



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO**

**Luiz Cordeiro de Lima Neto**

**Elementos de Teoria Clássica de Campos e Uma  
Aplicação de Métodos de Computação Simbólica**

*Comunidade  
de Matemática  
Geometria Algébrica  
Geometria  
Módulo de  
Polinômios  
Polinômios  
Cálculo*

*66  
27.8  
L732c*

Cuité  
2010

**Luiz Cordeiro de Lima Neto**

# **Elementos de Teoria Clássica de Campos e Uma Aplicação de Métodos de Computação Simbólica**

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física, Unidade Acadêmica de Educação, Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal da Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Física.**

**Orientador: Prof. Dr. Danyel Judson Bezerra Soares**

**Co-orientador: Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos**

**Examinador: Prof. Dr. Heron Freitas do Nascimento**

**Examinador: Prof. Dr. João Batista da Silva**

**Cuité**

**2010**



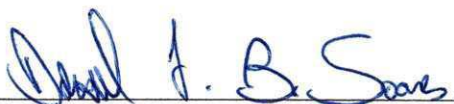
L732e	<p>Lima Neto, Luiz Cordeiro de. Elementos de teoria clássica de campos de uma aplicação de métodos de computação simbólica. / Luiz Cordeiro de Lima Neto. - Curitiba: [s. n.], 2010. 85fl. : il. graf.</p> <p>Orientador Prof. Dr. Danyel Judson Bezerra Soares. Co-orientador Prof. Dr. Luciano Barosi de Lemos. Monografia do Curso de Licenciatura em Física. Não disponível em CD.</p> <p>1. Cosmologia. 2. Teoria de campos. 3. Geometria diferencial. 4. Gravitação. 5. Mecânica clássica. 6. Relatividade especial. 7. Relatividade geral. 8. Computação simbólica. I. Soares, Danyel Judson Bezerra. II. Lemos, Luciano Barosi de. III. Universidade Federal de Campina Grande. IV. Centro de Educação e Saúde. V. Título</p> <p>CDU 524.8</p>
-------	--

# Elementos de Teoria Clássica de Campos e Uma Aplicação de Métodos de Computação Simbólica

Luiz Cordeiro de Lima Neto

APROVADA EM 08 DE JULHO DE 2010.

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Danyel Judson Bezerra Soares  
Orientador



Prof. Dr. Heron Freitas do Nascimento  
Universidade Federal de Campina Grande



Prof. Dr. João Batista da Silva  
Universidade Federal de Campina Grande

*“Não basta ensinar ao homem uma especialidade, porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma especialidade. É necessário que adquira um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto. Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar a seus próximos e à comunidade” (Albert Einstein).*

*Este trabalho dedico a minha maior mestra, minha mãe, **Mércia Cordeiro de Lima**.*

*Como dizia o poeta: “...Fosse eu Rei do Mundo, baixava uma lei: Mãe não morre nunca, mãe ficará sempre junto de seu filho e ele, velho embora, será pequenino feito grão de milho” (Carlos Drummond de Andrade).*

# **AGRADECIMENTOS**

Meus agradecimentos são destinados primeiramente aos meus pais, avós, irmãos e irmãs, tios e tias e a minha namorada que deram todo o apoio necessário para a concretização dessa etapa de minha vida e foram indiscutivelmente o alicerce ao qual me sustentei durante todo o percurso transcorrido, nessa trajetória de batalhas, e como toda batalha com suas derrotas e vitórias, onde com as derrotas busquei forças para me re-erguer e através disto aprendi mais que vencer, aprendi o valor de cada vitória.

Quero agradecer também a todos os que formam o corpo docente de Física desta instituição, pois todos contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação, agradecer ao meu orientador e membros da banca examinadora, além dos demais professores que tive a honra de ter-los como parceiros desta empreitada. Reservando esse espaço para um agradecimento especial ao professor Luciano Barosi, pois sem a sua contribuição esse trabalho não haveria se concretizado. Sem esquecer-me de meus amigos e companheiros de curso junto com os quais formamos uma grande irmandade.

Por fim, posso afirmar que este curso não só contribuiu para a minha formação acadêmica e/ou profissional, mas, contribuiu de forma significativa para a minha formação pessoal. O aprendizado não pode e não se limitará a salas de aulas, livros ou trabalhos acadêmicos, mas a todo o entorno do aprendiz. Como reflexão quero deixar uma frase de Albert Einstein que diz: *“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original”* (essa frase eu ouvi em uma aula de alguma Prática de Ensino).

## **RESUMO**

Esse trabalho apresenta elementos complementares da formação de licenciatura para o trabalho em teoria de campos de partículas elementares e Física de altas energia. Discutimos aspectos de mecânica clássica (newtoniana) na formulação lagrangeana e hamiltoniana tendo como objetivo o entendimento de sua generalização para sistemas com infinitos graus de liberdade, ou seja teorias de campos. Esse trabalho tem como tema principal uma revisão sobre teorias clássicas de campos com especial ênfase para a teoria de relatividade Geral. Essa teoria é uma teoria de gravitação e seu desenvolvimento marca a entrada de métodos avançados de geometria diferencial da Física e tem como elemento fundamental o uso de simetrias. Nesse trabalho procuramos enfatizar os elementos necessários para o entendimento matemático da Relatividade Geral, revisando aspectos de geometria diferencial e mostrando como métodos de computação simbólica podem ser utilizados para a obtenção veloz de resultados fisicamente relevantes. O exemplo físico trabalhado nesse trabalho é a métrica de Friedman-Robertson-Walker, elemento-chave na cosmologia moderna.

**Palavras-chave:** Teoria de Campos, Gravitação, Geometria Diferencial, Teoria da Relatividade, Cosmologia

# ***ABSTRACT***

This work presents supplementary material to the undergraduate studies in Physics with the aim of studying elementary particle field theory and High Energy Physics. We discuss aspects of (newtonian) classical mechanics in lagrangean and hamiltonian formalism as a tool to understand its generalization to systems with infinite degrees of freedom, i.e., field theories. The main subject is a review of classical field theory with a view towards General Relativity. This is a theory of gravitation and paved the way for the entrance of advanced differential geometry techniques into Physics subjects. Its development opened up the use of symmetries as a fundamental tool in Physics. Throughout this work we will emphasize the necessary ingredients to the mathematical understanding of general relativity and we will review aspects of differential geometry showing also symbolic computation methods that can be used for fast reliable computation of physically relevant quantities. Our main example will be the friedmann-robertson-walker metric, a key ingredient in modern cosmology.

**Keywords:** Field Theory, Gravitation, Differential Geometry, Theory of Relativity, Cosmology



# LISTA DE FIGURAS

1	Partícula movendo-se em um hemisfério de raio $r$ com a origem do sistema de coordenadas no centro. . . . .	15
2	Representação de uma função $x^i(\varepsilon, t)$ . A curva inferior representa $\varepsilon\eta(t)$ , a curva central representa $x^i(0, t)$ e a curva superior representa a parte variacional $x^i(\varepsilon, t)$ . Vemos que $x^i(\varepsilon, t) = x^i(0, t)$ nos pontos em vermelho, denotados por $t_1$ e $t_2$ . . . . .	17
3	Pêndulo de comprimento $l$ e de massa $m$ . . . . .	19
4	Esquema de um campo gravitacional curvando-se na presença de matéria. . . .	34
5	Um vetor $V_0$ em um ponto $p$ é transportado paralelamente ao longo das curvas $C$ e $C'$ até um ponto $r$ resultando em um vetor $V_C(r)$ e outro vetor $V_{C'}(r)$ , respectivamente. . . . .	43
6	Gráfico da sequência (A.27): A medida que a variação de $n$ cresce, $\phi_n(x)$ também cresce, para $n = \infty$ , temos $\phi_n(x) = 0$ . . . . .	72
7	Gráfico da sequência (A.39): Podemos notar que a medida que os valores de $n$ aumentam, $\Phi_n(x)$ cresce rapidamente. . . . .	74

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Mecânica Clássica</b>	<b>12</b>
2.1	Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano . . . . .	12
2.2	Transformações Canônicas . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Relatividade Especial</b>	<b>26</b>
3.1	Relatividade Especial . . . . .	26
3.2	Equações de Maxwell e Transformações de Lorentz . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Relatividade Geral</b>	<b>34</b>
4.1	Breve Introdução ao Problema da Relatividade Geral . . . . .	34
4.2	Métricas e Transformações de Coordenadas . . . . .	35
4.3	Álgebra Tensorial . . . . .	37
4.4	Cálculo Tensorial . . . . .	40
4.5	Curvatura . . . . .	43
4.6	Equações do Campo Gravitacional . . . . .	46
4.6.1	Tensor Momento-energia . . . . .	46
4.6.2	Equações de Einstein . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Aplicação: Métrica de Friedman-Robertson-Walker</b>	<b>53</b>
5.1	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	53
5.2	Equação de Friedmann em uma Abordagem Clássica . . . . .	57

5.3 Inflação . . . . .	59
<b>6 Computação Simbólica</b>	<b>61</b>
<b>7 Considerações Finais</b>	<b>65</b>
<b>Apêndice A – Teoria da Distribuição</b>	<b>67</b>
<b>Apêndice B – Colchete de Poisson</b>	<b>76</b>
B.1 Álgebra de Lie . . . . .	76
B.2 Colchetes de Poisson . . . . .	77
<b>Apêndice C – Cálculo dos Tensores de Riemann e Ricci e Simbolos de Christoffel em termos da métrica FRW</b>	<b>79</b>
<b>Referências</b>	<b>85</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo abordar elementos de teoria clássica de campos. Tendo como temas a formulação clássica da mecânica newtoniana através dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano, a formulação dos princípios de relatividade especial e das transformações de Lorentz, os princípios de relatividade geral e as equações de um campo gravitacional, o uso da métrica de Friedman-Robertson-Walker como solução das equações de campo de Einstein e mostrar como o uso da computação simbólica é útil na resolução cálculos matemáticos extensos, como é o caso do cálculo de tensores.

Os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano serão usados para analisar sistemas dinâmicos de partículas com número finito de graus de liberdade sendo o encaminhamento para o entendimento de sistemas dinâmicos de partículas com número infinito de graus de liberdade. Esse princípio não apresenta nenhuma nova formulação das leis da natureza, ele apresenta uma nova alternativa mais simples e elegante que a mecânica de Newton para analisar a formulação matemática de sistemas físicos. Nesta mesma seção será introduzido o conceito de transformações de coordenadas, as transformações canônicas. As transformações de coordenadas serão tratadas em todo o nosso trabalho.

Os fundamentos de toda a física clássica baseiam-se no conceito de distância regido pelas regras da geometria euclidiana e possui o tempo como uma variável adicional, cuja natureza não é métrica. Até meados do século XIX, isto parecia ser uma verdade exata sobre o universo, entretanto Maxwell propôs em suas equações que uma onda eletromagnética possuía uma velocidade  $c$  fixa, independentemente do observador. As transformações de Galileu, usadas na mecânica newtoniana propunham que a velocidade era uma grandeza que dependia claramente do sistema de referência, mas as proposições de Maxwell sobre o eletromagnetismo se contrapunham a essas transformações. Mostraremos neste trabalho que relatividade especial valeu-se das transformações de Lorentz, que deixam invariante a métrica que descreve qualquer observador inercial, introduzindo o tempo como parte da métrica. Albert Einstein estava de acordo com as considerações das leis do eletromagnetismo de Maxwell e as transformações de Lorentz

satisfizeram perfeitamente as necessidades dessa teoria. Sendo assim, Einstein postulou que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética independe do observador inercial e nada pode ser mais rápido do que ela e as leis físicas que descrevem esse fenômeno devem ser as mesmas que descrevem os fenômenos clássicos estudados por Galileu e Isaac Newton.

Após publicar seus trabalhos sobre relatividade especial Einstein se viu com mais uma complicação, esses trabalhos consideravam referenciais inerciais e nada falavam a respeito de sistemas de coordenadas imersos em um campo gravitacional. Mais uma vez, Newton em suas leis afirmava que os efeitos da gravidade eram sentidos instantaneamente por todos os corpos que estivessem sob ação da gravidade, no entanto no parágrafo acima enunciamos que as leis de Maxwell afirmam que a velocidade de uma onda eletromagnética é a mesma para qualquer observador e Einstein afirma em um de seus postulados que a luz possui velocidade finita e nada pode ser mais rápido do que ela. Com isso na presença de um campo gravitacional, necessitaremos de uma nova transformação de coordenadas que englobe esse fato, então apresentaremos o conceito de transformações de coordenadas gerais ou difeomorfismos, juntamente com a introdução dos conceitos de álgebra tensorial através de operações simples com vetores e derivadas covariantes.

Na relatividade especial introduziremos o conceito de espaço quadridimensional ou espaço-tempo, em relatividade geral apresentaremos o conceito de curvatura desse espaço. Enunciando um espaço plano que curva-se com a presença de matéria, através deste fato mostraremos as características geométricas do campo gravitacional e a álgebra tensorial nos mostrará como calcular essa curvatura.

Em termos da métrica de Friedmann-Robertson-Walker mostraremos soluções exatas das equações de Einstein, que formam a base da cosmologia moderna. Nessa mesma seção está contida uma abordagem clássica para as equações de Friedmann e para a inflação do universo com a introdução da constante cosmológica  $\Lambda$ .

Abordaremos, por fim, como o uso de Computação Simbólica pode simplificar cálculos, como é o caso das equações de Einstein. Com essa ferramenta, também chamada de computação algébrica, pretendemos mostrar a relativa economia de tempo por ela proporcionada em cálculos extensos. Em nosso estudo utilizamos o programa Mathematica.

## 2 MECÂNICA CLÁSSICA

Nesse capítulo apresentaremos os fundamentos da formulação Lagrangiana e Hamiltoniana para a mecânica clássica (mecânica newtoniana) descrevendo sistemas com um número finito de graus de liberdade. Os tópicos abordados serão as definições de Lagrangianas e Hamiltonianas, e as equações de movimento associadas (equações de Euler-Lagrange e equações de Hamilton) que podem ser obtidas a partir de um princípio variacional (princípio da mínima ação). Transformações de coordenadas e transformações canônicas também serão abordadas. Usamos como referência os livros clássicos de mecânica newtoniana (1–4).

### 2.1 FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO

Nessa sessão abordaremos os princípios dos formalismos **Lagrangiano** e **Hamiltoniano**. Os fundamentos da mecânica lagrangiana foram introduzidos por volta de 1770 por Joseph Louis Lagrange, descrevendo uma nova maneira de escrever as equações do movimento de um sistema dinâmico de partículas, essas equações são chamadas de *equações de Lagrange*. O conceito físico das equações de Lagrange é similar ao formalismo Newtoniano, entretanto, esta formulação apresenta vantagens específicas para solucionar alguns problemas físicos, isso por conta da mecânica Newtoniana apresentar-se na forma vetorial e a Lagrangiana na forma escalar. A diferença entre estes dois princípios é a formulação matemática e a maneira analítica de se observar certas propriedades. Vale ressaltar que o formalismo lagrangiano não se contrapõe ao formalismo newtoniano, ele trata apenas de uma nova maneira de analisar problemas mecânicos e é equivalente as idéias de Newton. Como veremos no decorrer desse trabalho essa formulação é fundamental para a descrição de sistemas físicos com infinitos graus de liberdade ainda que possa, às vezes, parecer apenas uma maneira alternativa para sistemas de partículas.

Esses princípios não apresentam nenhuma nova lei da física, mas pode permitir uma satisfatória unificação de várias teorias tendo por base um único postulado. Destina-se a física teórica, não unicamente como algo que viabiliza uma formulação matemática para descrição de um fenômeno, mas como algo que descreve esses efeitos de forma bastante econômica, no

que diz respeito aos procedimentos avaliativos e é um dos princípios mais práticos e elegantes da física teórica, tendo como características fundamentais a conservação das leis físicas e da simetria do sistema.

Nas equações de Lagrange as coordenadas que descrevem o sistema físico não são necessariamente as coordenadas cartesianas. Pode-se utilizar o sistema de coordenadas que melhor descreve o sistema físico de maneira livre (não-vinculada), esse conjunto de variáveis atende pelo nome de **coordenadas generalizadas**.

Consideraremos um sistema mecânico constituído de  $n$  partículas puntiformes. O estado de nosso sistema depende do tempo. O movimento de um sistema de partículas é frequentemente influenciado por agentes externos que exercem forças inicialmente desconhecidas. Porém, conhecendo o efeito geométrico causado por esse agente, podemos conhecer o efeito dessas forças<sup>1</sup>. Por conta de cada vetor ser radial os números das coordenadas espaciais que descrevem a posição das partículas são  $3n$ . Podemos encontrar as equações de força em (2) descritas como

$$f^k(x^1, \dots, x^n, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

onde  $x^{i2}$  são as posições dos vetores nas coordenadas  $3n$ , elas não são todas independentes. Esse fato se dá por conta do número  $m$  de equações de forças, e com isso temos  $3n - m$  coordenadas independentes, conseqüentemente,  $3n - m$  graus de liberdade.

Esse fato é importante se considerarmos que o número  $s = 3n - m$  de coordenadas, exigidos em cada caso, são independentes do parâmetro escolhido (ele pode ser retangular ou curvilíneo). Isso é o que chamamos de coordenada generalizadas para qualquer conjunto de quantidades  $s$  que descreva completamente o estado do sistema. As coordenadas generalizadas são comumente escritas como  $q^1, q^2, \dots$  ou simplesmente  $q^j$ . Os números de coordenadas generalizadas independentes são iguais ao número  $s$  de graus de liberdade do sistema e não são limitadas pela restrição, mas pelas propriedades do conjunto das coordenadas generalizadas.

As equações que correlacionam às coordenadas espaciais com as coordenadas generalizadas são

$$x^{\alpha, i} = x^{\alpha, i}(q^1, q^2, \dots, q^s, t), \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, n, \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Isso porque a simetria do sistema é preservada.

<sup>2</sup>A maioria dos livros de mecânica clássica utiliza a notação de índices na parte inferior das variáveis, entretanto, estamos utilizando a notação de (2) onde os índices são postos na parte superior das coordenadas (e coordenadas generalizadas) e na parte inferior dos momentos.

ou

$$x^{\alpha,i} = x^{\alpha,i}(q^j, t), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.3)$$

A derivada das coordenadas generalizadas em função do tempo são por analogia, em (1, 3), chamadas de velocidades generalizadas e denotadas por  $\dot{q}^j$ , onde  $j = 1, 2, \dots$ . Em geral, as componentes retangulares as velocidades generalizadas dependem das coordenadas generalizadas e do tempo e são denotadas por

$$\dot{x}^{\alpha,i} = \dot{x}^{\alpha,i}(q^j, \dot{q}^j, t). \quad (2.4)$$

E suas transformações inversas são

$$q^j = q^j(x^{\alpha,i}, t) \quad (2.5)$$

$$\dot{q}^j = \dot{q}^j(x^{\alpha,i}, \dot{x}^{\alpha,i}, t) \quad (2.6)$$

Neste caso a equação (2.1) é escrita como

$$F^k(x^i, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

Onde  $F$  são as equações das forças generalizadas.

As Lagrangianas que adotaremos neste capítulo descrevem o movimento de corpos em baixa velocidade se compararmos a velocidade da luz e massa relativamente grande se compararmos às partículas elementares e também são funções exclusivas das coordenadas e das velocidades<sup>3</sup>

$$L = L(x^i, \dot{x}^i) \equiv T - U. \quad (2.8)$$

Onde  $T$  e  $U$  são as energias cinética e potencial do sistema, respectivamente.

As transformações das coordenadas espaciais em coordenadas generalizadas se dão da seguinte forma: Considere o exemplo de uma partícula pontual movendo-se na superfície de um hemisfério de raio  $r$  com a origem no centro, conforme a Figura 1. Uma vez que o movimento está vinculado ao hemisfério superior da superfície

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad z \geq 0. \quad (2.9)$$

As coordenadas generalizadas que escolhermos serão os cossenos dos ângulos entre os eixos

<sup>3</sup>Em nossa formulação o tempo  $t$  está implícito.



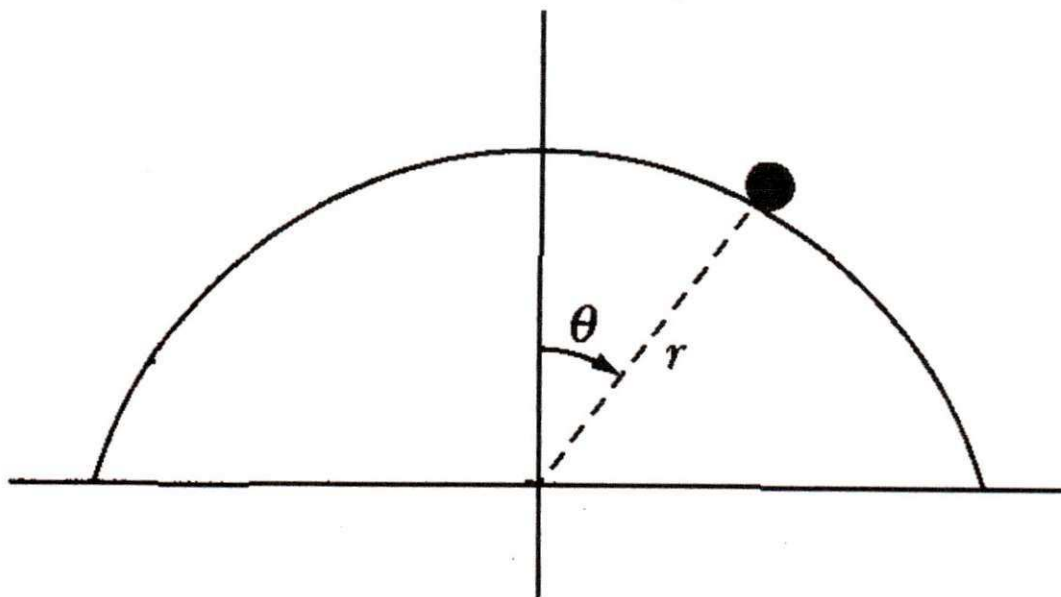


Figura 1: Partícula movendo-se em um hemisfério de raio  $r$  com a origem do sistema de coordenadas no centro.

$x$  e  $y$ , e eixo  $z$  é linha que conecta a partícula à origem. Sendo assim,

$$q^1 = \frac{x}{r}, \quad q^2 = \frac{y}{r}, \quad q^3 = \frac{z}{r}. \quad (2.10)$$

No entanto a soma dos quadrados na direção dos cossenos em uma linha reta é igual a um<sup>4</sup>, ou seja,

$$q^{1^2} + q^{2^2} + q^{3^2} = 1. \quad (2.11)$$

Este conjunto de  $q^i$  não constitui uma propriedade de um conjunto de coordenadas generalizadas, pois, podemos fazer as coordenadas em função das outras, como por exemplo, a coordenada  $q^3$  como função das coordenadas  $q^1$  e  $q^2$ , da forma

$$q^3 = \sqrt{q^{1^2} + q^{2^2}}. \quad (2.12)$$

Mas de qualquer forma, a escolha feita em (2.10) condiz uma propriedade das coordenadas generalizadas, e estas quantidades, juntamente com a equação (2.9), onde

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \quad (2.13)$$

são suficientes para determinar de modo único a posição da partícula. Isto nos daria o resultado de forma fácil, tendo em vista que apenas duas coordenadas, longitude e latitude, são necessárias

<sup>4</sup>Relembrando que os primeiros índices acima de (2.11) são os índices  $j = 1, 2, 3$  e o segundo é a potência 2.

para localizar o ponto em que a partícula se encontra. Este exemplo mostra como um conjunto de coordenadas generalizadas atua em um conjunto de coordenadas experimentais.

Tendo em vista que a Lagrangiana é a diferença entre as energias cinética e potencial, e que a energia é uma grandeza escalar, assumimos também, que a Lagrangiana é uma grandeza escalar. A Lagrangiana é invariante com respeito a transformações de variáveis, porém, certas transformações que mudam a Lagrangiana, mas deixam as equações do movimento invariantes são aceitas. Por exemplo, as equações do movimento são invariantes mesmo que  $L$  seja dada por  $L + d/dt[f(q^i, t)]$  para uma função  $f(q^i, t)$  onde a segunda derivada parcial seja contínua. A Lagrangiana pode ser expressa em modos das coordenadas generalizadas substituindo  $x^i$  e  $\dot{x}^i$  por  $q^j$  e  $\dot{q}^j$  respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{x}^{\alpha, i}) - U(x^{\alpha, i}) \\ &= T(x^j, \dot{q}^j, t) - U(\dot{q}, t), \end{aligned} \quad (2.14)$$

assim,

$$\begin{aligned} L &= (q^1, q^2, \dots, q^s; \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^s; t) \\ &= L(q^j, \dot{q}^j, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Em posse dessas informações, agora, enunciaremos o *princípio de Hamilton*<sup>5</sup> que nos diz que dentre todas as possíveis trajetórias que ligam um ponto a outro para qual uma partícula, dentro de um determinado sistema dinâmico, pode percorrer, o caminho que é fisicamente observado é aquele que leva o menor tempo possível, esse princípio também é chamado de **princípio da mínima ação**.

Primeiramente definiremos através do princípio de Hamilton a ação de um sistema que é escrita como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \iff L = L(x^j, \dot{x}^j) = T - U, \quad (2.16)$$

onde  $T$  é a energia cinética da partícula e  $U$  é a energia potencial.

O princípio de mínima ação é descrito através dos conceitos do cálculo variacional<sup>6</sup>. Para isso, primeiramente introduziremos a notação  $\delta$ .

<sup>5</sup>Vide (3).

<sup>6</sup>Vide (1, 3, 4)

O símbolo  $\delta$  é uma notação estenográfica. Especificamente, em nosso caso faremos

$$\begin{cases} \delta S \equiv \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ \delta x^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial t} dt, \\ \delta \dot{x}^i \equiv \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t} dt. \end{cases} \quad (2.17)$$

A equação (2.8) pode ser interpretada como a soma de duas funções<sup>7</sup>,  $x^i(\varepsilon, t) = x^i(0, t) + \varepsilon \eta(t)$ , como pode ser visto na Figura 2. Onde  $\varepsilon \eta(t)$  é uma função arbitrária qualquer de  $t$ . Nessa função os pontos  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ . Atraves deste fato e juntamente com a aplicação do delta na equação (2.16) teremos:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}^i) dt = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

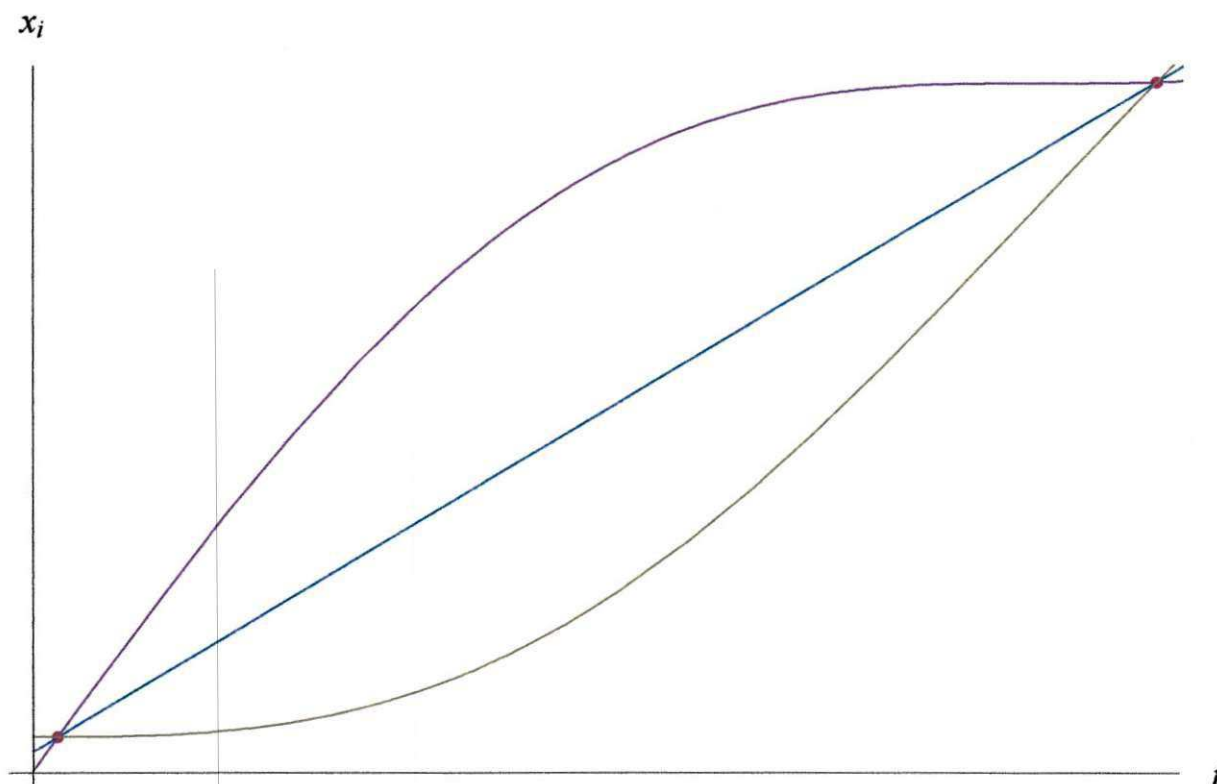


Figura 2: Representação de uma função  $x^i(\varepsilon, t)$ . A curva inferior representa  $\varepsilon \eta(t)$ , a curva central representa  $x^i(0, t)$  e a curva superior representa a parte variacional  $x^i(\varepsilon, t)$ . Vemos que  $x^i(\varepsilon, t) = x^i(0, t)$  nos pontos em vermelho, denotados por  $t_1$  e  $t_2$ .

<sup>7</sup>Para uma explanação mais detalhada veja o capítulo (6) de (3) e o capítulo (2) de (1).

Através da relação (2.17) percebemos que

$$\delta \dot{x}^i = \delta \left( \frac{dx^i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta x^i), \quad (2.19)$$

assim podemos reescrever (2.18) como

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{d}{dt} \delta x^i \right) dt = 0. \quad (2.20)$$

Integrando o segundo termo por partes teremos que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{d}{dt} \right) \delta x^i dt = 0. \quad (2.21)$$

No entanto a variação  $\delta x^i$  é arbitrária, a condição que foi imposta é que nos extremos  $\delta S = 0$ , nos resta concluir que o integrando entre parênteses de equação (2.21), logo

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{d}{dt} = 0. \quad (2.22)$$

Estas são as *equações de Euler-Lagrange*, ou simplesmente, **equações de Lagrange** para o movimento de um sistema de partículas. Se mudarmos nosso sistema de coordenadas  $x^i$  para um sistema de coordenadas generalizadas  $q^j$  a equação de movimento correspondente é

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.23)$$

Existe um número  $s$  dessas equações, juntamente com um número  $m$  de equações de força e condições iniciais que são impostas, que descrevem completamente o movimento do sistema.

Iremos agora dar um exemplo do uso das coordenadas generalizadas no cálculo da Lagrangiana. Considere um pêndulo simples, de comprimento  $l$  e de massa  $m$ , movendo-se no plano  $(x, y)$  (veja a Figura 3).

Primeiramente temos as energias, cinética  $T$  e potencial,  $U$  como

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2, \quad (2.24)$$

$$U = mgy. \quad (2.25)$$

E a Lagrangiana como

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy. \quad (2.26)$$

O movimento pode ser escrito em modos de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Para isso, basta transformar  $x$  e  $y$  na coordenada  $\theta$  e teremos  $L$  em termos de  $\theta$ . Então,

UFCC/DISLOTECA

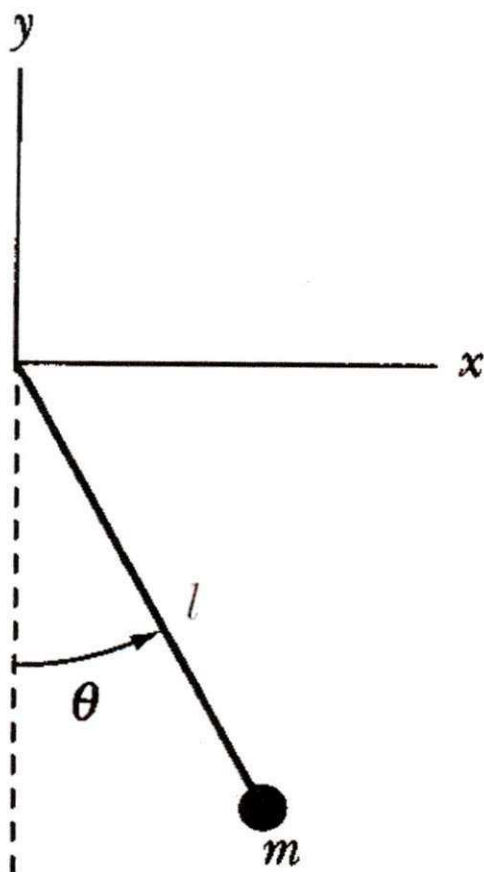


Figura 3: Pêndulo de comprimento  $l$  e de massa  $m$ .

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta, \\ y &= -l \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.27)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.27) e (2.28) em termos de (2.26) teremos,

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta \\ &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Com as coordenadas generalizadas do caso do pêndulo de ângulo  $\theta$ , podemos expressar a Lagrangiana em termos de  $\theta$  fazendo uma transformação simples das coordenadas  $x$  e  $y$  para  $\theta$ .

As equações do movimento são

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -ml^2 \dot{\theta}, \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -ml^2 \ddot{\theta}. \quad (2.32)$$

Podemos usar as relações acima na equação (2.23). Com isso encontraremos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (2.33)$$

Esta é a equação de Lagrange do movimento de um pêndulo simples movendo em torno do plano  $x - y$  com um ângulo  $\theta$ . O resultado é análogo ao encontrado usando a mecânica newtoniana.

Estamos considerando Lagrangianas que não dependem explicitamente do tempo. Nesse caso a energia do sistema é conservada (também não depende do tempo).

Podemos, agora, definir a nossa Hamiltoniana  $H$  como a energia total do sistema, ou  $H = E = T + U$ , e essa quantidade é uma grandeza conservada (se a Lagrangiana é independente do tempo).

O momento generalizado é definido como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \quad (2.34)$$

Podemos escrever, também,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}. \quad (2.35)$$

Com isso, as equações de Lagrange expressas em termos das coordenadas generalizadas resultam em

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \quad (2.36)$$

e

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q^j}. \quad (2.37)$$

Mais uma vez, por analogia, também, os chamamos de **momentos generalizados**.

A Hamiltoniana é uma função das coordenadas generalizadas e dos momentos generalizados que é obtida por uma transformação da Lagrangiana em que a dependência funcional das velocidades generalizadas é substituída pela dependência nos momentos generalizados que são vistos no formalismo Hamiltoniana como um conjunto de variáveis independentes das coorde-

nadas generalizadas:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}^j - L. \quad (2.38)$$

A Lagrangiana é uma função das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas, e há a possibilidade de ser do tempo, também. Podemos solucionar a equação (2.34) para as velocidades generalizadas e expressa-las como

$$\dot{q}^j = \dot{q}^j(q^k, p_k, t). \quad (2.39)$$

Podemos reescrever (2.38) em termos das variáveis (2.39), trocando o conjunto  $(q^j, \dot{q}^j, t)$  para o conjunto  $(q^j, p_j, t)$ , assim a Hamiltoniana fica expresso como

$$H(q^k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}^j - L(q^j, \dot{q}^j, t). \quad (2.40)$$

Esta equação foi escrita de modo a enfatizar o fato da Hamiltoniana ser sempre uma função do conjunto  $(q^j, p_j, t)$ , enquanto a Lagrangiana é função do conjunto  $(q^j, \dot{q}^j, t)$ :

$$H = H(q^k, p_k, t), \quad L = L(q^j, \dot{q}^j, t). \quad (2.41)$$

A derivada total da Hamiltoniana é

$$dH = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.42)$$

De acordo com a equação (2.40), nos teremos

$$dH = \sum_k \left( \dot{q}^k dp_k + p_k d\dot{q}^k - \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.43)$$

Usando as equações (2.36) e (2.37) para substituir  $\partial L / \partial q^k$  e  $\partial L / \partial \dot{q}^k$  por seus respectivos valores, o segundo e o quarto termo entre parênteses de (2.43) se cancelam, e remanesce

$$dH = \sum_k (\dot{q}^k dp_k - \dot{p}_k dq^k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.44)$$

Comparando os coeficientes  $dq^k$ ,  $dp_k$  e  $dt$  pertencentes às equações (2.42) e (2.44), encontramos que

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (2.45)$$

$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q^k}, \quad (2.46)$$

e

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.47)$$

Finalmente, usando as equações (2.45) e (2.46) em (2.42) os termos entre parêntesis se anulam, e chegamos à conclusão de que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.48)$$

As equações (2.45) e (2.46) são chamadas de **equações de Hamilton do movimento**<sup>8</sup> e por conta da conservação da simetria do sistema também são denominadas de **equações canônicas do movimento**.

As equações canônicas são equações diferenciais de primeira ordem e a Lagrangiana é uma equação diferencial de segunda ordem. Para usar as equações canônicas na solução de problemas, nós primeiramente construímos a Lagrangiana em função das coordenadas generalizadas e do momento. Em alguns casos podemos fazer isso diretamente. Para um caso mais complicado, será necessário primeiramente ampliarmos a Lagrangiana e os cálculos do momento generalizado de acordo com a equação (2.36).

## 2.2 TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

As equações de Lagrange não dependem da escolha das coordenadas generalizadas, desta forma é possível mudar as coordenadas  $q^1, q^2, q^3, \dots$ , transformando-as em novas coordenadas  $Q^1, Q^2, Q^3, \dots$ , as quais serão escolhidas de forma que dependam explicitamente do tempo, da forma

$$Q^i = Q^i(q, t). \quad (2.49)$$

Essas equações são chamadas de *transformações de ponto*<sup>9</sup>.

O mesmo também pode ser feito para o momento generalizado  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , que, por sua vez, são transformados em  $P_1, P_2, P_3, \dots$  podemos considerar como exemplo as mudanças do plano cartesiano para coordenadas polares, que geralmente podem ser escritas da forma (2.49). Entretanto, no formalismo Hamiltoniano as coordenadas generalizadas são independentes do momento. Mas, o conceito de transformações pode ser estendido de forma que podemos englobar transformações de coordenadas que possuam tanto as coordenadas generalizadas  $q^i$  quanto os momentos generalizados  $p_i$ , em um novo conjunto de coordenadas  $Q^i$  e  $P_i$ . Estas transfor-

<sup>8</sup>A discrição do movimento por estas equações é chamada de dinâmica Hamiltoniana.

<sup>9</sup>Vide(4).



mações são inversíveis, e são dadas por

$$\begin{aligned} Q^i &= Q^i(q, p, t), \\ P_i &= P_i(q, p, t). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Desta forma temos as novas coordenadas e os novos momentos escritos em termos das velhas coordenadas e dos momentos antigos.

Para que as equações canônicas conservem sua forma canônica as novas variáveis  $(Q^i, P_i)$  deverão obedecer às mesmas propriedades das equações de movimento para  $(q, p)$ , que são relacionadas com as equações canônicas de Hamilton, provenientes da Hamiltoniana  $(Q, P, t)$ , dada por

$$\begin{aligned} \dot{Q}^i &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q^i}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Onde  $\bar{H}$  é a nova Hamiltoniana em função das novas variáveis.

O princípio da Hamilton representado pela a equação (2.44) pode ser expresso como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (2.52)$$

O somatório está implícito no índice  $i$ . Assim, podemos, também, escrever

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}^i - \bar{H}(Q, P, t)) dt = 0. \quad (2.53)$$

As equações (2.52) e (2.53) são interrelacionadas da forma

$$\lambda (p_i \dot{q}^i - H) = P_i \dot{Q}^i - \bar{H} + \frac{dF}{dt}. \quad (2.54)$$

Onde  $F$  é uma função das coordenadas do espaço de fase, com a segunda derivada contínua, e  $\lambda$  é uma constante independente das coordenadas canônicas e do tempo. A constante multiplicativa  $\lambda$  relaciona a transformação canônica a uma transformação de escala. Para  $\lambda \neq 1$  a transformação é chamada de *transformação canônica estendida*, a para os casos onde  $\lambda = 1$ , ele é chamada simplesmente de *transformações canônicas*<sup>10</sup>. Isto nos permite concluir que uma transformação canônica estendida pode ser composta de uma transformação canônica mais uma transformação de escala.

Podemos considerar como exemplo uma transformação para um conjunto  $(Q', P')$  definido

<sup>10</sup>Vide(1).

por

$$\begin{aligned} Q'^i &= \mu q^i, \\ P'_i &= \nu p_i. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Pela a equação (2.51), teremos a Hamiltoniana transformada  $\bar{H}'(Q', P') = \mu\nu H(q, p)$ . Desta forma teremos

$$\mu\nu(p_i \dot{q}^i - H) = P'_i \dot{Q}'^i - \bar{H}'. \quad (2.56)$$

Esta equação é da forma (2.54), onde  $\lambda = \mu\nu$ . Para o caso onde  $\lambda = 1$  temos uma aparente contradição entre as equações (2.56) e (2.54). No entanto, o último termo do lado direito da equação (2.54) contribui com a forma variacional da integral e desaparecerá caso  $F$  seja uma função de  $(q, p, t)$  ou  $(Q, P, t)$  ou qualquer mistura das coordenadas do espaço de fase, pois possuem derivadas totais iguais a zero.

As equações (2.51) e o inverso de  $F$  podem ser expressas em termos das novas e velhas coordenadas ou a mistura delas. Desta forma podemos enunciar  $F$  como sendo a *função geratriz* das transformações canônicas.

Podemos observar como uma função geratriz específica a transformação supondo que  $F$  seja simultaneamente função das novas e das velhas coordenadas generalizadas do espaço de fase:

$$F = F_1(q, Q, t). \quad (2.57)$$

A equação (2.56) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}^i - H &= P_i \dot{Q}^i - \bar{H} + \frac{dF_1}{dt}, \\ &= P_i \dot{Q}^i - \bar{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \dot{Q}^i. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Onde as velhas coordenadas  $q^i$  e as novas coordenadas  $Q^i$  são independentes. A equação (2.58) só poderá ser idêntica se os coeficientes de  $\dot{q}^i$  e  $\dot{Q}^i$  se anularem, assim

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \\ p_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

e finalmente

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (2.60)$$

A primeira equação de (2.59) são as  $n$  relações definindo  $p_i$  como funções de  $q^i$ ,  $Q^i$ , e  $t$ . Assumimos que elas podem ser invertidas podemos solucioná-las para as  $nQ^i$ 's em termos de  $q^j$ ,  $p_j$ , e  $t$ . Uma vez que as relações entre os  $nQ^i$ 's e as velhas variáveis canônicas  $(q, p)$  foram estabe-

lecionadas podem ser substituídas na segunda equação de (2.59), resultando em  $n$  termos  $P_i$ 's em função de  $q^j$ ,  $p^j$ , e  $t$ . Por fim, a equação (2.60) é proveniente da relação entre a nova Hamiltoniana  $\bar{H}$  e a velha  $H$ . Devemos ter cuidado ao interpretar a equação (2.60), pois,  $q$  e  $p$  em  $H$  são expressos em função de  $Q$  e  $P$  pelo inverso de (2.59). E  $q_i$  em  $\partial F_1/\partial t$  são expressos em termos de  $Q$  e  $P$  de maneira similar e as duas funções são adicionadas para resultar em  $\bar{H}(Q, P, t)$ .

## 3 **RELATIVIDADE ESPECIAL**

A **Relatividade Especial** foi proposta por *Albert Einstein* no ano de 1905. Essa teoria introduz uma nova maneira de enxergar aspectos da Física Clássica, mais especificamente, a mecânica newtoniana afirma que a velocidade, seja ela qual for, depende diretamente do referencial, no entanto, a relatividade afirma que nada pode ser mais rápido que uma onda eletromagnética (luz) e independente de qual seja a velocidade que o observador inercial se afaste ou se aproxime do local onde iniciou-se a propagação da onda, a propagação da luz mantém a mesma velocidade igual a  $c$ , implicando uma alteração na regra de adição de velocidades associada a referenciais galileanos.

Neste capítulo trataremos as transformações de coordenadas de Lorentz, a simetria associada à relatividade restrita e a definição de grandezas físicas com transformações simples (lineares) e bem comportadas com relação a essas transformações de coordenadas, os quadrivetores<sup>1</sup>.

As equações de Maxwell aparentemente não apresentam simetria por transformações de Lorentz mas mostraremos nesse capítulo que o eletromagnetismo é uma teoria relativística sem qualquer alteração e pode ser formulado de uma maneira em que esse fato é explícito.

A relatividade restrita introduz a geometria como ferramenta fundamental na Física. É o início do estudo que fundamenta a relatividade geral e o coroamento da geometria como ferramenta da Física, como ficará exposto no resto do trabalho.

Nesse capítulo nossas referências foram (5–7).

### 3.1 **RELATIVIDADE ESPECIAL**

O princípio da Relatividade Especial afirma que as leis da natureza são invariantes sob determinadas transformações, estamos falando do *primeiro postulado de Einstein* da Relatividade Especial, estas transformações são chamadas de **Transformações de Lorentz** que transformam um sistema de coordenadas do espaço-tempo de coordenadas  $x^\alpha$  em um sistema de coordenadas

<sup>1</sup>Os índices gregos variam entre 0, 1, 2, 3 e os latinos entre 1, 2, 3.

$x'^{\alpha}$ , dada por

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + a^{\alpha}, \quad (3.1)$$

onde  $\Lambda_{\beta}^{\alpha}$  são constantes restritas pelas condições<sup>2</sup>

$$\Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}, \quad (3.2)$$

e

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 1, 2, \text{ ou } 3, \\ -1 & \alpha = \beta = 0, \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nesta notação  $\alpha, \beta, \gamma$  (ou quaisquer outros índices gregos) variam entre os valores 0, 1, 2, 3, onde  $x^0$  é a componente temporal e  $x^i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , são as componentes do vetor posição  $x$ .

A principal propriedade das Transformações de Lorentz é que elas mantêm o intervalo de tempo  $d\tau$  (tempo próprio) invariante,<sup>3</sup> definido por<sup>3</sup>

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - dx^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (3.4)$$

No novo sistema coordenadas  $x'^{\alpha}$  as coordenadas são dadas por (3.1), assim

$$dx'^{\alpha} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha} dx^{\gamma}, \quad (3.5)$$

com isso o intervalo de tempo nas novas coordenadas pode ser escrito como

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= -\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \\ &= -\eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} dx^{\gamma} dx^{\delta} \\ &= -\eta_{\gamma\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

e com isso concluímos que

$$d\tau'^2 = d\tau^2. \quad (3.7)$$

O experimento de Michelson e Morley constatou que a velocidade da luz é a mesma para quaisquer referenciais inerciais<sup>4</sup>. E este é o enunciado do *segundo postulado de Einstein*.

Uma frente de onda terá  $|dx/dt|$  igual à velocidade da luz, que em nosso sistema de unidades  $c = 1$ , e sua propagação é descrita por

$$d\tau = 0. \quad (3.8)$$

<sup>2</sup> $a^{\alpha}$  também são constantes.

<sup>3</sup>Estamos considerando  $c = 1$ .

<sup>4</sup>Vide (6).

Ao se fazer uma Transformação de Lorentz<sup>5</sup>  $d\tau$  não é mudado, assim  $d\tau'^2 = 0$ , e desta forma  $|dx'/dt'| = 1$ , isto é, a velocidade da luz no novo sistema de coordenadas é a mesma.

Uma operação matemática importante para nossos estudos é o comportamento do operador gradiente nessa notação, que é representado por

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (3.9)$$

A transformação (3.1) (considerando a constante  $a^\alpha = 0$ ) pode ser escrita como

$$x^\beta = \Lambda_\alpha^\beta x'^\alpha, \quad (3.10)$$

e com isso

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha^\beta, \quad (3.11)$$

desta forma o gradiente é covariante. Isso nos trás como consequência o fato de que a divergência de um vetor contravariante<sup>6</sup> é invariante<sup>7</sup>.

## 3.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL E TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Vamos mostrar que as equações de Maxwell podem ser escritas em termos de quadrivetores e portanto podem ser escritas como equações covariantes. Isso mostra que as equações de Maxwell são covariantes sobre transformações de Lorentz e portanto o eletromagnetismo é uma teoria relativística sem nenhuma alteração de seus fundamentos.

Não é feita nenhuma alteração no eletromagnetismo, apenas mostramos que é possível reescrever as equações de Maxwell em uma forma que explicitamente respeita as simetrias da teoria. Esse procedimento, de escrever teorias (equações de movimento ou Lagrangianas) de forma explicitamente covariante é fundamental para o estudo mais aprofundado de teorias de campos da Física Moderna e acarretou resultados importantes para o estudo de propriedades quânticas da eletrodinâmica e da cromodinâmica quântica.

A princípio definiremos as densidades de carga e corrente, conforme é definido em (6). Supondo que nosso sistema de partículas é dado pelas posições  $x_n(t)$  e carga  $e_n$ , definimos a

<sup>5</sup> Isso pode ser visto com detalhes em (6, 7).

<sup>6</sup> Este objeto será definido na seção (4.3), por hora, tome esse fato apenas como uma informação adicional.

<sup>7</sup> Outra consequência é que o produto escalar de  $\partial/\partial x^\alpha$  com ele mesmo (operador de d'Alembertian) também é invariante.

densidade de carga e de corrente, respectivamente, como

$$J(x,t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)) \frac{\partial x_n(t)}{\partial t}, \quad (3.12)$$

e

$$\varepsilon(x,t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)). \quad (3.13)$$

Onde  $\delta^3$  é a função Delta de Dirac em 3-dimensões, definida pela seguinte afirmação:

$$\int d^3x f(x) \delta^3(x - y) = f(y), \quad (3.14)$$

(veja o Apêndice A). Assim podemos escrever  $J$  e  $\varepsilon$  em forma de um único quadrivetor  $J^\alpha$  fixando

$$J^0 = \varepsilon, \quad (3.15)$$

$$J^\alpha = \sum_n e_n \delta^3(x - x_n(t)) \frac{\partial x_n(t)}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Ressaltando que em nossa notação  $x_n^0(t) = t$ , podemos escrever (3.16) como

$$J^\alpha = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{\partial x_n^\alpha(t')}{\partial t'}. \quad (3.17)$$

A diferencial  $dt'$  pode ser substituída pelo intervalo invariante  $d\tau$ , assim a equação (3.17) fica

$$J^\alpha = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{\partial x_n^\alpha(\tau)}{\partial \tau}. \quad (3.18)$$

Essa é a corrente escrita como um quadrivetor. Note que a componente temporal representa a densidade de carga e a componente vetorial representa a densidade de corrente.

As correntes e cargas satisfazem uma equação de conservação conhecida como equação da continuidade<sup>8</sup>. Vamos ver como essa equação aparece no formalismo de quadrivetores.

<sup>8</sup>Vide (5).

Considere

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{J}(x, t) &= \left[ \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x - x_n(t)) \right] \frac{dx_n^i(t)}{dt} \\
 &\quad - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \left[ \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \right] \\
 &= \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \left[ \delta^3(x - x_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \right] \\
 &= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} [\delta(x - x_n(t))].
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Logo

$$\nabla \cdot \vec{J}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = 0 \implies \frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha = 0. \tag{3.20}$$

Com isso podemos perceber que a equação de continuidade (conservação de corrente) pode ser escrita na notação de quadrivetores como um escalar de Lorentz e portanto é preservada sobre transformações de Lorentz.

As equações de Maxwell<sup>9</sup> para um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$  produzidos por uma densidade da carga  $\varepsilon$  e uma densidade de corrente  $\vec{J}$  são

$$\nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon, \tag{3.21}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \tag{3.22}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.23}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{3.24}$$

Podemos definir o tensor  $F^{\alpha\beta}$  onde  $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$  (antissimétrico) como

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{10} & F^{20} & F^{30} \\ F^{01} & F^{11} & F^{21} & F^{31} \\ F^{02} & F^{12} & F^{22} & F^{32} \\ F^{03} & F^{13} & F^{23} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Considere a equação covariante

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta. \tag{3.26}$$

Em termos dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , temos

<sup>9</sup>As equações de Maxwell estão escritas no Sistema de Unidades CGS.

BIBLIOTECA



$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\alpha \iff \quad (3.27)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{00} & F^{10} & F^{20} & F^{30} \\ F^{01} & F^{11} & F^{21} & F^{31} \\ F^{02} & F^{12} & F^{22} & F^{32} \\ F^{03} & F^{13} & F^{23} & F^{33} \end{pmatrix} \equiv - \begin{pmatrix} \epsilon \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\partial_1 E_1 - \partial_2 E_2 - \partial_3 E_3 \\ \partial_0 E_1 - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2 \\ \partial_0 E_2 - \partial_1 B_3 - \partial_3 B_1 \\ \partial_0 E_3 - \partial_1 B_2 + \partial_2 B_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \epsilon \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\nabla \cdot \vec{E} \\ \partial_t E_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_1 \\ \partial_t E_2 + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_2 \\ \partial_t E_3 + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \epsilon \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

ou seja,  $\nabla \cdot \vec{E} = \epsilon$  e  $(\nabla \times \vec{B}) = \vec{J} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  e reproduzimos as equações de Maxwell (3.21) e (3.22).

Nosso próximo passo é mostrar como as equações (3.23) e (3.24) podem ser escritas nesta notação. Primeiro definimos os **símbolos de Levi-Civita**<sup>10</sup>  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  variam entre 0, 1, 2 e 3, com o fato de

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{se } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ são permutações cíclicas de } 0, 1, 2, 3; \\ -1 & \text{se } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ são permutações não-cíclicas de } 0, 1, 2, 3; \\ 0 & \text{para quaisquer índices iguais.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Escrevemos o tensor  $F_{\gamma\delta}$  com os índices abaixados:

$$F_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\delta\beta} F^{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = \eta_{00} \eta_{ii} F^{0i} = -F^{0i}, \\ F_{jk} = \eta_{jj} \eta_{kk} F^{jk} = F^{jk}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Desta forma

$$F_{0i} = E_i \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} = B_i, \quad (3.35)$$

<sup>10</sup>Estes símbolos estão definidos em (5-7).

para os índices  $i, j, k$  variando entre 1, 2, 3.

Notemos agora que

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0 \quad (3.36)$$

é a equação que descreve as equações (3.23) e (3.24).

Formalmente temos em (3.36) quatro equações, a primeira é

$$\begin{aligned} \epsilon^{0\beta\lambda\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0 &\implies \\ \epsilon^{0ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{jk} = 0 &\implies \\ \frac{\partial}{\partial x^i} [\epsilon^{0ijk} F_{jk}] = 0 &. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Mais precisamente

$$\frac{\partial}{\partial x^i} B_i = 0 \implies \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.38)$$

As outras três equações são

$$\begin{aligned} \epsilon^{m0jk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} + \epsilon^{mi0k} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} + \epsilon^{mij0} \frac{\partial}{\partial x^j} F_{j0} + \epsilon^{mijk} \frac{\partial}{\partial x^k} F_{jk} &= 0 \\ -\epsilon^{0mjk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} - \epsilon^{0mik} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} + \epsilon^{0mik} \frac{\partial}{\partial x^j} F_{k0} &= 0 \\ -\epsilon^{mjk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} - \epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} - \epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^j} F_{k0} &= 0 \\ \epsilon^{mjk} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{jk} + 2\epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^i} F_{0k} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} (E^{mjk} F_{jk}) + 2\epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^0} F_{0k} &= 0 \\ 2 \frac{\partial}{\partial x^0} B_m + 2\epsilon^{mik} \frac{\partial}{\partial x^i} E_k &= 0 \\ \frac{\partial B_m}{\partial t} + (\nabla \times \vec{E})_m &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Em notação vetorial podemos escrever

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (3.40)$$

Mostramos assim como as equações de Maxwell podem ser escrita de forma covariante

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= -J^\alpha, \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

assim o eletromagnetismo é uma teoria relativística sem nenhuma alteração adicional e o formalismo de quadrivetores permite deixar esse fato explícito. Historicamente essa foi uma das

motivações do trabalho de Einstein em construir a relatividade restrita, preservar o conjunto de simetrias que as equações de Maxwell respeitam e a exigência de compatibilidade dessas simetrias com as regras de transformações de coordenadas em mecânica newtoniana levaram a formulação da mecânica relativística e suas consequências.

## 4 *RELATIVIDADE GERAL*

### 4.1 BREVE INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DA RELATIVIDADE GERAL

A **Relatividade Geral** foi proposta por Albert Einstein entre os anos de 1915 e 1916. Logo após a propositura da relatividade especial, que explica o movimento de sistemas dinâmicos de partículas na ausência de gravidade em 1905, Einstein iniciou os estudos do movimento destes sistemas na presença de um campo gravitacional.

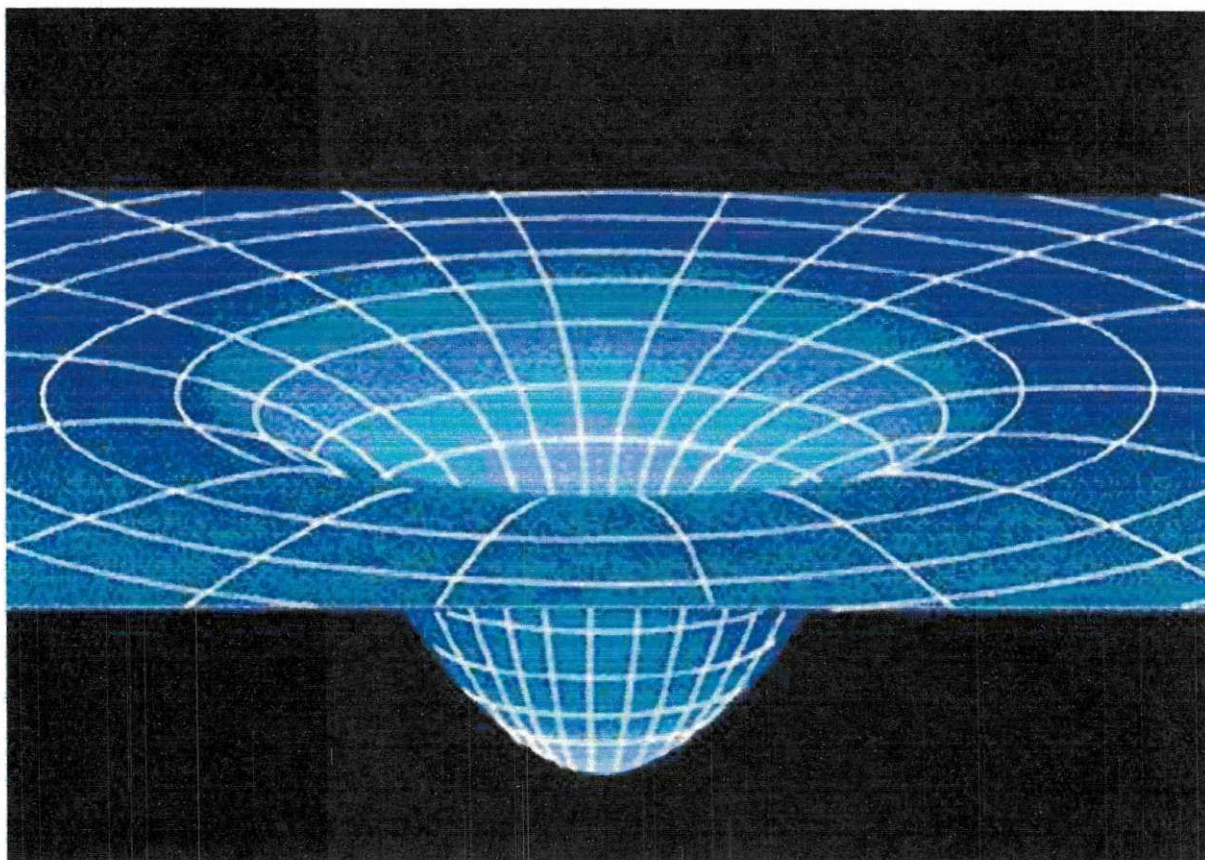


Figura 4: Esquema de um campo gravitacional curvando-se na presença de matéria.

A proposição de Einstein a respeito da gravidade é que ela se trata de um fato geométrico,

da curvatura do espaço-tempo. E essa interpretação teve um profundo impacto em toda a física teórica.

Esta formulação difere de forma significativa de alguns aspectos da física clássica, em especial quanto a várias previsões: a passagem do tempo, a geometria do espaço, o movimento dos corpos em queda livre e a propagação da luz. Apesar da relatividade geral ser uma teoria consistente com dados experimentais há questões ainda por ela não respondidas.

A teoria newtoniana não é invariante por transformações de Lorentz, ela postula uma interação a distância e uma propagação instantânea do campo gravitacional para cada ponto do espaço, e isso é oposto às idéias de Einstein contidas em um dos postulados da relatividade especial (veja a seção (3.1)). Desta forma, claramente, havia a necessidade de substituir a teoria clássica por uma mais abrangente.

Este fato requeria bastante trabalho, pois na relatividade especial a massa é considerada como outra forma de energia, e isso repercute no campo gravitacional. Diferentemente da teoria newtoniana, o campo gravitacional deve ser não-linear, ou seja, o campo gravitacional de duas massas não pode ser igual à soma dos dois campos destas massas, neste caso devemos considerar a energia gravitacional de todo o sistema.

Podemos encontrar em (7) a afirmação de que para solucionar esse problema Einstein valeu-se do **Princípio de Equivalência** entre a gravitação e a inércia. Este princípio nos diz que a massa gravitacional e a massa inercial são equivalentes (apesar de não haver nenhuma razão óbvia para isso), ou seja, o efeito da gravitação não é sentido por um observador caindo livremente.

Galileu Gallei comprovou experimentalmente que quaisquer corpos massivos em queda livre sentem o mesmo efeito da força gravitacional, independentemente da massa possuída por esses corpos. Através deste fato o enunciado do princípio de equivalência nos diz que existem pontos do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário que um sistema de coordenadas pode ser considerado "localmente inercial".

## 4.2 MÉTRICAS E TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

No espaço plano a noção de distância entre dois pontos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  é dada pela grandeza  $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$ , entretanto, em mecânica clássica o espaço estudado é em três dimensões ( $n = 3$ ). A **métrica** é uma generalização desse conceito de distância ou, em geral,

do tamanho de um vetor.

Como pode ser visto em (8) a relatividade especial “mistura” o tempo com as outras coordenadas, tratando-as de maneira equivalente e assim temos um espaço-tempo quadridimensional. Na relatividade especial esse espaço é chamado **espaço-tempo de Minkowski**, que pode ser descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu. \quad (4.1)$$

(onde  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ , e  $\xi^3$  são as coordenadas espaciais). Estamos considerando a velocidade da luz igual a 1, assim  $\xi^0 \equiv t$ . Os  $\eta_{\alpha\beta}$  são

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{10} & \eta_{20} & \eta_{30} \\ \eta_{01} & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} \\ \eta_{02} & \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} \\ \eta_{03} & \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Note que a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  é invariante por transformações de Lorentz como vimos na seção (3.1)

$$\Lambda_\alpha^\nu \Lambda_\beta^\mu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Essa métrica e a métrica cartesiana  $\delta_{ij}$  são métricas planas<sup>1</sup>.

A relatividade geral necessita descrever sistemas de referências não inerciais, em outras palavras, na relatividade geral há uma necessidade de transformações de coordenadas mais gerais do que as transformações de Lorentz. Essas transformações devem considerar difeomorfismos (que serão definidos na seção (4.3)).

Para entender o conceito de métrica em relatividade geral, primeiro, consideremos o tensor  $g_{\mu\nu}$  que é chamado de *métrica do espaço-tempo* de um espaço-tempo pseudo-Riemanniano que define um elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (4.3)$$

Veremos na próxima seção as condições necessárias para que  $ds^2$  seja um escalar, ou seja, sob transformações de coordenadas  $x'(x)$

$$ds' = ds. \quad (4.4)$$

O tensor  $g_{\mu\nu}$ , chamado de **tensor métrico**, codificará as informações sobre o campo gravitacional.

<sup>1</sup>As métricas planas são usadas no espaço Euclídeo.

### 4.3 ÁLGEBRA TENSORIAL

Estudaremos nessa seção as *transformações de coordenadas* na relatividade geral. As transformações de coordenadas vêm sendo usadas desde Galileu com o objetivo de simplificar problemas físicos. Na relatividade não é diferente, Einstein valeu-se do fato de que um observador dentro de um campo gravitacional não percebe a ação da força de campo (de um modo mais formal dizemos que em uma região infinitesimal na redondeza de um ponto podemos desconsiderar os efeitos da gravidade e considerarmos essa região localmente inercial), ou melhor dizendo, ele não distingue que tipo de força está atuando sobre ele, assim podemos considerá-lo como um observador localmente inercial, e todas as transformações de coordenadas devem ser feitas tendo como parâmetro este observador.

As transformações de coordenadas na relatividade devem possuir algumas propriedades, a primeira é que elas devem ser inversíveis e a segunda é que elas devem ser diferenciáveis e suas inversas também devem ser diferenciáveis. Essas transformações são chamadas transformação gerais de coordenadas ou **difeomorfismos**.

Mediante os conceitos abordados em (9) definiremos um campo vetorial  $V$  como sendo expresso em uma base genérica de vetores  $e_\mu$ , ou seja,

$$V = V^\mu e_\mu. \quad (4.5)$$

Se considerarmos um vetor  $\dot{x}^\mu$  tangente a uma curva sob transformações de coordenadas temos

$$\dot{x}^\mu \rightarrow \dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu, \quad (4.6)$$

que é uma família de **vetores contravariantes**. O termo contravariante significa que os índices estão posicionados na parte superior do termo que expressa o vetor.

Uma base natural para os vetores  $V$  é  $\partial/\partial x^\mu$ , que sempre geram vetores tangentes a curva. Agora podemos pensar em vetores como operadores diferenciais de primeira ordem, via correspondência

$$V^\mu \iff V \equiv V^\mu \partial_\mu. \quad (4.7)$$

Objetos que se transformam como operador de derivação

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (4.8)$$

são chamados de **vetores covariantes** e para manter a invariância de  $V$ , sua componente  $V^\mu$  se transforma como vetores contravariantes (4.7).

Em posse destas informações mostraremos qual a forma da transformação de vetores utilizados pela geometria diferencial.

O primeiro exemplo é de como se transformam funções escalares. Considere a função  $f$  sob a transformação de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ :

$$f'(x') = f(x). \quad (4.9)$$

Isto implica que funções são invariantes quanto às transformações de coordenadas e essa é a primeira face das transformações de coordenadas utilizadas na geometria diferencial que a partir de agora chamaremos apenas de **transformações**.

Definimos então objetos que transformam os **vetores contravariantes**  $V^\mu$ :

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (4.10)$$

**Vetores covariantes** diferem simbolicamente dos vetores contravariantes pela posição do índice que é posto na parte inferior, e são objetos do tipo  $U_\mu$ , apresentando, também, uma transformação de coordenadas que é o inverso da transformação de um vetor contravariante, e é dada por

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu, \quad (4.11)$$

(compare com a equação (4.9) e observe a posição dos índices). A derivada de uma função  $f$  dada por  $U_\mu = \partial_\mu f$  é um exemplo de um vetor covariante, cuja transformação é

$$\partial'_\mu f'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu f(x). \quad (4.12)$$

No final da seção (4.2) apresentamos o termo *tensor de segundo posto*, pois bem, agora explicitaremos o significado deste termo. Um tensor é classificado segundo o número de índices livres que ele possui, até então os tensores apresentados nesta seção foram todos de posto 1 (vetores), pois possuíam apenas um índice livre, veja como exemplo a equação (4.12), que possui o índice  $\mu$  independente, na seção (4.2) apresentamos a métrica  $g_{\mu\nu}$ , que possui os índices  $\mu$  e  $\nu$  livres, conforme já foi dito este tensor é um tensor de posto 2. Vejamos agora um pouco mais deste tema.

**Tensores** são objetos que se transformam como produtos de vetores contravariantes e vetores covariantes.



Podemos considerar o caso do tensor  $A_{\mu\nu}$  cuja lei de transformação é

$$A'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} A_{\sigma\rho}. \quad (4.13)$$

Podemos perceber que esse objeto se transforma por meio do produto de dois vetores covariantes. Assim,  $A_{\mu\nu}$  é um *tensor covariante de posto 2*.

Os **tensores contravariantes** de posto 2 são definidos como os que se transformam como produto de dois vetores do mesmo gênero. Observe o exemplo do tensor  $B^{\mu\nu}$  que é descrito pela transformação

$$B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} B^{\sigma\rho}. \quad (4.14)$$

A métrica  $g_{\mu\nu}$  é um tensor covariante de posto 2 e se transforma de forma idêntica a (4.13) e sua inversa  $g^{\mu\nu}$  se transforma como (4.14).

Existem também tensores formados pelo o produto de vetores contravariantes e vetores covariantes, estes são chamados de **tensores mistos** e são representados por

$$T_v'^{\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} T_\rho^\sigma. \quad (4.15)$$

Lembrando que em todos os casos nosso sistema pode ser formado por  $q$ -vetores contravariantes e  $p$ -covariantes e o cálculo é feito através da regra da cadeia da derivada. Note que se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas ele se manterá nulo em quaisquer outros sistemas de coordenadas.

Um tensor misto de grande utilidade é o  $\delta$  de Kronecker:

$$\delta_v^\mu \equiv \begin{cases} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (4.16)$$

Observe que ele se transforma como um tensor:

$$\delta_v'^\mu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta_\sigma^\rho. \quad (4.17)$$

Podemos fazer as seguintes operações algébricas com tensores: podemos somá-los, multiplicá-los e contraí-los. A adição de tensores ocorre da seguinte maneira:

$$A_v^\mu + B_v^\mu = C_v^\mu. \quad (4.18)$$

Note que os tensores devem ser de mesmo posto. Também podemos fazer o produto direto dos

tensores  $A_\nu^\mu \cdot B_\nu^\mu$ . A contração de uma maneira geral é dada por

$$\begin{aligned}
 B'_\nu &= A'^\mu_{\nu\mu} \\
 &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} A^\sigma_{\rho\lambda} \\
 &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \delta^\lambda_\sigma A^\sigma_{\rho\lambda} \\
 &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} B_\rho.
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Um exemplo particular de uma contração é o produto escalar de um vetor contravariante e um vetor covariante que resulta em um escalar.

## 4.4 CÁLCULO TENSORIAL

Nesta seção abordaremos os princípios da derivada covariante. Como vimos, transformações de coordenadas são uma ótima ferramenta para os estudos das leis da Relatividade de Einstein. Porém, as leis da física são formuladas através de equações diferenciais ordinárias (veja os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano no capítulo 2), desta forma seria bastante útil uma definição para a diferenciação de tensores.

Como pode ser visto em (7, 9) a diferenciação de um campo escalar é um vetor, entretanto nem sempre a diferenciação de um campo vetorial ou um campo tensorial resulta em um tensor. Para verificar essa afirmação considere a transformação da derivada parcial de um vetor contravariante  $V^\mu$  dada por

$$\begin{aligned}
 \partial'_\nu V'^\mu &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho \right) \\
 &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \partial_\sigma V^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\rho.
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Veja que a aparição do último termo desta equação mostra claramente que a derivada parcial de um vetor contravariante não é um tensor.

Para calcularmos uma derivada precisamos subtrair vetores associados a pontos diferentes do espaço. Diferentemente do espaço plano, em um espaço curvo vetores em pontos diferentes não pertencem ao mesmo espaço vetorial e por isso não existe nenhuma noção natural de como subtraí-los. É necessária a inclusão de uma noção de transporte paralelo para que esses vetores sejam colocados no mesmo ponto, observe isso através da definição formal de derivada em um

espaço Euclidiano de  $M$  componentes de um campo vetorial  $V = V^\mu e_\mu$  com respeito à  $x^\mu$ :

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots) - V^\mu(\dots, x^\nu, \dots)}{\Delta x^\nu}. \quad (4.21)$$

No numerador de (4.21) consta uma subtração e é exatamente essa subtração a responsável pelo termo extra na equação (4.20).

Para solucionar esse problema necessitamos introduzir um conceito de derivada para tensores. Introduzimos então o conceito abordado em (9) de **derivada covariante**  $\nabla_\nu V^\mu$  de um campo vetorial  $V^\mu$  definida por

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda. \quad (4.22)$$

Os símbolos  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  são o que chamamos de **conexão**<sup>2</sup>.

Tendo definido a derivada covariante de um vetor contravariante, definiremos a derivada covariante de um vetor covariante como

$$\nabla_\mu U_\nu = \partial_\nu U_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U_\lambda. \quad (4.23)$$

Para um tensor misto  $T_\mu^\nu$  a derivada covariante é definida como

$$\nabla_\mu T_\mu^\nu = \partial_\nu T_\mu^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T_\rho^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda T_\rho^\nu. \quad (4.24)$$

É conveniente que definamos uma conexão compatível com a métrica sob a qual essa é constante. Ou seja,

$$\nabla_\nu g_{\nu\lambda} = 0. \quad (4.25)$$

Primeiro considere as equações

$$0 = \nabla_\nu g_{\rho\lambda} = \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha g_{\rho\alpha}, \quad (4.26)$$

$$0 = \nabla_\rho g_{\nu\lambda} = \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha g_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\rho\lambda}^\alpha g_{\nu\alpha}, \quad (4.27)$$

$$0 = \nabla_\lambda g_{\nu\rho} = \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha g_{\nu\alpha}. \quad (4.28)$$

<sup>2</sup>A conexão é o termo que carrega as informações do vetor durante o transporte paralelo.

Veja que se fizermos a soma de (4.27) e (4.28) e subtrairmos por (4.28) teremos

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho} &= +\Gamma_{\nu\rho}^\alpha g_{\alpha\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha g_{\rho\alpha} \\
 &\quad + \Gamma_{\rho\nu}^\alpha g_{\alpha\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^\alpha g_{\nu\alpha} \\
 &\quad - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha g_{\nu\alpha} \\
 &= g_{\alpha\lambda}(\Gamma_{\nu\rho}^\alpha + \Gamma_{\rho\nu}^\alpha) + g_{\alpha\rho}(\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha) + g_{\alpha\nu}(\Gamma_{\rho\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha) \\
 &= 2g_{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^\mu.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Na penúltima linha impomos adicionalmente a simetria da conexão  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu$  com respeito aos dois índices inferiores. Os segundos e terceiros termos entre parênteses após a igualdade se anulam e temos finalmente:

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}). \tag{4.30}$$

A conexão não necessariamente deve ter essas características, entretanto essa imposição a caracteriza como os Símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  e a chamamos de **conexão afim**.

Utilizando o fato de que a derivada covariante se transforma como um tensor podemos obter a transformação da conexão, que evidentemente não pode se transformar como um tensor:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu\prime} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\alpha}} \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\prime\mu}} \Gamma_{\lambda\beta}^\kappa - \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\alpha}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial^2 x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta \partial x^\rho}. \tag{4.31}$$

A atuação de  $\nabla_\mu$  em um produto direto de tensores é dada por

$$\nabla_\mu(A_\nu^\mu B_\lambda^\rho) = (\nabla_\mu A_\nu^\mu) B_\lambda^\rho + A_\nu^\mu (\nabla_\mu B_\lambda^\rho). \tag{4.32}$$

Isto é uma generalização da fórmula de Leibniz.

Um fato importante de derivadas covariantes é que o delta de Kronecker é constante. Observe:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu \delta_\lambda^\nu &= \partial_\mu \delta_\lambda^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \delta_\lambda^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta_\rho^\nu \\
 &= \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu = 0.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Em decorrência disto, veja o que ocorre com a contração de índices. Primeiramente, considere um tensor misto  $A_\rho^\nu$ , a derivada covariante dele é

$$\nabla_\mu A_\rho^\nu = \partial_\nu A_\rho^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\rho^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda A_\lambda^\nu, \tag{4.34}$$

vemos que (4.34) é similar a (4.24), entretanto, se considerarmos a contração  $A_\nu^\nu$  teremos

$$\nabla_\mu A_\nu^\nu = \partial_\nu A_\nu^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda^\nu = \partial_\nu A_\nu^\nu. \tag{4.35}$$

A relação que este fato tem com (4.33) é que podemos provar isso usando o fato do delta de Kronecker ser constante, conforme podemos ver:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} A_{\nu}^{\nu} &= \nabla_{\mu} (A_{\rho}^{\nu} \delta_{\nu}^{\rho}) \\ &= (\nabla_{\mu} A_{\rho}^{\nu}) \delta_{\nu}^{\rho} + A_{\rho}^{\nu} (\nabla_{\mu} \delta_{\nu}^{\rho}) \\ &= \nabla_{\mu} (A_{\rho}^{\nu} \delta_{\nu}^{\rho}).\end{aligned}\tag{4.36}$$

## 4.5 CURVATURA

Analisaremos nesta seção o caráter geométrico envolvendo as derivadas covariantes. Primeiramente, vide (10), considere um paralelogramo infinitesimal  $pqrs$  possuindo as coordenadas  $\{x^{\mu}\}$ ,  $\{x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}\}$ ,  $\{x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} + \delta^{\mu}\}$  e  $\{x^{\mu} + \delta^{\mu}\}$ , respectivamente, além disso,  $\varepsilon^{\mu}$  e  $\delta^{\mu}$  são infinitesimais. Consideremos o deslocamento ao longo da curva  $C = pqr$  e da curva  $C' = psr$  (veja a figura 5). Podemos calcular a variação  $V_{C'}^{\mu} - V_C^{\mu}$ , para isso, primeiro veja que

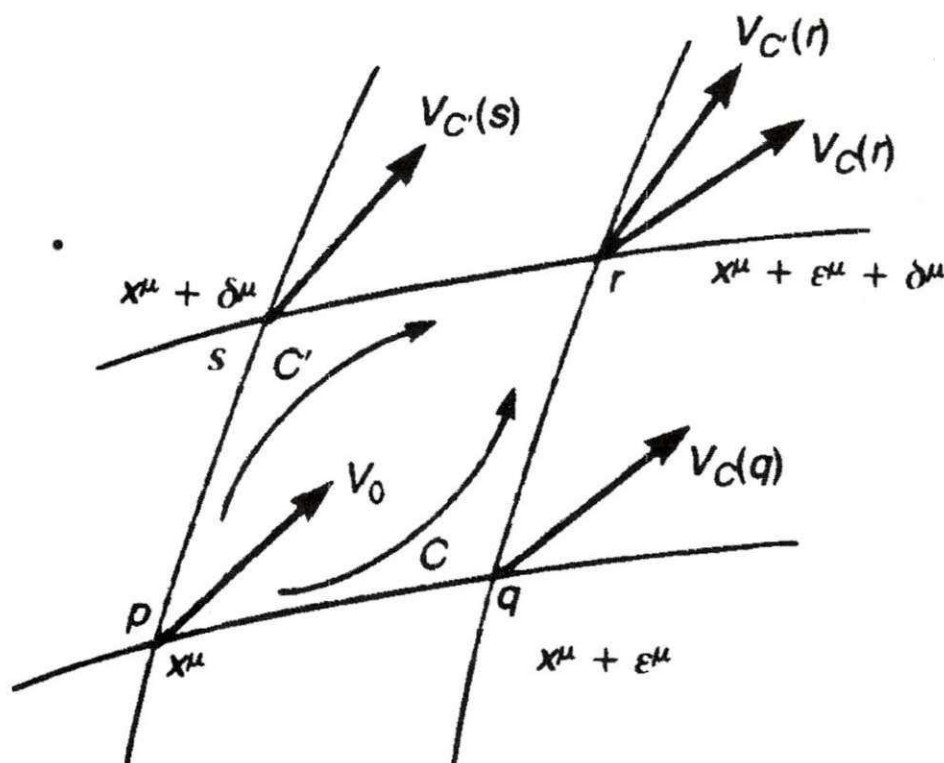


Figura 5: Um vetor  $V_0$  em um ponto  $p$  é transportado paralelamente ao longo das curvas  $C$  e  $C'$  até um ponto  $r$  resultando em um vetor  $V_C(r)$  e outro vetor  $V_{C'}(r)$ , respectivamente.

$$V_C^\mu(q) = V^\mu(p) + \nabla_\mu V^\mu(p) \varepsilon^\mu, \quad (4.37)$$

$$V_C^\mu(q) = V^\mu(q) + \nabla_\mu V^\mu(q) \delta^\mu. \quad (4.38)$$

Substituindo a equação (4.37) na equação (4.38) teremos,

$$V_C^\mu(q) = V^\mu(p) + \nabla_\nu V^\mu(p) \varepsilon^\nu + \nabla_\nu V^\mu(p) \delta^\nu + \nabla_\nu \nabla_\rho V^\mu(p) \varepsilon^\rho \delta^\nu. \quad (4.39)$$

Analogamente

$$V_{C'}^\mu(r) = V^\mu(p) + \nabla_\nu V^\mu(p) \delta^\nu + \nabla_\nu V^\mu(p) \varepsilon^\nu + \nabla_\nu \nabla_\rho V^\mu(p) \delta^\rho \varepsilon^\nu. \quad (4.40)$$

Logo

$$V_{C'}^\mu(r) - V_C^\mu(r) = (\nabla_\nu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu) \delta^\rho \varepsilon^\nu. \quad (4.41)$$

Veja que o termo entre parênteses da segunda parte de (4.41) é o comutador<sup>3</sup>  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$  e isso nos instiga a definirmos curvatura em termo deste comutador, ou seja, a curvatura é uma medida da falha em vetores, transportados em um caminho fechado se voltarem paralelos a si mesmos.

Calculemos então

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho. \quad (4.42)$$

Analisemos a equação (4.42) por partes: primeiro vejamos  $\nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\nabla_\nu V^\rho) &= \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda) \\ &\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho (\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha V^\lambda) \\ &\quad - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha (\partial_\alpha V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Em seguida vejamos  $\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (\nabla_\mu V^\rho) &= \partial_\nu (\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda) \\ &\quad + \Gamma_{\nu\alpha}^\rho (\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda) \\ &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (\partial_\alpha V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda). \end{aligned} \quad (4.44)$$

---

<sup>3</sup>Veja o Apêndice (B.1).

Desta forma substituindo os valores de (4.43) e (4.44) na equação (4.42) encontraremos

$$\begin{aligned}
 [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \partial_\mu(\Gamma_{\nu\lambda}^\rho V^\lambda) - \partial_\nu(\Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda) \\
 &\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \partial_\nu V^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \partial_\mu V^\alpha \\
 &\quad + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha V^\lambda + \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda \\
 &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha) V^\lambda.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

O lado direito da equação (4.44) é o que chamamos de **tensor de curvatura de Riemann-Christoffel**. Que pode ser reorganizado para

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \tag{4.46}$$

Podemos definir então

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = g_{\alpha\lambda} R_{\beta\lambda\delta}^\lambda. \tag{4.47}$$

As simetrias desse tensor são

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\lambda} \tag{4.48}$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = -R_{\beta\alpha\lambda\delta} \tag{4.49}$$

$$R_{\alpha[\beta\lambda\delta]} = 0 \iff R_{\alpha\beta\lambda\delta} + R_{\alpha\delta\beta\lambda} + R_{\alpha\lambda\delta\beta} = 0 \tag{4.50}$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\delta} = R_{\lambda\delta\alpha\beta} \tag{4.51}$$

Segundo (8) tensor de Riemann permite definir um tensor bastante importante em relatividade geral, estamos falando do tensor de Ricci. **O tensor de Ricci** é definido como a contração do tensor de Riemann com ele mesmo, observe:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda. \tag{4.52}$$

Onde tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  é simétrico, ou seja,

$$R_{\nu\mu} = R_{\mu\nu}. \tag{4.53}$$

Assim, para  $n = 4$  (ou seja, os índices variando entre 0, 1, 2, 3) teremos o tensor de Ricci com 10 componentes independentes. O tensor de Riemann-Christoffel por sua vez teria  $n^4 = 256$  componentes independentes mas as condições de simetria acima expostas vinculam esse tensor para ter apenas  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) = 20$  componentes independentes.

A contração do tensor de Ricci com a métrica nos fornece o **escalar de Ricci** ou escalar de

curvatura. Observe:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.54)$$

## 4.6 EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

### 4.6.1 TENSOR MOMENTO-ENERGIA

O princípio da equivalência e o princípio da covariância geral requerem que consideremos a matéria do universo como a fonte de campos gravitacionais que serão representados pela geometria do espaço e que as grandezas físicas sejam representadas por tensores, em geral.

Gravitação é uma teoria de campos clássica e desejamos poder descrever a matéria também usando os métodos usuais de teorias de campos. Nesse caso a matéria é representada por uma Lagrangiana adequada para descrever o tipo de matéria desejada: campos escalares, vetoriais, espinoriais ou qualquer outra generalização desejada.

O princípio de covariância geral requer ainda que a Lagrangeana que representa a matéria seja invariante por transformações de coordenadas e o teorema de Noether portanto, afirma existir uma corrente conservada associada a essa simetria do problema Físico. Segundo essa visão, é natural definir o tensor momento-energia associado a uma Lagrangeana de campos de matéria como sendo o gerador associado à simetria de transformações por difeomorfismos. Difeomorfismos são variações da métrica do espaço-tempo e portanto é natural definir o tensor momento-energia conforme é definido em (9):

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_M. \quad (4.55)$$

onde  $S_M$  é a ação que descreve a matéria adequadamente acoplada à geometria de espaços curvos (isto é, com a definição correta de elemento de volume apropriado e a noção de acoplamento mínimo implementada, substituindo-se as derivadas ordinárias por derivadas covariantes):

$$S_M = \int \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L}_M(\Phi, \nabla_\mu \Phi). \quad (4.56)$$

Explicitando (4.56) em termos de  $g_{\mu\nu}$  teremos

$$\delta_g S_M = \int d^4x T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (4.57)$$

Isso resulta na dedução da equação do tensor-momento energia de um fluido perfeito extremamente importante no estudo da cosmologia inflacionária. Segundo (8) Um fluido perfeito



é caracterizado por três quantidades:  $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ ; campo de densidade própria  $\rho_0 = \rho_0(x)$ ; e o campo de pressão escalar  $P = P(x)$ . O tensor momento-energia para um fluido perfeito é da forma

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta + p S^{\alpha\beta}. \quad (4.58)$$

O tensor  $S^{\alpha\beta}$  é um tensor simétrico de posto 2 definido por

$$S^{\alpha\beta} = \lambda u^\alpha u^\beta + \mu g^{\alpha\beta}, \quad (4.59)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes. A continuidade da equação (4.97) implica que  $\lambda = 1$  e  $\mu = -1$ . Assim podemos reescrever (4.58) substituindo os valores de (4.59),

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_0 + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}. \quad (4.60)$$

A equação (4.60) é a definição do tensor momento-energia de um **fluido perfeito**. Segundo (11) para um gás onde a pressão é nula chamado de **poeira**  $p = 0$  a equação (4.60) fica

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta. \quad (4.61)$$

O gradiente desta função é importante para dar informações sobre o movimento dos elementos do fluido em um região não homogenia.

Outro tensor momento-energia importante é o tensor **momento-energia de Maxwell**, que em (8) é definido como

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( -g^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (4.62)$$

Na região de uma fonte as equações de campo são chamadas de *equações de Einstien-Maxwell* e são denotadas por

$$T_{\alpha\beta} = -2 - g^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.63)$$

A densidade de energia é dada pela a componente de (4.62)

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad (4.64)$$

e a densidade de momento

$$(T_{01}, T_{02}, T_{03}) = -\frac{1}{4\pi} (E \times B). \quad (4.65)$$

## 4.6.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

A gravitação newtoniana descreve o potencial gravitacional satisfazendo uma equação de Poisson onde a fonte está relacionada com a densidade de matéria. Uma generalização relativística dessa equação deve levar em conta que a densidade de matéria está relacionada à outras correntes por meio de transformações de Lorentz. Em verdade já sabemos que a densidade de energia, pressão e tensões relacionadas à matéria estão todas no mesmo tensor, o tensor momento-energia. Por analogia com a mecânica newtoniana e imbuídos no espírito do princípio da equivalência e da covariância geral é natural procurarmos uma generalização da equação de Newton da forma

$$E_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.66)$$

onde o tensor  $E_{\mu\nu}$  deve obedecer algumas restrições de ordem física e matemática. A primeira é que  $E_{\mu\nu}$  deve ser um tensor construído em termos da métrica e de suas derivadas (primeira e segunda) e possuem dimensão da segunda derivada dela. Além de ser simétrico. Outro ponto importante é que se  $T_{\mu\nu}$  é covariantemente conservado,  $E_{\mu\nu}$  também será.

Pode ser encontrado em (6) que a última imposição é que para um campo gravitacional não-relativístico tem:

$$E_{00} = \Delta g_{00}. \quad (4.67)$$

Temos também que para um campo estático fraco produzido por um densidade de carga não relativística  $\rho$  a componente tempo-tempo dada por

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\Phi). \quad (4.68)$$

Onde  $\Phi$  é o potencial newtoniano determinado pelas as equações de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (4.69)$$

e  $G$  é a constante de Newton. Porém, a densidade de energia  $T_{00}$  para a métrica não é relativística, no entanto, também é

$$T_{00} \simeq \rho. \quad (4.70)$$

Combinando estas equações nós temos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\Phi T_{00}. \quad (4.71)$$

Esta equação de campo é não relativística e não respeita a invariância de Lorentz.

Entretanto, podemos escrevê-la em termos da distribuição do tensor momento-energia  $T_{\alpha\beta}$  da forma

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi GT_{\alpha\beta}, \quad (4.72)$$

em que  $G_{\alpha\beta}$  é uma combinação não-linear da métrica e de suas derivadas primeiras e segunda.

Através do princípio de equivalência sabemos que as equações que governam os campos gravitacionais de uma força arbitrária deve assumir a forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \quad (4.73)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Usando a identidade de Bianchi<sup>4</sup> temos que a divergência de  $G_{\mu\nu}$  é

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = \left( \frac{C_1}{2} + c_2 \right) R_{;\mu}. \quad (4.74)$$

Para essa equação anular-se devemos ter  $C_1 = -C_2/2$ , assim (4.73) pode ser reescrita como

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (4.75)$$

entretanto, podemos considerar  $C_1 = 1$ , logo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.76)$$

Estas são as **equações de Einstein**.

Contraindo (4.76) em termos do inverso da métrica  $g^{\mu\nu}$ , temos

$$R - 2R = -8\pi GT_{\mu}^{\mu}, \quad (4.77)$$

ou

$$R = 8\pi GT_{\mu}^{\mu}, \quad (4.78)$$

substituindo em (4.76) fica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (8\pi GT_{\mu}^{\mu}) = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.79)$$

No vácuo  $T_{\mu\nu} = 0$ , logo

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (4.80)$$

Esse foi o resultado final do magnífico trabalho iniciado por Einstein logo após a propositura

<sup>4</sup>Para mais detalhes sobre a identidade de Bianchi veja (8).

da Relatividade Especial, em 1905. Seu desenvolvimento demorou uma década mas obteve uma expressão de extrema simplicidade que representa todos os princípios físicos que se queria introduzir na teoria de maneira clara. Embora a justificativa física utilizada com as analogias com a mecânica clássica possam parecer insuficientes, a equação apresenta extrema elegância e simplicidade e do ponto de vista matemático parece essencialmente única. Mesmo assim nada garante ainda que essa equação possa descrever o comportamento de campos gravitacionais.

Contudo, pode-se mostrar que essa equação apresenta um limite não-relativístico compatível com a mecânica newtoniana e as previsões feitas com essa teoria apresentam enorme precisão experimental.

Tida como a grande obra-prima de Einstein, a teoria da Relatividade Geral, resumida em uma equação tão simples, é hoje considerada a teoria clássica da gravitação e o estudo de suas consequências continua intrigando gerações de Físicos.

Num trabalho cuja principal preocupação é salientar as técnicas de teorias de campos utilizadas na Física é importante observar que essa equação de movimento deve ser também obtida por meio de um princípio variacional. Nessa formulação a relatividade geral mostra ainda uma maior simplicidade e elegância e possíveis generalizações ficam claras.

As equações de Einstein podem ser obtidas a partir de um princípio variacional baseado em uma Lagrangiana. Para construirmos uma Lagrangiana que tenha como campo a métrica precisamos construir uma Lagrangiana em termos de derivadas segundas desse tensor, e o tensor de curvatura é o elemento geométrico que depende das segundas derivadas da métrica. Impondo ainda que a ação seja um escalar temos apenas uma possibilidade para considerar:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (4.81)$$

Esta equação é chamada **ação de Einstein-Hilbert** e  $g$  é o determinante da métrica. O princípio de mínima ação segundo (3) nos diz que as equações de movimento são determinadas a partir de

$$\delta_g S_{EH} = 0, \quad (4.82)$$

temos ainda que:

$$\begin{aligned} \delta_g S_{EH} &= \int d^4x \delta_g [\sqrt{-g} R] \\ &= \int d^4x [(\delta_g \sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} (\delta_g R)]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Analisando separadamente os termos  $\delta_g \sqrt{-g}$  e  $\delta_g R$ :

$$\delta_g \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.84)$$

$$\delta_g R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}). \quad (4.85)$$

Substituindo estes termos em (4.83) teremos

$$\begin{aligned} \delta_g S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Pode ser mostrado que a variação  $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\nu)$ . Logo o termo da variação do tensor de Ricci é uma derivada total e não contribui para a variação funcional, assim

$$\delta_g S_{EH} = \int d^4x \left( R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g}. \quad (4.87)$$

Não há nenhuma restrição para colocarmos um termo de constante cosmológica  $\Lambda$ , e com esse feito teremos a equação (4.81) escrita como

$$S_{EH,\Lambda} = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (4.88)$$

A constante cosmológica será introduzida na abordagem clássica das Equação de Friedmann na seção (5.2).

Essa formulação nos permite calcular a **ação total**  $S_T$  em termos separados, ou seja, podemos separar a ação do campo gravitacional e da matéria de tal forma que

$$S_T = \frac{1}{8\pi G} S_{EH} + S_M. \quad (4.89)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional newtoniana. Além disso, podemos também escrever

$$\delta S_T = \frac{1}{8\pi G} \delta S_{EH} + \delta S_M. \quad (4.90)$$

Se substituirmos na equação (4.90) as equações (4.87) e (4.57) teremos

$$\delta S_T = \int d^4x \left[ \frac{1}{8\pi G} \left( R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (4.91)$$

Desta forma o princípio de mínima ação nos diz que

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.92)$$

e portanto mostramos que as equações de Einstein podem ser obtidas a partir de um princípio variacional.

Consideremos agora um variação de coordenadas geradas por um campo vetorial  $V^\mu$ :

$$\begin{cases} \delta x'^\mu = V^\mu \\ \delta g_{\mu\nu}^{(V)} = \nabla_\mu V^\nu + \nabla_\nu V^\mu. \end{cases} \quad (4.93)$$

Essa transformação implicará em uma ação de Einstein-Hilbert da forma  $V^\mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{EH}}{\delta_{(V)}^{\mu\nu}} &= \int d^4x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu} (\nabla_\mu V^\nu + \nabla_\nu V^\mu)] \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\mu G_{\mu\nu} V^\nu + \nabla_\nu G_{\mu\nu} V^\mu]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Uma das propriedades do tensor de Einstein é que ele é simétrico e  $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ , logo

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta_{(V)}^{\mu\nu}} = -2 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu G_{\mu\nu}) V^\nu. \quad (4.95)$$

O vetor contravariante  $V^\mu$  introduz uma transformação de coordenadas e devemos impor que a Física seja invariante por transformações de coordenadas, ou seja, os fenômenos Físicos não dependem do observador, isso implica que

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (4.96)$$

Assim,  $G_{\mu\nu}$  satisfaz uma lei de conservação. É fácil perceber que uma aplicação análoga dessa transformação de coordenadas na ação da matéria acarreta uma lei de conservação semelhante para o tensor momento-energia:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (4.97)$$

## 5 APLICAÇÃO: MÉTRICA DE FRIEDMAN-ROBERTSON-WALKER

### 5.1 MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

A teoria da relatividade geral permite pela primeira vez o estudo matemático de propriedades do universo como um todo, ou seja, da cosmologia.

Uma importante ferramenta nesse estudo será discutida aqui, um modelo simplificado que apresenta, a despeito de sua simplicidade, muitas características importantes que acreditamos sejam válidas para o nosso universo.

Esse modelo é conhecido como modelo de Friedmann-Robertson-Walker e é baseado na métrica com o mesmo nome.

O princípio cosmológico assume que o universo, em largas escalas, é homogêneo e isotrópico e esse fato é verificado experimentalmente com certo grau de precisão. Assim, vamos tentar descrever o universo com essa suposição quanto a sua simetria. Isso indica que o universo não é necessariamente estático, mas que suas seções espaciais devem ser espaços 3-dimensionais maximalmente simétricos. Existem apenas três desses espaços em três dimensões, o espaço plano, a esfera e o hiperbolóide. Essas três possibilidades podem ser contempladas em uma métrica como expressa abaixo que é a única métrica homogênea e isotrópica possível, como pode ser visto em (8):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi) \right]. \quad (5.1)$$

onde os valores de  $k$  representam a topologia do universo. Conforme vemos em (12) e (11) com  $k = 0$  teremos plano, com  $k = 1$  teremos uma esfera e  $k = -1$  teremos um hiperbolóide, com consequências para a evolução do universo.

A métrica  $g_{\mu\nu}$  é representada pela a matriz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a^2(t) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

E também sua inversa,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Enquanto, as componentes das diferenciais serão dadas por

$$\begin{aligned} dx^0 &= dt, \\ dx^1 &= dr, \\ dx^2 &= d\theta, \\ dx^3 &= d\phi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Tomemos essa métrica como a representação da geometria do universo e calculemos os seus tensores de curvatura.

Primeiramente calculemos os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  em termo da métrica (5.1) usando a equação (4.30). Primeiro faremos para  $\lambda = 0$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)\dot{a}(t)}{kr^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a(t)\dot{a}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a(t)\dot{a}(t) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Para  $\lambda = 1$ , teremos

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & -\frac{kr}{kr^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(kr^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r(kr^2-1) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$



Já para  $\lambda = 2$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & \frac{1}{r} & r(kr^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Por fim, para  $\lambda = 3$  temos

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Os tensores de curvatura  $R_{\mu\nu\rho}^{\nu}$  possuem os seguintes valores diferentes de zero: Primeiro os valores de  $R_{\mu 0\rho}^0$  são

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{kr^2 - 1}, \\ R_{202}^0 &= -r^2 a(t)\ddot{a}(t), \\ R_{303}^0 &= -r^2 a(t)\ddot{a}(t) \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em seguida os valores de  $R_{\mu 0\rho}^1$  são

$$\begin{aligned} R_{010}^1 &= \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \\ R_{212}^1 &= -r^2(k + \dot{a}^2(t)) \\ R_{313}^1 &= -r^2 \sin^2\theta(k + \dot{a}^2(t)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Enquanto para os valores de  $R_{\mu 2\rho}^2$  são

$$\begin{aligned} R_{020}^2 &= \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \\ R_{121}^2 &= -\frac{k + \dot{a}^2(t)}{kr^2 - 1} \\ R_{323}^2 &= -r^2 \sin^2\theta(k + \dot{a}^2(t)). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por fim, para os valores de  $R_{\mu 3\rho}^3$  são

$$\begin{aligned} R_{030}^3 &= \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \\ R_{131}^3 &= -\frac{k + \dot{a}^2(t)}{kr^2 - 1} \\ R_{232}^3 &= -r^2(k + \dot{a}^2(t)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Estas contas pode ser encontradas no Apêndice C.

O escalar de Ricci  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  em termos da métrica de Friedmann-Robertson-Walker possui o valor de

$$R = \frac{6[k + \dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)]}{a^2(t)}. \quad (5.13)$$

Na suposição de um universo homogêneo e isotrópico representaremos as galáxias como um fluido não-interagente descrito apenas pela densidade de energia e pressão. Na verdade essa possibilidade é fixada pela própria simetria da métrica conforme pode ser encontrado em (9), embora não vamos provar esse resultado.

O Tensor momento-energia que descreve essa matéria  $T_{\mu\nu}$  é escrita como

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

onde  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  é um sistema de coordenadas comóvel. Isto é exatamente o tensor momento-energia de um fluido perfeito. E  $u_\mu$  é a velocidade do fluido com respeito ao sistema de coordenadas de repouso em relação ao fluido. Temos também  $\rho$  como a densidade de energia e  $p$  é a pressão.

A conservação do tensor momento-energia representa uma equação de continuidade e não fornece, portanto, toda a informação sobre o fluido de interesse. É necessário alguma informação adicional que complemente a informação que seria obtida com a Lagrangiana. Essa informação é uma equação de estado, ou seja, uma relação entre as grandezas macroscópicas do problema. Consideremos o caso mais simples e usual,

$$P = \omega\rho, \quad (5.15)$$

e  $\omega$  é um parâmetro da equação de estado.

Aplicando a conservação do tensor momento-energia, a única consequência não-trivial vem de

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu 0}^\mu T^{\nu 0} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.16)$$

que para um fluido perfeito é expressa como

$$\partial_t \rho(t) + \Gamma_{\mu 0}^\mu \rho(t) + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} = 0. \quad (5.17)$$

Inserindo o resultado encontrados para os símbolos de Christoffel teremos

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (5.18)$$

Para essa matéria podemos obter também as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (5.19)$$

Onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

Apenas duas componentes são não-triviais de (5.19), as componentes

$$\begin{cases} R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{ij}. \end{cases} \quad (5.20)$$

com isso as equações de Einstein nos fornecem

$$\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda. \end{cases} \quad (5.21)$$

Temos então duas equações como consequência da equação de Einstein e uma equação de conservação. Essas três equações não são independentes já que a conservação do tensor momento-energia esta relacionada com a conservação do tensor de Einstein. Assim temos apenas duas equações independentes para descrever essa cosmologia e em geral é conveniente que se escolha apenas as duas equações que tem derivadas de primeira ordem uma vez que equações diferenciais de primeira ordem são em gerais muito mais fáceis de resolver do que equações de segunda ordem.

## 5.2 EQUAÇÃO DE FRIEDMANN EM UMA ABORDAGEM CLÁSSICA

A equação de Friedmann descreve a expansão do Universo e é a mais importante equação da cosmologia. Ela é derivada da energia potencial gravitacional e da energia cinética de um sistema de partículas.

Assim como é abordado em (12) iremos considerar o Universo expandindo de forma uniforme, com densidade  $\rho$  com uma massa contida em um determinado volume. Podemos considerar qualquer ponto como sendo o centro. Com isso, consideraremos uma partícula a uma distância  $r$  de um determinado ponto e de massa  $m$ . segundo a teoria newtoniana esta partícula está sob ação de um campo de força devido ao meio em que esta partícula esta contida.

Este meio possui uma massa dada por

$$M = 4\pi\rho r^3/3, \quad (5.22)$$

contribuindo para a força gravitacional, de seguinte forma,

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3}, \quad (5.23)$$

e assim a partícula possui uma energia potencial gravitacional

$$V = \frac{GMm}{r} = \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}. \quad (5.24)$$

A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \quad (5.25)$$

A equação que trata do deslocamento em relação a  $r$  é derivada do teorema da conservação de energia que dado por

$$U = T + V, \quad (5.26)$$

onde  $U$  é constante. Substituindo as equações (5.24) e (5.25) em (5.26), temos

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m. \quad (5.27)$$

Esta equação descreve a separação de duas partículas.

Por conta da homogeneidade do Universo chamaremos as demais coordenadas de "coordenadas perturbadas". Estas são as coordenadas levadas junto à expansão. Como a expansão é uniforme, a relação entre a distância real  $\vec{r}$  e a distância perturbada  $\vec{x}$  é

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (5.28)$$

a homogeneidade nos assegura que  $a(t)$  é uma função de um tempo unitário. A quantidade  $a(t)$  é crucialmente única, e é o fator de escala da expansão do Universo. É a medida da taxa de expansão do Universo. Ela nos diz que as distâncias físicas estão crescendo ao longo do tempo. Por fim, substituindo a equação (5.28) na equação (5.26), encontramos a equação

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2 x^2 m, \quad (5.29)$$

e multiplicando por  $2/m^2 x^2$ , finalmente, chegamos a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (5.30)$$

onde  $k = -2U/mx^2$ . Esta é a equação de Friedmann para a expansão do Universo.

### 5.3 INFLAÇÃO

Na formulação da relatividade geral, Einstein acreditava em um Universo estático, mas, essa teoria é incompatível com isso. Esse fato se dá simplesmente por conta de toda a atração gravitacional existente, e nenhuma solução dessas equações corresponde a um Universo estático. Para solucionar esse problema, Einstein propôs uma mudança em suas equações, algo que ele consideraria "o maior erro" de sua vida. Isso era a constante cosmológica.

A introdução deste termo, embora enfraquecido por Einstein, é hoje um dos mais importantes e enigmáticos termos da cosmologia. A constante cosmológica, hoje, aparece como um termo extra na equação de Friedmann e se dá da seguinte forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5.31)$$

onde  $\Lambda$  tem unidades de  $[\text{tempo}]^{-2}$ . A constante cosmológica é descrita em termos da geometria Euclidiana plana,  $k = 0$ .

O efeito de  $\Lambda$  pode ser visto mais diretamente na equação da aceleração, mas usando a equação de Friedmann agora como dado em (5.31), temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.32)$$

Em princípio a constante cosmológica pode ser positiva ou negativa, entretanto, estudaremos o caso positivo. Isso acarreta em uma contribuição para  $\ddot{a}$  positiva, e assim, efetivamente para uma força repulsiva. Em particular a constante cosmológica é suficientemente grande, podendo superar a atração gravitacional e proporcionar a inflação. Todas as condições do lado direito são significativas, então isto é bastante complexo. Felizmente, as duas primeiras condições estão reduzidas rapidamente pela a expansão, enquanto o último termo permanece constante. Assim, depois de certo tempo, unicamente a constante cosmológica será significativa e teremos

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.33)$$

como  $H = \dot{a}/a$ , temos que

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}a. \quad (5.34)$$

A solução desta equação é

$$a(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right). \quad (5.35)$$

Assim, quando o Universo é dominado pela a constante cosmológica a expansão se torna extremamente acelerada.

## 6 COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA

Nesse capítulo mostraremos uma forma alternativa e prática de fazer todos os cálculos do Apêndice C cujos resultados foram mostrados na seção (5.1) do capítulo (5). Faremos isso através do uso da computação simbólica. O programa utilizado foi o Mathematica, com ele podemos calcular todos os tensores de Reimann, entretanto mostraremos como calcular o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ .

Primeiro o que deve ser feito é baixar o pacote do Mathematica RGTC<sup>1</sup> que pode ser encontrado facilmente no site [http : // www.inp.demokritos.gr/~sbonano/RGTC/](http://www.inp.demokritos.gr/~sbonano/RGTC/). As funções usadas para operar sobre todos os tensores da geometria Reimanniana são: *Raise/Lower* para baixar ou levantar índices, *Contract* para especificar múltiplos índices, *Covariant and Lie Differentiation* e *Covariant Divergence*. Essas funções, juntamente com as funções do Mathematica *Outer* (usada para produtos de tensores) e *Transpose* (para o rearranjo dos índices), fornecem as ferramentas necessárias para executar todas as operações dos tensores Reimannianos no computador, no entanto, mostraremos apenas os cálculos do tensor de Ricci.

O primeiro passo para iniciar os cálculos, após a instalação do pacote RGTC, é introduzir o código de inicialização

$$\ll \text{EDCRGTCcode.m} \quad (6.1)$$

Esse código vem combinado com o código de EDC (do inglês: Exterior Differential Calculus) para permitir os cálculos em frames arbitrários.

Em seguida especificamos o espaço de Riemann, criando uma lista de símbolos (= coordinates), usaremos um sistema de coordenadas esféricas, para isso digitamos o comando

$$\mathbf{xcoord} = \{r, \theta, \phi, t\} \quad (6.2)$$

Para especificar uma matriz simétrica das funções destas coordenadas usamos o comando (= metric tensor). Os nossos cálculos serão em termos da métrica de Friedman-Robertson-Walker,

<sup>1</sup>O pacote RGTC é compatível com a versão Mathematica 3.0 ou todas as versões posteriores.

sendo assim, digitamos

$$g = \{ \{-1, 0, 0, 0\}, \{0, a[t]^2/(1 - kr^2), 0, 0\}, \\ \{0, 0, a[t]^2 r^2, 0\}, \{0, 0, 0, r^2 a[t]^2 \sin[\theta]^2\} \}; \quad (6.3)$$

Em seguida digitamos

$$\text{simpRules} = \text{TrigRules}; \quad (6.4)$$

e por último

$$\text{RGtensors}[g, \text{xCoord}] \quad (6.5)$$

Seguindo estes passos podemos calcular os elementos da métrica  $g_{\mu\nu}$  e de sua inversa  $g^{\mu\nu}$  digitando simultaneamente as teclas Shift e Enter sequencialmente em (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5), com isso teremos:

$$g_{dd} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a[t]^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a[t]^2 \sin[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{LineElement} = -\frac{a[t]^2 d[r]^2}{-1+kr^2} - d[t]^2 + r^2 a[t]^2 d[\theta]^2 + r^2 a[t]^2 d[\varphi]^2 \sin[\theta]^2$$

$$g^{UU} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{-1+kr^2}{a[t]^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a[t]^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{Csc}[\theta]^2}{r^2 a[t]^2} \end{pmatrix}$$

gUU computed in 0.047 sec

Gamma computed in 0.016 sec

Riemann(dddd) computed in 0.031 sec

Riemann(Uddd) computed in 0.016 sec

Ricci computed in 0. sec

Weyl computed in 0.047 sec

**Conformally Flat**

Einstein computed in 0. sec

onde a matriz  $g^{\mu\nu}$  é simbolizada por gdd e a matriz  $g_{\mu\nu}$  é simbolizada por gUU.

Todos os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$  também podem ser calculados de forma rápida e prá-



tica, para isso introduzimos o comando  $\text{GUdd}[[\text{valor dos \u00edndices}]]//\text{MatrixForm}^2$  e em seguida digitamos  $\text{Shift}+\text{Enter}$ , novamente. Mais uma vez encontraremos os valores esperados:

$\text{GUdd}[[1]]//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a[t]a'[t]}{-1+kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2a[t]a'[t] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2a[t]\text{Sin}[\theta]^2a'[t] \end{pmatrix}$$

$\text{GUdd}[[2]]//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{a'[t]}{a[t]} & 0 & 0 \\ \frac{a'[t]}{a[t]} & -\frac{kr}{-1+kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(-1+kr^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r(-1+kr^2)\text{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

$\text{GUdd}[[3]]//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a'[t]}{a[t]} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{a'[t]}{a[t]} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\theta] \end{pmatrix}$$

$\text{GUdd}[[4]]//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a'[t]}{a[t]} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \text{Cot}[\theta] \\ \frac{a'[t]}{a[t]} & \frac{1}{r} & \text{Cot}[\theta] & 0 \end{pmatrix}$$

As componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\sigma\nu}^\lambda$  s\u00e3o calculadas no frame (default = coordenar frame), e em um frame nulo a rotina principal (RGtensors) calcula o escalar de Ricci  $R$ , para isso, digitamos os comandos  $\text{Shift}+\text{Enter}$ , ap\u00f3s introduzir  $\text{Rdd}$  e  $R$ , representando o tensor e o

<sup>2</sup>O comando  $\text{GUdd}[[1]]//\text{MatrixForm}$  significa  $g_{00}$ , o comando  $\text{GUdd}[[2]]//\text{MatrixForm}$  significa  $g_{11}$ , e assim por diante.

escalar em questão respectivamente, assim teremos:

Rdd

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ -\frac{3a''[t]}{a[t]}, 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{2k + 2a'[t]^2 + a[t]a''[t]}{-1 + kr^2}, 0, 0 \right\}, \\ \left\{ 0, 0, r^2(2k + 2a'[t]^2 + a[t]a''[t]), 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, r^2 \sin[\theta]^2(2k + 2a'[t]^2 + a[t]a''[t]) \right\} \end{array} \right\}$$

R

$$\frac{6(k + a'[t]^2 + a[t]a''[t])}{a[t]^2}$$

Queremos salientar que basta apenas seguir os procedimentos (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5) juntamente com os comandos GUdd[[1, 2, 3, 4]]//MatrixForm, em seguida introduzir Rdd e R, todos seguidos do comando Shift+Enter, e todos os resultados esperados serão encontrados.

Com isso podemos ver que essa ferramenta é bastante útil em cálculos extensos, lembrado existe outras maneiras possíveis de fazer esses cálculos usando o Mathematica, para isso pode ser encontradas várias alternativas similares em sites da internet, no entanto, essa foi a alternativa mais prática e rápida que encontramos.

## 7 **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Foram abordados nesse trabalho elementos de teoria clássica de campos. Os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano entraram como peças fundamentais para a análise de sistemas dinâmicos de partículas com número finito de graus de liberdade e foi à porta para o entendimento de sistemas dinâmicos de partículas com número infinito de graus de liberdade. Esse princípio proporciona uma nova maneira de analisar a formulação matemática de sistemas físicos. Nesta mesma seção (2.1) abordamos as transformações canônicas como a parte introdutória do conceito de transformações de coordenadas.

As transformações de coordenadas foi um tema constante em todo nosso trabalho. Em relatividade especial as transformações de Lorentz, são as que deixam invariante a métrica que descreve qualquer observador inercial. Isso foi essencial para a teoria de Einstein que postulava invariância da velocidade da luz com respeito a qualquer observador inercial em concordância com as leis de Maxwell do eletromagnetismo. Na presença de um campo gravitacional, necessitamos de uma nova transformação de coordenadas, então introduzimos o conceito de transformações de coordenadas gerais ou difeomorfismos, impondo também a introdução dos conceitos de álgebra tensorial através de operações simples com vetores e derivadas covariantes.

Em relatividade geral aprendemos que o espaço quadridimensional, introduzido em relatividade especial, curva-se com a presença de matéria. Através da álgebra de tensores mostramos como calcular essa curvatura. E como Einstein demonstrou a gravitação em termos do efeito geométrico da curvatura do espaço tempo. Analisamos ainda a métrica de Friedmann-Robertson-Walker e as equações de Einstein por ela obedecidas, que são os pilares da cosmologia moderna, permitindo a modelagem da evolução do universo em suas diferentes fases, desde o Big Bang, passando pela era inflacionária até a fase dominada pela matéria em que vivemos na atualidade. Esse estudo hoje atende pelo nome de Modelo Padrão da Cosmologia.

Em síntese esse trabalho nos foi extremamente proveitoso do ponto de vista formativo, levando em consideração o fato dele abordar temas que não fazem parte dos conteúdos programáticos das disciplinas ofertadas pelo curso de Licenciatura em Física.

Sem deixar de levar em conta o enriquecimento propiciado pelo aprendizado e aperfeiçoamento em técnicas de Computação Simbólica através do uso do programa Mathematica como ferramenta extremamente útil na resolução de cálculos longos e complicados.

Este trabalho foi de grande utilidade para as perspectivas de nossa formação profissional, tendo em vista a importância para a física teórica que os temas abordados possuem, além de propiciar uma preparação para um Mestrado na área de Física de Partículas Elementares de Altas Energias, tendo em vista que o tema estudado é de grande relevância para o desenvolvimento recente dessa área.

## APÊNDICE A – TEORIA DA DISTRIBUIÇÃO

A **teoria das distribuições** ou das **funções generalizadas** tem como objetivo estender a definição matemática de funções. Essa teoria diz que uma sequência de funções  $f_n(x)$  converge para uma função  $g(x)$  infinitamente diferenciável, os livros usados como referência foram (13), (14) e (15).

O nosso estudo será feito através de uma sequência de integrais e assumiremos os limites de integração como sendo de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Assumiremos que  $g(x)$  tem suporte compacto. A essa função  $g(x)$  chamaremos de função teste, pois serve para testar propriedades específicas de cada distribuição.

Enunciaremos agora as **funções admissíveis**. As funções admissíveis serão infinitamente diferenciáveis no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ , podendo possuir comportamento arbitrário no infinito. Esta classe de funções pode ser ampliada para abranger a uma classe de funções não necessariamente suaves, e também, distribuições.

Uma sequência de funções admissíveis  $f_n(x)$ , onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , será chamada de sequência fracamente convergente se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx \quad (\text{A.1})$$

existir para todas as funções teste  $g(x)$ .

Uma distribuição  $\phi(x)$  é definida como um conceito matemático associado a uma sequência fracamente convergente de funções. A integral é simbolizada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx, \quad (\text{A.2})$$

e só tem significado se associada a equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx. \quad (\text{A.3})$$

Para descrever a relação entre uma sequência convergente  $f_n(x)$  e uma distribuição  $\phi(x)$  diremos que a sequência  $f_n(x)$  converge fracamente para a distribuição  $\phi(x)$ . Isso porque, uma

distribuição não define a uma função em um ponto, mas pode equivaler-se a uma função na redondeza dele.

As distribuições podem ser sujeitadas a várias operações lineares comuns a funções ordinárias. Elas podem ser somadas e multiplicadas por constantes, ou seja, combinações lineares de distribuições também são distribuições. Isso se dá por conta da sequência de integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(x) + h_n(x)]g(x)dx \quad (\text{A.4})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Cf_n(x)]g(x)dx \quad (C = \text{cte.}). \quad (\text{A.5})$$

Distribuições também podem ser multiplicadas por infinitas funções diferenciáveis. Podemos observar isso, se considerarmos a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(x)h_n(x)]g(x)dx, \quad (\text{A.6})$$

onde,  $h(x)$  é uma função infinitamente diferenciável e a sequência  $f_n(x)$  é fracamente convergente. Se fizermos  $y_n(x) = h(x)f_n(x)$  teremos funções admissíveis. A integral acima também converge para  $n \rightarrow \infty$ , pois pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)[h_n(x)g(x)]dx \quad (\text{A.7})$$

e  $\bar{g}(x) = h(x)g(x)$  é, notoriamente, uma função teste.

Difícilmente, o produto entre distribuições poderá ser feito. E o caso em que elas sejam arbitrárias será matematicamente improvável.

As distribuições também permitem transformações lineares de uma variável independente, isto é, se  $\phi(x)$  é uma distribuição, então  $\phi(x - a)$  e  $\phi(Cx)$  também são distribuições (onde  $a$  e  $C$  são constantes). Elas são definidas por uma sequências de funções admissíveis  $f_n(x - a)$  e  $f_n(Cx)$ , que são fracamente convergentes. Para observar isso, podemos notar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x - a)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x + a)dx \quad (\text{A.8})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(Cx)g(x)dx = \frac{1}{|C|} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x/C)dx, \quad (\text{A.9})$$

onde  $g(x + a)$  e  $g(x/C)$  são funções teste e  $f_n(x)$  é fracamente convergente.

Uma das propriedades mais importantes das distribuições é sua infinita diferenciabilidade.

A derivada de uma distribuição  $\phi(x)$  é associada a sequência de derivadas de funções admissíveis  $f_n(x)$ , que convergem fracamente em  $\phi(x)$ . Para verificar isso, basta notar que  $f'_n(x)$  será uma função admissível se  $f_n(x)$  também for. Além disso, integrando por partes, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'_n(x)g(x)dx = f_n(x)g(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g'(x)dx. \quad (\text{A.10})$$

A primeira parte do lado esquerdo da segunda equação de (A.10) se anula, isso se deve ao fato de  $g(x)$  anular-se em um intervalo infinito. Como  $g'(x)$  é uma função teste, o limite ( $n \rightarrow \infty$ ) do lado direito da integral existe. Isso implica que o limite do lado esquerdo da integral deve existir. Então,  $f'_n(x)$  é fracamente convergente para alguma distribuição definida para a derivada de  $\phi(x)$ , denotada por  $\phi'(x)$ . As distribuições  $\phi(x)$  e  $\phi'(x)$  são relacionadas pela fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'_n(x)g(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g'(x)dx. \quad (\text{A.11})$$

Para qualquer função teste  $g(x)$ . Esse resultado pode ser facilmente obtido usando o método de integração por partes, análogo a (A.10).

Como já dissemos uma distribuição não define uma função em um ponto, mas, em uma determinada região, então, considere  $x = \xi$ . Então se  $\bar{g}(x)$  é uma função teste diferente de zero dentro desta região, isto é, dentro do intervalo finito  $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$  e se para uma função  $f(x)$  e uma distribuição  $\phi(x)$  a relação

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \phi(x)\bar{g}(x)dx = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)\bar{g}(x)dx \quad (\text{A.12})$$

é válida para todas as funções  $\bar{g}(x)$  do tipo descrito acima, dizemos que  $\phi(x)$  é equivalente a  $f(x)$  na região do ponto  $\xi$ .

Após termos exposto as principais propriedades relativas às distribuições, enunciaremos agora o teorema da aproximação para distribuições.

**Teorema da Aproximação 1** *Para toda função contínua  $f(x)$  pode-se construir uma sequência  $f_n(x)$  de funções admissíveis, tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{A.13})$$

*para  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno e uniforme em  $x$  dentro de qualquer intervalo finito.*

Esse teorema impõe uma convergência uniforme, com isso, podemos chegar ao seguinte **corolário**: Para toda função contínua  $f(x)$  podemos encontrar uma distribuição equivalente

$\phi(x)$ , tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (\text{A.14})$$

para qualquer função teste  $g(x)$ .

Para um melhor entendimento dos conceitos tratados, até então, explanaremos as propriedades relativas a sequência delta de Dirac. Antes disso, detalharemos as propriedades da função delta de Dirac, ou simplesmente  $\delta(x)$ . Saliendo que as propriedades da função  $\delta(x)$  não são usadas para definir uma função, tão pouco uma função integrável.

Sendo assim, a função  $\delta(x)$  possui as seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ \infty & (x = 0). \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

A integral de  $\delta(x)$  é normalizada, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (\text{A.16})$$

Consideraremos agora, a seguinte operação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx, \quad (\text{A.17})$$

onde  $f(x)$  é uma função contínua. Através das propriedades descritas acima sabemos que  $\delta(x)$  é zero para  $x \neq 0$ , com isso podemos mudar os limites de integração para  $-\varepsilon$  e  $+\varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é um número positivo pequeno. O fato da continuidade de  $f(x)$  em  $x = 0$ , nos diz que seus valores para o intervalo  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$  não serão muito diferentes de  $f(0)$  e com isso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)f(x)dx \cong f(0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)dx. \quad (\text{A.18})$$

Esta aproximação melhora quando  $\varepsilon$  se aproxima de zero, no entanto,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)dx = 1. \quad (\text{A.19})$$

Isso é válido para todos os valores de  $\varepsilon$ , por conta de  $\delta(x) = 0$  para  $x \neq 0$ , e  $\delta(x)$  ser normalizada. Com isso, para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos exatamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0). \quad (\text{A.20})$$

Vale lembrar que os limites  $-\infty$  e  $+\infty$ , podem ser substituídos por dois números quaisquer  $a$  e  $b$ , onde  $a < 0 < b$ .



A integral acima é associada à propriedade de teste da função delta, onde  $\delta(x)$  atua na seleção de todos os valores possíveis para  $f(x)$  no ponto  $x = 0$ . Esta é uma forma de definir  $\delta(x)$ , ou seja, uma integral que satisfaça, irrestritamente, a propriedade (A.20) para toda  $f(x)$  contínua.

A aplicação da função delta de Dirac em uma função nos dá vários resultados, particularmente, interessantes. Por exemplo, considere  $\delta(x - a)$ , para  $a$  um número real qualquer. A integral (A.17), fica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx. \quad (\text{A.21})$$

Façamos  $x - a = \xi$ , assim,  $f(x) = f(\xi + a) = g(\xi)$  e  $dx = d\xi$ . Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) g(\xi) d\xi = g(0) = f(a). \quad (\text{A.22})$$

Agora, iremos ver o que acontecesse com  $\delta(ax)$ , onde  $a$  é uma constante qualquer. Analizaremos esse caso em duas etapas:

- *Primeira etapa:* Condere o caso em que  $a > 0$ .

Substituindo  $ax$  por  $\xi$  e  $dx$  por  $(1/a)d\xi$  a integral (A.17) ficará

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) f(\xi/a) (1/a) d\xi = (1/a) f(0). \quad (\text{A.23})$$

- *Segunda etapa:* Condere o caso em que  $a < 0$ .

Desta vez, faremos a mesma substituição anterior, entretanto, o limite de integração de (A.23) será invertido da forma

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(ax) f(x) dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\xi) f(\xi/a) (1/a) d\xi = -(1/a) f(0). \quad (\text{A.24})$$

Em qualquer caso, o resultado será  $(1/|a|)f(0)$  para  $a \neq 0$ . Conseqüentemente, podemos enunciar a regra

$$\delta(ax) = (1/|a|)\delta(x), \quad a \neq 0. \quad (\text{A.25})$$

Com isso concluímos, também, que  $\delta(x)$  é uma função par.

Tendo enunciado as propriedades da função delta. Pasaremos, agora, ao segundo ponto, a distribuição delta. Conforme pode ser visto na Figura ??,  $\delta(x)$  tem um pico alto, infinitamente estreito em  $x = 0$ . Mais uma vez lembremos que tal função não existe, no sentido usual de função. Porém, é possível definir uma sequência  $\phi_n(x)$  (onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) de funções

BIBLIOTECA

contínuas que obedecem a propriedade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx = f(0). \quad (\text{A.26})$$

Essas sequência são chamadas de sequência delta.

Por exemplo, as funções (veja a Figura 6)

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \geq 1/n), \\ n/2 & (|x| < 1/n), \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A.27})$$

formam uma sequência delta. Para verificar esse fato, consideremos a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx \quad (\text{A.28})$$

para qualquer função contínua  $f(x)$ . Com a definição de  $\phi_n(x)$ , temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n}{2}\right) f(x) dx = \left(\frac{n}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \quad (\text{A.29})$$

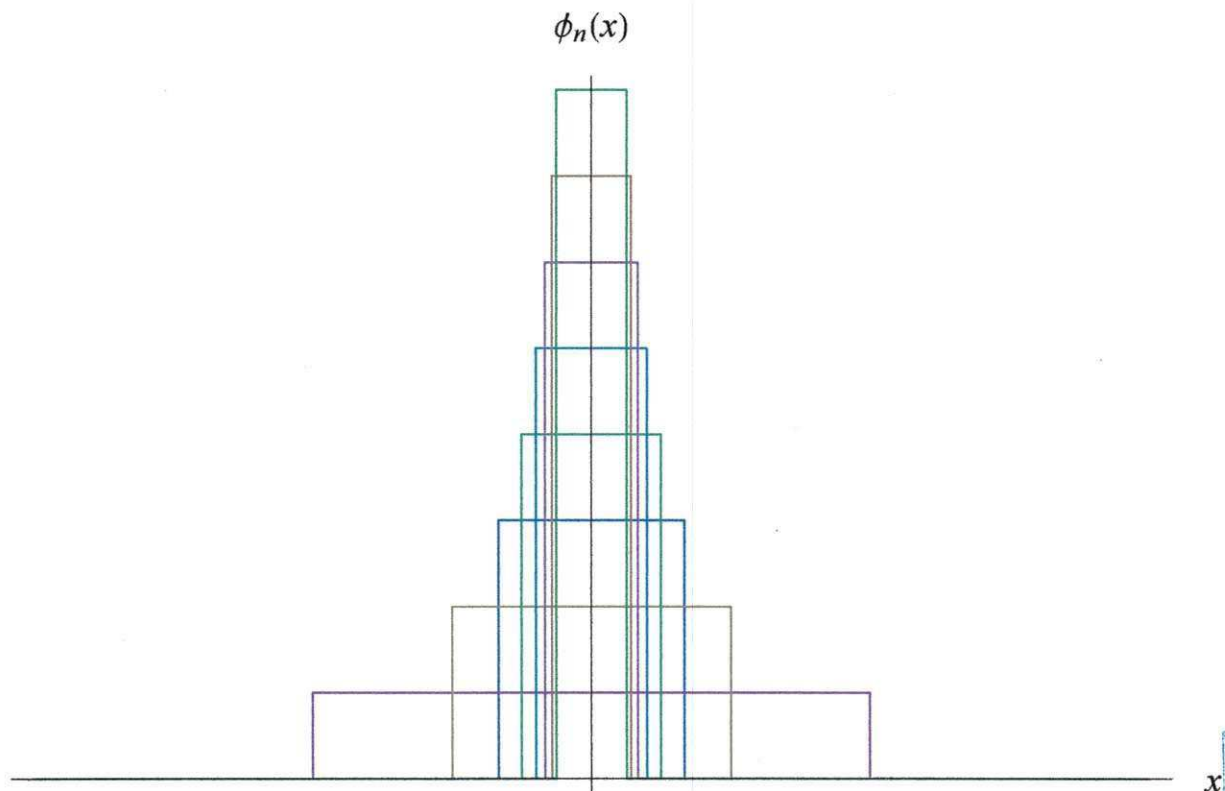


Figura 6: Gráfico da sequência (A.27): A medida que a variação de  $n$  cresce,  $\phi_n(x)$  também cresce, para  $n = \infty$ , temos  $\phi_n(x) = 0$ .

Usando o teorema do valor médio para integrais, deduzimos que

$$\left(\frac{n}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{n}\right) f(\zeta) = f(\zeta) \quad (-1/n \leq \zeta \leq +1/n). \quad (\text{A.30})$$

Onde para  $n \rightarrow \infty$ , temos  $\zeta \rightarrow 0$ . Como  $f(x)$  é uma função contínua, temos que  $f(\zeta) \rightarrow f(0)$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx = f(0). \quad (\text{A.31})$$

para qualquer  $\phi_n(x)$ . Com isso, provamos que  $\phi_n(x)$ , corresponde as exigências da sequência delta.

Sabemos que existe uma propriedade das distribuições que trata de sua suavidade. Então, analisaremos se isso se aplica a distribuição delta. Para isso, considere a derivada de  $\delta(x)$ , denotada por  $\delta'(x)$  e a função contínua  $f(x)$  relacionadas pela a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) dx \quad (\text{A.32})$$

que pode ser, também, integrada por partes. Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) dx = \delta(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx. \quad (\text{A.33})$$

A primeira parte do lado direito da equação se anula (análogo a (A.10)), com isso

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0). \quad (\text{A.34})$$

Com isso, podemos observar que a propriedade (A.10) também se aplica a distribuição delta. Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) dx. \quad (\text{A.35})$$

Considerando que  $\delta(x)$  é suave, podemos através de (A.34) anunciar a propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m \delta(x)}{dx^m} f(x) dx = -(1)^m \frac{d^m f(0)}{dx^m}. \quad (\text{A.36})$$

A propriedade (A.35) nos remete a uma fórmula que nos pode ser útil.

Considere  $f(x) = 1/x$  e  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Desta forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \frac{1}{x^2} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\delta(x)}{x} \right) f(x) dx. \quad (\text{A.37})$$

Comparando com a propriedade (A.35), podemos notar que

$$\frac{\delta(x)}{x} = -\delta'(x). \quad (\text{A.38})$$

Analisaremos agora a sequência de gaussianas (veja: Figura 7)

$$\Phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad (\text{A.39})$$

onde

$$\frac{d\Phi_n(x)}{dx} = -\frac{n^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-n^2 x^2}. \quad (\text{A.40})$$

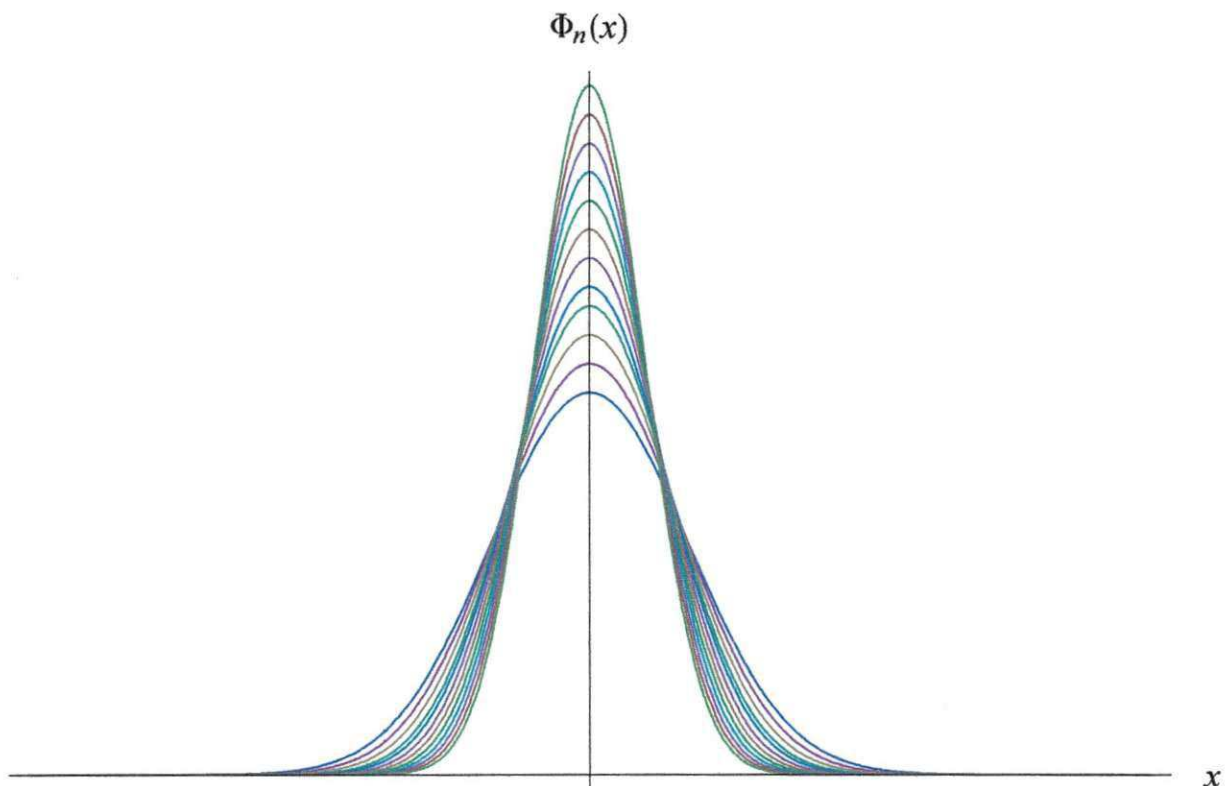


Figura 7: Gráfico da sequência (A.39): Podemos notar que a medida que os valores de  $n$  aumentam,  $\Phi_n(x)$  cresce rapidamente.

Iniciaremos nossa análise considerando a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_n(x)}{dx} f(x) dx. \quad (\text{A.41})$$

onde  $f(x)$  é diferenciável. Integrando por partes, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_n(x)}{dx} f(x) dx = \Phi_n(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \frac{f(x)}{dx} dx. \quad (\text{A.42})$$

Podemos assumir que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} f(x) = 0. \quad (\text{A.43})$$

Com isso, para  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_n(x)}{dx} f(x) dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f'(x) = -f'(0). \quad (\text{A.44})$$

Trocando  $\Phi_n(x)$  por  $\delta'(x)$ , associado a derivada da função delta, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f'(x) = -f'(0). \quad (\text{A.45})$$

Observamos, então que a sequência gaussiana respeita as propriedades da distribuição delta.

## APÊNDICE B – COLCHETE DE POISSON

### B.1 ÁLGEBRA DE LIE

Iniciaremos esse apêndice introduzindo os conceitos da álgebra de Lie, vide (2). Primeiro consideremos as propriedades da derivada de Lie para um campo de vetores, ela é obtida através da extensão da fórmula de Leibnitz para um produto interno.

$$L_x \langle \omega, Y \rangle = \langle L_x \omega, Y \rangle + \langle \omega, L_x Y \rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde  $Y$  é um campo vetorial.

Em seguida, teremos a derivada de Lie para um campo de vetores  $U$  definida por

$$U \equiv L_x Y = L_x - L_y - L_y L_x. \quad (\text{B.2})$$

Este fato prova da fórmula de Leibnitz aplicada ao produto de funções. O campo vetorial  $U$  é chamado de colchete de Lie para  $x$  e  $y$  e pode ser escrito como

$$U = [x, y]. \quad (\text{B.3})$$

Os colchetes de Lie, como todos os colchetes, são bilineares e antissimétricos. Ou seja,

$$[x, y] = -[y, x], \quad (\text{B.4})$$

e satisfazem a identidade de Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (\text{B.5})$$

## B.2 CLOCHÊTES DE POISSON

Para tratarmos deste tema consideremos uma função  $F(q^k, p_k, t)$  que é explicitamente dependente do tempo  $t$ . Sua derivada total em relação ao tempo é

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left( \frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \quad (\text{B.6})$$

Substituindo  $\dot{q}^k$  e  $\dot{p}_k$  pelos os valores obtidos em (2.45) e (2.45) da seção (2.1) obteremos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left( \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} \right), \quad (\text{B.7})$$

onde o termo entre parênteses é o que chamamos de **colchete de Poisson** e é denotado por

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k}. \quad (\text{B.8})$$

Este é o colchete de Poisson para  $H^1$  e  $F$ .

De uma forma geral a definição dos colchetes de Poisson para duas funções  $f(q^k, p_k)$  e  $g(q^k, p_k)$  é

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k}. \quad (\text{B.9})$$

Ele também possui importantes propriedades que enunciaremos agora: Considere os colchetes de Poisson entre um conjunto de coordenadas generalizadas  $q^k$  e  $H$ :

$$\begin{aligned} \{q^k, H\} &= \frac{\partial q^k}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q^k}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ &= \dot{q}^k. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Analogamente, para  $p_k$  e  $H$  encontraremos

$$\{p_k, H\} = \dot{p}_k. \quad (\text{B.11})$$

Outra propriedade importante e bastante utilizada em mecânica é que os colchete de Poisson de

<sup>1</sup>Onde  $H$  é uma Hamiltonoana qualquer.

$q^\rho$  e  $q^\sigma$ , para  $\rho$  e  $\sigma$  quaisquer resulta em

$$\begin{aligned} \{q^\rho, q^\sigma\} &= \frac{\partial q^\rho}{\partial q^k} \frac{\partial q^\sigma}{\partial p_k} - \frac{\partial q^\rho}{\partial p_k} \frac{\partial q^\sigma}{\partial q^k} \\ &= \frac{\partial q^\rho}{\partial q^k} \frac{\partial q^\sigma}{\partial p_k} - \frac{\partial q^\rho}{\partial q^k} \frac{\partial q^\sigma}{\partial p_k} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{B.12}$$

E por analogia à (B.12) os colchetes de Poisson de  $p_\rho$  e  $p_\sigma$  são

$$\{p_\rho, p_\sigma\} = 0. \tag{B.13}$$

Por fim, para  $\{q^i, p^j\}$ , teremos

$$\begin{aligned} \{q^i, p^j\} &= \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \frac{\partial p^j}{\partial p_k} - \frac{\partial q^i}{\partial p_k} \frac{\partial p^j}{\partial q^k} \\ &= \delta_j^i. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Os colchetes de Poisson respeitam todas as propriedades dos colchetes de Lie e são bastante utilizados na Mecânica Quântica.



## **APÊNDICE C – CÁLCULO DOS TENSORES DE RIEMANN E RICCI E SIMBOLOS DE CHRISTOFFEL EM TERMOS DA MÉTRICA FRW**

A métrica de Friedmann-Robertson-Walker possui o elemento de linha dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\phi) \right). \quad (\text{C.1})$$

En termos deste elemento de linha o tensor métrico é expresso como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a^2(t) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

e seu inverso como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Através destes dados podemos calcular os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (\partial_{\rho} g_{\lambda\nu} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\mu} g_{\nu\rho}). \quad (\text{C.4})$$

Os termos diferentes de zero estão calculados a seguir. O primeiro cálculo é para  $\Gamma_{ii}^0$

$$\Gamma_{ii}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{ii}. \quad (\text{C.5})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11} \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 \left( \frac{a^2(t)}{1-kr^2} \right) \\ &= \frac{\dot{a}(t)a(t)}{1-kr^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{22} \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 (a^2(t)r^2) \\ &= r^2 a(t)\dot{a}(t). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{33} \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 (r^2 a^2(t) \sin^2 \theta) \\ &= r^2 a(t)\dot{a}(t) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Os demais são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1-kr^2}{a^2(t)} \right) \partial_1 \left( \frac{1-kr^2}{a^2(t)} \right) \\ &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \Gamma_{10}^1. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1-kr^2}{a^2(t)} \right) \partial_1 \left( \frac{a^2(t)}{1-kr^2} \right) \\ &= \frac{kr}{1-kr^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1-kr^2}{a^2(t)} \right) \partial_1 \left( \frac{a^2(t)}{1-kr^2} \right) \\ &= r(1-kr^2). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{33}) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{1-kr^2}{a^2(t)} \right) \partial_1 \left( \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \right) \\
&= r(kr^2 - 1) \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 a^2(t)} \right) \partial_0 (r^2 a^2(t)) \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \Gamma_{02}^2.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 a^2(t)} \right) \partial_1 (r^2 a^2(t)) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{33} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 a^2(t)} \right) \partial_2 (r^2 a^2(t) \sin^2 \theta) \\
&= -\cos \theta \sin \theta.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \right) \partial_2 (r^2 a^2(t) \sin^2 \theta) \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \Gamma_{03}^3.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{11} - \partial_3 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \right) \partial_1 (r^2 a^2(t) \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3.
\end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{22} - \partial_3 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \right) \partial_2 (r^2 a^2(t) \sin^2 \theta) \\
&= \cot \theta = \Gamma_{32}^3.
\end{aligned} \tag{C.18}$$

O tensor de Ricci pode ser calculado da seguinte forma:

$$R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa}. \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= \frac{\partial\Gamma^0_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^0_{11}}{\partial x^0}\Gamma^{\kappa}_{10}\Gamma^0_{1\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{11}\Gamma^0_{0\kappa} \\ &= \frac{\ddot{a}(t)\dot{a}(t) + a(t)}{k^2 - 1} - \frac{\dot{a}^2(t)}{k^2 - 1} \\ &= \frac{\ddot{a}(t) + a(t)}{k^2 - 1} \\ &= -R^0_{110}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} R^0_{202} &= \frac{\partial\Gamma^0_{02}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^0_{22}}{\partial x^0}\Gamma^{\kappa}_{20}\Gamma^0_{2\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{22}\Gamma^0_{0\kappa} \\ &= -r^2(\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)) + r^2\dot{a}^2(t) \\ &= -r^2\ddot{a}(t)a(t) \\ &= -R^0_{220}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} R^0_{303} &= \frac{\partial\Gamma^0_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial\Gamma^0_{33}}{\partial x^0}\Gamma^{\kappa}_{30}\Gamma^0_{3\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{33}\Gamma^0_{0\kappa} \\ &= -r^2\sin^2\theta\dot{a}^2(t) - r^2\sin^2\theta\dot{a}^2(t)\ddot{a}^2(t) + \\ &= -r^2\sin^2\theta\dot{a}^2(t)\ddot{a}^2(t) \\ &= -R^0_{330}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} R^1_{001} &= \frac{\partial\Gamma^1_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial\Gamma^1_{01}}{\partial x^0}\Gamma^{\kappa}_{00}\Gamma^1_{1\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{01}\Gamma^1_{0\kappa} \\ &= \frac{\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}(t)}{a^2(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\ &= -\frac{\ddot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\ &= -R^1_{010}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} R^1_{212} &= \frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1}\Gamma^{\kappa}_{21}\Gamma^1_{2\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{22}\Gamma^1_{1\kappa} \\ &= -3kr^2 + 1 + kr^2 - 1 - r^2\dot{a}^2(t) + kr^2 \\ &= -r^2(\dot{a}^2 + k) \\ &= -R^1_{221}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned}
R_{313}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{31}^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} \Gamma_{31}^\kappa \Gamma_{3\kappa}^1 - \Gamma_{33}^\kappa \Gamma_{1\kappa}^1 \\
&= \sin^2 \theta - 3kr^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + kr \sin^2 \theta - r^2 \dot{a}^2 \sin^2 \theta + kr^2 \sin^2 \theta \\
&= -r^2 \sin^2 \theta (k + \dot{a}^2(t)) \\
&= -R_{331}^1.
\end{aligned} \tag{C.25}$$

$$\begin{aligned}
R_{002}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{00}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^0} \Gamma_{00}^\kappa \Gamma_{2\kappa}^2 - \Gamma_{02}^\kappa \Gamma_{0\kappa}^2 \\
&= \frac{-\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}(t)}{a^2(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= -\ddot{a}(t)a(t) \\
&= -R_{020}^2.
\end{aligned} \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
R_{112}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} \Gamma_{11}^\kappa \Gamma_{2\kappa}^2 - \Gamma_{12}^\kappa \Gamma_{1\kappa}^2 \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{a}^2(t)a^2(t)}{kr^2 - 1} - \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{\dot{a}^2(t)kr}{kr^2 - 1} \\
&= -R_{121}^2.
\end{aligned} \tag{C.27}$$

$$\begin{aligned}
R_{323}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{32}^2}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} \Gamma_{32}^\kappa \Gamma_{3\kappa}^2 - \Gamma_{33}^\kappa \Gamma_{2\kappa}^2 \\
&= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - r^2 + (-\cos^2 \theta) - (r^2 \sin^2 \theta \dot{a}^2(t) + (kr^2 - 1) \sin^2 \theta) \\
&= -r^2 (\sin^2 \theta \dot{a}^2(t) + k) \\
&= -R_{332}^2.
\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned}
R_{030}^3 &= \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^3}{\partial x^3} \Gamma_{03}^\kappa \Gamma_{0\kappa}^3 - \Gamma_{00}^\kappa \Gamma_{3\kappa}^3 \\
&= \frac{\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
&= -R_{003}^3.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

$$\begin{aligned}
R^3_{113} &= \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} \Gamma^{\kappa}_{11} \Gamma^3_{3\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{13} \Gamma^3_{1\kappa} \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{-a^2(t) + k}{kr^2 - 1} - \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{-a^2(t) + k}{kr^2 - 1} \\
&= -R^3_{131}.
\end{aligned} \tag{C.30}$$

$$\begin{aligned}
R^3_{223} &= \frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} \Gamma^{\kappa}_{22} \Gamma^3_{3\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{23} \Gamma^3_{2\kappa} \\
&= \csc^2 \theta + r^2 \dot{a}(t) - 1 + kr^2 - \cot^2 \theta \\
&= (\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) = r^2(\dot{a}^2 + k) \\
&= -R^3_{232}.
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Por fim, mostramos o cálculo do escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= g^{00} (R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030}) \\
&\quad + g^{11} (R^1_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131}) \\
&\quad + g^{22} (R^2_{202} + R^2_{212} + R^2_{222} + R^3_{232}) \\
&\quad + g^{33} (R^3_{303} + R^3_{313} + R^3_{323} + R^3_{333}) \\
&= 3 \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{a(t)} + \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{a(t)} + 2 \frac{(k + \ddot{a}(t))}{a^2(t)} + 2 \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{a(t)} + \frac{k + \ddot{a}(t)}{a^2(t)} + 3 \frac{(k + \ddot{a}(t))}{a^2(t)} \\
&= 6 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 6 \frac{(k + \ddot{a}(t))}{a^2(t)} \\
&= \frac{6[\ddot{a}(t)a(t) + k + \dot{a}]}{a(t)}.
\end{aligned} \tag{C.32}$$

## REFERÊNCIAS

- 1 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- 2 JOSÉ, J. V.; SALETAN, E. J. *Classical Dynamics: A contemporary approach*. USA: Cambridge University Press, 1998.
- 3 THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particle and Systems*. 5<sup>a</sup> ed.. ed. USA: Thomson, 2004.
- 4 LANDAU, L. D.; LIFCHITZ, E. M. *Mecânica*. BRA: Hemus, 2004.
- 5 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. New York: Wiley, 1999.
- 6 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, 1972.
- 7 WEINBERG, S. *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- 8 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- 9 BLAU, M. *Lecture Notes on General Relativity*. Dezembro 2009. Formato pdf. Disponível em: <<http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>>.
- 10 NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. Bristol, England: A. Hilger, 1990.
- 11 ROOS, M. *Introduction to Cosmology*. 3. ed. UK: Wiley, 2003.
- 12 LIDDLE, A. *An Introduction to Modern Cosmology*. 2. ed. England: Wiley, 2003.
- 13 BOAS, M. L. *Mathematical Methods in Physical Sciences*. USA: Wiley, 1996.
- 14 BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. USA: Addison Wesley, 1973. (World Student Series Edition).
- 15 WEBER, H.-J.; ARFKEN, G. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. San Diego, CA: Academic Press, 2004.