



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO  
LICENCIATURA EM FÍSICA

# Fenômenos Eletromagnéticos em Meios com Índice de Refração Negativo

*Filipe da Costa Silva*

Cuité - PB

- 2014 -

Filipe da Costa Silva

# Fenômenos Eletromagnéticos em Meios com Índice de Refração Negativo

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Física, da Unidade Acadêmica de Educação, do Centro de Educação e Saúde, da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito de obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros

Cuité - PB

- 2014 -



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE  
Responsabilidade Msc. Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S586f Silva, Filipe da Costa.

Fenômenos eletromagnéticos em meios com índice de refração negativo. / Filipe da Costa Silva. – Cuité: CES, 2014.

46 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Física) – Centro de Educação e Saúde / UFCEG, 2015.

Orientador: Dr. Fábio Ferreira de Medeiros.

1. Reflexão. 2. Metamateriais. 3. Índice de refração negativo. 4. Reflexão total. I. Título.

CDU 53.082.53

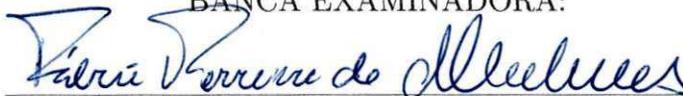
Filipe da Costa Silva

# Fenômenos Eletromagnéticos em Meios com Índice de Refração Negativo

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Física, Unidade Acadêmica de Educação, Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, como requisito de obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Física.

Aprovada em 18 de Setembro de 2014.

BANCA EXAMINADORA:



**Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros**

(Presidente - UFCG/CES/UAE)



**Prof. Dr. Danyel Judson Bezerra Soares**

(Membro - UFCG/CES/UAE)



**Prof. Dr. Heron Neves de Freitas**

(Membro - UFCG/CES/UAE)



**Prof. Dr. José de Miranda Henriques Neto**

(Suplente - UFCG/CES/UAE)

*“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.”*

*(Martin Luther King)*

*À todos que tornaram possível a realização deste trabalho  
e principalmente ao meu maior tesouro, minha família.*

# Agradecimentos

*Sou muito grato as pessoas que colaboraram para a realização desta etapa da minha vida, algumas de forma técnica, outras pessoal. A todos listados abaixo, agradeço e deixo um forte abraço.*

À Deus, por ser a fonte e o sustentáculo da minha vida e por ter me concedido sabedoria e força para concretizar esta graduação.

À minha família, que me permitiu nascer e que cuidou de mim da melhor maneira possível, devotando amor, carinho, compreensão e sendo os maiores incentivadores para a realização deste curso, dando todo o suporte necessário para este fim.

À meu grande amigo e "irmão" Acácio Silveira pela sua amizade e companheirismo diante dos desafios e das metas conquistadas durante todo curso.

Ao meu orientador Fábio Ferreira que me guiou e me deu suporte para a realização dessa pesquisa.

À minha namorada, amigos e companheiros de curso, em especial César Augusto, Adriano Oliveira, Francinildo Macêdo e Isaac Félix, pelo companheirismo, incentivo e ajudas.

À minha grande amiga Tércia Vieira pela sua amizade.

À todos os professores que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação profissional e pessoal. Também agradeço a todos os meus professores do ensino básico, que foram os precursores na construção do meu conhecimento.

À todos os funcionários que compõem o Centro de Educação e Saúde, pelos serviços prestados tornam possível o funcionamento deste campus.

Ao PIBID de forma geral pelo suporte financeiro e por ter contribuído para a minha formação profissional.

# Resumo

Materiais com índice de refração negativo compreendem uma classe relativamente recente de materiais fabricados artificialmente, denominados de metamateriais. Eles exibem propriedades ópticas completamente novas e com possibilidade de aplicações tecnológicas inovadoras as quais representam um grande potencial no advento de superlentes, fibras ópticas metamaterias, circuitos fotônicos mais eficientes do que os circuitos eletrônicos convencionais, células solares de autodesempenho, o tão sonhado “manto da invisibilidade”, escudos acústicos, além de fornecer uma compreensão fenomenológica nova do eletromagnetismo quanto ao que se refere a interação da luz com os metamateriais ou materiais com índice de refração negativo. Neste trabalho apresentamos as propriedades ópticas dos materiais que exibem índice de refração negativo. Diante disto, veremos as mudanças que ocorreram nos fenômenos da Lei de Snell- Descartes, da reflexão interna total e do ângulo de Brewster ao ser introduzido nos mesmos um índice de refração negativo, afim de verificar os resultados encontrados no trabalho pioneiro que se refere ao estudo desses fenômenos desenvolvido por Veselago em 1968, o qual deu suporte a toda a pesquisa envolvendo metamateriais.

Palavras-chave: Metamateriais, Índice de Refração Negativo, Lei de Snell-Descartes, Reflexão Total, Ângulo de Brewster.

# Abstract

Materials with negative refractive index comprise a relatively new class of artificially manufactured materials, called metamaterials. They exhibit completely new and innovative technological applications possibility of optical properties that represent a potential allies in the advent of superlens, optical fibers metamaterias, photonic circuits more efficient than conventional electronic circuits, solar cells self-performance, the dream “ invisibility cloak”, acoustic shields in addition to providing a new phenomenological understanding of electromagnetism as it refers to the interaction of light with metamaterials or materials with negative refractive index. We present the optical properties of materials that exhibit negative refraction. Given this, we will see the changes that occurred in the phenomena of Law Snell- Descartes, the total internal reflection and Brewster angle to be introduced in ourselves a negative refractive index in order to verify the results found in the pioneering work that refers to study of these phenomena developed by Veselago in 1968, which gave support to all research involving metamaterials.

Keywords: Metamaterials, Negative Refractive Index, Law of Snell-Descartes, Total Reflection, Brewster angle.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Metamateriais</b>	<b>15</b>
2.1	Afinal, o que são metamateriais? . . . . .	15
2.2	Parâmetros efetivos . . . . .	19
2.3	Materiais com índice de refração negativo . . . . .	21
2.4	Aplicações em metamateriais . . . . .	27
2.4.1	Manto da invisibilidade . . . . .	27
2.4.2	Escudo Acústico . . . . .	29
2.4.3	Superlentes . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Efeitos em Meios com Índice de Refração Negativo</b>	<b>34</b>
3.1	Lei de Snell-Descartes . . . . .	34
3.2	Reflexão Interna Total . . . . .	43
3.3	Ângulo de Brewster . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Ondas Eletromagnéticas na Matéria</b>	<b>74</b>
A.1	Índice de Refração . . . . .	74
A.2	Parâmetros Efetivos Dependentes da Frequência . . . . .	76
<b>B</b>	<b>Velocidade de fase e velocidade grupo para meios metamateriais com <math>\epsilon</math> e <math>\mu</math> simultaneamente negativos</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of <math>\epsilon</math> and <math>\mu</math>.</b>	<b>83</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação da estrutura metamaterial em forma de rolos suíços. Uma folha metálica é enrolada em torno de cada um dos cilindros da bobina. Retirado de (PENDRY et al., 1999). . . . .	17
2.2	Representação da disposição de três células elementares de metamateriais com estrutura em forma de pares de cruzes. Retirado de (IMHOF; ZENGERLE, 2006). . . . .	17
2.3	(a)Esquema da estrutura metamaterial em forma de rede de pesca e a configuração da polarização. (b)Vista superior de uma estrutura metamaterial real em forma de rede de pesca através da micrografia eletrônica. Retirado de Dolling (IMHOF; ZENGERLE, 2006). . . . .	18
2.4	Representação de um metamaterial em frequências ópticas. O bloco de construção para um tal metamaterial (à esquerda)consiste de um par de nanobastões de ouro. Numa rede de pares desses nanobastões(à direita)a ressonância dos elétrons resulta em $\epsilon$ e $\mu$ negativos. Por conseguinte, a estrutura tem um índice de refração negativo. Retirado de (PENDRY, 2006). . . . .	18
2.5	Espaço de parâmetros representando as classes de materiais. Adaptada de Cai (CAI; SHALAEV, 2010). . . . .	20
2.6	Fios condutores de cobre ordenados periodicamente (PENDRY et al., 1999). . . . .	23
2.7	Desenho esquemático de um <i>Split Ring Resonator</i> (SRR), (SMITH et al., 2000). . . . .	24
2.8	Esquema da estrutura desenvolvida por Smith et al. (2000) . . . . .	25

2.9	Metamateriais construídos a partir de fios condutores de cobre e SRRs. (a) A primeira estrutura de metamaterial fabricado pela Universidade da Califórnia, San Diego (UCSD). O meio consiste de SRRs, criados por litografia em uma placa de circuito, e pinos metálicos; (b) SRRs gravados em uma placa de circuito de cobre acrescidos de um fio de cobre para gerar $\epsilon$ e $\mu$ negativos. Retirado de (PENDRY, 2004)). . . . .	26
2.10	O cubo de Boeng: metamaterial tridimensional que produz índice refração negativo na faixa de GHz (PENDRY; SMITH, 2003). . . . .	26
2.11	Esquema do funcionamento de um manto da invisibilidade. O metamaterial distribui os raios de luz em torno da esfera, formando a camuflagem (CAI; SHALAEV, 2010) . . . . .	29
2.12	Vista oblíqua da fotografia de um escudo acústico antes de ser preenchido com PDMS (dimetil polissiloxano). Estrutura formada por 16 metamateriais diferentes em 20 anéis concêntricos.O objeto a ser camuflado é colocado no interior do círculo central (WILHELM; WEGENER, 2012). . . . .	30
2.13	Trajetória dos raios de luz através de uma lente plana de Veselago. (GONÇALVES, 2011) . . . . .	31
2.14	Simulação de uma imagem projetada por uma lente metamaterial (PENDRY; SMITH, 2006) . . . . .	32
2.15	Esquema da refração negativa de luz ultravioleta vinda do ar para um metamaterial formado por nanocamadas de prata (cor cinza) e dióxido de titânio (azul marinho) alternada(XU et al., 2013). . . . .	33
3.1	Sistema de coordenadas para análise da reflexão e da refração na interface de separação entre os meio 1 e 2. . . . .	35
3.2	Figura semelhante a Figura 3.1, mas com a introdução de um novo ângulo para a onda refratada. . . . .	38
3.3	Representação da Lei de Snell-Descartes. . . . .	40
3.4	Representação da Lei de Snell para um meio com índice de refração negativo. . . . .	41

3.5	(a)Imagem de um bastão de metal dentro de um copo de vidro vazio. (b) Mesmo cenário, mas com o copo preenchido com água normal de índice de refração $n = 1.3$ , o que leva a uma refração ordinária. (c) Ainda no mesmo cenário, mas neste caso a água é substituída por uma “água” de $n = -1.3$ . (DOLLING et al., 2006) . . . . .	42
3.6	Imagem gerado por computador de uma piscina com(a) água de índice de refração $n = 1.33$ e com (b)“água” de índice de refração negativo( $n = -1.33$ ).A linha preta foi adicionada para ilustrar a localização da borda inferior da piscina e do canto (DANNER, 2009). . . . .	42
3.7	A reflexão interna total e o ângulo crítico de um feixe de luz transmitido de um meio com índice de refração maior $n_1$ para outro de índice de refração menor $n_2$ . . . . .	43
3.8	Representação geométrica da propagação de uma onda eletromagnética na interface de separação entre um meio anisotrópico (meio 1) e um meio metamaterial indefinido(meio 2). . . . .	46
3.9	Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio <i>cutoff</i> indefinido com $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e $\varepsilon_y = -1, \mu_x = -1, \mu_z = -2$ (linha contínua), $\varepsilon_y = -2, \mu_x = -1, \mu_z = -1$ (linha tracejada), $\varepsilon_y = -3, \mu_x = -1, \mu_z = -1$ (linha pontilhada).Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007). . . . .	50
3.10	Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio <i>anti-cutoff</i> indefinido com $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e $\varepsilon_y = -2, \mu_x = -1, \mu_z = -1$ (linha contínua), $\varepsilon_y = -1, \mu_x = 1, \mu_z = -2$ (linha tracejada), $\varepsilon_y = -3, \mu_x = 1, \mu_z = -1$ (linha pontilhada)e $\varepsilon_y = -3, \mu_x = 1, \mu_z = -2$ (linha pontilhada tracejada)Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007) . . . . .	51
3.11	Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio <i>never cutoff</i> indefinido com $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e $\varepsilon_y = 1, \mu_x = 1, \mu_z = -2$ (linha contínua), $\varepsilon_y = 2, \mu_x = 1, \mu_z = -1$ (linha tracejada), $\varepsilon_y = 3, \mu_x = 1, \mu_z = -1$ (linha pontilhada) Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007). . . . .	52
3.12	Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio <i>always cutoff</i> indefinido com $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e $\varepsilon_y = 1, \mu_x = -1, \mu_z = -2$ . Para qualquer ângulo de incidência a reflexão é sempre unitária.Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007). . . . .	52

3.13	Representação da reflexão e refração de uma onda TE na interface entre o vácuo e um meio metamaterial. O vetor onda refratada oposto ao sentido do fluxo de energia. (O sentido positivo para todos ângulos é anti-horário). Positive-index materials(PIM) e negative-index materials(NIM).	55
3.14	Mapa de regime baseado nos parâmetros $X$ e $Y$ . O ângulo de Brewster existe para ondas TM nas regiões(I) e (IV) e para onda TE nas regiões (II) e (III).	67

# Capítulo 1

## Introdução

Este capítulo tem como principal objetivo introduzir as temáticas envolvidas na elaboração desta monografia numa perspectiva contextual e de motivação. Também se encontra uma visão panorâmica dos pressupostos e objetivos que alicerçam a sua construção, bem como uma síntese da sua estrutura. Os conteúdos aqui abordados são de conhecimento da comunidade científica e estudantil desde os séculos passados, sendo alguns desenvolvidos antes mesmo da era cristã, mas com uma abordagem recentemente desenvolvida que fez surgir novas e surpreendentes implicações. Com isso leitores com interesse no estudo das propriedades ópticas e eletromagnéticas podem fazer uso deste texto para obterem um maior aprofundamento de seus conhecimentos na área. A décadas atrás, mais especificamente em 1959, o físico Richard Feynman (1918 - 1988) sugeriu que átomos poderiam ser organizados conforme a necessidade, mas sem violar as leis da natureza e que a partir desse entendimento seria possível criarmos materiais com propriedades inteiramente novas. Surge então um novo e grande campo de estudo na ciência até então inexplorado, chamado de nanotecnologia, o qual consiste no entendimento da constituição da matéria em uma escala nanométrica ( $10^{-9}m$ ). Seguindo esta linha de pensamento, os cientistas surgiram com uma nova ideia, a construção de materiais artificiais a partir de materiais convencionais de forma a obterem materiais com propriedades adequadas as suas necessidades. Ultimamente, tem-se intensificado a busca por materiais artificiais que apresentem novas propriedades eletromagnéticas.

O estudo dos fenômenos eletromagnéticos se resume à análise da interação da radiação eletromagnética com a matéria. Neste sentido, a obtenção de novas funcionalidades eletromagnéticas está baseada na elaboração de estruturas e geometrias produzidas a partir de materiais disponíveis, com as quais se possam manipular as

ondas eletromagnéticas de forma a obter as propriedades desejadas (CAI; SHALAEV, 2010). Nesta conjuntura surgem os metamateriais, que despertam o fascínio por manipularem a radiação, em particular a luz, de maneira surpreendente (WITHAYACHUMNANKUL; ABBOUTT, 2009), revelando propriedades não encontradas em materiais naturais.

A principal propriedade é o fato dos mesmos apresentarem um índice de refração negativo, curvando a luz de forma inversa ao que acontece em todos os materiais naturais, os quais possuem índice de refração positivo, alterando significativamente a lei de Snell-Descartes, não em sua forma matemática, mas no seu comportamento físico, sendo esta mudança mais notória em consequência da refração negativa. Outras mudanças são observadas no fenômeno da reflexão interna total e consequentemente no ângulo de Brewster.

Também verificou-se algo que alguns pesquisadores chamam de anomalia no efeito Doppler e na radiação Cherenkov. Ocorre uma reversibilidade nestes fenômenos, quando os mesmos acontecem em meios de índice de refração negativo. Esse quadro de alterações nos fenômenos faz surgir uma nova física em torno da propagação da radiação nestes novos meios. Mas aqui não vamos entrar em detalhes na “nova” física destes fenômenos.

Após o primeiro metamaterial ser construído, pode verificar-se todas essas surpreendentes propriedades. Elas despertaram um grande interesse da comunidade científica. Esse estudo tem crescido de maneira bastante expressiva nos últimos anos, devido principalmente a possibilidade de várias aplicações inovadoras e também devido a possibilidade de se construir a variedade de estruturas metamateriais idealizadas e estudadas teoricamente. Isso devido ao grande avanço da nanotecnologia, visto que as pesquisas mais recentes e mais inovadoras em metamaterias tratam de estruturas em escala nanométrica.

A pesquisa em metamateriais possui uma característica bastante peculiar e que a torna bastante expressiva no meio científico. Esta tem um caráter interdisciplinar no qual pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento, como por exemplo eletromagnetismo, óptica, optoeletrônica, engenharia de antenas, nanociência, abordam problemas de suas áreas envolvendo metamateriais, tornando-se um campo de intensa pesquisa na atualidade.

Embora os metamateriais sejam alvo de intensas pesquisas, os fenômenos físicos que envolvem este campo de pesquisa, assim como suas incomuns propriedades, ainda não estão sendo introduzidas nos livros texto dos cursos de graduação ou mesmo incluídas na grade curricular dos cursos de graduação. Este panorama também compreende a grade curricular e os livros texto do ensino médio, e mesmo assim, desde 2010 este tema tem sido abordado em questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e do vestibular da UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas)(SANTOS, 2011).

Assim, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de investigar de forma sistemática e um pouco aprofundada as propriedades físicas relacionadas à propagação de ondas eletromagnéticas em meios metamateriais, realizando primeiramente um tratamento dos fenômenos ópticos e eletromagnéticos, ressaltando seus conceitos e abordagens comumente examinados através da eletrodinâmica clássica, e posteriormente, introduzindo os novos conceitos que envolvem a teoria eletromagnética referente aos metamateriais, afim de divulgar e de tornar conhecida no meio acadêmico e escolar esta nova física.

Os comentários anteriores acerca deste novo campo de pesquisa forneceram a motivação para a realização desta pesquisa, que será desenvolvida no decorrer dos capítulos seguintes. No Capítulo 2, apresentamos inicialmente uma descrição sobre a definição do termo metamaterial. Em seguida fizemos um tratamento referente aos parâmetros efetivos do meio material  $\varepsilon$  e  $\mu$ , os quais são denominados funções respostas do meio por descreverem as propriedades do meio em resposta a interação da radiação eletromagnética com o mesmo e relacioná-las com o índice de refração. Posteriormente fizemos uma abordagem histórica relacionada ao surgimento dos metamateriais e uma síntese do estudo sobre o primeiro metamaterial construído e do “estado da arte” respectivo aos metamateriais.

No terceiro Capítulo fizemos um estudo sistemático sobre os fenômenos físicos da lei de Snell-Descartes, da reflexão interna total e do ângulo de Brewster, introduzindo na análise dos mesmos um índice de refração negativo que os torna conseqüentemente fenômenos anômalos.

Por fim, no Capítulo 4 apresentamos uma sinopse dos resultados e conclusões obtidos nesta pesquisa, juntamente com a proposta do desenvolvimento de um trabalho futuro, dando continuidade a um tópico abordado nesta monografia.

# Capítulo 2

## Metamateriais

### 2.1 Afinal, o que são metamateriais?

O prefixo “meta” vem do grego e significa *além de*, dando à palavra metamaterial o significado de meios além dos materiais convencionais. Entretanto não encontramos na literatura uma definição exata e unanimemente utilizada pelos grandes pesquisadores da área para o termo “metamaterial” (CAI; SHALAEV, 2010). Eles definem um metamaterial como sendo uma estrutura material artificial que faz surgir suas propriedades a partir de sua estrutura, em vez do tipo de material que o constitui, sendo numa escala de homogeneidade muito menor que o comprimento de onda de interesse e sua resposta eletromagnética expressa em termos dos parâmetros homogêneos do material. Mas segundo eles não há uma definição exata e única estabelecida, visto que as definições existentes não satisfazem todos os pesquisadores; o *Institute Virtual Metamorphose* os define como sendo “um arranjo de elementos estruturais artificiais, destinados a alcançar propriedades eletromagnéticas vantajosas e incomuns”. Segundo Withayachumnankul e Aboutt (2009) os metamateriais são compósitos artificiais que adquirem suas propriedades eletromagnéticas de estruturas de dimensões abaixo do comprimento de onda utilizado.

De maneira geral, um metamaterial é uma estrutura artificial constituída de minúsculos “elementos” construídos a partir de materiais convencionais como o cobre, por exemplo, os quais podem ser distribuídos de forma periódica, na grande maioria (CAI; SHALAEV, 2010), que simulam os átomos ou moléculas de um material convencional (PENDRY; SMITH, 2006), resultando em propriedades extraordinárias que não existem em materiais encontrados na natureza como, por exemplo, um índice refração negativo (SMITH et al., 2001).

Assim, como há várias definições na literatura para os metamateriais, também são encontrados com vários nomes distintos, como por exemplo *negative-index materials* (NIMs); *left-handed metamaterial* (LHM); *negative-index of refraction medium* (NIR); *double negative metamaterial* (DNG) e meio com permissividade e permeabilidade simultaneamente negativas.

Eles não são os únicos materiais artificiais que são fabricados atualmente e que exibem notáveis propriedades, também temos os cristais fotônicos (BERRIER et al., 2004), as matrizes de furos metálicos (EBBESEN et al., 1998) e as superfícies de frequência seletiva (Chan *et al.*, 1988); eles são diferenciados desses outros materiais, devido apresentarem uma estrutura que pode ser descrita por um conjunto de parâmetros eletromagnéticos homogêneos, os quais são determinados pela resposta coletiva de pequenos ressonadores condutores distribuídos periodicamente no interior do material, cuja razão entre o comprimento de onda operacional e o parâmetro de rede é da ordem de dez ou mais (WITHAYACHUMNANKUL; ABBOUTT, 2009).

Desde o surgimento do primeiro metamaterial, vários tipos de ressonadores menores que o comprimento de onda de geometrias diferentes foram desenvolvidos para formarem as estruturas metamateriais como, por exemplo, fios finos (PENDRY, 1996; PENDRY et al., 1998) e os *Split Ring Ressonators* (SRRs) (PENDRY et al., 1999), os quais serão abordados com mais detalhes na Seção 2.3. Pendry et al. (1999) também estudaram um metamaterial cuja estrutura é formada por rolos suíços ordenados em uma matriz periódica, na qual é aplicada um campo externo perpendicular aos cilindros semelhante o que ocorre com a matriz de fios finos. Eles são construídos enrolando uma folha metálica de maneira a formar uma bobina em forma de cilindro (ver Figura 2.1). Cada espira da bobina é espaçada por uma distância  $d$  a partir da folha anterior.

Imhof e Zengerle (2006) propôs um metamaterial formado por uma estrutura formada por pares de cruces como ilustrada na Figura 2.2. As barras em forma de cruz formam uma matriz de pequenos dipolos elétricos que fazem surgir uma permeabilidade magnética efetiva negativa, como resultados das oscilações dos elétrons estimulados nos condutores.

A união entre as duas barras cruzadas dentro da célula elementar forma um tipo de circuito LC, onde a indutância é construída pelas duas travessas opostas. Deste modo, uma componente do campo magnético perpendicular a área entre os cruzamen-

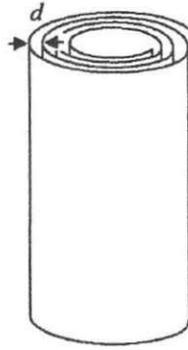


Figura 2.1: Representação da estrutura metamaterial em forma de rolos suíços. Uma folha metálica é enrolada em torno de cada um dos cilindros da bobina. Retirado de (PENDRY et al., 1999).

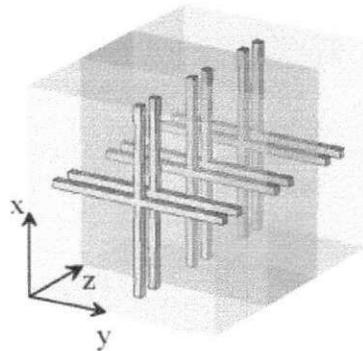


Figura 2.2: Representação da disposição de três células elementares de metamateriais com estrutura em forma de pares de cruzes. Retirado de (IMHOF; ZENGERLE, 2006).

tos induz uma corrente que flui na estrutura. Este ciclo é fechado pela corrente de deslocamento nas laterais finas das barras transversais e devido as barras da estrutura atuarem como capacitores elétricos, o fluxo da corrente é ressonante. Com isso a interação entre a estrutura e o campo magnético cria uma permeabilidade efetiva negativa. Daí a estrutura produz um índice de refração negativo. Wegener *et al.*, em 2006, formulou uma estrutura semelhante a redes de pesca (ver Figura 2.3). Este metamaterial é composto por dois conjuntos de sub-circuitos que simulam os átomos de um cristal. Um é formado por uma bobina de indutância  $L$  em série com dois capacitores de capacitância  $C$ , formando juntos um circuito  $LC$ , que proporciona uma ressonância magnética à frequência de ressonância  $LC$  que dá origem a uma permeabilidade negativa e o outro é formado por dois fios longos metálicos que atuam como um metal diluído abaixo da frequência de plasma, originando uma permissividade negativa.

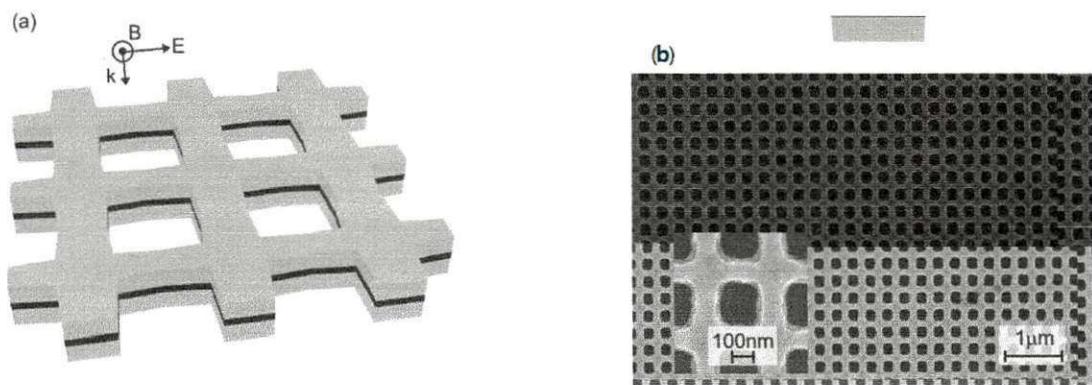


Figura 2.3: (a)Esquema da estrutura metamaterial em forma de rede de pesca e a configuração da polarização. (b)Vista superior de uma estrutura metamaterial real em forma de rede de pesca através da micrografia eletrônica. Retirado de Dolling (IMHOF; ZENGERLE, 2006).

Também foram desenvolvidos metamateriais com uma estrutura da forma de pares de placas de metal como mostra a Figura 2.4( Dolling *et al.*, 2005).

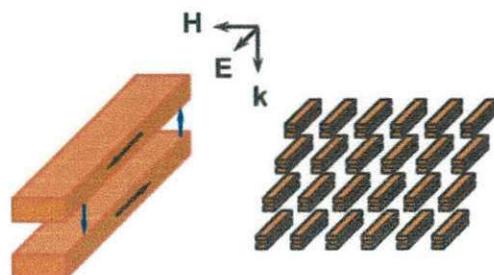


Figura 2.4: Representação de um metamaterial em frequências ópticas. O bloco de construção para um tal metamaterial (á esquerda)consiste de um par de nanobastões de ouro. Numa rede de pares desses nanobastões(á direita)a ressonância dos elétrons resulta em  $\epsilon$  e  $\mu$  negativos. Por conseguinte, a estrutura tem um índice de refração negativo. Retirado de (PENDRY, 2006).

O estudo e o desenvolvimento dos metamateriais teve um grande progresso devido sua característica peculiar da possibilidade de se poder controlar a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética dos mesmos, de modo a obterem-se quaisquer valores para esses parâmetros, inclusive valores menores que um e até mesmo zero.

## 2.2 Parâmetros efetivos

Em ótica estudamos fenômenos eletromagnéticos na matéria a partir da interação descrita por parâmetros microscópicos como o comprimento de onda. Em caso mais específico como na interação da luz, que tem um comprimento de onda  $\lambda$  ( $\sim 4000\text{\AA} - 7000\text{\AA}$ ), como o vidro, por exemplo, os detalhes da interação a nível microscópico (ou nível atômico) são desprezíveis, visto que a luz tem um comprimento de onda centenas de vezes maior que as distâncias interatômicas entre os átomos. Podemos também fazer um tratamento dessa interação a nível macroscópico, descrevendo-a a partir dos parâmetros eletromagnéticos efetivos, a permissividade elétrica  $\varepsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$ , que também são chamadas de funções respostas por surgirem da resposta dos constituintes da matéria (átomos e moléculas) à radiação eletromagnética.

A permissividade elétrica mede a capacidade de um material de transmitir um campo elétrico e de se polarizar em resposta a esse campo, influenciando, por exemplo, na quantidade de carga elétrica que um condensador pode armazenar em função de um campo elétrico aplicado, enquanto que a permeabilidade magnética está relacionada com o grau de magnetização adquirido pelo material quando exposto a um campo magnético externo (Super Interessante 159, 2011). As quantidades  $\varepsilon$  e  $\mu$  podem ser encontradas nos materiais nas combinações possíveis colocadas no espaço de parâmetros (ver Figura 2.5), em que a parte real da permissividade é plotada no eixo horizontal enquanto que o eixo vertical corresponde a parte real da permeabilidade.

A grande maioria dos materiais conhecidos apresenta simultaneamente  $\varepsilon$  e  $\mu$  positivos. Também encontramos facilmente materiais com  $\varepsilon$  ou  $\mu$  negativos, mas não ambos simultaneamente negativos. Como exemplo de materiais com  $\varepsilon$  negativo temos alguns metais como prata, ouro e alumínio na faixa de frequência do visível e de materiais com  $\mu$  negativo temos os meios ferromagnéticos e antiferromagnéticos num regime de frequências do infravermelho abaixo (PENDRY; SMITH, 2004). Essas grandezas físicas são muito importantes, pois tanto a velocidade da luz num meio  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ , quanto o índice de refração  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , o qual é demonstrado no **Apêndice A**, são determinados a partir das mesmas.

Microscopicamente, quando um material, um cristal, por exemplo, é exposto a um campo eletromagnético (luz) a componente de um campo elétrico pode fazer surgir pequenos dipolos em cada molécula. Estes dipolos excitados criam um campo local

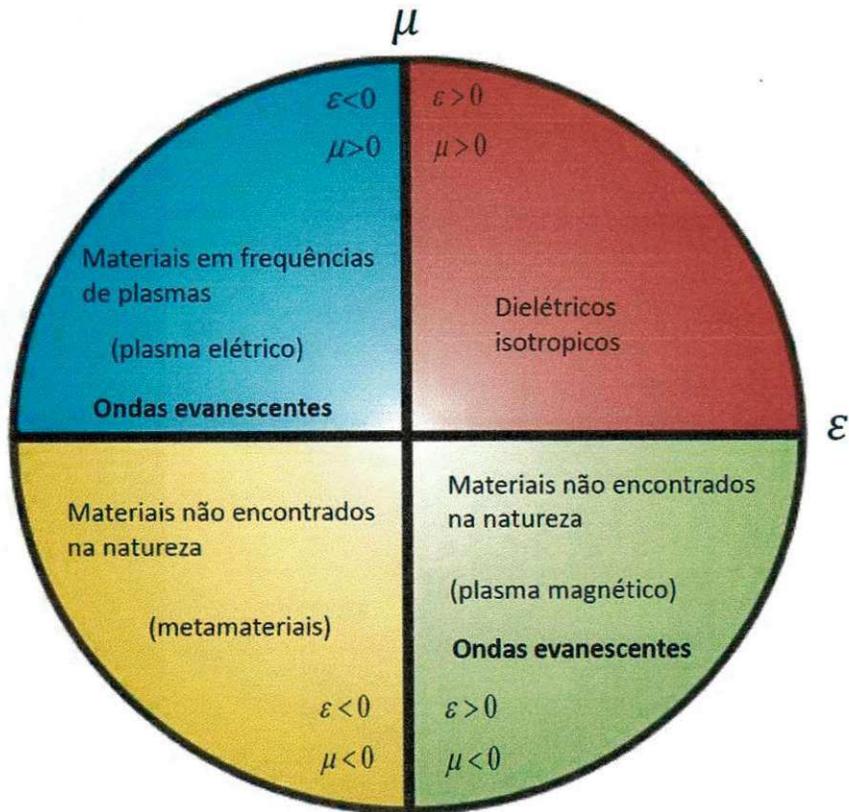


Figura 2.5: Espaço de parâmetros representando as classes de materiais. Adaptada de Cai (CAI; SHALAEV, 2010).

periódico denominado campo local de Lorentz, que torna a distribuição do campo no interior do cristal não uniforme, entretanto a luz não “enxerga” a heterogeneidade do cristal. A descrição macroscópica desta interação é estabelecida através das equações de Maxwell que relacionam o campo elétrico  $\vec{E}$ , o campo magnético  $\vec{H}$ , o deslocamento elétrico  $\vec{D}$  e o campo de indução magnética  $\vec{B}$  que dão origem a permissividade e a permeabilidade nos meios.

Do mesmo modo como acontece nos materiais convencionais, às respostas eletromagnéticas aos campos externos aplicados podem ser homogeneizadas e descritas por parâmetros como a permissividade, a permeabilidade, o índice de refração e a impedância, fato que explica o porquê que os metamateriais são identificados como materiais em vez de dispositivos (CAI; SHALAEV, 2010).

## 2.3 Materiais com índice de refração negativo

Em 1968, o físico russo Victor Veselago<sup>1</sup> surgiu com uma ideia inovadora a qual se tratava da possibilidade de materiais exibirem um índice de refração negativo (ver **Apêndice A**). Esta ideia estava fundamentada em um de seus trabalhos teóricos publicado neste mesmo ano, no qual ele havia analisado a propagação de ondas eletromagnéticas em um suposto meio com permissividade elétrica e permeabilidade magnética simultaneamente negativas. Neste trabalho Veselago concluiu que a possibilidade da existência de materiais com estas características resultaria no surgimento de profundas mudanças nos fenômenos eletromagnéticos em consequência das notáveis propriedades destes materiais (PENDRY; SMITH, 2004; PENDRY, 2001).

Um dos principais resultados obtidos neste trabalho foi a descoberta da possibilidade de materiais exibirem um índice de refração negativo, propriedade que trouxe muita expectativa em relação a gama de aplicações que poderiam vir a surgir (VESELAGO et al., 2006). O índice de refração sendo negativo implica em uma velocidade para a onda também negativa. Deste modo, a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio devem ter sinais opostos. Uma interpretação cinemática para este fenômeno nos leva a concluir que essas velocidades possuem sentidos opostos. Este resultado é difícil de ser compreendido ao imaginarmos a luz vinda do vácuo e penetrando num meio.

Mas a explicação deste fato torna-se clara quando tomamos conhecimento de que uma onda possui várias velocidades, a destacar temos as velocidades de fase e de grupo. A velocidade de fase consiste na velocidade com que a fase de uma onda periódica com frequência e comprimento de onda definidos se deslocam no espaço e a velocidade de grupo é a velocidade de propagação de um pulso, ou seja, de uma onda que possui início e fim, formada a partir da superposição de um grande número de ondas harmônicas com comprimentos de onda e frequências diferentes.

As limitações experimentais da época impediram a comprovação experimental destes fenômenos e fizeram com que o magnífico trabalho de Veselago ficasse esquecido

---

<sup>1</sup>Victor Geogievich Veselago é um físico russo. Graduou-se em 1959 pela Universidade de Moscou, recebeu seu grau de doutor em ciências (Física do Estado Sólido) em 1959 pela investigação de espectros moleculares através de radioespectroscopia e recebeu seu grau de Ph.D em 1974, pela investigação de estados sólidos em campos magnéticos, ambos atingidos no P.N. Lebedev Physical Institute. Ele foi o primeiro a publicar uma análise teórica sobre os materiais com permissividade e permeabilidade simultaneamente negativas, o qual foi fundamental para o avanço da Eletrodinâmica e a Óptica.

perante a comunidade científica por algumas décadas.

Até este momento da história, materiais com índice de refração negativo eram apenas hipóteses. No entanto, na década de 1990, pesquisadores iniciaram estudos a fim de construir materiais com essas propriedades. Finalmente, nesta mesma década, mas precisamente em 1999, John Pendry<sup>2</sup> juntamente com cientistas da empresa britânica **Marconi Materials Technology** demonstraram ser possível a construção de materiais portadores de um índice de refração negativo a partir de estruturas metálicas.

Como já mencionado na Seção 2.2, o índice de refração pode ser dado em termos de  $\varepsilon$  e  $\mu$ , conseqüentemente o mesmo será negativo se quaisquer umas dessas quantidades também forem negativas. Uma permissividade negativa é obtida, a partir do modelo de Drude-Lorentz<sup>3</sup>, em plasmas quando a frequência da onda incidente é menor do que a frequência do plasma. Num plasma com cargas elétricas positivas e negativas, com umas delas livres, a onda incidente pode alinhar os dipolos aleatoriamente distribuídos no material ou também movimentar as cargas e alterar sua densidade de forma a produzir dipolos; em ambos os casos surgem forças restauradoras no material que dependem do campo elétrico do material de modo a produzir uma permissividade dependente da frequência dada por

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\Gamma)}, \quad (2.1)$$

onde  $\omega_p$  é a frequência do plasma ou frequência de oscilação coletiva dos elétrons e  $\Gamma$  é o fator de amortecimento ou frequência de colisões, o qual está relacionado com a absorção da radiação pelo material.

Nos metais, em que somente  $\varepsilon$  é negativo, não ocorre a propagação da onda incidente porque são formadas ondas evanescentes que são atenuadas rapidamente e

---

<sup>2</sup>John Pendry é um físico britânico teórico da matéria condensada no Imperial College em Londres. Ele recebeu seu Ph.D. da Universidade de Cambridge em 1969 e trabalhou na Bell Labs (1972-1973). Ele se tornou o chefe do Departamento de Física. Trabalhou extensivamente em propriedades eletrônicas e estruturais de superfícies desenvolvimento da teoria da difração de baixa energia e de estados eletrônicos de superfície e também se dedicou no estudo do transporte em sistemas desordenados, onde ele produziu uma teoria completa das estatísticas dos transportes em um sistemas dimensionais. Em seu estudo sobre metamateriais, desenvolveu a proposta de uma lente perfeita, cuja resolução é ilimitada por um comprimento de onda. Em 2006, juntamente com David Smith sugeriu a proposta de construção de mantos da invisibilidade.

<sup>3</sup>O modelo de Drude-Lorentz descreve a resposta dos elétrons livres dos materiais na presença de um campo elétrico externo variável, o qual faz os elétrons oscilarem completamente fora de fase, dando origem aos plasmons, que é a excitação coletiva dos mesmos.

suas frequências de plasma podem chegar até o ultravioleta.

Pendry e seus colaboradores estenderam até a frequência do plasma, utilizando um arranjo periódico de fios delgados condutores, o qual foi denominado de *cut-wire*, como ilustrado na Figura 2.6, esse arranjo faz surgir uma permissividade negativa na faixa de frequências dos GHz (PENDRY et al., 1999), obtendo como resultado uma permissividade efetiva para este meio dada por

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}, \quad (2.2)$$

em que  $\omega_p$  é a frequência do plasma e  $\omega_0$  é a frequência de ressonância. Ambas são determinadas pela geometria da estrutura do metamaterial, em vez da carga, da massa efetiva e da densidade dos elétrons, como ocorre em materiais convencionais (PENDRY, 2004).

Segundo Pendry (1996) a frequência do plasma para este caso é dada por

$$\omega_p^2 = \frac{2\pi c_0^2}{\ln\left(\frac{a}{r}\right)}, \quad (2.3)$$

em que  $c_0$  é a velocidade da luz no vácuo,  $a$  é a distância entre os fios e  $r$  o raio dos fios. Com isso o comportamento de  $\varepsilon$  de um meio pode ser estabelecido em função da frequência.

Assim, para frequências entre  $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_p$ , obtém-se uma permissividade negativa.

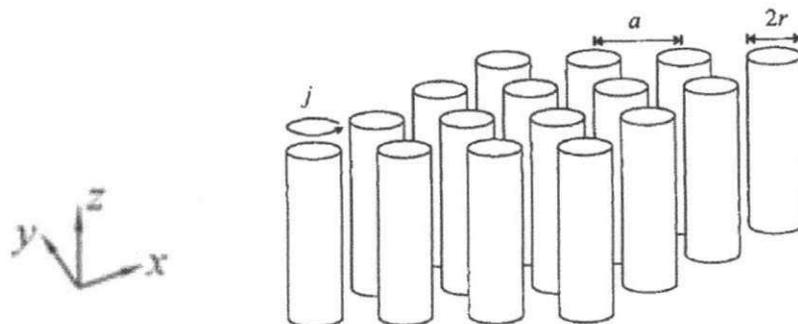


Figura 2.6: Fios condutores de cobre ordenados periodicamente (PENDRY et al., 1999).

Esta estrutura foi construída de modo a produzir uma ressonância de plasma ao se aplicar um campo elétrico polarizado na direção  $z$  com o vetor de onda dirigido paralelamente a normal do plano da grade (CAI; SHALAEV, 2010).

Para obterem uma permeabilidade negativa, construíram uma estrutura constituída por anéis milimétricos abertos de materiais condutores ordenados periodicamente, os quais foram chamados de *Split Ring Resonators* (SRRs). Estes anéis foram desenvolvidos com base num sistema magnético solenoide que ao ser percorrido por uma corrente fornece um momento de dipolo (PENDRY; SMITH, 2003).

Baseado neste fenômeno, os SRRs da forma ilustrada na Figura 2.7, ao serem irradiados por um campo magnético variável, segundo a Lei de Indução de Faraday, produz uma força eletromotriz devida esta variação, fazendo surgir correntes elétricas no interior do condutor. A abertura nos anéis faz surgir uma capacitância, fazendo com que eles se comportem também como um capacitor com uma frequência de ressonância bem definida (SMITH et al., 2000).



Figura 2.7: Desenho esquemático de um *Split Ring Resonator* (SRR), (SMITH et al., 2000).

Com o estudo destes dispositivos Pendry et al. (1999) encontrou uma permeabilidade magnética da forma

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}, \quad (2.4)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de ressonância,  $\Gamma$  é o fator de amortecimento da onda e  $F$  é um parâmetro que depende da geometria da célula unitária, o qual Pendry et al. (1999) definiu como sendo o volume parcial da célula ocupada pelo interior de um cilindro e é dado por

$$F = \frac{\pi r^2}{a^2}. \quad (2.5)$$

Em 2000, David R. Smith e colaboradores da Universidade da Califórnia construíram pela primeira vez o material idealizado por Smith et al. (2000), combinando

as duas estruturas propostas por ele em uma única estrutura como ilustrada esquematicamente na Figura 2.8.



Figura 2.8: Esquema da estrutura desenvolvida por Smith et al. (2000)

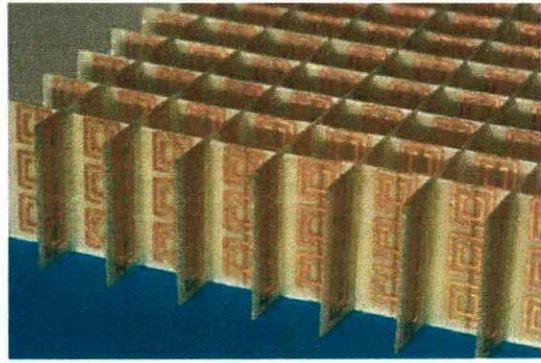
Esses pequenos circuitos com dimensões menores que o comprimento de onda com o qual se deseja a refração negativa (neste caso ondas na faixa de microondas), se comportam como um circuito elétrico LC, e ao serem ordenados periodicamente exercem uma função análoga a de moléculas em uma estrutura cristalina de um cristal convencional, fazendo com que as ondas eletromagnéticas enxerguem o material como sendo um meio homogêneo com permissividade e permeabilidade simultaneamente negativas, e conseqüentemente, com índice de refração negativo. Essas Estruturas ficaram conhecidas como metamateriais. A Figura 2.9 mostra imagens dos metamateriais construído por Smith em 2000.

Outro exemplo de um metamaterial pode ser visto na Figura 2.10, a qual mostra a fotografia de um material criado para fornecer um índice de refração negativo numa visão tridimensional.

A interação das ondas eletromagnéticas com a estrutura atômica dos materiais depende diretamente do comprimento de onda incidente e do parâmetro de rede (distância entre os átomos) dos materiais. Assim, para que os metamateriais apresentem tais propriedades, os comprimentos de onda dependem do tamanho das nanoestruturas, significando que o desenvolvimento dessa tecnologia é totalmente dependente do desenvolvimento de uma nanotecnologia cada vez mais sofisticada. Como mencionado anteriormente, os primeiros metamateriais produziam refração negativa para ondas com comprimentos de onda pequenos, neste caso na faixa de microondas, as quais apresentam comprimento de onda entre 1m (0,3 GHz de frequência) até 1,0 mm



(a)



(b)

Figura 2.9: Metamateriais construídos a partir de fios condutores de cobre e SRRs. (a) A primeira estrutura de metamaterial fabricado pela Universidade da Califórnia, San Diego (UCSD). O meio consiste de SRRs, criados por litografia em uma placa de circuito, e pinos metálicos; (b) SRRs gravados em uma placa de circuito de cobre acrescidos de um fio de cobre para gerar  $\epsilon$  e  $\mu$  negativos. Retirado de (PENDRY, 2004)).

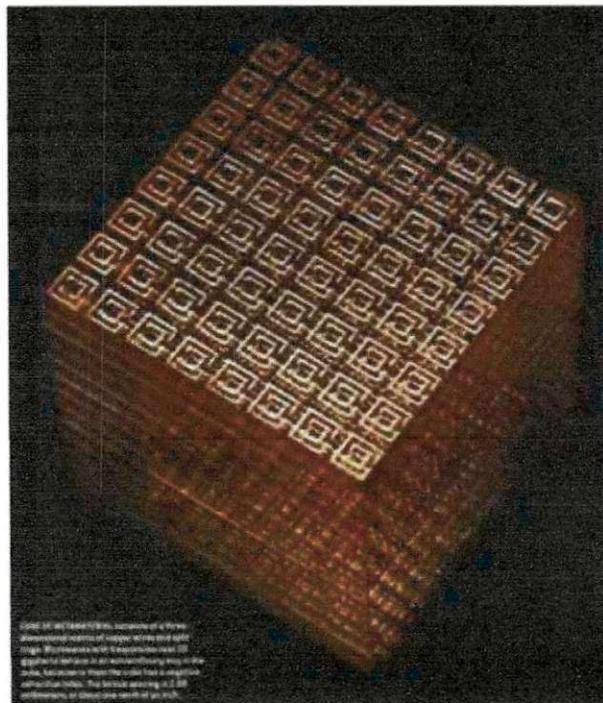


Figura 2.10: O cubo de Boeng: metamaterial tridimensional que produz índice refração negativo na faixa de GHz (PENDRY; SMITH, 2003).

(300 GHz). Com o avanço da nanotecnologia, o desenvolvimento destes materiais teve um grande progresso e hoje já estão sendo construídos metamateriais que atuam na faixa de frequência do visível. No ano de 2010 cientistas do Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech), construíram o primeiro metamaterial que apresenta índice de refração negativo na faixa da luz visível (BURGOS et al., 2010).

## 2.4 Aplicações em metamateriais

A descoberta dos novos fenômenos eletromagnéticos advindos dos metamateriais abre caminho para uma nova era na ciência por tornar possível o surgimento de inovadoras tecnologias, muitas delas tratadas anteriormente apenas como ficção científica. O exemplo mais expressivo desta realidade é a construção de um manto da invisibilidade capaz tornar materiais invisíveis para o olho humano, que até algum tempo atrás não passava de um sonho, sendo apenas realidade nas produções cinematográficas como por exemplo, no filme de Harry Potter. O avanço das pesquisas com metamateriais está tornando esse sonho cada vez mais realidade (JIANG et al., 2013).

Além dos mantos da invisibilidade, o uso dessa nova tecnologia trás um grande avanço em diversas áreas, principalmente após a construção de metamateriais em 3-D (VALENTINE et al., 2008), como a aréa militar que além da hipótese do uso dos mantos da invisibilidade também estão construindo escudos acústicos com o objetivo de camuflarem navios e submarinos (URZHUMOV; SMITH, 2011), nas telecomunicações com a construções de antenas com redução dos índices de interferência (VALENTINE et al., 2008; AQUINO; FERNANDES, ), na medicina com o melhoramento dos exames de ultrassom, transformando essas ondas em sinais óticos, possibilitando ver o interior do corpo com mais precisão e detalhamento, nos livrando dos perigos da radiação e de métodos invasivos como as biópsias (YAKOVLEV et al., 2013; ZHU et al., 2011). A seguir, temos uma breve descrição sobre algumas das aplicações que mais se destacam em pesquisas.

### 2.4.1 Manto da invisibilidade

A história da invisibilidade se remonta deste o início da civilização. O termo invisível esteve presente em histórias, na mitologia, em lendas folclóricas e nos tempos modernos em filmes, e séries, em desenhos animados e jogos. Por exemplo, na mitologia,

o gigante hipólito foi morto por Hermes, enquanto o deus usava o elmo de invisibilidade de Hades, que também foi usado por Perseu para derrotar a gorgona Medusa. No filme o Quarteto Fantástico, uma das personagens integrantes do quarteto é chamada mulher invisível por possuir esta propriedade. A invisibilidade também está presente em duas grandes produções literárias que se tornaram muito famosas e deram origem a filmes, a primeira é a história do mais famoso bruxo Harry Potter, na qual ele utiliza um manto que o torna invisível, e a outra é a trilogia *The lord of the rings* (O senhor dos anéis). Estas histórias fascinantes ainda têm pouco a ver com a física na vida real. Mas na natureza e em algumas tecnologias este fenômeno é observado em uma certa medida. A palavra invisibilidade significa em termos literários que um objeto não é visto pelo observador mesmo estando à sua vista. No mundo real ser invisível na grande maioria das vezes está relacionado com o ato de estar camuflado, isto é, usar técnicas que permitam um animal ou um objeto torna-se indistinto do ambiente em que se encontra e o uniforme de combate dos soldados que possui texturas que se misturam as cores da floresta. Dentre todas as possíveis tentativas de se tornar invisível nenhuma produz esta propriedade perfeitamente. Com o advento dos metamateriais esta ideia está cada vez mais próxima de se tornar realidade, ao passo em que estão sendo desenvolvidos metamateriais capazes de fazer com que um objeto contornado pelo mesmo, não reflita nenhuma luz e nem absorva energia, os chamados *Electromagnetic Cloak of Invisibility* (mantos da invisibilidade eletromagnéticos)(CAI; SHALAEV, 2010).

Estes metamateriais guiam a luz em torno de um objeto, sem que haja nenhuma reflexão nem difração. A Figura 11 que se segue, ilustra as trajetórias de raios de luz dentro de uma capa esférica com parâmetros do material indicado.

A onda plana incidente entra no invólucro concêntrico e passando suavemente em torno do objeto camuflado devido aos valores específicos das componentes de  $\epsilon$  e  $\mu$  do escudo de camuflagem. Após a esfera interna, a distorção da onda é totalmente recuperada saindo do sistema como onda plana novamente. Os campos fora do dispositivo da camuflagem não contêm nenhuma informação sobre o sistema, incluindo qualquer coisa escondida no interior da região camuflada. Assim, eletromagneticamente, o dispositivo é completamente invisível e não detectável para um observador

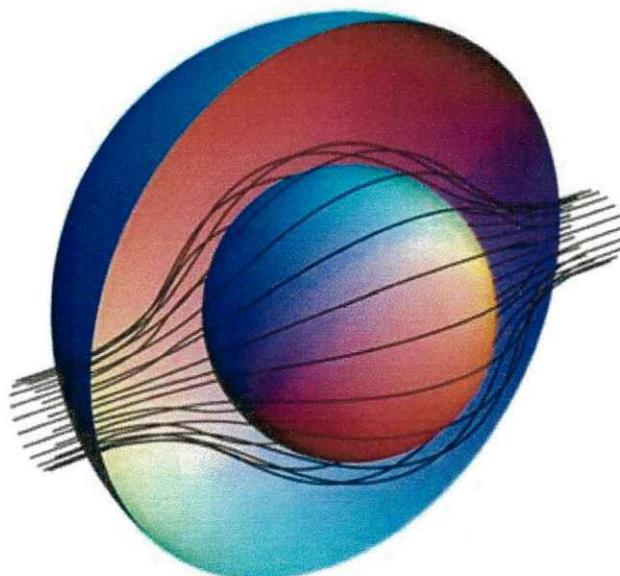


Figura 2.11: Esquema do funcionamento de um manto da invisibilidade. O metamaterial distribui os raios de luz em torno da esfera, formando a camuflagem (CAI; SHALAEV, 2010)

externo.

#### 2.4.2 Escudo Acústico

O avanço nas pesquisas referentes aos mantos da invisibilidade eletromagnético tornaram possível também a criação de manto da invisibilidade para ondas mecânicas (som) ou também denominados de escudo acústico (ZHANG, 2010). Os cientistas do *Instituto de Tecnologia Karlsruhe* criaram uma região virtualmente à prova de som (WILHELM; WEGENER, 2012).

Eles construíram um material artificial composto de dois polímeros, um macio e outro rígido, ambos montados sobre uma placa de 1 milímetro de espessura, os quais foram misturados em diferentes proporções criando 16 metamateriais diferentes. Esses metamateriais foram então dispostos sobre a placa em 20 anéis concêntricos, a qual vibra a cerca de 100 Hz, bem na faixa audível pelo ser humano (ver Figura 2.12).

Essa estrutura metamaterial guia as ondas sonoras ao longo da área circular coberta pelos metamateriais, de tal forma que as vibrações sonoras não podem nem sair e nem entrar nessa área, de modo que as ondas sonoras não são nem absorvidas e nem refletidas, impedindo que qualquer pessoa fora desse local consiga ouvir o que é

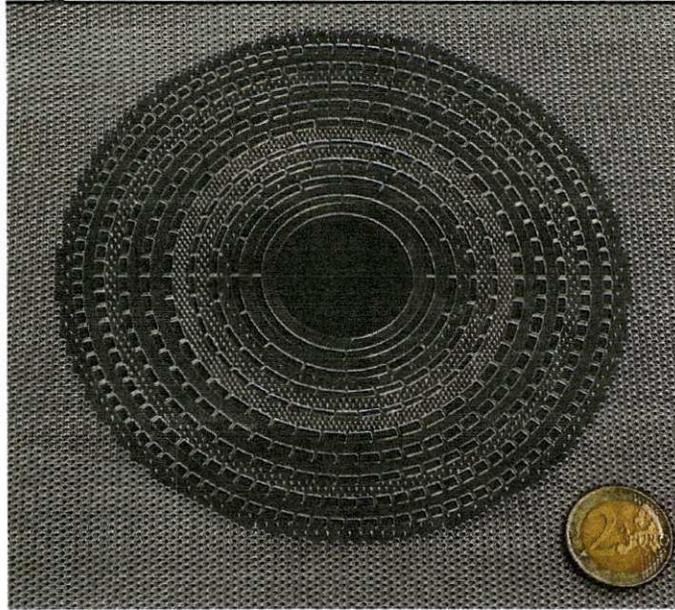


Figura 2.12: Vista oblíqua da fotografia de um escudo acústico antes de ser preenchido com PDMS (dimetil polissiloxano). Estrutura formada por 16 metamateriais diferentes em 20 anéis concêntricos. O objeto a ser camuflado é colocado no interior do círculo central (WILHELM; WEGENER, 2012).

dito lá dentro e vice-versa.

Os pesquisadores também afirmaram que a partir desta descoberta, há possibilidade de se combinar camuflagens ópticas com a camuflagem acústica, será possível criar uma região que apenas não poderá ser vista, como também nada do que for dito em seu interior poderá ser ouvido.

### 2.4.3 Superlentes

Os microscópios óticos atuais ainda não produzem imagens com alta definição devido a ação limitada de suas lentes, pelo efeito da difração. A resolução das lentes convencionais é limitada, devido ao fato de podermos enxergar com nitidez apenas objetos com dimensões da ordem de grandeza do comprimento de onda da luz. A luz emitida ou espalhada por um objeto inclui não só ondas de propagação, mas também ondas evanescentes. Essas lentes não focam as ondas evanescentes, fazendo com que a construção do objeto no plano da imagem seja imperfeita, devido a perda dos detalhes menores que o comprimento de onda, transportados por estas ondas.

Esta barreira pode ser vencida após Veselago demonstrar que utilizando materiais que exibem índice de refração negativo, os NINs, seria possível construir uma lente

que dobra e focaliza a luz de maneira surpreendente (ver ANEXO A), amplificando as ondas evanescentes, e neste caso, tanto as ondas de propagação quanto as ondas evanescentes contribuem para a formação da imagem (CAI; SHALAEV, 2010). Pendry (2000) mostrou que uma lente NIM pode ser uma “lente perfeita”, na qual as ondas evanescentes, em vez de decaírem são reforçadas, possibilitando restaurar ou recuperar os detalhes perdidos. As ondas evanescentes decaem exponencialmente em qualquer meio com índice de refração positivo e não são capturadas pelas lentes convencionais. Em uma lente NIM, essas ondas são fortemente amplificadas por toda a lente e depois de saírem da mesma, elas decaem até atingirem suas amplitudes originais no plano da imagem (ZHANG; LIU, 2008). A luz vinda do espaço livre ao penetrar num NIM com espessura suficiente para atuar como uma lente, seus raios divergentes são refratados negativamente na primeira superfície da lente NIM e são refratados negativamente novamente na segunda superfície (ver Figura 2.13).

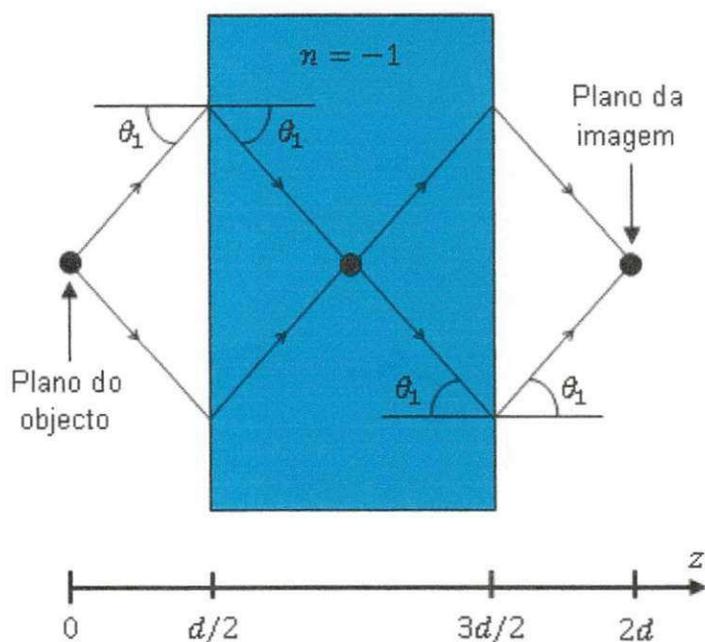


Figura 2.13: Trajetória dos raios de luz através de uma lente plana de Veselago. (GONÇALVES, 2011)

Deste modo modo, cria-se uma imagem invertida no interior da lente e uma segunda imagem não invertida no espaço livre após a interface de saída da lente (ver Figura 2.14). E ao contrário das lentes convencionais convexas, a lente NIM não apresenta nenhum eixo de curvatura, nem concentra raios paralelos e nem amplia imagens

de objetos (CAI; SHALAEV, 2010).

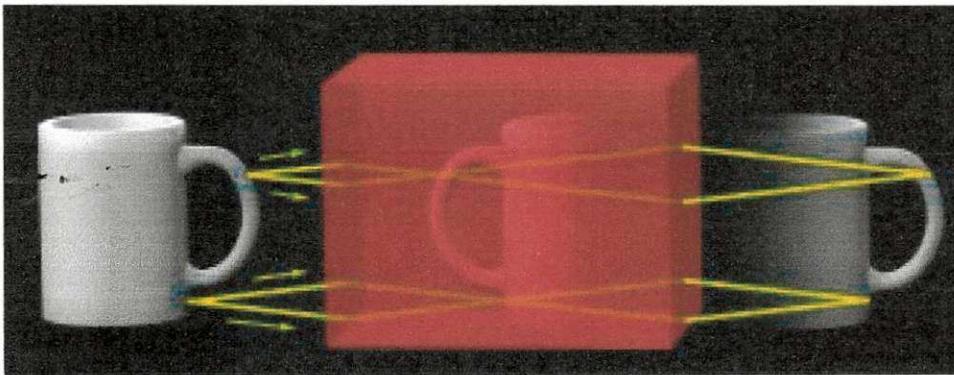


Figura 2.14: Simulação de uma imagem projetada por uma lente metamaterial (PEN-DRY; SMITH, 2006)

Atualmente tem se intensificado as pesquisas referentes as lentes metamateriais também chamadas de superlentes e é notório a sua evolução. Em 2013, um grupo de pesquisadores criaram uma lente plana metamaterial formada por nanocamadas alternadas de prata e dióxido de titânio (ver Figura 2.15) que foram capazes de curvar e focalizar ondas eletromagnéticas na frequência do ultravioleta (UV) e criar projeções de imagens de objetos em 3D flutuando no espaço livre. Além disso, essa lente também deverá permitir a observação de detalhes de objetos menores que o comprimento de onda da luz.

Os pesquisadores relataram que não há limites para o uso dessas lentes e que elas podem ser aplicadas na fotolitografia, na fabricação de processadores para computadores, na manipulação de objetos em nanoescala e na nanofabricação (XU et al., 2013).

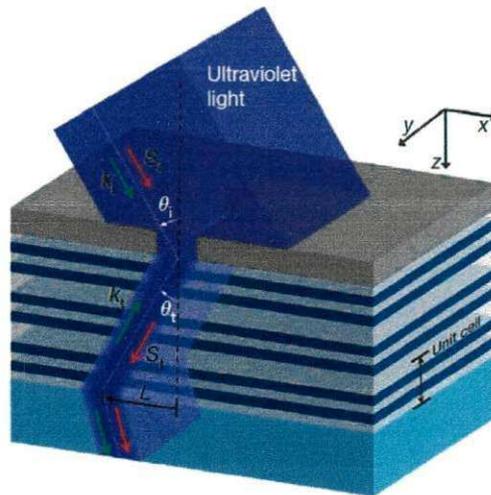


Figura 2.15: Esquema da refração negativa de luz ultravioleta vinda do ar para um metamaterial formado por nanocamadas de prata (cor cinza) e dióxido de titânio (azul marinho) alternada(XU et al., 2013).

Além dessas aplicações, há também outras como, por exemplo, a construção de metapainéis solares que pretendem melhorar a capacidade das células solares captarem os fótons (BURGOS et al., 2010) e construção de surpelentes que possibilitarão a análise mais detalhada de estruturas menores que o comprimento de onda da luz (VALENTINE et al., 2008; BURGOS et al., 2010).

## Capítulo 3

# Efeitos em Meios com Índice de Refração Negativo

### 3.1 Lei de Snell-Descartes

A velocidade de propagação das ondas depende de propriedades do meio através do qual a onda se propaga. Por exemplo, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas depende da permissividade e da permeabilidade do meio através do qual elas se propagam e conseqüentemente do índice de refração deste meio.

Quando uma onda atravessa uma superfície de separação entre dois meios, ocorrem dois fenômenos, o da reflexão e o da refração, entre outros, os quais são consequência da dependência da velocidade da onda em relação as propriedades do meio. A onda refletida é uma nova onda que se propaga em sentido contrário e no mesmo meio em que a onda inicial estava se propagando. A onda refratada é a onda transmitida para o outro meio, sofrendo uma mudança na direção de propagação quando a incidência não for perpendicular a interface de separação entre os dois meios. A Figura 3.1 ilustra estes fenômenos. A energia da onda incidente divide-se entre a onda refletida e a onda refratada e dependendo da situação uma ou outra fica com uma parte maior da energia.

A propagação de uma onda é governada pelas equações do campo ao qual a onda corresponde. Por conseguinte, ao conhecermos a fonte da onda, podemos, em princípio, conhecer sua propagação, desde que consideremos as variações nas propriedades do meio.

Consideremos uma onda eletromagnética incidindo numa interface de separação entre dois meios, fazendo um ângulo  $\theta_1$  com a reta normal à essa superfície, conforme a Figura 3.1.

As equações de Maxwell para um meio homogêneo, isotrópico e linear com  $\rho = 0$

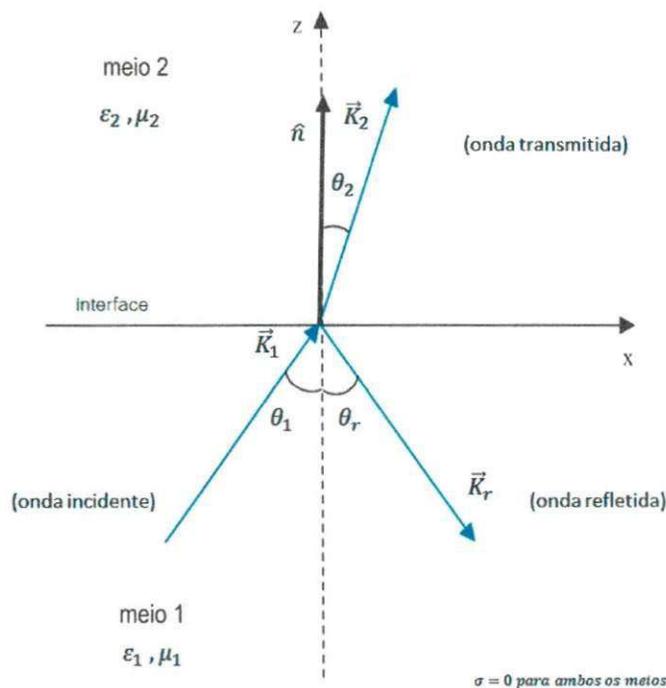


Figura 3.1: Sistema de coordenadas para análise da reflexão e da refração na interface de separação entre os meio 1 e 2.

e  $\vec{J} = 0$  são da forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Com as seguintes relações constitutivas deste meio,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \text{ e } \vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (3.5)$$

Ao desacoplarmos os campos, encontramos a equação de onda que governa a propagação da mesma que é dada por

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

As soluções dessa equação de onda é da forma  $e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ . Assim, para a intensidade do campo elétrico da onda incidente tomamos

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K}_1\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad (3.7)$$

onde  $\vec{K}$  é o vetor de onda e usando as relações (A.22) e (A.26), encontradas no Apêndice A, obtemos a equação para a indução magnética

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 \times \vec{E} &= \left(\frac{\omega}{c}\right) \mu \vec{H} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \vec{B}, \\ \vec{K}_1 \times \vec{E} &= \frac{K_1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \vec{B}, \\ \vec{B} &= \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{\vec{K}_1 \times \vec{E}}{K_1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Correspondentemente, temos para a onda refratada

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{K}_2\cdot\vec{r}-\omega_2 t)}, \quad (3.9)$$

$$\vec{B}_t = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \frac{\vec{K}_2 \times \vec{E}_t}{K_2}. \quad (3.10)$$

E para a onda refletida,

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega_r t)}, \quad (3.11)$$

$$\vec{B}_r = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \frac{\vec{K}_r \times \vec{E}_r}{K_r}. \quad (3.12)$$

Da mesma forma que acontece na incidência normal, também neste caso devemos ter a continuidade dos campos  $E_t, H_t, D_n$  e  $B_n$  na interface. Para satisfazer estas condições de contorno em todos os instantes e em todos os pontos da interface, os fatores de dependência temporal e espacial das ondas incidente e refletida devem ser iguais no plano  $z = 0$ , ou seja

$$e^{i(\vec{K}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)} = e^{i(\vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)} = e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}. \quad (3.13)$$

Aplicando as propriedades da função exponencial na relação acima, obtemos que

$$\vec{K}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t = \vec{K}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + m_1 2\pi = \vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + m_2 2\pi, \quad (3.14)$$

para todos os instantes, onde  $m_1$  e  $m_2$  são inteiros. Isto deve valer para todo  $\vec{r}$  na interface, e em particular, para a onda incidente na origem; ou seja, para  $m_1 = m_2 = 0$  e  $\vec{r} = 0$ . Para  $\vec{r} = 0$  e  $t \neq 0$  com  $m_1 = m_2 = 0$ , concluímos que

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_r. \quad (3.15)$$

Portanto, a frequência da onda não é alterada na reflexão e na refração. Além disso, isto implica que

$$K_1 = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = \frac{\omega_r}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = K_r, \quad (3.16)$$

isto é, os vetores das ondas incidente e refletida são iguais em magnitude.

Devido a relação (3.15), obtemos que

$$(\vec{K}_1 \cdot \vec{r})_{z=0} = (\vec{K}_2 \cdot \vec{r})_{z=0} = (\vec{K}_r \cdot \vec{r})_{z=0}. \quad (3.17)$$

Isto implica que as projeções de  $\vec{K}_1$ ,  $\vec{K}_2$  e  $\vec{K}_r$  na direção de qualquer  $\vec{r}$  da interface são todas iguais entre si. Mas, isto somente é possível se  $\vec{K}_1$ ,  $\vec{K}_2$  e  $\vec{K}_r$  pertencerem ao mesmo plano, o chamado PLANO DE INCIDÊNCIA. Este resultado é denominado de Primeira Lei da Refração.

Utilizando estes fatos, a Figura 3.1 pode ser interpretada do seguinte modo: Escolhendo um valor particular de  $\vec{r}$  sobre o eixo  $x$ ,  $\vec{r} = x\hat{e}_1$ . Assim, temos

$$K_1 x \cos(\vec{K}_1, \hat{e}_1) = K_2 x \cos(\vec{K}_2, \hat{e}_1) = K_r x \cos(\vec{K}_r, \hat{e}_1) \quad (3.18)$$

Com isso, a Figura 3.1 fica da forma como apresentada na Figura 3.2.

A partir da Figura 3.2, obtemos a seguinte relação

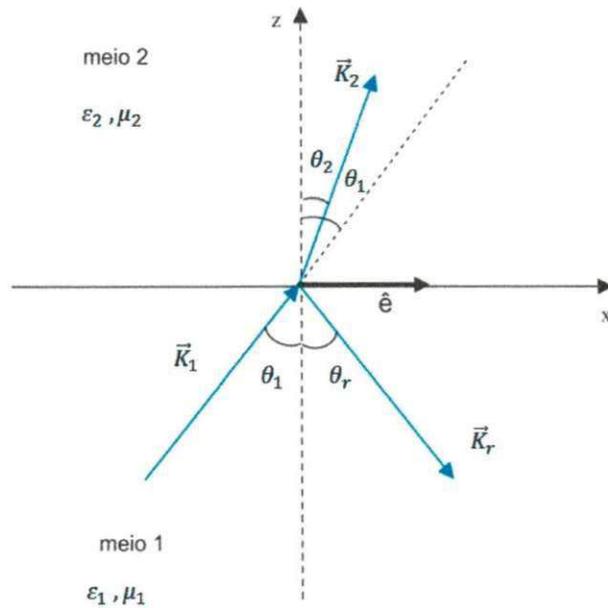


Figura 3.2: Figura semelhante a Figura 3.1, mas com a introdução de um novo ângulo para a onda refratada.

$$\begin{aligned}
 K_1 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) &= K_2 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = K_r x \cos\left[2\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + \theta_r\right)\right], \\
 K_1 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) &= K_2 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = K_r x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right), \\
 K_1 x \sin \theta_1 &= K_2 x \sin \theta_2 = K_r x \sin \theta_r. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Como  $K_1 = K_r$ ,

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_r \quad (3.20)$$

$$\theta_1 = \theta_r. \quad (3.21)$$

Portanto, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais. Este resultado é denominado Lei da Reflexão. Além disso, da relação (3.19), temos também que

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{K_2}{K_1} \quad (3.22)$$

Temos a seguinte relação,  $\lambda = \frac{2\pi}{K} \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Deste modo, Eq. (3.22) fica da

seguinte forma

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (3.23)$$

A relação (A.26) também implica que  $K_1 = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$  e  $K_2 = \frac{\omega_2}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ . Logo a Equação (3.23) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\frac{\omega_2}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (3.24)$$

De acordo com o Apêndice A, o índice de refração é definido da forma  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ .

Assim temos

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (3.25)$$

onde  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$  e  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$  são as velocidades da luz nos meios 1 e 2 respectivamente.

A partir da Eq. (3.25) também encontramos que

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \quad (3.26)$$

Esta equação é conhecida com a Segunda Lei da Refração ou Lei de Snell-Descartes.

A velocidade da luz, o comprimento de onda e o ângulo são menores no meio de maior densidade óptica, enquanto que o índice de refração, a permissividade e a magnitude do vetor de onda são maiores.

A lei de Snell-Descartes da forma como apresentada na Eq. (3.26) é representada geometricamente da forma como mostra a Figura 3.3.

No fenômeno da refração, tanto a velocidade de propagação, quanto o comprimento de onda se modificam, mantendo entre si uma proporção direta, cuja constante de proporcionalidade é a frequência da onda. A mudança na velocidade de propagação ao passar de um meio para outro, observada na Figura 3.3, é causada pela diferença entre as propriedades dos meios, mais especificamente pela diferença entre os índices

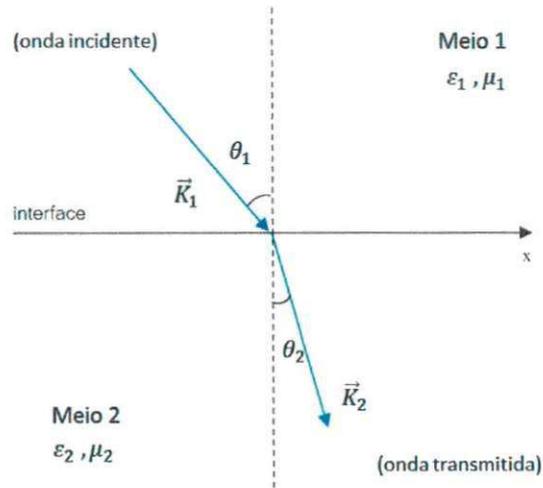


Figura 3.3: Representação da Lei de Snell-Descartes.

de refração de cada meio.

Deste modo, como foi visto no Apêndice A, o índice de refração além de ser definido a partir da óptica como sendo a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo e a velocidade de propagação da luz em um meio qualquer,  $n = \frac{c}{v}$ , também pode ser expresso em termos das propriedades dos meios deduzido a partir das relações de Maxwell,

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (3.27)$$

Pelo fato da velocidade da luz na matéria ser sempre menor do que  $c$  e também que  $\varepsilon$  e  $\mu$  se apresentam nos materiais em termos de valores positivos, o índice de refração geralmente é positivo.

Ao analisarmos a Eq. (3.27), devemos ter cuidado com a raiz quadrada, porque  $\varepsilon$  e  $\mu$  geralmente são funções complexas e devido a esse fato podem gerar ambiguidades no sinal da raiz. Podemos evitar esse problema se reescrevermos a permissividade e a permeabilidade da forma  $\varepsilon = \exp(i\pi)$  e  $\mu = \exp(i\pi)$ , por exemplo.

Deste modo o índice de refração se torna

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\exp(i\pi)\exp(i\pi)} = \exp(i\pi) = -1 \quad (3.28)$$

Assim, obtemos um índice de refração negativo. Aplicando este resultado na

Lei de Snell-Descartes, surge um efeito no qual o raio refratado desvia se mantendo no mesmo lado da normal à superfície do raio incidente, se comportando deste modo como se sofresse uma reflexão na normal, mas não necessariamente obedecendo a lei da reflexão. Este novo fenômeno faz surgir uma nova representação para a lei de Snell-Descartes, que está ilustrada na Figura 1.4.

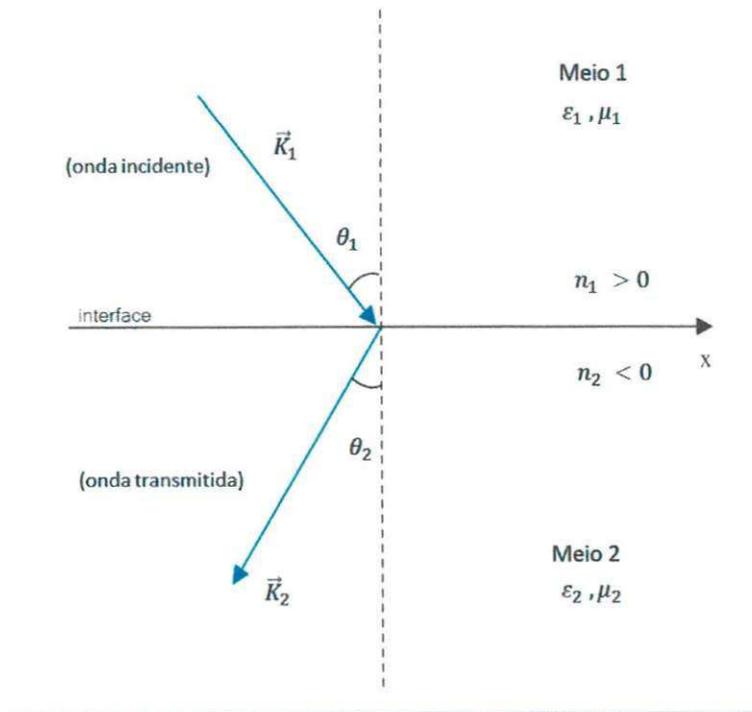


Figura 3.4: Representação da Lei de Snell para um meio com índice de refração negativo.

Na prática é difícil imaginarmos como esse fenômeno acontece. No entanto, há um experimento bastante utilizado por professores nas aulas de ótica no ensino médio para ilustrar o fenômeno da refração. Este experimento consiste em mergulharmos um lápis ou um bastão qualquer num copo com água. Quando feito isto, enxergamos o lápis como se estivesse quebrado devido ao índice de refração da água ser maior do que o do ar.

Agora, se ao invés da água imaginarmos que o copo contenha uma substância que apresente um índice de refração negativo, veremos este mesmo efeito de uma forma estranha. Como não é possível fazer essa experiência devido ao fato de não existir substâncias semelhantes a água com índice de refração negativo, alguns pesquisadores fizeram uso das potencialidades dos computadores e realizaram simulações desta situação, como podemos ver na Figura 3.5.

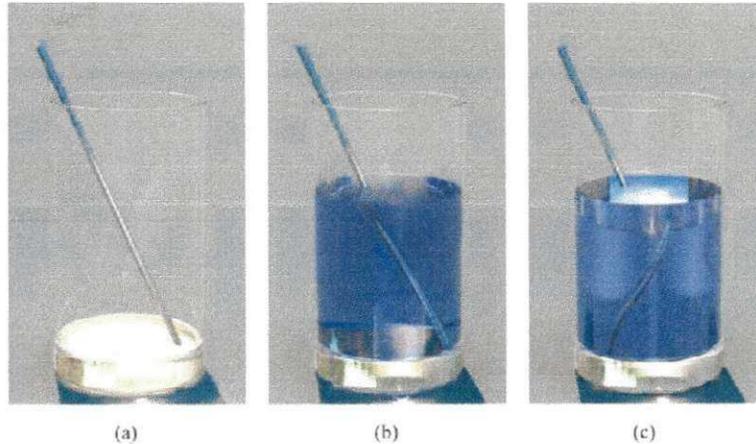


Figura 3.5: (a) Imagem de um bastão de metal dentro de um copo de vidro vazio. (b) Mesmo cenário, mas com o copo preenchido com água normal de índice de refração  $n = 1.3$ , o que leva a uma refração ordinária. (c) Ainda no mesmo cenário, mas neste caso a água é substituída por uma “água” de  $n = -1.3$ . (DOLLING et al., 2006)

Como podemos ver na figura 3.5 (c), na refração negativa o bastão mostra-se quebrado como na Figura 1.5 (b), mas neste caso o bastão está quebrado no sentido contrário. A Figura 1.6 mostra mais uma simulação na qual temos a ilustração de uma piscina com água normal e outra piscina com “água” com um índice de refração negativo. Nesta Figura é observada a diferença entre as imagens de um mesmo objeto devido a uma mudança no seu índice de refração.



Figura 3.6: Imagem gerado por computador de uma piscina com (a) água de índice de refração  $n = 1.33$  e com (b) “água” de índice de refração negativo ( $n = -1.33$ ). A linha preta foi adicionada para ilustrar a localização da borda inferior da piscina e do canto (DANNER, 2009).

As Figuras 3.5 e 3.6 foram produzidas a partir de modelagens através do método

das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD). <sup>1</sup>A caracterização de materiais através desse método possibilita geralmente determinar, sua permissividade efetiva, sua dispersão e a dependência da polarização da permissividade (DANNER, 2009).

### 3.2 Reflexão Interna Total

Uma onda eletromagnética ao passar de um meio de densidade óptica maior para outro de densidade óptica menor ocorre que o ângulo de refração é maior do que o ângulo de incidência. Contudo há um certo ângulo de incidência para o qual o ângulo de refração alcança  $90^\circ$ , conseqüentemente a mesma não mais penetra no meio de densidade óptica menor e se desloca ao longo da interface de separação entre os dois meios. De acordo com eletromagnetismo clássico, nestas circunstâncias a reflexão interna total ocorre se o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico (BORN; WOLF, 1999). Estas situações podem estar ilustradas na Figura 3.7.

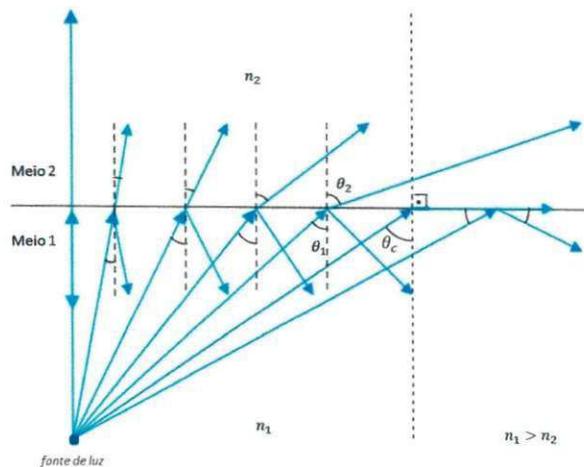


Figura 3.7: A reflexão interna total e o ângulo crítico de um feixe de luz transmitido de um meio com índice de refração maior  $n_1$  para outro de índice de refração menor  $n_2$ .

Para uma análise detalhada desse fenômeno, vamos considerar uma onda se propagando de um meio com índice de refração maior, para um meio de índice de

<sup>1</sup>O método FDTD foi criado por Yee em 1966, baseado em um método de resolução numérica de equações chamado Método das Diferenças Finitas (FDM) criado por Thom. O método FDTD é um método computacional que visa resolver numericamente as equações diferenciais de Maxwell que descrevem a propagação, transmissão e espalhamento das ondas eletromagnéticas em qualquer meio submetido as condições de contorno. Ele consiste em uma técnica de aproximações sucessivas que transforma as equações diferenciais em equações discretas ou finitas, através do conceito da aproximação da derivada central de um ponto.

refração menor, como por exemplo, da água para o ar.

Neste caso, pela Lei de Snell-Descartes, temos

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta_2. \quad (3.29)$$

Como  $n_1 > n_2$ ,

$$\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta_2 \leq \sin\theta_2 \quad (3.30)$$

Portanto,

$$\sin\theta_1 \leq \sin\theta_2 \quad (3.31)$$

Para que a reflexão interna total ocorra, devemos ter para um ângulo de refração de  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , um ângulo de incidência  $\theta_1 = \theta_c$  tal que, de acordo com a lei de Snell-Descartes,

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta_c}{\sin(\pi/2)} &= \frac{n_2}{n_1}, \\ \sin\theta_c &= \frac{n_2}{n_1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

na qual  $\theta_c$  é o ângulo crítico de incidência. Uma relação trigonométrica nos diz que

$$\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1 \Rightarrow \cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2}. \quad (3.33)$$

De acordo com a Eq. (3.29), a Eq. (3.33) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right) \sin^2\theta_1}. \quad (3.34)$$

Substituindo a razão dos índices de refração pelo ângulo crítico, obtemos o ângulo de refração para um ângulo de incidência arbitrário  $\theta_1$ ,

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_c}\right)^2}. \quad (3.35)$$

Para um ângulo de incidência  $\theta_1 \leq \theta_c$ , ainda teremos um valor real para  $\cos\theta_2$ , e portanto para  $\theta_2$ . Entretanto, para ângulos de incidência  $\theta_1 > \theta_c$ ,  $\cos\theta_2$  se torna puramente imaginário, ou seja,

$$\cos\theta_2 = i\sqrt{\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_c}\right)^2 - 1}. \quad (3.36)$$

Sabemos que a função que descreve o comportamento de uma onda eletromagnética é da forma

$$f(\vec{r}, t) = f_0 e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (3.37)$$

Se o plano  $(x, y)$ , na Figura 3.7, é o plano de incidência, para a onda refratada temos,

$$e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} = e^{i(K_{2x}x + K_{2z}z)} = e^{i(K_{2x}\sin\theta_2 + K_{2z}\cos\theta_2)} = e^{i(K_{2x}\sin\theta_2)} e^{i(K_{2z}\cos\theta_2)} \quad (3.38)$$

De acordo com as Eqs. (3.30) e (3.36), a Eq. (3.38) pode ser reescrita da seguinte forma

$$e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} = e^{iK_{2x}\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1} e^{-K_{2z}z\sqrt{\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_{i0}}\right)^2 - 1}} \quad (3.39)$$

Contudo, esta equação mostra que ao longo da interface se propaga uma onda estacionária de fase  $e^{iK_{2x}(n_1/n_2)\sin\theta_1}$  e portanto o segundo fator exponencial com argumento real e negativo mostra que a onda decai exponencialmente na direção  $z$ , ao entrar no meio com índice de refração menor, resultado que confirma a teoria de que a onda incidente não ultrapassa para o outro meio.

Vamos agora investigar as características da propagação de uma onda eletromagnética na interface de separação entre um meio anisotrópico e um meio metamaterial indefinido quando a mesma é incidente sobre a interface do lado do meio anisotrópico. Esta situação está representada geometricamente pela Figura 3.8, na qual temos uma onda plana de frequência  $\omega$  incidente com um ângulo  $\theta$ , partindo do meio 1 para o meio

2 (metamaterial).

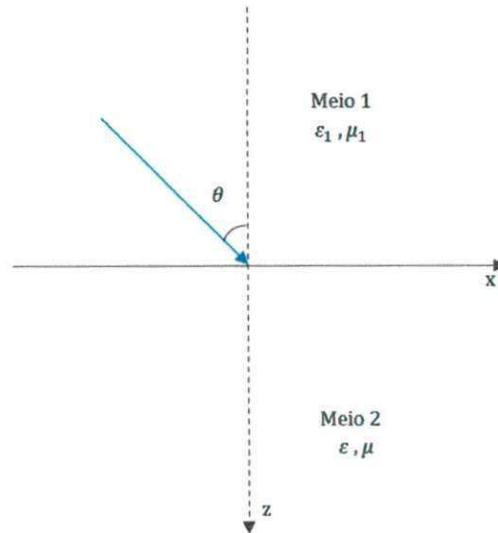


Figura 3.8: Representação geométrica da propagação de uma onda eletromagnética na interface de separação entre um meio anisotrópico (meio 1) e um meio metamaterial indefinido (meio 2).

O meio 1 é caracterizado por uma permissividade  $\epsilon_1$  e uma permeabilidade  $\mu_1$  e o metamaterial é caracterizado por uma permissividade  $\epsilon$  e uma permeabilidade  $\mu$ , de modo que a interface de separação entre os dois meios é paralela ao plano  $xy$  e normal ao eixo  $z$ .

De maneira geral, um meio anisotrópico é um material no qual alguma de suas propriedades físicas apresentam valores distintos em cada direção espacial como por exemplo, num sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ , ou seja, é dependente da direção, o que representa a situação em que os vetores de polarização não estão alinhados com seus respectivos campos (SILVA, 2013). Assim, os parâmetros efetivos  $\epsilon$  e  $\mu$  tornam-se funções e são definidos em forma de tensores que podem ser representados da seguinte forma:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

em que a Eq. (3.40) representa os tensores para meios anisotrópicos.

Tendo em vista uma análise mais simplificada para o nosso problema, vamos

considerar que os tensores anisotrópicos permissividade e permeabilidade são simultaneamente diagonalizáveis, em outras palavras, vamos considerar os eixos cartesianos ao longo dos eixos principais do meio, então  $\varepsilon$  e  $\mu$  podem assumir as formas (LUO et al., 2007),

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Vamos considerar também que o metamaterial indefinido possui uma anisotropia óptica uniaxial com o eixo óptico (eixo  $z$ ) normal a interface. Desta maneira podemos fazer uma simplificação igualando os valores de duas direções cartesianas, isto é,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$  e  $\mu_x = \mu_y \neq \mu_z$ .

Agora vamos analisar a propagação da onda em um meio anisotrópico uniaxial, assumindo o vetor de onda  $k$  localizado no plano  $xz$  e campo elétrico incidente definido como da forma  $\vec{E} = \hat{y} \vec{E}_o e^{i(k_x x + k_{1z} z - \omega t)}$ , em que  $k_x$  e  $k_{1z}$  são as componentes  $x$  e  $z$  do vetor de onda incidente. No Apêndice A, encontramos que a relação dispersão para um meio isotrópico e homogêneo é dada pela Eq. (A.26), logo temos que a relação de dispersão para um onda TE em um meio isotrópico regular é

$$k_x^2 + k_{1z}^2 = \varepsilon_1 \mu_1 (\omega^2 / c^2), \quad (3.42)$$

e para um metamaterial indefinido é (XIANG; DAI; WEN, 2007):

$$\frac{k_x^2}{\varepsilon_y \mu_z} + \frac{k_{2z}^2}{\varepsilon_y \mu_x} = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.43)$$

A partir da Eq. (3.41), vemos que a componente do vetor de onda no metamaterial indefinido satisfaz a seguinte relação,

$$k_{2z}^2 = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2}{\varepsilon_y \mu_x} \right) \varepsilon_y \mu_x. \quad (3.44)$$

De acordo com a Figura 3.8, a componente  $k_x$  do vetor de onda no meio anisotrópico é dada por:

$$k_x = k_0 \text{sen} \theta \Rightarrow k_x^2 = k_0^2 \text{sen}^2 \theta \Rightarrow k_x^2 = (\omega^2/c^2) \varepsilon_1 \mu_1 \text{sen}^2 \theta, \quad (3.45)$$

em que  $k_0^2 = \omega^2/c^2 \varepsilon_1 \mu_1$ .

Logo, temos que a Eq. (3.44), pode ser reescrita da seguinte forma

$$k_{2z}^2 = (\omega^2/c^2) \varepsilon_y \mu_x - \left( \frac{(\omega^2/c^2) \varepsilon_1 \mu_1 \text{sen}^2 \theta}{\varepsilon_y \mu_z} \right) \varepsilon_y \mu_x \quad (3.46)$$

$$k_{2z}^2 = (\omega^2/c^2) [\varepsilon_y \mu_x - \varepsilon_1 \mu_1 (\mu_x/\mu_z) \text{sen}^2 \theta] \quad (3.47)$$

O caso em que  $k_{2z}^2 > 0$ , exprime os valores reais de  $k_{2z}$  e corresponde as ondas que se propagam. O caso em que  $k_{2z}^2 < 0$ , exprime os valores de  $k_{2z}$  imaginários, ou seja, as ondas evanescentes.

Utilizando as condições de contorno para os campos elétrico e magnético na interface, encontramos os coeficientes de transmissão e de reflexão para os modos TM e TM (XIANG; DAI; WEN, 2007).

$$r^{TE} = \frac{\mu_x k_{1z} - \mu_1 k_{2z}}{\mu_x k_{1z} + \mu_1 k_{2z}}, \quad (3.48)$$

$$r^{TM} = \frac{2\mu_x k_{1z}}{\mu_x k_{1z} + \mu_1 k_{2z}}. \quad (3.49)$$

Para que ocorra a reflexão total,  $k_{2z}^2$  deve satisfazer a seguinte condição:

$$k_{2z}^2 = 0. \quad (3.50)$$

Assim, igualando a Eq. (3.47) a zero, obtemos que o ângulo crítico é dado por

$$(\omega^2/c^2) [\varepsilon_y \mu_x - \varepsilon_1 \mu_1 (\mu_x/\mu_z) \text{sen}^2 \theta_c] = 0,$$

$$\varepsilon_y \mu_x - \varepsilon_1 \mu_1 (\mu_x/\mu_z) \text{sen}^2 \theta_c = 0,$$

$$\text{sen}^2 \theta_c = \frac{\varepsilon_y \mu_x}{(\mu_x/\mu_z) \varepsilon_1 \mu_1},$$

$$\theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_y \mu_x}{(\mu_x/\mu_z) \varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (3.51)$$

De acordo com Eq. (3.44), para que tenhamos  $k_{2z}^2 = 0$ , devemos ter um valor corresponde de  $k_x^2$  da forma

$$k_c = k_0 \sqrt{\varepsilon_y \mu_z}, \quad (3.52)$$

em que  $k_c$  é o vetor de onda de corte que separa as soluções de ondas propagantes das soluções de ondas evanescentes.

Diante disso, se  $k_{2z}^2 < 0$  sempre ocorrerá reflexão total e  $k_{2z}$  se torna imaginário, então

$$\varepsilon_y \mu_x - \varepsilon_1 \mu_1 (\mu_x/\mu_z) \text{sen}^2 \theta < 0. \quad (3.53)$$

Vamos verificar a possível existência de uma reflexão interna total para diferentes parâmetros físicos. Para isso, fazemos duas restrições, a primeira restrição esta relacionada ao ângulo crítico, o mesmo deve satisfazer a seguinte desigualdade (XIANG; DAI; WEN, 2007),

$$0 < \text{sen}^2 \theta_c < 1. \quad (3.54)$$

A desigualdade acima é equivalente a termos,

$$0 < \varepsilon_y \mu_z < \varepsilon_1 \mu_1. \quad (3.55)$$

Esta condição se assemelha ao caso de uma reflexão total convencional em que temos a propagação de onda eletromagnéticas de um meio de densidade optica maior

para um meio de densidade óptica menor.

A segunda restrição, deriva da desigualdade (3.53), a qual nos possibilita dividir o metamaterial indefinido em 4 classes distintas que estão dispostas na Tabela 1, de acordo com (SMITH; SCHURIG, 2003; XIANG; DAI; WEN, 2007).

Tabela 3.1: Classes de materiais

Classe	Condições do meio
<i>Cutoff</i>	$\varepsilon_y \mu_x > 0$ , $\mu_x / \mu_z > 0$
<i>Anti-cutoff</i>	$\varepsilon_y \mu_x < 0$ , $\mu_x / \mu_z < 0$
<i>Never cutoff</i>	$\varepsilon_y \mu_x > 0$ , $\mu_x / \mu_z < 0$
<i>Always cutoff</i>	$\varepsilon_y \mu_x < 0$ , $\mu_x / \mu_z > 0$

### Caso 1: Meio *cutoff*

Neste meio a reflexão total ocorre de acordo com a desigualdade (3.53), resultando na condição em que  $\theta > \theta_c$ , assim novamente recaímos no fenômeno da reflexão total convencional exemplificada na Figura 3.9.

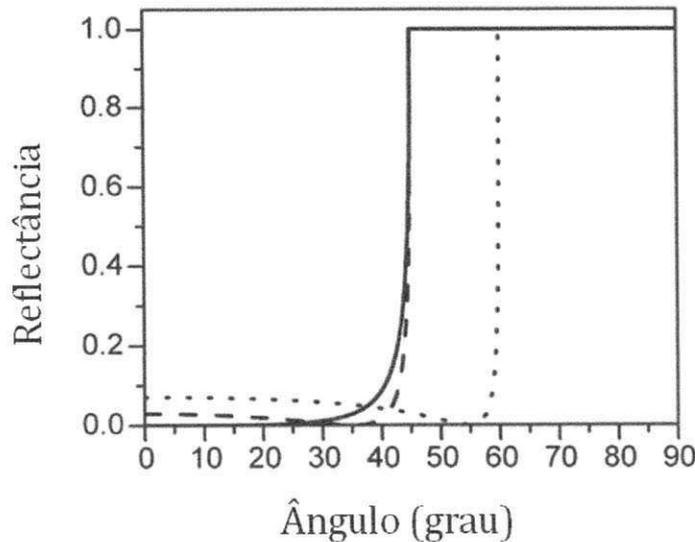


Figura 3.9: Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio *cutoff* indefinido com  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$  , e  $\varepsilon_y = -1, \mu_x = -1, \mu_z = -2$  (linha contínua),  $\varepsilon_y = -2, \mu_x = -1, \mu_z = -1$  (linha tracejada),  $\varepsilon_y = -3, \mu_x = -1, \mu_z = -1$  (linha pontilhada). Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007).

### Caso 2: Meio *Anti-cutoff*

Neste meio os parâmetros físicos  $\varepsilon_y \mu_x$  e  $\mu_x / \mu_z$  são simultaneamente negativos, assim de acordo com a desigualdade (3.53), temos a condição para o ângulo crítico,

$\theta < \theta_c$  e portanto  $k_{2z}$  será imaginário e a onda incidente será totalmente refletida como podemos ver na Figura 3.10. Esta condição é totalmente diferente da condição para um meio *cutoff*, o que torna o fenômeno da reflexão total no meio *anti-cutoff* anômala.

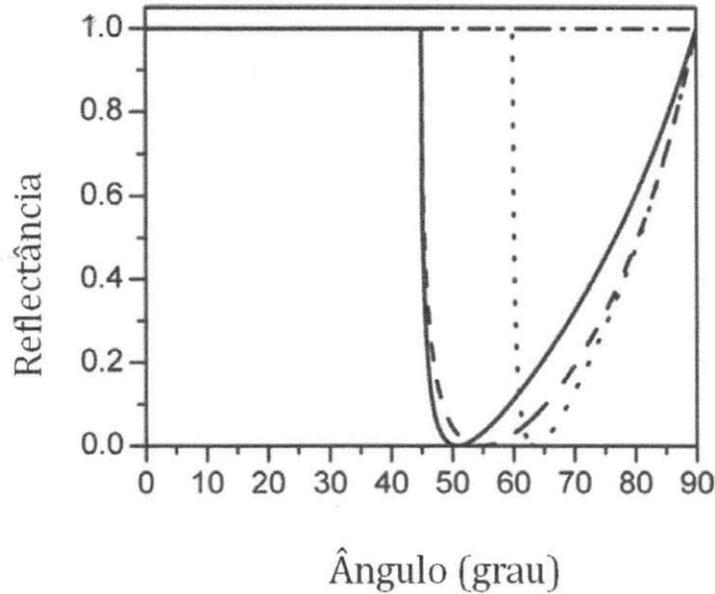


Figura 3.10: Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio *anti-cutoff* indefinido com  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e  $\varepsilon_y = -2, \mu_x = -1, \mu_z = -1$  (linha contínua),  $\varepsilon_y = -1, \mu_x = 1, \mu_z = -2$  (linha tracejada),  $\varepsilon_y = -3, \mu_x = 1, \mu_z = -1$  (linha pontilhada) e  $\varepsilon_y = -3, \mu_x = 1, \mu_z = -2$  (linha pontilhada tracejada) Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007).

Ainda é visto que, se  $\varepsilon_x \mu_z > \varepsilon_1 \mu_2$ , o ângulo crítico será igual a  $\pi/2$ , então irá ocorrer uma reflexão unidireccional, e para quaisquer ângulos de incidência, a onda incidente TE será totalmente refletida, no entanto esta reflexão total anômala não pode ocorrer quando o segundo meio é um meio convencional (XIANG; DAI; WEN, 2007).

### Caso 3: Meio *never cutoff*

Como neste meio  $\varepsilon_y \mu_x > 0, \mu_x / \mu_z < 0$ , de acordo com a desigualdade (3.53),  $k_{2z}$  sempre será real tornando possível a propagação das ondas eletromagnéticas para o segundo meio. Podemos ver esta situação na Figura 3.11.

### Caso 4: Meio *always cutoff*

Este meio é caracterizado por apresentar  $\varepsilon_y \mu_x < 0, \mu_x / \mu_z > 0$ , o que torna  $k_{2z}$  sempre imaginário. Portanto, a reflexão interna total pode ocorrer para qualquer ângulo de incidência, como pode se visto na Figura 3.12.

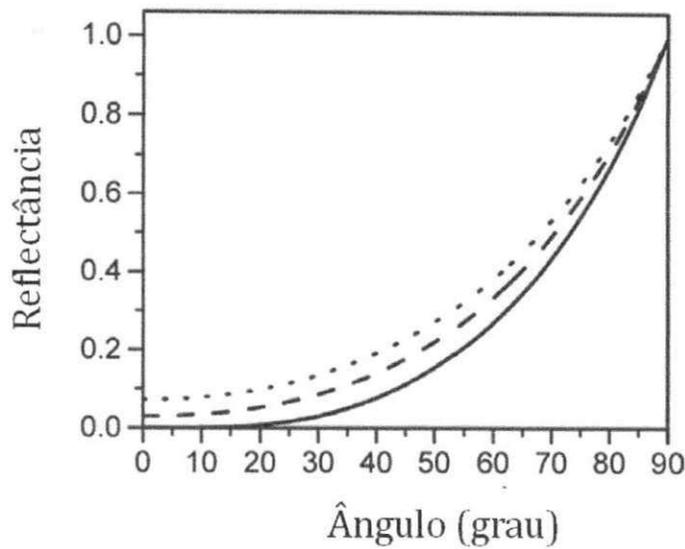


Figura 3.11: Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio never cutoff indefinido com  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e  $\varepsilon_y = 1, \mu_x = 1, \mu_z = -2$  (linha contínua),  $\varepsilon_y = 2, \mu_x = 1, \mu_z = -1$  (linha tracejada),  $\varepsilon_y = 3, \mu_x = 1, \mu_z = -1$  (linha pontilhada) Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007).

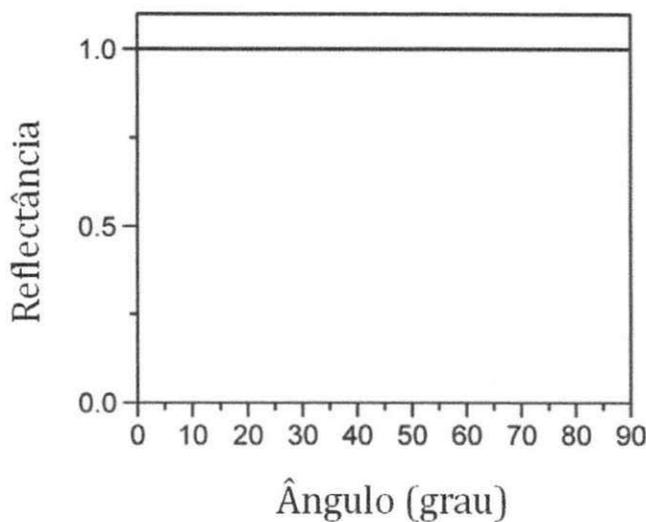


Figura 3.12: Gráfico da reflectância em função do ângulo de incidência para um meio *always cutoff* indefinido com  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 2$ , e  $\varepsilon_y = 1, \mu_x = -1, \mu_z = -2$ . Para qualquer ângulo de incidência a reflexão é sempre unitária. Retirado de (XIANG; DAI; WEN, 2007).

Nesta conjuntura encontramos as condições necessárias para a ocorrência da reflexão interna total na interface de separação entre um meio convencional isotrópico

e um metamaterial indefinido.

### 3.3 Ângulo de Brewster

Existe um tipo de incidência de ondas eletromagnéticas em que a onda é totalmente transmitida sem haver nenhuma reflexão. De maneira geral isso ocorre quando uma onda eletromagnética (luz) incide na superfície de um dielétrico com o campo elétrico oscilando normal ao plano formado pelo raio incidente e a normal à superfície.

Este fenômeno pode ser melhor compreendido analisando-o microscopicamente. A onda incidente excita os elétrons do dielétrico fazendo surgir neste dipolos elétricos oscilantes. Na superfície de contorno duas direções de radiação efetiva são formadas pela interferência da radiação de todos os dipolos; uma delas da origem a onda refratada e a outra da origem a onda refletida. Se os dipolos oscilarem na mesma direção da onda refletida, a intensidade da radiação é igual a zero, então nenhuma onda é refletida e a radiação média desses dipolos se propagam perpendicular a direção de oscilação, com isso as ondas refletidas e refratadas são perpendiculares. Portanto, os dipolos oscilantes só emitem radiação na direção perpendicular ao seu eixo.

Contudo, o ângulo para o qual a direção de reflexão é perpendicular ao feixe transmitido é chamado ângulo de Brewster. Segundo Bedran e Lesche (1997) esta condição é válida, tanto para materiais não magnéticos quanto para materiais magnéticos, sendo que no caso de materiais magnéticos deve-se levar em consideração a contribuição da emissão de radiação dos dipolos magnéticos.

Ao estudar ondas eletromagnéticas em óptica é comum especificar o tipo de polarização da onda. As ondas eletromagnéticas também são classificadas de acordo com as suas componentes longitudinais, de modo que obtem-se três tipos: as ondas TEM ou ondas transversais eletromagnéticas, ambos os campos são perpendiculares à direção de propagação; ondas TE ou transversais elétricas, também chamadas de polarização *s*, o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação e as ondas TM ou transversais magnéticas também chamadas de polarização *p*. Nesta o campo magnético é perpendicular à direção de propagação.

Iremos agora fazer um estudo deste fenômeno em metamateriais. Tal estudo será baseado num trabalho desenvolvido por Fu, Zhang e First (2005). De modo semelhante a ele, vamos considerar uma onda se propagando de um meio convencional (com índice

de refração positivo) para um meio metamaterial conforme ilustra a Figura 3.13.

De acordo com os autores, só existe ângulo de Brewster para ondas TM quando a onda refratada é perpendicular a onda refletida, implicando que  $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ . Combinando este critério com a lei de Snell-Descartes e tomando  $\theta_1 = \theta_B$ , obtemos a formulação convencional para o ângulo de Brewster.

$$\begin{aligned}
 n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2, \\
 n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin(90^\circ - \theta_B), \\
 n_1 \sin \theta_1 &= n_2 (\sin 90^\circ \cos \theta_B - \sin \theta_B \cos 90^\circ), \\
 n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \cos \theta_B, \\
 \operatorname{tg} \theta_B &= \frac{n_2}{n_1}, \\
 \theta_B &= \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right). \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Inicialmente vamos investigar o comportamento das ondas TE. Então consideremos uma onda plana harmônica viajando do vácuo para um metamaterial, como ilustra a Figura 3.12.

O campo elétrico é caracterizado por

$$E_{\text{incidente}} = E_{i0} e^{i(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow E_i = E_{i0} [0, 1, 0] e^{i(k_x x + k_{1z} z - \omega t)} \tag{3.57}$$

$$E_{\text{transmitida}} = E_{t0} e^{i(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow E_t = E_{t0} [0, 1, 0] e^{i(k_x x + k_{2z} z - \omega t)} \tag{3.58}$$

$$E_{\text{refletida}} = E_{r0} e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow E_{r0} = [0, 1, 0] e^{i(k_x x + k_{1z} z - \omega t)} \tag{3.59}$$

Como já sabemos, a frequência da onda não se altera na reflexão e na refração, conseqüentemente os vetores de onda incidente e refletido são iguais em módulo. Assim, pela lei da reflexão, temos

$$\theta_r = \theta_1. \tag{3.60}$$

E pela lei da refração

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, \tag{3.61}$$

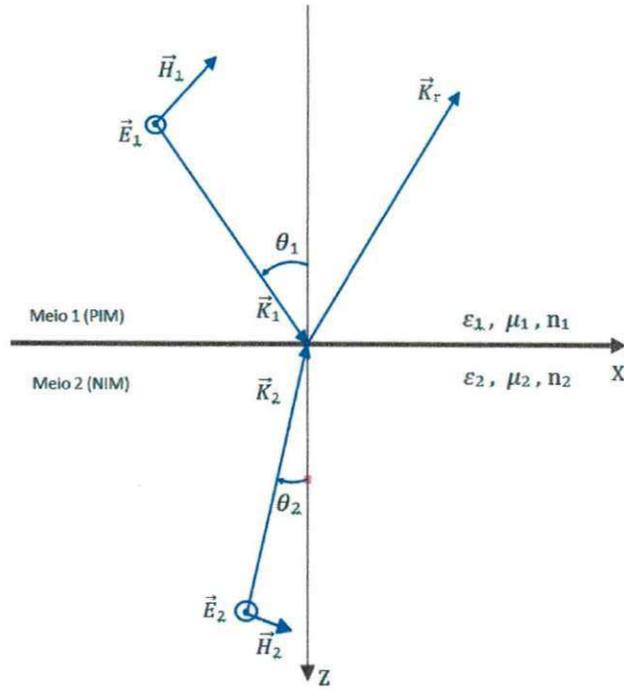


Figura 3.13: Representação da reflexão e refração de uma onda TE na interface entre o vácuo e um meio metamaterial. O vetor onda refratada oposto ao sentido do fluxo de energia. (O sentido positivo para todos ângulos é anti-horário). Positive-index materials(PIM) e negative-index materials(NIM).

em que  $k_1 = \left(\frac{\omega}{c}\right) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$  e  $k_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ .

Se  $\vec{E}_0$  é perpendicular ao plano de incidência, então pela condição de continuidade das componentes tangencial e normal dos campos e pela condição geral de contorno  $z = 0$ , temos

$$(\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{t0} + \vec{E}_{r0}) \times \hat{n} = 0, \quad (3.62)$$

que eleva a seguinte relação

$$\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{t0} + \vec{E}_{r0} = 0. \quad (3.63)$$

Para o campo  $\vec{B}$ :

$$(\vec{B}_{i0} + \vec{B}_{t0} + \vec{B}_{r0}) \cdot \hat{n} = 0. \quad (3.64)$$

Para o campo  $\vec{H}$ :

$$(\vec{H}_{i0} + \vec{H}_{t0} + \vec{H}_{r0}) \times \hat{n} = 0. \quad (3.65)$$

E para o campo  $\vec{D}$ :

$$(\vec{D}_{i0} + \vec{D}_{t0} + \vec{D}_{r0}) \cdot \hat{n} = 0. \quad (3.66)$$

Lembrando que  $\vec{K} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}$  e  $K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$  e devido a condição de contorno  $H_{i0(t)} = H_{t0(t)}$ , a Eq.(3.64) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{(\vec{K}_1 \times \vec{E}_{i0})}{K_1} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{(\vec{K}_2 \times \vec{E}_{t0})}{K_2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{(\vec{K}_r \times \vec{E}_{r0})}{K_r} \right) \times \hat{n} = 0, \quad (3.67)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{(\vec{K}_1 \times \vec{E}_{i0})}{K_1} \times \hat{n} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{(\vec{K}_2 \times \vec{E}_{t0})}{K_2} \times \hat{n} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{(\vec{K}_r \times \vec{E}_{r0})}{K_r} \times \hat{n} = 0, \quad (3.68)$$

mas

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{(\vec{K}_1 \times \vec{E}_{i0})}{K_1} \times \hat{n} &= -\frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \hat{n} \times (\vec{K}_1 \times \vec{E}_{i0}), \\ &= -\frac{1}{K_1} [\vec{K}_1 (\hat{n} \cdot \vec{E}_{i0}) - \vec{E}_{i0} (\hat{n} \cdot \vec{K}_1)], \\ &= \frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{i0} (\hat{n} \cdot \vec{K}_1), \\ &= \frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{i0}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

e que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{(\vec{K}_2 \times \vec{E}_{t0})}{K_2} \times \hat{n} &= -\frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \hat{n} \times (\vec{K}_2 \times \vec{E}_{t0}), \\
&= \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \vec{E}_{t0} (\hat{n} \cdot \vec{K}_2), \\
&= \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \vec{E}_{t0},
\end{aligned} \tag{3.70}$$

e também que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{(\vec{K}_r \times \vec{E}_{r0})}{K_r} \times \hat{n} &= -\frac{1}{K_r} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \hat{n} \times (\vec{K}_r \times \vec{E}_{r0}), \\
&= \frac{1}{K_r} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{r0} (\hat{n} \cdot \vec{K}_r), \\
&= -\frac{K_{1z}}{K_r} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{r0}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Logo, temos que

$$\frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{i0} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \vec{E}_{t0} - \frac{K_{1z}}{K_r} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{r0} = 0. \tag{3.72}$$

Em módulo, temos

$$(E_{i0} - E_{r0}) \frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{t0} = 0 \tag{3.73}$$

Agora, temos um sistema de duas equações (3.62) e (3.72), que fornece

$$\begin{cases} E_{t0} = -(E_{i0} + E_{r0}) & (i) \\ (E_{i0} - E_{r0}) \frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{t0} = 0 & (ii) \end{cases}$$

Substituindo a Eq. (i) na Eq. (ii), obtemos

$$(E_{i0} - E_{r0}) \frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} [-(E_{i0} + E_{r0})] = 0, \quad (3.74)$$

$$\left(1 - \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) \frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \left(1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) = 0. \quad (3.75)$$

A razão entre a amplitude da onda refletida e a onda incidente  $\frac{E_{r0}}{E_{i0}}$  é chamada de coeficiente de reflexão e denotaremos por  $r_s$  para o caso de ondas TE. Assim, a Eq. (3.74) pode ser reescrita da seguinte forma

$$-r_s \left( \frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \right) = -\frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}, \quad (3.76)$$

$$r_s = \frac{\frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\frac{K_{1z}}{K_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \frac{K_{2z}}{K_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}. \quad (3.77)$$

Como pode ser verificado através da Figura 3.13, vemos que

$$K_{1z} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_1, \quad (3.78)$$

e

$$K_{2z} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cos \theta_2. \quad (3.79)$$

Então a Eq. (3.76) fica da seguinte forma

$$r_s = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_2}. \quad (3.80)$$

Agora vamos analisar essa propagação para o caso de uma onda TM. Partiremos da condição de continuidade do campo elétrico expressa pela Eq. (3.62),

$$\begin{aligned}
(E_{i0} \times \hat{n} + E_{t0} \times \hat{n} + E_{r0} \times \hat{n}) &= 0, \\
E_{i0} \sin(E_{i0}, \hat{n}) + E_{t0} \sin(E_{t0}, \hat{n}) + E_{r0} \sin(E_{r0}, \hat{n}) &= 0, \\
E_{i0} \sin\theta_1 + E_{t0} \cos\theta_2 - E_{r0} \cos\theta_r &= 0.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Como  $\theta_1 = \theta_r$ , temos que

$$(E_{i0} - E_{r0}) \cos\theta_1 + E_{t0} \cos\theta_2 = 0. \tag{3.82}$$

A partir da Eqs. (3.77) e (3.78) encontramos que

$$\cos\theta_1 = \left(\frac{c}{\omega}\right) \frac{K_{1z}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \tag{3.83}$$

e

$$\cos\theta_2 = \left(\frac{c}{\omega}\right) \frac{K_{2z}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}. \tag{3.84}$$

Logo, a Eq. (3.81) fica da forma

$$(E_{i0} - E_{r0}) \frac{K_{1z}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} + \frac{K_{2z}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} E_{t0} = 0 \tag{3.85}$$

Da condição de continuidade (3.65) e sabendo que  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , encontramos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_1 \vec{D}_{i0} + \varepsilon_1 \vec{D}_{r0} + \varepsilon_2 \vec{D}_{t0}) \cdot \hat{n} &= 0 [\varepsilon_1 (\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0}) + \varepsilon_2 \vec{E}_{t0}] \cdot \hat{n} = 0 \\
\varepsilon_1 (E_{i0} + E_{r0}) \sin\theta_1 + \varepsilon_2 E_{t0} \sin\theta_2 &= 0 \\
\varepsilon_1 (E_{i0} + E_{r0}) \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} + \varepsilon_2 E_{t0} &= 0
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Da lei de Snell-Descartes temos que

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \quad (3.87)$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (2.90) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(E_{i0} + E_{r0})\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} + \varepsilon_2 E_{t0} &= 0, \\ E_{t0} &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(E_{i0} + E_{r0})\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Substituindo a Eq. (3.87) na (3.84) encontramos

$$\begin{aligned} (E_{i0} - E_{r0})\frac{K_{1z}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} - \frac{K_{2z}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(E_{i0} + E_{r0})\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} &= 0, \\ \left[ (1 - r_p)K_{1z} - K_{2z}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(1 + r_p) \right] \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} &= 0, \\ (1 - r_p)K_{1z} - K_{2z}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(1 + r_p) &= 0, \\ - \left( K_{1z} + K_{2z}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) r_p &= -K_{1z} + K_{2z}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \\ r_p &= \frac{K_{1z} - K_{2z}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}{K_{1z} + K_{2z}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}, \\ r_p &= \frac{\frac{K_{1z}}{\varepsilon_1} - \frac{K_{2z}}{\varepsilon_2}}{\frac{K_{1z}}{\varepsilon_1} + \frac{K_{2z}}{\varepsilon_2}}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

na qual  $r_p = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}$  é o coeficiente de reflexão para a onda TM.

Usando novamente as Eqs. (3.77) e (3.78), a Eq. (3.88) se torna

$$r_p = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_2}. \quad (3.90)$$

Como o meio 2 apresenta um índice de refração negativo, de acordo com a lei de Snell-Descartes a onda é refratada para o mesmo lado da onda incidente e semelhante a uma reflexão, tomando como referência a normal.

Com isso,  $\theta_2$  e  $k_{2z}$  tornam-se negativos, mas  $\cos\theta_2$  continua positivo, pois é uma função par. Estes resultados são facilmente verificados ao analisarmos geometricamente a Figura 3.13.

De maneira geral, devido à razão entre a permissividade e a permeabilidade ser positiva, os coeficientes de reflexão são reais e dependem apenas da magnitude de  $\varepsilon$  e  $\mu$ . Mas, se  $|n_1/n_2| > 1$  temos que

$$\left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}|}{|\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}|} > 1 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} > \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \Rightarrow \varepsilon_1 \mu_1 > \varepsilon_2 \mu_2, \quad (3.91)$$

com  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1, \mu_2$  reais. Considerando  $\theta_1$  como sendo o ângulo crítico e  $\theta_2 = 90^\circ$ , a lei de Snell-Descartes nos fornece,

$$\begin{aligned} |n_1| \sin\theta_c &= |n_2| \sin 90^\circ, \\ \sin\theta_c &= \frac{|n_2|}{|n_1|}, \\ \theta_c &= \sin^{-1} \frac{|n_2|}{|n_1|}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Neste caso ocorrerá reflexão interna total para ângulos de incidência igual ou maior que o ângulo crítico, para qualquer tipo de polarização.

Ao penetrar no meio 2, a onda decai de forma evanescente na direção positiva do eixo e isto nos leva a uma restrição para os valores possíveis dos vetores de onda refratada.

Visto que  $K = n \frac{\omega}{c}$  e em conformidade com a Figura 3.7, temos que

$$K_{2z} = n_2 \frac{\omega}{c} \cos\theta_2. \quad (3.93)$$

Da lei de Snell-Descartes, encontramos que

$$\cos^2\theta_2 = 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_1. \quad (3.94)$$

O ângulo de Brewster corresponde ao coeficiente de reflexão (3.79) e (3.89) igual a zero. Assim, para uma onda TE temos a seguinte formulação para o ângulo de Brewster:

$$r_s = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2} = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2 = 0,$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \cos^2\theta_1 = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \cos^2\theta_2. \quad (3.95)$$

Substituindo na equação acima o resultado obtido através da lei de Snell-Descartes (3.93) e lembrando novamente que  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , encontramos

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \cos^2\theta_1 = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \sin^2\theta_1 \right),$$

$$\varepsilon_1\mu_2(1 - \sin^2\theta_1) = \varepsilon_2\mu_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \sin^2\theta_1 \right),$$

$$\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_1\mu_2 \sin^2\theta_1 = \varepsilon_2\mu_1 - \frac{\varepsilon_2\mu_1\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \sin^2\theta_1,$$

$$\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1 = \left( \varepsilon_1\mu_2 - \frac{\varepsilon_2\mu_1\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \right) \sin^2\theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2 - \frac{\varepsilon_2\mu_1\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}} = \sin^2\theta_1. \quad (3.96)$$

Dividindo o divisor e o dividendo do lado esquerdo da equação acima por  $\varepsilon_1\mu_1$ , obtemos

$$\frac{1 - \frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}{1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2\varepsilon_2\mu_2}} = \sin^2\theta_1,$$

$$\theta_B = \sin^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}{1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2\varepsilon_2\mu_2}}} \right],$$

$$\theta_B = \sin^{-1} \left[ \sqrt{\frac{(1 - Y)}{1 - XY}} \right]. \quad (3.97)$$

De modo que  $X = \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}$  e  $Y = \frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}$ .

Novamente igualando o coeficiente de reflexão a zero (sendo que desta vez é o coeficiente de reflexão para uma TM) Eq. (3.89), encontramos o ângulo de Brewster para uma onda TM:

$$r_p = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_2} = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_2 = 0,$$

$$\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \cos^2\theta_1 = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \cos^2\theta_2,$$

$$\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} (1 - \sin^2\theta_1) = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \sin^2\theta_1 \right),$$

$$\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_2\mu_1 \sin^2\theta_1 = \varepsilon_1\mu_2 - \frac{\varepsilon_1\mu_2\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \sin^2\theta_1,$$

(3.98)

$$\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2 = \left( \varepsilon_2\mu_1 - \frac{\varepsilon_1\mu_2\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \right) \sin^2\theta_1,$$

$$\sin^2\theta_1 = \frac{\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1 - \frac{\varepsilon_1\mu_2\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}}. \quad (3.99)$$

Dividindo o lado direito por  $\varepsilon_1\mu_2$ , obtemos

$$\sin^2\theta_1 = \frac{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2} - 1}{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2} - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}},$$

$$\theta_B = \sin^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2} - 1}{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2} - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}}} \right],$$

$$\theta_B = \sin^{-1}[\sqrt{(Y-1)/(Y-X)}]. \quad (3.100)$$

Novamente com  $X = \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}$  e  $Y = \frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}$ .

As relações dadas pelas Eqs. (3.97) e (3.99) foram apresentadas por Fu, Zhang e First (2005), elas determinam o ângulo de Brewster para ondas TE e TM respectivamente para materiais com diferentes parâmetros constitutivos  $(\varepsilon, \mu)$  exceto para o caso em que  $X = 1$ .

No caso em  $X = 1$ , temos que

$$\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (3.101)$$

Como o índice de refração é definido em termo dos parâmetros constitutivos,  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , ocorre que  $|n_1| = |n_2|$ . O resultado é dado em módulo devido ao fato de  $\varepsilon$  e  $\mu$  assumirem valores positivos e negativos. Combinando este resultado com a lei de Snell-Descartes encontramos que  $|\theta_1| = |\theta_2|$  e neste caso utilizamos o valor em módulo para cumprirmos com a generalidade dos fenômeno, visto que os ângulos de incidência e de refração são iguais tanto para o caso de uma incidência numa interface PIM-PIM quanto para uma incidência numa interface PIM-NIM, mas que no segundo caso o ângulo de refração é medido no sentido contrário ao do primeiro caso (Ver Figura

3.13 ).

Também temos que a reflectividade é definida da forma  $\rho_s = |r_s|^2$  e  $\rho_p = |r_p|^2$ , para ondas TE e TM respectivamente.

A partir da Eq.(3.79), que expressa o coeficiente de reflexão para uma onda TE, obtemos

$$r_s = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2},$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\mu_2}} \cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\mu_2}} \cos\theta_2}. \quad (3.102)$$

Combinando com a Eq.(3.99), obtemos

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}} \cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}} \cos\theta_2},$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2} \cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2^2} \cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2} \cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2^2} \cos\theta_2},$$

$$r_s = \frac{|\varepsilon_1^2| \cos\theta_1 - |\varepsilon_2^2| \cos\theta_2}{|\varepsilon_1^2| \cos\theta_1 + |\varepsilon_2^2| \cos\theta_2}. \quad (3.103)$$

Como  $|\theta_1| = |\theta_2|$ , a Eq.(3.101) pode ser escrita da seguinte forma

$$r_s = \frac{|\varepsilon_1^2| - |\varepsilon_2^2|}{|\varepsilon_1^2| + |\varepsilon_2^2|}. \quad (3.104)$$

Logo, a reflectividade para uma onda TE é dada por

$$\rho_s = \left| \frac{|\varepsilon_1^2| - |\varepsilon_2^2|}{|\varepsilon_1^2| + |\varepsilon_2^2|} \right|^2. \quad (3.105)$$

Procedendo de maneira semelhante, encontramos uma expressão para a reflectividade de uma onda TM da forma

$$\rho_p = \left| \frac{|\mu_1^2| - |\mu_2^2|}{|\mu_1^2| + |\mu_2^2|} \right|^2. \quad (3.106)$$

Assim, vemos que para este caso a reflectividade não depende do ângulo de incidência.

Para o caso em que  $Y = 1$  temos que

$$\varepsilon_2 \mu_1 = \varepsilon_1 \mu_2 \quad (3.107)$$

A partir da Eq.(3.79) que expressa o coeficiente de reflexão para uma onda TE, temos

$$r_s = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\theta_2},$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\mu_1 \varepsilon_1}} \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \varepsilon_1}} \cos\theta_2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\mu_1 \varepsilon_2}} \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\mu_2 \varepsilon_1}} \cos\theta_2} \quad (3.108)$$

$$(3.109)$$

Combinando com a Eq.(3.105), obtemos

$$r_s = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}. \quad (3.110)$$

Logo, a refletividade para uma onda TE é dada por

$$\rho_s = \left| \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} \right|^2. \quad (3.111)$$

Operando de maneira análoga, encontramos a expressão para a reflectividade de uma onda TM idêntica a da reflectividade de uma onda TE, mostrando assim que a reflectividade não depende da polarização. A análise dos argumentos das funções das Eqs. (3.96) e (3.98) que descrevem os ângulos de Brewster evidenciam que alguns valores para  $X$  e  $Y$  são proibidos. Para as ondas TE,  $X$  e  $Y$  podem assumir todos

os valores desde que  $XY \neq 1$  e para as ondas TM, podem assumir quaisquer valores exceto para  $X = Y$ .

Com base nas discussões acima, construímos um mapa de regime de diferentes parâmetros materiais para expressar todas as possibilidades de valores para o ângulo de Brewster como ilustra a Figura 3.14, que foi adaptado de Fu, Zhang e First (2005).

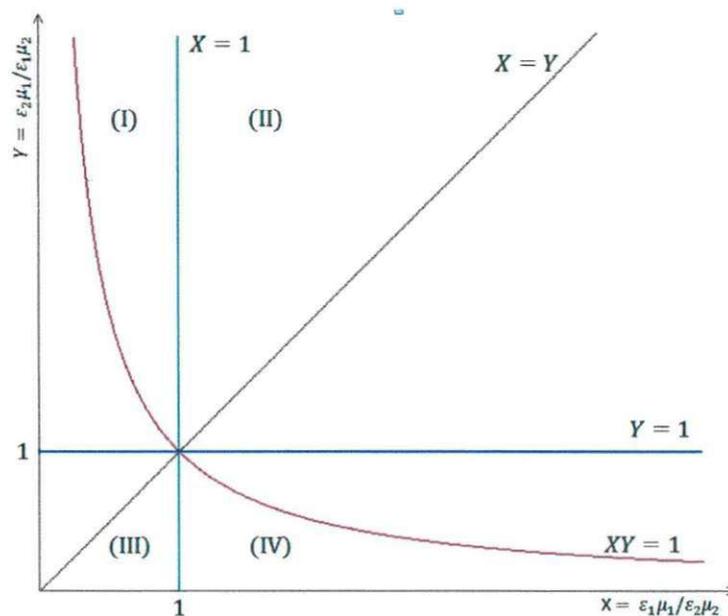


Figura 3.14: Mapa de regime baseado nos parâmetros  $X$  e  $Y$ . O ângulo de Brewster existe para ondas TM nas regiões (I) e (IV) e para onda TE nas regiões (II) e (III).

Um ângulo de Brewster existente para uma onda TE pode ser encontrado na regiões (I) e (IV) e para um a onda TM nas regiões (II) e (III). A linha  $X = 1$  corresponde ao caso em que a reflectividade não depende do ângulo de incidência. A linha  $Y = 1$  corresponde ao caso em que a reflectividade não depende da polarização e é zero para uma incidência normal. No ponto  $X = Y = 1$  temos que  $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \mu_1\mu_2$  e conseqüentemente a reflectividade é zero para ambas as polarizações independentemente do angulo de incidência. As curvas  $X = Y$  e  $XY = 1$  correspondem ao caso em que a onda refratada é perpendicular a onda refletida numa interface PIM-PIM ( $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ ) e numa interface PIM-NIM ( $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$ ) ou perpendicular a onda incidente para interfaces PIM-NIM e NIM-PIN. Em síntese, concluímos que o ângulo de Brewster pode ocorrer tanto para ondas TE como para ondas TM com a condição em que  $\varepsilon_1 = \pm\varepsilon_2$  ou  $\mu_1 = \pm\mu_2$  e a onda refratada é perpendicular a onda refletida ou aonda incidente. Estes resultados são úteis para uma compreenssão mais abrangente dos fenômenos eletromagnéticos envolvendo o ângulo de Brewster, tornando possível advento de tecnologias avançadas utilizando metamateriais.

# Capítulo 4

## Considerações finais

O estudo das propriedades óticas e eletromagnéticas dos metamateriais é um campo de pesquisa que está em grande ascensão atualmente. Isto se deve ao fato de que estas materias são uma grande promessa para a construção de tecnologias inovadoras, como o manto da invisibilidade, e aliado com a fotônica, a construção de circuitos fotônicos que visam substituir a eletrônica com maior eficiência. Aliado a isso, também há o interesse dos cientistas no conhecimento teórico e técnico sobre a nova física relacionada a propagação de ondas eletromagnéticas na matéria.

Diante deste cenário, fornecemos informações para uma melhor compreensão da dinâmica da interação eletromagnética em metamateriais que possuem simultaneamente  $\varepsilon$  e  $\mu$  negativos. Inicialmente, no Capítulo 1, fizemos uma descrição a respeito da etimologia da palavra metamaterial seguindo da descrição dos vários tipos de metamateriais e de seus comportamentos físicos. Ainda neste capítulo descrevemos, em síntese, um pouco da história que envolve o surgimento desta arrojada área de pesquisa, relatando seu progresso ao longo do tempo até os dias atuais. Finalizamos com um breve relato sobre as aplicações relacionadas aos metamateriais, que mais se destacam em pesquisas, mostrando assim, um dos motivos pelos quais este campo científico tem se mostrado tão atraente e esta em constante desenvolvido. No Capítulo 3, analisamos o comportamento de alguns fenômenos ópticos e eletromagnéticos, já conhecidos na física a muitas décadas, em meios exibem índice de refração negativo. Em nossa descrição o índice de refração é definido pelos parâmetros efetivos do meio, a permissividade elétrica  $\varepsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$  e é a característica mais importante do material ao analisarmos a propagação de uma onda eletromagnética entre dois meios com índices de refração distintos.

Nosso estudo iniciou-se com a lei de Snell-Descartes, seguido da reflexão interna total e do ângulo de Brewster. Este estudo mostrou, concordando com os resultados obtidos primordialmente por Victor Veselago, que ocorre uma mudança bastante significativa, no comportamento de um feixe de luz ao atravessar uma interface de separação entre um meio convencional, em que  $\varepsilon$  e  $\mu$  são positivos e um meio metamaterial indefinido, apresentando  $\varepsilon$  e  $\mu$  simultaneamente negativos. Neste caso, acontece que uma refração contrária, devido o raio refratado se desviar mantendo-se no mesmo lado da normal a superfície, do raio incidente. A reflexão interna total, ela se mostra anômala, ao apresentar um comportamento peculiar e incomum, ao ocorrer em meio *Anti-cutoff*, o qual é caracterizado por apresentar os parâmetros físicos  $\varepsilon_y\mu_x$  e  $\mu_x/\mu_z$  simultaneamente negativo. nesta circunstância, o ângulo de incidência é menor que o ângulo crítico. em um meio *never cutoff*, ou seja, em que  $\varepsilon_y\mu_x > 0$  e  $\mu_x/\mu_z < 0$ , ocorre propagação de ondas eletromagnéticas para o segundo meio. Para o caso de um meio *always cutoff* com  $\varepsilon_y\mu_x < 0$  e  $\mu_x/\mu_z > 0$ , a reflexão interna total pode ocorrer para qualquer ângulo de incidência. Finalizamos este capítulo determinando as várias possibilidades para existência do ângulo de Brewster nos metamateriais, as quais mostraram que o ângulo de Brewster pode ocorrer tanto para ondas TE como para ondas TM na condição em que  $\varepsilon_1 = \pm\varepsilon_2$  ou  $\mu_1 = \pm\mu_2$  e a onda refratada é perpendicular a onda refletida ou a onda incidente.

Todas essas informações podem ser usadas como embasamento e motivação para o desenvolvimento futuro de trabalhos voltados para uma análise mais aprofundada de algumas dessas aplicações ou mesmo de algumas dessas incomuns propriedades. Vale ressaltar também que podem ser apresentadas durante os cursos de graduação em física, que ainda tem pouco conhecimento sobre essa nova física. Este capítulo encerra nossa discussões a respeito da propagação de ondas eletromagnéticas em meios com índice de refração negativo.

# Bibliografia

- AQUINO, M. do Bonfim Lins de; FERNANDES, H. C. C. Antenas de microfita com metamateriais.
- BEDRAN, M.; LESCHE, B. A origem física do Ângulo de Brewster. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 19, n. 3, 1997.
- BERRIER, A. et al. Negative refraction at infrared wavelengths in a two-dimensional photonic crystal. *Physical review letters*, v. 93, n. 7, p. 073902, 2004.
- BORN, M.; WOLF, E. *Principles of optics: Eletromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 7. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- BURGOS, S. P. et al. A single-layer wide-angle negative-index metamaterial at visible frequencies. *Nature Materials*, v. 9, n. 5, p. 407–412, 2010.
- CAI, W.; SHALAEV, V. *Optical Metamaterials Fundamentals and Applications*. [S.l.]: Springer, 2010.
- DANNER, A. Photorealistic ray tracing aids understanding of metamaterials. *SPIE Newsroom, DOI*, v. 10, p. 1525, 2009.
- DOLLING, G. et al. Photorealistic images of objects in effective negative-index materials. *Optics express*, v. 14, n. 5, p. 1842–1849, 2006.
- EBBESSEN, T. W. et al. Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. *Nature*, v. 391, n. 6668, p. 667–669, 1998.
- FU, C.; ZHANG, Z. M.; FIRST, P. N. Brewster angle with a negative-index material. *Applied optics*, v. 44, n. 18, p. 3716–3724, 2005.
- GONÇALVES, A. M. das N. *Ondas Eletromagnéticas em Meios Metamateriais: Guias e Lentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Técnica de Lisboa, 2011.
- IMHOF, C.; ZENGERLE, R. Pairs of metallic crosses as a left-handed metamaterial with improved polarization properties. *Optics express*, v. 14, n. 18, p. 8257–8262, 2006.
- JIANG, W. X. et al. An ultrathin but nearly perfect direct current electric cloak. *Applied Physics Letters*, v. 102, n. 1, p. 014102, 2013.
- LUO, H. et al. Wave propagation in the anisotropic metamaterial with single-sheeted hyperboloid dispersion relation. *Applied Physics A*, v. 87, n. 2, p. 245–249, 2007.
- PENDRY, J. et al. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 11, p. 2075–2084, 1999.

- PENDRY, J. B. Extremely low frequency plasmons in metallic microstructures. *Physical review letters*, v. 76, n. 25, p. 4773, 1996.
- PENDRY, J. B. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 18, p. 3966, 2000.
- PENDRY, J. B. new electromagnetic materials emphasise the negative. *physics world*, 2001.
- PENDRY, J. B. Negative refraction. *Contemporary Physics*, v. 45, n. 3, p. 191 – 202, 2004.
- PENDRY, J. B. Metamaterials in the sunshine. *Nature Materials*, v. 5, n. 8, p. 599–600, 2006.
- PENDRY, J. B. et al. Low frequency plasmons in thin-wire structures. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 10, n. 22, p. 4785, 1998.
- PENDRY, J. B.; SMITH, D. R. Reversing light: Negative refraction. *physics today*, 2003.
- PENDRY, J. B.; SMITH, D. R. Reversing light with negative refraction. *Physics Today*, v. 57, p. 37–43, 2004.
- PENDRY, J. B.; SMITH, D. R. The quest for the superlens. *Scientific American*, v. 295, n. 1, p. 60–67, 2006.
- SANTOS, W. da S. *Refração, as velocidades da luz e metamateriais*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2011.
- SILVA, R. E. da. *Lentes Planas de Cristais Naturais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Mossoró, 2013.
- SMITH, D. R. et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 18, p. 4184, 2000.
- SMITH, D. R. et al. Left-handed metamaterials. p. 351–371, 2001.
- SMITH, D. R.; SCHURIG, D. Electromagnetic wave propagation in media with indefinite permittivity and permeability tensors. *physical review letters*, v. 90, n. 7, p. 077405, 2003.
- URZHUMOV, Y. A.; SMITH, D. R. Fluid flow control with transformation media. *Physical review letters*, v. 107, n. 7, p. 074501, 2011.
- VALENTINE, J. et al. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, v. 455, n. 7211, p. 376–379, 2008.
- VESELAGO, V. et al. Negative refractive index materials. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, v. 3, n. 2, p. 189–218, 2006.
- WILHELM, N. S. and Manfred; WEGENER, M. Experiments on elastic cloaking in thin plates. *Physical review letters*, v. 108, n. 1, p. 014301, 2012.
- WITHAYACHUMNANKUL, W.; ABBOUTT, D. Metamaterials in the terahertz regime. *IEEE Photonics Journal*, v. 1, n. 2, p. 99–118, 2009.
- XIANG, Y.; DAI, X.; WEN, S. Total reflection of electromagnetic waves propagating from an isotropic medium to an indefinite metamaterial. *Opt. Commun.*, v. 274, n. 1, p. 248–253, 2007.

XU, T. et al. All-angle negative refraction and active flat lensing of ultraviolet light. *Nature*, v. 497, n. 7450, p. 470–474, 2013.

YAKOVLEV, V. V. et al. Ultrasensitive non-resonant detection of ultrasound with plasmonic metamaterials. *Advanced Materials*, v. 25, n. 16, p. 2351–2356, 2013.

ZHANG, S. *Acoustic metamaterial design and applications*. Tese (Doutorado) — University of Illinois at Urbana-Champaign, 2010.

ZHANG, X.; LIU, Z. Superlenses to overcome the diffraction limit. *Nature materials*, v. 7, n. 6, p. 435–441, 2008.

ZHU, J. et al. A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging. *Nature physics*, v. 7, n. 1, p. 52–55, 2011.

# Apêndice A

## Ondas Eletromagnéticas na Matéria

### A.1 Índice de Refração

Vamos aqui demonstrar que o índice de refração também pode ser expresso através dos parâmetros efetivos que são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética. Então, consideremos ondas eletromagnéticas se propagando em meios homogêneos, isotrópicos e infinitamente extensos, caracterizados pela permissividade elétrica  $\epsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$  e pela condutividade  $\sigma$ .

Assumindo que estes meios sejam lineares, temos então

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (\text{A.1})$$

Também assumindo que  $\rho = 0$  (ou seja, o meio é neutro), obtemos para as equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{A.5})$$

Observemos que ao desacoplarmos os campos, aplicando o rotacional em ambos os lados na Eq.(A.5), encontramos

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) &= \nabla \times \left( \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \\
\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} &= \nabla \times \left( \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \\
\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} &= \left( \frac{4\pi}{c} \sigma + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \times \vec{E}).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Substituindo as Eqs. (A.2) e (A.4) na Eq. (A.6), obtemos

$$\begin{aligned}
-\nabla^2 \vec{H} &= \left( \frac{4\pi}{c} \sigma + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right), \\
\nabla^2 \vec{H} &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Fazendo o mesmo processo com a Eq. (A.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla \times \left( \frac{-\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right), \\
\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= \left( \frac{-\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) (\nabla \times \vec{H}), \\
-\nabla^2 \vec{E} &= \left( \frac{-\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma \vec{E}}{c} \right), \\
\nabla^2 \vec{E} &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

As Eqs. (A.7) e (A.8) desempenham um papel importante na propagação de ondas ao longo de fios e são chamadas de equações telegráficas. Em particular, quando  $\sigma = 0$  (ou seja, o meio é isolante) as equações telegráficas se reduzem a equações de onda ordinárias do tipo

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{A.9}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \tag{A.10}$$

Sabemos que a equação tridimensional de uma onda qualquer é dada por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (\text{A.11})$$

onde  $v$  é a velocidade de propagação da onda no meio.

Comparando as Eqs. (A.9) e (A.10) com a Eq. (A.11), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} c^2, \\ v^2 &= \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \\ v &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Sabemos que o índice de refração é definido como sendo a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio em que se propaga, ou seja  $n = \frac{c}{v}$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{v}, \\ &= \frac{c}{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}, \\ n &= c \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}, \\ n &= \sqrt{\varepsilon\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

como queríamos demonstrar.

## A.2 Parâmetros Efetivos Dependentes da Frequência

Já sabemos que o índice de refração pode ser expressado pelo pelos parâmentros efetivos dos materiais de modo que

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (\text{A.14})$$

Em média temos  $\mu \approx 1$ , então em uma boa aproximação obtemos que  $n \approx \sqrt{\varepsilon}$ . Esta relação é confirmada na prática para ondas longas e para alguns materiais como, por exemplo,  $O_2, N_2, CO_2$  e  $H_2$ , é válida ainda para a luz visível. Por outro lado, para outros materiais ela apresenta falhas e isto está relacionado ao fato de que para ondas eletromagnéticas de alta frequência as constantes  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  tornam-se dependentes da

frequência.

Portanto, vamos agora assumir que  $\varepsilon = \varepsilon(\omega), \mu = \mu(\omega) \approx 1$  e  $\sigma = \sigma(\omega)$  e utilizar as soluções em forma de ondas planas, que é o caso mais simples de ondas, para os campos elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnético  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  das equações de onda (A.9) e (A.10),

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = H_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (\text{A.16})$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \nabla \times (\vec{H}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}), \\ &= \nabla (e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \times \vec{H}_0, \\ &= i\vec{K} e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \times \vec{H}_0, \\ &= i\vec{K} \times (\vec{H}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}), \\ &= i\vec{K} \times \vec{H}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

De maneira análoga encontramos que

$$\nabla \times \vec{E} = i\vec{K} \times \vec{E} \quad (\text{A.18})$$

As derivadas temporais dos campos nos fornecem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}), \\ &= -i\omega (\vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}), \\ &= -i\omega \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

e

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\omega \vec{H}. \quad (\text{A.20})$$

Substituindo as Eqs. (A.17) e (A.19) na Eq. de Maxwell (A.5), obtemos

$$\begin{aligned}
i\vec{K} \times \vec{H} &= \frac{\varepsilon}{c}(-i\omega\vec{E}) + \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}, \\
\vec{K} \times \vec{H} &= \left(-\frac{\omega}{c}\varepsilon - \frac{4\pi i\sigma}{c}\right)\vec{E}, \\
\vec{K} \times \vec{H} &= -\frac{\omega}{c}\left(\varepsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\right)\vec{E}, \\
\vec{K} \times \vec{H} &= -\frac{\omega}{c}\eta\vec{E}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

em que  $\eta = \varepsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}$  é a permissividade generalizada.

Agora, substituindo as Eqs. (A.18) e (A.20) na Eq. de Maxwell (A.4), encontramos que

$$\begin{aligned}
i\vec{K} \times \vec{E} &= -\frac{\mu}{c}(-i\omega\vec{H}), \\
\vec{K} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Aplicando a solução de ondas planas para o campo elétrico (A.15) na Eq. de Maxwell (A.3), obtemos que

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) &= 0, \\
\vec{\nabla}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \cdot \vec{E}_0 &= i\vec{K} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0, \\
i\vec{K} \cdot \vec{E} &= 0, \\
\vec{K} \cdot \vec{E} &= 0
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Igualmente, podemos obter que

$$\vec{K} \cdot \vec{H} = 0. \tag{A.24}$$

Portanto, em um meio condutor as ondas eletromagnéticas também são transversais assim como no vácuo, e também aqui  $\vec{K}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  formam um sistema dextrógiro nesta ordem. Contudo, as magnitudes dos campos elétricos e magnéticos não são mais iguais, isto é, não temos mais que  $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ , como acontece na propagação dessas ondas no vácuo.

Da equação (A.21), podemos ter ainda que

$$\begin{aligned}
 \vec{K} \times \vec{H} &= -\frac{\omega}{c} \eta \vec{E}, \\
 \vec{K} \times (\vec{K} \times \vec{H}) &= -\frac{\omega}{c} \eta (\vec{K} \times \vec{E}), \\
 \vec{K}(\vec{K} \cdot \vec{H}) - (\vec{K} \cdot \vec{K})\vec{H} &= \frac{\omega}{c} \eta \left( \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} \right), \\
 K^2 \vec{H} &= \frac{\omega}{c} \eta \left( \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} \right), \\
 K^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \eta \mu, \\
 &= \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right), \\
 K^2 &= \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega \varepsilon} \right). \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

A Eq.(A.25) é a relação de dispersão para um meio condutor. Quando  $\sigma = 0$ , isto é, o meio é um isolante, esta equação se reduz a

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{\omega}{c} n. \tag{A.26}$$

A qual é relação de dispersão para um meio dielétrico.

## Apêndice B

### Velocidade de fase e velocidade grupo para meios metamateriais com $\epsilon$ e $\mu$ simultaneamente negativos

Inicialmente, vamos considerar a imagem instantânea de uma onda monocromática harmônica senoidal que se propaga num meio convencional. O comprimento de onda  $\lambda$  é a distância entre dois pontos que possuem a mesma fase igual em qualquer tempo. A velocidade em que a oscilação de fase se propaga é chamada de velocidade de fase e sendo  $T$  o período de oscilação a velocidade de fase é definida da seguinte forma

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{B.1})$$

Este tipo de onda não transporta nenhuma informação. Entretanto, na natureza não lidamos com onda monocromáticas com um número de onda e frequência bem definidos, pois quando por exemplo ondas eletromagnéticas (um pulso de luz) se propaga num meio dispersivo, a onda muda de forma a medida que penetra no meio devido a permissividade ser uma função da frequência  $\epsilon = \epsilon(\omega)$  e o pulso passa a se comportar como uma superposição de ondas harmônicas formando um pacote de onda.

Devido a dispersão, alguma marca da imagem resultante das ondas, como por exemplo, o pico mais alto da onda, não se move na média com a mesma velocidade de fase das várias ondas que compõem o pacote. Assim, passamos a calcular também a velocidade do pacote de ondas, denominada velocidade de grupo, definida como

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (\text{B.2})$$

Já é sabido que,

$$k = n \frac{\omega}{c}. \quad (\text{B.3})$$

Derivando, obtém-se

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \right). \quad (\text{B.4})$$

De acordo com as Eqs. (B1) e (B3), a Eq. (B4) se torna

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_f} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega}. \quad (\text{B.5})$$

Com isso, concluímos que a velocidade de grupo so será igual a velocidade de fase quando o índice de refração não depender da frequência, ou seja, um meio não dispersivo.

A Eq. (B3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu. \quad (\text{B.6})$$

Derivando em relação a frequência , obtem-se

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial \omega} = \frac{\partial[(\omega \varepsilon_0 \varepsilon)(\omega \mu_0 \mu)]}{\partial \omega} = \varepsilon_0 \frac{\partial(\omega \varepsilon)}{\partial \omega} (\omega \mu_0 \mu) + (\omega \varepsilon_0 \varepsilon) \mu_0 \frac{\partial(\omega \mu)}{\partial \omega}. \quad (\text{B.7})$$

Agora, se considerarmos um meio metamaterial com  $\varepsilon$  e  $\mu$  simultaneamente negativos, a partir da Eq. (B.7) concluímos que

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial \omega} < 0. \quad (\text{B.8})$$

Também podemos reescrever a eq.(B.7) da seguinte forma

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial \omega} = 2k \frac{\partial k}{\partial \omega} = 2n \frac{\omega}{c} \frac{\partial k}{\partial \omega} = 2n \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{v_f} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) = 2\omega \frac{1}{v_f} \frac{1}{v_g}. \quad (\text{B.9})$$

Logo, obtemos que

$$2\omega \frac{1}{v_f} \frac{1}{v_g} < 0. \quad (\text{B.10})$$

Portanto, concluímos também que num meio dispesivo com índice de refração negativo a velocidade de grupo e a velocidade de fase têm sentidos opostos.

## Anexo A

The eletrodynamics os substances  
with simultaneously negative values  
de  $\varepsilon$  e  $\mu$ .

THE ELECTRODYNAMICS OF SUBSTANCES WITH SIMULTANEOUSLY NEGATIVE VALUES OF  $\epsilon$  AND  $\mu$

V. G. VESELAGO

P. N. Lebedev Physics Institute, Academy of Sciences, U.S.S.R.

Usp. Fiz. Nauk 92, 517-526 (July, 1964)

1. INTRODUCTION

THE dielectric constant  $\epsilon$  and the magnetic permeability  $\mu$  are the fundamental characteristic quantities which determine the propagation of electromagnetic waves in matter. This is due to the fact that they are the only parameters of the substance that appear in the dispersion equation

$$\left| \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \mu_{lj} - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right| = 0, \tag{1}$$

which gives the connection between the frequency  $\omega$  of a monochromatic wave and its wave vector  $k$ . In the case of an isotropic substance, Eq. (1) takes a simpler form:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2. \tag{2}$$

Here  $n^2$  is the square of the index of refraction of the substance, and is given by

$$n^2 = \epsilon \mu. \tag{3}$$

If we do not take losses into account and regard  $n$ ,  $\epsilon$ , and  $\mu$  as real numbers, it can be seen from (2) and (3) that a simultaneous change of the signs of  $\epsilon$  and  $\mu$  has no effect on these relations. This situation can be interpreted in various ways. First, we may admit that the properties of a substance are actually not affected by a simultaneous change of the signs of  $\epsilon$  and  $\mu$ . Second, it might be that for  $\epsilon$  and  $\mu$  to be simultaneously negative contradicts some fundamental laws of nature, and therefore no substance with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  can exist. Finally, it could be admitted that substances with negative  $\epsilon$  and  $\mu$  have some properties different from those of substances with positive  $\epsilon$  and  $\mu$ . As we shall see in what follows, the third case is the one that is realized. It must be emphasized that there has not so far been any experiment in which a substance with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  could be observed. We can, however, at once give a number of arguments as to where and how one should look for such substances. Since in our opinion the electrodynamics of substances with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  is undoubtedly of interest, independently of our now having such substances available, we shall at first consider the matter purely formally. Thereafter in the second part of this article we shall consider questions connected with the physical realization of substances with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$ .

II. THE PROPAGATION OF WAVES IN A SUBSTANCE WITH  $\epsilon < 0$  AND  $\mu < 0$ . "RIGHT-HANDED" AND "LEFT-HANDED" SUBSTANCES

To ascertain the electromagnetic laws essentially connected with the sign of  $\epsilon$  and  $\mu$ , we must turn to those relations in which  $\epsilon$  and  $\mu$  appear separately, and not in the form of their product, as in (1)-(3). These relations are primarily the Maxwell equations and the constitutive relations

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \tag{4*}$$

For a plane monochromatic wave, in which all quantities are proportional to  $e^{i(\mathbf{kz} - \omega t)}$ , the expressions (4) and (4') reduce to

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{kE}] &= \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \\ [\mathbf{kH}] &= -\frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \tag{4'}$$

It can be seen at once from these equations that if  $\epsilon > 0$  and  $\mu > 0$  then  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , and  $\mathbf{k}$  form a right-handed triplet of vectors, and if  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  they are a left-handed set.<sup>[1]</sup> If we introduce direction cosines for the vectors  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , and  $\mathbf{k}$  and denote them by  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , and  $\gamma_i$ , respectively, then a wave propagated in a given medium will be characterized by the matrix<sup>[2]</sup>

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

The determinant of this matrix is equal to +1 if the vectors  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , and  $\mathbf{k}$  are a right-handed set, and -1 if this set is left-handed. Denoting this determinant by  $p$ , we can say that  $p$  characterizes the "rightness" of the given medium. The medium is "right-handed" if  $p = +1$  and "left-handed" if  $p = -1$ . The elements of the matrix (6) satisfy the relation

$$G_{ik} = p A_{ik}. \tag{7}$$

Here  $A_{ik}$  is the algebraic complement of the element  $G_{ik}$ . Furthermore the elements of  $G$  are ortho-

\*rot = curl.

† $[\mathbf{kE}] = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ .

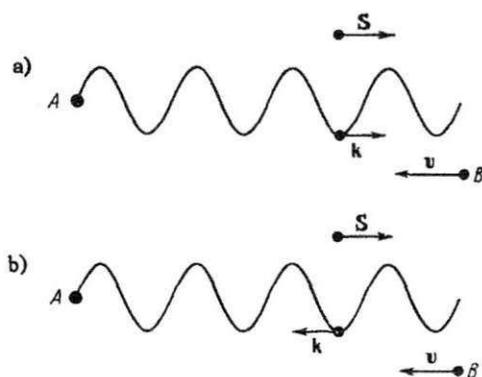


FIG. 1. a) Doppler effect in a right-handed substance; b) Doppler effect in a left-handed substance. The letter A represents the source of the radiation, the letter B the receiver.

normal. The energy flux carried by the wave is determined by the Poynting vector  $S$ , which is given by

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH]. \quad (8)$$

According to (8) the vector  $S$  always forms a right-handed set with the vectors  $E$  and  $H$ . Accordingly, for right-handed substances  $S$  and  $k$  are in the same direction, and for left-handed substances they are in opposite directions.<sup>[3]</sup> Since the vector  $k$  is in the direction of the phase velocity, it is clear that left-handed substances are substances with a so-called negative group velocity, which occurs in particular in anisotropic substances or when there is spatial dispersion.<sup>[4]</sup> In what follows we shall for brevity use the term "left-handed substance," keeping in mind that this term is equivalent to the term "substance with negative group velocity." Let us now consider the consequences of the fact that in left-handed substances the phase velocity is opposite to the energy flux. First, in left-handed substances there will be a reversed Doppler effect.<sup>[1,3]</sup>

Indeed, suppose for example that a detector of radiation which is in a left-handed medium moves relative to a source which emits a frequency  $\omega_0$ . In its motion the detector will pursue points of the wave which correspond to some definite phase, as is shown in Fig. 1. The frequency received by the detector will be smaller than  $\omega_0$ , not larger as it would be in an ordinary (right-handed) medium. Using the quantity  $p$  for the medium in question, we can write the formula for the Doppler shift in the form

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - p \frac{v}{u} \right). \quad (9)$$

Here the velocity  $v$  of the detector is regarded as positive when it is receding from the source. The velocity  $u$  of the energy flux is regarded as always positive.

The Vavilov-Cerenkov effect will also be reversed, just like the Doppler effect.<sup>[1,3]</sup> If a particle

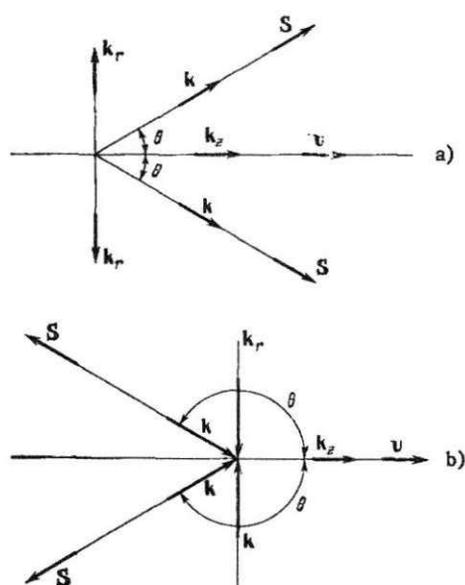


FIG. 2. a) The Vavilov-Cerenkov effect in a right-handed substance; b) The same effect in a left-handed substance.

moves in a medium with speed  $v$  in a straight line (Fig. 2), it will emit according to the law  $e^{i(k_z z + k_r r - \omega t)}$ , and the wave vector of the radiation will be given by  $k = k_z / \cos \theta$  and is in the general direction of the velocity  $v$ . The quantity  $k_r$  will be different in different media, in accordance with the expression

$$k_r = p \left| \sqrt{k^2 - k_z^2} \right|. \quad (10)$$

This choice of the sign for the square root in (10) will assure that the energy moves away from the radiating particle to infinity. It is then clear that for left-handed media the vector  $k_r$  will be directed toward the trajectory of the particle, and the cone of the radiation will be directed backward relative to the motion of the particle. This corresponds to an obtuse angle  $\theta$  between  $v$  and  $S$ . For a medium of either "rightness" this angle can be found from the expression

$$\cos \theta = p \left| \sqrt{\frac{c^2}{v^2 n^2}} \right|. \quad (11)$$

### III. THE REFRACTION OF A RAY AT THE BOUNDARY BETWEEN TWO MEDIA WITH DIFFERENT RIGHTNESSES

In the passage of a ray of light from one medium into another the boundary conditions

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad H_{t1} = H_{t2}, \quad (12)$$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}, \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \quad (13)$$

must be satisfied, independently of whether or not the media have the same rightness. It follows from (12) that the  $x$  and  $y$  components of the fields  $E$  and  $H$  in the refracted ray maintain their directions, inde-

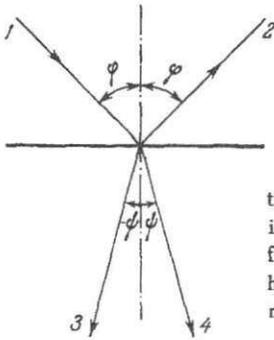


FIG. 3. Passage of a ray through the boundary between two media. 1 - incident ray; 2 - reflected ray; 3 - reflected ray if the second medium is left-handed; 4 - refracted ray if the second medium is right-handed.

pendently of the rightnesses of the two media. As for the  $z$  component, it keeps the same direction only if the two media are of the same rightness. If the rightnesses are different, the  $z$  components change sign. This corresponds to the fact that in passage into a medium of different rightness the vectors  $E$  and  $H$  not only change in magnitude owing to the difference in  $\epsilon$  and  $\mu$  but also undergo a reflection relative to the interface of the two media. The same thing happens to the vector  $k$  also. The simultaneous reflection of all three vectors corresponds precisely to a change of sign of the determinant  $G$  in (6). The path of the refracted ray produced as the result of such reflections is shown in Fig. 3. As we see, when the second medium is left-handed the refracted ray lies on the opposite side of the  $z$  axis from its position in the case of a right-handed second medium.<sup>[5]</sup> It must be noted that the direction of the reflected ray is always the same, independent of the rightnesses of the two media. It can be seen from Fig. 3 that the usual Snell's law

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{1,2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \quad (14)$$

has to be given a more precise form if the rightnesses of media 1 and 2 are different. The correct way to write the formula is now

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{1,2} = \frac{p_2}{p_1} \left| \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \right|. \quad (15)$$

Here  $p_1$  and  $p_2$  are the rightnesses of the first and second media. It is clear from (15) that the index of refraction of two media can be negative if the right-

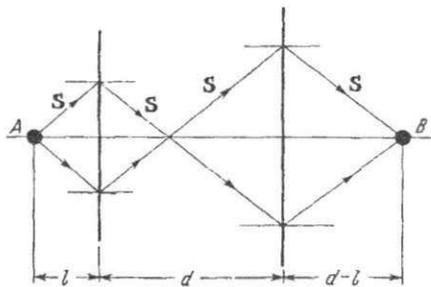


FIG. 4. Passage of rays of light through a plate of thickness  $d$  made of a left-handed substance. A - source of radiation; B - detector of radiation.

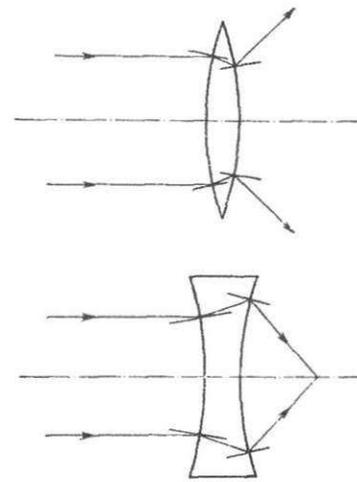


FIG. 5. Paths of rays through lenses made of left-handed substances, situated in vacuum.

nesses of the media are different. In particular, the index of refraction of a left-handed medium relative to vacuum is negative.<sup>[1]</sup>

Fresnel's formulas are commonly used to find the amplitudes of the reflected and refracted light.<sup>[2]</sup> These formulas involve the quantities  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $n$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ . In order not to make mistakes one must always use the absolute values of these quantities in Fresnel's formulas.

An interesting case is that of a ray passing from a medium with  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$  into one with  $\epsilon_2 = -\epsilon_1$ ,  $\mu_2 = -\mu_1$ . In this case the ray undergoes refraction at the interface between the two media, but there is no reflected ray. The use of left-handed substances would in principle allow the design of very unusual refracting systems. An example of such a system is a simple plate of thickness  $d$  made of a left-handed substance with  $n = -1$  and situated in vacuum. It is shown in Fig. 4 that such a plate can focus at a point the radiation from a point source located at a distance  $l < d$  from the plate. This is not a lens in the usual sense of the word, however, since it will not focus at a point a bundle of rays coming from infinity. As for actual lenses, the paths of rays through lenses made of a left-handed substance are shown in Fig. 5. It is seen that the convex and concave lenses have "changed places," since the convex lens has a diverging effect and the concave lens a converging effect.

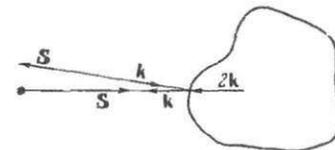
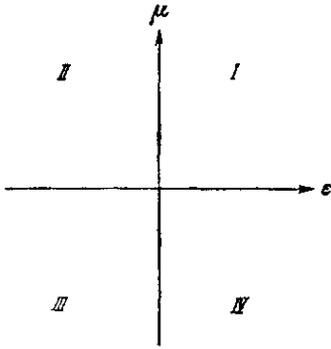


FIG. 6. Reflection of a ray propagated in a medium with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  from an ideally reflecting body. The source of radiation is denoted by a heavy black point.

FIG. 7.  $\epsilon - \mu$  diagram.

A monochromatic wave in a left-handed medium can be regarded as a stream of photons, each having a momentum  $p = \hbar k$ , with the vector  $k$  directed toward the source of radiation, not away from it as is the case in a right-handed medium. Therefore a beam of light propagated in a left-handed medium and incident on a reflecting body imparts to it a momentum  $p = 2N\hbar k$  ( $N$  is the number of incident photons) directed toward the source of the radiation, as shown in Fig. 6. Owing to this the light pressure characteristic for ordinary (right-handed) substances is replaced in left-handed substances by a light tension or attraction.

These are some of the features of the electrodynamics of left-handed substances. Let us now consider the question of their physical realization. For this purpose we first examine what the values of  $\epsilon$  and  $\mu$  are that various substances may have.

#### IV. WHAT SORT OF VALUES OF $\epsilon$ AND $\mu$ ARE IN PRINCIPLE POSSIBLE?

Figure 7 shows a coordinate system in which values of  $\epsilon$  and  $\mu$  are marked off on the axes. We shall try to locate in it all known substances, at first confining ourselves to the case in which  $\epsilon$  and  $\mu$  are isotropic. Then the first quadrant contains the majority of isotropic dielectrics, for which  $\epsilon$  and  $\mu$  are positive. In the second quadrant ( $\epsilon < 0$ ,  $\mu > 0$ ) there will be plasmas, both gaseous plasmas<sup>[8]</sup> and solid-state plasmas.<sup>[7-9]</sup> In a plasma with no magnetic field the value of  $\epsilon$  is given by

$$\epsilon = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (16)$$

where  $\omega_0^2 = 4\pi N e^2 / m$ ,  $N$  being the concentration of the carriers,  $e$  their charge, and  $m$  their mass, and the summation is over all types of carriers. It is not hard to see that at small frequencies  $\epsilon$  is smaller than zero. For  $\epsilon > 0$  and  $\mu > 0$  the value of  $n^2$  given by (3) is negative, which leads to reflection of waves from such a medium. This fact is well confirmed by experiment, for example, in the ionosphere.

The third and fourth quadrants in Fig. 7 are unoccupied. So far there is not a single substance known with  $\mu < 0$ . As we shall see in what follows, this is not accidental.

Let us now go on to anisotropic substances. In this case the quantities  $\epsilon$  and  $\mu$  are tensors, and we cannot make use at once of a diagram like Fig. 7. In some substances, however, we can do this for waves propagated in particular directions. Gyrotropic substances are especially interesting in this respect. For gyrotropic substances the tensors  $\epsilon_{ik}$  and  $\mu_{ik}$  are of the forms

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

A well known example of a gyrotropic substance is a plasma in a magnetic field, which is characterized by a tensor  $\epsilon_{ik}$  of the form (17) and a scalar value of  $\mu$ . If a plane circularly polarized transverse wave of the form  $e^{i(kz - \omega t)}$  is propagated in such a plasma, with  $k \parallel z \parallel H_0$ , then  $n^2$  is given by

$$n^2 = \mu (\epsilon_1 \pm \epsilon_2). \quad (19)$$

The sign  $\pm$  corresponds to the two directions of polarization of the wave. If  $|\epsilon_2| < |\epsilon_1|$  and  $\epsilon_1 > 0$ , two waves can be propagated in the plasma, but if  $|\epsilon_2| > |\epsilon_1| = -\epsilon_1$ , then only one wave is propagated, that for which  $n^2 > 0$ . In these cases the plasma must be placed in the first quadrant of Fig. 7 ( $\mu$  is of the order of 1). As for the second wave in the case  $|\epsilon_2| > |\epsilon_1| = -\epsilon_1$ , it cannot be propagated because for it  $\epsilon < 0$ , which by (19) leads to an imaginary value of  $n$ . In this case the plasma belongs in the second quadrant in Fig. 7.

Another example of gyrotropic substances is various magnetic materials, in which, in contrast to the plasma, it is  $\mu$  and not  $\epsilon$  that is a tensor. For these materials the analog of (19) is

$$n^2 = \epsilon (\mu_1 \pm \mu_2). \quad (20)$$

Here also there can in principle be a situation in which  $|\mu_2| > |\mu_1| = -\mu_1$ , and this case corresponds to the fourth quadrant in Fig. 7.

Quite recently there have begun to be intensive studies of gyrotropic substances in which both  $\epsilon$  and  $\mu$  are tensors.<sup>[10-15]</sup> Examples of such substances are pure ferromagnetic metals and semiconductors. For such substances the index of refraction of a circularly polarized wave travelling along the field is given by

$$n^2 = (\epsilon_1 \pm \epsilon_2) (\mu_1 \pm \mu_2), \quad (21)$$

and it is easy to see that in this case the effective electric and magnetic permeabilities can both be less than zero, while  $n^2$  remains positive and the wave will be propagated.<sup>[3,13,15]</sup> Such substances occupy the third and last quadrant of Fig. 7. Accordingly we see that we must look for substances with  $\epsilon < 0$  and

$\mu < 0$  primarily among gyrotropic media. Furthermore it is obvious that negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  in gyrotropic substances can be realized only for those waves that are propagated along the magnetic field. For other directions of propagation  $\epsilon$  and  $\mu$  can no longer be regarded as scalars. Nevertheless, for a certain range of angles between  $H$  and  $k$  the vectors  $S$  and  $k$  will make an angle close to  $180^\circ$  and will qualitatively satisfy all of the laws which are characteristic for left-handed substances.

In concluding this section we note that simultaneous negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  can be realized only when there is frequency dispersion. In fact, it can be seen from the relation

$$W = \epsilon E^2 + \mu H^2 \quad (22)$$

that when there is no frequency dispersion nor absorption we cannot have  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$ , since in that case the total energy would be negative. When there is frequency dispersion, however, the relation (22) must be replaced by

$$W = \frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial\omega} E^2 + \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} H^2. \quad (23)$$

In order for the energy  $W$  given by (23) to be positive it is required that

$$\frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial\omega} > 0, \quad \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} > 0. \quad (24)$$

These inequalities do not in general mean that  $\epsilon$  and  $\mu$  cannot be simultaneously negative, but for them to hold it is necessary that  $\epsilon$  and  $\mu$  depend on the frequency.

It is appropriate to emphasize here that the conclusion that there is a light attraction in left-handed substances, which was obtained at the end of Sec. III from quantum arguments, can also be obtained in a purely classical way. To do this we must use the classical expression for the momentum of the field<sup>[17]</sup>

$$\mathbf{p} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \mathbf{S} + \frac{\mathbf{k}}{2} \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial\omega} E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\omega} H^2 \right), \quad (25)$$

the relations (23) and (24), and also the connection between the Poynting vector  $\mathbf{S}$  and the group velocity  $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{S} = W \cdot \mathbf{v}_g. \quad (26)$$

Combining the expressions (23)–(26), we get

$$\mathbf{p} = \frac{W}{v_{ph}} = \frac{W}{\omega} \cdot \mathbf{k}. \quad (27)$$

It follows from this that in left-handed substances the field momentum  $\mathbf{p}$  is directed opposite to the Poynting vector  $\mathbf{S}$ .

## V. GYROTROPIC SUBSTANCES POSSESSING PLASMA AND MAGNETIC PROPERTIES

It is characteristic of gyrotropic media of this kind that, first, they contain sufficiently mobile carriers forming an electron-hole plasma, and, second, that there exists a system of interacting spins which

provide a large magnetic susceptibility. This assures the simultaneous propagation of spin and plasma waves, and naturally there is an interaction between them. If this interaction is strong enough, the waves propagated in such a substance are of a mixed, spin-plasma, character. In this case the values of  $\epsilon$  and  $\mu$  are of the following form<sup>[15]</sup>:

$$\epsilon = 1 - \sum \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \Omega)}, \quad \mu = 1 + \frac{\omega_s}{\eta k^2 + \Omega' \pm \omega}, \quad (28)$$

$$n^2 = \epsilon\mu. \quad (29)$$

Here  $\omega$  is the frequency,  $\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m$  is the square of the plasma frequency,  $N$  is the concentration and  $m$  the mass of the carriers; the summation is taken over all types of carriers;  $\Omega = eB/mc$ , and

$$B = H_0 + 4\pi M_s, \quad \omega_s = \frac{g^e}{2m_0 c} \cdot 4\pi M_s, \quad \Omega' = \frac{g^e}{2m_0 c} H_0, \quad \eta = \frac{g^e}{m_0} \frac{A}{M_s},$$

where  $H_0$  is the external field,  $M_s$  is the saturation magnetization,  $A$  is the exchange-interaction constant,  $m_0$  is the mass of the electron, and  $e$  is its charge.

In<sup>[15]</sup> a graphical analysis has been made of Eq. (29), with  $\epsilon$  and  $\mu$  of the form (28); it was shown that for certain relations between the parameters that appear in (28) it is possible to have wave propagation with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  in conducting ferromagnetic substances. As examples of such conducting ferromagnetic substances there are in the first place ferromagnetic metals, for example nickel. There is already a communication<sup>[18]</sup> on the observation of coupled spin-plasma waves in this metal, but it is not clear just what were the values of  $\epsilon$  and  $\mu$  in this case, and in particular whether or not they were negative. As for semiconductors which have magnetic properties, several such compounds have recently been indicated,<sup>[19–21]</sup> in particular  $\text{CuFeS}_2$ ,  $\text{UTe}_2$ ,  $\text{InSb-FeSb}$ , and others. At present the mobility of the carriers in these materials is still very small, and does not allow the observation of weakly damped waves in them. Constant technological progress gives the hope, however, that such materials with good mobility will be produced, and then experiments with substances in which  $\epsilon$  and  $\mu$  are less than zero will surely become practicable. It must be noted that such experiments with gyrotropic substances can confirm only some of the properties of left-handed substances which we have expounded. For example, it will be very difficult to make experiments on the refraction of waves, since for rays propagated in left-handed substances at an angle with the external magnetic field the relation (21) is no longer valid. As has already been stated, it will be approximately correct only for small angles between the field and the vector  $\mathbf{k}$ , and all experiments must be arranged so as not to go beyond such angles. In view of this difficulty, it would be very desirable to have an isotropic left-handed substance. Unfortunately, as has already been said, we do not know of even a single substance which

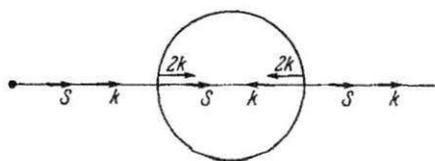


FIG. 8. Passage of a ray through a sphere with  $\epsilon < 0$  and  $\mu < 0$  situated in vacuum. The source of radiation is indicated with a heavy black point.

could be isotropic and have  $\mu < 0$ . This is true because the sources of magnetic field are not charges, but dipoles. If the magnetic field, like the electric field, could arise from charges, a gas of such charges would have a magnetic permeability given, in analogy with (16), by the formula

$$\mu = 1 - \frac{\omega_M^2}{\omega^2}. \quad (30)$$

Here  $\omega_M^2 = 1 - 4\pi N g_1^2 / m_1$ , where  $N_1$  is the concentration of the charges,  $g_1$  is their magnitude, and  $m_1$  their mass. The hypothesis of the existence of such charges was stated by Dirac as early as 1931<sup>[22]</sup>; there have been many papers on the possible properties of this charge (the Dirac monopole), for example a review article,<sup>[23]</sup> and also<sup>[24-26]</sup>. So far, however, attempts to observe it have given no result.<sup>[23-27]</sup> If the monopole were found, then a mixture of ordinary plasma and a gas of monopoles would have a value of  $\mu$  given by (30), and the  $\mu$  of the mixture would be given by

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (31)$$

At sufficiently low frequencies such a mixture would be a left-handed isotropic substance.

Let us imagine<sup>[28]</sup> that such a mixture uniformly fills a sufficiently large spherical region in space, and that outside this region there is vacuum. For simplicity suppose that inside the sphere  $\omega_M = \omega_0$ , and that radiation is incident from outside the sphere at a frequency such that inside the sphere  $\epsilon = \mu = -1$ . Then there will be no refraction of an incident ray at the points where it enters and leaves the sphere. At the same time there will be imparted to the sphere at each of these points a momentum directed toward its center, as is shown in Fig. 8. If we imagine that the sphere is irradiated from all sides, then it will experience an isotropic compression. Accordingly, if Dirac monopoles were uniformly distributed in space together with an ionized gas, under the influence of radiation this mixture would be continuously concentrated in certain local regions. This argument is of course very approximate, and does not take into account many other factors, but it may possibly help to explain the lack of success in the experimental observation of Dirac monopoles.

<sup>2</sup>A. V. Sokolov, *Opticheskie svoïstva metallov* (The Optical Properties of Metals), Moscow, Fizmatgiz, 1961.

<sup>3</sup>V. E. Pafomov, *JETP* 36, 1853 (1959), *Soviet Phys. JETP* 9, 1321 (1959).

<sup>4</sup>V. M. Agranovich and V. L. Ginzburg, *Kristal-looptika c uchetom prostranstvennoï dispersii i teoriya éksitonov* (Spatial Dispersion Effects in Crystal Optics and the Theory of Excitons), Moscow, Nauka, 1965.

<sup>5</sup>L. I. Mandel'stam, *JETP* 15, 475 (1945).

<sup>6</sup>V. L. Ginzburg, *Rasprostranenie élektromagnitnykh voln v plazme* (The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma), Moscow, Fizmatgiz, 1960.

<sup>7</sup>E. A. Kaner and V. G. Skobov, *UFN* 89, 367 (1966), *Soviet Phys. Uspekhi* 9, 480 (1967).

<sup>8</sup>V. G. Veselago, N. V. Glushkov, and A. M. Prokhorov, *Radiotekhnika i élektronika* (1967).

<sup>9</sup>A. G. Chynoweth and S. J. Buchsbaum, *Physics Today*, No. 11, 26 (1965).

<sup>10</sup>E. A. Stern and E. R. Callen, *Phys. Rev.* 131, 512 (1963).

<sup>11</sup>H. N. Spector and T. N. Casselman, *Phys. Rev.* 139, A1594 (1965).

<sup>12</sup>A. Ya. Blank, *JETP* 47, 325 (1964), *Soviet Phys. JETP* 20, 216 (1965).

<sup>13</sup>A. Ya. Blank and M. I. Kaganov, *JETP* 49, 807 (1965), *Soviet Phys. JETP* 22, 561 (1966).

<sup>14</sup>V. G. Bar'yakhtar, E. G. Rudashevskii, M. A. Savchenko, and K. N. Stepanov, *JETP* 51, 250 (1966), *Soviet Phys. JETP* 24, 167 (1957).

<sup>15</sup>V. G. Veselago and E. G. Rudashevskii, *FTT* 8, 2862 (1966), *Soviet Phys. Solid State* 8, 2290 (1967).

<sup>16</sup>M. A. Ginsburg, *DAN SSSR* 95, 753 (1954).

<sup>17</sup>S. M. Rytov, *JETP* 17, 930 (1947).

<sup>18</sup>G. G. Grimes, *Plasma Effects in Solids*, Paris, 1964, p. 87.

<sup>19</sup>T. Teranishi, *J. Phys. Soc. Japan* 17, 5263 (1962).

<sup>20</sup>L. K. Matson, J. W. Moody, and R. C. Himes, *J. Inorg. Nucl. Chem.* 25, 795 (1963).

<sup>21</sup>A. Müller and W. Wilhelm, *J. Phys. Chem. Solids* 26, 2021 (1965).

<sup>22</sup>P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* 133, 60 (1931).

<sup>23</sup>S. Devons, *Sci. Progr.* 51 (204), 601 (1963).

<sup>24</sup>B. M. Bolotovskii and V. S. Voronin, *Izv. vuzov (radiofizika)* 5, 1033 (1962).

<sup>25</sup>A. A. Kolomenskii, *Vestn. MGU (Moscow State Univ.)* 3, No. 6 (1962).

<sup>26</sup>N. N. Okulov, *Geomagnetizm i aéronomiya* 4, 1002 (1964).

<sup>27</sup>V. A. Petukhov and M. N. Yakimenko, *Nuclear Phys.* 49, 87 (1963).

<sup>28</sup>G. V. Veselago, *JETP* 52, 1025 (1967), *Soviet Phys. JETP* 25, (1967).

Translated by W. H. Furry

<sup>1</sup>V. G. Veselago, *FTT* 8, 3571 (1966), *Soviet Phys. Solid State* 8, 2853 (1967).