



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ENTROPIA DE UM BURACO NEGRO
ACÚSTICO NÃO-COMUTATIVO**

Wagner Porto Santos

CAMPINA GRANDE

- Dezembro 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ENTROPIA DE UM BURACO NEGRO
ACÚSTICO NÃO-COMUTATIVO**

Wagner Porto Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto.

CAMPINA GRANDE

- Dezembro 2017 -

S237e Santos, Wagner Porto.
Entropia de um buraco negro acústico não-comutativo / Wagner Porto
Santos. – Campina Grande, 2018.
48 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto".
Referências.

1. Buraco Negro Acústico. 2. Radiação Hawking. 3. Não-
comutatividade. 4. Princípio da Incerteza Generalizado. I. Anacleto,
Marcos Antônio. II. Título.

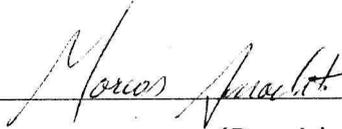
CDU 524.882(043)

WAGNER PORTO SANTOS

ENTROPIA DE UM BURACO NEGRO ACÚSTICO NÃO-COMUTATIVO

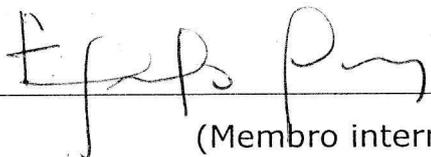
Dissertação aprovada em 13/12/2017

BANCA EXAMINADORA



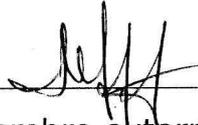
(Presidente)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof^a. Dr^a. Morgana Lígia de Farias Freire
Departamento de Física – UEPB

Mais do que a educação formal que vocês me ofereceram e que sempre se esforçaram para que fosse a melhor, a formação humana foi o que de mais importante vocês fizeram por mim. Eu só posso retribuir tentando ser o melhor filho que pais como vocês merecem ter.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado a oportunidade de chegar até aqui com vida e saúde.

Ao Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho.

Aos meus pais, Antônio e Geiza, por terem me educado, e serem responsáveis pela pessoa que sou hoje.

Aos meus irmãos Yánez e Mardony, por me incentivarem e acreditarem na minha capacidade.

À todos os professores da pós-graduação em física que contribuíram para minha formação acadêmica. Aos amigos da unidade acadêmica de física pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa.

Lista de Figuras

2.1 BURACO NEGRO ACÚSTICO	6
2.2 Bocal de Laval	7

Resumo

Nesta dissertação estudamos a entropia de um buraco negro acústico rotativo tridimensional baseado no princípio da incerteza generalizada. Em nossos resultados obtemos uma entropia de área e um termo de correção associado ao buraco negro acústico não-comutativo quando λ introduzido no princípio de incerteza generalizado assume um valor específico. No entanto, neste método, não é necessário introduzir o (cut-off) corte ultravioleta e as divergências são eliminadas. Além disso, a aproximação de pequena massa não é necessária no modelo brick-wall (parede de tijolo) original. Consideramos as métricas acústicas de buracos negros obtidas a partir de um fluido relativístico em um espaço-tempo não-comutativo. Os efeitos deste conjunto é tal que as flutuações dos fluidos também são afetadas. As ondas sonoras herdam a não-comutatividade do fluido no espaço-tempo e podem perder a invariância de Lorentz. Como consequência, a temperatura Hawking é diretamente afetada pela não-comutatividade do espaço-tempo. Logo vamos nos concentrar no método estatístico quântico para determinar a entropia de um buraco negro acústico usando a equação de densidade de estado do GUP.

Palavras-chave: Buraco negro acústico, radiação Hawking, não-comutatividade, princípio da incerteza generalizado.

Abstract

In this dissertation we study the entropy of a three-dimensional rotating acoustic black hole based on the generalized uncertainty principle. In our results we obtain an area entropy and a correction term associated with the non-commutative acoustic black hole when λ introduced in the principle of generalized uncertainty assumes a specific value. However, in this method, it is not necessary to introduce the cut-off ultraviolet cut and the divergences are eliminated. In addition, the small mass approximation is not required in the original brick-wall model. We consider the acoustic metrics of black holes obtained from a relativistic fluid in a non-commutative space-time. The effects of this set are such that fluids fluctuations are also affected. Sound waves inherit the non-commutativity of the fluid in space-time and may lose the Lorentz invariance. As a consequence, the Hawking temperature is directly affected by space-time non-commutativity. Soon we will focus on the quantum statistical method to determine the entropy of an acoustic black hole using the equation of state density of the GUP.

Keywords: Acoustic black hole, Hawking radiation, noncommutative, generalized uncertainty principle.

Sumário

1	Introdução	1
2	Buraco Negro Acústico	5
2.1	Métrica acústica não-relativística	8
2.1.1	Métrica acústica a partir da lagrangeana	13
2.2	Métrica acústica relativística	15
2.3	Radiação Hawking	17
2.3.1	Temperatura Hawking para o modelo não-relativístico	19
2.3.2	Temperatura Hawking para o modelo relativístico	20
2.4	Relação de dispersão	21
3	Buraco negro acústico não-comutativo	23
3.1	Métrica acústica não-comutativa	24
3.2	Temperatura Hawking	29
3.3	Relação de dispersão	31
4	Cálculo da entropia com o princípio da incerteza generalizado	34
4.0.1	O caso $B \neq 0$ e $E = 0$	36
4.1	A entropia estatística	37
4.1.1	O caso $B = 0$ e $E \neq 0$	40
5	Conclusões	44
	Referências Bibliográficas	45

Capítulo 1

Introdução

A física dos buracos negros acústicos, (modelo análogo acústico de buracos negros), é estudada desde a década de 1980 era área é estudada, porém quem iniciou esses estudos foi William George Unruh (UNRUH,1981). A formação dos buracos negros acústicos é dada quando uma onda sonora se propaga através de um fluido em movimento à uma velocidade supersônica. Então assim, surge uma região chamada de horizonte de eventos acústico, em que na mesma o som não consegue escapar, e as ondas sonoras se comportam no fluido, semelhantemente ao que acontece com a luz sob a influência do campo gravitacional, tal analogia com o caso gravitacional, permite comparar características do buraco negro usual com o análogo acústico.

Com o objetivo de estudar o fenômeno da radiação Hawking, além de outros fenômenos para entender a gravidade quântica, foi que surgiu o interesse em estudar o buraco negro acústico. Assim, diversos sistemas de fluidos tem sido estudados em uma variedade de modelos análogos de buracos negros, incluindo ondas gravitacionais. Os modelos de superfluido de Hélio II (NOVELLO et al 2002), condensados de Bose-Einstein (GARAY et al 2000 LAHAV et al 2009) e gás degenerado de Fermi (GIOVANAZZI 2005) são alguns exemplos que tem sido propostos para criar uma geometria de buraco negro acústico em laboratórios. Uma versão relativista de buracos negros acústicos foi apresentado em GE e SIN, (2010) BILIC,(1999);FAGNOCCI; VISSER e MOLINA,(2010).

A questão da radiação emitida por um buraco negro acústico, que na região conhecida por horizonte de eventos, pares de partículas, chamadas de fônons ¹, são criadas

¹Quando a temperatura se aproxima do zero do zero absoluto, temos que o som se comporta como partículas quânticas, que recebem o nome de fônons. Derivado do grego *phone*, o nome fônon quer

sendo um absorvido e outro emitido. Assim, a partícula que é emitida é responsável pela radiação do modelo acústico. Portanto, a emissão se dá semelhantemente ao espectro de radiação de um corpo negro, sendo este um dos motivos deste "objeto" ser chamado de buraco negro, e que esta radiação está ligada a temperatura Hawking, em referência ao cientista Stephen Hawking que foi quem a descobriu (HAWKING,1974).

Existem diversas maneiras para obtermos a temperatura Hawking e a entropia para buracos negros. Lembrando que G.' Hooft foi quem primeiro determinou a entropia do buraco negro, utilizando o método parede de tijolo, no qual a entropia é referente apenas a entropia de campos quânticos fora do horizonte de eventos. Porém, ao determinar a entropia estatística do buraco negro através desse método, temos que introduzir um "cut-off" ultravioleta, para evitar a divergência de densidade de estados perto do horizonte. Outro modo, que pode ser utilizado para contornar as divergências é considerar modelos em que a relação de incerteza de Heisenberg é modificada, por exemplo, em um espaço tridimensional, como

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}(1 + (\Delta p)^2),$$

a qual mostra que existe um comprimento mínimo $\Delta x \geq \hbar\alpha$, onde Δx e Δp são incertezas para a posição e o momento, respectivamente, e α é uma constante positiva independente de Δx e Δp . A relação de comutação para o princípio da incerteza generalizado (GUP) pode ser escrita como $[x, p]_{GUP} = i\hbar(1 + \alpha^2 p^2)$, onde x e p são operadores posição e momento, respectivamente. Então, usamos a relação de incerteza de Heisenberg modificada a divergência no modelo parede de tijolo são eliminados.

Outra teoria importante no desenvolvimento desse trabalho é o não-comutativo, em que na mesma as coordenadas do espaço tempo, x^μ , passam a ser operadores hermitianos, \hat{x}^μ , que não comutam entre si. Assim, obtendo uma relação de comutação dada a seguir

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ é o parâmetro de não-comutatividade. Pelo fato de usarmos coordenadas não-dizer som, voz. A velocidade varia, e assim também seu comprimento de onda, quando se move em um fluido com velocidade não uniforme. Os fônons são bósons com spin zero, que são encontrados experimentalmente em substâncias de fluidos e em cristais à uma temperatura consideravelmente baixa (JACOBSON E PARENTANI,2005).

comutativas somos levados a modificar as características do espaço-tempo, e assim passamos a ter um espaço tempo com operações básicas diferentes. Por exemplo, a multiplicação de dois campos, deixa de ser um simples produto e passa a ser calculado com o uso do produto moyal.

Nesta dissertação objetivamos aplicar a métrica não-comutativa do buraco negro acústico, obtida a partir de um fluido relativista, para estudar a entropia do modelo análogo acústico. Para isso utilizamos o método estatístico quântico para determinar a entropia de um buraco negro acústico usando a equação de densidade de estado do GUP. Prevemos que obtivemos a entropia de Bekeninsein-Hwaking do buraco negro acústico e seu termo de correção são obtidos através do método estatístico quântico. Não há necessidade de introduzir o "cut-off"ultravioleta e as divergências são eliminadas.

são eliminadas.

Capítulo 2

Buraco Negro Acústico

No ano de 1915, Einstein propôs a teoria da relatividade geral, que leva em consideração as ideias descobertas na relatividade restrita, podemos resumir dizendo-se que o espaço e o tempo, que já tinham sido unificados como espaço-tempo pelo próprio Albert Einstein anos antes, têm suas propriedades modificadas pelo conteúdo subjacente de matéria e energia. Isto implica profundamente em nosso conhecimento do espaço tempo, que nos leva a concluir, que a matéria e energia curvam o espaço tempo à sua volta. Portanto, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo e a relação entre matéria e energia é descrita pela equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu},$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento, R é o escalar de curvatura de Ricci, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante gravitacional. Os buracos negros são soluções dessa equação. E a solução mais simples encontrada é a do buraco negro de Schwarzschild, por ser estático e não possuir carga.

Pelo estudo da formação de estrelas, cuja massa inicial é maior do que 10 massas solares ao alcançarem estágios finais de sua evolução passam por processos violentíssimos. A região central dessas estrelas gigantes sofre um forte colapso gravitacional que irá levá-las a uma enorme explosão. Quando isso ocorre essas estrelas gigantes lançam toda a sua matéria no espaço interestelar e podem ser completamente destruídas ou deixar uma estrela residual, uma estrela muito compacta que é conhecida como estrela de nêutrons. E a massa dessa estrela residual ser muito grande e ocorrer dela ainda continuar a colapsar, vindo a formar o que denominamos de buraco negro. Estes objetos são caracterizados por

possuírem uma região chamada de horizonte de eventos, no qual, a partir dessa região nada escapa, nem mesmo a luz (SUSSKIND e LINDESAY, 2005).

O buraco negro acústico nada mais é que um sistema análogo ao buraco negro gravitacional. Todavia, diferentemente do gravitacional, este modelo é formado quando o fluido atinge uma velocidade supersônica (ou seja, velocidade maior que a do som). Dessa forma quando o fluido atinge uma velocidade supersônica cria-se uma região chamada de horizonte de eventos acústico e, assim, as ondas sonoras, que estiverem nessa região, não conseguem escapar, formando então um buraco negro acústico. Modelo este que foi primeiramente estudado por Willian George Unruh com o objetivo de entender a radiação Hawking (UNRUH,1981). A seguir podemos observar isto, graficamente, através da (Figura 2.1)

Figura 2.1: BURACO NEGRO ACÚSTICO



Imagine o fluido sendo representado pela seta amarela e o som pela onda verde, a medida que a onda interage com o fluido em movimento são criadas três regiões diferentes, sendo elas as seguintes (Figura 2.1):

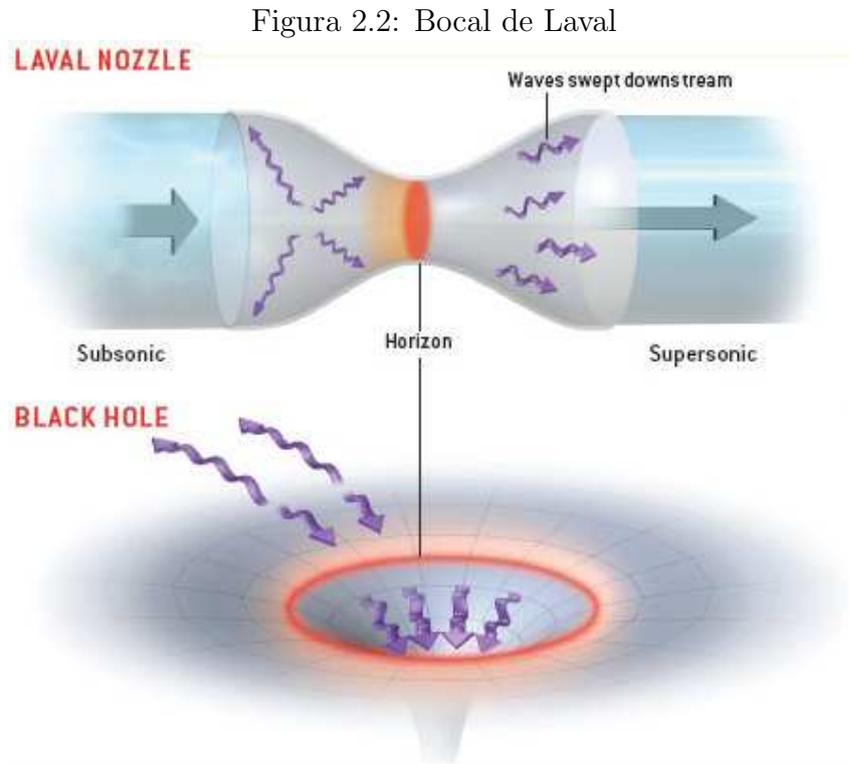
I. Região supersônica- região criada quando a velocidade do fluido v é maior que a velocidade do som c_s , é a parte interna do buraco negro acústico, onde nem mesmo o som escapa.

II. Horizonte sônico - é criado quando uma onda sonora interage com o fluido, em que ambos se movendo a mesma velocidade. Trata-se da região delimita o interior do exterior do buraco negro acústico. Desta maneira qualquer onda sonora que se aproxime desta região será capturada para o interior do buraco negro.

III. Região subsônica - É a parte externa do buraco negro, que é criada quando o fluido interage com o som a uma velocidade subsônica (velocidade menor que a do som). Nesta região nota-se a presença de ondas sonoras, diferentemente da região supersônica.

Podemos criar experimentalmente um buraco negro acústico usando um bocal convergente-divergente, conhecido como bocal de Laval. Esse instrumento acelera o escoamento de velocidades subsônicas para supersônicas para supersônicas no ponto mais

estreito sem alterar as propriedades do fluido (JACOBSON e PARENTANI,2015).



Fonte: Jacobison e Parentani (2005,p. 73)

Na Figura 2.2 acima, apresentamos um diagrama que permite uma comparação entre o buraco negro acústico e o buraco negro gravitacional. Nota-se as regiões supersônica e subsônica além do horizonte sônico, descritas anteriormente. Quando as ondas eletromagnéticas se aproximam da região de horizonte do buraco negro as mesmas são sugadas para seu interior, a mesma forma como ocorre com as ondas sonoras ao passarem próximo do horizonte de eventos acústico.

Para entendermos o modelo análogo, utilizaremos a relatividade geral através de uma métrica efetiva (geometria acústica) e as equações importantes de fluidos (física acústica).

E faremos também uma revisão de buracos negros acústicos, para os casos não-relativístico e relativístico, da radiação Hawking, e calculamos a temperatura Hawking e relação de dispersão, para os casos, não relativísticos e relativísticos.

2.1 Métrica acústica não-relativística

Nesta seção descrevemos o buraco negro acústico a partir da propagação de uma onda sonora em um fluido ideal. Para isso, vamos utilizar as principais equações dos fluidos que são a de continuidade e a de Euler, sendo a primeira usada para estudar o movimento de matéria contínua; e a segunda para descrever o movimento de fluidos ideais. Tais equações são dadas, respectivamente, por (SIMON, 1996):

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.2)$$

onde $\vec{f} = -\vec{\nabla} p$ é a densidade de força por unidade de volume, ρ é a densidade do fluido e v a velocidade.

Para estudar buracos negros acústicos sempre consideramos fluidos ideais, ou seja, fluidos irrotacionais, não viscosos e barotrópicos. O fluido irrotacional, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, nos dá a condição de escrever a velocidade como sendo o gradiente de um potencial velocidade $\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi$, e esse, por ser barotrópico, a densidade do fluido depende apenas da pressão, podemos escrever a entalpia da maneira a seguir:

$$h(p) = \int_0^P \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (2.3)$$

ou ainda

$$\vec{\nabla} h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \quad (2.4)$$

Para encontrar uma equação de onda para o potencial velocidade parte-se da equação de Euler e considera que o fluido é ideal, fazendo uso da propriedade :

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (2.5)$$

temos que a equação de Euler se reduz a

$$-\partial_t \phi + h + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 = 0. \quad (2.6)$$

Sabemos que as ondas sonoras produzem alterações nas características do meio em que se propagam, que provocam variações na densidade, pressão, e velocidade das partículas que constituem o fluido. Matematicamente, essas ondas são descritas como sendo uma perturbação linear das variáveis dinâmicas (ρ, p, ϕ) , ou seja:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \vartheta(\varepsilon^2), \quad (2.7)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta(\varepsilon^2), \quad (2.8)$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \vartheta(\varepsilon^2), \quad (2.9)$$

o índice 0 nas equações acima indica quantidades sem perturbação já o índice 1, as quantidades com perturbações em primeira ordem em ε . Considerando que a onda sonora se propaga no fluido, fazemos uma perturbação linear nas equações da continuidade e Euler. Isto é, substituindo a equação (2.7) em (2.1), obtemos:

$$\partial_t \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\partial_t \rho_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1) = 0. \quad (2.11)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor, na equação (2.8) e admitindo a condição barotrópica, a entalpia assume a seguinte forma:

$$h(p) = h(p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta(\varepsilon^2)) = h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \vartheta(\varepsilon^2). \quad (2.12)$$

Com esse resultado, ao perturbarmos linearmente a equação de Euler, encontramos:

$$-\partial_t \phi_0 + h_0 + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \phi_0 \right)^2 = 0 \quad (2.13)$$

e

$$-\partial_t \phi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = 0. \quad (2.14)$$

De (2.14), temos:

$$p_1 = \rho_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right), \quad (2.15)$$

e da condição barotrópica, $\rho = \rho(p)$, se expandirmos em torno de $p = p_0$, temos:

$$\rho(p) = \rho(p_0) + \frac{\partial \rho(p - p_0)}{\partial p} + \dots = \rho_0 + \frac{\partial p(\varepsilon p_1)}{\partial p}, \quad (2.16)$$

comparando com a equação de perturbação para ρ , (2.7), obtemos a equação a seguir:

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1, \quad (2.17)$$

que por substituição obtém-se

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right). \quad (2.18)$$

Desta forma, reescrevemos a equação da continuidade, substituindo (2.18) em (2.11)

$$-\partial_t \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \left(\partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \vec{v}_0 \right] = 0., \quad (2.19)$$

temos a equação da onda que descreve a propagação do potencial velocidade. As equações (2.15) e (2.17) determinam p_1 e ρ_1 , respectivamente. Assim temos a descrição da propagação das perturbações acústicas (VISSER, 1998; TONIATO, 2010). Fazendo a comparação da equação (2.19) com a equação da onda,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}^2} = 0, \quad (2.20)$$

encontramos a velocidade do som a seguir:

$$c_s^{-2} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (2.21)$$

Normalmente o fluido sendo ideal, ou seja, barotrópico, irrotacional e não viscoso, a equação descrita pelo potencial velocidade, numa perturbação acústica, é semelhante a equação de Klein-Gordon no espaço curvo de um campo escalar sem massa, acoplado minimamente a um campo gravitacional, em (3+1) dimensões na geometria lorentziana, ou seja :

$$\Delta \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0. \quad (2.22)$$

Com o formalismo da relatividade geral podemos escrever a propagação acústica, sabendo que a propagação do som é governada por uma métrica acústica, que é função da densidade ρ , da velocidade do som c_s e da velocidade do fluido v , ou seja:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v^2) & \vdots & -v^T \\ \cdots & & \cdots \\ -v & \vdots & I \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

no entanto, para isto, temos que construir a matriz $f_{\mu\nu}$, e assim a partir dela, encontrar a métrica (BARCELÓ, LIBETARI e VISSER,2011). Então com a matriz que representa $f_{\mu\nu}$, e utilizando a Equação (2.19), temos:

$$f^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices romanos de 1 a 3. Para um espaço-tempo em 3+1 dimensões, onde $x^\mu \equiv (t, x^i)$ a equação de onda pode ser escrita como

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0, \quad (2.25)$$

essa equação equivale a Equação (2.19). Fazendo a comparação entre as Equações (2.25) e (2.22), temos que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

como $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$, obtemos da equação anterior que :

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{g})^4 g^{-1} = g. \quad (2.27)$$

com o determinante da Equação (2.24), temos

$$\det(f^{\mu\nu}) = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}. \quad (2.28)$$

que, comparando com a Equação (2.27) com (2.28), obtemos

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}, \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c_s}. \quad (2.29)$$

Assim, encontramos a matriz dos coeficientes da métrica contravariante

$$g^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

em seguida, podemos calcular a matriz inversa, e desta forma determinarmos a métrica covariante. No entanto, para calcular a inversa de $g^{\mu\nu}$, precisamos escrevê-la na forma (4x4). Assim, da matriz anterior, temos :

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c_s^2 - (v_{0x})^2 & -v_{0x} v_{0y} & -v_{0x} v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0y} v_{0x} & c_s^2 - (v_{0y})^2 & v_{0y} v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0z} v_{0x} & -v_{0z} v_{0y} & c_s^2 - (v_{0z})^2 \end{bmatrix};$$

logo, a inversa é

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

onde na forma 4 x 4 é escrita como :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & 1 & 0 & 0 \\ -v_{0y} & 0 & 1 & 0 \\ -v_{0z} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Semelhante a escrever o elemento de linha acústico, da forma a seguir

$$\partial s^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c_s} [-c_s^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)]. \quad (2.33)$$

Observemos que, a métrica encontrada tem uma assinatura assim como a métrica para a geometria Rimanneana $(-, +, +, +)$. Lembrando que nosso sistema físico é um fluido que se move em um espaço plano, no entanto, quando o som interage com o fluido, ele "sente" efeitos de um espaço curvo. Daí, o motivo de partir das equações da dinâmica dos fluidos para o espaço plano e obtermos uma métrica acústica para um espaço curvo. Resumindo, o fluido age no som como a massa age sobre a luz.

Encontrada a métrica acústica, podemos escrever na forma da métrica de Schwarzschild, já que toda analogia acústica é fundamentada neste tipo de buraco negro. Então colocamos $-(c_s^2 - v^2)$ em evidência e completamos o quadrado perfeito, obtendo o elemento de linha a seguir

$$ds^2 = \frac{\rho}{c_s} \left[-(c_s^2 - v_0^2) d\tau^2 + \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{dx}}{(c_s^2 - v_0^2)} + \vec{dx}^2 \right], \quad (2.34)$$

onde $d\tau$ é uma coordenada, dada por

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{dx})}{c_s^2 - v_0^2}. \quad (2.35)$$

Note que, quando fazemos a mudança de coordenadas, transformamos a métrica acústica obtida na Equação (2.33) em uma métrica estacionária, considerando que eliminamos os termos cruzados entre as coordenadas temporais e espaciais (TONIATO, 2010). Veremos a seguir que para calcular a temperatura Hawking acústica, utilizaremos a transformação para a métrica de Schwarzschild.

2.1.1 Métrica acústica a partir da lagrangeana

Até agora, o que fizemos foi descrever um buraco negro acústico partindo da propagação sonora em um fluido ideal. Todavia, podemos obter a métrica (2.33) de outra forma. A partir da densidade lagrangeana não relativística, que tem por solução a equação de Schrodinger, e escrever o potencial escalar em termos de quantidades hidrodinâmicas, e encontrarmos as equações de movimento e obtermos a métrica. A lagrangeana não relativística que utilizamos é dada por:

$$\mathcal{L} = i\phi^* \partial_0 \phi - \frac{1}{2m} \partial_j \phi^* \partial^j \phi + b(\phi\phi^*)^2. \quad (2.36)$$

Sendo nosso modelo acústico, vamos escrever o potencial ϕ em função de variáveis hidrodinâmicas, utilizando a aproximação de Madelung (PASHAEV e LEE, 2001). Sendo o potencial escrito da seguinte forma:

$$\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)}, \quad (2.37)$$

onde S é a fase e ρ é a densidade. Substituindo o campo escalar na lagrangeana (3.37), obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \partial_0 \rho - \rho \partial_0 S - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{4\rho} \partial_j \rho \partial^j \rho + \rho \partial_j S \partial^j S \right) + b\rho^2. \quad (2.38)$$

Com a equação acima, e a equação de Euler-Lagrange, as equações de movimento para S e ρ . São dadas por; respectivamente, por :

$$\partial_j \left(\frac{\rho}{m} \partial^j S \right) - \partial_0 \rho = 0 \quad (2.39)$$

e

$$-\frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_j \partial^j \sqrt{\rho} + \partial_0 S + \frac{1}{2m} \partial_j S \partial^j S - 2b\rho = 0. \quad (2.40)$$

O primeiro termo da equação anterior, é um potencial quântico que é negligenciado na região hidrodinâmica dos fluidos, e não consideramos (XIAN-RUI GE e SANG-JINSIN, 2010).

Como podemos representar uma onda sonora através de perturbações das equações que descrevem a onda em um meio, e tais equações são as de movimento. Logo, escrevendo S e ρ como segue

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \vartheta(\varepsilon)^2 \quad (2.41)$$

e

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \vartheta(\varepsilon)^2,$$

obtemos as equações perturbadas para a fase e para a densidade, que são dadas respectivamente da forma a seguir

$$\frac{1}{m}\partial_j(\rho_0\partial^j S_1 + \rho_1\partial^j S_0) - \partial_0\rho_1 = 0 \quad (2.42)$$

e

$$\partial_0 S_1 + \frac{1}{m}(\partial_j S_0\partial^j S_1) - 2b\rho_1 = 0. \quad (2.43)$$

Determinando ρ_1 na Equação (2.43) e substituindo na Equação (2.42); tem-se uma equação de onda similar a Equação (2.19). Comparando a equação encontrada com a equação de Klein - Gordon determinaremos a métrica. Da Equação (2.43), temos que

$$\rho_1 = \frac{1}{2b} \left(\partial_0 S_1 + \frac{1}{m} \partial_j S_0 \partial^j S_1 \right), \quad (2.44)$$

substituindo-a em (2.42), chegamos a

$$-\partial_0 \left\{ \frac{1}{2b} [\partial_0 S_1 + v_{0j} \partial^j S_1] \right\} + \partial_j \left\{ \frac{\rho_0}{m} \partial^j S_1 - v_0^j \left[\frac{1}{2b} (\partial_0 S_1 + v_{0k} \partial^k S_1) \right] \right\} = 0, \quad (2.45)$$

em que $v_{0j} = \frac{\partial_j S_0}{m}$ é a velocidade. Colocando $\frac{1}{2b}$ em evidência, na equação anterior, identificamos a velocidade do som como sendo $c_s^2 = 2b\rho_0$ (redefinindo $\frac{\rho_0}{m} = \rho$). Desta forma, a equação de onda acima pode ser reescrita como

$$-\partial_0 \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [\partial_0 S_1 + v_{0j} \partial^j S_1] \right\} + \partial_j \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [c_s^2 \partial^j S_1 - v_0^j (\partial_0 S_1 + v_{0k} \partial^k S_1)] \right\} = 0, \quad (2.46)$$

ou ainda, escrevendo as derivadas com o operador ∇ , temos

$$-\partial_0 \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [\partial_0 S_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} S_1] \right\} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [c_s^2 \vec{\nabla} S_1 - \vec{v}_0 (\partial_0 S_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} S_1)] \right\} = 0. \quad (2.47)$$

Podemos notar que encontramos uma equação de onda semelhante a (2.19), obtida levando em consideração a propagação de uma onda sonora em um fluido e que após alguns cálculos, vistos anteriormente, resultou na seguinte métrica:

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

Levando isto em consideração a equação (2.47) resultou na mesma métrica acima, já que o caminho para obtê-la é o mesmo. Chegando então, a meta inicial da subseção, encontrou-se a métrica acústica a partir de uma lagrangeana não relativística.

2.2 Métrica acústica relativística

Trataremos, agora, na presente seção, do caso relativístico. Diferentemente da seção anterior, não vamos utilizar a equação de Euler e nem a equação da continuidade para obter a métrica. Contrariamente, utilizaremos a lagrangeana, ou seja, a lagrangeana do modelo abeliano Higgs, ou seja, o modelo do "chapéu mexicano" interligado ao eletromagnetismo. Vamos considerar, uma aproximação para o potencial, escrevendo-o em termos das variáveis hidrodinâmicas, assim assegurando que nossa métrica é acústica. Com essa aproximação, encontramos as equações de movimento e a partir delas determinaremos a métrica acústica relativística, seguindo procedimento feito anteriormente.

A lagrangeana do modelo Abeliano de Higgs é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - b|\phi|^4, \quad (2.49)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético. Utilizando a aproximação Madelung para o campo escalar $\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)}e^{iS(\vec{x}, t)}$, podemos reescrever a lagrangeana da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4\rho}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho\partial_\mu S\partial^\mu S - 2\rho e\partial_\mu S A^\mu + e^2\rho A_\mu A^\mu + m^2\rho - b\rho^2, \quad (2.50)$$

assim, dada a lagrangeana acima, as equações de movimento para S e ρ são, respectivamente,

$$-\partial_\mu[\rho(\partial^\mu S - eA^\mu)] = 0 \quad (2.51)$$

e

$$-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu\partial^\mu\sqrt{\rho} + (\partial_\mu S - eA_\mu)^2 + m^2 - 2b\rho = 0. \quad (2.52)$$

Vale salientar que as ondas sonoras, matematicamente, são escritas como perturbações acústicas no meio, então perturbando as duas equações de movimento anteriores, da mesma forma que foi feita na seção anterior, S e ρ são dados

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \vartheta(\varepsilon)^2 \quad (2.53)$$

e

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \vartheta(\varepsilon)^2,$$

encontramos as equações perturbadas. A Equação (2.51) torna-se

$$-\partial_\mu[\rho_1(\partial^\mu S_0 - eA^\mu) + \rho_0\partial^\mu S_1] = 0$$

ou

$$-\partial_\mu[\rho_1 U^\mu + \rho_0 \partial^\mu S_1] = 0, \quad (2.54)$$

em que $U^\mu = (\partial^\mu S_0 - eA^\mu)$ é a quadrivelocidade do fluido. Lembrando que o termo do potencial quântico $\rho^{-1/2}(\partial_\mu \partial^\mu \sqrt{\rho})$ é desprezado na região hidrodinâmica (XIAN-RUI GE E SANG-JIN SIN, 2010). Então a equação é escrita da maneira a seguir

$$(\partial_\mu S - eA_\mu)(\partial^\mu S - eA^\mu) + m^2 - 2b\rho = 0.$$

Perturbando a equação anterior, temos

$$\partial_\mu S_0 \partial^\mu S_1 - eA^\mu \partial_\mu S_1 - b\rho_1 = 0. \quad (2.55)$$

Para encontrar uma equação de onda semelhante a Equação (2.19) da seção (2.1), comparamos a mesma com a equação de Klein-Gordon e assim encontramos a métrica. Para isto, isolamos ρ_1 em (2.55) e substituímos em (2.54), tem-se uma equação de onda dada por:

$$\partial_t \left[\partial_t S_1 \left(\frac{-1}{b} \omega_0^2 - \rho_0 \right) + \partial_j S_1 \left(\frac{-1}{b} v_0^j \omega_0 \right) \right] + \partial_i \left[\partial_t S_1 \left(\frac{-1}{b} \omega_0 v_0^i \right) + \partial_j S_1 \left(\frac{-1}{b} v_0^j v_0^i + \rho_0 \delta_{ij} \right) \right] = 0; \quad (2.56)$$

definimos que $\omega_0 = eA^t - \partial_t S_0$ e $\vec{v}_0 = \vec{\nabla} S_0 + e\vec{A}$, colocando ω_0^2/b em evidência, obtém-se a equação de onda:

$$\partial_t \left\{ \frac{\rho_0 b}{c_s^2} [\partial_t S_1 (-1 - c_s^2) - \partial_j S_1 v^j] \right\} + \partial_i \left\{ \frac{\rho_0 b}{c_s^2} [-\partial_t S_1 v^i + \partial_j S_1 (-v^j v^i + c_s^2 \delta_{ij})] \right\} = 0, \quad (2.57)$$

em que $c_s^2 = \rho_0 b / \omega_0^2$ e $\vec{v} = \vec{v}_0 / \omega_0$. Fazendo a comparação com a Equação (2.22), temos que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \frac{\rho_0 b}{c_s^2} \begin{bmatrix} -(1 + c_s^2) & \vdots & -v^j \\ \dots & & \dots \\ -v^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v^i v^j) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

da mesma maneira que a Equação (2.31), esta matriz é uma forma reduzida de escrever uma matriz 4 x 4. Porém, a mesma ainda não representa a métrica, para obtê-la temos que determinar $g_{\mu\nu}$, que é a inversa de $g^{\mu\nu}$.

Consequentemente, vamos escrever a matriz anterior na forma ampliada 4 x 4, e calcular sua inversa, que é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho_0 b f} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ -v_1 & c_s^2 - v_2^2 - v_3^2 + 1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ -v_2 & v_1 v_2 & c_s^2 - v_1^2 - v_3^2 + 1 & v_2 v_3 \\ -v_3 & v_1 v_3 & v_2 v_3 & c_s^2 - v_1^2 - v_2^2 + 1 \end{bmatrix};$$

onde $f = c_s^2 - v^2 + 1$. Após fazermos isto, manipulando matematicamente para isolar o $g_{\mu\nu}$ de um lado da igualdade, obtemos que

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\det(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}} \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

em seguida calculando o determinante, vemos que

$$\det(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = - \left[\frac{c_s^2}{\rho_0^4 b^4 (c_s^2 - v^2 + 1)} \right], \quad (2.60)$$

assim chegamos que a métrica é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0 b}{c_s \sqrt{f}} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v^2) & \vdots & -v^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v^i & \vdots & [(c_s^2 + 1) - v^2] \delta^{ij} + v^i v^j \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Logo, o elemento de linha acústico pode ser escrito como

$$ds^2 = \frac{\rho_0 b}{c_s \sqrt{f}} \left\{ -(c_s^2 - v^2) dt^2 - v^j dx^j dt - v^i dx^i dt + [(c_s^2 + 1) - v^2] \delta^{ij} + v^i v^j dx^i dx^j \right\}$$

Da mesma forma da seção anterior, escrevemos a métrica acústica na forma de Schwarzschild, assim o elemento de linha reescrito é

$$ds^2 = \frac{\rho_0 b}{c_s \sqrt{f}} \left\{ -(c_s^2 - v^2) d\tau^2 + f \left[\frac{(\vec{v} \cdot \vec{dx})^2}{c_s^2 - v^2} + \vec{dx}^2 \right] \right\}, \quad (2.62)$$

para isto, utilizamos a seguinte mudança de coordenadas (ANACLETO, BRITO e PASSOS, 2012)

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{dx})}{c_s^2 - v^2}. \quad (2.63)$$

Notemos que, temos uma geometria acústica estática. E ainda aplicando o limite não relativístico (2.62), ou seja, tomando o limite onde $c_s \ll 1$ e $v \ll 1$, temos que a métrica se reduz a que encontramos por meio das equações de Euler e da continuidade na Equação (2.33).

2.3 Radiação Hawking

Nesta seção calculamos a temperatura Hawking para as duas métricas encontradas nas seções anteriores, a métrica relativística e a não relativística. Porém, necessitamos compreender a radiação Hawking e sua analogia acústica.

Ao estudar buracos negros, o físico Stephen Hawking, descobriu, que aplicando conceitos da mecânica quântica, um buraco negro emite radiação nas proximidades do horizonte de eventos, esta é a radiação que conhecemos como radiação Hawking (HAWKING,1974).

Segundo a mecânica quântica, o vácuo contém pares de partículas, uma negativa e outra positiva, que se anulam rapidamente, respeitando o princípio da incerteza de Heisenberg. Essas partículas ao surgirem no interior do buraco negro, nas proximidades do horizonte de eventos, o campo gravitacional as separa; o buraco negro captura a partícula negativa e emite a positiva. Desta maneira temos uma radiação emitida e a massa do buraco negro reduzida (TONIATO, 2010; HAWKING e GIBBONS, 1977). Radiação essa que possui um espectro semelhante ao de um corpo negro, e por isso associamos ao buraco negro uma temperatura, conhecida como temperatura Hawking. Porém, esta explicação é válida para o caso gravitacional, já que no caso acústico acontece de maneira semelhante, no entanto com algumas peculiaridades existentes do modelo análogo.

Como observado na introdução deste trabalho, encontramos um buraco negro acústico quando um fluido em movimento atinge uma velocidade supersônica. Neste instante, quando as velocidades se igualam, que surge o horizonte de eventos acústico, ou horizonte sônico (BARCELÓ, LIBERATI e VISSER, 2011). Analogamente ao caso gravitacional, o horizonte acústico é uma região na qual, a partir dela, o som não escapa. E ao existir flutuações quânticas nas proximidades do horizonte acústico, temos que a radiação Hawking emite fonons. E a partir dessa emissão está a relação da temperatura Hawking com o modelo análogo.

O fato da radiação Hawking está relacionada com a temperatura Hawking, nos permite calcular o valor da temperatura na região que a radiação é emitida, ou seja, no horizonte de eventos. Uma das formas de calcular o valor dessa temperatura é a partir da gravidade de superfície do buraco negro, definida por (HAWKING,1975):

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{dg_{tt}}{dx} \right) \Big|_{horizontal}, \quad (2.64)$$

no entanto, precisamos escrever a métrica na forma de Schwarzschild, ou seja, eliminamos o termo cruzado das coordenadas espacial e temporal, seguindo o procedimento das seções anteriores. Assim o g_{tt} é o termo que multiplica a nova coordenada temporal

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{dx})}{c_s^2 - v_0^2}. \quad (2.65)$$

Para calcularmos a gravidade de superfície temos que levar em conta o momento em que a velocidade do fluido é igual a do som, sendo esta a definição de horizonte de evento acústico (TONIATO, 2010). No entanto, ao calcularmos a taxa de emissão das partículas no horizonte de eventos, vemos que a temperatura é dada por (HAWKING e GIBBONS, 1977):

$$T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg_{tt}}{dx} \right) \Big|_{horizonte}. \quad (2.66)$$

Com a equação anterior, a métrica na forma de Schwarzschild e a gravidade de superfície, essas condições nos permite calcular a temperatura Hawking acústica. Apesar disso, devemos observar que se retornarmos as duas métricas encontradas nas seções Equações, (2.34) e (2.62), podemos observar que o g_{tt} é a função da velocidade do som c_s e da velocidade do fluido v . Entretanto, estamos considerando um fluido incompressível com simetria esférica para o cálculo dessa temperatura, ou seja, a velocidade é constante, a densidade não depende da posição e a velocidade do fluido é radial. Então, da equação da continuidade (2.1), temos que $v \sim \frac{1}{r^2}$, e a derivada na coordenada x se torna uma derivada em r na equação (2.66)(ANACLETO, BRITO e PASSOS, 2012).

2.3.1 Temperatura Hawking para o modelo não-relativístico

Da radiação Hawking e da temperatura Hawking para os casos não relativístico, e relativístico, respectivamente, observamos que para calcular a temperatura Hawking consideramos a velocidade do fluido como sendo radial, $v = v_r$, desta maneira, vamos escrever a Equação (2.34) em coordenadas esféricas, ou seja :

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[-(c_s^2 - v_r^2)d\tau^2 + \frac{c_s^2}{(c_s^2 - v_r^2)}(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2d\phi^2) \right]. \quad (2.67)$$

Para determinar a temperatura Hawking, Utilizamos a equação (2.66), ou seja T_H é dada por :

$$T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d(c_s^2 - v_r^2)}{dr} \right] \Big|_{horizonte}, \quad (2.68)$$

Obtemos um horizonte acústico pois a velocidade do fluido é igual a do som, ou seja, $c_s = v_r$, então usaremos do fato que $v_r = c_s \frac{r_H^2}{r^2}$ (ANACLETO et al., 2012), e o raio do horizonte encontramos de maneira análoga ao de Schwarzschild, ou seja, quando temos uma singularidade no infinito, fazendo $g_{rr} \rightarrow \infty$, temperatura Hawking para o caso não

relativístico é :

$$T_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H}. \quad (2.69)$$

2.3.2 Temperatura Hawking para o modelo relativístico

Utilizando o mesmo procedimento para o caso não relativístico, vamos escrever o elemento de linha (2.62) em coordenadas esféricas

$$ds^2 = \frac{\rho_0 b}{c_s} \frac{1}{\sqrt{f}} \left\{ -(c_s^2 - v_r^2) d\tau^2 + f \left[\frac{v_r dr^2}{c_s^2 - v_r^2} + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] \right\} \quad (2.70)$$

em seguida, vamos usar a equação (2.66) e assim encontramos a temperatura Hawking para o caso relativístico

$$T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\frac{(c_s^2 - v_r^2)}{\sqrt{f}} \right] \Big|_{\text{horizonte}} = \frac{c_s^2}{\pi r_H}, \quad (2.71)$$

utilizamos as mesmas considerações anteriores para a velocidade do fluido e assim chegamos ao resultado. O raio do horizonte $g_{rr} \rightarrow \infty$.

Observando os dois resultados encontrados para a temperatura Hawking para ambos os casos não relativístico e relativístico, notamos que a temperatura é inversamente proporcional ao raio do horizonte. Já o raio do buraco negro é proporcional a sua massa (SUSSKIND e LINDESAY, 2005),

$$r = \frac{2GM}{c^2}; \quad (2.72)$$

assim temos que a temperatura é inversamente proporcional a massa do buraco negro, ou seja, $T_H \propto 1/M \propto 1/r_H$. Esta equação é conhecida como raio de Schwarzschild, para o caso gravitacional, que também é utilizada para o modelo análogo. Sabendo que G é a constante gravitacional, M é a massa do objeto e c^2 a velocidade da luz ao quadrado.

Para os buracos negros gerados a partir do colapso gravitacional, a radiação cósmica de fundo do universo tem uma temperatura próxima de 3K. Podemos explicar isso considerando que mini buracos negros foram formados no início do universo.

Porém, para o buraco negro acústico no condensado de Bose-Einstein ¹, e a temperatura Hawking é apenas uma ordem de grandeza menor que a temperatura do condensado (FABBRI, 2014)

$$T_H \sim 10nK \leq T_{CBE} \sim 100nK, \quad (2.73)$$

e observamos modelos análogos do efeito Hawking através de experimentos apropriados do condensado de Bose Einstein.

2.4 Relação de dispersão

A relação existente entre frequência e comprimento de onda, ou ainda entre frequência e velocidade pela relação de dispersão, associada a quantidades físicas de natureza ondulatória propagando-se em meio material ou no vácuo. Atentando para o fato que as relações de dispersão se alteram dependendo do meio em que a onda se propaga e graças a esse fato tem suas trajetórias de propagação diretamente influenciadas, já que, quando uma onda atravessa uma interface de meios diferentes, ocorre uma mudança no seu comprimento de onda.

Por isso a importância de conferir a relação de dispersão pois ela nos permite entender como energia e momento são transportados de um ponto a outro em um meio.

Utilizaremos a Equação (2.57) para derivar a relação de dispersão, considerando que S_1 é real, temos que

$$S_1 \sim Re[e^{(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x})}], \quad (2.74)$$

sendo

$$\omega = \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad e \quad \vec{k} = \vec{\nabla} S_1, \quad (2.75)$$

em que ω a frequência angular \vec{k} é o número de onda. Agora, vamos ter cuidado para não confundir o k da gravidade de superfície, o qual usamos a letra para representar, com o k do número de onda, representado pela letra maiúscula. Logo, substituindo (2.74) em (2.57) e desenvolvendo as derivadas, encontramos que

$$(1 + c_s^2)\omega^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{k})\omega + k^2(v^2 - c_s^2) = 0, \quad (2.76)$$

ou ainda,

$$a\omega^2 + \sigma\omega + d = 0, \quad (2.77)$$

em que

$$a = 1 + c_s^2, \quad \sigma = -2\vec{v} \cdot \vec{k} \quad e \quad d = k^2(v^2 - c_s^2), \quad (2.78)$$

obtemos uma equação de segundo grau, tomando a velocidade na direção x , temos $v = v_1$, o Δ da equação de segundo grau é:

$$\Delta = 4k^2c_s^2[(1 + c_s^2) - v_1^2], \quad (2.79)$$

e

$$\omega = \frac{v_1 k \pm k c_s^2 \sqrt{1 + c_s^2 - v_1^2}}{1 + c_s^2} \quad (2.80)$$

No limite não relativístico, $c_s \ll 1$ e $v_1 \ll 1$, temos que

$$\omega \simeq \pm k c_s. \quad (2.81)$$

Por definição, a velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{dk} \right|; \quad (2.82)$$

e assim temos que,

$$v_g = c_s, \quad (2.83)$$

desta forma sabendo que a velocidade de grupo mede a velocidade máxima que uma partícula em um meio pode atingir, isto significa que a velocidade máxima atingida é a própria velocidade da onda sonora.

Capítulo 3

Buraco negro acústico não-comutativo

O conceito de espaços não-comutativos tem origem com a formulação de Wigner da mecânica quântica no espaço de fase, em 1932. Em paralelo, Heisenberg foi o primeiro a propor relações de não-comutação, em que foi motivado pelo desejo sugerir uma relação de incerteza nula entre as coordenadas, isso com o intuito de eliminar alguns problemas de divergências ultravioleta na teoria quântica de campos. Porém em 1947, Snyder publicou o primeiro artigo sobre essa teoria, isto partindo das ideias de Heisenberg, com objetivo de normalizar estas divergências. Após um longo período sem a utilização da não-comutatividade, graças a um grande sucesso no método de renormalização. Na década de 1980 a não-comutatividade voltou a ser estudada juntamente com o desenvolvimento de uma geometria não-comutativa elaborada por Connes. Outro motivo que impulsionou o estudo da teoria não comutativa, foi o interesse em formular uma teoria quântica da gravitação, pois em regiões de Planck ($l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}cm$), onde a efeitos quânticos dessa teoria se tornam relevantes, assim a comutatividade fica sem sentido.

Ao se considerar, por exemplo, a seguinte situação, imaginemos que temos uma partícula carregada e medimos a sua coordenada espaço-temporal a , veremos da relação de incerteza de Heisenberg, que ela tem um momento da ordem de $1/a$. Logo conforme a intensidade de campo vai aumentando, uma grande quantidade de energia vai sendo concentrada em um volume muito pequeno. E isto, segundo a teoria da relatividade geral, causa uma deformação no espaço-tempo, devido a matéria e a energia. Ao tomarmos um limite de $a \rightarrow 0$, um horizonte de eventos é formado, assim não permitindo a detecção

da partícula neste ponto do espaço-tempo. Desta forma, o conceito clássico de espaço-tempo contínuo dá lugar a um espaço-tempo fragmentado em células, onde não há a ideia de ponto. Ou seja, quando tomamos o limite de $a \rightarrow 0$ não conseguimos detectar a posição da partícula; desta maneira, as coordenadas se tornam não-comutativas, logo temos uma incerteza tanto na posição quanto no momento. Assim, o espaço-tempo torna-se fragmentado em células.

Como solução desse problema temos que as coordenadas do espaço-tempo deixam de ser contínuas e passam a ser operadores hermitianos, x^μ , que não comutam entre si. Logo, as relações de comutação da mecânica quântica usual são :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \text{ e } [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (3.1)$$

que dão lugar a seguinte relação

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Com isso, do princípio de incerteza generalizado (GUP)

$$\Delta x_\mu^2 \Delta x_\nu^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \rangle \right)^2, \quad (3.3)$$

daí temos uma nova relação de incerteza para a teoria não-comutativa:

$$\Delta x_\mu^2 \Delta x_\nu^2 \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|, \quad (3.4)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-1$ e θ é uma matriz $D \times D$ real e anti-simétrica com dimensão de comprimento ao quadrado (AMORIM et al., 2013). Sendo θ muito pequeno, usaremos apenas os termos de primeira ordem em θ .

3.1 Métrica acústica não-comutativa

Na seção (2.2), do capítulo anterior, trabalhamos com a lagrangeana do modelo abeliano Higgs. Onde fizemos aproximações escrevendo o potencial em termos de variáveis hidrodinâmicas, com o intuito de que a métrica encontrada seria acústica; assim chegamos as equações de movimento e a métrica relativística. Na presente seção, vamos repetir os procedimentos matemáticos, porém com uma diferença, inserindo a não-comutatividade nas coordenadas.

A comutatividade é inserida trocando o produto ordinário dos campos pelo produto Moyal. Desta forma, a lagrangeana que antes era dada por (2.49), é agora escrita da maneira a seguir:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \star + (D_\mu \hat{\phi}) \star + D_\mu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^* \star \hat{\phi} - b \hat{\phi}^* \star \hat{\phi} \star \hat{\phi}^* \star \hat{\phi}, \quad (3.5)$$

onde $D_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu)$ é a derivada covariante e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, é o tensor eletromagnético. Lembrando que estamos usando o circunflexo para indicar os campos não-comutativos.

Expandindo cada produto Moyal da lagrangeana acima, utilizando o mapeamento de Seiberg-Wintten, que para a ordem mais trivial de θ , permite escrever os campos como (GHOSH, 2005; FREITAS, 2013; SEIBERG e WITTEN,1999),

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \theta^{\nu\rho} A_\rho (\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu),$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\beta} (F_{\mu\rho} F_{\nu\beta} + A_\rho \partial_\beta F_{\mu\nu}),$$

e

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2} \theta_{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \phi. \quad (3.6)$$

Este mapeamento foi descoberto no contexto da teoria de cordas e pode ser interpretado como uma expansão em θ do campo de gauge (calibre) não-comutativo (BICHL et al., 2001). Desta maneira, a lagrangeana torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) (|D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 - b |\phi|^4) \\ & + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} [(D_\beta \phi)^\dagger D^\mu \phi + (D^\mu \phi)^\dagger D_\beta \phi]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Do capítulo anterior, os termos a lagrangeana utilizamos a aproximação Madelung, $\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)}$, e assim podemos reescrever o campo escalar em função das variáveis hidrodinâmicas. Logo, fazendo a aproximação, obtemos :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) + \tilde{\theta} [\partial_\mu S \partial^\mu S - 2e A_\mu \partial^\mu S + e^2 A_\mu A^\mu + m^2] \rho - \tilde{\theta} b \rho^2 \\ & + \Theta^{\mu\nu} [\partial_\mu S \partial_\nu S - e A_\mu \partial_\nu S - e A_\nu \partial_\mu S + e^2 A_\mu A_\nu] \rho \\ & + \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \left[\tilde{\theta} \partial_\mu \partial^\mu + \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \right] \sqrt{\rho}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\tilde{\theta} = (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e $\Theta^{\mu\nu} = \theta^{\alpha\mu} F_{\alpha}^{\nu}$. Consideramos que não existe não-comutatividade entre as coordenadas espaciais e temporais, ou seja, $\theta^{0i} = 0$, mas $\theta^{i,j} = \epsilon^{ijk} \theta^k$, $F^{i0} = E^i$ e $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$.

Da lagrangeana acima, encontramos as seguintes equações de movimento para S e ρ , respectivamente

$$-\partial_{\mu} \left[\tilde{\theta} \rho (\partial^{\mu} S - e A^{\mu}) + \frac{\rho}{2} (\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu}) (\partial_{\nu} S - e A_{\nu}) \right] = 0, \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{\theta} \partial_{\mu} \partial^{\mu} + \Theta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}) \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \tilde{\theta} (\partial_{\mu} S - e A_{\mu})^2 + \Theta^{\mu\nu} (\partial_{\mu} S - e A_{\mu}) (\partial_{\nu} S - e A_{\nu}) \\ & + \tilde{\theta} m^2 - 2\tilde{\theta} b \rho = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e para o campo de Gauge, $A_{\mu\nu}$, obtemos as equações de Maxwell modificadas

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial_{\mu} (\theta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2\theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{\mu} (u_{\alpha} u^{\alpha} \rho + m^2 \rho - b \rho^2) \\ & - \partial_{\mu} [u_{\beta} (\theta^{\mu\beta} u^{\nu} - \theta^{\nu\beta} u^{\mu}) \rho] + \partial_{\mu} \left[\frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} - \theta^{\mu\beta} \partial_{\beta} \partial^{\nu} + \theta^{\nu\beta} \partial_{\beta} \partial^{\mu} \right) \sqrt{\rho} \right] = 2e\rho(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) u^{\nu} \\ & + e\rho u^{\mu} (\theta^{\alpha\nu} F_{\alpha\mu} + \theta_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como desprezamos o termo de potencial quântico para a equação de movimento do ρ , no caso não-comutativo, também desprezamos esse termo na Equação (3.9). Isto porquê, em regiões hidrodinâmicas, o mesmo é negligenciado. Usando as relações (2.54) obtemos as equações de movimento perturbadas, para o S e o ρ , respectivamente, como

$$\begin{aligned} & -\partial_{\mu} \left\{ \rho_0 \left[\tilde{\theta} \partial^{\mu} S_1 + \frac{(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu})}{2} \partial_{\nu} S_1 \right] \right. \\ & \left. + \rho_1 \left[\tilde{\theta} \partial^{\mu} S_0 - \tilde{\theta} e A^{\mu} + \frac{(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu})}{2} (\partial_{\nu} S_0 - e A_{\nu}) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

e

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta} (2\partial_{\mu} S_0 \partial^{\mu} S_1 - 2e A^{\mu} \partial_{\mu} S_1) \\ & + \Theta^{\mu\nu} [\partial_{\nu} S_1 (\partial_{\mu} S_0 - e A_{\mu}) + \partial_{\mu} S_1 (\partial_{\nu} S_0 - e A_{\nu})] - 2\tilde{\theta} b \rho_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou de outra maneira de apresar, na forma ampliada, como :

$$\begin{aligned} & -\partial_t \left[\rho_0 \left(\tilde{\theta} \dot{S}_1 + \frac{\Theta^{jt}}{2} \partial_j S_1 \right) - \rho_1 \left(\tilde{\theta} w_0 - \frac{\Theta^{jt}}{2} v_0^j \right) \right] \\ & -\partial_i \left[\rho_0 \left(\tilde{\theta} \partial^i S_1 + \frac{\Theta^{it}}{2} \dot{S}_1 + \frac{1}{2} (\Theta^{il} + \Theta^{li}) \partial_l S_1 \right) \right. \\ & \left. + \rho_1 \left(-\tilde{\theta} v_0^i - \frac{\Theta^{it}}{2} w_t + \frac{1}{2} (\Theta^{il} + \Theta^{li}) v_0^l \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e

$$-2\tilde{\theta}w_0\dot{S}_1 - 2\tilde{\theta}v_0^i\partial_i S_1 + \Theta^{tt}(v_0^l\dot{S}_1 - w_0\partial_l S_1) + \Theta^{lj}(v_0^l\partial_j S_1 + v_0^j\partial_l S_1) - \tilde{\theta}b\rho_1 = 0, \quad (3.15)$$

em que definimos $\omega_0 = -\dot{S}_0 + eA_t$ e $\vec{v}_0 = \vec{\nabla}S_0 + e\vec{A}$. Como no capítulo anterior, obtemos a seguinte equação de onda:

$$\partial_t[a^{tt}\dot{S}_1 + a^{tj}\partial_j S_1] + \partial_i[a^{it}\dot{S}_1 + a^{ij}\partial_j S_1] = 0, \quad (3.16)$$

onde

$$a^{tt} = -\tilde{\theta}\rho_0 - \frac{2}{b} \left(\tilde{\theta}w_0^2 - \Theta^{jt}v_0^j w_0 \right), \quad (3.17)$$

$$a^{tj} = -\frac{1}{2}\rho_0\Theta^{jt} - \frac{2}{b} \left[v_0^j \left(\tilde{\theta}w_0 - \frac{\Theta^{lt}}{2}v_0^l \right) + \frac{\Theta^{jt}}{2}w_0^2 - \frac{1}{2}(\Theta^{lj} + \Theta^{jl})w_0v_0^l \right], \quad (3.18)$$

$$a^{it} = -\frac{1}{2}\rho_0\Theta^{it} - \frac{2}{b} \left[v_0^i \left(\tilde{\theta}w_0 - \frac{\Theta^{lt}}{2}v_0^l \right) + \frac{\Theta^{it}}{2}w_0^2 - \frac{1}{2}(\Theta^{li} + \Theta^{il})w_0v_0^l \right], \quad (3.19)$$

$$a^{ij} = \tilde{\theta}\rho_0\delta^{ij} - \frac{\rho_0}{2}(\Theta^{ij} + \Theta^{ji}) - \frac{2}{b} \left(\tilde{\theta}v_0^i v_0^j + \frac{\Theta^{it}}{2}w_0v_0^j + \frac{\Theta^{jt}}{2}v_0^i w_0 \right) + \frac{2}{b} \left[\frac{1}{2}(\Theta^{lj} + \Theta^{jl})v_0^i v_0^l + \frac{1}{2}(\Theta^{li} + \Theta^{il})v_0^j v_0^l \right]. \quad (3.20)$$

Ao identificarmos a velocidade local do som como $c_s^2 = \frac{b\rho_0}{2\omega_0^2}$ e a velocidade do fluido $v^i = \frac{v_0^i}{\omega_0}$, com a comparação da equação da onda (3.16) e com a equação de Klein-Gordon (2.22), temos que

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \equiv \frac{b\rho_0}{2c_s^2} \begin{bmatrix} g^{tt} & \vdots & g^{tj} \\ \dots\dots & \cdot & \dots\dots \\ g^{it} & \vdots & g^{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

sendo os elementos da matriz dados por

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\tilde{\theta}c_s^2 - \left(\tilde{\theta} - \Theta^{jt}v^j \right), \\ g^{tj} &= -\frac{\Theta^{jt}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^j - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^l v^j + \frac{\Theta^{jt}}{2} - \frac{\Theta^{lj}}{2}v^l - \frac{\Theta^{jl}}{2}v^l \right], \\ g^{it} &= -\frac{\Theta^{it}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^i - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^l v^i + \frac{\Theta^{it}}{2} - \frac{\Theta^{li}}{2}v^l - \frac{\Theta^{il}}{2}v^l \right], \\ g^{ij} &= \left[\tilde{\theta}\delta^{ij} - \frac{1}{2}(\Theta^{ij} + \Theta^{ji}) \right] c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^i v^j + \frac{\Theta^{it}}{2}v^j + \frac{\Theta^{jt}}{2}v^i \right] \\ &+ \left[\frac{1}{2}(\Theta^{lj} + \Theta^{jl})v^i v^l + \frac{1}{2}(\Theta^{li} + \Theta^{il})v^j v^l \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

No entanto, a matriz que queremos encontrar é a inversa de $g_{\mu\nu}$, pois ela nos determina a métrica não-comutativa do buraco negro acústico. Usando a Equação (2.59),

encontramos que :

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\frac{b\rho_0}{2c_s}}{\sqrt{f}} \begin{bmatrix} g_{tt} & \vdots & g_{ti} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ g_{jt} & \vdots & g_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{tt} &= - \left[(\tilde{\theta} - \Theta^{jj})c_s^2 - \tilde{\theta}v^2 + 2\Theta^{jl}v^jv^l - \Theta^{jt}v^j \right], \\ g_{tj} &= -\frac{\Theta^{jt}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^j - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^lv^j + \frac{\Theta^{jt}}{2} - \frac{\Theta^{lj}}{2}v^l - \frac{\Theta^{jl}}{2}v^l \right], \\ g_{it} &= -\frac{\Theta^{it}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^i - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^lv^i + \frac{\Theta^{it}}{2} - \frac{\Theta^{li}}{2}v^l - \frac{\Theta^{il}}{2}v^l \right], \\ g_{ij} &= [\tilde{\theta}(1+c_s^2) - \tilde{\theta}v^2 - \Theta^{lt}v^l]\delta^{ij} + \tilde{\theta}v^iv^j. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sendo, $\Theta^{jt} = \theta^{ij}F_i^t = -\theta^{ij}F^{it} = \theta^{ij}E^i$ e $\Theta^{jl} = \theta^{ij}F_i^l = -\theta^{ij}F^{il}$. Assim, as componentes da métrica são:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -[(1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}], \\ g_{tj} &= -\frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{E})^j(c_s^2 + 1) - \left[2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} \right] \frac{v^j}{2} + \frac{B^j}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{v}) + \frac{\theta^j}{2}(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ g_{it} &= -\frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{E})^i(c_s^2 + 1) - \left[2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} \right] \frac{v^i}{2} + \frac{B^i}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{v}) + \frac{\theta^i}{2}(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ g_{ij} &= [(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}]\delta^{ij} + (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})v^iv^j. \\ f &= [(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2] - 3(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{v}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A métrica acústica acima depende da densidade do fluido ρ_0 , da velocidade local do som c_s , da velocidade do fluido \vec{v} , do parâmetro da não-comutatividade θ e dos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} .

Escrevendo o elemento de linha acústico, temos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} [g_{tt}dt^2 + g_{it}dx^i dt + g_{jt}dtdx^j + g_{ij}dx^i dx^j], \\ &= \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} [-\mathcal{F}(v)dt^2 - \vec{\xi}(v) \cdot d\vec{x}dt + \Lambda(v)dx^2 + (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(\vec{v} \cdot d\vec{x})^2], \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde

$$\mathcal{F}(v) = (1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}), \quad (3.27)$$

$$\Lambda(v) = (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2 - v^2) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}, \quad (3.28)$$

$$\vec{\xi}(v) = [2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}]\vec{v} + (1 + c_s^2)(\vec{\theta} \times \vec{E}) - (\vec{B} \cdot \vec{v})\vec{\theta} - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})\vec{B} \quad (3.29)$$

Mudando as coordenadas com o objetivo de escrever a métrica acústica na forma de Schwarzschild, obtemos a nova coordenada temporal dada por

$$d\tau = dt + \frac{\vec{\xi}(v) \cdot d\vec{x}}{2\mathcal{F}(v)}, \quad (3.30)$$

que permite escrever a métrica como

$$ds^2 = \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} \left[-\mathcal{F}(v)d\tau^2 + \Lambda \left(\frac{v^i v^j \Gamma + \Sigma^{ij}}{\Lambda\mathcal{F}(v)} + \delta^{ij} \right) dx^i dx^j \right], \quad (3.31)$$

em que

$$\begin{aligned} \Gamma(v) &= 1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B} + (1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 \\ &\quad - 2(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\Sigma^{ij}(v) = [(1 + c_s^2)(\vec{\theta} \times \vec{E})^i - (\vec{B} \cdot \vec{v})\theta^i - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})B^i]v^j. \quad (3.33)$$

Ao se fazer a mudança de coordenadas, implica em escrever uma métrica estacionária, devido ao fato de eliminarmos os termos cruzados das coordenadas espaciais e temporais.

3.2 Temperatura Hawking

Da métrica acústica não-comutativa, vamos determinar a temperatura Hawking para esta métrica. A densidade do fluido não depende da posição e sua velocidade é radial, a métrica (3.31) pode ser escrita em coordenadas esféricas, como :

$$ds^2 = -\tilde{\mathcal{F}}(v_r)d\tau^2 + \frac{[v_r^2\Gamma + \Sigma + \tilde{\mathcal{F}}(v_r)\Lambda]}{\tilde{\mathcal{F}}(v_r)}dr^2 + \frac{(1 + c_s^2)r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)}{\sqrt{f}}, \quad (3.34)$$

em que $\tilde{\mathcal{F}}(v_r) = \frac{\mathcal{F}(v_r)}{\sqrt{f}}$. Tomando o limite não relativístico, $c_s \ll 1$ e $v \ll 1$, temos que

$$\tilde{\mathcal{F}}(v_r) = \frac{\left[(1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v_r^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E})_r v_r + 2(\theta_r B_r v_r^2) \right]}{\sqrt{(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - 3(\vec{\theta} \times \vec{E})_r v_r}}. \quad (3.35)$$

E sabendo que a temperatura Hawking é dada por

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr}(g_{tt}) \Big|_{r=r_H} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\tilde{\mathcal{F}}(v_r) \right] \Big|_{r=r_H}, \quad (3.36)$$

porém, tratando com uma métrica não-comutativa, para calcularmos a temperatura, necessitamos reescrever o raio do horizonte, r_H , em termos do parâmetro da não-comutatividade.

Obtemos o raio do horizonte quando fazemos $g_{rr} \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\frac{[v_r^2 \Gamma + \Sigma + \tilde{F}(v_r) \Lambda]}{\tilde{F}(v_r)} = 0 \implies \tilde{F}(v_r) = 0 \quad (3.37)$$

escrevendo $\vec{\theta} \cdot \vec{B} = \Theta$ e $(\vec{\theta} \cdot \vec{E})_r = \theta_e$ na Equação (3.35) e considerando apenas os termos de primeira ordem em Θ , obtemos que $\tilde{F}(v_r)$ dado por

$$\tilde{F}(v_r) = \frac{1 - 3\Theta}{\sqrt{1 - 2\Theta - 3\theta_e \bar{v}_r}} (c_s^2 - \bar{v}_r^2) \quad (3.38)$$

onde

$$\tilde{v}_r = (1 + 6\Theta - 2\theta_r B_r)^{1/2} \bar{v}_r \quad e \quad \bar{v}_r = v_r - \frac{\theta_e}{2}. \quad (3.39)$$

Assim, igualando (3.38) a zero, temos que

$$c_s = \tilde{v}_r \implies c_s = (1 + 3\Theta - \theta_r B_r) v_r - \frac{\theta_e}{2}, \quad (3.40)$$

obtemos o raio do horizonte quando a velocidade do fluido é igual a velocidade do som, ou seja, $v_r = c_s = r_H$. Assim,

$$\tilde{r}_H = (1 + 3\Theta - \theta_r B_r) r_H - \frac{\theta_e}{2}, \quad (3.41)$$

Temos ainda que, no limite do horizonte de eventos, $\tilde{v}_r = c_s \frac{\tilde{r}_H}{r^2}$, daí

$$\tilde{F}(v_r) = \frac{1 - 3\Theta}{\sqrt{1 - 2\Theta - 3\theta_e c_s \frac{\tilde{r}_H^2}{r^2}}} \left(c_s^2 - c_s^2 \frac{\tilde{r}_H^4}{r^4} \right). \quad (3.42)$$

Logo, calculando a temperatura Hawking corrigida pela não-comutatividade, temos

$$\tilde{T}_H = \frac{1}{\pi} \left(1 - 2\Theta + \frac{3}{2} \theta_e c_s \right) \frac{c_s^2}{\tilde{r}_H}, \quad (3.43)$$

substituindo \tilde{r}_H na equação anterior, obtemos

$$\tilde{T}_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H} \left[1 - 5\Theta + \theta_r B_r + \frac{\theta_e}{2} \left(\frac{1}{r_H} + 3c_s \right) \right]. \quad (3.44)$$

Considerando que o campo elétrico é nulo, ou seja, o setor puramente magnético, e também que o campo magnético se encontra na direção z , temos que $\theta_e = \vec{\theta} \cdot \vec{E} = 0$ e $\theta_r B_r$. Assim, a temperatura Hawking se reduz a

$$\tilde{T}_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H} (1 - 5\Theta), \quad (3.45)$$

e no limite de $\theta \rightarrow 0$, as coordenadas voltam a ser comutativas, e a temperatura Hawking corrigida é igual a encontrada no capítulo anterior, onde não consideramos a não-comutatividade, ou seja,

$$\tilde{T}_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H}. \quad (3.46)$$

Então, a temperatura corrigida em função da temperatura para o caso comutativo, pode ser escrita como :

$$\tilde{T}_H = T_H(1 - 5\Theta), \quad (3.47)$$

isolando o parâmetro da não-comutatividade, Θ , temos:

$$\frac{\tilde{T}_H - T_H}{T_H} = -5\Theta \implies \frac{-\Delta T}{T_H} = -5\Theta \implies \Theta = \frac{\Delta T}{5T_H}. \quad (3.48)$$

Assim, podemos observar que a teoria não-comutativa é consistente. Aplicando-a no cálculo para a obtenção da temperatura Hawking de buracos negros acústicos, ela é um caso mais geral, onde se tomarmos o limite do parâmetro que não caracteriza a não-comutatividade tendendo a zero, retornamos ao nosso caso anterior.

3.3 Relação de dispersão

Nesta seção, calculamos novamente a relação de dispersão, para verificar como energia e momento se transportam de um ponto a outro em um meio. Então primeiramente derivamos a Equação de dispersão (3.16), sendo que S_1 dado por:

$$S_1 \sim \Re[e^{(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x})}], \quad (3.49)$$

logo

$$\omega = \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad e \quad \vec{k} = \vec{\nabla} S_1. \quad (3.50)$$

Da mesma maneira que fizemos na seção (2.4), temos que a Equação (3.16) torna-se:

$$a\omega^2 + \sigma\omega + d = 0, \quad (3.51)$$

daí

$$a = (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= [2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}](\vec{v} \cdot \vec{k}) + (c_s^2 + 1)(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{k} - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{k}) \\ &\quad - (\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{k}), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} d &= -\left\{ [(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})k^2 - (\vec{\theta} \cdot \vec{k})(\vec{B} \cdot \vec{k})] c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 k^2 - [(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{k}](\vec{v} \cdot \vec{k}) \right. \\ &\quad \left. + (\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{k})(\vec{v} \cdot \vec{k}) + (\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{k})(\vec{v} \cdot \vec{k}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Tomando a velocidade apenas na direção x , $v = v_x$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= 4k^2 c_s^2 \left\{ [(1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v_x^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}] \right. \\ &\quad \left. - \theta_1 B_1 (1 + c_s^2) + (\vec{B} \cdot \vec{v})\theta_1 v_x + (\vec{\theta} \cdot \vec{v})B_1 v_x \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Considerando que o campo magnético se encontra na direção z e que o campo elétrico é nulo, temos que $\vec{\theta} \cdot \vec{B} = \theta_z B_z$ e $\vec{\theta} \times \vec{E} = 0$. Assim,

$$\omega = \frac{-(1 + 2\theta_z B_z)(v_x k) \pm c_s k \sqrt{(1 + 3\theta_z B_z)(1 + c_s^2) - (1 + 4\theta_z B_z)v_x^2}}{(1 + \theta_z B_z)(1 + c_s^2)}, \quad (3.56)$$

tomando o limite não relativístico, $c_s \ll 1$, $v_1 \ll 1$, a relação de dispersão simplificada é

$$\omega \approx \pm \frac{c_s \sqrt{(1 + 3\theta_z B_z)}}{(1 + \theta_z B_z)} k = \pm c_s \left(1 + \frac{1}{2}\theta_z B_z\right) k. \quad (3.57)$$

A velocidade de grupo é dada por:

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{dk} \right| = c_s \left(1 + \frac{1}{2}\theta_z B_z\right). \quad (3.58)$$

Ou ainda, como

$$\frac{v_g - c_s}{c_s} = \frac{1}{2}\theta_z B_z. \quad (3.59)$$

podemos observar que a velocidade de grupo tem um carácter supersônico graças a não-comutatividade. Como $\Theta = \theta_z B_z$, podemos substituir (3.48) na equação acima, e obtermos uma outra equação como :

$$\frac{v_g - c_s}{c_s} = \frac{\Delta T}{10T_H}, \quad (3.60)$$

percebe-se que a diferença de velocidade está relacionada com a diferença de temperatura. Ou seja, não havendo variação de temperatura ($\Delta T = 0$), o que significa que $\Theta = 0$, e

a velocidade de grupo é a idêntica a velocidade do som ($v_g = c_s$). Tomamos o limite de $\theta \rightarrow 0$ voltamos ao caso anterior, em que as coordenadas eram comutativas,

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{dk} \right| = c_s \quad (3.61)$$

observando assim que a velocidade máxima é a própria velocidade da onda sonora.

Capítulo 4

Cálculo da entropia com o princípio da incerteza generalizado

Nesta seção, consideramos a versão de não comutatividade do modelo de Abelian Higgs em (3+1) dimensões. A não-comutatividade é introduzida modificando seu setor escalar e indicador, substituindo o produto usual de campos pelo produto Moyal [30-35] para questões relacionadas. Assim, a Lagrangiana do modelo não comutativo de Abelian Higgs em espaço plano é:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + (D_\mu \hat{\phi})^\dagger * D^\mu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^\dagger * \hat{\phi} - b \hat{\phi}^\dagger * \hat{\phi} * \hat{\phi}^\dagger * \hat{\phi}, \quad (4.1)$$

o chapéu (hat) indica que a variável é não comutativa e o produto *- é o chamado produto de Moyal-Weyl ou produto de estrela que é definido em termos de uma matriz anti-simétrica real $\theta^{\mu\nu}$ que parametriza a não-comutatividade do espaço-tempo de Minkowski.

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1. \quad (4.2)$$

O produto *- para dois campos $f(x)$ e $g(x)$ é dado por:

$$f(x) * g(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^y\right) f(x)g(y)|_{x=y}. \quad (4.3)$$

Em (3.1) os campos não comutativos podem ser expandidos em uma série formal θ . Como se sabe o parâmetro $\theta^{\alpha\beta}$ é uma matriz $D \times D$ anti-simétrica constante, real-avaliada no espaço-tempo D -dimensional com dimensões do comprimento ao quadrado. Usando o mapa de Seiberg-Witten (SW) esta expansão pode ser construída em termos dos campos originais de uma teoria comutativa que se transforma sob as leis ordinárias da transformação. Agora usando o mapa de Seiberg-Witten [30], até a ordem mais baixa no parâmetro

$\theta^{\mu\nu}$, encontramos

$$\begin{aligned}\hat{A}_\mu &= A_\mu + \theta^{\nu\rho} A_\rho (\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu), \\ \hat{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\beta} (F_{\mu\rho} F_{\nu\beta} + A_\rho \partial_\beta F_{\mu\nu}), \\ \hat{\phi} &= \phi - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \phi.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Este mapa muito útil nos permite estudar os efeitos não comutativos no âmbito da teoria do campo quântico quantitativo. Assim, a teoria correspondente em um espaço-tempo comutativo em (3+1) dimensões é [31]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right) + \left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right) (|D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 - b |\phi|^4) \\ &+ \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} [(D_\beta \phi)^\dagger D^\mu \phi + (D^\mu \phi)^\dagger D_\beta \phi],\end{aligned}\tag{4.5}$$

lembrando que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi$.

Vamos rever brevemente as etapas para encontrar a métrica acústica não-comutativa do buraco negro em (3+1) dimensões da teoria quântica de campos. Em primeiro lugar, decompor o campo escalar com $\phi = \sqrt{\rho(x, t)} \exp(iS(x, t))$ para encontrar a Lagrangiana original

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + \rho (\tilde{\theta} g^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu}) \mathcal{D}_\mu S \mathcal{D}_\nu S + \tilde{\theta} m^2 \rho - \tilde{\theta} b \rho^2 \\ &+ \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} (\tilde{\theta} g^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \sqrt{\rho},\end{aligned}\tag{4.6}$$

daí $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - e A_\mu / S$, $\tilde{\theta} = (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e $\Theta^{\mu\nu} = \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu$. Em nossos cálculos consideramos o caso em que não há nenhuma comutatividade entre o espaço e tempo, isto é $\theta^{0i} = 0$ e usamos $\theta^{ij} = \varepsilon^{ijk} \theta^k$, $F^{i0} = E^i$ e $F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B^k$.

Em segundo lugar, linearizando as equações de movimento em torno do fundo (ρ_0, S_0) , com $\rho = \rho_0 + \rho_1$ e $S = S_0 + \psi$ encontramos a equação de movimento para uma perturbação acústica linear ψ dada por uma equação de Klein-Gordon em um espaço curvo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \psi = 0,\tag{4.7}$$

logo $g_{\mu\nu}$ apenas representa as métricas acústicas em (3+1) dimensões. Devemos comentar que em nosso cálculo anterior assumimos perturbações lineares apenas no setor escalar, enquanto o campo vetorial A_μ permanece inalterado. Em seguida, iremos nos concentrar nas medidas planar rotativas acústicas não-comutativas do buraco negro em (2+1)

dimensões [23] para abordar as questões da entropia do buraco negro acústico rotativo tridimensional. Por uma questão de simplicidade, consideraremos dois tipos de meio não-comutativo do espaço-tempo escolhendo o primeiro setor magnético puro e, em seguida, iremos nos concentrar no setor elétrico puro.

4.0.1 O caso $B \neq 0$ e $E = 0$

O elemento de linha acústica em coordenadas polares no plano não comutativo em (2+1) dimensões, até um fator independente de posição irrelevante, no limite não relativístico foi obtido em [23] e é dado por:

$$ds^2 = -[(1 - 3\theta_z B_z)c^2 - (1 + 3\theta_z B_z)(v_r^2 + v_\phi^2)]dt^2 - 2(1 + 2\theta_z B_z)(v_r dr + v_\phi r d\phi)dt + (1 + \theta_z B_z)(dr^2 + r^2 d\phi^2). \quad (4.8)$$

B_z é a magnitude do campo magnético na direção z , θ_z é o parâmetro não comutativo, c é a velocidade do som no fluido e v é a velocidade do fluido. Consideramos o fluxo com o potencial de velocidade $\psi(r, \phi) = A \ln r + B\phi$ cujo perfil de velocidade em coordenadas polares no plano é dado por:

$$\vec{v} = \frac{A}{r} \hat{r} + \frac{B}{r} \hat{\phi}, \quad (4.9)$$

já B e A são as constantes de circulação e taxas de drenagem do fluxo de fluido.

Consideramos agora as transformações de tempo e as coordenadas do ângulo azimutal da seguinte forma

$$d\tau = dt + \frac{(1 + 2\theta_z B_z)A r dr}{[(1 - 3\theta_z B_z)c^2 r^2 - (1 + 3\theta_z B_z)A^2]},$$

$$d\varphi = d\phi + \frac{AB dr}{r[c^2 r^2 - A^2]}. \quad (4.10)$$

Nessas novas coordenadas, a métrica torna-se

$$ds^2 = \tilde{\theta} \left[-(1 - 4\Theta) \left(1 - \frac{(1 + 6\Theta)(A^2 + B^2)}{c^2 r^2} \right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{(1 + 6\Theta)A^2}{c^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 - \frac{2\tilde{\theta}B}{c} d\varphi d\tau + r^2 d\varphi^2 \right], \quad (4.11)$$

em que $\Theta = \theta_z B_z$ e $\tilde{\theta} = 1 + \Theta$. A métrica pode agora ser escrita na forma

$$g_{\mu\nu} = \tilde{\theta} \begin{bmatrix} -(1 - 4\Theta) \left[1 - \frac{r_b^2}{r^2} \right] & 0 & -\frac{\tilde{\theta}B}{c} \\ 0 & \left(1 - \frac{r_b^2}{r^2} \right)^{-1} & 0 \\ -\frac{\tilde{\theta}B}{c} & 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O raio da ergosfera é dado por $g_{00}(r_e) = 0$, enquanto que o horizonte é dado pela coordenada de singularidade $g_{rr}(r_h) = 0$, isto é

$$r_e = \sqrt{r_h^2 + \frac{(1+6\Theta)B^2}{c^2}}, \quad r_h = \frac{(1+6\Theta)^{1/2}|A|}{c}. \quad (4.13)$$

Vamos investigar as singularidades de curvatura, verificando os invariantes R e $R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}$. Eles são calculados através da métrica (3.11). Pelo (poder/energia) expandindo-os em Θ nós encontramos:

$$\begin{aligned} R &= \frac{-2(A^2 + B^2)(1 + 6\Theta)}{r^4} + \mathcal{O}\left(\frac{\Theta^2}{(r^2 - A^2)^2 r^4}\right), \\ R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{44(A^2 + B^2)^2(12 + \Theta)}{r^8} + \mathcal{O}\left(\frac{\Theta^2}{(r^2 - A^2)^2 r^8}\right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

assumindo $c = 1$ por simplicidade. Observe que ambos os invariantes não tem singularidades de curvatura em $r \neq 0$ até a análise linear. No entanto, encontramos uma singularidade em $r = A$ para termos quadráticos (e de ordem superior) em Θ . Uma vez que estamos considerando uma teoria linear no parâmetro $\theta^{\mu\nu}$ não-comutativo desde o início, a singularidade em $r = A$ que se baseia apenas em termos de ordem superior em $\Theta \equiv \theta_z B_z$ deve ser desprezada pela consistência. Agora obtemos a temperatura Hawking dos buracos negros acústicos como

$$T_h = \frac{k}{2\pi} = \frac{(1 - 2\Theta)c^2}{2\pi r_h}. \quad (4.15)$$

Enquanto que a temperatura de Unruh para um observador a uma distância r é

$$T = \frac{a}{4\pi} = \frac{f'(r_h)}{4\pi} F^{-1/2}(r). \quad (4.16)$$

Elas satisfazem a seguinte relação

$$T_h = \sqrt{F(r)}T = \frac{f'(r_h)}{4\pi}. \quad (4.17)$$

em que

$$f(r) = (1 - 2\Theta) \left(1 - \frac{r_h^2}{r^2}\right), \quad F(r) = \frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} = (1 - 5\Theta) \left(1 - \frac{r_h^2}{r^2}\right). \quad (4.18)$$

4.1 A entropia estatística

A função de partição para um sistema Bose é

$$\ln Z_0 = - \sum_i g_i \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_i}), \quad (4.19)$$

e o elemento de área com tempo constante t coordenada é

$$ds = 2\pi\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr. \quad (4.20)$$

A função de partição do sistema fora do horizonte do buraco negro acústico é dada por:

$$\begin{aligned} \ln Z &= - \int 2\pi\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \sum_i g_i \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_i}) \\ &= - \int \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \int_0^\infty dpln(pe^{-\lambda p^2})(1 - e^{-\beta\omega_0}) \\ &\approx \int \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \int_{m\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}}^\infty \frac{\beta_0 e^{-\lambda p^2} p^2 d\omega}{2(e^{\beta\omega_0} - 1)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo $\beta = \beta_0\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}$, $\omega = \omega_0\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}$ e $-\tilde{g}_{tt} = -\frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}}$. De acordo com a relação entre a energia livre e a função de partição, podemos derivar a energia livre do sistema como

$$F = -\frac{1}{\beta_0} \ln Z = \int \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \int_{m\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}}^\infty \frac{e^{-\lambda p^2} p^2 d\omega}{2(e^{\beta\omega_0} - 1)}, \quad (4.22)$$

e a entropia do sistema é

$$\begin{aligned} S &= \beta_0^2 \frac{\partial F}{\partial \beta_0} = \beta_0^2 \int \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \int_{m\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}}^\infty \frac{\omega e^{\beta\omega_0} e^{-\lambda p^2} p^2 d\omega}{2(e^{\beta\omega_0} - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \int_{m\beta}^\infty \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} e^{-\lambda\left(\frac{x^2}{\beta^2} - m^2\right)} \left(\frac{x^2}{\beta^2} - m^2\right) dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

ao definirmos $x = \beta\omega_0 = \beta_0\omega$, e utilizamos a relação entre energia, momento e massa $\frac{\omega^2}{-\tilde{g}_{tt}} = \frac{x^2}{\beta^2} = p^2 + m^2$, sendo m a massa estática das partículas. Assim, integramos (4.23) em relação a r próximo ao horizonte do buraco negro. Perto do horizonte, $\tilde{g}_{tt}(r_h) \rightarrow 0$, então temos:

$$S = \frac{1}{2} \int \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}dr \int_0^\infty \frac{x^3 e^x}{\beta^2 (e^x - 1)^2} e^{-\lambda\frac{x^2}{\beta^2}} dx = \frac{1}{2\beta_0^2} \int_0^\infty \frac{dx}{4 \sinh^2(x/2)} I(x, \epsilon) \quad (4.24)$$

logo

$$I(x, \epsilon) = \int \frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}{-\tilde{g}_{tt}} x^3 e^{-\lambda\frac{x^2}{\beta^2}} dr = \int (1 - 4\Theta) \frac{x^3}{N^3} e^{-\lambda\frac{x^2}{\beta^2}} r dr, \quad N^2 = 1 - \frac{r_h^2}{r^2} \quad (4.25)$$

Como consideramos apenas o campo quântico perto do horizonte do buraco negro, tomamos $[r_h, r_h + \epsilon]$ como intervalo integral com respeito a r , onde ϵ é uma pequena constante positiva. Quando $r \rightarrow r_h$, $N^2(r) \approx 2\kappa(r - r_h)$, então temos

$$I(x, \epsilon) = \int_{r_h}^{r_h + \epsilon} \frac{(r - r_h) + r_h}{[2\kappa(r - r_h)]^{3/2}} x^3 e^{-\lambda x^2 / [2\kappa(r - r_h)\beta_0^2]} dr, \quad (4.26)$$

em que $\tilde{\lambda} = \lambda(1 - 5\Theta)^{-1}$ e $\kappa = 2\pi\beta_0^{-1}$ é a gravidade superficial do buraco negro acústico e por substituição de variáveis, $t = \frac{\tilde{\lambda}x^2}{4\pi(r-r_h)\beta_0}$, temos:

$$\begin{aligned} I(x, \epsilon) &= (1 - 4\Theta) \int_{\delta}^{\infty} \left[\frac{\beta_0 x^4 \sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2} t^{-3/2} + \frac{r_h \beta_0^2 x^2}{4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}}} t^{-1/2} \right] e^{-t} dt \\ &= (1 - 4\Theta) \left[\frac{\beta_0 x^4 \sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \delta\right) + \frac{r_h \beta_0^2 x^2}{4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right) \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

tendo $\delta = \frac{\tilde{\lambda}x^2}{4\pi\beta_0\epsilon}$ e $\Gamma(z) = \int_{\delta}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ é a função Gamma incompleta. O ϵ é determinado pelo menor comprimento dado pelo princípio de incerteza generalizada

$$\Delta X \Delta P = \frac{1}{2} e^{(\tilde{\lambda}(\Delta P)^2 + \langle P \rangle)^2}. \quad (4.28)$$

Podemos derivar a menor incerteza de localização $\sqrt{e\tilde{\lambda}/2}$. Se tomarmos como um mínimo comprimento de elemento de linha de espaço puro, temos:

$$\sqrt{\frac{e\tilde{\lambda}}{2}} = \int_{r_h}^{r_h+\epsilon} \sqrt{g_{rr}} dr \approx (1 + \Theta) \int_{r_h}^{r_h+\epsilon} \frac{dr}{\sqrt{2\kappa(r-r_h)}} = (1 + \Theta) \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}. \quad (4.29)$$

Assim, a partir de (4.29), temos $\delta = \frac{(1+\Theta)^2 x^2}{2\pi^2 e}$ e

$$S = \frac{(1 - 4\Theta)}{2\beta_0^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{4 \sinh^2(x/2)} \left[\frac{\beta_0 x^4 \sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \delta\right) + \frac{r_h \beta_0^2 x^2}{4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right) \right], \quad (4.30)$$

com $x \rightarrow 2x$, temos $\delta = \frac{2(1+\Theta)^2 x^2}{\pi^2 e}$ e obtemos

$$S = (1 - 4\Theta) \left[\frac{4\sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2 \beta_0} \delta_1 + \frac{r_h}{4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}}} \delta_2 \right] \quad (4.31)$$

sendo

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^4}{\sinh^2(x)} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \delta\right) dx, \quad \delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sinh^2(x)} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right) dx, \quad (4.32)$$

quando $\sqrt{\tilde{\lambda}} = \delta_2/(2\pi^2)$, encontramos

$$S = \frac{1}{4}(1 - 4\Theta)(2\pi r_h) + \frac{(1-4\Theta)\delta_1\delta_2}{8\pi^4} T_h, \quad (4.33)$$

e $2\pi r_h$ é área do horizonte do buraco negro acústico não comutativo. O segundo termo é um termo de correção para a entropia da área e é proporcional à temperatura de radiação do buraco negro acústico.

4.1.1 O caso $B = 0$ e $E \neq 0$

Na presente subseção, a análise anterior para $B = 0$ e $E \neq 0$. Como no caso anterior, tomamos o elemento de linha acústica obtido em coordenadas polares no plano não comutativo, até a primeira ordem de θ , no limite não-relativístico, dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\theta\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{v}\right) \left\{ -[c^2 - (v_r^2 + v_\phi^2 + \theta\mathcal{E}_r v_r + \theta\mathcal{E}_\phi v_\phi)]dt^2 - 2\left(v_r + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2}\right)drdt - 2\left(v_\phi + \frac{\theta\mathcal{E}_\phi}{2}\right)r d\phi dt + (1 - \theta\mathcal{E}_r v_r - \theta\mathcal{E}_\phi v_\phi)(dr^2 + r^2 d\phi^2) \right\}. \quad (4.34)$$

sendo $\theta\vec{\mathcal{E}} = \theta\vec{n} \times \vec{E}$, $\theta\mathcal{E}_r = \theta(\vec{n} \times \vec{E})_r$, $\theta\mathcal{E}_\phi = \theta(\vec{n} \times \vec{E})_\phi$ e E é a magnitude do campo elétrico. Consideramos agora as transformações do tempo e as coordenadas do ângulo azimutal da seguinte forma

$$\begin{aligned} d\tau &= dt + \frac{\tilde{v}_r dr}{(c^2 - \tilde{v}_r^2)}, \\ d\varphi &= d\phi + \frac{\tilde{v}_\phi \tilde{v}_r dr}{r(c^2 - \tilde{v}_r^2)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

definimos $\tilde{v}_r = v_r + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2}$ e $\tilde{v}_\phi = v_\phi + \frac{\theta\mathcal{E}_\phi}{2}$. Agora, consideramos o fluxo com potencial de velocidade $\psi(r, \varphi) = A \ln r + B\varphi$ cujo perfil em coordenadas polares no plano é dado por $\vec{v} = \frac{A}{r}\hat{r} + \frac{B}{r}\hat{\phi}$. Portanto, nestas novas coordenadas a métrica torna-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{3\theta\mathcal{E}_r A}{2r} - \frac{3\theta\mathcal{E}_\phi B}{2r}\right) \left\{ -\left[1 - \frac{(A^2 + B^2 + \theta\mathcal{E}_r Ar + \theta\mathcal{E}_\phi Br)}{c^2 r^2}\right] d\tau^2 + \left(1 - \frac{\theta\mathcal{E}_r A}{r} - \frac{\theta\mathcal{E}_\phi B}{r}\right) \left[\left(1 - \frac{A^2 + \theta\mathcal{E}_r Ar}{c^2 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2\right] - 2\left(\frac{B}{cr} + \frac{\theta\mathcal{E}_\phi}{2c}\right) rd\varphi d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

O raio da ergosfera é dado por $g_{00}(\tilde{r}_e) = 0$, enquanto o horizonte é dado pela coordenada de singularidade $g_{rr}(\tilde{r}_h) = 0$, isto é

$$\tilde{r}_e = \frac{\theta\mathcal{E}_r A + \theta\mathcal{E}_\phi B}{2c^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\theta\mathcal{E}_r A + \theta\mathcal{E}_\phi B)^2}{c^4} + 4r_e^2}, \quad \tilde{r}_{h\pm} = \frac{\theta\mathcal{E}_r A}{2c^2} \pm r_h \sqrt{1 + \frac{(\theta\mathcal{E}_r)^2}{4c^2}}, \quad (4.37)$$

em que $r_e = \sqrt{(A^2 + B^2)/c^2}$ e $r_h = |A|/c$ são os raios da ergosfera e do horizonte no caso usual. Para $\theta = 0$, temos $\tilde{r}_e = r_e$ e $\tilde{r}_h = r_h$. A temperatura Hawking do buraco negro acústico é dado :

$$T_h = \frac{k}{2\pi} = \left(1 - \frac{3\theta\mathcal{E}_r}{2}\right) \frac{1}{2\pi r_h} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (4.38)$$

Enquanto a temperatura para um observador a uma distância r é

$$T = \frac{a}{4\pi} = \frac{f'(r_h)}{4\pi} F^{-1/2}(r). \quad (4.39)$$

Elas satisfazem a seguinte relação

$$T_h = \sqrt{F(r)} T = \frac{f'(r_{h+})}{4\pi}. \quad (4.40)$$

daí

$$f(r) = \left(1 - \frac{3\theta\mathcal{E}_r r_h}{2r}\right) \left(1 - \frac{r_h^2}{r^2} - \frac{\theta\mathcal{E}_r r_h}{r}\right), \quad (4.41)$$

e

$$F(r) = \frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} \quad (4.42)$$

$$= 1 - \frac{r_h^2}{r^2} - \theta \left[\frac{1}{r} (4\mathcal{E}_r r_h + 3\mathcal{E}_\phi B) - \frac{1}{r^3} \left(3\mathcal{E}_r r_h^3 + 3\mathcal{E}_\phi B r_h^2 + \mathcal{E}_r B^2 r_h + \mathcal{E}_\phi B^3 \right) \right]. \quad (4.43)$$

Assim, próximo ao horizonte, $\tilde{g}_{tt}(r_{h+}) \rightarrow 0$, temos $\mathcal{E}_\phi B = -\mathcal{E}_r r_h$ e $F(r)$ torna-se:

$$F(r) = 1 - \frac{r_h^2}{r^2} - \frac{\theta}{r} \mathcal{E}_r r_h \quad (4.44)$$

A entropia do sistema, próxima ao horizonte do buraco negro, é

$$S = \frac{1}{2\beta_0^2} \int_0^\infty \frac{dx}{4 \sinh^2(x/2)} I(x, \epsilon), \quad (4.45)$$

logo temos

$$I(x, \epsilon) = \int \frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}{-\tilde{g}_{tt}} x^3 e^{-\lambda \frac{x^2}{\beta^2}} dr = \int \frac{x^3}{N^3} e^{-\lambda \frac{x^2}{\beta^2}} r dr, \quad (4.46)$$

e

$$N^2 = 1 - \frac{r_h^2}{r^2} - \frac{\theta}{r} \mathcal{E}_r r_h = 1 - (1 - \theta\mathcal{E}_r) \frac{r_{h+}^2}{r^2} - \frac{\theta}{r} \mathcal{E}_r r_{h+} \quad (4.47)$$

com $r \rightarrow r_{h+}$, $N^2(r) \approx 2(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)\kappa(r - r_{h+})$, então nós temos

$$I(x, \epsilon) = \int_{r_{h+}}^{r_{h+}+\epsilon} \frac{1}{(1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2})^{3/2}} \frac{(r - r_{h+}) + r_{h+}}{[2\kappa(r - r_{h+})]^{3/2}} x^3 e^{-\tilde{\lambda}x^2/[2\kappa(r - r_{h+})\beta_0^2]} dr, \quad (4.48)$$

sendo $\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{-1}$ e $\kappa = 2\pi\beta_0^{-1}$ é a gravidade superficial do horizonte do buraco negro acústico e pela substituição de variável $t = \frac{\tilde{\lambda}x^2}{4\pi(r - r_{h+})\beta_0}$, temos

$$\begin{aligned} I(x, \epsilon) &= \frac{1}{(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{3/2}} \int_\delta^\infty \left[\frac{\beta_0 x^4 \sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2} t^{-3/2} + \frac{r_{h+}\beta_0^2 x^2}{4\pi\sqrt{\tilde{\lambda}}} t^{-1/2} \right] e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{3/2}} \left[\frac{\beta_0 x^4 \sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \delta\right) + \frac{r_{h+}\beta_0^2 x^2}{4\pi\sqrt{\tilde{\lambda}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right) \right], \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde $\delta = \frac{\tilde{\lambda}x^2}{4\pi\beta_0\epsilon}$ e $\Gamma(z) = \int_{\delta}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ é a função Gamma incompleta.

O ϵ é determinado pelo menor comprimento dado pelo princípio de incerteza generalizado.

$$\Delta X \Delta P = \frac{1}{2}e^{(\tilde{\lambda}(\Delta P)^2 + \langle P \rangle)^2}. \quad (4.50)$$

Novamente, derivando a menor incerteza de localização $\sqrt{e\tilde{\lambda}/2}$, tomando como um mínimo comprimento de elemento de linha de espaço puro, temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{e\tilde{\lambda}}{2}} &= \int_{r_{h+}}^{r_{h++\epsilon}} \sqrt{g_{rr}} dr \approx \frac{1}{(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{1/2}} \int_{r_{h+}}^{r_{h++\epsilon}} \frac{dr}{\sqrt{2\kappa(r - r_{h+})}} \\ &= \frac{1}{(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{1/2}} \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Assim, a partir de (4.29), temos $\delta = \frac{(1+\theta\mathcal{E}_r/2)^{-1}x^2}{2\pi^2e}$ e S é :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{3/2}} \frac{1}{2\beta_0^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{4 \sinh^2(x/2)} \left[\frac{\beta_0 x^4 \sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \delta\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{h+} \beta_0^2 x^2}{4\pi \sqrt{\tilde{\lambda}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right) \right], \end{aligned} \quad (4.52)$$

com $x \rightarrow 2x$, temos $\delta = \frac{2(1+\theta\mathcal{E}_r/2)^{-1}x^2}{\pi^2e}$ e S é :

$$S = \frac{1}{(1 + \theta\mathcal{E}_r/2)^{3/2}} \left[\frac{4\sqrt{\tilde{\lambda}}}{(4\pi)^2\beta_0} \delta_1 + \frac{r_{h+}}{4\pi\sqrt{\tilde{\lambda}}} \delta_2 \right] \quad (4.53)$$

sendo

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^4}{\sinh^2(x)} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \delta\right) dx, \quad \delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sinh^2(x)} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right) dx, \quad (4.54)$$

quando $\sqrt{\tilde{\lambda}} = \delta_2/(2\pi^2)$, encontramos que S é dado por :

$$S = \left(1 - \frac{3\theta\mathcal{E}_r}{4}\right) \left[\frac{1}{4}(2\pi r_{h+}) + \frac{\delta_1 \delta_2}{8\pi^4} T_h \right], \quad (4.55)$$

e $2\pi r_{h+}$ é a área do horizonte do buraco negro acústico não-comutativo. O termo de correção para a entropia de área no espaço-tempo tridimensional é proporcional à temperatura de radiação do buraco negro acústico. Para o buraco negro gravitacional em 4 dimensões, o termo de correção é logarítmico. Em nosso resultado em um espaço-tempo tridimensional o termo logarítmico não existe. No entanto, neste método, não é necessário introduzir o cut-off ultravioleta e as divergências são eliminadas. Além disso, a aproximação de pequena massa não é necessária no modelo brick-wall original. Nossos resultados são consistentes com o resultado obtido na literatura [21,22].

Também é interessante notar de (4.29) e (4.51) que a diminuição (crescente) da menor incerteza de localização à medida que o parâmetro não comutativo aumenta também é responsável pela diminuição (crescente) da entropia.

Como consequência, particularmente no primeiro caso, enquanto a menor incerteza de localização aumenta, a entropia também aumenta. Estes parâmetros, obviamente, devem ser restringidos para respeitar a segunda lei da entropia $\Delta S \geq 0$. Outras questões também podem ser tratadas, por exemplo, os processos de colapso versus singularidades, uma vez que os processos de colapso tendem a formar singularidades.

Capítulo 5

Conclusões

O buraco negro acústico é um sistema físico que pode ser estudado como um análogo a um buraco negro gravitacional. Nesta dissertação, estudamos análogos acústicos de buracos negros no espaço-tempo não-comutativo, dando ênfase a temperatura Hawking e cálculo da entropia.

No capítulo 1 de revisão, verificamos que quando um fluido está em movimento e o mesmo interage com o som à uma velocidade supersônica, um buraco negro acústico é formado. Tratando isto matematicamente, por meio de perturbações nas quantidades hidrodinâmicas do meio, obtivemos uma métrica característica de um buraco negro acústico.

Já no capítulo 2 de revisão, introduzimos a não-comutatividade na métrica, com o intuito de verificar as correções que essa teoria afirma para o estudo da temperatura Hawking de buracos negros acústicos.

Enfim, nos capítulos 3 e 4, apresentamos os nossos resultados. Utilizando o método estatístico quântico permite determinar a sua entropia usando a equação de densidade de estado do GUP. A entropia de Bekenstein-Hawking do buraco negro acústico e seu termo de correção são obtidos, não há necessidade de introduzir o "cut-off" ultravioleta e as divergências são eliminadas.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Unruh, Phys. Rev.Lett. 46 (1981) 1351; W. Unruh, Phys. Rev. D 51 (1995) 2827, arXiv:gr-qc/9409008.
- [2] M. A. et al., The entropy of the noncommutative acoustic black hole based on generalized uncertainty principle. Physical Letters B. vol 737, 2014, [arXiv:1405.2046 [hep-th]].
- [3] M.Visser, Class. Quantum Gravity 15 (1998) 1767.
- [4] R. Schützhold, W.G. Unruh, Phys. Rev. D 66 (2002) 044019
- [5] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maïssa, T.G. Philbin, U. Leonhardt, New J. Phys. 10 (2008) 053015.
- [6] U. Leonhardt, P. Piwnicki, Ohys. Rev. Lett. 84 (2000) 822;
U. Leonhardt, Nature 415 (2002) 406;
W.G.Unruh, R Schützhold, Phys. Rev. D 68 (2003) 024008.
- [7] T.G. Philbin, C Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König, U. Leonhardt, Science 319 (2008) 1367
- [8] M. Novello, M. Visser, G. Volovik (Eds.), Artifivial Black Holes, World Scientific, Singapore, 2002.
- [9] M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Passos Phys. Lett B 694 (2010) 149, arXiv:1004.5360 [hep-th];
M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Passos Phys. Lett B 703 (2011) 609, arXiv:1101.2891 [hep-th];

- M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Passos, Acoustic black holes and universal aspects of area products, arXiv:1309.1486.
- [10] S. Giovanazzi, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 011302;
M. Rinaldi, Phys. Rev. D 84 (2011) 124009.
- [11] V. Frolov, I. Novikov, Phys. Rev D 48 (1993) 4545;
C. G. Callan, F. Wilczek, Phys. Lett. B 33 (1994) 55.
- [12] K. Nouicer, Phys. Lett. B 646 (2007) 63
- [13] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. Physical Review, 115(3):485, August 1959.
- [14] J.J. Sakurai. Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, revised edition edition, 1994.
- [15] L. Nivaldo A. Lemos 2.ed. Sao Paulo :Editora Livraria da Física ,2007 edition, 1983
- [16] D.J. Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Prentice Hall, 1995.
- [17] Frank Porters Notes on Quantum Mechanics, Caltech Physics Department
- [18] M.Visser , Acoustic propagation in fluids: an unexpected example of Lorentzian geometry , gr-qc/9311028
- [19] E. Berti, V. Cardoso, J.P.S. Lemos, Phys. Rev. D 70 (2004) 124006
- [20] HuiHua Zhao, GuangLiang Li, LiChun Zhang, Phys. Lett A 376 (2012) 2348.
- [21] R. Zhao, L.C. Zhang, H.F. Li, Acta Phys. Sin. 58 (2009) 2193
- [22] M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Passos Phys. Rev. D 87 (2013) 125015, arXiv:1210.7739 [hep-th];
M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Passos Phys. Rev. D 85 (2012) 025013, arXiv:1109.6298 [hep-th];
- [23] W.G.Unruh,Phys.rev.lett 46 , 1351-1353(1981)

- [24] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, segunda edição, Pergamon, Londres (1987)
- [25] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons (1972);
- [26] R. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, (Addison-Wesley, Reading, 1963).
- [27] M.V. Berry. Exact Aharonov-Bohm wavefunction obtained by applying Dirac's magnetic phase factor. European Journal of Physics, 1:240-244, 1980.
- [28] M. Peshkin and A. Tonomura. The Aharonov-Bohm Effect. Springer-Verlag, 1989.
- [29] N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. 09 (1999) 032, arXiv:hep-th/9908142.
- [30] S. Ghosh, Mod Phys. Lett A 20 (2005) 1227
- [31] V.O. Rivelles, Phys. Lett. B 558 (2003) 191, arXiv:hep-th/0212262;
V.O. Rivelles, Pos WC (2004) 029, arXiv:hep-th/0409161;
T. Mariz, J.R. Nascimento, V.O. Rivelles Phys Rev. D 75 (2007) 025020, arXiv:hep-th/0609132.
- [32] For a review on noncommutative field theories see: R.J. Szabo, Phys. Rep. 378 (2003) 207, arXiv:hep-th/0109162;
M.R. Douglas, N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 977, arXiv:hep-th/0106048;
V.O. Rivelles, Braz. J. Phys. 31 (2001) 255, arXiv:hep-th/0103131;
M. Gomes, in: G.A. Alves, O.J.P. Éboli, V.O. Rivelles (Eds), Proceedings of the XI Jorge André Swieca Summer School, Particles and Fields, World Scientific, Singapore, 2002;
H.O. Girotti, arXiv:hep-th/0301237;
Piero Nicolini, Int. J. Mod. Phys. A 24 (2009) 1229, arXiv:0807.1939 [hep-th];
R. Casana, K.A.T. da Silva, arXiv:1106.5534 [hep-th];
A. Kobakhidze, B.H.J. McKellar, Phys. Rev. D 76 (2007) 093004, arXiv: 0707.0343 [hep-ph];

- R. Banerjee, B. Chakraborty, S. Ghosh, P. Mukherjee, S. Samanta, *Foun d. Phys.* 39 (2009) 1297, arXiv:0909.1000 [hep-th].
- [33] Y.-F. Cai, Y.-S. Piao, *Phys. Lett. B* 657 (2007) 1, arXiv:gr-qc/0701114.
- [34] Y.-F. Cai, Y. Wang, arXiv:1404.6672 [astro-ph.CO].
- [35] G. E. Volovik, *The universe in a helium droplet*, (Clarendon, Oxford, 2003)
- [36] W. G. Unruh, R. Schutzhold, *Gravity wave analogs of black holes*, [gr-qc/0205099].
- [37] R. G. Chambers *Shift of an Electron Interference Pattern by enclosed Magnetic Flux*, *Physical Review Letters*, volume 5(1), 1 de Julho 1960.
- [38] Möllenstedt, G. and B. W., *Naturwissenschaften*, 1962. 49:p.81.
- [39] Bayh, W., *Zeitschrift Physik*, 1962. 169:p.492
- [40] Schaal, V. G., C. Jönsson, and E. F. Krimmel, *Weitgetrennte Kohärente Elektronenwellenzüge und Messung des Manetflusses*. *Optik*, 1966/1967.29(5):p.529-538
- [41] S.R. Dolan, E.S. Oliveira, L.C.B. Crispino, *Phys. Lett. B* 701, 485 (2011).
- [42] J.Michell,*Phil . Trans.R.Soc,Londe; January1 ,1784 74:35-57;*
- [43] K.Schwarzchild,*Sitzvngster.Preuss.Akad.Wiss.Berlin(Math.Phys.)*,189-196,(1916),arxiv:Physics/9905 030v1;
- [44] K.Schwarzchild,*Sitzvngster.Preuss.Akad.Wiss.Berlin(Math.Phys.)*,424-434,(1916),arxiv:Physics/9912033v1;
- [45] D.Finkestein,*Phys, Rev.*110, 965-977, (1958)
- [46] P.K.Townsend,*Black hHoles, Lectures e notas*, arxiv: gr-qc/ 9707012v1,(1997)
- [47] S.W.Hawking ,*Narure*,Vol.248, 30-31(1974)