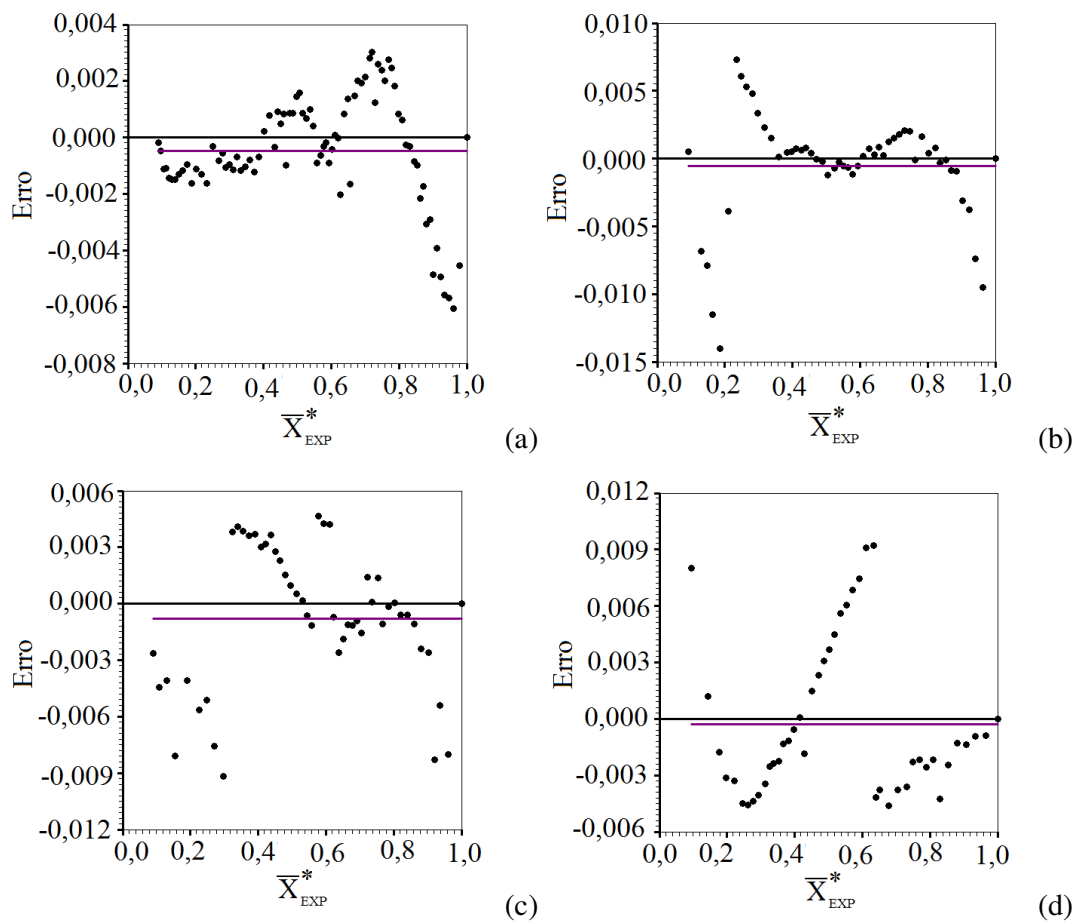


Figura 4.103 – Gráfico da distribuição de erro para a temperatura do ar de secagem de:

(a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 ° e (d) 70,0 °C.

Na Tabela 4.32, estão listados os erros médios relativos a cada temperatura. Observando esta tabela, vê-se que os erros médios são muito próximos de zero.

Tabela 4.32 – Erro médio para a banana inteira.

T °C	Erro médio
40,0	$(-4,92354 \pm 0,00021) \times 10^{-4}$
50,0	$(-5,5680 \pm 0,0005) \times 10^{-4}$
60,0	$(-8,1473 \pm 0,0005) \times 10^{-4}$
70,0	$(-3,0347 \pm 0,0006) \times 10^{-4}$

Fazendo-se uma inspeção nos gráficos da Figura 4.103 e na Tabela 4.32 pode-se concluir que, embora não se possa garantir que distribuição de erros seja completamente aleatória, o erro médio é muito próximo de zero para todas as temperaturas. Como se sabe, o valor médio esperado para os erros é zero, e este é mais um indicador positivo acerca da qualidade das otimizações realizadas.

#### 4.15.6 – Distribuição de umidade

Os gráficos de distribuição de umidade são mostrados, em tempos especificados para cada temperatura, nas Figuras de 4.104 a 4.107.

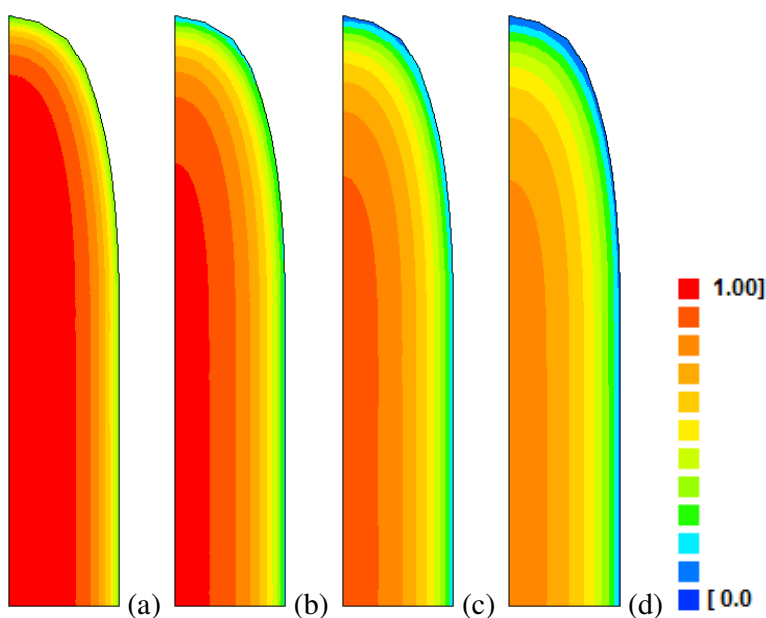


Figura 4.104 – Gráfico da distribuição de umidade para 40,0 °C nos instantes:

(a) t = 200 min; (b) t = 400 min; (c) t = 600 min; (d) t = 800 min.

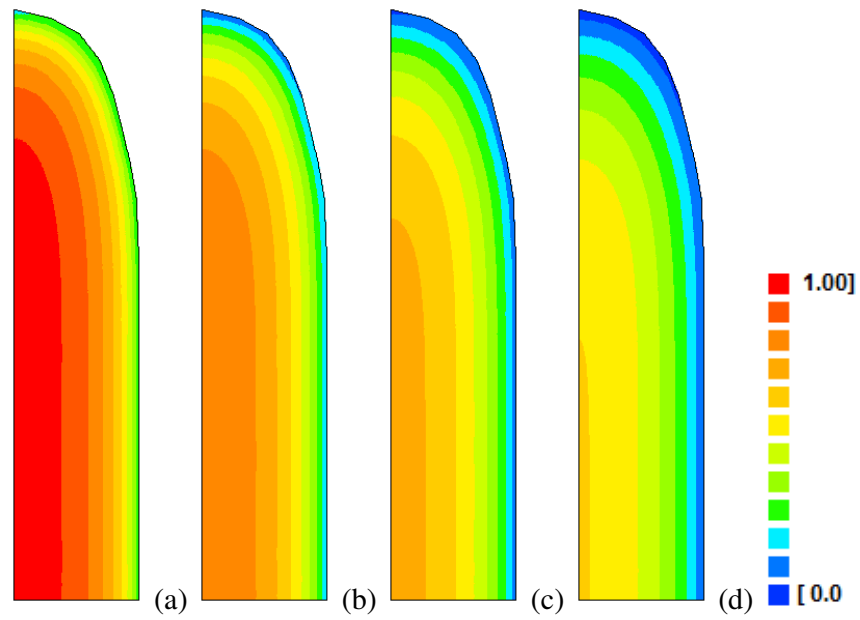


Figura 4.105 – Gráfico da distribuição de umidade para 50,0 °C nos instantes:

(a)  $t = 200$  min; (b)  $t = 400$  min; (c)  $t = 600$  min; (d)  $t = 800$  min.

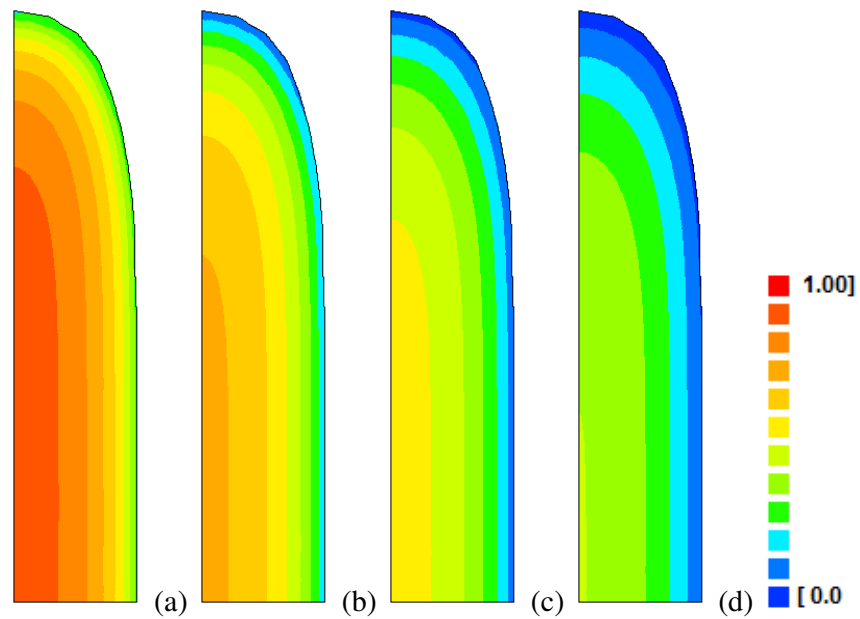


Figura 4.106 – Gráfico da distribuição de umidade para 60,0 °C nos instantes:

(a)  $t = 200$  min; (b)  $t = 400$  min; (c)  $t = 600$  min; (d)  $t = 800$  min.

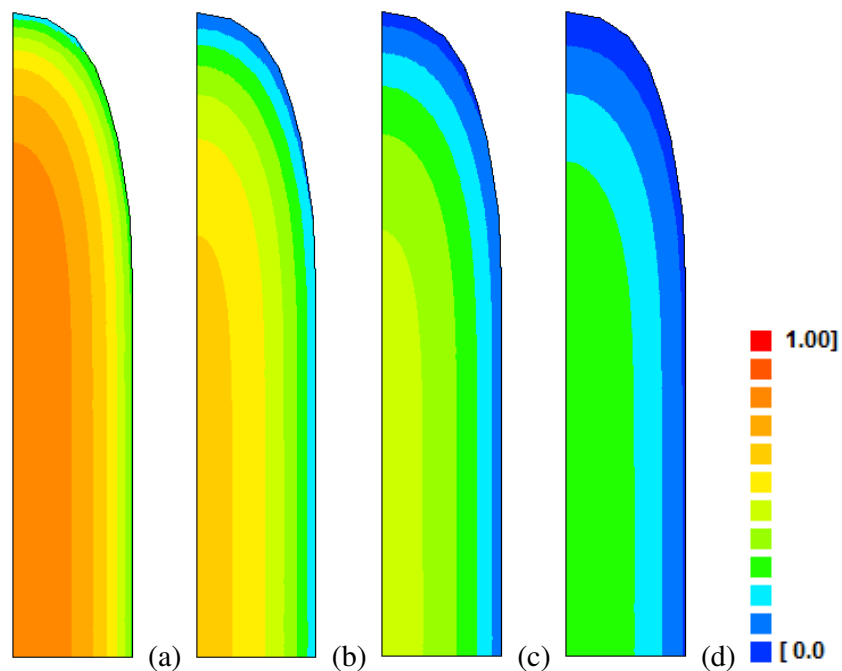


Figura 4.107 – Gráfico da distribuição de umidade para 70,0 °C nos instantes:  
(a) t = 200 min; (b) t = 400 min; (c) t = 600 min; (d) t = 800 min.

Uma inspeção nas Figuras de 4.104 a 4.107 possibilita concluir que a secagem de bananas inteiras ocorre mais rapidamente nas extremidades do produto. Esta informação seria impossível de ser obtida se a representação das bananas inteiras fosse feita através de um cilindro finito,

Para se ter uma idéia sobre o quão rápido é o processo em função da temperatura do ar de secagem, gráficos da distribuição de umidade em t = 200 min são mostrados para cada temperatura, na Figura 4.108. Nesta figura são realçadas as variações dimensionais entre as bananas usadas em cada experimento. Por outro lado, os gráficos de distribuição são traçados para um giro da malha de 180°, mostrando uma seção reta inteira para as metades das bananas.

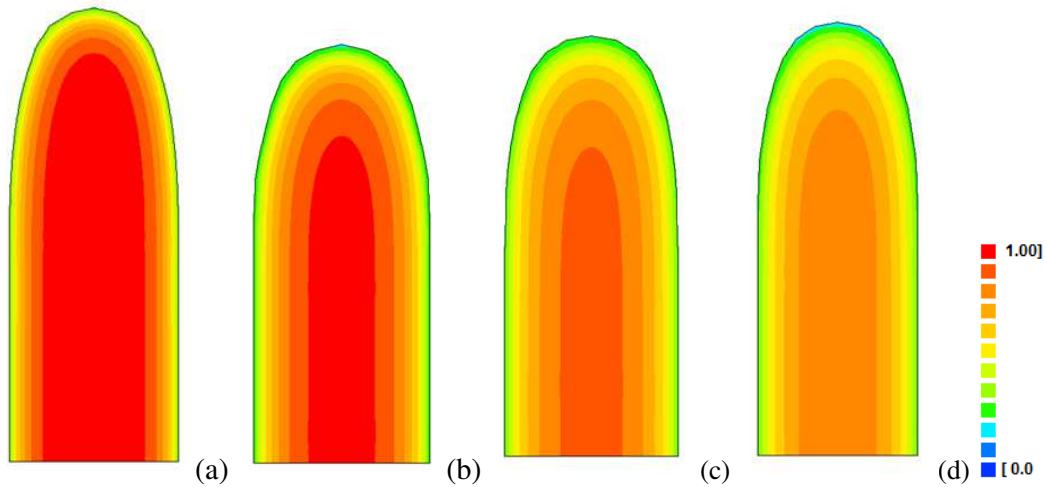


Figura 4.108 – Gráficos de contorno representando a distribuição de umidade no interior da metade da banana em  $t = 200$  min, nas temperaturas: (a) 40,0 °C; (b) 50,0 °C; (c) 60,0 °C; (d) 70,0 °C.

Conforme pode ser observado na Figura 4.108, à medida que a temperatura do ar de secagem aumenta, o produto seca mais rapidamente. Embora esta seja uma conclusão óbvia, os cálculos efetuados para a obtenção de tais figuras possibilitam determinar as tensões hídricas a partir da geometria real do produto.

#### 4.15.7 – Expressão para a difusividade efetiva

Após os processos de otimização, as expressões da difusividade em função do teor de umidade local foram apresentada na Tabela 4.31. Com estas expressões, foi plotado, em um mesmo sistema de eixos, para as temperaturas de 40,0; 50,0; 60,0 e 70,0 °C, o gráfico da difusividade versus a razão de umidade, como mostrado na Figura 4.109.



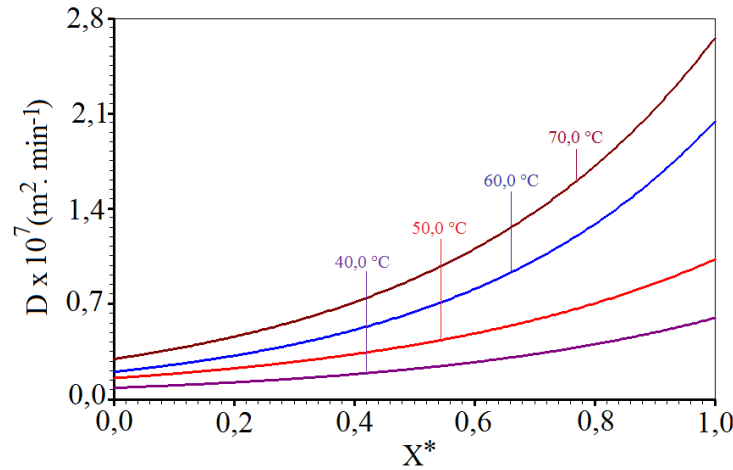


Figura 4.109 – Difusividades efetivas para as quatro temperaturas em função da razão de umidade local.

Através das quatro expressões para as difusividades, obtidas por otimização, foram determinados os valores da difusividade D para as seguintes razões de umidade: 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 e 1,0. Isto possibilitou montar a Tabela 4.33, dada a seguir (SILVA, C., 2010).

Tabela 4.33 – Valores da difusidade  $D \times 10^8 \text{ (m}^2\cdot\text{min}^{-1}\text{)}$  em função de T e  $X^*$ .

T (°C)	$X^*$					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
40,0	0,8376	1,2409	1,8384	2,7236	4,0349	5,9776
50,0	1,5566	2,2704	3,3114	4,8299	7,0446	10,2749
60,0	2,0152	3,2032	5,0916	8,0933	12,8646	20,4487
70,0	2,9639	4,5953	7,1245	11,0460	17,1258	26,5520

Ajustando a expressão para a difusividade disponível em Marinos-Kouris e Maroulis (1995), dada por

$$D = D_0 \exp(bX^*) \exp\left(-\frac{E_a}{R(T+273,15)}\right) \tag{4.10}$$

aos dados da Tabela 4.33, obtém-se o gráfico da Figura (4.110), em que “ $D_0$ ”, “ $b$ ” e “ $E_a/R$ ” são os parâmetros que foram determinados por ajuste de curvas.

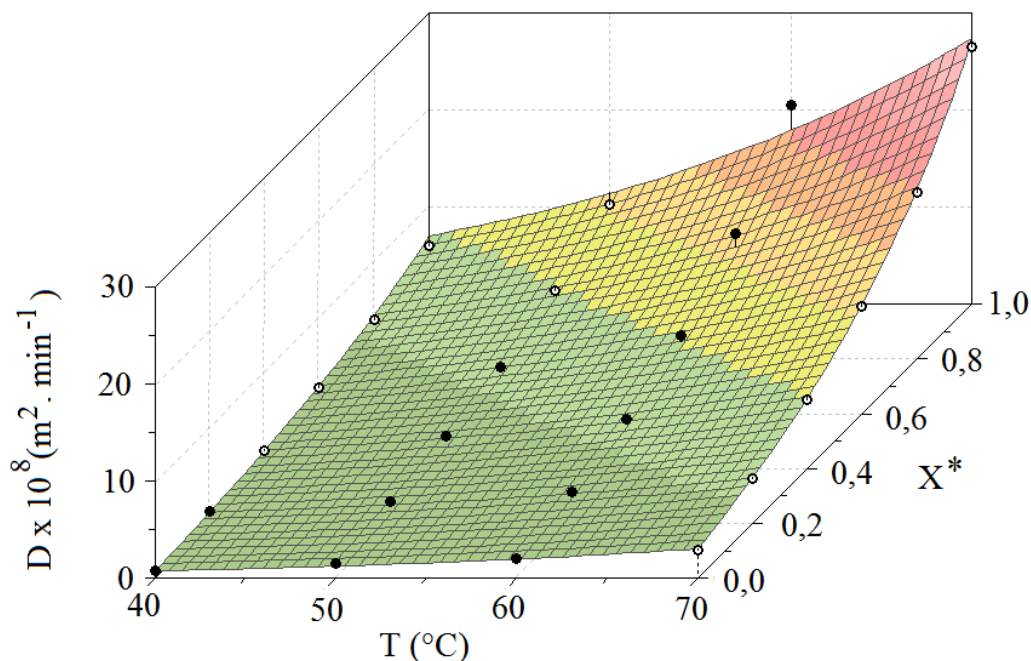


Figura 4.110 – Difusividade efetiva de massa  $D$  em função da temperatura  $T$  e da razão de umidade local  $X^*$ .

Na Figura 4.110, os círculos cheios representam pontos da Tabela 4.33 que estão acima ou sobre a superfície ajustada e os vazios representam pontos abaixo dessa superfície. Os resultados do ajuste são dados na Tabela 4.34.

Tabela 4.34 – Resultado do ajuste da Equação (4.10) e os indicadores estatísticos.

$D_0$ ( $\text{m}^2 \cdot \text{min}^{-1}$ )	$b$	$E_a/R$ (K)	$E_a$ ( $\text{KJ mol}^{-1}$ )	$R^2$	$\chi^2 \times 10^{15}$
$4,0167 \times 10^{-2}$	2,1878	4832,7	40,18	0,986907	1,29599

Com os dados da Tabela 4.34 e a comparação da Equação (4.10) com a equação de Arrhenius, dada pela Equação (4.2), torna-se possível determinar a energia de ativação, que também é dada na Tabela 4.34. Esta comparação ainda mostra que o fator

pré-exponencial da equação de Arrhenius, dado por  $D_0$ , resulta na expressão dada por:

$$D_0 = 4,0167 \times 10^{-2} \exp(2,1878X^*).$$

Com relação aos indicadores estatísticos referentes ao último ajuste, tanto o coeficiente de determinação  $R^2$  como o qui-quadrado  $\chi^2$  apresentou bons resultados e os valores estão também apresentados na Tabela 4.34.

O resultado obtido para a energia de ativação é compatível com resultados encontrados na literatura. Silva, C. (2010), usando dados de Queiroz (1994), utilizando um cilindro infinito com condição de contorno do terceiro tipo na secagem de bananas, encontrou um resultado compatível com o que foi obtido neste trabalho ( $E_a = 56,26 \text{ KJ mol}^{-1}$ ).

#### 4.15.8 – Coeficiente transferência convectivo de massa

A dependência do coeficiente de transferência convectivo de massa “h” com a temperatura do ar de secagem, dada pela Equação (4.3), foi obtida ajustando tal equação aos dados da Tabela 4.31 relativos aos valores de h, e tal dependência é mostrada na Figura 4.111.

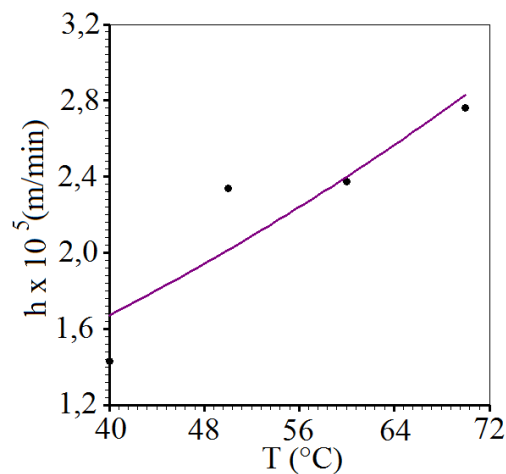


Figura 4. 111 – Coeficiente convectivo versus a temperatura.

Os resultados obtidos no ajuste são mostrados na Tabela 4.35. Fazendo uma inspeção na tabela, conclui-se que os indicadores estatísticos são apenas razoáveis.

Tabela 4.35 – Resultado do ajuste da Equação (4.3) e os indicadores estatísticos.

$A \times 10^3$	B	$R^2$	$\chi^2 \times 10^{11}$
6,9322	1887,2	0,82479	1,6812

A exemplo do que ocorreu para as bananas em pedaços, as flutuações observadas nos gráficos das Figuras 4.110 (pouco expressivas) e 4.111 (significativas) podem ser atribuídas à ausência de controle da temperatura e umidade relativa do ar no ambiente, bem como às variações nos diâmetros das bananas, para as distintas temperaturas de secagem.

## **CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

Neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões com relação às pesquisas já realizadas neste trabalho. Será apresentada, também, sugestões de temas para trabalhos futuros.

### **5.1 – Conclusões**

De acordo com os resultados obtidos nos testes de consistência, coerência e validação das ferramentas desenvolvidas, é possível apresentar algumas conclusões, enumeradas a seguir.

#### **5.1.1 – Ferramentas analíticas**

- As ferramentas analíticas desenvolvidas (otimizador e solução analítica) foram validadas para um problema de secagem disponível na literatura.

Tal problema envolve a secagem de um produto com parâmetros termo-físicos constante e condição de contorno de Dirichlet. O resultado obtido para a difusividade efetiva de massa, determinado via otimização, foi o mesmo apresentado na literatura. Assim, pode-se concluir que as ferramentas analíticas desenvolvidas são válidas para estudar problemas difusivos com parâmetros termo-físicos constantes.

- Como uma contribuição deste trabalho, as ferramentas analíticas desenvolvidas foram utilizadas para descrever o processo difusivo mencionado, usando a condição de contorno de Cauchy. Os resultados obtidos foram significativamente melhores que aqueles originalmente obtidos na literatura, e a distribuição de erros dos pontos experimentais em torno da curva simulada pode ser considerada aleatória.

### 5.1.2 – Solução numérica: cilindro finito

- Primeiramente, pode-se concluir que as duas discretizações apresentadas no Capítulo 3 são consistentes. A partir da discretização da equação de difusão bidimensional em coordenadas generalizadas foi possível, determinar as mesmas equações algébricas já obtidas em coordenadas cilíndricas.
- A solução numérica da equação de difusão bidimensional em coordenadas cilíndricas apresentou resultados consistentes e coerentes, em todos os testes de consistência e coerência realizados.
- Embora a solução numérica tenha sido obtida para a condição de contorno de Cauchy, é possível impor a condição de contorno de Newmann, para fluxo zero, tirando partido da condição de simetria axial. Tal recurso diminui significativamente o esforço computacional, com economia de tempo de execução e de memória requerida para armazenamento de dados.

- A comparação da solução numérica proposta com a solução analítica da equação de difusão indica que os resultados obtidos são equivalentes. Assim, a solução numérica pode ser considerada válida para problemas difusivos com parâmetros termo-físicos constantes.
- Para a validação do *software* proposto, na solução de problemas difusivos com parâmetros termos-físicos variáveis, foram realizados testes comparativos com outro *software* “Infinite Cylinder”. Todos os testes indicaram uma perfeita concordância entre os resultados. Assim, pode-se concluir que o *software* desenvolvido é adequado para a simulação de processos difusivos aplicados a sólidos de geometria cilíndrica, para um cilindro com quaisquer dimensões, constantes ou variáveis, e com parâmetros termo-físicos também constantes ou variáveis.

### 5.1.3 – Secagem de bananas

- A modificação do volume das bananas praticamente independe da temperatura de secagem, e sim da quantidade de água removida.
- Uma inspeção em todos os resultados obtidos possibilita concluir que o modelo da difusão líquida é satisfatório para descrever a secagem de bananas na faixa de temperatura estudada.
- A consideração do volume e difusividade constantes possibilita descrever bem as cinéticas de secagens de todos os pedaços cilíndricos, em todas as temperaturas, apesar de não ser coerente com a forte retração ocorrida durante o processo.
- Os elevados números de Biot obtidos são justificados devido à grande velocidade do ar de secagem utilizados nos experimentos.

- Através das medições realizadas ao longo dos experimentos e das análises dos dados, foi possível concluir que a relação entre o volume do produto e a razão de umidade média é linear, durante a secagem.
- O modelo que inclui o volume e a difusividade variáveis produz resultados sensivelmente melhores que o modelo que despreza estes efeitos. Além disso, tal modelo reflete melhor o processo de secagem do produto.
- Observou-se que o tempo de secagem de bananas em pedaços é proporcional ao comprimento inicial do pedaço cilíndrico.
- A geração de uma malha a partir da fotografia de uma banana inteira possibilita descrever a secagem em que as simulações são realizadas o mais próximo possível das condições reais.
- A secagem de bananas inteiras ocorre mais rapidamente nas extremidades do produto. Esta informação seria impossível de ser obtida se a representação das bananas fosse feita através de um cilindro.
- Uma inspeção nos gráficos de distribuição de umidade de pedaços cilíndricos e de bananas inteiras permitem concluir que tais distribuições são significativamente diferentes. Enquanto as bananas inteiras secam mais rapidamente na região noroeste, nos pedaços cilíndricos este efeito ocorre na região nordeste.
- Com as expressões determinadas em 4.15.7 e 4.15.8 para bananas inteiras, pode-se simular a cinética de secagem em outras temperaturas, sem a necessidade do demorado processo de otimização para a determinação dos parâmetros termo-físicos.
- Os valores de todos os parâmetros termo-físicos determinados neste trabalho são coerentes com os valores encontrados na literatura, para o produto estudado.



- Para uma geometria cilíndrica, a comparação entre o tempo gasto em uma simulação usando as soluções numéricas com coordenadas generalizadas e cilíndricas indica que o primeiro caso é 3,3 vezes mais lento que o segundo. Assim, sempre que for possível, deve-se optar por uma solução numérica envolvendo coordenadas cilíndricas.

## 5.2 – Sugestões para trabalhos futuros

- Aplicar as ferramentas desenvolvidas à secagem de outros produtos.
- Estudar o acoplamento massa-energia na descrição da secagem de bananas, usando as ferramentas desenvolvidas.
- Descrever o aquecimento de produtos cilíndricos e elipsoidais durante o processo de secagem.
- Aplicar as ferramentas desenvolvidas em outros processos tais como resfriamento, aquecimento e pasteurização de produtos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABSI, J; SMITH, D. S.; NAÏT-ALI, B.; GRANDJEAN, S.; BERJONNAUX, J. Thermal response of two-layer systems: Numerical simulation and experimental validation. **Journal of the European Ceramic Society**, v. 25, p. 367-373, 2005.

AMENDOLA, M.; TERUEL, B. Uso de um esquema implícito e de splines para a simulação numérica do processo de resfriamento de laranjas. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 9, n. 1, p. 78-82, 2005.

AMENDOLA, M.; QUEIROZ, M. R. Mathematical methodologies for calculating the mass diffusion coefficient of bananas during drying. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 11, n. 6, p. 623-627, 2007.

ARAGÃO, R. F. **Secagem de fatias de caju (*Anacardium occidentale L.*) em secador de bandejas**. 2007. 115 p. **Tese** (Doutorado em Engenharia de Processos), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

BAINI, R.; LANGRISH, T. A. G. Choosing an appropriate drying model for intermittent and continuous drying of bananas. **Journal of Food Engineering**, v. 79, p. 330-343, 2007.

BAINI, R.; LANGRISH, T. A. G. An assessment of the mechanisms for diffusion in the drying of bananas. **Journal of Food Engineering**, v. 85, p. 201-214, 2008.

BARONAS, R.; IVANAUSKAS, F.; SAPAGOVAS, M. Modelling of Wood drying and na influence of lumber geometry on drying dynamics. **Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vilnius, IMI**, n. 4, p. 11-22, 1999.

BARONAS, R., IVANAUSKAS, F., JUODEIKIENE, I., KAJALAVICIUS, A. Modelling of moisture movement in wood during outdoor storage. **Nonlinear Analysis: Modelling and Control**, n. 6, p. 3-14, 2001.

BARRETO, A. A.; FORTES, M.; FERREIRA, W. R.; CRESPO, L. C. A. Transport coeficients for low and high-rate mass transfer along a biological horizontal cylinder. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 10, n. 2, p. 441-447, 2006.

BARROSO, A. A. F, **Lâminas de irrigação e doses de potássio por gotejamento na cultura da bananeira, no terceiro ciclo de produção**. 2009. 113 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola), Centro de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Ceará, Brasil.

BAUMER, J. E.; MARIANI, V. C. Investigação da condução de calor unidimensional e bidimensional em regime permanente. **Anais do XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, 119, São Paulo, 2005.

BELLO, M.; TOLABA, M. P.; SUAREZ, C. Factors affecting water uptake of rice grain during soaking. **Lebensmittel-Wissenschaft und-Technologie**, v. 37, n. 8, p. 811-816, 2004.

BENAMOUN, L.; BELHAMRI, A. Numerical simulation of drying under variable external conditions: application to solar drying of seedless grapes. **Journal of Food Engineering**, v. 76, n. 2, p. 179-187, 2006.

BEVINGTON, P. R.; ROBINSON, D. K. **Data reduction and error analysis for the physical sciences**; 2<sup>nd</sup> ed., WCB/McGraw-Hill, Boston, 1992.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport phenomena**. 2<sup>nd</sup> Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001, 912 p.

BORDIN, M. R. Embalagem para frutas e hortaliças **In: Tecnologia de resfriamento de frutas e hortaliças**. Campinas: Faculdade de Engenharia Agrícola, 1998. p. 19-27.

BROOKER, D. B.; BAKKER-ARKEMA, F. W.; HALL, C. W. **Drying and storage of grains and oilseeds**. Westport: The AVI Publishing Company, 1992, 450 p.

BUTKOV, E. B., **Física matemática**. Rio de Janeiro. Editora Guanabara S. A., 1978, 725 p.

CANO-CHAUCA, M.; RAMOS, A. M.; STRINGHETA, P.C. Color and texture evaluation during banana drying (*Musa spp nanica* (AAA)). **Alimentaria**, Madrid-España, v. 339, p. 153-158, 2002.

CANO-CHAUCA, M.; RAMOS, A. M.; STRINGHETA, P. C.; MARQUES, J. A.; SILVA, P. I. Curvas de secagem e avaliação da atividade de água da banana passa. **B. Cepra**, Curitiba, v. 22, n. 1, p. 121-132, 2004.

CARBONERA, L.; CARCIOFI, B. M.; HUBER, E.; LAURINDO, J. B. Determinação experimental da difusividade térmica de uma massa de tomate comercial. **Brazilian Journal of Food Technology**, v. 6, n. 2, p. 285-290, 2003.

CÁRCEL, J. A.; GARCÍA-PÉREZ, J. V.; RIERA, E., MULET, A. Influence of high-intensity ultrasound on drying kinetics of persimmon. **Drying Technology**, v. 25, n. 1, p. 185-193, 2007.

CARLESSO, V. O.; BERBERT, P. A.; SILVA, R. F.; DETMANN, E. Avaliação de modelos de secagem em camada fina de sementes de maracujá amarelo. **Revista Brasileira de Sementes**, v. 29, n. 2, p. 28-37, 2007.

CARMO, J. E. F. **Difusão em sólidos esferoidais oblatos. Modelagem e simulação.** 2000. 76 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

CARMO, J. E. F. **Fenômeno de difusão transiente em sólidos esferoidais oblatos. Estudo de caso: secagem de lentilhas.** 2004. 139 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

CARMO, J. E. F.; LIMA, A. G. B. Drying of lentil including shrinkage: a numerical simulation. **Drying Technology**, v. 23, n. 1, p. 1977-1992, 2005.

CARMO, J. E. F.; LIMA, A. G. B. Mass transfer inside oblate spheroidal solids: modelling and simulation. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 25, n. 1, p. 19-26, 2008.

CAVALCANTI, W. S.; CARVALHO, L. H.; LIMA, A. G. B. Difusão de água em compósitos poliéster insaturado reforçados por tecido híbrido de juta-vidro: modelagem e simulação. **Revista Matéria**, v. 10, n. 1, p. 14-23, 2005.

CHEMKHI, S.; ZAGROUBA, F. Water diffusion coefficient in clay material from drying data. **Desalination and the Environment**. v. 185, n. 1-3, p. 491-498, 2005.

CORDEIRO, Z J. M. **Introdução. Banana. Produção: Aspectos técnicos.** Brasília: EMBRAPA, 2000. 9 p.

CORRÊA, P. C.; RESENDE, O.; MARTINAZZO, A. P.; ANDRÉ L. D.; GONELI, A. L. D.; BOTELHO, F. M. Modelagem matemática para a descrição do processo de secagem do feijão (*phaseolus vulgaris* L.) em camadas delgadas. **Engenharia Agrícola**, v. 27, n. 2, p. 501-510, 2007.

COUSSOT, P. Scaling approach of the convective drying of a porous medium. **The European Physical Journal B**, v. 15, n. 1, p. 557-566, 2000.

CRANK, J. **The mathematics of diffusion**, Clarendon Press, Oxford, UK, 1992, 414 p.

DEDIC, A.; ZLATANOVIC, M. Some aspects and comparisons of microwave drying of beech (*Fagus moesiaca*) and fir wood (*Abies alba*). **Holz als Roh- und Werkstoff**, v. 59, n. 4, p. 246-249, 2001.

DOYMAZ, I; PALA, M. The effects of dipping pretreatments on air-drying rates of the seedless grapes, **Journal of Food Engineering**, v. 52, n. 4 , p. 413-417, 2002.

EFREMOV, G.; KUDRA, T. Model-based estimate for time-dependent apparent diffusivity. **Drying Technology**, v. 23, n. 12, p. 2513-2522, 2005.

FAO – Food and Agriculture Organization of the United Nations. **Statistical databases 2011**. Disponível em: <<http://www.foa.org>>. Acesso em: 12 junho. 2011.

FARIAS, S. N. **Secagem de sólidos esferoidais usando o método de Galerkin**. 2002. 60 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.PB, Brasil.

FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. S.; SOUZA, J. A. R.; SILVA, W. P.; MATA, M. E. R. M. C. Comportamento da secagem de sementes de grão de bico (*Cicer arietinum* L.) em camada fina: equação de page e modelo difusivo. **Anais do XXXVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola**, CD ROOM, 2009.

FARIAS, V. S. O. **Difusão 3D em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas**. 2011. 265 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

FARIAS, R. P. **Secagem de banana em estufa: efeitos térmicos e geométricos**. 2011. 136 P. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

FERNANDO, W. J. N.; LOW, H. C.; AHMAD, A. L. Dependence of the effective diffusion coefficient of moisture with thickness and temperature in convective drying of sliced materials. A study on slices of banana, cassava and pumpkin. **Journal of Food Engineering**, v. 102, p. 310-316, 2011.

FIGUEIREDO, R. **Princípios de secagem de produtos biológicos**. Editora Universitária da UFPB, João Pessoa, PB, 2004, 229 p.

FORTES, M. **A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media with special reference to drying of grains and foods**. 1978, 226p. Tese (Doutorado) Purdue University.

FORTES, M.; OKOS, M. R. Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains. **Advances in drying**. Ed. Arum S. Mujumdar, Hemisphere Publishing Corporation. Washington. v. 1, p. 119-154, 1980

FORTES, M.; OKOS, M. R.; BARRET JR., J. R. Heat and mass transfer analysis of intra-kernel wheat drying and rewetting. **Journal Agricultural Engineering Research**, v. 26, p. 109-125, 1981.

GASTÓN, A. L.; ABALONE, R. M.; GINER, S. A. Wheat drying kinetics. Diffusivities for sphere and ellipsoid by finite elements. **Journal of Food Engineering**, v. 52, n. 1, p. 313-322, 2002.

GASTÓN, A. L.; ABALONE, R. M.; GINER, S. A.; BRUCE, D. M.. Geometry effect on water diffusivity estimation in printa-isla verde and broom wheat cultivars. **Latin American Applied Research**, v. 33, n. 1, p. 327-331, 2003.

GONELI, A. L. D.; CORRÊA, P. C.; RESENDE, O.; REIS NETO, S. A. R. Estudo da difusão de umidade em grãos de trigo durante a secagem. **Cienc. Tecnol. Aliment., Campinas**, v. 27, n. 1, p. 135-140, 2007.

GOUVEIA, J. P. G.; MOURA, R. S. F. M.; ALMEIDA, F. A. C.; OLIVEIRA, A. M. V. O.; SILVA, M. M. Avaliação da cinética de secagem de caju mediante um planejamento experimental. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 6, n. 3, p. 471-474, 2002.

GOUVEIA, J. P. G.; ALMEIDA, F. A. C.; FARIAS, E. S.; SILVA, M. M.; CHAVES, M.; C. V.; REIS, L. S.; Determinação das curvas de secagem em frutos de cajá. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v. especial, n. 1, p. 65-68, 2003.

GOUVEIA, J. P. G.; NASCIMENTO, J.; ALMEIDA, F. A. C.; SILVA, M. M.; FARIAS, E. S.; SILVA, F. L. H. Modelo matemáticos para ajuste de isotermas de dessecamento da banana prata. **Revista Engenharia Agrícola**, v. 24, n. 3, p. 799-806, 2004.

GOYAL, R. K.; KINGSLEY, A. R. P.; MANIKANTAN, M. R.; ILYAS, S. M. Mathematical modeling of thin layer drying kinetics of plum in a tunnel dryer. **Journal of Food Engineering**, v. 79, n. 8, p. 176-180, 2007.

HACIHAFIZOGLU, O.; CIHAN, A.; KAHVECI, K.; LIMA, A. G. B. A liquid diffusion model for thin-layer drying of rough rice. **European Food Research and Technology**, v. 226, n. 4, p. 787-793, 2008.

HAENDLER, L. Productos de transformacion del banana. Instituto Frances de Investigaciones Fruteras de Ultra-Mar. **1<sup>o</sup> Congresso Internacional de Industrias Agricolas y Alimenticias de las Zonas Tropicales y Sub-tropicales**. Abidjan, 14-19 de Diciembre de 1964.



INAZU, T.; IWASAKI, K. Mathematical evaluation of effective moisture diffusivity in fresh Japanese noodles (udon) by regular regime theory. **Journal of Food Science**, v. 65, n. 3, p. 440-444. 2000.

INCROPERA, F. P.; DE WITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Rio de Janeiro: LTC – Livro Técnicos e Científicos Editora S. A., 1992, 445 p.

ISMAIL, M. A.; DOUGLASS, M. P.; STENNING, B. C. Modelling and simulation heat transfer in wheat stored in a simulated sealed pit. **Journal of Food Engineering**, v. 4, n. 3, p. 104-118, 2008.

ITAL. **Banana: cultura, matéria-prima, processamento e aspectos econômicos**. 2ª ed. Campinas, 1995, p. 5-31.

JANJAI, S.; MAHAYOTHEE, B.; LAMLERT, N.; BALA, B. K.; PRECOPPE, M.; NAGLE, M.; MÜLLER, J. Diffusivity, shrinkage and simulated drying of litchi fruit (*Litchi Chinensis Sonn.*). **Journal of Food Engineering**, v. 96, n. 2, p. 214 – 221, 2010.

JAYARAMAN, K. S. e GUPTA, D. K. Drying of fruits and vegetables: **Handbook of industrial drying**. New York: Marcel Dekker, p. 643–690, 1995.

KALETA, A.; GÓRNICKI, K. Evaluation of drying models of apple (var. McIntosh) dried in a convective dryer. **International Journal of Food Science and Technology**, v. 45, n. 1, p. 891–898, 2010.

KARIM, M. A.; HAWLADER, M. N. A. Drying characteristics of banana: theoretical modeling and experimental validation. **Journal of Food Engineering**, v. 70, n. 1, p. 35-45, 2005.

KATEKAWA, M.E.; SILVA, M.A. A Review of drying models including shrinkage effects, **Drying Technology** v. 24 n. 1, p. 5-20, 2006.

KATEKAWA, M. E. **Análise teórico-experimental do encolhimento: estudo da secagem de banana.** 2006. 151p. Tese (Doutorado em Engenharia Química), UNICAMP, São Paulo.

KULASIRI, D. e WOOHEAD, I. On modelling the drying of porous materials: analytical solutions to coupled partial differential equations governing heat and moisture transfer. **Mathematical Problems in Engineering**, p. 275-291, 2005.

LI, Z.; KOBAYASHI, N.; HASATANI, M. Modeling of diffusion in ellipsoidal solids: a comparative study. **Drying Technology**, v. 22, n. 4, p. 649-675, 2004.

LIMA, A. G. B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de bananas.** 1999. 244 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), UNICAMP, São Paulo.

LIMA, A. G. B.; QUEIROZ, M. R.; NEBRA, S. A. Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of solids with ellipsoidal configuration. **Chemical Engineering Journal**, v. 86, n. 1-2, p. 85-93, 2002.

LIMA, A. G. B.; NEBRA, S. A., The finite-volume approach for the solution of the transient diffusion equation applied to prolate spheroidal solids. **Drying Technology**, v. 18, n. 1-2, p. 21-48, 2000.

LIMA, D. R.; FARIAS, S. N.; LIMA, A. G. B. Heat and mass transfer inside oblate and prolate spheroids: an exact solution. **Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Drying Symposium**, (IDS 2004) São Paulo, Brasil, August 22-25, p. 493-500, 2004a.

LIMA, D. R.; FARIAS, S. N.; LIMA, A. G. B. Mass transport in spheroids using the Galerkin method. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 21, n. 4, p. 667-680, 2004b.

LIU, J. Y.; SIMPSON, W. T. Inverse determination of diffusion coefficient for moisture diffusion in Wood. **Proceedings of 33<sup>RD</sup> ASME National Heat Transfer Conference:**

**Heat and Mass Transfer in Porous Media**, August 15-17, Albuquerque, New Mexico, 1999.

LÓPEZ, C. M.; IDIART, A.; CAROL, I. Mesomechanical analysis of concrete deterioration including time dependence. **VIII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS VIII**, p. 1-4, Barcelona, 2005.

LÓPEZ, I. I.; ALVARADO, M. A. G. Analytical solution for food-drying kinetics considering shrinkage and variable diffusivity. **Journal of Food Engineering**, v. 79, p. 208-216, 2007.

LUIKOV, A. V. **Analytical heat diffusion theory**, Academic Press, Inc. Ltd, London, 1968, 685 p.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. LTC Editora S.A., Rio de Janeiro, 2004, 453 p.

MARIANI, V. C.; LIMA, A. G. B.; COELHO, L.S. Apparent diffusivity estimation of the banana during drying using inverse method. **Journal of Food Engineering**, v. 85, p. 569 - 579, 2008.

MARINOS-KOURIS, D.; MAROULIS, B. Transport properties in the drying of solids. **Handbook of Industrial Drying**. New York: Marcel Dekker Inc., v. 1, p. 113-159, 1995.

MARQUES, L. F.; DUARTE, M. E. M.; MATA, M. E. R. M. C.; NUNES, L. S.; COSTA, T. L.; COSTA, P. B. S.; DUARTE, S. G. Secagem precedida de desidratação osmótica de pseudofruto de caju: comparação entre modelos matemáticos aplicados. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v. 9, n. 2, p. 161-170, 2007.

MARTINAZZO, A. P.; CORRÊA, P. C.; RESENDE, O.; MELO, E. C. Análise e descrição matemática da cinética de secagem de folhas de capim-limão. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 11, n. 3, p. 301-306, 2007.

MATTEO, M.; CINQUATA, L.; GALIERO, G.; CRESCITELLI, S. A mathematical model of mass transfer in spherical geometry: plum (*Pruns domestica*) drying. **Journal of Food Engineering**, v. 58, p. 183-192, 2003.

MELLADO, E. C. E. R. **Modelo de transferência de calor e massa na secagem de madeira serrada de pinus**. 2007. 155 p. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal), Universidade Federal do Paraná.

MELO, J. C. S.; LIMA, W. C. P. B.; FARIAS NETO, S. R.; LIMA, A. G. B. Resfriamento de frutas com forma esferoidal prolata via método integral baseado em Galerkin. **V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, Salvador, Bahia, 2008.

MELO, E. C.; LOPES, D. C.; CORRÊA, P. C., **GRAPSI - Programa computacional para o cálculo das propriedades psicrométricas do ar**, V 7.32, 2004 disponível no endereço eletrônico <http://www.ufv.br/dea/professores/evandro>, data de acesso setembro/2011.

MIDGLEY, S. Department of Physics, University of Western Australia, **Fortran Parser**, 2002, online, disponível na Internet em <<http://smidgley.customer.netspace.net.au/fortran>>, acesso em 29/11/2004.

MOHSENIN, N. N.. **Thermal properties of foods and agricultural materials**. Gordon and Breach Science Publishers, 1980, 407 p.

MOREIRA, R. S, **Banana teoria e prática de cultivo**. 2ª Edição, Fundação Cargill, São Paulo, 1999, 299 p.

MULET, A.; BLASCO, M.; REVERTER, J. G.; PÉREZ, J. V. G. Drying kinetics of curcuma longa rhizomes. **Journal of Food Science**, v. 70, n. 5, p. 318-323, 2005.

NASCENTE, A. S.; COSTA, J. N. M.; COSTA, R. S. C. **Cultivo de banana em Rondônia**. Embrapa Rondônia Sistema de Produção, 2, ISSN 1807-1805. Versão Eletrônica, 2005. Acesso em 04/11/2010.

NASCIMENTO, J. J. S. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. Estudo de caso: secagem de materiais cerâmicos.** 2002. 181 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB.

NASCIMENTO, J. J. S.; MEDEROS, B. J. T.; BELO, F. A.; LIMA, A. G. B. Transporte de matéria com redução de volumen em El interior de sólidos paralelepípedos, **Información Tecnológica**, v. 16, p. 35-41, 2005.

NGUYEN, M.; PRICE, W. E. Air-drying of banana: influence of experimental parameters, slab thickness, banana maturity and harvesting season. **Journal of Food Engineering**, v. 79, p. 200-207, 2007.

NIJHUIS, H. H.; TORRINGA, E.; LUYTEN, H.; RENÈ, F.; JONES, P.; FUNEBO, T.; OHLSSON, T. Research needs and opportunities in the dry conservation of fruits and vegetables. **Drying Technology: An International Journal**, v. 14, n. 6, p. 1429-1457, 1996.

NOGUEIRA, R. I., PARK, K. J. **Drying parameters to obtain “banana-passa”**, *Drying* 92, Part A, p. 874-883, 1992.

OKOS, M. R.; NARSIMHAN, G.; SINGH, R. K.; WITNAUER, A. C. **Food dehydration.** In **D. R. Heldman e D. B. Lund (Eds)**, *Handbook of Food Engineering*. New York, Marcel Dekker, 1992.

OLEK, W.; WERES, J. Effects of the method of identification of the diffusion coefficient on accuracy of modeling bound water transfer in wood. **Transp Porous Med.** v. 66, n. 1, p. 135-144, 2007.

OLIVEIRA, V. A. B. **Transferência de Calor e Massa no Interior de Sólidos com Forma Esferoidal Prolata via Termodinâmica dos Processos Irreversíveis.** 2006. 132 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

OLIVEIRA, V. A. B.; LIMA, A. G. B. Mass diffusion inside prolate spherical solids: an analytical solution, **Revista de Produtos Agroindustrial**, v. 4, n. 1, p. 41-50, 2002.

OLIVEIRA, V. A. B. **Transferência de Calor e Massa no Interior de Sólidos com Forma Esferoidal Prolata via Termodinâmica dos Processos Irreversíveis**. 2006. 132 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

ÖZIŞIK, M. N. **Transferência de calor: Um texto básico**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A., 1990, 661 p.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 197 p.

PARK, K. J.; TUBONI, C. T.; OLIVEIRA, R. A.; PARK, K. J. B. Estudo da secagem de caqui giombo com encolhimento e sem encolhimento. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**. v. 6, n. 1, p. 71-86, 2004.

PEARCE, F. **Going bananas**, New Scientist 177(2378), p. 27, 18 de Janeiro, 2003.

PERRÉ, P.; TURNER I. W., A heterogeneous wood drying computational model that accounts for material property variation across growth rings. **Chemical Engineering Journal**, v. 86, n. 1-2, p. 117-131, 2002.

PINHEIRO, P. C. C.; RAAD, T. J.; YOSHIDA, M. I. Model of a process for drying *Eucalyptus SSP* at high temperatures. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 15, n. 4, p. 382-395, 1998.

PIROZZI, D. C. Z.; AMENDOLA, M. **Resfriamento rápido com ar forçado de morangos: um estudo numérico usando método das diferenças finitas explícitas**. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola, 31, 2002, Salvador. **Anais....Salvador: Sociedade Brasileira de Engenharia Agrícola**, 2002. 1 CD ROM.

PIROZZI, D. C. Z.; AMENDOLA, M. Modelagem matemática e simulação numérica do resfriamento rápido de morango com ar forçado. **Engenharia Agrícola**, v. 25, n. 1, p. 222-230, 2005.

PÓVOAS, Y. V.; JONH, V. M.; CINCOTTO, M. A. Influência da perda de água por evaporação na resistência de aderência entre argamassa colante e placa cerâmica. **Ambiente Construído**, v. 2, n. 2, p. 7-18, 2002.

PRAKOTMAK, P.; SOPONRONNARIT, S.; PRACHAYAWARAKORN, S. Modelling of moisture diffusion in pores of banana foam mat using a 2-D stochastic pore network: Determination of moisture diffusion coefficient during adsorption process. **Journal of Food Engineering**, v. 96, p. 119–126, 2010.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. Numerical recipes in Fortran 77. **The art of scientific computing**. New York: Cambridge University Press, v. 1, 1996, 933p.

QUEIROZ, M. R. **Estudo teórico-experimental da cinética de secagem de bananas**. 1994. 176 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil.

QUEIROZ, M. R.; NEBRA, S. A. **Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas**. *Journal of Food Engineering*, v. 47, n. 2, p. 127-132, 2001.

RAFIEE, S.; OMID, M.; YADOLLAHINIA, A. Finite element simulation of rough (*Oryza sativa L.*) cv. Fajer drying. **Chemical Product and Process Modeling**, v. 3, n. 8, p. 1-11, 2008.

RAHMAN, N.; KUMAR, S. Evaluation of moisture diffusion coefficient of cylindrical bodies considering shrinkage during natural convection drying. **International Journal of Food Engineering**, v. 1, n. 7, art. 4, 2011.

RAMOS, I. N.; MIRANDA, J. M. R.; BRANDÃO, T. R. S.; SILVA, C. L. M. Estimation of water diffusivity parameters on grapes dynamic drying. **Journal of Food Engineering**, v. 97, n. 4, p. 519-525, 2010.

RESENDE, O.; CORRÊA, P. C.; GONELI, A. L. D.; BOTELHO, F. M.; RODRIGUES, S. Modelagem matemática do processo de secagem de duas variedades de feijão (*Phaseolus vulgaris* L.). **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v. 10, n. 1, p. 17-26, 2008.

RICARDEZ, A. P.; SUÁREZ, J. R.; BERUMEN, L. A. The drying of red oak at vacuum pressure. **Maderas. Ciencia y Tecnologia**. v. 7, n. 1, p. 23-26, 2005.

ROBERTS, J. S.; TONG, C. H. Drying kinetics of hygroscopic porous materials under isothermal conditions and the use of a first-order reaction kinetic model for predicting drying. **Journal of Food Properties**, v. 6, n. 3, p. 355-367, 2003.

SANDER, A.; SKANSI, D.; BOLF, N. Heat and mass transfer models in convection drying of clay slabs. **Ceramics International**, v. 29, n. 3, p. 641-653, 2003.

SAYKOVA, I.; CWICKLINSKI, G.; CASTELLE, P. Analytical approach for predicting effective diffusion coefficients in multidimensional slab geometry. **Journal of the University of Chemical Technology and Metallurgy**, v. 44, 1, p. 44-49, 2009.

SCHMEHL, R. **Function Parser**, 2003, online, disponível na Internet em [www.its.uni-karlsruhe.de/~schmehl/functionparserE.html](http://www.its.uni-karlsruhe.de/~schmehl/functionparserE.html), acesso em 29/02/2005.

SCHWARTZ, M. O. E.; TOMÉ, J. A. T. R.; LIRA, B. B.; HIPÓLITO, F. Avaliação da adição de vermiculita na secagem de massa cerâmica através da curva de bigot. **Cerâmica Industrial**, v. 10, n. 1, p. 28-30, 2005.

SILVA, ALEX, A.; NASCIMENTO, J. J. S.; LIMA, A. G. B.; Estudo analítico de secagem de placas cerâmicas usando o método integral baseado em Galerkin e condição de contorno de Dirichlet, **Revista Eletrônica de Materiais e Processo**, v. 4, n. 2, p. 48-55, 2009. Acesso: [www.dema.ufcg.edu.br/revista](http://www.dema.ufcg.edu.br/revista), 03/11/2010.



SILVA, ADRIANO, S.; MELO, K. S.; ALVES, N. M. C.; FERNANDES, T. K. S.; FARIAS, P. A. Cinética de secagem em camada fina da banana maçã em secador de leito fixo. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v. 11, n. 2, p. 129-136, 2009.

SILVA, C. M. D. P. S. **Difusão de massa em corpos cilíndricos: modelagem, soluções analíticas e numéricas e aplicação na secagem de bananas**. 2010. 129 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Agrícola. Centro de Tecnologia e Recursos Naturais, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, C. M. D. P. S.; FARIAS, V. S. O.; NASCIMENTO, P. L.; SILVA, W.P.; GOMES, J. P.; LINS, M. A. A. **Determinação simultânea da difusividade efetiva e do coeficiente de transferência convectivo de massa durante a secagem de bananas inteiras usando soluções analíticas e o método inverso**. Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica agosto, 18-21, Campina Grande, PB, Brasil, 2010.

SILVA, J. S. **Pré-processamento de produtos agrícolas**, 1995, EDITORA , Viçosa, MG, 1<sup>nd</sup> Ed. 500 p.

SILVA, J. B.; **Simulação e experimentação da secagem de tijolos cerâmicos vazados**. 2009. 173 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, W. P. e SILVA, C. M. D. P. S., **Tratamento de dados experimentais**. João Pessoa: UFPB/Editora Universitária, 2<sup>a</sup> Edição, 1998, 197 p.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SOARES, I. B.; NASCIMENTO, J. L.; SILVA, C. D. P. S. Um avaliador de expressões em Fortran. **Science & Engineering Journal**, v. 14, n. 1, p. 95-99, 2005.

SILVA, W. P. **Transporte difusivo em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas**. 2007. 263 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, W. P.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA, C. D. P. S.; LIMA, A. G. B. Simulação numérica da transferência de massa em sólidos de revolução via volumes finitos e coordenadas generalizadas. **8º Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica**, Cusco, Peru, 2007.

SILVA, W. P.; SILVA, D. D. P. S.; Silva, C. M. D. P. S; Silva, C. D. P. S. Numerical simulation of the water diffusion in cylindrical solids. **International Journal of Food Engineering**, v. 4, n. 2, article 6, doi: 10.2202/1556-3758.1394, 2008a.

SILVA, W. P.; MATA, M. E. R. M. C.; SILVA, C. D. P. S.; GUEDES, M. A. LIMA, A. G. B. Determinação da difusividade e da energia de ativação para feijão macassar (*vigna unguiculata* (L.) walp.), variedade sempre-verde, com base no comportamento da secagem. **Engenharia Agrícola**, v. 28, n. 2, p. 325-333, 2008b.

SILVA, W. P. **Software “2D Grid Generation”, V 5.1** (2008c) online, disponível no endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/gg.htm>, data de acesso: Janeiro/2012.

SILVA, W. P. **Software “Diffusion RE”, V 2.2.0** (2008d) online, disponível no endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/diffusion.htm>, data de acesso: dezembro/2011.

SILVA, W. P. **Discretizações em fenômenos de transporte computacional, Cursos 1 e 2** (2009) Apresentações em Powerpoint, online, disponível no endereço eletrônico: <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/TCMFC.htm>, data de acesso: março/2011.

SILVA, W.P.; SILVA, C. M. D. P. S. **Lab fit curve fitting software, V.7.2.46** (2009); online, disponível em : [www.labfit.net](http://www.labfit.net), data de acesso: junho/2011).

SILVA, W. P.; PRECKER, W. J.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S.; Determination of the effective via minimization of the objective function by scanning: Application to drying of cowpea. **Journal of Food Engineering**, v. 95, n. 2, p. 298-304, 2009a.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S.; Silva, C. D. P.S.; Influence of the geometry on the numerical simulation of isothermal drying kinetics of banana. **World Applied Sciences Journal**, v. 7, n. 7, p. 846-855, 2009b.

SILVA, W. P.; Precker, J. W.; Silva, D. D. P. S.; Silva, C. D. P. S.; Lima, A. G. B. Numerical simulation of diffusive processes in solids of revolution via finite volume method and generalized coordinates. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. v. 52, n. 21-22, p. 4976 - 4985, 2009c.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S.; LIMA, A. G. B. Simulação da cinética de secagem de sólidos de revolução usando o modelo da difusão e o método inverso. **Brazilian Journal of Food Technology**, v. 12, n. 1, p. 77-84, 2009d.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S.; NEVES, G. A.; LIMA, A. G. B. Mass and heat transfer study in solids of revolution via numerical simulations using finite volume method and generalized coordinates for the Cauchy boundary condition. **International Journal of Heat Transfer**, v. 53, n. 1, p. 1183-1194, 2009e.

SILVA, W. P., “Contour plots” software (2010) online, disponível no seguinte endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/Contour.zip>, data de acesso: julho/2011.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, D. D. P. S. Calculation of the convective heat transfer coefficient and cooling kinetics of an individual fig fruit. **Heat Mass Transfer**, v. 46, n. 3, p. 371-380, 2010a.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, C. M. D. P. S.; GOMES, J. P. Determination of effective diffusivity and convective mass transfer coefficient for cylindrical solids via analytical solution and inverse method: application to the drying of rough rice. **Journal of Food Engineering**, v. 98, n. 3, p. 302-308, 2010b.

SILVA, W. P.; CARMO, J. E. F.; SILVA, C. M. D. P. S.; ARAGÃO, R. F., Determination of convective heat transfer coefficient during cooling of an individual strawberry fruit using different methods. **International Review of Chemical Engineering (I.R.E.C.H.E)**, v. 3, n. 2, p. 233-240, 2011a.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; NASCIMENTO, P. L.; SILVA, D. D. P. S. Influence of the geometry on the numerical simulation of the cooling kinetics of cucumbers. Spanish **Journal of Agricultural Research**, v. 9, n. 1, p. 242-251, 2011b.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; FARIAS, V. S. O.; GOMES, J. P. Diffusion models to describe the drying process of peeled bananas: optimization and simulation. **Drying Technology**, v. 30, n. 1, p. 164-174, 2012.

SLATTERY, J. C. **Advanced transport phenomena**. Cambridge University Press, 1999, 709p.

SOUSA, P. H. M. **Desidratação osmótica de banana com e sem vácuo com complemento de secagem em estufa de circulação de ar**. 2002. 88 p. Dissertação (Mestrado em Tecnologia de Alimento), Universidade Federal do Ceará, Ceará, Brasil.

TAGLIARI, P. S.; FRANCO, H. M. **Manejo pós-colheita da banana**. Agropecuário Catarinense, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 25-30, 1994.

TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis**. Sausalito, California: University Science Books, 2nd Edition, 1997.

TELLO-PANDURO, B.; GARCÍA-VÁZQUEZ, Y.; MEDINA-VIVANCO, M.; MENDIETA-TABOADA, O. Air drying of clams (*anodontites trapesialis*) and tilapia (*oreochromis niloticus*) fillet. In: Drying 2004- **Proceedings of the 14th International Drying Symposium (IDS 2004)**, São Paulo, Brazil, v. C, p. 1977-1983, 2004.

TERUEL, B.; KIECKBUSCH, T. G.; PULINO, P.; CORTEZ, L. A.; LIMA, A. G. B. Numerical simulation of fruits cooling using finite-element method. **Proceedings of the 3<sup>st</sup> International Conference on Computational Heat and Mass Transfer**. n. 74, Banff, Canada, 2003.

THAKUR, A. K.; GUPTA, A. K. Water absorption characteristics of paddy, brown rice and husk during soaking. **Journal of Food Engineering**, v. 75, n. 2, p. 252-257, 2006.

THUWAPANICHAYANAN, R.; PRACHAYAWARAKORN, S.; KUNWISAWA, J.; SOPONRONNARIT, S. Determination of effective moisture diffusivity and assessment of quality attributes of banana slices during drying, **Food Science and Technology**, V.44, n.1, p. 1502-1510, 2011

TRUJILLO, J. F.; WIANGGKAEW, C.; PHAM, Q. T. Comparison of three methods of estimating the effective diffusivity of moisture in meat from drying data. In: **International Conference Engineering and Food – ICEF9**, Montpellier – França, 2004.

WU, B.; YANG, W.; JIA, C. A three-dimensional numerical simulation of transient heat and mass transfer inside a single rice kernel during the drying process. **Biosystems Engineering**, v. 87, n. 2, p. 191-299, 2004.