

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

ACÚSTICA MUSICAL: A FLAUTA
TRANSVERSAL E AS FIGURAS DE
CHLADNI.

SAMUEL ANDRADE DO NASCIMENTO

CUITÉ - PB
2011

ACÚSTICA MUSICAL: A FLAUTA
TRANSVERSAL E AS FIGURAS DE
CHLADNI.

UFMG / BIBLIOTECA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

ACÚSTICA MUSICAL: A FLAUTA
TRANSVERSAL E AS FIGURAS DE
CHLADNI.

Monografia realizada sob orientação
do Prof. Joseclécio Dutra Dantas,
apresentada ao Curso de Licenciatura
em Física da Universidade Federal
de Campina Grande, em comple-
mentação aos requisitos para
obtenção da graduação

SAMUEL ANDRADE DO NASCIMENTO



N244a Nascimento, Samuel Andrade do.
Acústica musical: a flauta transversal e as figuras de Chladni. / Samuel Andrade do Nascimento. - Cuité: [s. n], 2011.
85f1. : il. fig. tab.

Orientador Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas.
Monografia do Curso de Licenciatura em Física.
Não disponível em CD.

1. Física e música. 2. Acústica musical. 3. Flauta transversal. 4. Música pitagórica dos números. 5. Ondas sonoras. 6. Escolas musicais. 7. Figuras de Chladni. I. Dantas, Joseclécio Dutra. II. Universidade Federal de Campina Grande. III. Centro de Educação e Saúde. IV. Título

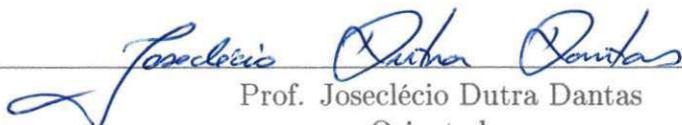
CDU 53+78

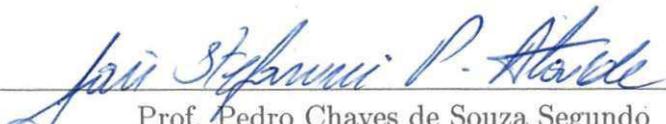
ACÚSTICA MUSICAL: A FLAUTA TRANSVERSAL E AS FIGURAS DE CHLADNI.

SAMUEL ANDRADE DO NASCIMENTO

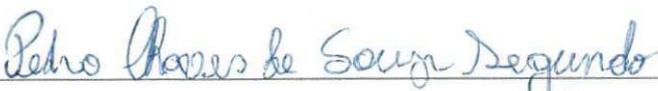
Aprovada em 06/12/11

BANCA EXAMINADORA


Prof. Joseclécio Dutra Dantas
Orientador


Prof. Pedro Chaves de Souza Segundo
Examinador


Prof. Fábio Ferreira de Medeiros
Examinador


Prof. Jair Stefanini Pereira de Ataíde (suplente)
Examinador

UFPA - LIBRARY

*Com muito amor, carinho
e gratidão, aos meus pais
Francisco de Assis
do Nascimento e Rita de
Cácia Andrade Nascimento,
e minha esposa Juliete
Francisca Neves Almeida do
Nascimento, DEDICO*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as portas que abriu em meu caminho e oportunidades que me concedeu.

À minha família, de modo especial ao meu pai e minha mãe, pelo incentivo incansável e apoio inesgotável durante toda a minha vida.

À minha esposa, pela paciência e compreensão nas horas mais difíceis.

À UFCG, nas pessoas dos meus professores, pela construção do pensamento e conhecimento ao qual me deram oportunidade.

Aos colegas graduandos, pelo apoio, paciência e conhecimentos compartilhados, de modo especial a José Luciano de Brito Silva, Desiane Maiara Gomes dos Santos, Teodomiro de Macedo Félix, Priscila da Silva Santos e Noélia Maria de Medeiros.

Ao professor, amigo e companheiro Joseclécio Dutra Dantas, pela orientação, dedicação e ensinamentos repassados.

Ao professor Pedro Segundo, pelo apoio, incentivo e colaboração.

Resumo

Este trabalho teve como objetivo traçar pontos interdisciplinares nas relações entre a Física e a Música, através do estudo das ondas sonoras, buscando coerência textual e matemática, com o intuito de tornar possível a aplicabilidade de conceitos relevantes ao estudo da formação, construção e funcionamento de instrumentos musicais, com ênfase na flauta transversal. Tomando como ponto inicial um breve histórico das relações entre Ciência e Música, buscamos estudar a natureza das ondas, conceituando, aplicando e introduzindo propriedades matemáticas, necessárias ao desenvolvimento do trabalho. Apresentamos, de maneira didática, propriedades pertencentes ao estudo de tubos sonoros, perfazendo um caminho no qual aborda a construção de escalas musicais, para finalmente discutirmos a construção e funcionamento da flauta transversal. Tivemos também a possibilidade de reproduzir o experimento conhecido como Figuras de Chladni, que são figuras que surgem sobre superfícies quando estas são postas a vibrar em determinadas frequências com inúmeras possibilidades de vibração, sendo que cada uma corresponde a uma frequência específica do som, produzindo desenhos de diferentes complexidades. Estas são, na verdade, uma visualização bidimensional das ondas sonoras. A pesquisa apresenta um caráter teórico que, de forma abrangente, buscou análise em extensa literatura (livro-texto e artigos de revista) e proporcionou um texto de linguagem clara e objetiva.

Palavras-chave: Física e música, acústica musical, flauta transversal, figuras de Chladni.

Abstract

This work aimed to plot points in the interdisciplinary relationships between physics and music through the study of sound waves, looking for coherence textual and mathematic, with aim to make possible the applicability of important concepts to study of the formation, construction and operation of musical instruments, with emphasis in the transverse flute. Taking as starting point a brief historic of the relationship between science and music, we seek to study the nature of the waves, conceptualising, introducing and applying mathematical properties, which are necessary to development work. We present, at didatic way, some properties belonging to the study of sound pipe, treading a way in which approaches the construction of musical scales, for finally we talking about the construction and operation of the transverse flute. We also had the possibility to reproduce the experiment known as Chladni figures, are figures which appear on surfaces when they are brought to vibrate at certain frequencies with numerous possibilities of vibration, each of which corresponds to a specific frequency of sound, producing designs of different complexities. These are actually a two-dimensional visualization of sound waves. The research presents a theoretical nature that, in comprehensive, sought analysis in extensive literature (textbook and magazine articles) and provided a text of clear and objective language.

Keywords: Physics and music, musical acoustics, flute, Chladni figures.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Conteúdo

Introdução	11
1 União entre Física, Música e Matemática	13
1.1 ‘A música pitagórica dos números’	13
1.2 Harmonia celeste	15
2 A Natureza das Ondas	17
2.1 Ondas? O que são?	17
2.2 Ondas Periódicas	19
2.3 Função de Onda	20
2.3.1 Função de uma onda senoidal	21
2.3.2 Velocidade e Aceleração Transversal de uma partícula em uma onda senoidal	23
2.4 Velocidade de propagação da onda em uma Corda	25
2.5 Ondas Estacionárias em uma Corda	27
2.6 Modos Normais de uma Corda	32

3 Som	37
3.1 Velocidade de uma Onda Longitudinal	38
3.2 Ondas Sonoras nos Gases	41
3.3 Ondas Estacionárias Longitudinais e Modos Normais	44
3.4 Ondas Sonoras	46
3.4.1 Percepções Sonoras	49
3.5 Intensidade Sonora	51
3.5.1 Variação da Intensidade com a distância	52
3.6 Instrumentos de Sopro	53
3.7 Escalas Musicais	57
3.7.1 Escala de Pitágoras	58
3.7.2 Escala de entonação justa	59
3.7.3 Escala cromática	61
4 O instrumento	63
4.1 A evolução da Flauta Transversal	63
4.2 Construindo um Tom	68
4.3 Obtendo um Escala	70
4.4 O corpo instrumental	71
4.5 Impedância Acústica	73

5 Figuras de Chladni	76
5.1 Os modos de vibração	77
5.2 Procedimentos Experimentais	79
5.2.1 Material	79
5.3 Resultados	80
Considerações Finais	82
Bibliografia	84

Introdução

A construção e o desenvolvimento das estruturas dos instrumentos musicais, bem como das escalas musicais, evoluem ao longo do tempo, tendo influências inerentes a cada época como também, de maneira inevitável, a influência, mesmo que de maneira indireta, da ciência. Deste modo, a 'ciência da arte' cresceu, e possibilitou o engajamento da Física em comportamentos próprios de sua ciência unidos a concepções próprias da arte musical. Com este pensamento, objetivamos estudar e analisar as propriedades físicas dos instrumentos musicais de sopro, dando ênfase à flauta transversal, tendo a necessidade de uma compreensão aprofundada sobre o comportamento das ondas sonoras estacionárias. Buscamos mostrar a interdisciplinaridade pertencente às relações que tangem as duas ciências, com o intuito de apresentar a ligação entre elas, que nem sempre são perceptíveis, mas que estão estreitamente relacionadas.

Este trabalho é composto por cinco capítulos. Inicialmente buscamos apresentar algumas relações pertencentes e que entrelaçam o desenvolvimento da ciência e da arte musical, interligando matemática, física e música, de um modo claro e objetivo no primeiro capítulo. O seguimento do trabalho é dado através de uma abordagem à natureza das ondas, apresentando aspectos relacionados às suas propriedades, formalizando de maneira simplificada as teorias que compõem as descrições matemáticas das ondas, encerrando assim, o segundo capítulo. O terceiro capítulo traz uma abordagem a respeito do som, apresentando suas características e propriedades, bem como aplicações aos instrumentos musicais de sopro (tubos sonoros) e a construção e formação de escalas musicais. O quarto capítulo, fundamentado nos capítulos anteriores, possui caráter culminante deste trabalho, apresentando a Flauta Transversal mediante suas grandezas físicas, inerentes ao funcionamento próprio de sua natureza. De

modo semelhante ao capítulo quatro, o quinto capítulo também fundamenta-se nos capítulos anteriores e demonstra através de um aspecto único e belo, visualizações de figuras sonoras (de modo bidimensional) conhecidas como figuras de Chladni, reproduzidas de modo simples no laboratório de Física do CES.

Capítulo 1

União entre Física, Música e Matemática

As relações primordiais existentes entre música e matemática foram estudadas inicialmente por Pitágoras de Samos (VI a.C.), que tratava a música como sendo ‘uma ciência numérica com aplicações ao som’. É notório que, desde o tempo de Pitágoras aos dias atuais, a forma como vemos a ‘ciência dos sons’ mudou. Passamos, por natureza humana, a tentar descobrir, reinterpretar e reavaliar as relações que surgiram, como as de Pitágoras. Desse modo, foram idealizadas outras relações estreitas entre as ciências; agora unimos a música não só à Matemática, como também à Física, através da Acústica.

1.1 ‘A música pitagórica dos números’

Respeitando a ideologia de que a música, enquanto entendida como a ‘arte dos sons’ não pode ser reduzida a uma interpretação numérica, passamos a nos guiar sob os pensamentos de Pitágoras.

De acordo com que foi referenciado pelo professor J. F. Rodrigues da Universidade de Lisboa: *‘Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som*



Figura 1.1: Ilustração de Pitágoras com o seu monocórdio.

*e da harmonia estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso'. Assim descreve Guido d'Arezzo (992-1050?), no seu pequeno e influente tratado de música *Microlagos* [1]. Tomamos por base a ideia da origem da escala musical sendo atribuída a Pitágoras.*

Com o auxílio de um instrumento de sua própria criação, que ficou conhecido como monocórdio de Pitágoras, ele passou a traçar relações importantes que, posteriormente, resultaram na mais remota evidência de construção da escala musical.

O monocórdio era um instrumento de apenas uma corda presa nas extremidades e esticada, com um suporte livre entre estas extremidades, possibilitando o tensionamento da corda em duas partes diferentes, de comprimentos L_1 e L_2 . Podemos ver uma ilustração deste instrumento na Figura 1.2

Pitágoras passou então a construir relações entre estes comprimentos com o som produzido por esta corda. Fazendo uma relação entre L_1 e L_2 da seguinte forma L_1/L_2 , Pitágoras

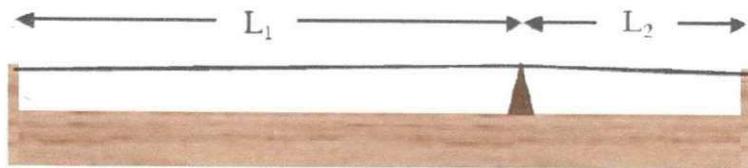


Figura 1.2: Monocórdio de Pitágoras.

percebeu que em casos particulares como, $2/1$, $3/2$ e $4/3$, o som produzido pela corda era ‘agradável’ ao ouvido humano. No entanto, outras combinações resultavam em sensações ‘desagradáveis’ ao ouvido. Assim, surgiu a ideia de que, dois sons ‘agradáveis’ ao ouvido sendo combinados, resultam em um tom também ‘agradável’, surgindo assim, as relações de ‘consonância’[2]. Voltaremos a abordar estas relações mais adiante, quando estudaremos a construção das escalas musicais.

1.2 Harmonia celeste

Claudio Ptolomeu (90?-168?) também apresentou grandes contribuições para o desenvolvimento da teoria musical e, indiretamente, da acústica. Foi autor do memorável tratado *Harmonica*, no qual aprofundou a tese dos intervalos entre notas musicais enquanto razões entre números, o que revolucionou a construção das escalas musicais; com grande originalidade musicológica. No *Livro III*, apontou relações entre o sistema harmônico e o círculo associado ao zodíaco, bem como entre as modulações tonais e os movimentos dos astros. Desse modo, Ptolomeu inseriu no meio científico o mito de como as relações matemáticas pertencentes às estruturas musicais audíveis constituem a essência e causa das harmonias da alma humana e dos movimentos e configurações dos astros. O modelo de Ptolomeu começou a decair no período da Renascença com o retomar da teoria heliocêntrica por Copérnico e, na sequência, dos avanços instrumentais e das observações de Tycho Brahe (1546 - 1601). Mas, para Joannes Kepler (1571 - 1630), o movimento dos planetas ainda se configurava em uma música que emanava da perfeição divina. No entanto, este fato não o impediu de chegar às

três leis do movimento dos planetas. Em seu *Mistério Cosmográfico*, Kepler fez especulações sobre a ‘*admirável proporção entre os corpos celestes*’ e a ‘*bela harmonia que existe entre as partes do cosmos*’. Kepler possuía um temperamento místico e especulativo, o que baseou sua constante pesquisa de relações entre diferentes grandezas do Sistema Solar. Kepler concluiu, em seu Livro V, na sua descrição da *Harmonia do Mundo*, que ‘*os modos ou tons musicais são reproduzidos de uma certa maneira nas extremidades dos movimentos planetários*’. Desse modo, considerando os sete intervalos consonantes da oitava de seu tempo, Kepler estabeleceu as seguintes harmonias dos seis planetas conhecidos calculando as razões afélio/periélio de cada um deles[1]. Veja a tabela 1.1.

Saturno	4 : 5	(uma terça maior)
Júpiter	5 : 6	(uma terça menor)
Marte	2 : 3	(uma quinta)
Terra	5 : 16	(um meio tom)
Vênus	24 : 25	(um sustenido)
Mercúrio	5 : 12	(uma oitava e uma terça menor)

Tabela 1.1: Harmonias dos planetas.

A metafísica de Kepler também apresenta, nas concordâncias celestes do *Hamonices Mundi*, uma associação de Mercúrio ao soprano, Vênus e a Terra ao alto, Marte ao tenor e Júpiter e Saturno ao baixo. Além disso, afirma que a Terra canta as notas MI, FA, MI, de modo que possamos concluir que no nosso seio prevalecem a miséria (MIseria) e a fome (FAMes).

Estes são apenas exemplos da união entre Física e Música e, logicamente existem inúmeros outros fatos que correlacionam tais ciências. Nosso objetivo não está diretamente ligado a história da acústica musical, embora o entendimento desta possibilite a melhor compreensão dos fatos ocorridos dentro de um contexto histórico, inerentes a cada situação.

Capítulo 2

A Natureza das Ondas

2.1 Ondas? O que são?

De um ponto de vista geral, podemos entender uma onda como sendo um sinal que se transmite de um ponto a outro com velocidade definida[3]. A transmissão deste sinal pode ocorrer sem haver transmissão de matéria entre estes pontos. A onda transporta energia e momento. É a partir desse sentido amplo, que iremos iniciar o nosso aprofundamento no estudo das ondas. Em nosso cotidiano temos muitos exemplos de ondas: do mar, ou provocadas em um lago após lançarmos uma pedra dentro dele, sons musicais, etc.

As ondas podem apresentar naturezas diferentes, distinguindo-se em dois tipos: ondas eletromagnéticas e ondas mecânicas. Nas ondas eletromagnéticas podemos incluir a luz e ondas de rádio, entre outras. Contudo, este tipo de onda não se apresenta como essencial ao nosso estudo. Estamos preocupados basicamente em entendermos as ondas mecânicas que ao contrário das ondas eletromagnéticas, necessitam de um material no qual possam se propagar, chamado de meio de propagação.

Imaginemos uma corda esticada presa em uma das extremidades. No momento em que pomos a extremidade livre a vibrar, provocamos uma agitação que se propaga ao longo da corda. As sucessivas secções da corda sofrem a mesma perturbação que provocamos em

sua extremidade; observamos, então, que o deslocamento do meio é sempre perpendicular à direção de propagação da onda ao longo desse meio. Este tipo de movimento é denominado onda transversal, ilustrada na Figura 2.1.

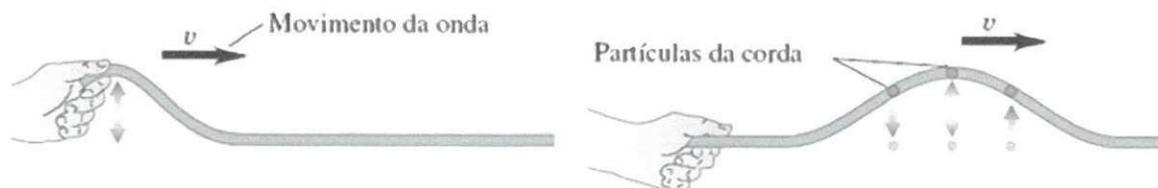


Figura 2.1: Exemplo de Onda Transversal.

Vemos outro exemplo de onda em um meio líquido ou um gás posto no interior de um tubo, no qual em uma de suas extremidades exista um pistão móvel. Quando fizermos o pistão oscilar para frente e para trás, geraremos uma perturbação de deslocamento e uma flutuação de pressão se propagando ao longo do meio. Nesta situação, teremos a oscilação das partículas deste meio indo para frente e para trás, ao longo da mesma direção de propagação da onda. Este tipo de movimento é denominado onda longitudinal, ilustrada na Figura 2.2.



Figura 2.2: Onda Longitudinal se propagando em um tubo.

Os fenômenos descritos anteriormente possuem seus respectivos estados de equilíbrio. No primeiro caso, quando o sistema está em repouso e a corda esticada, dizemos que ele está em seu estado de equilíbrio. Para o segundo caso, o equilíbrio corresponde ao momento no qual a pressão é uniforme em todos os pontos do fluido. Nestes exemplos a onda é produzida através da perturbação do estado de equilíbrio que se propaga de um ponto a outro do meio. Nestes casos, também existem forças restauradoras que tendem a fazer com que os sistemas retornem

BIBLIOTECA

as seus respectivos estados de equilíbrio. O estado de equilíbrio é uma situação de mínima energia associada ao sistema. A perturbação só é possível a partir de um agente externo, que no caso da corda, pode ser nossa mão batendo na corda, no caso de tubos sonoros, um exemplo é o nosso sopro para produzirmos sons.

2.2 Ondas Periódicas

Temos a onda transversal na corda esticada como sendo um exemplo de pulso ondulatório (Figura 2.1). Um pulso de onda é uma perturbação que se propaga através de um meio. Caso a mão balance a corda uma única vez, o resultado obtido será uma única ‘ondulação’, ou um pulso, que se propagará ao longo da corda. Por outro lado, se nós mantivermos o balanço da mão em movimento periódico ou repetitivo, as partículas da corda também executarão movimentos periódicos à medida que a onda se propaga. Assim, teremos como resultado o que chamamos de **onda periódica**. Em uma onda periódica, a configuração da onda em um determinado instante sempre se repete espacialmente. Suponhamos agora que o nosso movimento de balanço da corda seja um MHS (movimento harmônico simples), que possui amplitude A , frequência f , frequência angular $\omega = 2\pi f$, e período $T = 1/f = 2\pi/\omega$. Quando uma onda periódica é produzida por um MHS ela é chamada de **onda senoidal**[4]. Este tipo de onda merece uma atenção particular, devido ao fato de podermos representar qualquer onda através da superposição de ondas senoidais.

O comprimento desta onda (configurações completas) é a distância entre dois ventres ou dois vales consecutivos, e podemos representar o comprimento de onda usando a letra grega λ . A onda desloca-se com velocidade constante v , percorrendo um comprimento de onda λ em um período T . Desse modo, podemos perceber que a velocidade de propagação da onda é dada por $v = \lambda/T$, ou, de outra forma,

$$v = \lambda f, \tag{2.1}$$

onde utilizamos $f = 1/T$.

A Equação (2.1), nos mostra a relação entre o comprimento de onda λ e a frequência f ; estas duas grandezas são inversamente proporcionais. Podemos perceber que, em um meio cujas propriedades se configurem de tal modo que determinem uma velocidade v constante, um acréscimo em λ significa um decréscimo em f .

Para compreendermos os fenômenos ligados a uma onda periódica longitudinal, vamos considerar um tubo longo cheio de fluido, com um pistão livre em uma de suas extremidades (como feito anteriormente - Figura 2.2). Ao deslocarmos o pistão (para a direita), iremos comprimir o fluido em sua vizinhança, aumentando assim a pressão nesta região. Em seguida, esta região empurra a região vizinha, e assim sucessivamente, fazendo com que o pulso se propague por todo o tubo. O mesmo comportamento de periodicidade pode ocorrer na configuração de onda longitudinal.

Vamos supor agora que o pistão seja deslocado em movimento periódico para frente e para trás (paralelamente ao eixo do tubo). Este movimento fará com que surjam regiões onde a densidade e pressão sejam maior ou menor que a do seu ponto de equilíbrio. Este movimento de compressão e rarefação desloca-se para a direita com velocidade constante.

2.3 Função de Onda

Podemos descrever algumas das principais características das ondas periódicas através de conceitos como: período, frequência, comprimento de onda e velocidade de onda. Porém, muitas vezes precisamos que tais descrições sejam mais detalhadas em relação ao que ocorre em uma dada posição e velocidades de partículas em função do tempo no decorrer da propagação da onda. Devido a esta necessidade é que surge o conceito de função de onda, ou seja, uma função capaz de descrever a posição de qualquer partícula do meio em função do tempo.

Examinando ondas em uma corda esticada, percebemos que a sua posição de equilíbrio, quando desprezamos a gravidade, é uma linha reta. Vamos considerar o sistema de coordenadas com o eixo O_x ao longo da posição de equilíbrio e lembrando que as ondas em uma corda são *transversais*, ao ocorrer o movimento de propagação de uma onda, uma

partícula é deslocada da posição de equilíbrio até uma posição y perpendicular ao eixo O_x . O valor de y depende de x bem como também é função do tempo t . Assim, $y = y(x, t)$ é a **função de onda** que descreve a onda[3].

Caso nós conheçamos uma função para uma determinada onda, podemos encontrar o deslocamento de qualquer partícula em qualquer instante. Com este resultado, temos a possibilidade de calcular a velocidade e a aceleração de qualquer partícula, e outras informações que possivelmente desejarmos saber sobre o comportamento da corda em qualquer instante.

2.3.1 Função de uma onda senoidal

Nessa subseção vamos descrever uma função de onda de uma onda senoidal. Suponhamos que o sentido de propagação de uma onda senoidal seja no sentido $+x$ (da esquerda para a direita), ao longo de uma corda. As partículas da corda possuem mesma frequência e mesma amplitude, executando um MHS. Contudo, em diferentes pontos da corda, as partículas não apresentam um movimento sincronizado. Estas diferenças de sincronia apresentadas entre os pontos oscilantes da corda correspondem a frações do ciclo durante seu movimento cíclico, que denominamos *diferenças de fase*, e podemos associar a cada ponto uma *fase* durante seu movimento. Por exemplo, se um ponto possui deslocamento máximo positivo enquanto outro possui deslocamento máximo negativo, dizemos que os pontos possuem uma diferença de fase de meio ciclo.

Suponhamos agora que o deslocamento de uma partícula situada na extremidade esquerda da corda ($x = 0$), que é o ponto onde a onda inicia, seja dado por

$$y(x = 0, t) = A \sin \omega t = A \sin 2\pi f t \quad (2.2)$$

Desse modo, temos uma partícula que está executando um MHS com uma amplitude A , frequência f e frequência angular $\omega = 2\pi f$. Lembramos que o deslocamento desta partícula é um caso particular da função $y(x, t)$.

Esta perturbação percorre um espaço de $x = 0$ até x , situado à direita da origem em um intervalo de tempo x/v , no qual v é a velocidade de propagação da onda. Logo, a configuração do movimento do ponto x no instante t é igual à configuração do ponto $x = 0$ no instante $t - x/v$. Desse modo, podemos deduzir o deslocamento x no instante t , substituindo t por $(t - x/v)$ na equação (2.2). Assim, encontraremos a seguinte expressão:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \operatorname{sen} 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (2.3)$$

Podemos reescrever a função dada pela Equação (2.3) de diferentes maneiras úteis. Uma dessas maneiras é reescrevê-la em termos do período $T = 1/f$ e do comprimento de onda $\lambda = v/f$:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (2.4)$$

Uma forma útil da função de onda pode ser obtida ao definirmos o **número de onda**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.5)$$

Utilizando as relações $\lambda = 2\pi/k$ e $f = \omega/2\pi$ e substituindo em $v = \lambda f$, teremos:

$$\omega = vk \quad (2.6)$$

Com isso, podemos escrever a Equação (2.4), da seguinte forma:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx). \quad (2.7)$$

Na realidade, uma forma geral da função de onda de uma onda senoidal seria do tipo,

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \phi)$$

onde ϕ representa a constante de fase. Por simplicidade optamos por fazer $\phi = 0$.

De modo análogo a esta dedução, podemos expressar uma equação que represente uma onda propagando-se no sentido $-x$. Nesta situação, o deslocamento do ponto x em um instante t é o mesmo para um ponto $x = 0$ no instante $(t + x/v)$. Assim, teremos uma equação do seguinte modo,

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) = A \operatorname{sen} 2\pi f \left(t + \frac{x}{v} \right) = A \operatorname{sen} (\omega t + kx). \quad (2.8)$$

Nestas expressões que acabamos de deduzir, $y(x, t) = A \operatorname{sen} (\omega t \pm kx)$, o termo $(\omega t \pm kx)$ é denominado **fase**. Seu valor determina, para qualquer x e qualquer t , qual é a parte do ciclo senoidal que está ocorrendo em um dado ponto e um tempo determinado. No caso de uma crista positiva ($y = A$), a fase associada poderia ser igual a $\pi/2$, $5\pi/2$, e assim sucessivamente. Para um ponto com deslocamento igual a zero, ela poderá ser igual 0 , π , 2π , e assim por diante.

2.3.2 Velocidade e Aceleração Transversal de uma partícula em uma onda senoidal

É possível obter uma expressão para a velocidade transversal de uma partícula em uma onda transversal desde que conheçamos a função de onda desta onda. Designaremos, então, por v_y esta velocidade, com o intuito de diferenciá-la da velocidade v da onda. Encontraremos a velocidade transversal v_y em um ponto x derivando $y(x, t)$ em relação a t .

Com a função de onda sendo dada por

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} (\omega t - kx),$$

então

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx), \quad (2.9)$$

onde a variável x mantém-se constante, pois, estamos considerando um ponto particular da corda.

Como era esperado, para o MHS, a Equação (2.9) mostra que a velocidade transversal de uma partícula varia com o tempo t . Sendo o módulo da função *coseno* limitado no intervalo entre 0 e 1, note que a partícula pode atingir uma velocidade máxima igual a ωA quando $\omega t - kx = 0$.

A aceleração desta partícula poderá ser obtida a partir da derivada parcial de *segunda* ordem de $y(x, t)$ em relação a t ; assim,

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \text{sen}(\omega t - kx) = -\omega^2 y(x, t). \quad (2.10)$$

a aceleração de uma partícula é igual $-\omega^2$ vezes o seu deslocamento.

Agora, calculando as derivadas parciais de $y(x, t)$ em relação a x , podemos analisar a forma da corda em um instante qualquer. A derivada $\partial y(x, t)/\partial x$ nos fornecerá a inclinação da corda em um ponto qualquer. A segunda derivada em relação a x nos fornecerá a curvatura da corda:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 A \text{sen}(\omega t - kx) = -k^2 y(x, t) \quad (2.11)$$

A partir das equações (2.10) e (2.11), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)/\partial t^2}{\partial^2 y(x, t)/\partial x^2} &= \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Denominamos a Equação (2.12) de **equação de onda**. Esta é uma Equação Diferencial Parcial linear, homogênea e de segunda ordem. A variável $t > 0$ representa o tempo, x é a variável espacial e $v > 0$ é uma constante (velocidade de propagação da onda). Desse modo, não é necessário que a perturbação seja uma onda senoidal, qualquer onda propagando-se ao longo da corda poderá ser descrita pela equação (2.12), seja ela periódica ou não.

É muito importante, para o estudo de *ondas*, o conceito de equação de onda. A grandeza

y mantém-se medindo o deslocamento de uma partícula a partir do seu equilíbrio, contudo, lembremos que, para uma onda longitudinal o deslocamento é *paralelo* ao eixo O_x e não perpendicular.

2.4 Velocidade de propagação da onda em uma Corda

Podemos deduzir a velocidade da onda em uma corda aplicando a segunda lei de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ sobre um segmento cujo comprimento é Δx , e que possui massa dada por $m = \mu\Delta x$. As forças nas extremidades desse pequeno segmento podem ser decompostas nas direções x e y . A resultante dos componentes na direção x é igual a zero, já que o movimento é transversal, não havendo nenhum componente da aceleração nesta direção. Podemos entender melhor o desenvolvimento observando a Figura 2.3.

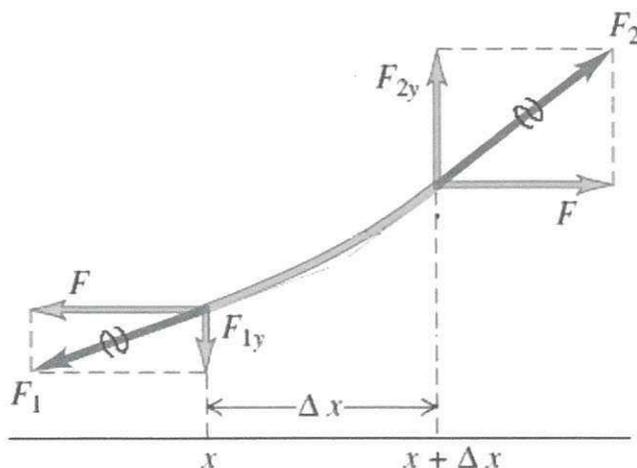


Figura 2.3: Diagrama de corpo livre para um segmento de corda de comprimento igual a Δx

Notemos que a razão F_{1y}/F corresponde ao módulo da inclinação da corda no ponto x , bem como F_{2y}/F expressa o módulo da inclinação da corda no ponto $x + \Delta x$. Com isso, podemos determinar F_{1y} e F_{2y} . Considerando as diferentes inclinações dos segmentos da corda, temos

$$\frac{F_{1y}}{F} = - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x, \quad \frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

verificamos assim que o componente y da força é dado por:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right]$$

pela segunda lei de Newton, vamos fazer a igualdade entre o valor de F_y , encontrado na equação anterior, e $\mu\Delta x$ vezes o componente y da aceleração. Assim,

$$F \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = \mu\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

dividindo por $F\Delta x$,

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

se tomarmos o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, o lado esquerdo da equação anterior será a derivada de $\partial y/\partial x$ em relação a x :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

A Equação (2.13), possui um formato idêntico ao da *equação de onda* (2.12). Estas duas equações descrevem o mesmo movimento ondulatório. Fazendo uma comparação entre elas, temos:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (2.14)$$

Pela Equação 2.14, vemos que a velocidade v é determinada pelas propriedades do meio.

2.5 Ondas Estacionárias em uma Corda

Podemos observar o que acontece quando existe reflexão de uma onda *senoidal* em uma extremidade fixa de uma corda. Considerando a superposição de duas ondas propagando-se através de uma corda (uma onda incidente e outra refletida na extremidade fixa), iremos perceber um fenômeno chamado **interferência**, que designa o resultado de ondas que passam em um algum instante em uma mesma região. As figuras que seguem, retratam uma corda presa em sua extremidade esquerda, com sua extremidade direita oscilando em MHS (de cima para baixo), produzindo deste modo uma onda que se propaga da direita para a esquerda, e logicamente, possui uma onda refletida propagando-se da esquerda para a direita. Quando estas duas ondas são combinadas, proporcionam uma imagem na qual parece-nos que a corda está subdividida em diferentes segmentos, e não ondas se propagando em sentidos opostos.

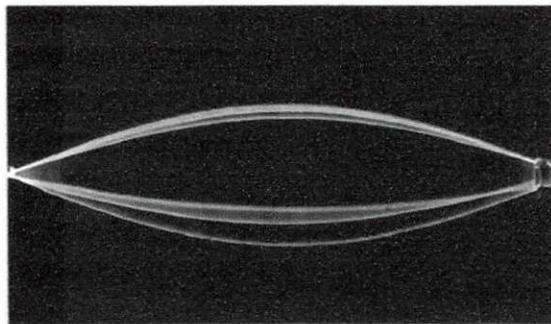


Figura 2.4: A corda possui meio comprimento de onda

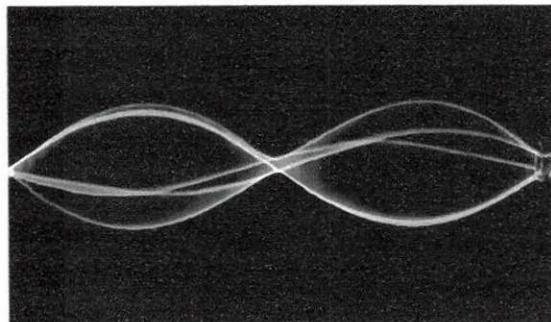


Figura 2.5: A corda possui um comprimento de onda

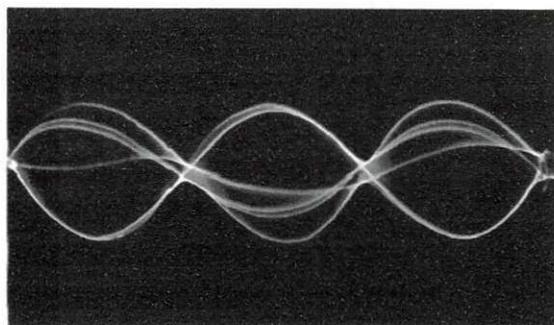


Figura 2.6: A corda possui um comprimento de onda e meio

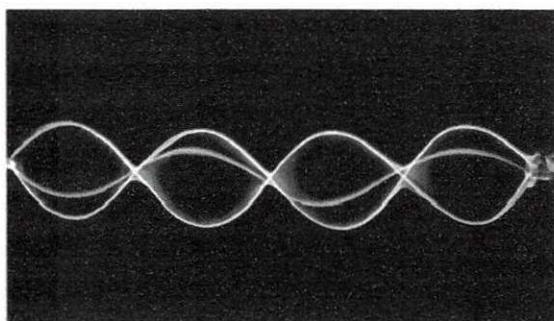


Figura 2.7: A corda possui dois comprimentos de onda

Uma onda propagando-se ao longo de uma corda, possui amplitude constante, e sua configuração possui velocidade de deslocamento igual a velocidade da onda. Contudo, no nosso caso atual, observado e ilustrado com auxílio das Figuras 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8, a configuração da onda não se altera, e existe uma variação de sua amplitude. Podemos perceber também a existência de pontos que não se movem, cada ponto deste é denominado **nó**, e entre dois nós seguidos existe um ponto denominado **ventre**, no qual teremos uma amplitude máxima para o movimento. Uma onda que possui estas características, e cuja sua configuração parece não se movimentar ao longo da corda chama-se **onda estacionária** (e uma onda que se move ao longo da corda chama-se **onda progressiva**)

A superposição da onda incidente com a onda refletida pode ser explicada através do princípio da superposição. Está ilustrada na Figura 2.9 a superposição de duas ondas, uma incidente (sentido $+x$), iniciando acima do eixo O_x , e outra refletida (sentido $-x$), iniciando

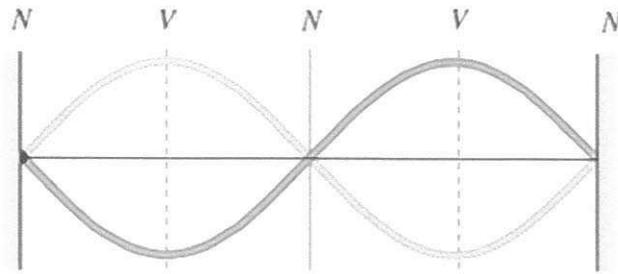


Figura 2.8: A corda possui um comprimento de onda ilustrada em dois instantes diferentes

abaixo do eixo O_x . As duas ondas possuem mesma amplitude, mesmo comprimento de onda e mesma velocidade de propagação, porém, sentidos de propagação contrários. As ondas estão representadas em nove instantes diferentes sucessivos, com intervalo entre instantes sucessivos iguais a $T/16$. Após somarmos os deslocamentos (valores de y) das curvas das ondas incidente e refletida, obteremos a onda resultante da superposição dessas ondas, destacada pela curva em negrito na figura.

Para o instante no qual as ondas incidente e refletida estão em fase, e exatamente superpostas, a onda resultante é uma onda senoidal, e sua forma é uma curva que possui o dobro da amplitude das ondas individuais componentes. E para um instante no qual as ondas incidente e refletida estão completamente defasadas entre si, a superposição destas ondas nos fornece uma onda resultante nula. Nos *nós* (representados por N), o deslocamento resultante é *sempre* nulo, pois os deslocamentos das ondas incidente e refletida são sempre iguais e opostos, dessa maneira sua soma é sempre igual a zero. A este fenômeno de cancelamento chamamos **interferência destrutiva**. Ocorre amplitude máxima (ventre - representado por V), no ponto situado no meio da distância entre dois nós consecutivos, nestes pontos o deslocamento e os sinais das curvas são iguais, gerando assim um deslocamento resultante máximo; este fenômeno é chamado de **interferência construtiva**. A distância entre dois nós consecutivos é igual a metade do comprimento de onda $\lambda/2$.

A partir da soma de duas funções de onda $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, que possuem amplitude, período e comprimento de onda iguais e sentidos de propagação opostos (como na Figura

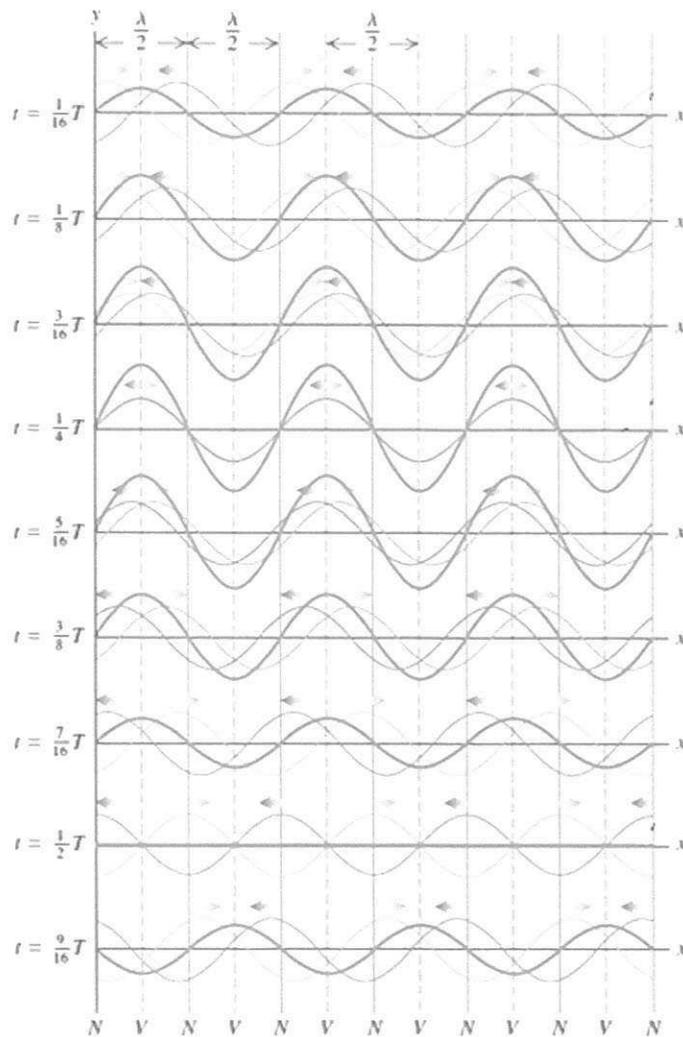


Figura 2.9: Formação de uma onda estacionária

2.9), podemos deduzir uma função de onda para uma onda estacionária. Vamos supor que $y_1(x, t)$ é a representação da onda *incidente* (propagando-se no sentido $+x$), atingindo um ponto $x = 0$, no qual ela se reflete; a função de onda $y_2(x, t)$ representa a onda refletida, propagando-se em sentido contrário ao da onda incidente. Uma das ondas deve possuir sinal negativo já que são invertidas.

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$$

$$y_2(x, t) = -A \sin(\omega t - kx)$$

No instante $x = 0$, teremos para a onda incidente $A\text{sen}(\omega t)$ e para onda refletida $-A\text{sen}(\omega t)$ que pode ser escrito como $A\text{sen}(\omega t + \pi)$. Então a troca de sinal representa uma mudança de fase de 180° ou π radianos.

Somando as funções de onda individuais, obteremos a função de onda da onda estacionária,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\text{sen}(\omega t + kx) - \text{sen}(\omega t - kx)].$$

Utilizando a identidade dos senos da soma e da diferença de dois ângulos, vamos desenvolver a soma:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A\text{sen}(kx) \cos(\omega t).$$

Admitindo que a amplitude A_{es} da onda estacionária é igual ao dobro da amplitude A das ondas originais,

$$A_{es} = 2A,$$

temos,

$$y(x, t) = A_{es}\text{sen}(kx) \cos(\omega t). \quad (2.15)$$

Podemos fazer uma análise da Equação (2.15). A função de onda depende das variáveis x e t . O fator $2A\text{sen}kx$ que nos indica a forma da onda é uma senóide em qualquer instante. Contudo, de maneira diferente da propagação de uma onda progressiva ao longo de uma corda, a forma da onda permanece em uma mesma posição, e sua oscilação acontece de forma vertical, sendo descrita pelo fator $\cos \omega t$. Este comportamento é apresentado na Figura 2.9. Agora, pontos situados entre nós consecutivos oscilam em fase, executando um MHS. Também utilizando a Equação (2.15) podemos encontrar os nós; nos pontos onde se situam os nós o deslocamento é igual a zero, isto é, $\text{sen}kx = 0$. Assim, os nós ocorrem quando $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Podemos utilizar $k = 2\pi/\lambda$, e assim,

$$\begin{aligned} x &= 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots \\ &= 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como esperado, existe um nó no ponto $x = 0$, já que este é o ponto fixo da extremidade da corda. A onda estacionária não transfere energia de uma extremidade a outra da corda,

ao contrario da onda progressiva. As ondas formadoras da onda estacionária transferem potências iguais nos dois sentidos. O que existe é um fluxo de energia entre um nó e um ventre adjacente e vice-versa. Contudo, a taxa média de transferência de energia é nula em todos os pontos.

2.6 Modos Normais de uma Corda

Consideremos agora, uma corda que possui comprimento L e está fixada em *ambas* as extremidades. Este tipo de armação de cordas é a base para a formação de muitos instrumentos musicais, tais como: piano, violino, violão, baixo, guitarra. Quando tencionamos (puxamos) uma corda de violão, uma onda passa a propagar-se, refletindo-se sucessivamente nas duas extremidades, produzindo uma onda estacionária. A partir dessa onda estacionária é originada uma onda sonora que se propaga no ar, com frequência que depende das propriedades da corda.

Temos que verificar o que acontece no momento no qual é produzida uma onda estacionária nessa corda, para que possamos entender as propriedades das ondas estacionárias que são produzidas em uma corda que possui duas extremidades fixas. Logicamente, a onda estacionária que resultará deve possuir nós em ambas as extremidades da corda. De acordo com o que vimos anteriormente, a distância entre dois nós consecutivos é igual a meio comprimento de onda ($\lambda/2$), sendo assim, o comprimento de corda deverá apresentar as proporções $\lambda/2$ ou $2(\lambda/2)$, ou $3(\lambda/2)$, ou, de maneira geral:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.17)$$

Assim, em uma corda que possui as extremidades fixas e comprimento L , uma onda estacionária só existirá quando seu comprimento de onda satisfizer a relação (2.17).

Explicitando λ , temos

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.18)$$

No entanto, pode haver a existência de ondas na cordas que não apresentem estes comprimentos de onda; porém, estas ondas não formarão ondas estacionárias com nós e ventres e a onda resultante não poderá ser estacionária. Podemos ver na Figura 2.10, uma ilustração da Equação 2.18, para casos em que $n = 1, 2, 3$ e 4 .

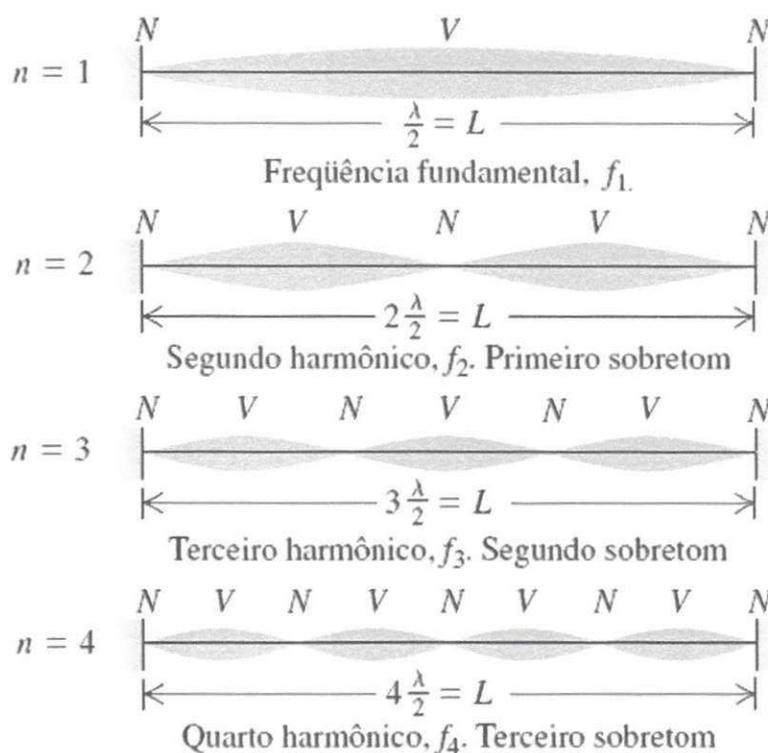


Figura 2.10: Quatro primeiros modos normais de uma corda com duas extremidades fixas

Existe também, uma série de frequências f_n associadas diretamente aos seus comprimentos de onda λ_n . Por exemplo, para a menor frequência f_1 , onde o índice n é igual a 1, existe um comprimento de onda associado $\lambda_1 = 2L$ (maior comprimento de onda). Esta associação é determinada pela relação $f_n = v/\lambda_n$. Assim,

$$f_n = \frac{v}{2L}. \quad (2.19)$$

Este valor é conhecido como **frequência fundamental**. Podemos encontrar outras frequências das ondas estacionárias como $f_2 = 2v/2L$, $f_3 = 3v/2L$, e assim sucessivamente. Desse modo, podemos observar que os valores de f_2 , f_3 , f_4 , e assim por diante, são múltiplos inteiros da frequência fundamental f_1 , ou seja, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$. De modo geral, podemos expressar todas as frequências por

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1. \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.20)$$

Estas frequências são conhecidas como **harmônicos** e a série destas frequências chama-se **série harmônica**. Em termos musicais, alguns músicos denominam cada uma destas frequências de **sobretom**; f_2 é o segundo harmônico ou primeiro sobretom, f_3 é o terceiro harmônico ou segundo sobretom, e assim sucessivamente. A frequência f_1 corresponde ao primeiro harmônico. Dessa maneira podemos traçar um novo perfil para a função de onda estacionária $y(x, t)$, dada pela Equação (2.15). Teremos agora $\omega = \omega_n = 2\pi f_n$ e $k = k_n = 2\pi/\lambda_n$. Assim,

$$y_n(x, t) = A_{es} \cos(\omega_n t) \text{sen}(k_n x). \quad (2.21)$$

Podemos entender **modo normal** de um sistema oscilante como sendo o movimento no qual todas as partículas pertencentes a este sistema se movem senoidalmente com frequências iguais. Em um sistema composto por uma corda de comprimento L , possuindo as duas extremidades fixas, cada comprimento de onda (Equação 2.18) representa uma configuração que possui um modo normal e uma frequência associada. Existe um número infinito de possíveis modos normais, cada um deles possuindo sua frequência característica e sua configuração de vibração.

A Figura 2.10 apresenta-nos os quatro primeiros modos normais, seus comprimentos de onda e suas frequências associadas. Um oscilador harmônico, contendo apenas uma partícula

oscilante apresenta uma única frequência característica e apenas um modo normal. Como a corda fixa nas duas extremidades possui uma quantidade muito grande de partículas (número infinito), também deve possuir um número infinito de modos normais.

Podemos fazer uma representação de um movimento da corda como uma superposição de modos normais, e a *análise harmônica* tem por objeto encontrar esta representação para uma configuração qualquer de vibração desta corda. Conhecemos como *série de Fourier* a soma de funções senoidais que representam uma onda complexa.

Como visto anteriormente, podemos representar a frequência fundamental de uma corda vibrante por $f_1 = v/2L$. Temos também que a velocidade v de propagação de ondas ao longo de uma corda é dada pela Equação (2.14). Desse modo teremos,

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (2.22)$$

Uma corda presa nas duas extremidades, quando posta a vibrar, faz o ar ao seu redor deslocar-se com a mesma frequência da vibração desta corda, sendo capaz de produzir uma onda sonora, a qual ouvimos como um tom puro. A frequência dada pela Equação (2.22), também é frequência fundamental da onda sonora gerada no ar pela vibração da corda. Percebemos também que, a frequência de vibração da corda é inversamente proporcional ao comprimento L da corda, o que pode ser evidenciado pela observação de instrumentos de corda. Ao diminuirmos o comprimento L de uma corda de um violino ou de uma guitarra, comprimindo a corda com os dedos, fazemos com que varie a frequência da onda sonora produzida por esta corda. Musicalmente falando, denominamos esta variação de frequência como variação de *altura* do som; um som mais alto representa uma frequência maior, ou seja, um som mais agudo. Existe também uma dependência da velocidade de propagação com a tensão F aplicada na corda; quando aumentamos esta tensão, produzimos um aumento da velocidade v da onda, aumentando assim a frequência (altura) do som produzido. A massa por unidade de comprimento μ da corda também influencia na velocidade de propagação da onda sonora gerada por esta corda; quanto maior o valor de μ , menor será a velocidade de propagação desta onda produzida pela corda, diminuindo assim sua frequência; este fenômeno

é evidenciado ao observarmos que as notas mais baixas de um violão são produzidas pelas cordas mais grossas.

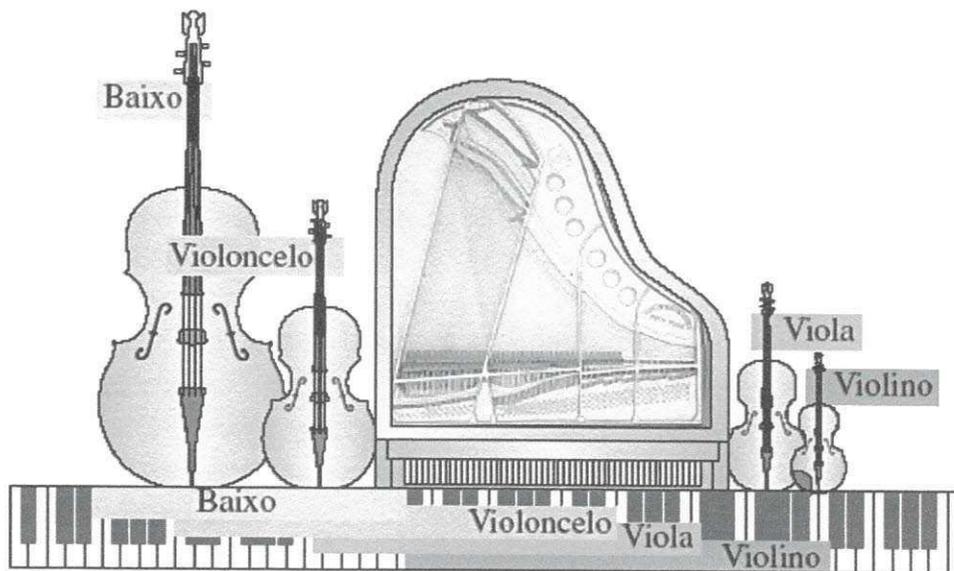


Figura 2.11: Comparação entre o tamanho das cordas de diferentes instrumentos.

Capítulo 3

Som

É de fácil compreensão e percepção, através de nossa experiência cotidiana, que corpos, quando postos a vibrar produzem som. Deste modo, podemos notar que fontes sonoras são na realidade corpos que possuem a capacidade de vibrar e assim produzir sons alterando a pressão do ar em volta desses corpos, o que evidencia a necessidade indispensável da vibração para a produção sonora, e logicamente o modo como a pressão do ar em torno do corpo pode variar, ou seja, a produção sonora também está ligada a velocidade de variação dessa pressão (gradiente de pressão). Um exemplo dessa relação é evidenciado quando soltamos o ar de um balão naturalmente. Dessa maneira praticamente não produzimos barulho, no entanto, ao estourarmos, o ar contido nele sairá rapidamente, o que provoca uma grande variação de pressão, produzindo um som mais alto (de maior intensidade)[6].

Para que o ouvido humano possa ter uma percepção auditiva, deve haver uma 'ligação' entre a fonte geradora de som e o ouvido. Esta 'ligação' é feita através do meio material no qual o som está se propagando, que, conforme observado experimentalmente por Robert Boyle em 1660, não se propaga no vácuo.

Podemos também perceber que o som se propaga através do meio material sem transportar matéria de um ponto para outro, o que torna evidente a sua natureza ondulatória. Portanto, vemos que o som é uma onda, que pode ser classificada como onda mecânica pela necessidade

de um meio material para se propagar.

Outra observação válida é notarmos a velocidade finita do som ao observarmos o intervalo de tempo entre o clarão de um relâmpago e som do trovão que o segue. Outros fatos tornam evidente a natureza ondulatória do som: o eco, que é um efeito familiar obtido através da reflexão do som; interferência entre sons (ondas) que possuem frequências próximas, fenômeno conhecido como batimentos; o contorno de obstáculos, conhecido como difração. Outra característica sonora diz respeito a seu modo de propagação em todas as direções a partir da fonte, ou seja, o som é uma **onda mecânica tridimensional**[7].

3.1 Velocidade de uma Onda Longitudinal

As propriedades físicas do meio de propagação influenciam diretamente a velocidade com que a onda se propaga em seu seio, seja ela transversal ou longitudinal. Em um caso de uma função descrita por $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$, percebemos que x é a coordenada ao longo da direção de propagação da onda. Contudo, lembremos que, em uma onda longitudinal o deslocamento y acontece na mesma direção de propagação desta onda e, para o caso de uma onda transversal, este fenômeno ocorre de maneira diferenciada. Ou seja, o deslocamento y ocorre de forma perpendicular à direção de propagação desta onda.

Imaginemos um fluido no interior de um tubo para que possamos deduzir a velocidade de propagação de uma onda longitudinal. A importância desse assunto é fundamental para o nosso estudo, pois, o que denominamos **som** é na verdade uma onda longitudinal que possui frequência dentro do limiar da audição humana. Em essência, os instrumentos musicais de sopro são compostos por tubos sonoros onde ocorre propagação de onda longitudinal (o som) em um fluido (ar) no seu interior. A voz humana é produzida de forma semelhante.

Na Figura 3.1, veremos um fluido que possui densidade ρ , em um tubo com seção de área transversal A . Quando este fluido está em seu estado de equilíbrio, possui uma pressão uniforme p . De acordo com o que vemos na figura, no instante $t = 0$, inicia-se um deslocamento do pistão com uma velocidade constante v_y , da esquerda para a direita. Este movimento irá

gerar uma onda propagando-se para a direita, ao longo do tubo, fazendo com que seções sucessivas do tubo movam-se e comprimam-se em instantes sucessivos.

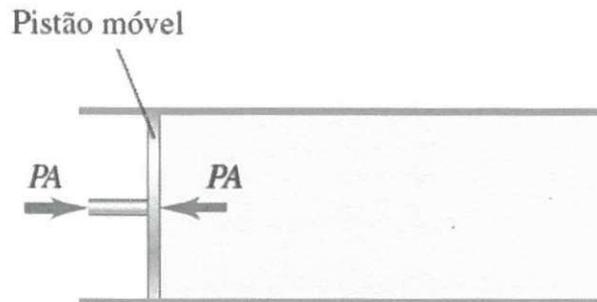


Figura 3.1: Fluido em equilíbrio

Na Figura 3.2 é apresentada a configuração de um fluido no instante t . O fluido, na parte anterior a P , está se movendo com velocidade v_y da esquerda para a direita. Até o instante t o pistão percorreu uma distância $v_y t$ e a fronteira entre a parte em repouso e a parte móvel do fluido avançou uma distância vt , devido ao fato de ela se deslocar para a direita com velocidade igual à velocidade de propagação da onda v . Com o auxílio do teorema do impulso-momento linear, podemos obter a velocidade de propagação.

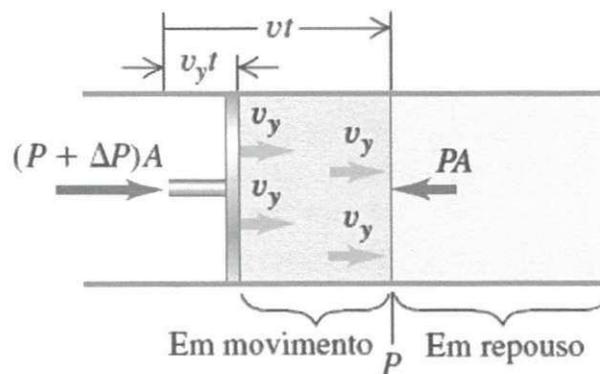


Figura 3.2: Fluido em movimento

No instante t , teremos uma quantidade de fluido entrando em movimento igual a quantidade de fluido que ocupava uma seção do cilindro de comprimento vt , e que possui

área de seção reta A . Logo, a massa desta quantidade de fluido é dada por ρvtA . Assim seu momento linear longitudinal ao longo deste tubo possui módulo

$$\text{Momento linear longitudinal} = (\rho vtA)v_y$$

Vamos determinar o aumento da pressão, Δp , pertencente ao fluido que se move. O volume do fluido que se move, Avt , está diminuindo de um valor $Av_y t$. Pela definição de módulo de compressão B ,

$$B = \frac{-\text{Variação da Pressão}}{\text{Variação relativa do volume}} = \frac{-\Delta p}{-Av_y t / Avt}$$

$$\Delta p = B \frac{v_y}{v}$$

A pressão do fluido em movimento é $p + \Delta p$ e a força exercida pelo pistão é $(p + \Delta p)A$. A força resultante atuando sobre o fluido é ΔpA , e o impulso longitudinal é,

$$\text{Impulso Longitudinal} = \Delta pAt = B \frac{v_y}{v} At.$$

O fluido, no instante $t = 0$, apresentava-se em repouso, logo a variação do momento linear de $t = 0$ até o instante t é igual ao momento linear no instante t . Com o auxílio do teorema do impulso-momento linear, temos:

$$B \frac{v_y}{v} At = \rho vtAv_y. \quad (3.1)$$

isolando v , teremos a velocidade de uma onda longitudinal em um fluido,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (3.2)$$

Desse modo, vemos que a velocidade com que um pulso ondulatório longitudinal se propaga depende apenas do módulo de compressão B e da densidade do meio ρ . A equação (3.2), foi deduzida para uma onda propagando-se um tubo, ela pode ser aplicada a toda onda longitudinal no interior de um dado volume de qualquer fluido.

Uma onda longitudinal também pode propagar-se em uma barra *sólida*; no entanto, a situação é um pouco diferente. Quando comprimida longitudinalmente, uma barra pode deformar-se lateralmente, o que não ocorre com o fluido no interior do tubo. De modo análogo ao utilizado para deduzir a Equação (3.2), podemos encontrar, para um pulso longitudinal em uma barra, a seguinte velocidade

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (3.3)$$

onde Y é o módulo de Young[5], definido por

$$Y = \text{Tensão de dilatação/Deformação de dilatação.}$$

As Equações (3.2) e (3.3) são válidas para uma onda senoidal, como também para qualquer tipo de onda periódica.

Na tabela 3.1, temos a relação de com que velocidade o som se propaga em diversos materiais.

3.2 Ondas Sonoras nos Gases

Podemos calcular a velocidade de propagação do som em um gás ideal, utilizando a seguinte relação, $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$.

Definimos o módulo de compressão B , através da equação $B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$. Quando ocorre variações muito pequenas (infinitesimais) de volume e pressão, teremos $B = -V dp/dV$. Assim, temos que saber como ocorre a variação de p com V para um gás ideal. Em um processo isotérmico (temperatura constante), pela a equação do Gás Ideal, pV permanecerá

MATERIAL	VELOCIDADE DO SOM (m/s)
<i>Gases</i>	
Ar (20°C)	344
Hélio (20°C)	999
Hidrogênio (20°C)	1330
<i>Líquidos</i>	
Hélio Líquido (4K)	211
Mercúrio (20°C)	1451
Água (0°C)	1402
Água (20°C)	1482
Água (100°C)	1543
<i>Sólidos</i>	
Alumínio	6420
Chumbo	1960
Aço	5941

Tabela 3.1: Velocidade do som em diferentes materiais

constante; daí, podemos calcular dp/dV . Contudo, se um gás for comprimido *adiabaticamente* (quando não ocorre fluxo de calor), sua temperatura deverá aumentar, e caso ele se expanda, sua temperatura deverá diminuir. Em um processo adiabático em um gás, temos que pV^γ é constante ($\gamma = C_p/C_v$ - razão entre os calores específicos), e encontramos o valor de B . Devido a condutividade térmica dos gases ser muito pequena, vemos que para ondas sonoras com frequências dentro do limiar audível humano (entre 20 Hz e 20.000 Hz), a propagação do som é aproximadamente adiabática. Desse modo, vamos deduzir o **módulo de compressão adiabática** B_{ad} , a partir de

$$PV^\gamma = \text{constante}. \quad (3.4)$$

Derivando em relação a V :

$$\frac{dp}{dV}V^\gamma + \gamma pV^{\gamma-1} = 0.$$

Fazendo a divisão por $V^{\gamma-1}$ e reagrupando, obtemos

$$B_{ad} = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p. \quad (3.5)$$

Para um processo isotérmico temos que

$$pV = \text{constante}.$$

Derivando em relação a V :

$$\frac{dp}{dV}V + p = 0.$$

Assim, vemos que o módulo de compressão isotérmica é dado por:

$$B_{iso} = -V \frac{dp}{dV} = p. \quad (3.6)$$

Dai, percebemos que o módulo de compressão adiabática é maior que o módulo de compressão isotérmica. Podemos fazer uma relação entre as equações (3.2) e (3.5), e obtermos:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (3.7)$$

Tomando a seguinte relação para a densidade ρ

$$\rho = \frac{pM}{RT},$$

onde R é a constante dos gases, T é temperatura absoluta e M a massa molecular. Podemos encontrar outra forma para a Equação 3.7. Assim, temos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (3.8)$$

A velocidade da onda é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta, pois, para qualquer gás, γ , R e M são constantes.

3.3 Ondas Estacionárias Longitudinais e Modos Normais

De modo análogo ao fenômeno ocorrido nas ondas transversais em uma corda, no momento em que uma onda longitudinal se propaga em fluido contido no interior de um tubo que possui comprimento finito, existe uma reflexão das ondas nas extremidades deste tubo, e, ao fazermos a superposição destas ondas que passam a se propagar em sentidos opostos, teremos novamente uma onda estacionária. Ondas estacionárias longitudinais em um tubo, assim como as ondas estacionárias transversais em uma corda, podem gerar ondas sonoras no ar ao seu redor. É nesse preceito que se fundamenta o funcionamento de instrumentos de sopro.

Podemos descrever ondas longitudinais em um fluido em termos do deslocamento do fluido, mas também podemos fazer esta descrição em termos da variação de pressão deste fluido. Vamos denominar **nó de deslocamento** um ponto do fluido no qual o deslocamento é nulo e **ventre de deslocamento** o ponto no qual o deslocamento é máximo.

A Figura 3.3 ilustra a imagem de uma onda longitudinal com um nó de deslocamento localizado no centro da imagem. Podemos notar que as partículas em lados contrários do nó de deslocamento passam a vibrar em fases opostas. No momento em que há aproximação destas partículas, o gás localizado entre elas de comprimido, gerando assim um aumento de pressão; e no momento em que tais partículas se afastam, o gás entre elas se expande, fazendo com que a pressão diminua. Assim, percebemos que quando há a ocorrência de um nó de deslocamento o gás é comprimido ao máximo, atingindo um valor de variação de pressão e densidade máximo. No entanto, as partículas que se situam em lados contrários de um ventre vibram em fase, logo, a distância entre tais partículas é aproximadamente constante, e assim não é possível a existência de variações de pressão e densidade em um ventre de deslocamento.

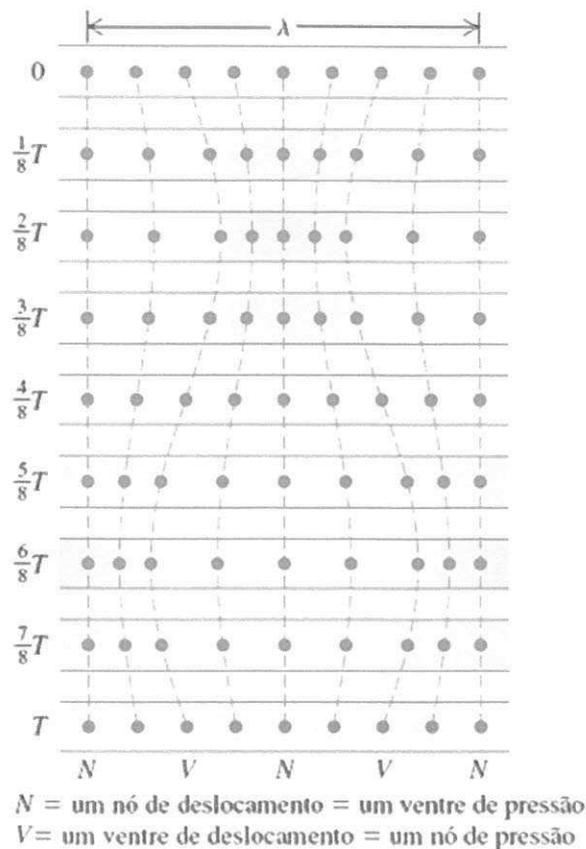


Figura 3.3: Onda estacionária longitudinal.

Denominamos **nó de pressão** um ponto da onda longitudinal estacionária no qual não ocorre variação de pressão e densidade; e **ventre de pressão**, o ponto no qual ocorrem variações de pressão e densidade de modo máximo.

Fazendo associações entre as descrições feitas anteriormente podemos entender que: o ponto onde ocorre um **nó de pressão** corresponde a um **ventre de deslocamento**, e um ponto no qual ocorre um **ventre de pressão** é correspondente a um **nó de deslocamento**.

O deslocamento numa extremidade fechada de um tubo é sempre nulo (quando ocorre reflexão nesta extremidade). Logo, nesta extremidade existe um **nó de deslocamento** e um **ventre de pressão**. Para o caso de uma extremidade aberta de um tubo, como ela está

aberta para a atmosfera (pressão constante), existe um nó de pressão, sendo assim, em uma extremidade aberta de um tubo também ocorre um ventre de deslocamento, onde as partículas se deslocam com amplitude máxima, no entanto, não existe variação de pressão. Na realidade, a ocorrência de um nó de pressão se dá em um ponto um pouco mais adiante da extremidade livre do tubo. Mas, quando o diâmetro do tubo for pequeno em relação ao comprimento de onda, podemos desprezar este efeito (é o que ocorre em quase todos os instrumentos musicais).

3.4 Ondas Sonoras

Para os nossos estudos daremos destaque principal a propagação do som no ar, contudo, sabemos que o som pode se propagar em outros meios como a água e outros meios sólidos.

As ondas senoidais são as ondas sonoras mais simples, pois apresentam valores definidos para a frequência, comprimento de onda e amplitude.

As ondas sonoras propagando-se em todas as direções a partir da fonte, e suas amplitudes variam conforme a direção e a distância entre o ouvinte e a fonte.

Consideremos apenas ondas sonoras que se propagam no sentido O_x , pela simplicidade matemática que envolve a análise deste caso, podendo posteriormente ser generalizada para casos tridimensionais. De acordo com o descrito anteriormente, esta onda pode ser representada por uma função de onda $y(x, t)$. Se a onda for senoidal, podemos representá-la pela Equação (2.7)

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (3.9)$$

onde a amplitude A é o deslocamento máximo que a partícula pode atingir a partir da posição de equilíbrio. Em uma onda longitudinal o deslocamento é paralelo à direção de propagação desta onda.

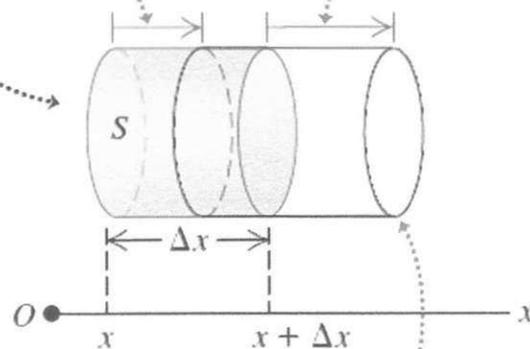
Desse modo, as distâncias x e y são paralelas. Determinemos uma função $p(x, t)$, que nos fornece a variação entre a pressão da onda e a pressão atmosférica normal p_a , entendida como

a flutuação da pressão em uma onda sonora. Seja $p(x, t)$ a *pressão manométrica*, que pode ser entendida como o *excesso de pressão acima da pressão atmosférica*[3]. Assim, a pressão absoluta em cada ponto é igual a $p_a + p(x, t)$.

Vamos imaginar um cilindro que possui secção reta de área S e eixo ao longo da direção de propagação para que possamos relacionar a flutuação de pressão $p(x, t)$ e o deslocamento $y(x, t)$. Considerando que a onda está se propagando ao longo do eixo Ox , quando não houver nenhuma perturbação sonora, o cilindro tem comprimento Δx e volume $V = S\Delta x$. Quando ocorrer a presença de uma onda, no instante t , a extremidade é deslocada do ponto x para $y_1 = y(x, t)$ e a extremidade que se encontrava no ponto $x + \Delta x$ sofre uma variação para $y_2 = y(x + \Delta x, t)$. Observemos a Figura 3.4.

O cilindro de fluido sem perturbações possui área da seção reta S , comprimento Δx e volume $S\Delta x$.

Uma onda sonora desloca a extremidade esquerda do cilindro em $y_1 = y(x, t)$...
 ... e a direita em $y_2 = y(x + \Delta x, t)$.



A variação no volume do cilindro de fluido sem perturbações é $S(y_2 - y_1)$.

Figura 3.4: Onda estacionária longitudinal.

Caso $y_2 > y_1$, ocorre um acréscimo no volume do cilindro provocando uma diminuição de pressão. Se $y_2 < y_1$, o volume diminui e a pressão aumenta. Caso $y_2 = y_1$, ocorre apenas um deslocamento do cilindro para a esquerda ou para a direita, e como não existe variação



de volume, também não existe variação de pressão. Logo, percebemos a dependência da flutuação de pressão em relação à *diferença* entre os deslocamentos de pontos vizinhos do meio.

A variação do volume é dada por:

$$\Delta V = S(y_2 - y_1) = S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)].$$

No limite $\Delta x \rightarrow 0$, a variação relativa do volume $\Delta V/V$ é

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Podemos relacionar a variação relativa de volume com a flutuação de pressão através do módulo de compressão B , onde

$$B = \frac{-\text{Variação da Pressão}}{\text{Variação relativa do volume}} = \frac{-p(x, t)}{dV/V}.$$

Assim, temos

$$p(x, t) = -B \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Quando $\partial y(x, t)/\partial x$ for positivo, teremos o deslocamento no ponto $x + \Delta x$ maior que no ponto x . Isso significa um aumento no volume e conseqüentemente uma diminuição na pressão. Calculando $\partial y(x, t)/\partial x$, onde $y(x, t)$ é uma função de onda de uma onda senoidal, encontramos

$$p(x, t) = BkA \cos(\omega t - kx). \quad (3.12)$$

Podemos ver na Figura 3.5, a ilustração de $y(x, t)$ e $p(x, t)$ para uma onda senoidal. Estas duas funções apresentam uma diferença de fase de um quarto de ciclo; o deslocamento é máximo quando a flutuação de pressão é zero, e a flutuação de pressão é máxima quando o deslocamento é zero.

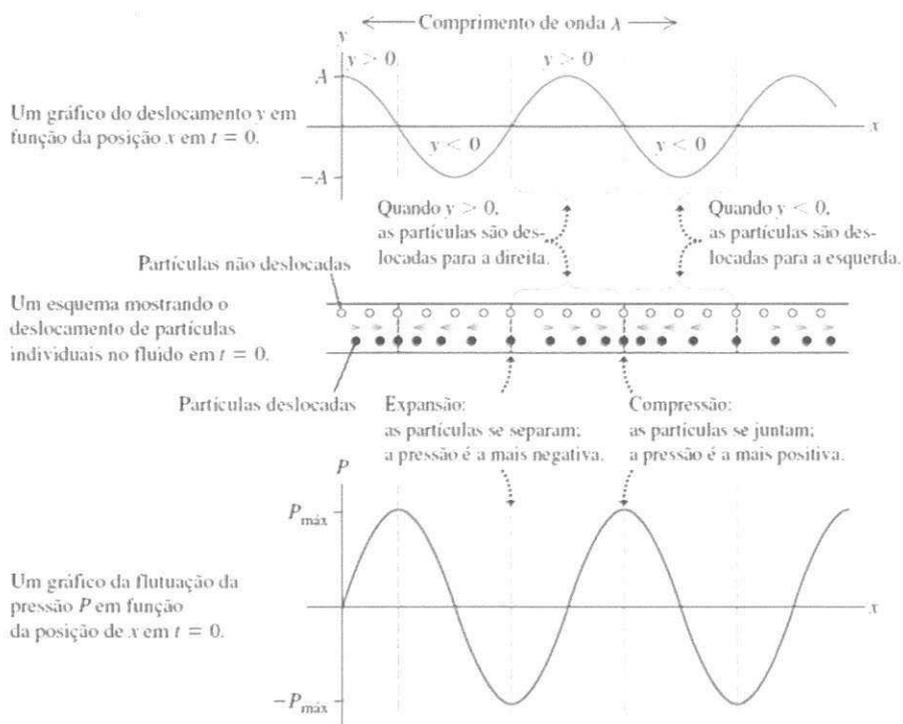


Figura 3.5: Onda estacionária longitudinal.

Na equação 3.12 vemos uma grandeza BkA , que representa a pressão máxima de flutuação de pressão. Esta grandeza é denominada **amplitude de pressão** $p_{m\acute{a}x}$, dada por

$$p_{m\acute{a}x} = BkA.$$

Note que existe uma proporcionalidade entre a amplitude de pressão e a amplitude de deslocamento A , bem como a amplitude de pressão depende do comprimento de onda.

3.4.1 Percepções Sonoras

Existe uma relação entre as características físicas de uma onda sonora e a percepção deste som pelo ouvinte. Mantendo-se uma emissão de uma onda sonora senoidal a determinada frequência, se elevarmos o valor da pressão dessa onda, também elevaremos a sua **intensidade sonora**. O ouvido humano possui sensibilidade diferente para diferentes frequências no

intervalo audível. Por este fato, a relação entre amplitude de pressão e intensidade sonora é um tema complexo a ser estudado, variando de pessoa para pessoa. Para a nossa percepção, no caso de sons com mesma amplitude, mas que tenham frequências diferentes, pode nos parecer que um deles está sendo emitido mais fortemente. A saúde do ouvido também influencia na percepção da intensidade sonora. Normalmente ocorre perda de sensibilidade para altas frequências no limiar audível com o passar dos anos; além disso, podemos colocar a saúde do nosso ouvido em risco expondo-o a barulho com níveis muito altos.

A **altura** do som está diretamente relacionada com a frequência da onda sonora; entendemos por altura de um som a característica que faz com que possamos distinguir um som 'agudo' de um som 'grave'. Assim, quanto mais agudo um som é percebido, significa dizer que maior é sua frequência. A amplitude de pressão também influencia na altura do som. Suponhamos que sejam emitidas duas ondas sonoras de mesma frequência, mas que tenham amplitudes de pressão diferentes; aquela que apresentar maior amplitude de pressão nos parecerá mais forte, no entanto, com altura menor, ou seja, mais grave.

Os sons musicais apresentam características de onda mais complexas que uma simples função senoidal. A coluna de ar presente em um instrumento de sopro vibra com a frequência fundamental, juntamente com muitos outros harmônicos. O mesmo ocorre para instrumentos de corda. A onda sonora produzida no ar ao redor do instrumento possuirá a mesma *composição harmônica*. Se dois instrumentos diferentes emitirem tons iguais, estes tons devem possuir a mesma frequência fundamental (e mesma altura), no entanto, são percebidos de maneiras diferentes devido a presença de quantidades diferentes dos diversos harmônicos. Esta diferença caracteriza o instrumento é o que nos permite perceber se o som está sendo emitido por um saxofone ou por uma flauta transversal, por exemplo; a esta característica denominamos **timbre**. Um tom que possui muitos harmônicos é emitido mais fracamente, enquanto um tom composto basicamente pelo harmônico fundamental, é mais melodioso.

Uma explicação física para as diferenças de timbre consiste em dizer que nosso ouvido reconhece, por exemplo, a mesma nota 'lá'- onda sonora periódica com frequência de 440Hz - emitida por diferentes instrumentos e permite que percebamos qual instrumento executou a nota, pois, mesmo que as notas apresentem a mesma frequência, podem apresentar

perfis de onda diferentes. Podemos construir uma representação de uma onda associada a um som musical por uma *série de Fourier*, que apresentará, além do tom fundamental f_1 , seus respectivos tons harmônicos $f_n = n f_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). As proporções presenciais destes tons harmônicos definem o timbre, conforme será mostrado na seção 3.

O tom das vogais da voz humana é uma combinação de todas as frequências (não apenas das harmônicas), diferente de tons produzidos por instrumentos musicais; esta característica da voz corresponde ao que chamamos de **ruído**. O som do vento é um exemplo de ruído.

3.5 Intensidade Sonora

Existe transferência de energia de uma região para outra através de ondas sonoras progressivas. A **intensidade** I de uma onda é a *taxa temporal média com a qual a energia é transportada, por unidade de área, através de uma superfície perpendicular à direção de propagação da onda. Ou seja, a intensidade I é a potência média por unidade de área*[3].

Como potência pode ser entendida pelo produto da força pela velocidade, então o produto da flutuação de pressão $p(x, t)$, que é a força por unidade de área, pela velocidade da partícula $v_y(x, t)$ é a intensidade de onda sonora.

Em uma onda senoidal descrita pela Equação 3.9, temos:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx).$$

Então, o produto fica:

$$p(x, t)v_y(x, t) = (BkA \cos(\omega t - kx))(\omega A \cos(\omega t - kx)) = B\omega k A^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

A intensidade é o valor médio de $p(x, t)v_y(x, t)$ e como o valor médio da função $\cos^2(\omega t - kx)$ para um período $T = 2\pi/\omega$ é igual a $1/2$; ficamos:

$$I = \frac{1}{2} B\omega k A^2. \quad (3.13)$$

Podemos usar as seguintes relações $\omega = vk$ e $v^2 = B/\rho$; assim, a intensidade de uma onda

sonora senoidal é dada por

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2 \quad (3.14)$$

Por esta equação podemos perceber que em um sistema estereofônico, um alto-falante que emite baixas frequências (woofer) terá que vibrar com uma amplitude maior que um alto-falante que emite frequências altas (tweeter) para que possam produzir a mesma intensidade sonora. Um sistema estereofônico tradicional possui dois canais independentes, esquerdo e direito. Mas existem sistemas de estéreo com mais canais, 4, 6 ou até mais.

Podemos escrever a intensidade I , em função da amplitude de pressão $p_{máx} = BkA$; utilizando a relação $\omega = vk$,

$$I = \frac{\omega p_{máx}^2}{2Bk} = \frac{v p_{máx}^2}{2B}. \quad (3.15)$$

Agora podemos utilizar outra relação, $v^2 = B/\rho$, para expressarmos I ,

$$I = \frac{p_{máx}^2}{2\rho v} = \frac{p_{máx}^2}{2\sqrt{\rho B}}. \quad (3.16)$$

3.5.1 Variação da Intensidade com a distância

Para o caso de uma fonte puntiforme, a intensidade varia com a distância que estamos desta fonte. Quando estamos a uma distância r e nos afastamos ainda mais desta fonte, a intensidade irá diminuir na proporção de $1/r^2$. Isto se deve a lei de conservação da energia. Digamos que a potência da fonte é igual a P . Desse modo, a intensidade média I_1 através de uma esfera que possui raio r_1 e área superficial $4\pi r_1^2$ é

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}.$$

De forma análoga, podemos encontrar a intensidade média I_2 através de uma esfera que possui raio r_2 . Caso não haja absorção de energia por nenhuma das esferas, a potência P é igual para ambos os casos; assim,

$$\begin{aligned} 4\pi r_1^2 I_1 &= 4\pi r_2^2 I_2, \\ \frac{I_1}{I_2} &= \frac{r_2^2}{r_1^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A intensidade I é inversamente proporcional a r^2 . Em outras situações, nas quais exista fluxo de energia proveniente de uma fonte puntiforme, também surge esta proporcionalidade. Não podemos, porém, aplicar esta relação a ambientes internos, pois devemos levar em consideração a energia que chega até o ouvinte através de reflexões nas paredes e no teto (interferência).

3.6 Instrumentos de Sopro

Podemos ver a aplicação dos conceitos relacionados a ondas longitudinais estacionárias no modo como são gerados tons musicais em instrumentos de sopro. Um dos exemplos mais simples de instrumento composto por tubos de ar é o órgão. Na Figura 3.6 vemos que o funcionamento deste instrumento consiste na entrada de ar na parte estreita do tubo, situada em sua base, sendo direcionado a *boca* do tubo. Passa a ocorrer um movimento de vibração da coluna de ar contida no tubo, surgindo assim, diversos modos normais possíveis. Na boca do tubo situa-se um nó de pressão e um ventre de deslocamento. Isso ocorre porque a boca age como uma extremidade aberta do tubo. Na Figura 3.6, a outra extremidade do tubo pode ser aberta ou fechada.

Nas Figuras 3.7, 3.8 e 3.9, os tubos possuem as duas extremidades abertas (*tubo aberto*). Assim, estas extremidades são nós de pressão e ventres de deslocamento. Uma configuração de onda estacionária que possui um ventre de deslocamento em cada extremidade e um nó de deslocamento no meio do tubo representa a frequência fundamental f_1 . Lembremos que, a distância entre dois ventres consecutivos é igual a $\lambda/2$, que para o nosso caso, podemos perceber que também é igual ao comprimento L do tubo, assim, $\lambda/2 = L$. Com auxílio da relação $f = v/\lambda$, temos:

$$f_1 = \frac{v}{2L}. \quad (3.18)$$

Note que nas Figuras 3.7 e 3.8, são apresentados o segundo e o terceiro harmônicos.

O segundo harmônico (primeiro sobretom) possui dois nós de deslocamento, meio comprimento de onda corresponde a $L/2$ e sua frequência é o dobro da frequência fundamental

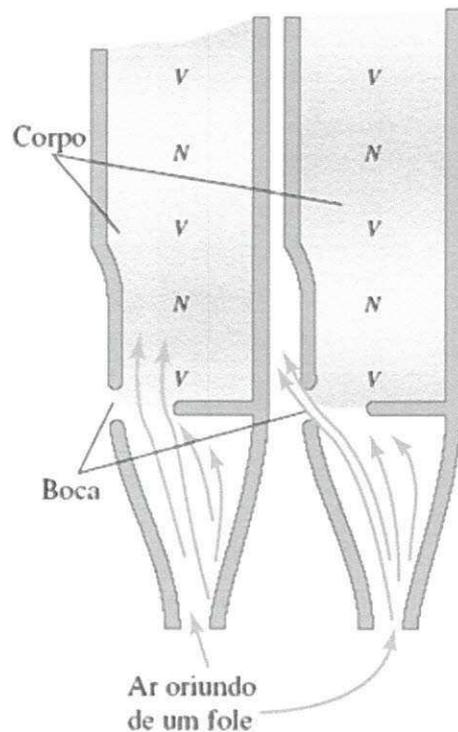


Figura 3.6: Seção reta de um tubo de um órgão em dois instantes separados por meio período.

($f_2 = 2f_1$). O terceiro harmônico (segundo sobretom) apresenta três nós de deslocamento, meio comprimento de onda é igual a $L/3$ e sua frequência é o triplo da frequência fundamental ($f_3 = 3f_1$). Assim, temos que,

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (3.19)$$

(tubo aberto)

As frequências f_n são dadas por $f_n = v/\lambda_n$; logo, as frequências dos modos normais para um tubo aberto podem ser obtidas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (3.20)$$

ou seja,

$$f_n = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (3.21)$$

onde f_1 é dada pela Equação (3.18)

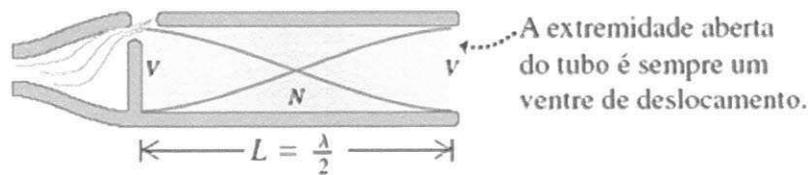


Figura 3.7: Fundamental: $f_1 = \frac{v}{2L}$.

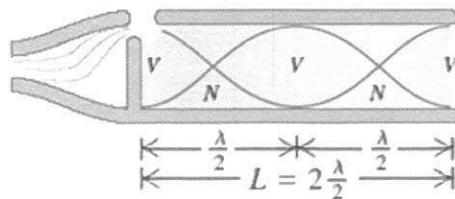


Figura 3.8: Segundo harmônico: $f_2 = 2 \frac{v}{2L} = 2f_1$.

A frequência fundamental corresponde a $n = 1$, o segundo harmônico corresponde a $n = 2$, e assim sucessivamente.

Nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, os tubos possuem uma das extremidades fechadas (*tubo fechado*). Na extremidade aberta, localiza-se um ventre de deslocamento (nó de pressão) e na extremidade fechada situa-se um nó de deslocamento (ventre de pressão). Como vimos anteriormente, a distância entre dois nós consecutivos corresponde a meio comprimento de onda. Sendo assim, a distância entre um nó e um ventre adjacente será igual a um quarto de comprimento de onda. Na Figura 3.10, podemos observar o modo com a menor frequência (frequência fundamental) emitida por este tubo; nessa situação, o comprimento do tubo corresponde a um quarto do comprimento de onda ($L = \lambda/4$). Como a frequência fundamental é dada por $f_1 = v/\lambda_1$, então

$$f_1 = \frac{v}{4L}. \quad (3.22)$$

Notemos que este valor representa a metade da frequência fundamental correspondente a um tubo aberto de mesmo comprimento L . Isso significa que, musicalmente falando, a altura do som produzido por um tubo fechado é uma oitava abaixo em relação ao som produzido

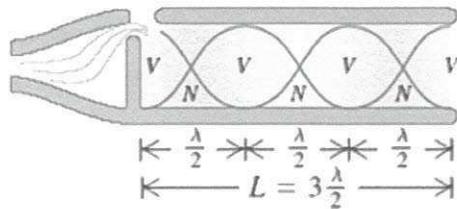


Figura 3.9: Terceiro harmônico: $f_3 = 3 \frac{v}{2L} = 3f_1$.

por um tubo aberto. Vemos na Figura 3.11, o modo no qual o comprimento de onda do tubo corresponde a três quartos do comprimento de onda. Isso representa uma frequência que é três vezes a frequência fundamental, ou seja, $3f_1$. Na Figura 3.12, percebemos que o comprimento de onda do tubo corresponde a cinco quartos do comprimento de onda. Assim, a frequência que temos é cinco vezes a frequência fundamental, ou seja, $5f_1$.

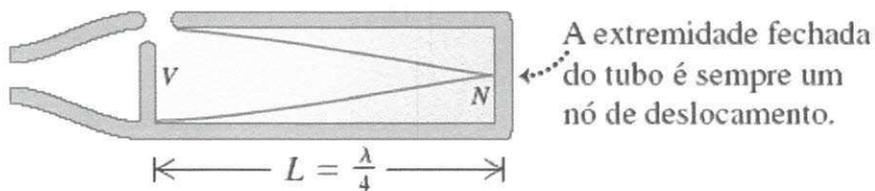


Figura 3.10: Fundamental: $f_1 = \frac{v}{4L}$.

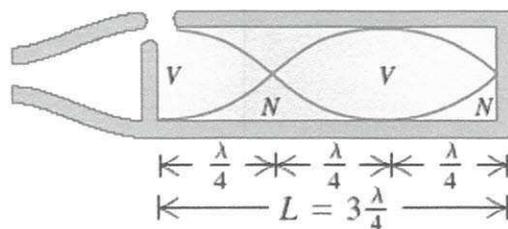


Figura 3.11: Terceiro harmônico: $f_3 = 3 \frac{v}{4L} = 3f_1$.

Desse modo, os comprimentos de onda possíveis são

$$L = n \frac{\lambda_n}{4} \quad \text{ou} \quad \lambda_n = \frac{4L}{n} \quad (n = 1, 3, 5 \dots). \quad (3.23)$$

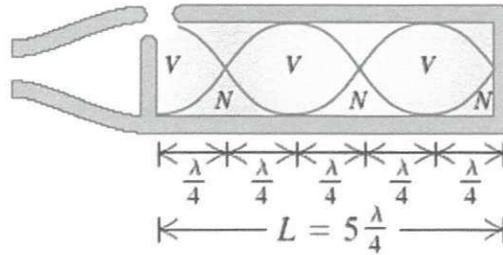


Figura 3.12: Quinto harmônico: $f_5 = 5\frac{v}{4L} = 5f_1$.

Como as frequência dos modos normais são dadas por $f_n = v/\lambda_n$, então

$$f_n = \frac{nv}{4L} \quad (n = 1, 3, 5 \dots). \quad (3.24)$$

logo,

$$f_n = nf_1 \quad (n = 1, 3, 5 \dots). \quad (3.25)$$

Vemos que os harmônicos pares não estão presentes; somente os harmônicos ímpares são possíveis.

3.7 Escalas Musicais

A combinação dos sons, de maneira artística, é o que nós compreendemos como música, e o que permite a existência da música em nossas vidas é a consonância. As relações que permitem a existência de consonância entre sons musicais foram construídas e desenvolvidas ao longo da história, basicamente formuladas levando-se em consideração as frequências (das notas) e o intervalo existente entre elas. As notas são elementos fundamentais para a construção musical.

O intervalo entre duas notas que possuem frequências f_1 e f_2 é definido pela relação $r = f_2/f_1$. Os intervalos de interesse musical apresentam-se como frações de uma oitava, denominada dessa maneira por conter oito notas (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó₂), contidas no intervalo de frequência $f_{dó_2}/f_{dó} = 2$. Estas oito notas compõem a escala musical básica, denominada escala de dó maior.

A nomenclatura das notas musicais apresenta relação direta com contextos históricos e locais, sendo influenciada pela língua dominante em diferentes países. Há uma tendência de que países com idiomas diferentes adotem a nomenclatura inglesa, partindo da ideia do inglês como língua universal.

Línguas Latinas em geral	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si
Francês	ut	rè	mi	fà	sol	là	si
Inglês e Alemão	C	D	E	F	G	A	B

3.7.1 Escala de Pitágoras

Uma das mais importantes contribuições de Pitágoras foi a de ter descoberto o princípio de vibrações de corpos. Ele notou haver uma relação matemática entre notas das escalas musicais e o comprimento de uma corda vibrante do **monocórdio**. Quando sons são combinados e resultam em sensação agradável ao ouvido dizemos que estes sons são consonantes, caso contrário, dizemos que são dissonantes.

Conforme visto no Capítulo 2, uma corda tensionada e fixa nas extremidades e que possui comprimento L , tem modos de vibração definidos por comprimentos de onda λ_n , da seguinte forma

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

Podemos também, traçar uma relação entre frequência e velocidade de propagação da onda sobre uma corda, da forma

$$v = f_n \lambda_n,$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}.$$

Considerando apenas o modo fundamental ($n = 1$), as relações de frequência serão

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Estas relações $2/1$, $3/2$ e $4/3$ definem as notas $dó_1$, $fá$, sol e $dó_2$ em notação atual[2]. A relação de frequência $3/2 : 4/3 = 9/8$ entre as notas $fá$ e sol define o intervalo de um tom. O intervalo de uma oitava é definido pela relação $2/1$, no nosso caso de $dó_1$ a $dó_2$.

Ao tomarmos a nota $dó_1$ como referência, podemos definir as nota $ré$ um tom acima e mi um tom abaixo do $ré$. Do mesmo modo, se tivermos como base a nota sol , podemos definir as nota $lá$ e si , completando assim a escala de Pitágoras. Ao construirmos esta escala, iremos encontrar os intervalos entre as notas $mi - fá$ e $si - dó_2$ como sendo $256/243$; este intervalo define o meio tom ou semitom.

É comum dizermos que semitom é a metade do tom, isso ocorreria se o intervalo fosse a diferença das frequências. No entanto, o intervalo é a razão entre as frequências, e esperamos que o intervalo de um tom possua dois intervalos de semitom. Ou seja, se r for o intervalo de semitom, $r \times r = r^2$ deve corresponder a o intervalo de um tom. O que ocorre apenas de forma aproximada na escala pitagórica:

$$r^2 = \left(\frac{256}{243}\right)^2 \approx 1,1099.$$

O intervalo de um tom é $9/8 = 1,125$. Isso quer dizer que meio tom acima de $dó$ e meio tom abaixo de $ré$ não são equivalentes. Veja na Tabela 3.2, os intervalos das notas em relação a primeira, e na Tabela 3.3 os intervalos entre duas notas consecutivas.

$dó_1$	$ré$	mi	$fá$	sol	$lá$	si	$dó_2$
1	$9/8$	$81/64$	$4/3$	$3/2$	$27/16$	$243/128$	2

Tabela 3.2: Notas e respectivos intervalos em relação à primeira nota do_1 na escala de Pitágoras

$dó_1 - ré$	$ré - mi$	$mi - fá$	$fá - sol$	$sol - lá$	$lá - si$	$si - dó_2$
$9/8$	$9/8$	$256/243$	$9/8$	$9/8$	$9/8$	$256/243$

Tabela 3.3: Notas e os intervalos entre duas notas consecutivas na escala de Pitágoras.

3.7.2 Escala de entonação justa

Ptolomeu acrescentou as relações de Pitágoras $3 : 2 : 1$ as relações $4 : 5 : 6$ e as considerava tão consonantes quanta as anteriores. Tomando como nota referencial o $dó$,



formou o conjunto de intervalos $\{1, 5/4, 6/4 = 3/2\}$, que corresponde ao conjunto das notas $\{dó, mi, sol\}$. Tomando como nota referencial o *sol*, formou, multiplicando o mesmo conjunto de intervalos por $3/2$, o conjunto de intervalos $\{3/2, 15/8, 9/4\}$, que corresponde ao conjunto das notas $\{sol, si, ré_2\}$ [2], conforme mostrado na Tabela 3.4.

A base da chamada escala de entonação justa é este conjunto de notas com intervalos em relação a nota $dó_1$. Os intervalos entre notas adjacentes é apresentado na Tabela 3.5, na qual vemos os intervalos de tom maior ($9/8 = 1,125$), de tom menor ($10/9 = 1,111\dots$) e de semitom ($16/15 = 1,0666\dots$). A escala de *dó* maior é definida pelo conjunto das oito notas, de $dó_1$ a $dó_2$. Na Tabela 3.6 há uma relação entre as frequências das notas da oitava central da escala de entonação justa, tomando por padrão a frequência $f(Lá) = 440Hz$.

$dó_1$	<i>ré</i>	<i>mi</i>	<i>fá</i>	<i>sol</i>	<i>lá</i>	<i>si</i>	$dó_2$
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Tabela 3.4: Notas e respectivos intervalos em relação à primeira nota $dó_1$ na escala de entonação justa

$dó_1 - ré$	<i>ré - mi</i>	<i>mi - fá</i>	<i>fá - sol</i>	<i>sol - lá</i>	<i>lá - si</i>	<i>si - dó_2</i>
9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Tabela 3.5: Notas e os intervalos entre duas notas consecutivas na escala de entonação justa.

<i>Dó</i>	<i>Ré</i>	<i>Mi</i>	<i>Fá</i>	<i>Sol</i>	<i>Lá</i>	<i>Si</i>	<i>Dó</i>
3/5	27/40	3/4	4/5	9/10	1	9/8	6/5
264	297	330	352	396	440	495	528

Tabela 3.6: Notas e respectivos intervalos em relação à primeira nota $dó_1$ na escala de entonação justa

A primeira nota (*dó*) é definida como sendo a tônica, a terceira nota (*mi*) é a mediantes e a quinta (*sol*) a dominante. A tônica determina o nome ou o tom da escala, sendo a primeira delas a de *dó* maior. Outras sete escalas de outras tonalidades são definidas, em



ordem ascendente, mantendo-se este padrão repetindo-se em quintas. Para que o padrão de intervalos seja mantido (tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom), podemos agora recorrer a uma alteração nas notas em meio tom para cima (sustenido, símbolo #), nas posições adequadas. Quando a ordem for decrescente, usamos alterações nas notas em meio tom abaixo (bemol, símbolo b), e então podemos definir mais sete escalas.

Toda escala maior, possui uma menor relativa. A relativa menor de *dó* maior é a *lá* menor, que é definida pelo conjunto de notas $\{lá, si, dó, ré, mi, fá, sol, lá\}$ com um padrão de intervalos (tom-semitom-tom-tom-semitom-tom-tom) diferente da escala maior. Existe uma diferença nas posições relativas dos intervalos de tom e semitom, entre as escalas maior e menor; estas diferenças produzem sentimentos alegres (escalas maiores) ou tristes (escalas menores).

Lembremos que, o som natural pode ser considerado como sendo uma combinação linear de ondas sonoras com frequências harmônicas $f_n = n f_0$ ($n = 1, 2, 3 \dots$), onde f_0 é a frequência fundamental.

3.7.3 Escala cromática

As escalas conhecidas como naturais (escala pitagórica e de entonação justa), possuem problemas de ordem prática pelo fato de apresentarem relações de frequências desiguais, o que acarreta em dificuldade para se fazer a transposição de uma sentença musical ou até mesmo a execução de uma peça usando instrumentos com diferentes afinações. Para a resolução deste problema foi criada a escala cromática ou temperada, que foi construída de tal maneira que uma oitava continha 12 notas separadas em intervalos iguais, de razão r [2].

$$f_0, \quad f_1 = r f_0, \quad f_2 = r f_1 = r^2 f_0, \quad f_3 = r^3 f_0, \quad \dots, \quad f_{12} = r^{12} f_0 = 2 f_0.$$

onde f_0 é uma frequência de referência e $f_{12} = r^{12} f_0 = 2 f_0$ é a frequência da oitava acima.
Logo

$$r = \sqrt[12]{2} \simeq 1,0594631.$$



Com esta razão podemos definir o intervalo de semitom como sendo r e o intervalo de tom como sendo r^2 . A escala cromática apresenta atualmente caráter universal como padrão de afinação da maioria dos instrumentos musicais.

De modo prático, a teoria musical usa as qualidades sonoras da escala de entonação justa, com uma aproximação, na escala cromática, utilizando a praticidade desta última nas mudanças de tonalidades de trechos de músicas. Observe na Tabela 3.7, a relação entre as notas e as frequências da oitava central da escala cromática (tendo como padrão a frequência de 440Hz da nota $Lá$). Nesta escala, as alterações (sustenido - $\#$ e bemol - b), são notas enarmônicas, ou seja, $dó\# = ré_b$, $ré\# = mi_b$, etc...

<i>Dó</i>	<i>Dó#</i>	<i>Ré</i>	<i>Ré#</i>	<i>Mi</i>	<i>Fá</i>	<i>Fá#</i>	<i>Sol</i>	<i>Sol#</i>	<i>Lá</i>	<i>Lá#</i>	<i>Si</i>	<i>Dó</i>
<i>Dó</i>	<i>Ré_b</i>	<i>Ré</i>	<i>Mi_b</i>	<i>Mi</i>	<i>Fá</i>	<i>Sol_b</i>	<i>Sol</i>	<i>Lá_b</i>	<i>Lá</i>	<i>Si_b</i>	<i>Si</i>	<i>Dó</i>
1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	2
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	491	523

Tabela 3.7: Intervalos em relação a $Lá$ e as frequências (em Hz) correspondentes às notas da oitava central na escala cromática.

Capítulo 4

O instrumento

A flauta transversal, também chamada de flauta transversa ou simplesmente de flauta, é um aerofone pertencente à família das madeiras. É um instrumento que não utiliza palheta e possui um orifício por onde o instrumentista sopra perpendicularmente ao sentido do instrumento. Apesar de atualmente ser fabricada em metal, inicialmente, ela era fabricada de madeira. Por este motivo, desde então, a flauta transversal é classificada nas orquestras como um instrumento pertencente ao grupo das madeiras.

4.1 A evolução da Flauta Transversal

A ideia primitiva da flauta

A flauta é um dos mais antigos instrumentos musicais. Existem relatos que há muitos anos, nos tempos mais remotos, os homens já utilizavam ossos e outros objetos de formato cilíndrico para produzir sons[8].

Inicialmente a flauta primitiva possuía diversas formas, que variavam desde um pequeno apito feito basicamente de ossos de avestruz a tubos feitos com bambus, possuindo um corte em forma de forquilha (o que viria a tornar-se a flauta doce); existiam ainda flautas feitas

com cascas de frutas que, quando secas, ficavam com uma cavidade oca em seu interior.

Com o decorrer do tempo, foram introduzidos orifícios as flautas. Nas civilizações Egípcias e Sumérias, existe um histórico do uso de flautas que possuíam três ou quatro furos. Contudo, já se sabe que existiram na era pré-histórica, flautas feitas com ossos, contendo vários orifícios.

Idade média

A evolução da flauta apresenta duas fases distintas: a fase do sistema antigo ou fase 'alemã', e a fase da flauta moderna, a partir de Boehm. No período da Renascença, a denominação de flauta era dada a diversos instrumentos. Destes instrumentos, os que eram tocados de modo vertical tornaram-se a moderna flauta doce, e os que eram tocados horizontalmente, de lado, tornaram-se a moderna flauta transversal. Sua construção era feita em madeira, possuindo tubos únicos, contendo orifícios que eram fechados com os dedos, com o interesse de produzir diversos sons.

Antes dos anos 1400, os instrumentistas faziam apenas pequenos acompanhamentos de cantores, participando de canções e posteriormente, madrigais e motetes. No entanto, a partir da renascença, a música instrumental 'separa-se' da música vocal e toma formas próprias.

Com o surgimento da música instrumental, surge também a necessidade e o desenvolvimento de diversos tipos de instrumentos, o que nos leva a novas considerações a respeito de construções melódicas e harmônicas. A música instrumental ganhou aspectos importantes na composição, o que proporcionou o surgimento da orquestra.

Em torno de 1636, Marin Mersenne fez a identificação de duas flautas, uma afinada em *Dó* e outra em *Sol*. Estas flautas não apresentavam chaves, contudo, Mersenne já argumentava sobre a necessidade do acréscimo destas chaves para o instrumento se tornar cromático. As primeiras flautas com chaves só iriam ser construídas cinquenta anos depois.

Os séculos XVII e XVIII

No período Barroco, a música instrumental foi enfatizada em substituição à música dramática representada pelo madrigal lírico; com a evolução deste movimento, também surgiu a necessidade de avanços e melhorias nos instrumentos de madeira e sopro.

Um dos principais personagens que efetuaram modificações na flauta foi o francês chamado Jean Hotterre, que foi responsável pela adição da primeira chave na flauta, por volta de 1660.

De acordo com o que foi idealizado anteriormente por Mersenne, o instrumento desenvolvido por Hotterre era afinado em *Ré Maior*, tendo como nota fundamental o *Ré₁*. Esta nova flauta era dividida em três partes, contendo em sua parte central seis orifícios e o ‘pé’ do instrumento apresentava a inovadora chave do *Ré[#]*. A tessitura dessa flauta era de ‘duas oitavas e algumas notas’ (*Ré₁ – Ré₃* mais algumas notas forçadas). O termo tessitura refere-se a variação de notas que um instrumento pode alcançar ou as notas que a uma voz é capaz de emitir. Por volta de 1722, foram feitas tentativas para se obter uma extensão da tessitura da flauta a partir de *Dó₁*.

A flauta do século XVIII possuía em sua extremidade superior um sistema de rolha que a fechava. Com este sistema era possível que o instrumentista puxasse ou empurrasse a rolha para afinar o instrumento.

Com o surgimento da escala temperada, por volta da metade do século XVIII, surgiu o desenvolvimento de um mecanismo de chaves que tornava possível o cromatismo para os instrumentos de sopro. No final do século XVIII, entramos no ‘período da abordagem mecânica’ que levou a solução de problemas de afinação da flauta. A flauta foi o primeiro dos instrumentos de madeira e sopro a possuir um sistema de chaves para possibilitar o cromatismo. A flauta de oito chaves corresponde ao ponto máximo de desenvolvimento deste instrumento durante o século XVIII[8].

O século XIX

Embora a flauta de oito chaves fosse considerada como modelo padrão ao final do século XVIII e início do XIX, ela estava longe do que poderíamos considerar como sendo ideal. Em

termos mecânicos, o primeiro avanço ocorrido com a flauta se deu em 1806 por Claude Laurent, de Paris. A inovação consistia em mecanismos necessários devido a existência de flautas fabricadas em vidro, um destes mecanismos eram encaixes de prata e soquetes utilizados para a montagem das chaves.

Durante o início do século XIX, houve uma grande preocupação com a extensão da tessitura da flauta. Neste período surgiram melhorias que possibilitaram a obtenção de notas mais agudas.

No entanto, as flautas da época não possuíam os seus orifícios postos em seus devidos lugares, por conveniência e possibilidades de alcance dos dedos, e era consenso entre os fabricantes da necessidade de coloca-los em seus locais acusticamente corretos.

O sistema de Theobald Boehm

Com o aumento do destaque e popularidade da flauta transversal, por esta ter se tornado um instrumento de caráter solístico, tornaram-se evidentes também seus problemas; suas discrepâncias em comparação aos instrumentos de cordas, também presentes nas orquestras, foram ainda mais reveladas, além dos seus problemas em relação a sua qualidade sonora.

As expectativas do século XIX não eram preenchidas pela flauta do 'sistema Alemão' a qual possui afinação incerta e sonoridade suave, inadequada para instrumentos com caráter solista dentro da orquestra; sua dinâmica também não era suficiente para competir como o naipe dos metais.

Com a genialidade de Theobald Boehm (1794 - 1881), a flauta 'fugiu' desta situação crítica. Sendo o primeiro a aplicar conceitos científicos na construção da flauta, apresentava como maior crítica a flauta Alemã a falta de princípios acústicos, e apontava como responsáveis os fabricantes que, por desconhecerem tais princípios acústicos, colocavam os orifícios da flauta em posições que simplesmente pudessem ser alcançadas pelos dedos.

Boehm chegou a conclusão de que mudanças em detalhes mecânicos não seriam o bastante para que houvesse correção nas deficiências do sistema da flauta vigente, era necessário um

novo sistema de dedilhados, e assim a flauta teria seus problemas corrigidos.

O primeiro modelo apresentado por Boehm era praticamente o mesmo instrumento utilizado na época, contudo, apresentava os orifícios em seus locais acusticamente corretos. Daí então, Boehm conduziu uma série de experimentos para determinar o diâmetro dos orifícios. Em 1832, ele lançou um novo modelo que apresentava caráter ainda mais inovador e exigia também alterações de dedilhados. Surgiu a necessidade de se controlar quatorze orifícios com apenas nove dedos.

Embora sendo criticado, o novo sistema passou a ser aceito aos poucos. Depois de estudar acústica na Universidade de Munique, Boehm passou a desenvolver estudos que o levaram a fazer outras modificações na flauta, como também formular os princípios fundamentais para a construção do seu novo instrumento.

A flauta de Bohem ou flauta moderna

A flauta moderna é um produto que é resultado do desenvolvimento da acústica e das necessidades musicais ligadas a diferentes épocas. Na Figura 4.1, é apresentada a composição deste instrumento e as partes: cabeça, corpo central e pé.

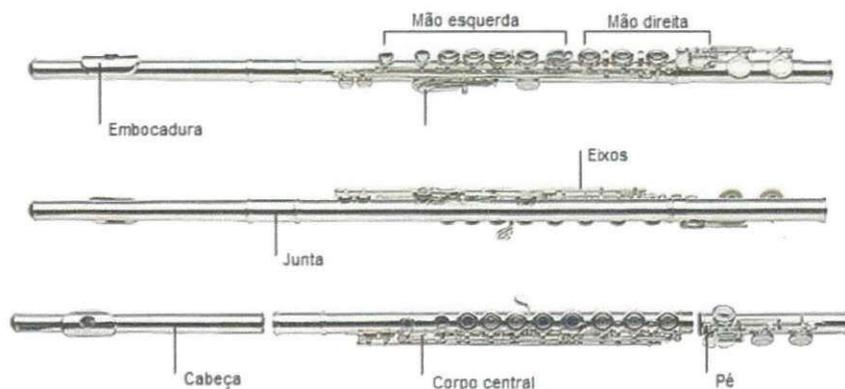


Figura 4.1: Divisão da Flauta Transversal moderna.

A cabeça atua como peça intermediária entre o músico e o som, esta parte possui cerca de 18,5 cm de comprimento e cavidade com diâmetro de 19 mm.

O corpo central da flauta é um tubo cilíndrico de 35,5 *cm* de comprimento e 19 *mm* de diâmetro; sobre o corpo central encontram-se os orifícios e os eixos que ligam os mecanismos do sistema de Boehm.

O pé da flauta possui 13 *cm* de comprimento e 19 *mm* de diâmetro, apresenta jogo mecânico semelhante ao do corpo central, porém, com tamanho menor.

A flauta é um instrumento que possui afinação em *Dó*, seu comprimento total é 67 *cm* e possui cavidade uniforme. A tessitura normal da Flauta Transversal é de *Dó*₄ a *Dó*₇, tendo sua escala dividida em 4 registros: grave, médio, agudo e superagudo. Na Figura 4.2, há um comparativo entre a tessitura da flauta e de outros instrumentos bem conhecidos.

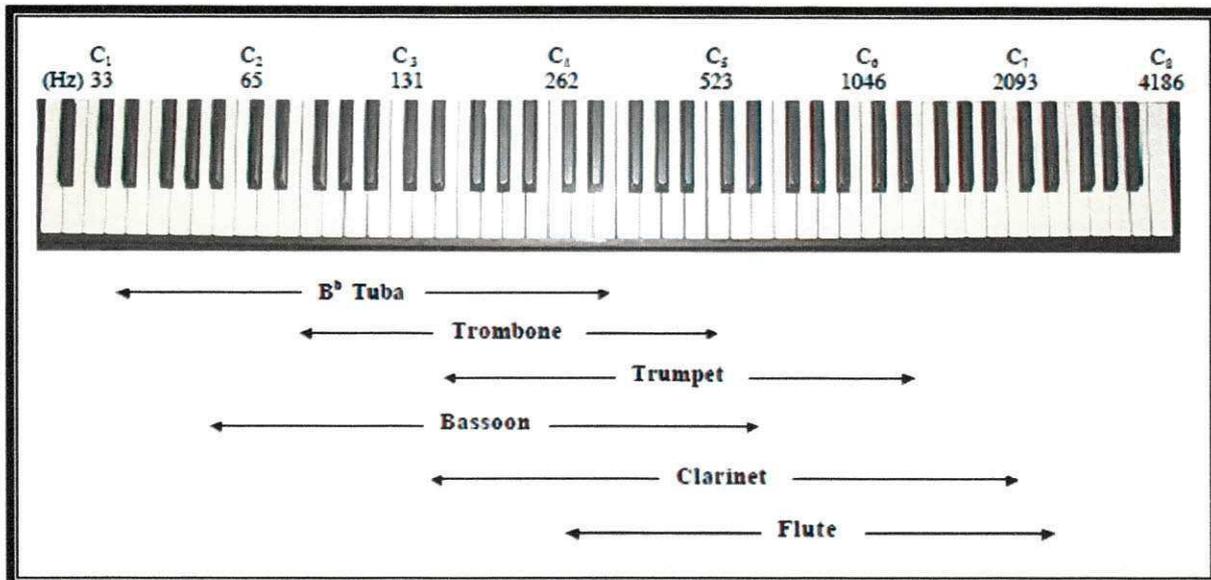


Figura 4.2: Comparativo entre as tessituras de diferentes instrumentos.

4.2 Construindo um Tom

Podemos criar ondas estacionárias na coluna de ar contida em instrumentos de sopro ou aerofones. Pode não parecer tão claro, mas quando a onda de ar em um instrumento de sopro

chega ao final deste instrumento, tudo o que se encontra além deste ponto é o espaço aberto; assim ela encontra uma mudança de impedância. Esta abertura configura um ambiente menos restrito para a onda (impedância menor), e devido a esta mudança de impedância, parte da onda é refletida de volta ao instrumento. O processo de visualização de uma onda refletindo em uma flauta ou clarinete, é mais 'difícil' de ser percebido que a reflexão de ondas em cordas, como no caso de uma guitarra. Uma condição necessária para criarmos uma onda sonora em um aerofone, é que o instrumentista dirija um fluxo de ar dentro do instrumento[9].

Dentre os aerofones, podemos incluir vários instrumentos musicais, tomando destaque alguns como: o clarinete, o saxofone, o oboé, o fagote, a flauta doce e a flauta transversal. Estes instrumentos são conhecidos como Instrumentos de Madeira e Sopro, o que nos provoca um questionamento, já que conhecemos o saxofone e flauta transversal, por exemplo, feitos de metal. Isso se deve ao fato de eles terem sido feitos inicialmente de madeira.

Caso você ouça o som produzido por algum dos instrumentos citados anteriormente, perceberá que não se trata de um tom puro. Sua emissão nos parecerá como uma junção de vários tons diferentes, e é um conjunto que envolve ondas que possuem comprimento de onda diferentes. Pode nos parecer, desse modo, que este meio de produção do som seria de baixo valor para a produção de ondas estacionárias. Necessariamente, para que uma onda possua valor musical, ela deve ser estacionária. No entanto, ao observarmos o fenômeno que ocorre com estas ondas em um tubo com as duas extremidades abertas (tubo aberto), ou em um tubo com uma extremidade aberta e outra fechada (tubo fechado), veremos que este não é o caso. Caso o tubo apresente uma extremidade fechada, por exemplo, ocorrerá uma reflexão das ondas nesta extremidade em virtude do arranjo de ondas mover-se em sua direção. Este arranjo irá, de maneira contínua, se mover para trás e para frente no tubo, o que faz com que este arranjo se modifique. Como foi visto anteriormente, um tubo sonoro apresenta um comprimento de onda fundamental, e algumas ondas presentes neste arranjo estarão bem próximas da fundamental. Haverá uma superposição destas ondas fazendo com que outras acabem decaindo, devido ao movimento das ondas para frente e para trás. Assim, vamos obter uma onda estacionária de comprimento igual ao da fundamental.

Existem dois tipos de criação de tons, os que são criados por embocadura livre e os que são

criados por uma palheta. A flauta, por exemplo, usa um tom de embocadura livre, o clarinete e o saxofone, usam apenas uma palheta, e o oboé e o fagote usam palheta dupla. Usando estes métodos, podemos obter ondas estacionárias na cavidade destes instrumentos, e estas ondas estacionárias serão formadas por uma fundamental e vários sobretons. Contudo, os sobretons dão umas poucas notas da escala, e para produzirmos uma escala inteira, precisamos de algo a mais.

4.3 Obtendo um Escala

O processo que envolve a obtenção de uma escala em um instrumento está ligado a forma de sua cavidade. Uma flauta possui cavidade uniforme e duas extremidades abertas; a cavidade do clarinete também é uniforme e possui uma extremidade aberta e outra fechada. De forma diferente, temos o saxofone que possui uma cavidade que não é uniforme, na qual, seu tamanho aumenta em direção a extremidade da campanula, ou seja, seu formato é cônico com uma extremidade fechada e outra aberta. As cavidade do oboé e do fagote também são cônicas.

Para o caso da flauta, temos um tubo uniforme, no qual podemos gerar uma série de ondas estacionárias que correspondem ao fundamental e sobretons. Elas darão poucas notas da escala diatônica. Em um tubo aberto, temos que meio comprimento de onda se encaixa nele e é, desse modo, fundamental para o tubo. Então, o que devemos fazer é proporcionar uma diminuição do comprimento efetivo do tubo para que possamos aumentar a altura das ondas dentro dele, com intuito de obtermos outras notas. Devemos fazer isto da seguinte maneira; perfurando um buraco ao longo do comprimento do tubo, se este buraco for pequeno, seu efeito também será pequeno, porém, se for suficientemente grande, ele mudará o comprimento de onda no tubo, mudando assim a altura da onda emitida, o que podemos ver na Figura 4.3. Um buraco torna o tubo equivalente a um tubo mais curto (sem buraco), que é o que nós necessitamos[10].

Assim, vemos que pondo um buraco ao longo do tubo, podemos obter notas extras, com uma altura dependendo do tamanho do buraco. Colocando mais de um buraco ao longo de

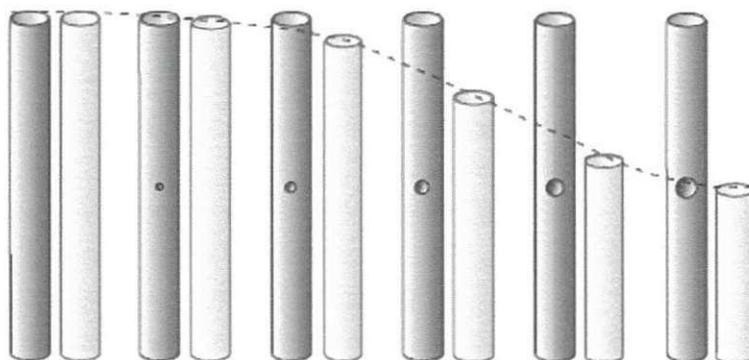


Figura 4.3: Influência de um buraco aberto no tubo sobre o seu comprimento efetivo.

um tubo, podemos mudar o comprimento efetivo deste. Em tubo aberto, podemos obter uma escala diatônica com seis buracos ao longo da sua lateral. Temos como exemplo deste caso a flauta; ao iniciarmos com todos os buracos tampados e formos destampando-os um de cada vez, iniciando na extremidade inferior, iremos gradualmente aumentando a altura dos tons emitidos por esta flauta, logo, com buracos apropriados vamos obter todas as notas da escala diatônica (Veja a Figura 4.4). Podemos partir de $Dó$ até Si . No entanto, para obtermos $Dó_2$, temos que fechar todos os buracos e soprar mais firme para chegarmos ao segundo harmônico. Este método de soprar mais forte para obtermos harmônicos superiores, ou sobretons, é chamado OVERBLOWING. Após obtermos $Dó_2$, podemos continuar destampando os buracos no mesmo modo do caso anterior para obtermos notas mais altas.

Esta técnica funciona muito bem com a flauta (tubo aberto), contudo, não funciona com o clarinete, composto por um tubo fechado. No caso do clarinete, é quase impossível a obtenção do segundo harmônico pelo método de soprar mais forte.

4.4 O corpo instrumental

Os instrumentos de madeira e sopro são compostos de três partes básicas: a palheta ou bocal, a cavidade e os buracos laterais. O fluxo de ar contínuo soprado pelo instrumentista é o que gera as vibrações iniciais no instrumento. As vibrações iniciais são geradas pela

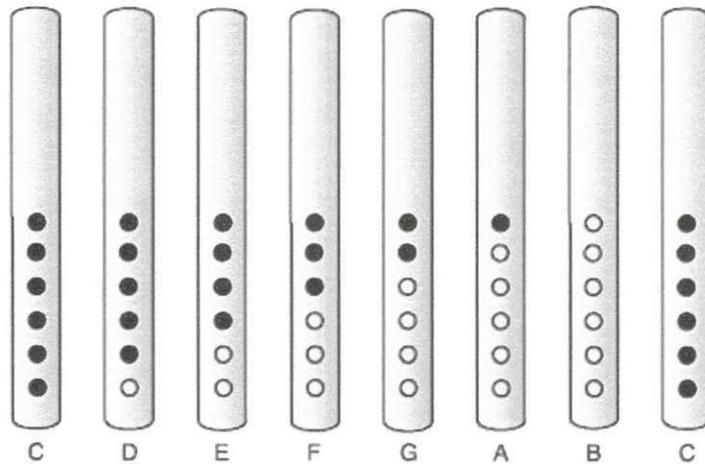


Figura 4.4: Relação entre buracos abertos e fechados na escala musical. Em *Dó* (C) todos os buracos fechados e em *Si* (B) todos abertos.

embocadura, que pode ser uma palheta ou embocadura livre como no caso da flauta. A frequência de vibração do ar é determinada pelo comprimento efetivo da cavidade que, por sua vez, é determinado pelo número de buracos cobertos e descobertos ao longo do tubo.

Ao observarmos os buracos em um saxofone ou clarinete, perceberemos que eles não apresentam distâncias entre si de maneira uniforme, bem como seus tamanhos também são diferentes. Além disso, os instrumentos de madeira e sopro apresentam mais que seis buracos.

Tendo um tubo que possui comprimento L com buracos ao longo do seu corpo, podemos traçar algumas relações. Inicialmente, todos os buracos estão cobertos; no momento em que um buraco é aberto, ele diminui o comprimento efetivo do tubo (como visto na seção anterior). Desejamos uma mudança que proporcione o aumento de meio tom acima do tom anterior.

Usaremos a relação para um tubo aberto,

$$f_n = \frac{nv}{2L},$$

para $n = 1$. Associando seu resultado a relação entre os intervalos da escala cromática,

$$f' = rf,$$

onde $r = 1,0594631$, podemos obter uma expressão para o decréscimo percentual do comprimento efetivo do tubo:

$$\frac{\Delta L}{L} = 1 - \frac{1}{r}$$

Utilizando a escala cromática onde $r = 1,0594631$, temos que o buraco deve decrescer o comprimento efetivo do tubo em 6% ($0,06L$). Assim teremos um novo comprimento L , denominado L' . Logicamente, para o seguinte meio tom teremos que decrescer L' em 6% ($0,06L'$), desse modo, podemos continuar este procedimento para todas as notas da escala. Assim, podemos perceber porque o espaçamento não é igual: temos um novo comprimento efetivo do tubo a cada procedimento.

Podemos perceber também que os buracos ao longo do clarinete e do saxofone não possuem tamanho uniforme. Esta não é uma característica pertencente a todos os instrumentos de madeira e sopro. Na flauta, os buracos são todos do mesmo tamanho. O caso mais notório em que há mudança no tamanho dos buracos é quando a cavidade do instrumento muda. Isso ocorre porque a razão entre o tamanho dos buracos e o tamanho da cavidade tem que ser mantida constante para que sejam equivalentes a um conjunto de buracos uniforme em uma cavidade uniforme[10].

4.5 Impedância Acústica

Em nossos estudos, percebemos que em ondas acústicas propagando-se em uma coluna de ar, a densidade ρ e a pressão p do ar tem influências diretas nesta propagação. Imaginemos aqui um tubo sonoro, no qual o ar está em movimento; obviamente, quando esta onda em propagação dentro do tubo alcançar a extremidade livre (em contato direto com a atmosfera), as características de propagação irão mudar. Esta mudança é diretamente proporcional a pressão na coluna de ar e a densidade do ar dentro do tubo, ou seja, quanto maior forem estes fatores, maior será a mudança que sofrerá esta onda ao cruzar estes meios. No entanto, se expandirmos a área da seção transversal do tubo, diminuiremos a pressão e a densidade do ar contido em seu interior, proporcionando assim uma melhor transição da onda entre

estes 'meios'. Esta característica de 'resistência' ao movimento da onda neste ponto de mudança de meios é o que denominamos **impedância acústica**[11], que pode ser definida matematicamente como,

$$\text{Impedância Acústica} = \frac{\text{pressão} \times \text{densidade}}{\text{área}} \quad (4.1)$$

Qualquer meio (ou parte de um meio), que possa transportar uma onda acústica possui a propriedade de impedância acústica e que pode ser utilizada para descrever o modo como a energia se move através destes meios.

Isso nos auxilia a entender o que ocorre quando uma onda acústica progride de um meio para outro. Quando as impedâncias dos dois meios de transmissão não são as mesmas, apenas uma parte da energia seguirá, tendo seu restante refletida. O conceito de impedância acústica nos permite calcular este índice.

A fração da energia que é refletida depende da relação entre as duas impedâncias,

$$\text{fração da energia refletida} = \left(\frac{\text{impedância}_1 - \text{impedância}_2}{\text{impedância}_1 + \text{impedância}_2} \right)^2. \quad (4.2)$$

Uma característica importante desta equação é que ela mostra as únicas condições sob as quais nenhuma energia é refletida, quando as duas impedâncias são exatamente iguais.

Vejamos agora na Tabela 4.1, algumas variações da reflexão da energia da onda com os valores de impedância.

Esta Tabela nos fornece um ponto importante: se a razão entre as duas impedâncias não corresponder a 1, parte da energia será refletida e parte da energia será transmitida. E não importa se a Impedância₁ é menor que a Impedância₂ e vice-versa.

$\frac{\text{Impedância}_1}{\text{Impedância}_2}$	Energia refletida (%)	Energia transmitida (%)
0.01	96	4
0.02	92	8
0.05	82	18
0.1	67	33
0.2	44	56
0.5	11	89
1	0	100
2	11	89
5	44	56
10	67	33
20	82	18
50	92	8
100	96	4

Tabela 4.1: Como a fração da energia que é refletida depende da relação das duas impedâncias.

Capítulo 5

Figuras de Chladni

Ernst Chladni(1756 - 1824) foi o precursor nos estudos sobre vibrações em placas. Físico e músico, ele iniciou seus estudos nesta área há mais de 200 anos. A partir de uma experiência simples, na qual Chladni depositou areia sobre uma placa enquanto esta era posta a vibrar por um arco de violino. Ele observou a formação de figuras que obedeciam a padrões diferenciados, mas possuíam beleza de igual teor, que surgiam da vibração que era provocada na placa e agitavam a areia. Surgiram assim, as chamadas ‘Figuras de Chladni’.

É comum vermos Chladni sendo referenciado como o ‘Pai da Acústica’ . Seus trabalhos com vibrações em placas serviram como fonte de inspiração para trabalhos de muitos outros cientistas. Os resultados obtidos em seus experimentos eram realmente impressionantes, destacavam-se pela sua qualidade estética e sofisticados padrões de figuras nas placas vibrantes.

As figuras de Chladni apresentam uma valiosa forma de obtenção do melhor formato de placas utilizadas na construção de instrumentos musicais, tais como, as placas de madeira para construir um violino ou em um violão, que representam uma importante característica na determinação das melhores propriedades do instrumento final. Estas figuras são a base para o fornecimento de gabaritos ideais para que os fabricantes possam dar formas às placas para a estrutura final de vários instrumentos. Placas simétricas produzem padrões simétricos,

ao contrário das placas que não são simétricas.

Neste capítulo vamos descrever um experimento para a obtenção das Figuras de Chladni. Este experimento foi desenvolvido no laboratório de Física do Centro de Educação e Saúde da UFCG, Campus de Cuité, Curso de Licenciatura em Física, durante o início do período letivo 2011.1.

O objetivo foi reproduzir em laboratório uma experiência que gerou as chamadas Figuras de Chladni para podermos analisar os modos de vibração do meio material no qual as figuras se formam sendo possível contextualizar as ideias relacionadas as ondas sonoras nas aulas do ensino médio.

5.1 Os modos de vibração

No capítulo 2, vimos que em uma corda vibrante podíamos notar a presença de nós e ventres, de modo análogo, veremos neste capítulo ondas estacionárias bidimensionais produzidas em placas, possibilitando a formação de nós (pontos sem vibração) e ventres (pontos onde ocorre máxima vibração). Dessa maneira, não é difícil compreendermos a formação das figuras nas placas. Percebemos assim que, ao colocarmos grãos de areia sobre a placa, veremos estes posicionarem-se nas regiões onde existem os nós, devido ao fato de que neste ponto elas não sofrerão nenhuma força que as tire de seu estado de equilíbrio. Esses nós são linhas que podem assumir diferentes formas, passando por círculos, quadrados, forma de X, de um anel, entre outras. Estes padrões de figuras são os mesmos obtidos por Chladni.

Para que possamos nomear os modos de vibração de placas que possuem diferentes geometrias temos que utilizar diferentes nomenclaturas. Para uma placa retangular estes modos são identificados por dois números no padrão (n, m) onde n é o número de nós seguindo em uma direção da placa paralela a sua borda, e m é o número de nós na direção perpendicular. Um exemplo é mostrado na Figura 5.1(a), em que vemos a amplitude em um instante de tempo. Na Figura 5.1(b), é mostrado apenas o sinal da amplitude a as linhas que representam os nós.

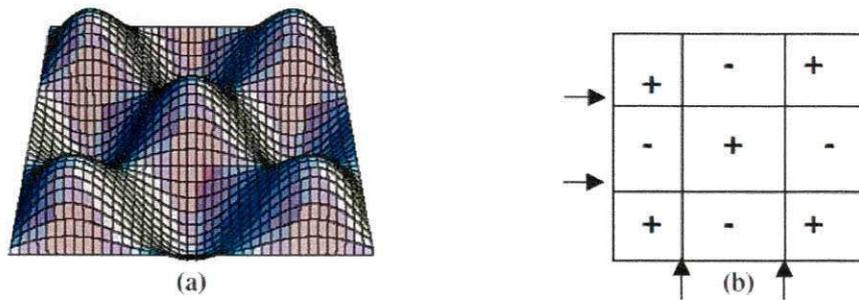


Figura 5.1: Vibração em uma placa quadrada[14].

Para placas circulares, também chamamos os modos (n, m) , no entanto, neste caso n é o número de nós circulares e m é o número de nós estendidos ao longo do diâmetro da placa. Para esta geometria de placa, Chladni traçou a seguinte relação:

$$f \propto (m + 2n)^2,$$

onde f representa a frequência de vibração da placa. Esta relação ficou conhecida como a Lei de Chladni, e mesmo com a melhoria e o desenvolvimento de equipamentos, esta lei continua sendo empregada no estudo de vibrações de placas.

A teoria matemática desenvolvida para estas vibrações é bastante complexa e exige o conhecimento de matemática avançada. Por esta razão, optamos por não apresentar aqui tais deduções.

Para que possamos provocar uma vibração na placa é necessária uma fonte de oscilação, ou seja, algo de possa provocar a vibração na placa. Quando Chladni iniciou seu experimento, a sua fonte de oscilação foi um arco de violino atritado na borda da placa, podendo produzir diferentes ondas. Algumas frequências de oscilação produzem ondas estacionárias, criadas pela superposição de ondas incidentes e refletidas nas bordas da placa. Ocorrendo isso, a placa pode ser considerada ressonante em uma de suas frequências naturais. Cada placa pode ter diferentes frequências naturais ou modos de vibração, dependendo do seu formato geométrico. Um modo de vibração é simplesmente como a placa vibra.

5.2 Procedimentos Experimentais

Envolvidos pela beleza apresentada nas figuras de Chladni, passamos a buscar uma maneira diferente de reproduzi-las da que foi utilizada por Chladni. Inicialmente pensamos na maneira de fazer uma membrana vibrar, chegamos a conclusão de que a melhor maneira seria utilizarmos um fone como fonte sonora e conseqüentemente fonte de oscilação, e, como em todo procedimento experimental, passamos a trabalhar com suposições, tentativas e erros. Tentamos utilizar, ao invés da areia, canela em pó e depois chocolate em pó; os dois elementos não deram certo, até porque, neste mesmo momento nós tentávamos utilizar uma película plástica como placa vibrante, o que também não deu certo, a película que utilizávamos era muito fina e não produzia a vibração adequada à formação das figuras devido a sua fragilidade. Foi então quando chegamos a ideia do vidro, mas ainda faltava um elemento para formarmos as figuras, pois o chocolate e a canela grudavam muito no vidro, foi então quando nos deparamos com o açúcar cristal, e o resultado foi a beleza criada nas placas de vidro que veremos a seguir.

5.2.1 Material

O material usado é simples (com exceção do oscilador eletrônico): um oscilador eletrônico, um auto-falante, uma placa de vidro quadrada com 4 mm de espessura e 60 cm de lado, uma placa de vidro redonda com 4 mm de espessura e 60 cm de diâmetro, açúcar cristal, um pincel pequeno, cartolinas guache pretas, protetores de ouvido e máquina fotográfica.

O procedimento de montagem é bem simples, nós ligamos o fone a um oscilador eletrônico e controlado, assim nós poderíamos saber em qual frequência o vidro estava vibrando, pois no oscilador é definida a frequência de emissão do som. Em seguida colocamos este mesmo fone sobre as cartolinas pretas para dar contraste com o branco do açúcar, então colocamos o vidro apoiado sobre o fone. Montado o equipamento, soltamos o açúcar por cima de toda a placa de vidro e finalmente, ligamos o oscilador, neste momento passamos apenas a controlar a mudança das frequências e observar a formação das figuras.

5.3 Resultados

Para algumas frequências, foram obtidas figuras com os modos simples, conforme visto na Figura 5.2 para a placa quadrada e Figura 5.3 para a placa circular. As fotos nestas figuras foram feitas sem uso de suporte e com um ângulo e distância suficiente para a foto, sendo necessário para uma futura análise a recolocação para cada foto. As diferenças nas larguras das linhas podem ser inclinação da placa, posição da fonte ou quantidade do açúcar derramado. Nas figuras mais complexas, não descartamos a existência de vários harmônicos simultâneos, isso principalmente pelas possíveis respostas não-lineares do oscilador + fonte.

Este experimento apresenta pelo menos duas razões para se considerar a importância didática desse assunto. Primeiro que, mediante as dificuldades encontradas em salas de aula do ensino médio, pertencentes ao pré-conceito, já instalado na mente dos alunos em aversão à física, o experimento apresenta-se como um atrativo que pode ser um revelador e renovador na visão dos alunos, promovendo assim um melhor ambiente para o ensino aprendizagem. Segundo, os ingressantes em um curso de física podem desenvolver uma motivação extra para necessidade da física.

Deste experimento pode-se concluir que a técnica utilizada por Chladni de espalhar areia sobre placas vibrando constitui uma importante e útil técnica no estudo de vibrações em placas, o que tem implicações diretas principalmente na construção de instrumentos musicais, tais como o violino e o violão. Além disso, os resultados revelaram a beleza estética das 'Figuras de Chladni'.

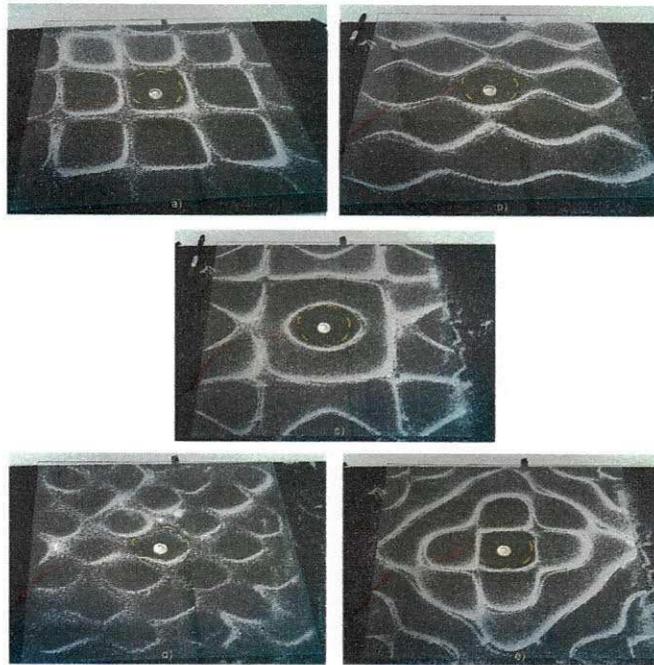


Figura 5.2: Observe os padrões (n, m) formados nas figuras: a) $(4, 4)$, as demais figuras apresentam padrões mais complexos e não podem ser expressos de forma simples.

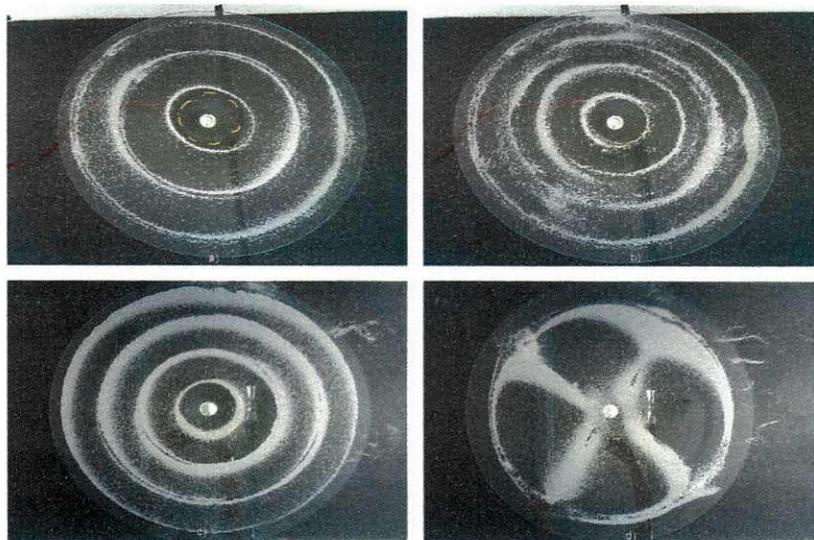


Figura 5.3: Observe os padrões (n, m) formados nas figuras circulares: a) $(3, 0)$, b) e c) $(4, 0)$, d) $(1, 2)$

Considerações finais

De maneira geral, este trabalho objetivou mostrar a estreita relação entre a Física e a Música, mostrando uma breve noção de como o comportamento histórico influenciou na análise e desenvolvimento dessas duas ciências, unidas ou não, objetivo este alcançado mediante esforço produtivo, proporcionando um novo olhar sobre o funcionamento de instrumentos baseados em tubos sonoros. Mesmo tomando apenas contextos históricos relacionados à música, encontraremos traços que mostrem a ligação entre esta e a física. Foi feita uma breve abordagem de conceitos relacionados à acústica musical. É relevante mencionar que as propriedades estudadas aqui foram tratadas de forma generalizada, pois a ideia do trabalho não era ensinar a construir um instrumento nem mesmo toca-lo, mas sim mostrar os conceitos físicos que servem de base.

A partir de estudos das propriedades físicas de tubos sonoros, é possível entender o funcionamento da flauta transversal, compreender fisicamente a produção de escalas musicais neste instrumento que, por sua simplicidade e beleza ímpar, tornou-se objeto de estudo. Pudemos relacionar conceitos inerentes às ondas estacionárias a produção sonora, o que possibilitou um entendimento da produção musical, melhor compreensão da harmonia musical e uma breve noção da produção de instrumentos musicais, em especial os compostos por tubos sonoros.

Uma forma de desenvolvimento artístico nunca será objetiva e precisa a ponto de ser unanimidade, contudo, as simetrias e belezas relacionadas as leis que governam a combinação das estruturas matemáticas usadas na descrição dos sons, e que proporcionam uma análise do espectro sonoro de um determinado instrumento musical possuem estreita relação com a

Harmonia, que é uma área da Música. Assim vemos que, a Física e a Matemática também são capazes de mostrar e descrever, de maneira objetiva, as possibilidades das infinitas combinações de sons criadas por gênios da Música. A delicadeza das construções sonoras dos grandes mestres da Música pode ser vista, ao invés de ouvida, na análise dos sons de suas obras e no perfeito equilíbrio entre as formas de ondas instintivamente combinadas para formá-las.

Bibliografia

- [1] Rodrigues, J. F. *A matemática e a música*, Revista Cultural Científica, nº 23, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1999), Pág. 17 - 32.
- [2] Goto, Mário, *Física e Música em Consonância*, Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 31, nº 2, Junho (2009).
- [3] Young, Hugh D. e Freedman, Roger A. *Física II*, Editora Pearson Addison Wesley, São Paulo, 10ª Edição (2003).
- [4] Nussenzveig, Herch Moysés. *Curso de Física Básica*, Vol. 2, Editora Edgar Blucher Ltda, São Paulo, 4ª Edição rev (2002), pág. 98 - 155.
- [5] Young, Hugh D. e Freedman, Roger A. *Física I*, Editora Pearson Addison Wesley, São Paulo, 10ª Edição (2003).
- [6] Dantas, J. D. *Análise Física do Clarinete*, Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física da UEPB, 2004.
- [7] Resnick, Robert e Halliday, David. *Física*, Vol. 2, LTC - Livros Técnicos e Científicos, Editora S. A., Rio de Janeiro, 4ª Edição (1984), pág. 108 - 152.
- [8] Henrique, Luis L. *Acústica Musical*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1999), Lisboa, 2ª (2007).
- [9] Fellow, David R. Lapp. *The Physics of Music and Musical Instruments*, Wright Center for Innovative Science Education, Tufts University, Medford.

- [10] Parker, Barry. *Good Vibrations: The Physics of Music*, The Johns Hopkins University press, Baltimore, (2009).
- [11] Johnston, Ian. *MEASURED TONES: The interplay of physics and music*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2^a Edition (2002).
- [12] Raichel, Daniel R. *The science of applications of acoustics*, Springer Science, New York, 2^a Ed.(2009).
- [13] Hummengel, I. A. *O clarinete - uma introdução à análise física do instrumento*, Caderno Catarinense de Ensino de Física, Vol. 13, n^o2, Agosto (1996).
- [14] Derek Kverno, Oscillations and Resonance in Vibrating Plates. Disponível em <<http://www.phy.davidson.edu/StuHome/derekk/Resonance/pages/plates.htm>> Acesso em: 24 de setembro de 2011.