Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades Polinomiais para o Produto Tensorial de PI-Álgebras

por

Israel Burití Galvão †

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Identidades Polinomiais para o Produto Tensorial de PI-Álgebras

por

Israel Burití Galvão

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira (UEPB)

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2012

Agradecimentos

À Deus, a causa primária de todas as coisas.

À minha mãe, Iranice (Cicí), de quem perante todas as minhas decisões, apenas ouví: “estou do seu lado meu filho, conte comigo pro que der e vier”. E é ela a principal responsável por eu ter chegado até aquí. Te amo Mainha.

Aos meus familiares, meu irmão Diego, minha avó Zefa e ao meu pai Alderir. À Vanessa pelo companheirismo e aos seus pais Graça e Agnélio.

Ao meu orientador, o professor Antonio Brandão, pela excelente orientação, pelos excelentes cursos a mim oferecidos e principalmente por sua amizade e compreensão. E à minha amiga e incentivadora Mariza (*In Memoriam*).

Aos professores da UAME, em particular aos que efetivamente contribuíram para a minha formação: Angelo, Claudianor, Daniel, Diogo Diniz, Henrique, Jaime, Arí, Lindomberg, Marcelo, Marco Aurélio e Patrícia. Em especial, aos professores Júlio, Mendes e Bianca pelo período de Iniciação Científica e aos meus ex-professores da UEPB que tanto me incentivaram, Sá, Ernesto e Victor Hugo.

Aos funcionários da UAME, Daví, Totinha (Sóstenes), Dú, Renato, Suênia e a Andrezza. E a todos os meus colegas de mestrado e graduação.

Aos meus amigos e/ou irmãos acadêmicos, Bruno Sérgio, Dênis, Wellington, Leo, Alênicon, Sérgio Dantas, André, Mozart, Marciel, Sirlene, Alex, Aline, Débora, Maria, Fabrício, Marcos, Nancy, Fábio, Luis, Luciano, Patrício, Romildo e Michel.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

E a todos que direto ou indiretamente fizeram parte da minha vida durante essa caminhada. Obrigado!

...O tempo voa rapaz, pegue seu sonho rapaz
A melhor hora e o momento é você quem faz...
Pensamento - Cidade Negra

Dedicatória

À minha filha Luna, a pureza viva e minha fonte de forças para viver.

Resumo

Nesta dissertação foi feita uma abordagem sobre identidades polinomiais para o produto tensorial de duas álgebras. Com base no crescimento da sequência de codimensões de uma PI-álgebra, estudado inicialmente por Regev em 1972, apresentamos uma prova de que o produto tensorial de duas PI-álgebras é ainda uma PI-álgebra. Depois, através do produto de Kronecker de caracteres e do clássico Teorema do Gancho de Amitsur e Regev, obtemos relações entre as codimensões e os cocaracteres de duas PI-álgebras e as codimensões e cocaracteres do seu produto tensorial. Também através do estudo de codimensões e cocaracteres, conseguimos exibir identidades polinomiais para o produto tensorial.

Palavras-chave: Identidades polinomiais, produto tensorial, codimensões, cocaracteres.

Abstract

In this dissertation we study polynomial identities for the tensor product of two algebras. Based on the growth of the PI-algebra's codimensions sequence, originally studied by Regev in 1972, we present a proof that the tensor product of two PI-algebras is still a PI-algebra. After this, using the Kronecker product of characters and the classic Amitsur and Regev Hook Theorem, we obtained relations between the codimensions and cocharacters of two PI-algebras and the codimensions and cocharacters of their tensor product. With the study of codimensions and cocharacters, we also exhibit polynomial identities for the tensor product.

Keywords: Polynomial identities, tensor product, codimensions, cocharacters.

Conteúdo

Introdução

O presente trabalho trata de um estudo sobre uma parte da Teoria de Anéis, a das álgebras com identidades polinomiais, ou PI-álgebras. A teoria das PI-álgebras, ou PI-teoria, começou a ser abordada com mais profundidade a partir do ano de 1945.

Uma identidade polinomial para uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula sob qualquer substituição por elementos de A. Quando existe um polinômio não nulo que é uma identidade polinomial para A, dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial ou PI-álgebra.

A estudo das PI-álgebras, no sentido próprio, intensificou-se ainda mais por volta do ano de 1950, quando foi demonstrado o Teorema de Amitsur-Levitzki. Esse teorema afirma que a álgebra das matrizes de ordem n com entradas num corpo satisfaz o polinômio "standard" de grau $2n$. Ainda no mesmo período foi demonstrado o Teorema de Nagata-Higman: Se A é uma álgebra associativa, sobre um corpo de característica 0, nil de índice limitado, então A é nilpotente. Desde então, vários algebristas reconhecidos deram contribuições importantes para a PI-teoria. Vale mencionar aqui alguns dos grandes nomes que juntos difundiram a área: G. Bergman, P. M. Conh, I. N. Herstein, N. Jacobson, I. Kaplansky, A. I. Kostrikin, V. N. Latyshev, Yu. N. Malcev, E. Posner, A. I. Shirshov, R. Swan, entre outros. Mais atualmente: Y. Bahturin, A. Berele, A. Braun, V. Drensky, E. Formanek, A. Giambruno, A. Kemer, C. Procesi, Yu. P. Razmyslov, A. Regev, L. H. Rowen, J. T. Stafford, M. Van Den Bergh, M. R. Vaughan-Lee, M. Zaicev, E. Zelmanov, P. Kochloukov (obviamente, essa lista está longe de ser completa). Os relevantes nomes interessados nesse estudo reforçam sua importância.

Uma pergunta motivadora: dadas duas PI-álgebras A e B, seria o produto tensorial $A \otimes B$ ainda uma PI-álgebra? O primeiro a responder positivamente a essa questão foi o matemático israelense Amitai Regev no ano de 1972, com o trabalho [18]. No artigo ele estima a sequência das codimensões dessas álgebras, e como uma aplicação desse estudo, prova que o produto tensorial de duas PI-álgebras arbitrárias é ainda uma PI-álgebra.

Considerando-se $\mathbb{K}$ um corpo e a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X\rangle$, definimos P_n como sendo o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ dos polinômios multilineares de grau n. Sabe-se que P_n tem uma estrutura de S_n-módulo, com cada permutação de S_n agindo nos índices das variáveis em cada monômio. Sendo A uma PI-álgebra e $T(A)$ o ideal de suas identidades polinomiais, a <u>n-ésima codimensão de A</u> ($c_n(A)$) é definida como sendo a dimensão do S_n-módulo quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)},$$

e o <u>n-ésimo cocaracter de A</u> ,$\chi_n(A)$, é definido como sendo o caracter de $P_n(A)$.

Provada a existência de algum objeto em Matemática, um outro problema que surge naturalmente é o de exibir algum desses objetos de existência constatada. Em [22], Amitai Regev mostrou que se A e B satisfazem alguma identidade de Capelli, então $A \otimes B$ também satisfaz. Para provar isso, ele obteve primeiramente uma relação entre os cocaracteres de A, B e $A \otimes B$, e depois mostrou que a altura do Produto de Kronecker de dois S_n-caracteres está relacionada com o produto das alturas dos dois caracteres. Também como consequência da relação entre os cocaracteres de A, B e $A \otimes B$, foi obtida uma relação entre as codimensões dessas três álgebras.

Em 1982, S. A. Amitsur e A. Regev [1] provaram o clássico Teorema do Gancho, o qual apresenta uma interessante propriedade das sequências de cocaracteres. Como uma aplicação da Teoria do Gancho às PI-álgebras, considerando-se duas PI-álgebras A e B, e conhecendo-se ganchos infinitos que contêm os seus respectivos cocaracteres, podemos então determinar um terceiro gancho que contém os cocaracteres da álgebra $A \otimes B$. Este resultado é devido aos matemáticos A. Berele e A. Regev ([2] e [3]), e utilizando-se dele é possível determinar potências de polinômios standard que são identidades para $A \otimes B$.

O presente trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro, é feita uma abordagem sobre conceitos prévios acerca de PI-álgebras, módulos e representações de grupos, ferramentas utilizadas para o desenvolvimento dos resultados aqui estudados. No segundo capítulo, são definidos codimensão e cocaracter de uma PI-álgebra e apresentamos algumas propriedades e técnicas para obtenção do número $c_n(A)$, calculando-se as codimensões de algumas álgebras importantes. Ademais, usamos este conceito pra mostrar o Teorema de Regev-Latyshev, isto é, que $A \otimes B$ é uma PI-álgebra se A e B o são. No capítulo seguinte, é apresentada a definição do Produto de Kroneker e o usamos para mostrar que $A \otimes B$ possui um polinômio de Capelli como identidade se A e B também possuem polinômios de Capelli como identidades polinomiais. Por fim, é feito um estudo sobre os cocaracteres da álgebra $A \otimes B$, relacionando-os com os cocaracteres de A e B, à luz do teorema do Gancho de Amitsur e Regev. Com base neste estudo, são exibidas potências de polinômios standard que são identidades para $A \otimes B$.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

No que segue, $\mathbb{K}$ sempre denotará um corpo, e todas as álgebras e espaços vetoriais serão considerados sobre o corpo $\mathbb{K}$.

1.1 Álgebras

Definição 1.1 *Define-se uma $\mathbb{K}$-álgebra, ou simplesmente álgebra, como sendo um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e "$*$" é uma operação em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz*

(i) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

(ii) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer a, b, $c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Na definição acima, "$*$" chama-se de produto ou multiplicação. Em geral denotaremos $a * b$, com a, $b \in A$, simplesmente por ab. Definimos $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, $a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2 \cdots a_{n-1})a_n$ para $a_i \in A$.

Uma álgebra A será dita:

- associativa se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer a, b, $c \in A$.
- comutativa se $ab = ba$ para quaisquer a, $b \in A$.
- unitária (ou com unidade) se o produto possui elemento neutro, ou seja, se existe

$1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.

- álgebra de Lie se $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (identidade de Jacobi) para quaisquer a, b, $c \in A$.

Exemplo 1.2 Para $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_n(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade, de dimensão n^2. Nesta álgebra destacaremos as matrizes unitárias E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. Tais matrizes formam uma base para $M_n(\mathbb{K})$. De modo mais geral, se A é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. O produto de matrizes em $M_n(A)$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em $\mathbb{K}$. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$. ▲

Exemplo 1.3 Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann, (ou álgebra exterior) de V, denotada por $E(V)$ (ou simplesmente por E), como sendo a álgebra com base $\{1,\ e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}; i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ k \geq 1\}$ e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Destacamos em E os subespaços vetoriais E_0, gerado pelo conjunto $\{1,\ e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}; m \text{ par}\}$, e E_1, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}; k \text{ ímpar}\}$. Claramente $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. De $e_ie_j = -e_je_i$ segue que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m})(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) = (-1)^{mk}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m})$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. ▲

Observação 1.4 Sejam A um espaço vetorial, β uma base de A e $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer. Então existe uma única aplicação bilinear $F : A \times A \longrightarrow A$ estendendo f. Com isso concluímos que, para definir uma estrutura de álgebra em A, basta definir o produto para os elementos de uma base. Com o produto definido, para que uma álgebra A seja associativa, é necessário e suficiente que $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$ para quaisquer v_1, v_2, $v_3 \in \beta$. Essa afirmação é válida porque a aplicação trilinear $h : A \times A \times A \longrightarrow A$, definida por $h(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ é nula se, e somente se, é nula em $\beta \times \beta \times \beta$. Como consequência, se A é uma álgebra e S um subconjunto gerador de A como espaço vetorial, então não é difícil mostrar que:

(i) A é associativa se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$.

(ii) A é comutativa se, e somente se, $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$.

(iii) A possui unidade se, e somente se, existe $1 \in A$ tal que $1v = v1 = v$ para todo $v \in S$.

Exemplo 1.5 Seja S um conjunto não vazio. Considere o conjunto $\mathbb{K}S$ de todas as somas formais do tipo $\sum_{s\in S}\alpha_s s$, onde $\alpha_s \in \mathbb{K}$ e $\{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$ é finito. Aqui, $\alpha_s s$ é um símbolo formal. Diremos que $\sum_{s\in S}\alpha_s s = \sum_{s\in S}\beta_s s$ em $\mathbb{K}S$ se $\alpha_s = \beta_s$ para todo $s \in S$. Agora, vamos definir a soma em $\mathbb{K}S$ como sendo

$$\sum_{s\in S}\alpha_s s + \sum_{s\in S}\beta_s s = \sum_{s\in S}(\alpha_s + \beta_s)s$$

e o produto por escalar como sendo

$$\lambda\sum_{s\in S}\alpha_s s = \sum_{s\in S}(\lambda\alpha_s)s, \text{ para } \lambda \in K.$$

Assim, munido destas operações, $\mathbb{K}S$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, chamado de <u>$\mathbb{K}$-espaço vetorial com base S</u>. Identificando $s_0 \in S$ com $\sum_{s\in S}\alpha_s s$, onde

$$\alpha_s = \begin{cases} 1, & \text{se } s = s_0 \\ 0, & \text{se } s \neq s_0 \end{cases},$$

temos que S é uma base de $\mathbb{K}S$. Se "$*$" é uma operação definida em S, pela Observação 1.4, "$*$" se estende a uma única operação bilinear em $\mathbb{K}S$, que também denotaremos por "$*$". Assim, $(\mathbb{K}S, *)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Segue ainda da Observação 1.4 que se "$*$" é associativa, comutativa ou possui elemento neutro em S, a álgebra $\mathbb{K}S$ também terá tais propriedades. Um caso particular e importante de construção deste tipo aparece quando temos um grupo G. Adotando a notação multiplicativa em G e considerando, no espaço vetorial $\mathbb{K}G$, o produto induzido pela operação de G, temos que $\mathbb{K}G$ é uma álgebra (associativa) unitária, chamada de <u>álgebra de grupo</u>. Vamos utilizar bastante no decorrer do nosso trabalho a álgebra $\mathbb{K}S_n$, construída a partir de S_n, o grupo das permutações de n elementos. ▲

Sendo A uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o <u>comutador</u> $[a, b] = ab-ba$. Mais geralmente definimos, indutivamente, o <u>comutador de comprimento n</u> como sendo $[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n]$, onde $a_i \in A$. O comutador de comprimento zero denotaremos por 1.

Exemplo 1.6 Um comutador satisfaz o propriedade de derivação, isto é,

$$[xy, z] = [x, z]y + x[y, z].$$

Com efeito, temos

$$[x, z]y + x[y, z] = (xz - zx)y + x(yz - zy) = xzy - zxy + xyz - xzy = [xy, z].$$

▲

Definição 1.7 *Um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial B de uma álgebra A é dito uma subálgebra de A se tiver estrutura de álgebra, isto é, se B for fechado com respeito à multiplicação de A. Um subespaço I será dito um ideal à esquerda de A se $AI \subseteq I$, ou seja, se $ax \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$. De modo similar, definimos ideal à direita de A. Um ideal bilateral (ideal à esquerda e à direita de A) será simplesmente denominado de ideal.*

Se A for uma álgebra unitária e B uma subálgebra de A, não necessariamente se tem $1_A \in B$. Sendo I um ideal de A (à direita, à esquerda, ou bilateral), tal que $1_A \in I$, então $I = A$.

Definição 1.8 *Sejam A uma álgebra e $\varnothing \neq S \subseteq A$. Definimos:*
a) A subálgebra de A gerada por S, denotada por $\mathbb{K}\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S (e 1, no caso de A possuir unidade);
b) O ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais de A que contêm S.

Exemplo 1.9 Seja A uma álgebra associativa. O conjunto

$$Z(A) = \{a \in A; ax = xa, \forall\ x \in A\}$$

é uma subálgebra de A denominada centro de A. Um fato conhecido da Álgebra Linear elementar é que dado $n \in \mathbb{N}$ tem-se $Z(M_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_{n\times n}; \lambda \in \mathbb{K}\}$ (matrizes escalares). Se $A = E$ (álgebra exterior), então $Z(E) = E_0$ (char$\mathbb{K} \neq 2$). ▲

Definição 1.10 *Sejam A e B álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$. Se A e B são unitárias, também é exigido $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Chamamos φ de mergulho (ou monomorfismo) se φ é um homomorfismo injetivo, e de isomorfismo se φ é um homomorfismo bijetivo. Dizemos que φ é um endomorfismo de A se φ é um homomorfismo de A em A e que é um automorfismo de A se φ é um endomorfismo bijetivo de A.

Denotamos por End$A$ o conjunto dos endomorfismos de A e *Aut* A o conjunto dos automorfismos da álgebra A. Quando existe um isomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. O conjunto

$$\ker \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\},$$

chamado de núcleo de φ, é um ideal de A, e o conjunto

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\},$$

chamado de imagem de φ, é uma subálgebra de B.

Se A é uma álgebra e I é um ideal de A, considere o conjunto quociente A/I, cujos elementos são da forma $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$ com $a \in A$ (classes laterais de I). É fácil verificar que as operações de soma e de produto por escalar definidas em A/I, respectivamente por $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ e $\lambda(a + I) = (\lambda a) + I$, estão bem definidas, e assim temos o espaço vetorial quociente A/I. Daí, podemos definir o seguinte.

Definição 1.11 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Definimos a álgebra quociente de A por I como sendo o espaço vetorial quociente A/I munido do produto definido por $(a + I)(b + I) = ab + I$ para $a, b \in A$.*

Notemos que o produto de A/I está bem definido, pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais. Como de costume, denotaremos a classe lateral $a + I$ por $\overline{a}$. Sejam $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras e $I \subseteq ker\ \varphi$ um ideal de A. Então a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi} : & A/I & \longrightarrow & B \\ & \overline{a} & \longmapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}$$

é bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Se $I = ker\ \varphi$, então $\overline{\varphi}$ é injetora e consequentemente $A/ker\ \varphi \simeq Im\ \varphi$. Esta última afirmação é conhecida como Teorema Fundamental dos Homomorfismos.

Um exemplo classico do que foi definido acima é o seguinte.

Exemplo 1.12 Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Temos que a aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = \overline{a}$, é um homomorfismo sobrejetivo (ou epimorfismo) de álgebras chamado de projeção canônica. ▲

Outro conceito muito importantes acerca de álgebras associativas, é o de álgebras livremente geradas.

Definição 1.13 *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $A \in \mathcal{B}$ é uma álgebra livre na classe $\mathcal{B}$ se existe um conjunto X que gera A (como álgebra) e para cada álgebra $C \in \mathcal{B}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow C$, existe um único homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow C$ que estende h, ou seja, $\varphi(x) = h(x)$ para todo $x \in X$. Nestas condições, dizemos que A é livremente gerada por X na classe $\mathcal{B}$.*

Construiremos agora uma álgebra que é livre na classe de todas as álgebras associativas e com unidade. Para tal, consideremos o conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ não vazio e enumerável, cujos elementos chamaremos de variáveis. Uma palavra em X é uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_{i_j} \in X$. Se $n = 0$ temos a palavra vazia, que denotaremos por 1. Seja $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X. Dizemos que as palavras $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots,\ i_n = j_n$.

Considere $\mathbb{K}\langle X\rangle$ como sendo o $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base $S(X)$. Chamaremos os elementos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ de polinômios. Assim, um polinômio é uma soma formal de monômios, que são produtos formais de um escalar por uma palavra em X. Sendo $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $\alpha \neq 0$, um monômio em $\mathbb{K}\langle X\rangle$, definimos seu grau como sendo n. Neste caso, a palavra vazia tem grau zero. Definimos o grau de um polinômio não nulo $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ como sendo o máximo dos graus de seus monômios.

Consideremos em $S(X)$ a operação de concatenação, dada por:

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Observemos que essa operação é associativa e que tem a palavra vazia como seu elemento neutro. Assim, $\mathbb{K}\langle X\rangle$, munido da operação bilinear induzida por ela, é uma álgebra associativa com unidade.

Proposição 1.14 *A álgebra associativa $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade e livremente gerada por X.*

Prova. Sejam $\mathcal{B}$ a classe das álgebras associativas com unidade e $A \in \mathcal{B}$. Consideremos uma aplicação $g : X \longrightarrow A$ arbitrária, tal qual $g(x_i) = a_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Então, existe uma única aplicação linear $\varphi_g : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\varphi_g(1) = 1_A$ e $\varphi_g(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$. Temos que φ_g é um homomorfismo de álgebras e é o único que estende g. Logo, $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade e livremente gerada por X. ■

Se $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, então vamos denotar por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a imagem de f por φ_g, onde φ_g é como na demonstração da Proposição 1.14. Notemos que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é o elemento de A obtido pela substituição de x_i por a_i em f.

Considerando $S_0(X) = S(X) - 1$, o subespaço $\mathbb{K}_0\langle X\rangle$ gerado por $S_0(X)$ é uma subálgebra (sem unidade) de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. De modo análogo à Proposição 1.14, temos que $\mathbb{K}_0\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por X, na classe das álgebras associativas. Observemos aqui que

$$\mathbb{K}\langle X\rangle = \mathbb{K}_0\langle X\rangle \oplus \langle 1\rangle,$$

onde $\langle 1\rangle$ denota o subespaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por 1.

Definição 1.15 *Sejam V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Definimos o produto tensorial $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ de V e W (por simplicidade, denotado por $V \otimes W$) como sendo o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{v \otimes w; v \in V,\ w \in W\}$ (cujos elementos são chamados de tensores), onde*

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w)\\ v \otimes (w_1 + w_2) &= (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2)\\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w)\\ v \otimes (\lambda w) &= \lambda(v \otimes w)\end{aligned}$$

para quaisquer $v_1,\ v_2,\ v \in V,\ w_1,\ w_2,\ w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Concluímos então que todos os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i)$, com $v_i \in V$ e $w_i \in W$.

Citamos a seguir um importante resultado acerca do produto tensorial.

Teorema 1.16 (Propriedade Universal) *Sejam V, W e U $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $f : V \times W \longrightarrow U$ uma aplicação bilinear. Então, existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \longrightarrow U$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$ para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.*

Sendo V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita, temos que

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W,$$

pois dadas $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V e W, respectivamente, não é difícil verificar que o conjunto $\{v_i \otimes w_j;\ v_i \in \mathcal{B}_V \text{ e } w_j \in \mathcal{B}_W\}$ é uma base de $V \otimes W$. Considerando ainda V_1 e V_2 subespaços de V, e W_1 e W_2 subespaços de V, temos que

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W_1 = (V_1 \otimes W_1) \oplus (V_2 \otimes W_1),$$

$$V_1 \otimes (W_1 \oplus W_2) = (V_1 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_2).$$

Sejam A e B $\mathbb{K}$-álgebras e considere o produto bilinear definido por

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & (A \otimes B) \times (A \otimes B) & \longrightarrow & A \otimes B \\ & & ((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) & \longmapsto & (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = \ a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{array}.$$

Segue da Propriedade Universal que esse produto é bem definido. O espaço vetorial $A \otimes B$, munido desse produto, possui estrutura de álgebra e é chamado de produto tensorial das álgebras A e B.

Sendo V_1, V_2, V_3, $\ldots$, V_n $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, definimos

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \stackrel{\text{def}}{=} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

e indutivamente

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1} \otimes V_n = (V_1 \otimes \cdots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n.$$

1.2 Módulos e Representações de Grupos

Nesta seção, serão apresentados as definições e algumas propriedades acerca de módulos e representações de grupos, além da importante relação entre eles. Assumiremos que $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero ($\text{char}\mathbb{K} = 0$) e que todas as álgebras consideradas são associativas.

Definição 1.17 *Sejam A uma álgebra unitária e M um espaço vetorial. Considere o seguinte produto*

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

satisfazendo as condições:

(i) $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$

(ii) $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$

(iii) $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$

(iv) $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$

(v) $1_A \cdot m = m$

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Dizemos que M, munido desse produto, é um A-módulo à esquerda (ou módulo à esquerda sobre A). Analogamente, definimos um A-módulo à direita (ou módulo à direita sobre A), ou seja, considera-se o produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & M \times A & \longrightarrow & M \\ & (m, a) & \longmapsto & m \cdot a \end{array}$$

que satisfaz

(i) $m \cdot (a_1 + a_2) = (m \cdot a_1) + (m \cdot a_2)$

(ii) $(m_1 + m_2) \cdot a = (m_1 \cdot a) + (m_2 \cdot a)$

(iii) $m \cdot (\lambda a) = (\lambda m) \cdot a = \lambda(m \cdot a)$

(iv) $(m \cdot a_1) \cdot a_2 = m \cdot (a_1 a_2)$

(v) $1_A \cdot m = m$

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Por simplicidade chamaremos um A-módulo à esquerda simplesmente de A-módulo.

Observe que, pelos três primeiros itens da definição acima, temos que o produto " $\cdot$ " é uma aplicação bilinear. Daí, sendo A uma álgebra unitária, pelo que acabamos de observar, A é um A-módulo, cujo produto é a sua multiplicação.

De agora em diante, vamos considerar todos os módulos como sendo de dimensão finita (como espaços vetoriais).

Exemplo 1.18 Sejam G um grupo, V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ um homomorfismo de grupos, onde $\varphi(g) = \varphi_g$. Considere o seguinte produto

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{K}G \times V & \longrightarrow & V \\ & \left(\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right), v\right) & \longmapsto & \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g \varphi_g(v) \end{array}.$$

Note que V, munido desse produto, é um $\mathbb{K}G$-módulo (ou simplesmente, G-módulo), onde as cinco condições da Definição 1.17 seguem das hipóteses de que φ é um homomorfismo de grupos e φ_g é linear. ▲

Definição 1.19 *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Definimos um submódulo (ou A-submódulo) N de M como sendo um subespaço vetorial N de M tal que $a \cdot n \in N$ para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$. Se os únicos submódulos de M são $\{0\}$ e M, então M é dito irredutível (ou simples). Dizemos que um submódulo N de M é minimal se não existe submódulo N' de M satisfazendo $0 \neq N' \subsetneq N$ (ou seja, se N, visto como módulo, é irredutível).*

Exemplo 1.20 Seja A uma álgebra. Considerando A como A-módulo, segue diretamente da definição que os submódulos de A são exatamente os ideais à esquerda da álgebra A. ▲

Observação 1.21 Seja M um A-módulo.

(i) Se N é um submódulo de M, o espaço quociente M/N é um A-módulo, munido do produto definido por $a \cdot \overline{m} = \overline{a \cdot m}$, para $a \in A$ e $m \in M$. Chamamos M/N de <u>módulo quociente de M por N</u>.

(ii) Seja $(M_i)_{i\in\Lambda}$ uma família de submódulos de M. Então

$$\sum_{i\in\Lambda} M_i = \{m_1 + \cdots + m_n;\ n \in \mathbb{N},\ m_j \in \cup_{i\in\Lambda} M_i\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i\in\Lambda} M_i$$

são submódulos de M.

Assim como para qualquer estrutura algébrica, temos também para módulos o conceito de homomorfismo.

Definição 1.22 *Sejam M_1 e M_2 módulos sobre uma álgebra A. Definimos um <u>homomorfismo de A-módulos</u> como sendo uma transformação linear $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que $\varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)$ para quaisquer $a \in A$ e $m \in M_1$. Se φ é bijetivo, dizemos que φ é um <u>isomorfismo de A-módulos</u>.*

Exemplo 1.23 *Sejam M um A-módulo e $\gamma \in \mathbb{K}$. Considere a seguinte transformação linear*

$$\begin{array}{rccl} \gamma\mathrm{Id}_M : & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & \gamma\mathrm{Id}_M(m) = \gamma m \end{array}.$$

Tomando $a \in A$ e $m \in M$ arbitrários, teremos

$$\gamma\mathrm{Id}_M(a \cdot m) = \gamma(a \cdot m) = a \cdot (\gamma m) = a \cdot (\gamma\mathrm{Id}_M(m)),$$

e assim $\gamma\mathrm{Id}_M$ é um homomorfismo de A-módulos. ▲

Seja M um módulo sobre uma álgebra A. Definimos um <u>endomorfismo do A-módulo M</u> como sendo um homomorfismo (de A-módulos) de M em M e denotaremos o conjunto de todos os endomorfismos do A-módulo M por $End_A(M)$. Nas condições do exemplo anterior, $\gamma\mathrm{Id}_M \in End_A(M)$.

Proposição 1.24 *Sejam M um A-módulo de dimensão finita e*

$$M_1, M_2, \ldots, M_k, N_1, N_2, \ldots, N_m, J$$

submódulos minimais de M. Então:
(a) Se $J \subseteq N_1 + N_2 + ... + N_m$, então $J \simeq N_j$ (como A-módulos) para algum $j = 1, 2, ..., m$.
(b) Se N_1, N_2, ..., N_m são 2 a 2 não isomorfos (como A-módulos), então a soma $N_1 + N_2 + ... + N_m$ é direta.
(c) Se $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_k = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$, então $k = m$ e M_i e N_i são isomorfos para todo $i = 1, 2, ..., k$ (reodernando os N_i's, se necessário).

Prova. *(a)* Se existe algum N_i, digamos N_1, tal que $N_1 \cap (N_2 + ... + N_m) \neq 0$, então, pela minimalidade de N_1, devemos ter $N_1 \subseteq (N_2 + ... + N_m)$, e daí

$$N_1 + N_2 + ... + N_m = N_2 + ... + N_m.$$

Com isso, podemos supor que a soma é direta. Agora, seja $n \in J$. Então, existem únicos $n_1, n_2, ..., n_m$ tais que $n = n_1 + ... + n_m$ e $n_j \in N_j$, com $1 \leq j \leq m$. Considere, para cada $j = 1, 2, ..., m$, o homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_j & : & J & \longrightarrow & N_j \\ & & n & \longmapsto & \varphi_j(n) = n_j \end{array}.$$

Como $J \neq \{0\}$, deve existir algum $j \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que φ_j é não nulo. Segue da minimalidade de J e N_j que $ker\ \varphi_j = \{0\}$ e $Im\ \varphi_j = N_j$. Logo, φ_j é um isomorfismo de A-módulos.
(b) Suponha que a soma não é direta. Assim, algum dos N_i's, digamos N_1, está contido na soma dos demais, ou seja, sem perda de generalidade, temos $N_1 \subseteq N_2 + ... + N_m$. Segue do item *(a)* que N_1 é isomorfo a algum dos N_i's restantes, uma contradição.
(c) Veja [11], Seção 3.4, página 115. ■

Agora, veremos alguns conceitos e resultados sobre representações de grupos. É importante ressaltar que no que segue G denotará sempre um grupo finito.

Definição 1.25 *Definimos uma representação linear de G em um espaço vetorial V como sendo um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}.$$

Definimos o grau da representação linear φ como sendo a dimensão do espaço vetorial V.

Sabe-se que quando dim $V = n$, com $n \in \mathbb{N}$, os grupos $GL(V)$ e $GL_n(K)$ são isomorfos. Assim, uma representação linear de G em V pode ser vista como um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$. Em particular, quando $n = 1$, podemos considerar como um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow K^*$, onde $K^* = K - \{0\}$ é o grupo multiplicativo do corpo K.

Exemplo 1.26 Seja V um espaço vetorial tomado arbitrariamente. O homomorfismo

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & & g & \longmapsto & \varphi(g) = \mathrm{Id}_V \end{array}$$

é uma representação linear de G em V, chamada de representação trivial.

Exemplo 1.27 Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de G em V e H um subgrupo de G. Note que a restrição $\varphi|_H : H \longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de H em V. Ademais, $\varphi|_H$ e φ possuem o mesmo grau. ▲

Definição 1.28 *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Um subespaço W de V é dito φ-invariante se $\varphi_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. Se existe um subespaço W não trivial ($\{0_V\} \neq W \neq V$) de V que é φ-invariante, chamamos φ de redutível. Se não existe W nessas condições, chamamos φ de irredutível.*

Observe que os subespaços triviais de V, $\{0_V\}$ e V, são φ-invariantes. Assim, φ é irredutível se, e somente se, os únicos subespaços φ-invariantes são os triviais. Note que toda representação de grau 1 é irredutível.

Se W é um subespaço φ-invariante de V e $g \in G$, temos que $\varphi_g(W) \subseteq W$. Daí podemos definir

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_g|_W & : & W & \longrightarrow & W \\ & & w & \longmapsto & \varphi_g(w) \end{array}.$$

Como também $\varphi_g^{-1}(W) \subseteq W$ temos $\varphi_g(W) = W$ e daí $\varphi_g|_W \in GL(W)$. Com isso, podemos então definir o seguinte:

Definição 1.29 *Sejam V um espaço vetorial, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear e W um subespaço φ-invariante de V. Definimos a restrição de φ a W como sendo a representação linear*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_W & : & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & & g & \longmapsto & \varphi_W(g) = \varphi_g|_W \end{array},$$

que também é chamada de sub-representação φ_W.

Definição 1.30 *Sejam V um espaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear. Se existem $W_1, W_2, ..., W_n$ subespaços vetoriais φ-invariantes de V tais que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ e a restrição de φ a W_i é irredutível, para todo $i = 1, 2, ..., n$, então dizemos que φ é completamente redutível (ou semi-simples).*

Exemplo 1.31 Toda representação irredutível é completamente redutível. ▲

Teorema 1.32 (Maschke) *Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de grau finito e W um subespaço φ-invariante de V. Então $V = W \oplus W_1$, onde W_1 é um subespaço φ-invariante de V. Consequentemente, φ é completamente redutível.*

Prova. Veja [11], Seção 5.2, página 253. ■

Definição 1.33 *Sejam V e W espaços vetoriais e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações lineares. Se existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ de espaços vetoriais tal que $\psi_g T = T\varphi_g$ para todo $g \in G$, dizemos que φ e ψ são representações equivalentes.*

Proposição 1.34 *Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações lineares equivalentes. Então φ é irredutível se, e somente se, ψ é irredutível.*

Prova. Tomemos $T : V \longrightarrow W$ isomorfismo de espaços vetoriais tal que $\psi_g = T\varphi_g T^{-1}$ para todo $g \in G$. Suponhamos que ψ é irredutível, e suponhamos também, por contradição, que V_1 é um subespaço não trivial de V φ-invariante. Cosidere agora o subespaço não trivial $W_1 = T(V_1)$ de W. Assim, teremos $\psi_g(W_1) = (T\varphi_g T^{-1})(W_1) = (T\varphi_g)(V_1) \subseteq T(V_1) = W_1$ para todo $g \in G$ e daí, W_1 é ψ-invariante, uma contradição. Portanto, φ é irredutível. A recíproca é análoga. ■

Exemplo 1.35 Considere as seguintes representações de grau 1 do grupo S_n

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_n & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ & \sigma & \longmapsto & \varphi(\sigma) = 1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} \varepsilon : & S_n & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ & \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) = (-1)^\sigma \end{array},$$

chamadas de representação trivial de grau 1 e representação sinal, respectivamente. Temos que φ e ε não são equivalentes.

Agora seja $\psi : S_n \longrightarrow \mathbb{K}^*$ uma representação de grau 1 de S_n. Temos que $S_n/ker\ \psi$ é abeliano, pois é isomorfo a $Im\ \psi \subseteq K^*$ (Teorema Fundamental dos Homomorfismos). Assim, segue da teoria de grupos que $ker\ \psi \supseteq S_n' = A_n$. Com isso, $\psi(\mu) = 1$ para toda $\mu \in A_n$.

Fixemos arbitrariamente $\sigma_0 \in S_n - A_n$. Teremos $S_n = A_n \cup \sigma_0 A_n$, $S_n - A_n = \sigma_0 A_n$ e $\sigma_0^2 \in A_n$, e assim $\psi(\sigma_0^2) = (\psi(\sigma_0))^2 = 1$, donde $\psi(\sigma_0) = \pm 1$. Logo, se $\psi(\sigma_0) = 1$, então $\ker \psi = S_n$ e daí ψ coincide com a representação trivial. Por outro lado, se $\psi(\sigma_0) = -1$, supondo $\sigma \in S_n - A_n$, então $\sigma = \sigma_0 \mu$ para alguma $\mu \in A_n$, donde $\psi(\sigma) = -1$, e assim ψ coincide com a representação sinal. Logo, as representações trivial e sinal são as únicas de grau 1 do grupo S_n. ▲

Seja V um $\mathbb{K}G$-módulo. Dado $g \in G$, definamos

$$\begin{array}{rccl} \varphi_g & : V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & \varphi_g(v) = g \cdot v \end{array}.$$

Não é difícil ver que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array}$$

é uma representação linear de G em V. Agora, seja W um submódulo de V. Como $g \cdot w \in W$, temos que $\varphi_g(w) \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Com isso, temos que W é um subespaço φ-invariante de V.

Por outro lado, dada uma representação linear $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ considere V o $\mathbb{K}G$-módulo obtido através da representação linear φ como visto no Exemplo 1.18. Veja que se W for um subespaço φ-invariante de V, teremos que $\varphi_g(w) = g \cdot w \in W$ para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Como G é um conjunto gerador da álgebra $\mathbb{K}G$ (como espaço vetorial), tomando $\alpha \in \mathbb{K}G$ arbitrário, segue que $\alpha \cdot w \in W$, e assim W é um submódulo de $\mathbb{K}G$.

Diante disso, existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas de $\mathbb{K}G$-módulos em V e as representações lineares de G em V.

Agora iremos apresentar alguns resultados que relacionam representações lineares e $\mathbb{K}G$-módulos.

Proposição 1.36 *Sejam V e W $\mathbb{K}G$-módulos e φ e ψ, respectivamente, suas representações lineares correspondentes de G. Então φ e ψ são equivalentes se, e somente se, V e W são $\mathbb{K}G$-módulos isomorfos. Ademais, φ é irredutível se, e somente se, V é um $\mathbb{K}G$-módulo irredutível.*

Prova. Verifica-se facilmente que o isomorfismo linear T da Definição 1.33 é um isomorfismo entre os $\mathbb{K}G$-módulos V e W. Reciprocamente, vê-se que um isomorfismo

$T : V \longrightarrow W$ de $\mathbb{K}G$-módulos satisfaz as condições da Definição 1.33. ■

Podemos interpretar o Teorema de Maschke (Teorema 1.32) em termos de $\mathbb{K}G$-módulos. É o que faremos agora.

Teorema 1.37 (Maschke) (Versão para módulos) *Seja V um $\mathbb{K}G$-módulo de dimensão finita. Se W é um submódulo de V, então existe W_1 submódulo de V tal que $V = W \oplus W_1$.*

Segue do Teorema de Maschke que se M é um $\mathbb{K}G$-módulo de dimensão finita, então existem N_1, N_2, ..., N_m submódulos minimais de M tais que $M = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$. Segue da Proposição 1.24 que esta decomposição é única a menos de isomorfismo e da ordem em que os termos aparecem.

Exemplo 1.38 Para cada $g \in G$, considere $\rho_g : \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K}G$ tal que $\rho_g(\alpha) = g\alpha$. A representação linear definida por

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & G & \longrightarrow & GL(\mathbb{K}G) \\ & & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array}$$

é chamada de <u>representação regular à esquerda de G sobre $\mathbb{K}$</u>. Observe que ρ é injetora e corresponde a $\mathbb{K}G$ visto como um módulo sobre si mesmo. Pelo Exemplo 1.20, temos que os subespaços ρ-invariantes de $\mathbb{K}G$ são exatamente seus ideais à esquerda. O Teorema de Maschke (Teorema 1.37) garante que se W é um ideal à esquerda de $\mathbb{K}G$, então $\mathbb{K}G = W \oplus W_1$, onde W_1 é um ideal à esquerda de $\mathbb{K}G$.

Como os ideais minimais à esquerda de $\mathbb{K}G$ correspondem às sub-representações irredutíveis de ρ, segue novamente do Teorema de Maschke que $\mathbb{K}G$ pode ser escrito como uma soma direta finita de ideais minimais à esquerda. ▲

Proposição 1.39 *Todo $\mathbb{K}G$-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{K}G$. Em termos de representações lineares, toda representação linear irredutível de G é equivalente a uma sub-representação da representação regular à esquerda de G.*

Prova. Veja [5], Teorema 25.10, página 166. ■

Segue das Proposições 1.24 e 1.39 que o número de representações irredutíveis de G sobre $\mathbb{K}$ é finito, a menos de equivalência. É possível mostrar (veja [11], Seção 5.3, página 261) que este número é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.

Proposição 1.40 *Sejam n o número de representações irredutíveis (a menos de equivalência) de G sobre $\mathbb{K}$ e I_1, I_2, ... , I_n ideais minimais à esquerda de $\mathbb{K}G$ dois a dois não isomorfos (como $\mathbb{K}G$-módulos). Para cada $i = 1, ..., n$, considere $\{I_{i_j} \mid j \in \Lambda_i\}$ como sendo a família de ideais minimais à esquerda de $\mathbb{K}G$ isomorfos a I_i. Então $J_i = \sum_{j\in\Lambda_i} I_{i_j}$ é um ideal bilateral minimal de $\mathbb{K}G$, para cada $i = 1, ..., n$, e $\mathbb{K}G$ pode ser decomposto como*

$$\mathbb{K}G = J_1 \oplus J_2 \oplus ... \oplus J_n.$$

Prova. Veja [5], Teorema 25.15, página 168. ■

Definição 1.41 *Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear de grau finito. Definimos o* <u>*caracter de φ*</u> *como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} \chi_\varphi & : & G & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & g & \longmapsto & \chi_\varphi(g) = tr\ \varphi_g \end{array}.$$

Se φ for uma representação irredutível, diremos que χ_φ é um <u>*caracter irredutível*</u> *de G.*

A definição de caracter para uma representação da forma $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$ é feita de maneira análoga, onde $\chi_\varphi(g)$ é o traço da matriz φ_g. Denotando por 1 o elemento neutro de G, temos que $\chi_\varphi(1) = tr\ \mathrm{Id}_V = \dim V$.

Exemplo 1.42 Seja $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}^*$ uma representação linear (de grau 1). Então $\chi_\varphi(g) = \varphi(g)$ para todo $g \in G$. ▲

Como matrizes semelhantes têm o mesmo traço, então representações equivalentes têm o mesmo caracter. Segue também deste fato que se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de grau finito e $g_1, g_2 \in G$ são conjugados ($g_1 = x^{-1}g_2x$ com $x \in G$), então $\chi_\varphi(g_1) = \chi_\varphi(g_2)$.

Teorema 1.43 *Se φ e ψ são representações lineares de G que têm o mesmo caracter, então φ e ψ são equivalentes.*

Prova. Veja [23], 8.3.7, página 230. ■

Definição 1.44 *Definimos o* <u>*caracter de um $\mathbb{K}G$-módulo M*</u> *como sendo o caracter da representação associada a esse módulo (denotaremos por χ_M). O grau de χ_M é definido como sendo a $\mathbb{K}$-dimensão de M*

Por fim, falemos brevemente sobre a soma direta de representações lineares e seu caracter.

Considere agora $\psi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de grau finito e subespaços $W_1, W_2, ..., W_n$ ψ-invariantes de V tais que $\psi_i = \psi|_{W_i}$ é irredutível e $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$. Observe que para cada $g \in G$ e $w_i \in W_i$, com $1 \leq i \leq n$, temos

$$\begin{aligned} \psi_g(w_1 + w_2 + ... + w_n) &= \psi_g(w_1) + \psi_g(w_2) + ... + \psi_g(w_n) \\ &= (\psi_1)_g(w_1) + (\psi_2)_g(w_2) + ... + (\psi_n)_g(w_n). \end{aligned}$$

Devido a estas últimas igualdades, denotamos

$$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus ... \oplus \psi_n.$$

Pela relação biunívoca entre módulos e caracteres irredutíveis e pela Proposição 1.24, tem-se que essa decomposição é única.

Tomemos β_i uma base de W_i, para cada $i = 1, 2, ..., n$, e $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup ... \cup \beta_n$, temos que β é base de V e $[\psi_g]_\beta$ é uma matriz diagonal em blocos, os quais são $[(\psi_1)_g]_{\beta_1}, [(\psi_2)_g]_{\beta_2}, ..., [(\psi_n)_g]_{\beta_n}$, ou seja

$$[\psi_g]_\beta = \begin{pmatrix} [(\psi_1)_g]_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [(\psi_2)_g]_{\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [(\psi_n)_g]_{\beta_n} \end{pmatrix}.$$

Logo, $\chi_\psi = \chi_{\psi_1} + \chi_{\psi_2} + ... + \chi_{\psi_n}$. Segue então o seguinte resultado.

Teorema 1.45 *Todo caracter de G sobre $\mathbb{K}$ pode ser escrito como soma de caracteres irredutíveis.*

1.3 Representações do Grupo Simétrico S_n

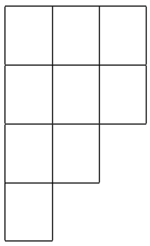
No que segue $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, e $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$

Definição 1.46 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos uma partição de n (denotada por $\lambda \vdash n$) como sendo uma sequência finita $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ de números naturais tais que $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Chamamos o número $r = h(\lambda)$ de altura da partição λ.*

Dada uma partição $\lambda \vdash n$ tal que $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 1$, escrevemos $\lambda = (1^n)$. Mais geralmente, se $n = d.k$, escrevemos $\lambda = (k^d)$ para denotar a partição $\lambda = (\underbrace{k, \ldots, k}_{d-\text{vezes}})$ de n. Indicaremos por $\mathrm{Par}(n)$ o conjunto de todas as partições e por $p(n)$ sua cardinalidade, ou seja, o número de partições do número natural n.

Definição 1.47 *Seja $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$. Definimos o diagrama de Young D_λ da partição λ como sendo o conjunto $D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n_i\}$.*

Note que D_λ é um conjunto composto por n elementos. Usualmente, representaremos D_λ por n células dispostas em r filas horizontais, chamadas de linhas, com a i-ésima linha composta por n_i células. Da esquerda para a direita, as primeiras células de cada linha aparecem numa mesma fila vertical (coluna). Observe que o número de colunas é igual a n_1. A numeração das linhas é feita de cima para baixo e a das colunas da esquerda para a direita. Dado $(i,j) \in D_\lambda$, a célula correspondente está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Por exemplo, vejamos a representação do diagrama de Young da partição $\lambda = (3,3,2,1) \vdash 9$.

$D_\lambda =$ 

Para $i \in \{1, 2, ..., r\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n_1\}$, note que a i-ésima linha intersecta a j-ésima coluna se, e somente se, $n_i \geq j$. Assim, denotando o número de células da j-ésima coluna por c_j, temos que $c_j = \max\{i \in \{1, 2, ..., r\} \mid n_i \geq j\}$. Observe que $r = c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_{n_1}$.

Com isso, a definição de altura de uma partição ganha sentido.

Definição 1.48 *Chamamos de diagrama retangular o diagrama associado a uma partição da forma (k^l). Tal partição é chamada de partição retangular.*

Definição 1.49 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$. Definimos uma tabela de Young do diagrama D_λ (ou da partição λ) como sendo uma bijeção $T : D_\lambda \longrightarrow I_n$. Dizemos que uma tabela de Young T é standard se satisfaz:*

(i) $T(i,j) < T(i,j+1)$ *para* $1 \leq i \leq r$ *e* $1 \leq j < n_i$;

(ii) $T(i,j) < T(i+1,j)$ *para* $1 \leq j \leq n_1$ *e* $1 \leq i < c_j$.

É fácil notar que para uma partição λ de n existem exatamente $n!$ tabelas de Young do diagrama D_λ. Representa-se uma tabela de Young T do diagrama D_λ colocando-se cada elemento $T(i,j)$ na célula (i,j) do diagrama D_λ. Em uma tabela de Young T standard, as entradas na tabela crescem em cada linha da esquerda para a direita e em cada coluna de cima para baixo.

Seja $\sigma \in S_n$. Definimos σT como sendo a composta $\sigma \circ T : D_\lambda \longrightarrow I_n$, isto é, σ age nas entradas das células, que também resulta em uma tabela de Young do mesmo diagrama D_λ. Note que $\sigma T = T$ se, e somente se, $\sigma = Id$. Note também que, para cada par de tabelas T_1 e T_2 de um mesmo diagrama D_λ, existe $\mu \in S_n$ tal que $T_2 = \mu T_1$.

Exemplo 1.50 Considere as seguintes tabelas de Young

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 9 & 8 \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad e \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

Observe que a segunda tabela é standard, mas a primeira não é. ▲

Definição 1.51 *Dada uma tabela de Young T, definimos o* *<u>grupo das permutações nas linhas de T</u>*, *denotado por $R(T)$, como sendo*

$$R(T) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(L) = L \textit{ para toda linha } L \textit{ de } T\}$$

e o *<u>grupo das permutações nas colunas de T</u>*, *denotado por $C(T)$, como sendo*

$$C(T) = \{\mu \in S_n \mid \mu(C) = C \textit{ para toda coluna } C \textit{ de } T\}.$$

Observação 1.52 Consideremos $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ e T uma tabela de Young associada a D_λ.

- Sejam $L_1, L_2, ..., L_r$ as linhas de T. Definindo, para cada $i = 1, 2, ..., r$,

$$H_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k,\ \forall\ k \in I_n - L_i\},$$

teremos

$$R(T) = H_1 H_2 ... H_r \simeq H_1 \times H_2 \times ... \times H_r \simeq S_{n_1} \times S_{n_2} \times ... \times S_{n_r}.$$

Note que, se $\sigma \in H_i$ e $\mu \in H_j$, então $\sigma\mu = \mu\sigma$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq r$ tais que $i \neq j$.

- Sejam $C_1, C_2, ..., C_{n_1}$ as colunas de T. Definindo, para cada $j = 1, 2, ..., n_1$,

$$K_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k, \ \forall\ k \in I_n - C_j\},$$

  teremos que

$$C(T) = K_1K_2...K_{n_1} \simeq K_1 \times K_2 \times ... \times K_{n_1} \simeq S_{C_1} \times S_{C_2} \times ... \times S_{C_{n_1}},$$

  onde C_l, $l = 2, 3, ..., n_1$, é a quantidade de elementos de C_l. Note que, se $\sigma \in K_i$ e $\mu \in K_j$, então $\sigma\mu = \mu\sigma$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n_1$ tais que $i \neq j$.

Se $\sigma \in R(T)$, então σT e T têm as mesmas linhas. Analogamente, se $\mu \in C(T)$, então μT e T têm as mesmas colunas. Logo, se $\sigma \in R(T) \cap C(T)$, então σT e T têm exatamente as mesmas linhas e as mesmas colunas, donde segue que $\sigma T = T$ e, logo, $\sigma = Id$.

Seja T uma tabela de Young. Consideremos os seguintes elementos da álgebra de grupo $\mathbb{K}S_n$:

$$P_T = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma \quad , \quad Q_T = \sum_{\mu \in C(T)} (-1)^\mu \mu \quad \text{e} \quad E_T = P_TQ_T = \sum_{\substack{\sigma \in R(T) \\ \mu \in C(T)}} (-1)^\mu \sigma\mu,$$

onde $(-1)^\mu$ é o sinal da permutação μ.

Exemplo 1.53 Consideremos a tabela de Young T_2 do Exemplo 1.50

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 & \\ \cline{1-2} 5 & & \\ \cline{1-1} \end{array} .$$

As linhas de T_2 são $L_1 = \{1, 2, 4\}$, $L_2 = \{3, 6\}$ e $L_3 = \{5\}$, e as colunas de T_2 são $C_1 = \{1, 3, 5\}$, $C_2 = \{2, 6\}$ e $C_3 = \{4\}$. Assim, teremos que
$R(T_2) = \{Id,\ (1\,2),\ (1\,4),\ (2\,4),\ (1\,2\,4),\ (1\,4\,2),\ (3\,6),\ (1\,2)(3\,6),\ (1\,4)(3\,6),\ (2\,4)(3\,6),\ (1\ 2\ 4)(3\ 6),\ (1\ 4\ 2)(3\ 6)\}$
e que
$C(T_2) = \{Id,\ (1\,3),\ (1\,5),\ (3\,5),\ (1\,3\,5),\ (1\,5\,3),\ (2\,6),\ (1\,3)(2\,6),\ (1\,5)(2\,6),\ (3\,5)(2\,6),\ (1\ 3\ 5)(2\ 6),\ (1\ 5\ 3)(2\ 6)\}$. ▲

Construiremos agora S_n-módulos irredutíveis a partir de tabelas de Young.

Lema 1.54 *Sejam $\alpha \in S_n$, λ, λ_1 e λ_2 partições de n e T, T_1 e T_2 tabelas de Young dos diagramas D_λ, D_{λ_1} e D_{λ_2}, respectivamente. Valem:*
(a) Existe $\gamma \in K$ tal que $E_T\alpha E_T = \gamma E_T$.
(b) Se $\lambda_1 > \lambda_2$, então $E_{T_1}\alpha E_{T_2} = 0$.

Prova. Veja [4], capítulo IV, §2. ■

Pelo Lema 1.54, temos $E_T^2 = aE_T$ para algum $a \in K$ (em [5], §28, página 195, prova-se que a é não nulo). Tomando então $e_T = a^{-1}E_T$, teremos

$$e_T^2 = (a^{-1}E_T)(a^{-1}E_T) = a^{-2}E_T^2 = a^{-2}(aE_T) = a^{-1}E_T = e_T.$$

Tomemos agora o ideal à esquerda de $\mathbb{K}S_n$

$$M_T = \mathbb{K}S_nE_T = \{\alpha E_T \mid \alpha \in \mathbb{K}S_n\}.$$

Observe que $M_T = \mathbb{K}S_n e_T$. Pelo Exemplo 1.20, M_T é um submódulo de $\mathbb{K}S_n$ (visto como S_n-módulo). Pelo Exemplo 1.23, $\gamma Id_{M_T} \in End_{\mathbb{K}S_n}M_T$ para todo $\gamma \in \mathbb{K}$. Considerando agora $\varphi \in End_{\mathbb{K}S_n}M_T$ e $\alpha \in \mathbb{K}S_n$ tais que $\varphi(e_T) = \alpha e_T$, a partir do Lema 1.54 não é difícil mostrar que $\varphi = \gamma Id_{M_T}$. Concluímos então que $End_{\mathbb{K}S_n}M_T = \{\gamma Id_{M_T} \mid \gamma \in \mathbb{K}\}$, e assim $End_{\mathbb{K}S_n}M_T$ é um corpo isomorfo a $\mathbb{K}$.

Teorema 1.55 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ e T, T_1, T_2 tabelas de Young dos diagramas D_λ, D_{λ_1} e D_{λ_2}, respectivamente. Então:*
(a) M_T é um $\mathbb{K}S_n$-módulo irredutível.
(b) M_{T_1} e M_{T_2} são $\mathbb{K}S_n$-módulos isomorfos se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Prova. *(a)* Seja N um submódulo de M_T. Pelo Teorema de Maschke (1.37), temos que existe N_1 submódulo de M_T tal que $M_T = N \oplus N_1$. Tomando a aplicação $\varphi : M_T \longrightarrow M_T$ tal que $\varphi(\alpha + \beta) = \alpha$ para $\alpha \in N$ e $\beta \in N_1$, teremos que $\varphi \in End_{\mathbb{K}S_n}M_T$ e $\varphi^2 = \varphi$. Como $End_{\mathbb{K}S_n}M_T$ é um corpo, devemos ter $\varphi = 0$ ou $\varphi = Id$, e com isso $N = \{0\}$ ou $N = M_T$. Logo, M_T é irredutível.
(b) Sejam M_{T_1} e M_{T_2} S_n-módulos isomorfos. Suponhamos, por contradição, que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 > \lambda_2$. Segue do Lema 1.54 que $e_{T_1}\alpha e_{T_2} = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}S_n$. Seja $\varphi : M_{T_1} \longrightarrow M_{T_2}$ um homomorfismo de S_n-módulos. Tomando $\alpha_1 \in \mathbb{K}S_n$ tal que $\varphi(e_{T_1}) = \alpha_1 e_{T_2}$, teremos

$$\varphi(e_{T_1}) = \varphi(e_{T_1}e_{T_1}) = e_{T_1}\varphi(e_{T_1}) = e_{T_1}\alpha_1 e_{T_2} = 0,$$

e daí, $\varphi = 0$. Logo, M_{T_1} e M_{T_2} não são isomorfos, contradição! Por outro lado, suponhamos $\lambda_1 = \lambda_2$. Teremos $T_1 = \rho T_2$ para algum $\rho \in S_n$, e mostra-se que $e_{T_1} = a\rho e_{T_2}\rho^{-1}$ para algum $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Com isso, temos que $M_{T_1} = M_{T_2}\rho^{-1}$. Portanto, M_{T_1} e M_{T_2}

são $\mathbb{K}S_n$-módulos isomorfos. ■

Seja $n \in \mathbb{N}$. Como consequência do Teorema 1.55 acima, temos que o número de S_n-módulos irredutíveis, a menos de isomorfismo, é maior ou igual ao número de diagramas de Young associados a n, que é igual a $p(n)$, o número de partições de n. Por outro lado, pelo que foi apresentado na Seção 1.2, o número de $\mathbb{K}$-representações irredutíveis de S_n, a menos de equivalência, é menor ou igual ao número de classes de conjugação de S_n. Como o número de $\mathbb{K}$-representações irredutíveis de S_n coincide com o número de S_n-módulos irredutíveis e o número de classes de conjugação de S_n coincide com $p(n)$, concluímos que o grupo S_n possui, a menos de equivalência, exatamente $p(n)$ representações irredutíveis sobre $\mathbb{K}$.

Denotaremos por M_λ o S_n-módulo irredutível (a menos de isomorfismo) correspondente à partição $\lambda \vdash n$, por φ_λ a representação irredutível de S_n correspondente a M_λ, por d_λ a dimensão do módulo M_λ, que coincide com o grau da representação linear associada a λ, e por χ_λ o caracter irredutível de S_n associado a λ.

Pela Proposição 1.39, todo S_n-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{K}S_n$. Sendo $\lambda \vdash n$, denotemos por J_λ a soma de todos os ideais minimais à esquerda de $\mathbb{K}S_n$ isomorfos (como S_n-módulos) a M_λ. Segue da Proposição 1.40 que J_λ é um ideal bilateral minimal de $\mathbb{K}S_n$ e que $\mathbb{K}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} J_\lambda$.

Proposição 1.56 *Seja $\lambda \vdash n$. Se T_1, ..., T_{l_λ} são todas as tabelas standard da partição λ, então J_λ, o ideal bilateral minimal de $\mathbb{K}S_n$ associado a λ, é decomposto como*

$$J_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{l_\lambda} \mathbb{K}S_n E_{T_i}.$$

Prova. Veja [8], Proposição 2.2.14, página 49. ■

Teorema 1.57 *Seja $\lambda \vdash n$. Então a dimensão d_λ do S_n-módulo irredutível M_λ é igual ao número de tabelas standard da partição λ.*

Prova. Veja [4], Capítulo IV, Teorema 4.6, página 121. ■

Corolário 1.58 *Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p(n)}$ são as distintas partições de n, então*

$$|S_n| = d_{\lambda_1}^2 + d_{\lambda_2}^2 + ... + d_{\lambda_{p(n)}}^2.$$

Prova. Pelo que foi visto, temos $|S_n| = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}S_n = \sum\limits_{\lambda\vdash n} \dim J_\lambda$. Pela Proposição 1.56 acima e pelo Teorema 1.57 temos $\dim J_\lambda = d_\lambda^2$. ■

Sendo χ um caracter do grupo S_n, temos $\chi = \sum\limits_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, pelo Teorema 1.45. Pelo Teorema 1.55 e pela Proposição 1.56, $\mathbb{K}S_n \simeq \bigoplus\limits_{\lambda\vdash n} d_\lambda M_\lambda$, onde $d_\lambda M_\lambda$ denota a soma direta de d_λ módulos isomorfos a M_λ, e daí $\chi_{\mathbb{K}S_n} = \sum\limits_{\lambda\vdash n} d_\lambda \chi_\lambda$, onde χ_λ é o caracter irredutível associado a λ. Se M_1 e M_2 são submódulos de $\mathbb{K}S_n$ tais que $\mathbb{K}S_n = M_1 \oplus M_2$, com $\chi_{M_1} = \sum\limits_{\lambda\vdash n} \alpha_\lambda \chi_\lambda$ e $\chi_{M_2} = \sum\limits_{\lambda\vdash n} \beta_\lambda \chi_\lambda$, então $\alpha_\lambda + \beta_\lambda = d_\lambda$ para todo $\lambda \vdash n$, pela Proposição 1.24, item *(c)*.

A fórmula apresentada a seguir nos dá uma maneira de obter o número de tabelas standard associadas a uma partição. Antes, vejamos um conceito necessário.

Definição 1.59 *Dada uma célula $(i_0, j_0) \in D_\lambda$, definimos o gancho (i_0, j_0) como sendo o conjunto*

$$\{(i_0, j); j_0 \leq j \leq n_{i_0}\} \cup \{(i, j_0); i_0 \leq i \leq c_{j_0}\}.$$

Observemos que o gancho (i_0, j_0) do diagrama D_λ é o conjunto das células da linha i_0 que estão à direita da célula (i_0, j_0), e das células da coluna j_0 que estão abaixo da célula (i_0, j_0), juntamente com a própria célula (i_0, j_0). Por exemplo, vejamos o gancho $(2, 2)$ do diagrama D_λ, onde $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1) \vdash 13$.

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & \text{X} & \text{X} \\ \cline{1-3} & \text{X} & \\ \cline{1-3} & \text{X} \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Denotando por h_{i_0,j_0} o número de células do gancho (i_0, j_0), vemos que

$$h_{i_0,j_0} = n_{i_0} - (j_0 - 1) + c_{j_0} - (i_0 - 1) - 1 = n_{i_0} + c_{j_0} - i_0 - j_0 + 1.$$

Teorema 1.60 (Fórmula do Gancho) *Sejam $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r) \vdash n$ e $ST(\lambda)$ o número de tabelas standard do diagrama D_λ. Então*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}},$$

onde h_{ij} denota o número de células do gancho (i, j).

Prova. Veja [4], Capítulo VI, §3, página 211. ■

Exemplo 1.61 Considere a partição $\lambda = (3,2) \vdash 5$ e o seu diagrama de Young

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}\ .$$

Na notação do teorema anterior (Fórmula do Gancho), temos $h_{11} = 4$, $h_{12} = 3$, $h_{13} = 1$, $h_{21} = 2$ e $h_{22} = 1$, e daí

$$ST(\lambda) = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5.$$

▲

1.4 PI-Álgebras

Nesta seção, será apresentada a noção de identidades polinomiais e assim o conceito de PI-álgebra. Ademais, serão apresentados exemplos ilustrativos.

Definição 1.62 *Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra e $f = f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Diremos que f (ou $f \equiv 0$) é uma identidade polinomial (PI) de A se $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$.*

Temos que $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma identidade para A se, e somente se, $f \in \ker\varphi$ para todo homomorfismo $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$.

Exemplo 1.63 Sendo A uma álgebra comutativa, é imediato que $[x_1, x_2] = 0$ é uma identidade polinomial para A. E o polinômio nulo (ou trivial) $f = 0$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra. ▲

Exemplo 1.64 Considere a subálgebra $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$ de $M_n(\mathbb{K})$. Sejam $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$. Como

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

temos que o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3$ é identidade polinomial de M. ▲

Definição 1.65 *Se A satisfaz uma identidade polinomial não nula, então dizemos que A é uma PI-álgebra.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o polinômio

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

é conhecido como polinômio standard de grau n. Há importantes resultados acerca desses polinômios.

Teorema 1.66 (Amitsur-Levitzki) *A álgebras de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard $St_{2n} \equiv 0$.*

Prova. Veja [8], Teorema 1.7.7, página 18. ■

No Capítulo 4 é dada uma demonstração do seguinte resultado.

Teorema 1.67 *Seja A uma PI-álgebra. Então, existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que A satisfaz a identidade $St_k^l \equiv 0$.*

Um outro polinômio bastante importante para esse trabalho será definido no seguinte exemplo.

Exemplo 1.68 Chamamos o polinômio da forma

$$d_m[x,y] = d_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{m-1} x_{\sigma(m)}$$

de polinômio de Capelli de altura m. Sendo $\mathrm{char}\mathbb{K} \neq 2$ e A uma álgebra de dimensão $m-1$ sobre $\mathbb{K}$, então $d_m[x,y]$ é uma identidade para A. Observemos ainda que

$$d_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, 1, 1, \ldots, 1) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)} = St_m(x_1, x_2, \cdots, x_m).$$

Ademais, $St_{m+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra de dimensão igual a m. ▲

Definição 1.69 *Um ideal I de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ é dito um* T-ideal *se $\varphi(I) \subseteq I$ para qualquer endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X \rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}\langle X \rangle$.*

Denotaremos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais da álgebra A. Ademais, $T(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X \rangle$.

Proposição 1.70 *Se A é uma álgebra, então $T(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Reciprocamente, se I é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.*

Prova. Sejam $f(x_1, ..., x_n) \in T(A)$ e ψ um endomorfismo de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Considere

$$g(x_1, ..., x_m) = \psi(f)$$

e assuma que $g(x_1, ..., x_m) \notin T(A)$. Existe um homomorfismo $h : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $h(g) \neq 0$. Tomando o homomorfismo $h \circ \psi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$, teremos que $(h \circ \psi)(f) = h(\psi(f)) = h(g) \neq 0$, uma contradição, pois $f \in T(A)$. Logo, $T(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Por outro lado, seja I um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Tome $B = \mathbb{K}\langle X\rangle/I$ e $f(x_1, ..., x_n) \in T(B)$. Temos que $\overline{f(x_1, ..., x_n)} = f(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \overline{0}$, e daí $f \in I$, donde $T(B) \subseteq I$. Agora, sejam $g(x_1, ..., x_m) \in I$ e $\overline{b_1}, ..., \overline{b_m} \in B$. Como I é um T-ideal, $g(b_1, ..., b_m) \in I$, e assim $g\left(\overline{b_1}, ..., \overline{b_m}\right) = \overline{g(b_1, ..., b_m)} = \overline{0}$. Segue que $g \in T(B)$ e assim $I \subseteq T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

É fácil ver que a interseção de uma família qualquer de T-ideais de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é ainda um T-ideal. Logo, dado um subconjunto S qualquer de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, podemos definir o T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contêm S. Assim, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contém S.

Na prática, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ com conjunto gerador

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2; f \in S, \quad h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}\langle X\rangle\}.$$

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S\rangle^T$, dizemos que S é uma base das identidades de A.

Exemplo 1.71 Se A é uma álgebra associativa, comutativa e unitária e $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$. ▲

Exemplo 1.72 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito e $U_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$. Então, a identidade polinomial

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$$

forma uma base para as identidades polinomiais de $U_n(\mathbb{K})$. ▲

Definição 1.73 *Sejam S um conjunto de polinômios em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma consequência dos polinômios de S (ou que f segue dos polinômios de S) se $f \in \langle S\rangle^T$.*

Mais adiante descreveremos os T-ideais de algumas álgebras, o que servirá de exemplo para o conceito acima.

Definição 1.74 *Dois conjuntos de polinômios são ditos equivalentes se geram o mesmo T-ideal.*

1.5 Polinômios multilineares e polinômios próprios

Nesta seção, serão definidos polinômios multilineares e polinômios próprios. Os primeiros são fundamentais para o desenvolvimento da PI-teoria, pois veremos que, se $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$, qualquer polinômio é equivalente a polinômios multilineares.

Definição 1.75 *Sejam $m \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Definimos o grau de m em x_i, denotado por $\deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m. Um polinômio $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito homogêneo em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i. f é dito multi-homogêneo quando é homogêneo em todas as variáveis.*

Se $m = m(x_1, \ldots, x_n)$ é um monômio de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, definimos o multigrau de m como sendo a n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ onde $a_i = \deg_{x_i} m$. Se $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, a soma de todos os monômios de f com um mesmo multigrau é dita ser uma componente multi-homogênea de f. Observe então que f será multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.

Quando $\mathbb{K}$ é infinito, o próximo resultado nos fornece uma ferramenta para determinar geradores para T-ideais.

Proposição 1.76 *Sejam I um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$. Se $\mathbb{K}$ é infinito, então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Ademais, I é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos.*

Prova. Veja [8], Teorema 1.3.2, página 6. ■

Definição 1.77 *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ será dito multilinear se for multi-homogêneo de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$, isto é, se em cada monômio cada variável tem grau 1.*

De acordo com a definição acima, um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ terá sempre a forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in \mathbb{K}$.

Fixadas as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, denotaremos por P_n o subespaço vetorial de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ de todos os polinômios multilineares nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Observe que $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)};\ \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n e assim dim $P_n = n!$. Agora, considere a transformação linear $T : \mathbb{K}S_n \longrightarrow P_n$ que satisfaz $T(\sigma) = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$. Note que T é um isomorfismo de espaços vetoriais, e assim temos uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{K}S_n$ e P_n. Diante desse isomorfismo, trataremos os polinômios de P_n como elementos de $\mathbb{K}S_n$ e vice-versa.

Considere a álgebra de grupo $\mathbb{K}S_n$, o subespaço vetorial P_n de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ dos polinômios multilineares de grau n e o produto bilinear

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K}S_n \times P_n & \longrightarrow & P_n \\ & (\alpha, f) & \longmapsto & \alpha \cdot f \end{array}$$

que satisfaz $\sigma \cdot (x_{i_1} ... x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} ... x_{\sigma(i_n)}$, para quaisquer $\sigma \in S_n$ e $x_{i_1} ... x_{i_n}$ monômio multilinear em P_n. Munido desse produto, P_n é um $\mathbb{K}S_n$-módulo (ou simplesmente um S_n-módulo). Além disso, note que $\sigma \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$, e com isso $P_n \cap T(A)$ é um submódulo de P_n.

Observação 1.78 Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra gerada, como espaço vetorial, pelo subconjunto $B \subseteq A$. Se um polinômio multilinear f quando avaliado em elementos de B resulta em zero, então f é uma identidade polinomial para A. Para verificar a afirmação, consideremos $a_1 = \sum \alpha_{1i} u_i$, $\ldots$, $a_n = \sum \alpha_{ni} u_i$ elementos arbitrários de A, onde $u_i \in B$. Então, como $f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear em cada uma das variáveis, $f(a_1, \ldots, a_n) = \sum \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0$.

Exemplo 1.79 A álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] = 0$. Observe que o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é multilinear. Logo, basta verificar que $[r_1, r_2, r_3] = 0$ para os elementos da base de E. Observemos que

$$\begin{aligned} [r_1, r_2] = [e_{i_1} \ldots e_{i_m}, e_{j_1} \ldots e_{j_n}] &= e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n} - e_{j_1} \ldots e_{j_n} e_{i_1} \ldots e_{i_m} \\ &= e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n} - (-1)^{mn} e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n} \\ &= (1 - (-1)^{mn}) e_{i_1} \ldots e_{i_m} e_{j_1} \ldots e_{j_n}. \end{aligned}$$

Donde, $[r_1, r_2] \neq 0$ acarreta que mn deve ser um número ímpar, e assim, m e n devem ser ambos ímpares. Logo, $[r_1, r_2]$ tem comprimento par, ou seja, $[r_1, r_2] \in E_0$. Portanto, $[r_1, r_2, r_3] = 0$. ▲

Teorema 1.80 *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade de grau k, então A satisfaz uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k.*

Prova. Veja [8], Teorema 1.3.7, página 7. ■

Agora veremos uma importante ferramenta, o processo de linearização de polinômios, que a partir de um polinômio qualquer dado nos possibilita determinar um outro polinômio multilinear. Tal processo será descrito na demonstração do próximo resultado.

Teorema 1.81 *Se* $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$*, então todo polinômio não nulo $f \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ é consequência de um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Prova. Como $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$, temos que $\mathbb{K}$ é infinito e segue do Teorema 1.76 que f é consequencia de suas componentes multi-homogêneas. Assim, assumindo que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é multi-homogêneo e $\deg_{x_1} f = d > 1$, podemos escrever

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n),$$

onde g_i é a componente homogênea de grau i em y_1, $\deg_{y_2} g_i = d - i$ e $\deg_{x_t} g_i = \deg_{x_t} f$, para todo $t \in \{2, \ldots, n\}$. Desta maneira, todos os polinômios $g_i = g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, d-1$, são consequências de f. Por fim, para ver que essas identidades são equivalentes a $f = 0$, é suficiente ver que para cada i,

$$g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ora, como $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$, temos que o coeficiente binomial na igualdade acima não pode ser zero, donde f é um consequência de cada g_i. Indutivamente, para qualquer grau, temos o resultado. ■

Corolário 1.82 *Seja A uma álgebra. Se* $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$*, então $T(A)$ é gerado, como T-ideal, pelos seus polinômios multilineares.*

Definição 1.83 *Um polinômio $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é dito ser um* <u>*polinômio próprio*</u> *(ou comutador), se é uma combinação linear de produtos de comutadores, ou seja,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{i,\ldots,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}], \quad \textit{com } \alpha_{i,\ldots,j} \in \mathbb{K}.$$

Denotaremos por B o subconjunto de todos os polinômios próprios de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Neste sentido, definiremos

$$\Gamma_n = B \cap P_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

isto é, Γ_n é o conjunto de todos os polinômios próprios multilineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Capítulo 2

Codimensões e Cocaracteres

Neste capítulo serão apresentadas as definições de codimensão e cocaracter. Ademais, será também mostrado aqui o Teorema de Regev para o produto tensorial de álgebras.

Como T-ideais são invariantes por permutações das variáveis, podemos afirmar que $P_n \cap T(A)$ é um submódulo do S_n-módulo à esquerda P_n. Daí, o quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$$

possui uma estrutura induzida de S_n-módulo à esquerda. O número $c_n(A) = \mathrm{dim} P_n(A)$ é dito a n-ésima codimensão de A.

Definição 2.1 *Sejam A uma PI-álgebra e $P_n(A) = P_n/(T(A) \cap P_n)$, $n \in \mathbb{N}$. O S_n-caracter*

$$\chi_n(A) = \chi_{P_n(A)} = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ sua multiplicidade correspondente, é chamado o n-ésimo cocaracter da álgebra A. A sequência

$$\chi_n(A), \quad n = 1, 2, ...,$$

é chamada de sequência de cocaracteres de A.

Observe que

$$c_n(A) = \dim P_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda.$$

Exemplo 2.2 Se A é uma PI-álgebra, temos que $P_n \cap T(A)$ é um submódulo de P_n. Daí, pelo Teorema de Maschke para módulos, deve existir um submódulo J de P_n de modo que

$$P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J.$$

Ademais, como $(P_n \cap T(A)) \cap J = \{0\}$, pelo Teorema Fundamental dos Homomorfismos, segue que

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)} = \frac{(P_n \cap T(A)) + J}{P_n \cap T(A)} \simeq \frac{J}{(P_n(A) \cap T(A)) \cap J} \simeq J.$$

Logo, $\chi_n(A) = \chi_J$. ▲

Teorema 2.3 *Sejam A uma PI-álgebra e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ seu n-ésimo cocaracter. Para uma partição $\lambda \vdash n$, a multiplicidade m_λ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T associada a λ e para qualquer polinômio $f = f(x_1, ..., x_n) \in P_n$ a álgebra A satisfaz a identidade $E_T f \equiv 0$.*

Prova: Considere um submódulo J de P_n tal que

$$P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J.$$

Pelo Exemplo 2.2, temos que$J$ é isomorfo à $P_n(A)$ e assim, $\chi_n(A) = \chi_J$. Consideremos as seguintes decomposições

$$\mathbb{K}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} J_\lambda \quad \text{e} \quad P_n = Q \oplus J,$$

onde J_λ é o ideal bilateral de $\mathbb{K}S_n$ correspondente à partição λ e $Q = P_n \cap T(A)$. Fixemos alguma partição $\mu \vdash n$. Então, pela correspondência estabelecida, $m_\mu = 0$ (isto é, $J_\mu = \{0\}$) se, e somente se, $J_\mu J = \{0\}$. Por outro lado, como estamos falando de um quociente, a igualdade $J_\mu J = \{0\}$ é equivalente a $J_\mu P_n \subseteq Q$. Daí, como J_μ é a soma de todos os ideais $\mathbb{K}S_n E_{T_\mu}$, a inclusão $J_\mu P_n \subseteq Q$ vale se, e somente se, $E_{T_\mu} f \in Q$ para qualquer $f \in P_n$, ou seja $E_{T_\mu} f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra A, o que encerra a demonstração. ■

Definição 2.4 *Seja A uma PI-álgebra unitária. Considerando o espaço vetorial quociente $\Gamma_n(A) = \Gamma_n / (\Gamma_n \cap T(A))$, definimos a sequência de codimensões próprias como sendo*

$$\gamma_n(A) = \dim \Gamma_n(A), \ n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.5 *Seja A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$. Então,*

$$c_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k(A), \quad n = 1, 2, \dots \quad . \tag{2.1}$$

Prova. Veja [6], Teorema 4.3.12, página 47. ∎

2.1 Calculando as codimensões de algumas álgebras

Aqui traremos alguns exemplos onde são calculadas as codimensões de algumas álgebras e consequentemente sua sequência de codimensões, a partir das quais podemos observar o comportamento de seu crescimento. Em toda essa seção, vamos supor $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$.

Exemplo 2.6 Denotemos por $\mathbb{K}_0\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre sem unidade. Consideremos a álgebra

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

e o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2]x_3$. Temos que $f \in T(A)$. De fato, sendo

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A,$$

temos

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2, c_3) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2a_1a_3 & a_2a_1b_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Donde, $I = \langle f \rangle^T \subseteq T(A)$. Seja $g \in P_n \cap T(A)$. Se $n = 2$, claramente, $g \simeq 0 \pmod I$. Consideremos então $n \geq 3$. Se

$$g \equiv \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_n m_n (\mathrm{mod}\ I),$$

onde $m_1 = x_2x_3 \cdots x_nx_1$, $m_2 = x_1x_3 \cdots x_nx_2$, ... , $m_n = x_1x_2 \cdots x_{n-1}x_n$, considere as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fazendo

$$x_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad j \neq i$$

obtemos que $\lambda_i = 0$. Daí, $g \equiv 0 (\text{mod } I)$, ou seja, $g \in I$. Logo, $T(A) \subseteq I$, e portanto $T(A) = I$.

Mostraremos agora que $c_n(A) = n$. Tomemos então $n \geq 3$ e consideremos o conjunto formado pelos monômios m_1, m_2, ... , m_n acima. Suponha que existam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n \equiv 0 \pmod{T(A)}.$$

Fazendo novamente para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $x_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se $j \neq i$, obtemos que $\alpha_i = 0$. Donde o conjunto formado pelos monômios

$$m_1 = x_2 x_3 \cdots x_n x_1, \quad m_2 = x_1 x_3 \cdots x_n x_2, \quad \ldots, \quad m_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$$

é linearmente independente módulo $T(A)$. Ademais, tal conjunto é um gerador para $P_n(A) = P_n/(P_n \cap T(A))$, donde $\dim P_n(A) = n$, ou seja, $c_n(A) = n$. ▲

Exemplo 2.7 Consideremos a álgebra $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$, mostremos que $T(M) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$. De fato, seja $Q = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$. Dados $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in M$, segue que

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1a_2 & a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1d_2 + d_1a_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} a_2a_1 & a_2b_1 + b_2a_1 & a_2c_1 + b_2d_1 + c_2a_1 \\ 0 & a_2a_1 & a_2d_1 + d_2a_1 \\ 0 & 0 & a_2a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1d_2 - b_2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \langle E_{13} \rangle, \end{aligned}$$

donde $[M, M] \subseteq \langle E_{13} \rangle$. Daí, é fácil ver que $[x_1, x_2, x_3]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ são identidades para M e assim $Q \subseteq T(M)$. Antes de provar a inclusão contrária, caminhemos para encontrar um conjunto gerador para $P_n/(P_n \cap Q)$. Pelo Teorema 1.72, qualquer polinômio multilinear de grau n pode ser escrito, módulo $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$, como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m} [x_k, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m-1}}],$$

onde $i_1 < \cdots < i_m$, $j_1 < \cdots < j_{n-m-1}$, $k > j_1$, $m \neq n-1$ e

$$\{i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_{n-m-1}, k\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Assim, por causa da identidade $[x_1, x_2, x_3]$, os elementos

$$x_1 \cdots x_n, \ x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_i, x_j], \quad i_1 < \cdots < i_{n-2}, \ i > j, \tag{2.2}$$

e $\{i_1, \ldots, i_{n-2}, i, j\} = \{1, \ldots, n\}$ geram P_n módulo $(P_n \cap Q)$. Agora, precisamos mostrar que esses elementos são linearmente independentes módulo $T(M)$. Para tal, suponhamos que

$$f = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} \alpha_{ij} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}[x_i, x_j] + \beta x_1 \cdots x_n \equiv 0 \ (\text{mod } P_n \cap T(M)).$$

Daí, fazendo $x_k = E_{11} + E_{22} + E_{33}$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, obtemos $\beta = 0$. Ademais, fixados i e j, fazendo $x_i = E_{12}$, $x_j = E_{23}$ e $x_k = E_{11} + E_{22} + E_{33}$, se k não pertence a $\{i, j\}$, obtemos $\alpha_{ij} = 0$, mostrando que os elementos em (2.2) são linearmente independentes módulo $P_n \cap T(M)$. Daí, como $P_n \cap Q \subseteq P_n \cap T(M)$ e

$$\dim \left(\frac{P_n}{P_n \cap T(M)} \right) \geq \dim \left(\frac{P_n}{P_n \cap Q} \right)$$

temos $P_n \cap T(M) = P_n \cap Q$. Como $\text{char}\mathbb{K} = 0$, obtemos $T(M) = Q$. Além disso, os elementos em (2.2) formam uma base para $P_n/(P_n \cap T(M))$. Logo, por contagem, temos

$$c_n(M) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(M)} = \frac{n(n-1)+2}{2}.$$

▲

Exemplo 2.8 Seja $G = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ o T-ideal de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado pela identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3]$. Então, $[x_1, x_2][x_2, x_3]$, $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in G$. De fato, temos que

$$[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]. \tag{2.3}$$

Daí, como $[x_1, x_2^2, x_3] \in G$, por (2.3), temos

$$[x_1, x_2^2, x_3] = [[x_1, x_2^2], x_3] = [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] =$$

$$= [[x_1, x_2]x_2, x_3] + [x_2[x_1, x_2], x_3] =$$

$$= [x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3] \in G$$

e assim $[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] \in G$. Mas,

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] =$$

$$= 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]] \in G.$$

Aquí, notemos que $[[x_2, x_3], [x_1, x_2]] = [x_2, x_3, [x_1, x_2]] \in G$. Logo, $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in G$. Linearizando, temos

$$[x_1, x_2 + x_2'][x_2 + x_2', x_3] - [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] \in G.$$

E assim,

$$([x_1, x_2] + [x_1, x_2'])([x_2, x_3] + [x_2', x_3]) - [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] =$$

$$= [x_1, x_3][x_2, x_3] + [x_1, x_2][x_2', x_3] + [x_1, x_2'][x_2, x_3] +$$

$$+ [x_1, x_2'][x_2', x_3] - [x_1, x_2][x_2, x_3] - [x_1, x_2'][x_2', x_3] =$$

$$= [x_1, x_2][x_2', x_3] + [x_1, x_2'][x_2, x_3] \in G.$$

Donde, renomeando as variáveis, obtemos $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in G$.

Sendo $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$ e E a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão finita, temos que o T-ideal $T(E)$ é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$. Ademais, $c_n(E) = 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Verifiquemos a primeira parte. Observemos que, pelo Exemplo 1.79, obtemos que $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T \subseteq T(E)$. Seja

$$w = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}] \in \mathbb{K}\langle X \rangle$$

um produto qualquer de comutadores. Assim, se $w \notin \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, então devemos ter

$$w = [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}].$$

Pela propriedade de anticomutatividade $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ e pelo Exemplo 2.8, módulo o T-ideal $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, podemos trocar as posições das variáveis em w. Em particular, se dois dos x_{i_p} e x_{i_q} forem iguais, obtemos que $w \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Logo, $B/(B \cap \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T)$ é gerado por

$$w = [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}], \ i_1 < i_2 < \ldots < i_{2k-1} < i_{2k}, \ k = 0, 1, \ldots$$

Agora, devemos mostrar que qualquer combinação linear não trivial desses elementos é diferente de zero em E, isto é, que tais elementos são L.I. módulo $T(E)$. Ora, como w é unicamente determinado pelo seu multigrau e $T(E)$ é homogêneo, temos que mostrar que w não é uma identidade polinomial para E. Mas,

$$[e_1, e_2] \ldots [e_{2k-1}, e_{2k}] = 2^k e_1, e_2 \ldots e_{2k-1} e_{2k} \neq 0$$

em E. O que mostra que $T(E)$ é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$. Para verificar a segunda parte, observe que obtemos anteriormente que $\Gamma_n(E)$ é gerado por

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}], \quad n = 2k,$$

e $\Gamma_n(E) = 0$ se n é ímpar. Assim, se $\varepsilon_n = 1$ para n par e $\varepsilon_n = 0$ para n ímpar, então podemos escrever

$$\gamma_n(E) = \dim \Gamma_n(E) = \varepsilon_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Agora, observemos que

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{e} \quad 0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k,$$

donde somando as duas igualdades e aplicando o Teorema 2.5, obtemos

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1 + (-1)^k) = 2c_n(E).$$

Portanto, $c_n(E) = 2^{n-1}$. ▲

Exemplo 2.9 Sendo $UT_2(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre o corpo $\mathbb{K}$, temos que $T(UT_2(\mathbb{K})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$. E ainda,

$$c_n(UT_2(\mathbb{K})) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

Realmente, observemos que dados $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{K})$, temos que

$$\begin{aligned} [a, b] &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 + a_2b_3 \\ 0 & a_3b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 + a_2b_2 \\ 0 & a_3b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 + a_2b_3 - a_2b_1 - a_3b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde, $[a, b][c, d] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mostrando que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$ é uma identidade polinomial para $UT_2(\mathbb{K})$. Agora, mostraremos que $T(UT_2(\mathbb{K})) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$ e calcularemos a sequência de codimensões de $UT_2(\mathbb{K})$ exibindo uma base para

$$\frac{P_n}{P_n \cap T(UT_2(\mathbb{K}))}.$$

Consideremos o conjunto dos polinômios do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m}[x_k, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-m-1}}] \tag{2.4}$$

onde, $\{i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_{n-m-1}, k\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $i_1 < \ldots < i_m$, $j_1 < \ldots < j_{n-m-1}$, $k > j_1$, $m \neq n-1$. Afirmamos que tais polinômios formam um conjunto gerador para o quociente $P_n/(P_n \cap Q)$ onde, $Q = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle^T$. De fato, dados

$$a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, x, y \in \mathbb{K}\langle X \rangle,$$

observe que

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(k)}[x, y] b_{\tau(1)} \cdots b_{\tau(m)} \equiv a_1 \cdots a_k [x, y] b_1 \cdots b_m \pmod{Q}$$

para $\sigma \in S_k$ e $\tau \in S_m$, e daí, módulo Q, qualquer polinômio multilinear pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k} [x_{j_1}, \cdots, x_{j_m}]$$

com $i_1 < \ldots < i_k$ e $m + k = n$. Desde que $[[a, b], [c, d]] = [a, b][c, d] - [c, d][a, b] \in Q$ para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{K}\langle X \rangle$, temos

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}, x_{j_{r+1}}, \ldots] \equiv [x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{r+1}}, x_{j_r}, \ldots] \pmod{Q},$$

o que mostra a afirmação. Nosso próximo passo será mostrar que os elementos como em (2.4) são linearmente independentes, módulo o T-ideal $T(UT_2(\mathbb{K}))$. Com efeito, consideremos

$$I = \{i_1, \ldots, i_m\}, \ J = \{j_1, \ldots, j_{n-m-1}\} \text{ e } X_{I,J,k} = x_{i_1} \cdots x_{i_m} [x_k, x_{j_1}, \ldots, x_{n-m-1}].$$

Suponha então uma combinação linear de elementos como em (2.4) igual a zero, módulo $T(UT_2(\mathbb{K}))$, ou seja,

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I,J,k} \alpha_{I,J,k} X_{I,J,k} \in T(UT_2(\mathbb{K}))$$

com $\alpha_{I,J,k} \in \mathbb{K}$. Devemos mostrar que todos os coeficientes $\alpha_{I,J,k}$ são iguais a zero. Para tal, substituamos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ pela matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, x_k pela matriz $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e todas as variáveis restantes pela matriz $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então $X_{I,J,k} = E_{12}$. Todos os outros $X_{I',J',k'}$ tais que $(I', J', k') \neq (\{x_{i_1} \cdots x_{i_m}\}, \{j_1, \ldots, j_{n-m-1}\}, k)$ resultam na matriz nula. Desta maneira, $f \equiv 0$ é uma identidade para $UT_2(\mathbb{K})$ apenas se todos os coeficientes $\alpha_{I,J,k}$ são iguais a zero. Mostramos então que, módulo $T(UT_2(\mathbb{K}))$, os elementos em (2.4) são linearmente independentes. Daí, como

$$Q \cap P_n \subseteq T(UT_2(\mathbb{K})) \cap P_n \subseteq P_n,$$

segue então que $T(UT_2(\mathbb{K})) = Q$ e os elementos em 2.4 formam uma base para

$$\frac{P_n}{P_n \cap T(UT_2(\mathbb{K}))}.$$

Agora, para um número m fixado, com $0 \leq m \leq n-2$ contaremos os elementos da forma (2.4). A quantidade deles com a n-ésima codimensão $c_n(UT_2(\mathbb{K}))$, será igual a

$$\binom{n}{m}(n-m-1) = \binom{n}{n-m}(n-m-1).$$

Se $m = n$, teremos apenas um monômio, que deverá ser $x_1 x_2 \cdots x_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
c_n(UT_2(\mathbb{K})) &= \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j}(j-1) + 1 \\
&= \sum_{j=2}^{n} j\binom{n}{j} - \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} + 1 \\
&= n2^{n-1} - \binom{n}{1} - 2^n + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} + 1 \\
&= n2^{n-1} - 2^n + 2 \\
&= 2^{n-1}(n-2) + 2.
\end{aligned}$$

▲

2.2 Crescimento de codimensões

Nesta seção apresentaremos um dos principais resultados desta dissertação. Mostraremos que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A, para um corpo de característica qualquer, é exponencialmente limitada. Regev obteve em [18] a seguinte estimativa para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra que satisfaça uma identidade de grau d: $c_n \leq (3 \cdot 4^{d-3})^n$. Porém, uma melhor estimativa foi feita por Klein e Regev em [14], onde eles mostram que $c_n \leq [3(d^2 - 7d + 16)]^n$. Ainda em 1972, Latyshev [16], além de apresentar uma demonstração mais simples para o Teorema de Regev (limitação exponencial de codimensões), mostrou que $c_n \leq \frac{1}{(d-1)!} \cdot (d-1)^{2n}$. Com essas estimativas, foi provado que o produto tensorial de duas PI-álgebras é ainda uma PI-álgebra, fato que pode servir de base para mostrar muitos outros resultados de existência de identidades polinomiais na PI-Teoria. A demonstração aqui apresentada baseia-se na demostração feita por Latyshev em [16], e pode ser encontrado em [8], capítulo 4.

Antes, vejamos alguns conceitos acerca de conjuntos parcialmente ordenados e algumas propriedades combinatórias do grupo S_n.

Definição 2.10 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Definimos uma* <u>*cadeia*</u> *em P como sendo um subconjunto $C \subseteq P$ tal que quaisquer dois elementos de C*

são comparáveis segundo a relação de ordem definida para os elementos de P. Uma anticadeia em P é um subconjunto C' de P no qual quaisquer dois elementos distintos são não comparáveis sob a relação de ordem de P.

Recordemos ainda que um elemento $u \in P$ é dito minimal se

$$x \preceq u \quad \Rightarrow \quad x = u, \quad \forall x \in P,$$

onde "$\preceq$" denota a relação de ordem de P. Analogamente define-se elemento maximal.

Um resultado importante a ser citado é o seguinte.

Lema 2.11 (Dilworth) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado. O número mínimo de cadeias disjuntas tais que a reunião delas é igual a P é também o número máximo de elementos numa anticadeia.*

Prova. Veja [10], Lema 7.2.1, página 81. ■

Consideremos um número natural $2 \leq d \leq n$.

Definição 2.12 *Dizemos que uma permutação $\sigma \in S_n$ é d-ruim se existe uma cadeia com d elementos $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$ tais que $\sigma(i_1) > \sigma(i_2) > \cdots > \sigma(i_d)$. Caso contrário, dizemos que σ é uma permutação d-boa.*

Para melhor entendermos, uma permutação $\sigma \in S_n$ será dita d-boa se para qualquer cadeia com d elementos $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$, existir um par $k, l \in \{1, 2, \ldots, d\}$, com $k < l$, tais que $\sigma(i_k) < \sigma(i_l)$.

Observemos que se uma permutação σ é d-ruim, então será $(d-j)$-ruim para $j = 1, \ldots, d-2$. Desta forma, denotaremos por $d(\sigma)$ o maior inteiro d tal que σ é uma permutação d-ruim.

Exemplo 2.13 Sejam $n = 6$ e

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Então, $d(\sigma) = 4$, pois $1 < 2 < 3 < 5$ e $\sigma(1) > \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(5)$. Ademais, σ é uma permutação 5-boa e também 6-boa. ▲

Agora, caminharemos no sentido de encontrar um limite para o número de permutações d-boas no grupo simétrico S_n.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Lema 2.14 *Se $\sigma \in S_n$ é uma permutação d-boa, então existe $k \leq d-1$ tal que o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ pode ser decomposto como uma união disjunta*

$$\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$$

tal que para cada $j = 1, \ldots, k$ e cada par $a, b \in I_j$, com $a < b$, tem-se $\sigma(a) < \sigma(b)$.

Prova. Definamos em $\{1, \ldots, n\}$ uma relação de ordem parcial "$\ll$" por

$$x \ll y \Leftrightarrow x < y \ \text{ e } \ \sigma(x) < \sigma(y).$$

Sendo σ uma permutação d-boa, então para qualquer subconjunto $\{x_1, \ldots, x_d\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ com d elementos existe pelo menos um par x_i, x_j de elementos comparáveis, isto é, $x_i \ll x_j$. Desta forma, observe que o número máximo de elementos numa anticadeia é menor ou igual a $d-1$. Pelo Lema 2.11, o conjunto parcialmente ordenado $\{1, \ldots, n\}$ pode ser decomposto em uma união disjunta de até $d-1$ cadeias, ou seja,

$$\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup \ldots \cup I_k,$$

com $k \leq d-1$ e de modo que cada I_j, $j = 1, \ldots, k$ possui a ordenação $\ll$, ou seja, para quaisquer $a, b \in I_j$ com $a < b$ tem-se $\sigma(a) < \sigma(b)$. ■

Vamos agora apresentar um limite superior para o número de permutações d-boas em S_n. Observemos primeiramente que o número de possibilidades de decompor o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ em união disjunta de k subconjuntos, com $k \leq d-1$ arbitrário, é menor ou igual a $(d-1)^n$.

Lema 2.15 *O número máximo de permutações d-boas em S_n não excede $(d-1)^{2n}$.*

Prova. Fixemos uma decomposição $\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$, $k \leq d-1$ e $I_1, \ldots, I_k$ dois a dois disjuntos. Desta maneira, estimaremos o número de permutações σ que preservam a ordem natural dos números inteiros em cada conjunto I_j, $j = 1, \ldots, k$. Consideremos os conjuntos das imagens de cada I_j pela permutação σ, $L_1 = \sigma(I_1), \ldots, L_k = \sigma(I_k)$. Pela bijetividade de uma permutação, temos que $\{1, \ldots, n\} = L_1 \cup \ldots \cup L_k$ e assumindo a propriedade definida no lema anterior, $\sigma(1) \in \{x_1, \ldots, x_k\}$, onde $x_j = \min\{a : a \in L_j\}$. Pelo mesmo argumento, denotando $L'_j = L_j - \{\sigma(1)\}$, $j = 1, \ldots, k$, temos que $\sigma(2) \in \{y_1, \ldots, y_k\}$, onde $y_j = \min\{a : a \in L'_j\}$. Continuando com essa lógica, podemos concluir que o número de permutações que preservam a ordem em cada I_j é limitado por $k^n \leq (d-1)^n$. Juntando agora o Lema 2.14, a observação anterior e a estimativa que acabamos de fazer, temos o resultado. ■

Agora, utilizaremos a noção de permutação d-boa para conseguir uma limitação para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra. Visto que, podemos identificar uma permutação $\sigma \in S_n$ ao monômio $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \in P_n$, diremos então que um monômio é d-bom (respectivamente, d-ruim) se está associado a uma permutação $\sigma \in S_n$ que é d-boa (respectivamente, d-ruim). Dada essa correspondência, podemos ver o seguinte teorema.

Teorema 2.16 *Se a PI-álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Prova. Pelo processo de linearização de identidades polinomiais, podemos assumir que a álgebra A satisfaz a seguinte identidade de grau d

$$x_1 \cdots x_d - \sum_{\substack{\sigma \in S_d \\ \sigma \neq \mathrm{Id}}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)} \equiv 0. \tag{2.5}$$

Afirmamos que o espaço dos polinômios multilineares P_n é gerado, módulo $P_n \cap T(A)$, pelos monômios d-bons $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$. Com efeito, suponha que isso não aconteça. Considere então $f = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ como sendo o menor monômio, pela ordem lexicográfica, que não pode ser escrito como uma combinação linear de monômios d-bons. Uma particularidade dessa escolha é que a permutação

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

é d-ruim. Assim, existem d números $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$ tais que $\rho(j_1) > \cdots > \rho(j_d)$. Consideremos os seguintes monômios

$$\begin{aligned} a_0 &= x_{i_1} \cdots x_{\rho(j_1 - 1)} \\ a_1 &= x_{\rho(j_1)} \cdots x_{\rho(j_2 - 1)} \\ &\vdots \\ a_d &= x_{\rho(j_d)} \cdots x_{i_n}. \end{aligned}$$

Observemos que, pela ordem lexicográfica, temos $a_1 > \cdots > a_d$. Ademais,

$$a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(d)} < a_0 a_1 \cdots a_d = x_{i_1} \cdots x_{\rho(j_1-1)} x_{\rho(j_1)} \cdots x_{\rho(j_2-1)} \cdots x_{\rho(j_d)} \cdots x_{i_n} = f$$

para qualquer permutação $\sigma \in S_d$, $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Daí, pela minimalidade estabelecida para o monômio f, devemos ter que qualquer monômio $a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(d)}$ com σ diferente da identidade de S_d é uma combinação linear, módulo $P_n \cap T(A)$, de monômios d-bons $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$. Mas, substituindo x_i por a_i em (2.5) e multiplicando por a_0 temos

$$f = \sum_{\substack{\sigma \in S_d \\ \sigma \neq \mathrm{Id}}} \alpha_\sigma a_0 a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(d)} \pmod{P_n \cap T(A)},$$

isto é, f pode ser escrito como uma combinação linear, módulo $P_n \cap T(A)$, de monômios d-bons, uma contradição. Portanto, fica provado que P_n é gerado, módulo $P_n \cap T(A)$, por monômios d-bons. Com isso, $c_n(A)$ é menor ou igual ao número máximo de monômios d-bons em S_n, o qual, pela identificação feita, é igual ao número máximo de permutações d-boas em S_n. Logo, pelo Lema 2.15, temos $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$. ■

Como uma aplicação do teorema acima mostraremos que o produto tensorial de duas PI-álgebras é ainda uma PI-álgebra. Antes, mostraremos o seguinte resultado devido a Regev [18].

Teorema 2.17 *Sejam A e B duas PI-álgebras sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então, $c_n(A \otimes B) \leq c_n(A)c_n(B)$, para todo $n \geq 1$.*

Prova. Primeiramente, consideremos $\overline{A} = \mathbb{K}\langle X \rangle / T(A)$ e $\overline{B} = \mathbb{K}\langle X \rangle / T(B)$, e denotemos $u_i = \overline{x}_i \in \overline{A}$ e $v_i = \overline{x}_i \in \overline{B}$. Fixado $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, tomemos $p = c_n(A)$ e $q = c_n(B)$, temos que

$$\frac{P_n}{P_n \cap T(A)} \simeq \frac{P_n + T(A)}{T(A)} \subseteq \overline{A}$$

e

$$\frac{P_n}{P_n \cap T(B)} \simeq \frac{P_n + T(B)}{T(B)} \subseteq \overline{B}.$$

Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ é tal que $f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = 0$ em $\overline{A} \otimes \overline{B}$, então $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A \otimes B)$. De fato, dados $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$, considere $\varphi : \mathbb{K}\langle X \rangle \longrightarrow A$ e $\psi : \mathbb{K}\langle X \rangle \longrightarrow B$ homomorfismos de álgebras tais que $\varphi(x_i) = a_i$ e $\psi(x_i) = b_i$. Como $T(A) \subseteq \ker \varphi$ e $T(B) \subseteq \ker \psi$, existem homomorfismos $\overline{\varphi} : \overline{A} \longrightarrow A$ e $\overline{\psi} : \overline{B} \longrightarrow B$ com

$\overline{\varphi}(u_i) = a_i$ e $\overline{\psi}(v_i) = b_i$. Pela Propriedade Universal do Produto Tensorial(Teorema 1.16), existe um homomorfismo de álgebras $\theta : \overline{A} \otimes \overline{B} :\longrightarrow A \otimes B$ tal que $\theta(u_i \otimes v_i) = a_i \otimes b_i$, e assim

$$0 = \theta(f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n)) = f(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n).$$

Como f é multilinear e os tensores geram $A \otimes B$ (como espaço vetorial), temos que $f \in T(A \otimes B)$. Observe que se $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, então

Daí,

$$f(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) \in \left(\frac{P_n + T(A)}{T(A)}\right) \otimes \left(\frac{P_n + T(B)}{T(B)}\right),$$

cuja dimensão é $pq = c_n(A)c_n(B)$. Se $f_1, \ldots, f_{pq}, f_{pq+1} \in P_n$, então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{pq}, \alpha_{pq+1} \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{pq} f_{pq} + \alpha_{pq+1} f_{pq+1})(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) = 0,$$

pois

$$f_i(u_1 \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_n) \in \left(\frac{P_n + T(A)}{T(A)}\right) \otimes \left(\frac{P_n + T(B)}{T(B)}\right).$$

Assim, $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{pq} f_{pq} + \alpha_{pq+1} f_{pq+1} \in T(A \otimes B)$. Logo, $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_{pq}, \overline{f}_{pq+1}$ são L.D. em $P_n/(P_n \cap T(A \otimes B))$ e daí

$$\dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A \otimes B)} \leq pq,$$

ou seja $c_n(A \otimes B) \leq pq$. ■

Como uma consequência do teorema acima, obtemos

Teorema 2.18 (Regev) *Se A e B são duas PI-álgebras, então o produto tensorial $A \otimes B$ é também uma PI-álgebra.*

Prova. Suponhamos que A satisfaça uma identidade polinomial de grau s e B, do mesmo modo, uma identidade de grau r. Pelo Teorema 2.16, temos que $c_n(A) \leq (s-1)^{2n}$ e $c_n(B) \leq (r-1)^{2n}$ para todo $n \geq 1$. Daí, $c_n(A) \leq d^n$ e $c_n(B) \leq l^n$ para todo $n \geq 1$, onde estamos escrevendo $d = (s-1)^2$ e $l = (r-1)^2$. Então, pelo teorema acima,

$$c_n(A \otimes B) \leq c_n(A)c_n(B) \leq (dl)^n,$$

para todo $n \geq 1$. Dai, observemos que, para valores suficientemente grandes de n se verifica $(dl)^n < n!$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_m(A \otimes B) \leq (dl)^m < m!,$$

isto é, $A \otimes B$ satisfaz uma identidade polinomial não-trivial multilinear de grau m, mostrando que $A \otimes B$ é uma PI-álgebra. ■

Capítulo 3

O Produto de Kronecker de S_n-caracteres

Neste capítulo introduziremos o Produto de Kronecker de S_n-caracteres. Olhando para a altura de dois caracteres envolvidos no produto citado, estudaremos a altura do produto de Kronecker. Como uma importante aplicação, provaremos que se A e B são duas PI-álgebras que satisfazem algum polinômio de Capelli, então o produto tensorial $A \otimes B$ também satisfaz. Em todo este capítulo, $\mathbb{K}$ será um corpo de característica 0.

3.1 O Produto de Kronecker

Lembremos que um S_n-caracter χ pode ser escrito como uma combinação linear de S_n-caracteres irredutíveis

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Definimos a altura de um S_n-caracter irredutível χ_λ, onde $\lambda \vdash n$, como sendo a altura da partição λ, isto é, $h(\chi_\lambda) = h(\lambda)$. Desta forma, definiremos a altura do S_n-caracter χ como sendo

$$h(\chi) = \max\{h(\lambda); \lambda \vdash n, \quad m_\lambda \neq 0\}.$$

Sendo

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \quad \text{e} \quad \Psi = \sum_{\lambda \vdash n} m'_\lambda \chi_\lambda$$

dois S_n-caracteres, dizemos que $\chi \leq \Psi$ quando $m_\lambda \leq m'_\lambda$ para toda partição $\lambda \vdash n$. Observe que neste caso, o grau de χ é menor ou igual ao grau de Ψ, e também $h(\chi) \leq h(\Psi)$.

Considere M um S_n-módulo (com $\dim_{\mathbb{K}} M$ finita) e M_1 um submódulo de M. Como char$\mathbb{K} = 0$ existe M_2 submódulo de M tal que $M = M_1 \oplus M_2$ e daí

$$\chi_M = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}.$$

Segue então que $\chi_{M_1} \leq \chi_{M_2}$.

Definição 3.1 *Sejam M e N S_n-módulos (sobre $\mathbb{K}$) e $\chi = \chi_M$ e $\Psi = \Psi_N$ seus S_n-caracteres. Então o caracter $\chi \otimes \Psi$, chamado de produto de Kronecker de χ e Ψ, é o caracter do S_n-módulo $M \otimes N$, cuja estrutura é definida por $\sigma \cdot (m \otimes n) = (\sigma \cdot m) \otimes (\sigma \cdot n)$, $\sigma \in S_n$, $m \in M$ e $n \in N$.*

Da definição acima, sendo

$$\chi = \sum_{\lambda_1 \vdash n} m_{\lambda_1} \chi_{\lambda_1} \quad \text{e} \quad \Psi = \sum_{\lambda_2 \vdash n} m'_{\lambda_2} \chi_{\lambda_2}$$

dois S_n-caracteres, das propriedades do produto tensorial, vale

$$\chi \otimes \Psi = \left(\sum_{\lambda_1 \vdash n} m_{\lambda_1} \chi_{\lambda_1} \right) \otimes \left(\sum_{\lambda_2 \vdash n} m'_{\lambda_2} \chi_{\lambda_2} \right) = \sum_{\lambda_1,\ \lambda_2 \vdash n} m_{\lambda_1} m'_{\lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}). \tag{3.1}$$

Como $\dim_{\mathbb{K}}(M \otimes N) = \dim_{\mathbb{K}} M \cdot \dim_{\mathbb{K}} N$, temos que o grau de $\chi \otimes \Psi$ é o produto dos graus de χ e Ψ.

Dadas A e B PI-álgebras, definiremos

$$T = \{a \otimes b; a \in A, b \in B\} \subseteq A \otimes B$$

e $T^n = \underbrace{T \times \cdots \times T}_{n \text{ vezes}}$.

Lema 3.2 *O polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ é uma identidade para a álgebra $A \otimes B$ se, e somente se, $f(t_1, \ldots, t_n) = 0$ para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Imediato!

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $f(t_1, \ldots, t_n) = 0$ para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$. Ora, como f é multilinear e T gera $A \otimes B$ (como espaço vetorial), pela Observação 1.78, f é uma identidade para $A \otimes B$. ∎

Lema 3.3 *Sejam $\sigma, \eta \in S_n$. Se a_j, $a'_j \in A$, b_j, $b'_j \in B$ e $a_j \otimes b_j = a'_j \otimes b'_j$ para todo $j \in \{1, \ldots n\}$, então $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes b_{\eta(1)} \cdots b_{\eta(n)} = a'_{\sigma(1)} \cdots a'_{\sigma(n)} \otimes b'_{\eta(1)} \cdots b'_{\eta(n)}$.*

Prova: Para $n \in \mathbb{N}$ escreveremos $A^{\otimes n} = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ vezes}}$. Dada $\sigma \in S_n$, consideremos a automorfismo $\varphi_\sigma : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes n}$ dado por $\varphi_\sigma(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}$. De maneira análoga, para $\eta \in S_n$ defina o automorfismo $\psi_\eta : B^{\otimes n} \longrightarrow B^{\otimes n}$ dado por $\varphi_\eta(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = b_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes b_{\eta(n)}$. De φ_σ e ψ_η temos induzido o automorfismo

$$\varphi_{\sigma,\eta} = \varphi_\sigma \otimes \psi_\eta : A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes n},$$

que satisfaz $\varphi_{\sigma,\eta}(v \otimes w) = \varphi_\sigma(v) \otimes \Psi_\eta(w)$, para $v \in A^{\otimes n}$ e $w \in B^{\otimes n}$. Temos que a aplicação linear $f : A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes n} \longrightarrow (A \otimes B)^{\otimes n}$ que satisfaz

$$f((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_n)) = (a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2) \otimes \cdots \otimes (a_n \otimes b_n)$$

é um isomorfismo. Logo, podemos identificar $A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes n} \equiv (A \otimes B)^{\otimes n}$. Considerando a aplicação linear $\pi : A^{\otimes n} \otimes B^{\otimes n} \longrightarrow A \otimes B$ tal que $\pi((a_1 \otimes b_1) \otimes \cdots \otimes (a_n \otimes b_n)) = a_1 \cdots a_n \otimes b_1 \cdots b_n$. Daí,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes b_{\eta(1)} \cdots b_{\eta(n)} &= \pi f \varphi_{\sigma,\eta} f^{-1}((a_1 \otimes b_1) \otimes \cdots \otimes (a_n \otimes b_n)) \\ &= \pi f \varphi_{\sigma,\eta} f^{-1}((a'_1 \otimes b'_1) \otimes \cdots \otimes (a'_n \otimes b'_n)) \\ &= a'_{\sigma(1)} \cdots a'_{\sigma(n)} \otimes b'_{\eta(1)} \cdots b'_{\eta(n)}. \end{aligned}$$

■

Imediatamente, teremos

Corolário 3.4 *Sejam $\sigma, \eta \in S_n$. A aplicação $\Psi_{\sigma,\eta} : T^n \longrightarrow A \otimes B$, dada por*

$$\Psi_{\sigma,\eta}(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) = a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes b_{\eta(1)} \cdots b_{\eta(n)},$$

está bem definida.

Lema 3.5 *A aplicação $\phi : (P_n \otimes P_n) \times T^n \longrightarrow A \otimes B$, dada por*

$$\begin{aligned} \phi(f \otimes g, (a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n)) &= (f \otimes g)(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) \\ &= f(a_1, \ldots, a_n) \otimes g(b_1, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

está bem definida.

Prova: Como estabelecemos anteriormente, podemos escrever

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \equiv \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \; x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

o qual será visto como uma função polinomial. Considere o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathfrak{F}$ de todas as funções $h : T^n \longrightarrow A \otimes B$ (cujas operações são a soma e o produto por escalar definidos ponto a ponto). Dadas $\sigma, \eta \in S_n$, temos que $\Psi_{\sigma,\eta} \in \mathfrak{F}$. Considere agora a aplicação de $F : P_n \times P_n \longrightarrow \mathfrak{F}$ definida por

$$F\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma, \sum_{\eta \in S_n} \beta_\eta \eta\right) = \sum_{\sigma,\eta \in S_n} \alpha_\sigma \beta_\eta \Psi_{\sigma,\eta}.$$

Não é difícil verificar que F é bilinear. Daí, pela Propriedade Universal, existe uma única transformação linear $G : P_n \otimes P_n \longrightarrow \mathfrak{F}$ tal que

$$G\left(\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right) \otimes \left(\sum_{\eta \in S_n} \beta_\eta \eta\right)\right) = \sum_{\sigma,\eta \in S_n} \alpha_\sigma \beta_\eta \Psi_{\sigma,\eta}.$$

G é uma aplicação bem definida de $P_n \otimes P_n$ em e a partir dela obtemos a aplicação ϕ desejada, bastando tomar

$$\phi(f \otimes g, (a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n)) = G(f \otimes g)(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n).$$

■

Seja $\overline{P_n} = \langle \sigma \otimes \sigma; \sigma \in S_n \rangle$ subespaço de $P_n \otimes P_n$ e considere a aplicação linear $H : P_n \longrightarrow \overline{P_n}$ que satisfaz $H(\sigma) = \sigma \otimes \sigma = \overline{\sigma}$. Observe que H é um isomorfismo. Daí, a ação definida por

$$\sigma(f \otimes g) \overset{H}{=} \overline{\sigma}(f \otimes g) = (\sigma \otimes \sigma)(f \otimes g) = \sigma f \otimes \sigma g$$

faz de $P_n \otimes P_n$ um $\mathbb{K}S_n$-módulo. Como vimos, se $M, N \subseteq \mathbb{K}S_n$ são ideais à esquerda com S_n-caracteres χ_M e χ_N, então $M \otimes N$ é um P_n-módulo com caracter $\chi_{M \otimes N} = \chi_M \otimes \chi_N$ (Produto de Kronecker). Ademais, devido ao isomorfismo H a ação de P_n em T^n, definida por $\sigma(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) = a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \otimes b_{\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(n)}$ coincide com a ação de $\overline{P_n}$, como uma subálgebra de $P_n \otimes P_n$, em T_n.

Sejam A e B PI-álgebras. Pelo Teorema de Maschke, temos que

$$P_n = (P_n \cap T(A)) \oplus J_n$$

para algum ideal J_n. Analogamente, temos $P_n = (P_n \cap T(B)) \oplus K_n$ e $P_n = (P_n \cap T(A \otimes B)) \oplus L_n$.

Teorema 3.6 *O S_n-módulo L_n é isomorfo à um submódulo de $J_n \otimes K_n$.*

Prova: Consideremos

$$\begin{aligned} I'_n &= I'_n(A \otimes B) \\ &= \{\theta \in P_n \otimes P_n; \theta(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) = 0,\ \forall (a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) \in T^n\}. \end{aligned}$$

Note que I'_n é um S_n-módulo e também um ideal de $P_n \otimes P_n$. E ainda, é fácil ver que como P_n e $\overline{P_n}$ são isomorfos, podemos então induzir um isomorfismo entre $P_n = (T(A \otimes B) \cap P_n) \oplus L_n$ e $\overline{T(A \otimes B) \cap P_n} \oplus \overline{L_n}$. Daí, pelo Lema 3.2, temos que $I'_n \cap \overline{L_n} = \{0\}$, pois se $f \otimes g \in I'_n \cap \overline{L_n}$, deveríamos ter $(f \otimes g)(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) = 0$ para todo $(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) \in T^n$ e $f = g$, donde $f \otimes g \in \overline{T(A \otimes B) \cap P_n}$, o que contradiz a soma direta. Ademais, $\overline{L_n}$ é também um submódulo de $P_n \otimes P_n$. Como a dimensão de P_n é finita, podemos tomar $M'_n \subseteq P_n \otimes P_n$ submódulo maximal no conjunto

$$\left\{N \quad S_n\text{-submódulo de } P_n \otimes P_n; N \supseteq \overline{L_n},\ N \cap I'_n = \{0\}\right\}.$$

Daí, como estamos em característica zero, e consequentemente $P_n \otimes P_n$ é completamente redutível, temos $P_n \otimes P_n = I'_n \oplus M'_n$, pois se fosse $P_n \otimes P_n = I'_n \oplus M'_n \oplus C$, com $C \neq \{0\}$, teríamos que o submódulo $M'_n \oplus C$ conteria $\overline{L_n}$ e ainda $(M'_n \oplus C) \cap I'_n = \{0\}$, contradizendo a maximalidade de M'_n. Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_n \otimes P_n &= [(P_n \cap T(A)) \oplus J_n] \otimes [(P_n \cap T(B)) \oplus K_n] \\ &= [(P_n \cap T(A)) \otimes (P_n \cap T(B))] \oplus [J_n \otimes (P_n \cap T(B))] \\ &\oplus [(P_n \cap T(A)) \otimes K_n] \oplus [J_n \otimes K_n] \\ &= I''_n \oplus M''_n\ , \end{aligned}$$

onde $I''_n = [(P_n \cap T(A)) \otimes (P_n \cap T(B))] \oplus [J_n \otimes (P_n \cap T(B))] \oplus [(P_n \cap T(A)) \otimes K_n]$ e $M''_n = J_n \otimes K_n$. Temos que $I''_n \subseteq I'_n$. Daí, pelo Teorema de Maschke, devemos ter $I'_n = I''_n \oplus \widetilde{M}_n$. Logo, $P_n \otimes P_n = I'_n \oplus M'_n = I''_n \oplus \widetilde{M}_n \oplus M'_n$. Mas, $P_n \otimes P_n = I''_n \oplus M''_n$, donde devemos ter $\widetilde{M}_n \oplus M'_n$ e M''_n isomorfos. Portanto, $L_n \simeq \overline{L}_n \subseteq M'_n$ é isomorfo a um submódulo de $M''_n = J_n \otimes K_n$, o que encerra a demonstração. ∎

Teorema 3.7 *Sejam $\chi_n(A)$, $\chi_n(B)$ e $\chi_n(A \otimes B)$ os n-ésimos cocaracteres das PI-álgebras A, B e $A \otimes B$, respectivamente, com codimensões $c_n(A)$, $c_n(B)$ e $c_n(A \otimes B)$. Então,*

$$\chi_n(A \otimes B) \leq \chi_n(A) \otimes \chi_n(B) \quad \text{(Produto de Kronecker)}.$$

Em particular, $c_n(A \otimes B) \leq c_n(A) \cdot c_n(B)$.

Prova. Com a mesma notação do Teorema 3.6, observemos que

$$\frac{P_n}{P_n \cap T(A)} \simeq J_n, \quad \frac{P_n}{P_n \cap T(B)} \simeq K_n \quad \text{e} \quad \frac{P_n}{P_n \cap T(A \otimes B)} \simeq L_n.$$

Donde, $\chi_n(A) = \chi_{J_n}$, $\chi_n(B) = \chi_{K_n}$ e $\chi_n(A \otimes B) = \chi_{L_n}$. Como L_n é isomorfo a um submódulo de $J_n \otimes K_n$, temos $\chi_{L_n} \leq \chi_{J_n} \otimes \chi_{K_n}$, e assim

$$\chi_n(A \otimes B) = \chi_{L_n} \leq \chi_{J_n \otimes K_n} = \chi_{J_n} \otimes \chi_{K_n} = c_n(A) \cdot c_n(B).$$

■

A partir desse ponto, caminhemos para mostrar que $h(\chi \otimes \Psi) \leq h(\chi) \cdot h(\Psi)$ para quaisquer dois S_n-caracteres χ e Ψ.

O grupo S_n age sobre $V^{\otimes n}$ pela esquerda permutando as entradas dos tensores e a representação correspondente é $\varphi : \mathbb{K}S_n \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n})$, dada por

$$\varphi_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)},$$

onde $\sigma \in S_n$ e $\varphi_\sigma = \varphi(\sigma)$. Um importante resultado acerca da aplicação definida acima é o seguinte.

Teorema 3.8 (Weyl) *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então*

$$\ker \varphi = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) > \dim V}} J_\lambda \quad e \quad \varphi(\mathbb{K}S_n) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq \dim V}} J_\lambda.$$

Prova. Veja [25], página 127. ■

Observemos que φ põe em $V^{\otimes n}$ uma estrutura de $\mathbb{K}S_n$-módulo. A ação de $\mathbb{K}S_n$ em $V^{\otimes n}$ induzida por φ será chamada de <u>ação canônica</u>. E ainda, φ induz uma ação de $\mathbb{K}S_n$ em $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ pondo, para cada $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{K}S_n \times \mathrm{End}(V^{\otimes n})$, o endomorfismo $\alpha \cdot \gamma = \varphi(\alpha) \circ \gamma \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$. Consequentemente $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ tem uma estrutura de $\mathbb{K}S_n$-módulo.

Corolário 3.9 *Sejam $M \subseteq V^{\otimes n}$ um $\mathbb{K}S_n$-submódulo e $\lambda \vdash n$. Se $J_\lambda \cdot M \neq 0$, então $h(\lambda) \leq \dim V$.*

Prova. Pelo Teorema 3.8, temos que $J_\lambda \nsubseteq \ker \varphi$. Daí, devemos ter $h(\lambda) \leq \dim V$. ∎

Lema 3.10 *Considere a estrutura de S_n-módulo em $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$, definida acima, e $J \subseteq$ End($V^{\otimes n}$) um $\mathbb{K}S_n$-submódulo irredutível. Se J é isomorfo a M_λ como $\mathbb{K}S_n$- módulo, então $h(\lambda) \leq \dim V$.*

Prova: Suponhamos que $M = J \cdot V^{\otimes n} \subseteq V^{\otimes n}$ seja um $\mathbb{K}S_n$-submódulo de $V^{\otimes n}$ determinado pela ação canônica. Sejam agora I_λ um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{K}S_n$ isomorfo a M_λ (como S_n-módulo) e $\Psi : J \longrightarrow I_\lambda$ um isomorfismo. Sabemos que I_λ possui elemento idempotente $0 \neq e = e^2$. Considere então um elemento $e' \in J$ que satisfaça $\Psi(e') = e$. Como Ψ é uma aplicação bijetiva e

$$\Psi(ee') = e\Psi(e') = e^2 = e = \Psi(e'),$$

segue que $ee' = e'$. Daí, $I_\lambda M = I_\lambda J V^{\otimes n} \supseteq e'V^{\otimes n} \neq 0$, pois e' é um endomorfismo não nulo. Logo, pelo Corolário 3.9, temos que $h(\lambda) \leq \mathrm{dim}V$. ∎

No próximo resultado, estabeleceremos uma relação entre as alturas do produto de Kronecker e dos caracteres envolvidos.

Teorema 3.11 *Se χ_1 e χ_2 são dois S_n-caracteres, então*

$$h(\chi_1 \otimes \chi_2) \leq h(\chi_1) \cdot h(\chi_2).$$

Prova: Como todo S_n-caracter pode ser escrito como uma soma de S_n-caracteres irredutíveis, podemos supor, sem perda de generalidade, que χ_1 e χ_2 sejam S_n-caracteres irredutíveis. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ as partições associadas, respectivamente, aos caracteres irredutíveis χ_1 e χ_2. Consideremos então dois espaços vetoriais V_1 e V_2 tais que $\mathrm{dim}V_1 = h(\lambda_1)$ e $\mathrm{dim}V_2 = h(\lambda_2)$. A ação canônica induz os homomorfismos $\varphi_i : \mathbb{K}S_n \longrightarrow \mathrm{End}(V_i^{\otimes n})$, para $i = 1, 2$; daí pelo Teorema 3.8 a restrição de φ_i a J_{λ_i} é um monomorfismo de álgebras. Seja $I_{\lambda_i} \subseteq J_{\lambda_i}$ um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{K}S_n$ e escrevamos $I_i = \varphi_i(I_{\lambda_i})$, donde I_i e I_{λ_i} são isomorfos como álgebras e como $\mathbb{K}S_n$-módulos pela ação canônica. Considere agora $W = V_1 \otimes V_2$ e identifiquemos $W^{\otimes n} \equiv V_1^{\otimes n} \otimes V_2^{\otimes n}$.

Desta forma podemos identificar $I_1 \otimes I_2$ como uma subálgebra de $\mathrm{End}(W^{\otimes n})$, donde, subentendido isso, podemos escrever $I_1 \otimes I_2 \subseteq \mathrm{End}(W^{\otimes n})$. Consideremos, para cada $i = 1, 2$, a segunte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \xi_i : & (\mathrm{End}V_i)^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V_i^{\otimes n}) \\ & \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n & \longmapsto & \xi_i(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = \varphi \end{array},$$

onde $\varphi : V_i^{\otimes n} \longrightarrow V_i^{\otimes n}$ satisfaz $\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \varphi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(v_n)$, para cada $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_i^{\otimes n}$. Não é difícil ver que ξ_i é um isomorfismo para $i = 1, 2$. Sejam $a_1 = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \in (\mathrm{End}V_1)^{\otimes n}$, $a_2 = S_1 \otimes \cdots \otimes S_n \in (\mathrm{End}V_2)^{\otimes n}$ e $\sigma \in S_n$. Considere $w = (u_1 \otimes v_1) \otimes \cdots \otimes (u_n \otimes v_n) \in W^{\otimes n}$. Levando em conta a aplicação f da demonstração de Lema 3.3, podemos fazer a seguinte identificação

$$w = (u_1 \otimes v_1) \otimes \cdots \otimes (u_n \otimes v_n) \equiv (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

É fácil verificar que $\sigma(a_1 \otimes a_2)(w) = (\sigma a_1 \otimes \sigma a_2)(w)$. Donde, $\sigma(a_1 \otimes a_2) = \sigma a_1 \otimes \sigma a_2$. Em particular, podemos concluir que $I_1 \otimes I_2$ é um $\mathbb{K}S_n$-módulo, cujo S_n-caracter é $\chi_1 \otimes \chi_2$. Aplicando o Lema 3.10 aos $\mathbb{K}S_n$-submódulos irredutíveis de $I_1 \otimes I_2$ e usando a definição de altura segue que

$$h(\chi_1 \otimes \chi_2) \leq \mathrm{dim}W = \mathrm{dim}V_1 \cdot \mathrm{dim}V_2 = h(\lambda_1) \cdot h(\lambda_2).$$

■

Faremos agora uma aplicação bastante relevante do estudo desenvolvido neste capítulo. Mostraremos que se duas PI-álgebras A e B satisfazem polinômios de Capelli (ver Exemplo 1.68), determina-se um outro polinômio de Capelli que é identidade para a álgebra $A \otimes B$.

Teorema 3.12 *O polinômio de Capelli $d_m[x, y]$ é uma identidade polinomial para uma $\mathbb{K}$-álgebra A se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $h(\chi_n(A)) < m$.*

Prova. Veja [21], Teorema 2, página 150. ■

Teorema 3.13 *Sejam A e B PI-álgebras que satisfazem as identidades $d_{k+1}[x, y]$ e $d_{l+1}[x, y]$, respectivamente. Então $A \otimes B$ satisfaz $d_{kl+1}[x, y]$.*

Prova: Pelo Teorema 3.12, temos que $h(\chi_n(A)) \leq k$ e $h(\chi_n(B)) \leq l$. Donde, pelos Teoremas 3.7 e 3.11, segue que

$$h(\chi_n(A \otimes B)) \leq h(\chi_n(A) \otimes \chi_n(B)) \leq h(\chi_n(A))h(\chi_n(B)) \leq kl.$$

Logo, mais uma vez pelo Teorema 3.12, temos que $A \otimes B$ satisfaz $d_{kl+1}[x, y]$. ■

Observação 3.14 O Teorema 3.13 não pode ser melhorado no sentido de se garantir que $d_m[x, y] \in T(A \otimes B)$ para algum $m < dk+1$. Observe que $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz $d_{k^2+1}[x, y]$ e $M_l(\mathbb{K})$ satisfaz $d_{l^2+1}[x, y]$, mas $M_{kl}(\mathbb{K}) \simeq M_k(\mathbb{K}) \otimes M_l(\mathbb{K})$ não satisfaz $d_m[x, y]$ para $m < k^2l^2 + 1$ (veja [8], página 16).

Concluiremos este capítulo mostrando que o Teorema 3.11 não pode ser melhorado, no sentido de que não podemos trocar "$\leq$" por "$<$" no seu enunciado.

O seguinte lema é devido a Amitsur.

Lema 3.15 *Se $n \geq 2k^2 - 1$, então $h(\chi_n(M_k(\mathbb{K}))) = k^2$.*

Prova. Veja [22], Lema 14, página 510. ■

Agora, podemos demonstrar a seguinte proposição, a qual mostra que pode ocorrer a igualdade no Teorema 3.11.

Proposição 3.16 *Sejam $k, l \in \mathbb{N}$, e seja $n \geq 2k^2l^2 - 1$. Então, existem partições $\lambda_1, \lambda_2 \vdash n$ tais que $h(\lambda_1) = k^2$, $h(\lambda_2) = l^2$ e $h(\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}) = k^2l^2$.*

Prova. Pelo Lema 3.15, temos que $h(\chi_n(M_{kl}(\mathbb{K}))) = k^2l^2$, isto é, existe alguma partição $\lambda \vdash n$ que possui multiplicidade diferente de zero em $\chi_n(M_{kl}(\mathbb{K}))$ e $h(\lambda) = k^2l^2$. Pelo Teorema 3.7, temos

$$\chi_n(M_{kl}(\mathbb{K})) = \chi_n(M_k(\mathbb{K}) \otimes M_l(\mathbb{K})) \leq \chi_n(M_k(\mathbb{K})) \otimes \chi_n(M_l(\mathbb{K})),$$

donde devem existir χ_{λ_1} em $\chi_n(M_k(\mathbb{K}))$ e χ_{λ_2} em $\chi_n(M_l(\mathbb{K}))$, com suas respectivas multiplicidades não-nulas, tais que χ_λ ocorre em $\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}$ (ver igualdade (3.1)) e consequentemente $h(\lambda) \leq h(\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2})$. Daí, como $h(\lambda_1) \leq k^2$ e $h(\lambda_2) \leq l^2$ (pois $d_{t^2+1}[x, y] \in T(M_t(\mathbb{K}))$, para todo $t \in \mathbb{N}$),

$$k^2l^2 = h(\lambda) \leq h(\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}) \leq h(\chi_{\lambda_1})h(\chi_{\lambda_2}) = k^2l^2$$

e assim devemos ter $h(\lambda_1) = k^2$ e $h(\lambda_2) = l^2$. ■

Capítulo 4

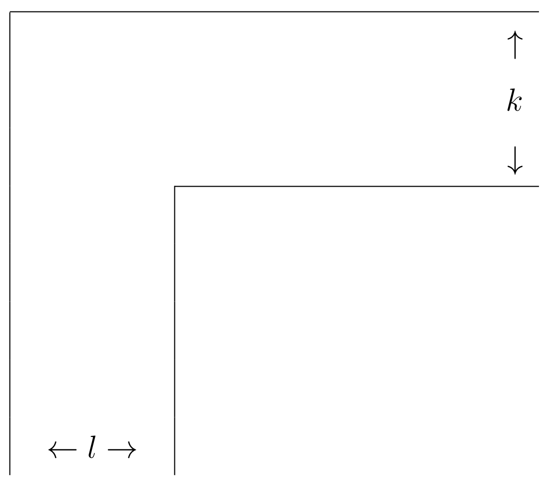
Cocaracteres do Produto Tensorial de Álgebras

Neste capítulo mostraremos uma aplicação da Teoria do Gancho às PI-álgebras. Considerando-se duas PI-álgebras A e B, contruiremos um gancho contendo os cocaracteres $\chi_n(A \otimes B)$ em termos de ganchos que contêm $\chi_n(A)$ e $\chi_n(B)$. Isto nos dará uma forma para construir identidades para $A \otimes B$.

Definição 4.1 *Dados inteiros $k, l \geq 0$, não ambus nulos, definimos o gancho infinito $H(k,l)$ como sendo*

$$H(k,l) = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; i \leq k \text{ ou } j \leq l\}.$$

$H(k,l)$ tem a seguinte representação gráfica



Seja

$$H(k,l;n) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n; \lambda \leq l \text{ para } j \geq k+1\} = \{\lambda \vdash n; D_\lambda \subseteq H(k,l)\}.$$

Sendo $\lambda = (n_1, \ldots, n_r) \vdash n$, temos que $D_\lambda \subset H(k,l)$ se, e somente se, a célula $(k+1, l+1) \notin D_\lambda$. Noutras palavras, $D_\lambda \subset H(k,l)$ se, e somente se, $D_{((l+1)^{k+1})} \nsubseteq D_\lambda$, ou seja, D_λ não contém um diagrama retangular $(k+1) \times (l+1)$.

Dizemos que uma partição λ pertence a $H(k,l)$, e escrevemos $\lambda \in H(k,l)$, se o diagrama de Young D_λ associado a λ está contido em $H(k,l)$. Se M é um S_n-módulo com caracter $\chi_M = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, escrevemos $\chi_M \subseteq H(k,l)$ se $\lambda \in H(k,l)$ para toda partição λ tal que $m_\lambda \neq 0$. Podemos também usar $H(k,l)$ para denotar o conjunto $\{\lambda \vdash n; n \in \mathbb{N},\ D_\lambda \subseteq H(k,l)\}$. Neste sentido, temos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H(k,l;n) = H(k,l). \tag{4.1}$$

Citemos o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Sejam A uma álgebra que satisfaça uma identidade polinomial de grau d; k, $l > e(d-1)^4$ (onde e é a base dos logarítimos naturais) e $\chi_n(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, a sequência de cocaracteres de A. Então, para todo n, temos*

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \in H(k,l;n)} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Prova. Veja [1], Teorema C, página 252. ■

Consideraremos o seguinte conjunto

$$H(A) = \{(k,l) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+; \chi_n(A) \subseteq H(k,l),\ \forall n \in \mathbb{N}\}. \tag{4.2}$$

Para nosso objetivo, alguns conceitos se fazem necessários.

Definição 4.3 *Fixados dois inteiros $k, l \geq 0$ não simultaneamente nulos, consideremos $k+l$ símbolos $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l$ com uma ordem $t_1 < \ldots < t_k < u_1 < \ldots < u_l$. Considere ainda $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathrm{Par}(n)$ e o correspondente diagrama de Young D_λ. Um preenchimento do diagrama D_λ com os elementos $\{t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l\}$, permitindo repetições, é chamado de $\underline{(k,l)\text{-tabela}}$, usualmente denotada por T_λ. Ademais, dizemos que a (k,l)-tabela T_λ é $\underline{(k,l)\text{-semistandard}}$ se satisfaz:*

(a) As entradas não decrescem nas linhas da esquerda para a direita e não decrescem nas colunas de cima para baixo.

(b) As entradas t_i's são crescentes de cima para baixo nas colunas.

(c) As entradas u_i's são crescentes da esquerda para direita nas linhas.

Denotaremos por $s_{k,l}(\lambda)$ o número de (k,l)-tabelas semistandard da partição $\lambda \vdash n$. É fácil ver que $s_{k,0}(\lambda)$ é o número de tabelas standard em $1, 2, ..., k$ da partição $\lambda \vdash k$.

Observemos que $s_{k,l}(\lambda) \neq 0$ se, e somente se, $\lambda \in H(k,l)$. De fato, suponhamos que $\lambda \notin H(k,l)$. Pela condição (b) da Definição 4.3, cada coluna de uma tabela (k,l)-semistandard do diagrama D_λ contém, no máximo, k entradas t_i. Dai, as entradas da linha $k+1$ devem ser todas entradas u_j. A condição (c) não permite mais que l entradas u_j numa mesma linha. Temos então um impedimento na linha $k+1$. Logo, $s_{k,l}(\lambda) = 0$. Por outro lado, se $\lambda \in H(k,l)$, tome um preenchimento de D_λ começando com t_1 em cada coluna e crescendo de cima para baixo, isto resultará em uma tabela (k,l)-semistandard. Assim, $s_{k,l}(\lambda) \neq 0$.

Exemplo 4.4 Considerando o conjunto dado na definição acima, observemos que

u_1	u_2
u_1	

é uma $(0,2)$-tabela semistandard e também uma $(13,3)$-tabela semistandard. Porém,

u_1	u_2
t_1	t_2

não é uma (k,l)-tabela semistandard, veja que a condição (a) da definição é violada.▲

Teorema 4.5 *Sejam $k, l \geq 0$ inteiros, não ambos nulos, e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(k+l)^n = \sum_{\lambda \in H(k,l;n)} s_{k,l}(\lambda) d_\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} s_{k,l}(\lambda) d_\lambda.$$

Prova. Veja [3], Proposição 2.7, página 128. ■

Consideremos T e U dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tais que $\dim T = k$ e $\dim U = l$, e seja $V = T \oplus U$. Definiremos uma ação do grupo S_n em $V^{\otimes n}$. Mas antes, consideremos um $\mathbb{K}$-espaço vetorial W com base enumerável e $E = E(W)$ a álgebra de Grassmann associada a W. Fixada uma base $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de W, seja

$$\mathfrak{D} = \{e_{i_1} \cdots e_{i_m}; i_1 < \cdots < i_m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

uma base para E. Sendo $(a) = (a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{D}$, definamos $\mathrm{Odd}(a) = \{i; a_i \in E_1\}$.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, escolhamos $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathfrak{D}$ tais que $a_1 \cdots a_n \neq 0$ e $\mathrm{Odd}(a) = I$. A equação

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = f_I(\sigma) a_1 \cdots a_n,$$

define $f_I(\sigma)$, o qual independe da n-upla (a) (veja o Exemplo 1.3). Ademais, pelo seguinte lema, a função $f_I : S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ é um homomorfismo quando $I = \varnothing$ ou $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Lema 4.6 *Sejam $\sigma, \eta \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Então,*

$$f_I(\sigma\eta) = f_I(\sigma) \cdot f_{\sigma^{-1}(I)}(\eta).$$

Prova. Veja [3], Lema 1.2, página 122. ■

Agora, construiremos um $\mathbb{K}S_n$-módulo à direita em $V^{\otimes n}$ como segue. Fixadas bases arbitrárias $\{t_1, \ldots, t_k\}$ de T e $\{u_1, \ldots, u_l\}$ de U, temos que os tensores $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, $v_i \in \{t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l\}$ formam uma base de $V^{\otimes n}$. Dado $(v) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$, defina $IU(v) = \{i; v_i \in U\}$, e dada $\sigma \in S_n$ defina $*$ e ψ_σ por

$$\begin{aligned}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\psi_\sigma &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) * \sigma \\ &= f_{IU(v)}(\sigma)(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}).\end{aligned}$$

Por linearidade, estende-se a ação $*$ de σ para um elemento qualquer de $V^{\otimes n}$.

Lema 4.7 *Sejam $\sigma, \eta \in S_n$. Na notação acima, temos que $\psi_{\sigma\eta} = \psi_\sigma \psi_\eta$, isto é, dado $(v) \in V^{\otimes n}$, vale*

$$((v) * \sigma) * \eta = (v) * (\sigma\eta).$$

Prova. Veja [3], Lema 1.5, página 122. ■

Corolário 4.8 *Ainda na notação anterior, a aplicação definida por*

$$\begin{array}{rccl}\psi & : & S_n & \longrightarrow & GL(V^{\otimes n}) \\ & & \sigma & \longmapsto & \psi(\sigma) = \psi_\sigma\end{array}$$

é um homomorfismo de grupos, isto é, uma S_n-representação. Ademais, $V^{\otimes n}$ é um $\mathbb{K}S_n$-módulo à direita pela ação $*$.

Prova. Segue diretamente dos lemas 4.6 e 4.7. ■

Em suma, temos $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) * \sigma = \varepsilon(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)})$, onde $\varepsilon = \pm 1$. Vejamos como calcular esse número ε. Pelo Corolário 4.8, basta calcularmos ε para as trasposições $\sigma = (i \quad j)$, $i < j$, já que as mesmas geram o grupo S_n. Para fazer isso, dado $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ com $\mathrm{Odd}(a) = IU(v)$, pela boa definição da função f_I, devemos ter $f_{IU(v)}((i \quad j)) = \varepsilon$, donde

$$a_1 \cdots a_j \cdots a_i \cdots a_n = \varepsilon a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n.$$

Para o lado direito da igualdade, escrevamos $x = a_1 \cdots a_{i-1}$, $y = a_{i+1} \cdots a_{j-1}$ e $z = a_{j+1} \cdots a_n$, e observemos que $ya_i = \varepsilon_1 a_i y$, $a_j a_i = \varepsilon_2 a_i a_j$ e $a_j y = \varepsilon_3 y a_j$. Então, é fácil ver que $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$. Em particular, sendo $(v) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ como definido acima, temos

$$\varepsilon = f_{IU(v)}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad v_i, v_j \in T \\ -1 & \text{se} \quad v_i, v_j \in U. \end{cases}$$

Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = k + l$. Definamos o seguinte conjunto de índices $I(k,l;n) = \{(i) = (i_1, i_2, \ldots, i_n); 1 \leq i_j \leq k + l\}$. Consideremos que $V^{\otimes n}$ possui estrutura de $\mathbb{K}S_n$-módulo à direita por uma ação de S_n em $V^{\otimes n}$ à direita de modo que existam uma base $\{v_1, \ldots, v_{k+l}\}$ de V e uma função sinal
$\varepsilon : I(k,l;n) \times S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ tais que

$$\varepsilon((i), \sigma)(v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\sigma(n)}}) = (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n})\sigma$$

onde $(i_1, \cdots, i_n) = (i) \in I(k,l;n)$, $\sigma \in S_n$ e $(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) \in V^{\otimes n}$.

Feita essa construção, podemos definir o seguinte:

Definição 4.9 *Dizemos que $V^{\otimes n}$ possui uma $\underline{(k,l)\text{-estrutura}}$ se existe uma base*

$$\{t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l\}$$

de V de modo que, sendo $(v) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, com $v_1, \ldots, v_n \in \{t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l\}$, considerando $i \neq j$, com $v_i = v_j$, e $\sigma = (i \quad j) \in S_n$, temos $(v)\sigma = \varepsilon(v_\sigma) = \varepsilon(v)$, onde

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad v_i = v_j \in \{t_1, \ldots, t_k\} \\ -1, & \text{se} \quad v_i = v_j \in \{u_1, \ldots, u_l\}. \end{cases}$$

Exemplo 4.10 Pelos comentários feitos acima, e pela construção contida no Corolário 4.8, temos que $V^{\otimes n}$ possui uma (k,l)-estrutura como $\mathbb{K}S_n$-módulo à direita. ▲

Exemplo 4.11 Sejam $V_1^{\otimes n}$ e $V_2^{\otimes n}$ com (k_1, l_1)-estrutura e (k_2, l_2)-estrutura, respectivamente, e $V = V_1 \otimes V_2$. Identifiquemos $V^{\otimes n} \equiv V_1^{\otimes n} \otimes V_2^{\otimes n}$ (veja a aplicação na demonstração do Lema 3.3). Então, $V^{\otimes n}$ possui uma (k, l)-estrutura com

$$k = k_1k_2 + l_1l_2 \quad \text{e} \quad l = k_1l_2 + k_2l_1.$$

Realmente, sejam $\beta_i = \{t_{i1}, \ldots, t_{ik_i}, u_{i1}, \ldots, u_{il_i}\} \subset V_i$, $i = 1, 2$, bases com a propriedade de (k_i, l_i)-estrutura. Sejam ainda

$$B_1 = \{t_{1r} \otimes t_{2s}; 1 \leq r \leq k_1,\ 1 \leq s \leq k_2\} \cup \{u_{1r} \otimes u_{2s}; 1 \leq r \leq l_1,\ 1 \leq s \leq l_2\}$$

e

$$B_2 = \{t_{1r} \otimes u_{2s}; 1 \leq r \leq k_1,\ 1 \leq s \leq l_2\} \cup \{u_{1r} \otimes t_{2s}; 1 \leq r \leq l_1,\ 1 \leq s \leq k_2\}.$$

Observe que B_1 e B_2 possuem exatamente k e l elementos, respectivamente. Supohamos S_n agindo em cada entrada de um tensor de $V_1^{\otimes n} \otimes V_2^{\otimes n} \equiv V^{\otimes n}$. Veja que $B_1 \cup B_2$ é base de $V_1 \otimes V_2 \equiv V$. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in B_1 \cup B_2$, onde $v_i = w_i \otimes z_i$, com $w_i \in \beta_1$ e $z_i \in \beta_2$. Ademais,

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = (w_1 \otimes z_1) \otimes \cdots \otimes (w_n \otimes z_n) \equiv (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_n).$$

Considerando as ações de S_n que determinam uma (k_1, l_1)-estrutura em $V_1^{\otimes n}$ e uma (k_2, l_2)-estrutura em $V_2^{\otimes n}$, definimos a ação de S_n em $V^{\otimes n}$

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\sigma = (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)\sigma \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)\sigma.$$

Suponha agora i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, com $i \neq j$ e $v_i = v_j$. Então $w_i = w_j$ e $z_i = z_j$. Dai, sendo $\sigma = (i \quad j)$, temos $(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)\sigma = \varepsilon_1(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)$ e $(z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)\sigma = \varepsilon_2(z_1 \otimes \cdots \otimes z_n)$, onde ε_1, $\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$. Donde,

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\sigma = \varepsilon_1\varepsilon_2(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \varepsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Se $v_i = v_j \in B_1$, temos dois casos:

- $w_i = w_j \in \{t_{11}, \ldots, t_{1k_1}\}$ e $z_i = z_j \in \{t_{21}, \ldots, t_{2k_2}\}$, donde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ e daí $\varepsilon = 1$.

- $w_i = w_j \in \{u_{11}, \ldots, u_{1l_1}\}$ e $z_i = z_j \in \{u_{21}, \ldots, u_{2l_2}\}$, donde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ e daí $\varepsilon = 1$.

Se $v_i = v_j \in B_2$, temos dois outros casos:

- $w_i = w_j \in \{t_{11}, \ldots, t_{1k_1}\}$ e $z_i = z_j \in \{u_{21}, \ldots, t_{2l_2}\}$, donde $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ e portanto $\varepsilon = -1$.

- $w_i = w_j \in \{u_{11}, \ldots, u_{1l_1}\}$ e $z_i = z_j \in \{t_{21}, \ldots, t_{2k_2}\}$, donde $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$ e portanto $\varepsilon = -1$.

Assim, sob essa ação a base $B_1 \cup B_2$ possui a propriedade de (k,l)-estrutura. ▲

Já é sabido que uma estrutura de $\mathbb{K}S_n$-módulo em $V^{\otimes n}$ é equivalente a uma representação de grupos

$$\rho : S_n \longrightarrow GL(V^{\otimes n}),$$

a qual pode, por linearidade, ser estendida ao homomorfismo de álgebras

$$\rho : \mathbb{K}S_n \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n}).$$

Desta maneira, consideraremos $V^{\otimes n}$ com a (k,l)-estrutura do $\mathbb{K}S_n$-módulo à direira correspondente à representação ρ. Pelo que foi visto no primeiro capítulo, podemos escrever

$$\mathbb{K}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} J_\lambda,$$

onde, os J_λ's são ideais bilaterais minimais de $\mathbb{K}S_n$. Por outro lado, o Teorema Fundamental dos Homomorfismos nos garante que

$$\frac{\mathbb{K}S_n}{\ker\rho} \simeq \rho(\mathbb{K}S_n).$$

Um ideal bilateral de $\mathbb{K}S_n$ tem a forma $\bigoplus_{\lambda \in \Gamma'} J_\lambda$, onde $\Gamma' \subseteq \mathrm{Par}(n)$, e daí existe $\Gamma \subseteq \mathrm{Par}(n)$ tal que

$$\frac{\mathbb{K}S_n}{\ker\rho} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} J_\lambda.$$

Daí, denotando $A = A(k,l;n) = \rho(\mathbb{K}S_n)$, temos

$$A = A(k,l;n) = \rho(\mathbb{K}S_n) = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} A_\lambda$$

onde, A_λ é isomorfo a J_λ para cada $\lambda \in \Gamma$. O Teorema do Gancho, que será visto adiante, garante que, de fato, $\Gamma = H(k,l;n)$.

Definição 4.12 *Seja $\{t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l\}$ uma base para $V = T \oplus U$, onde $\{t_1, \ldots, t_k\}$ e $\{u_1, \ldots, u_l\}$ são bases de T e U, respectivamente. Escrevendo*

$$W = W(k,l;n) = V^{\otimes n} = (T \oplus U)^{\otimes n},$$

definimos $\underline{B = B(k,l;n) = \mathrm{Hom}_A(W,W)}$.

Escrevendo $W_\lambda = WA_\lambda = W\rho(J_\lambda)$ para $\lambda \vdash n$, teremos que

$$W = \bigoplus_{\lambda \vdash n} W_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} W_\lambda$$

como $\mathbb{K}S_n$-módulo (ou A-módulo). Observe que $W_\lambda = \{0\}$ para $\lambda \in \mathrm{Par}(n) - \Gamma$. Com a notação até aqui estabelecida, enunciemos o seguinte resultado que faz parte da teoria clássica de Schur (veja, por exemplo, [13], capítulo 10).

Teorema 4.13 *Com a notação acima,*

$$B = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} B_\lambda,$$

onde $B_\lambda \equiv \mathrm{Hom}_{A_\lambda}(W_\lambda, W_\lambda)$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W_\lambda, W_\lambda) = A_\lambda B_\lambda$ *é isomorfo à* $A_\lambda \otimes_{\mathbb{K}} B_\lambda$. *Ademais, existe* $p_\lambda \in \mathbb{N}$ *tal que* $B_\lambda \simeq M_{p_\lambda}(\mathbb{K})$.

Observemos que B_λ acima é isomorfo a uma álgebra de matrizes, se $\lambda \in \Gamma$. Se $\lambda \in \mathrm{Par}(n) - \Gamma$, então $B_\lambda = \{0\}$. Desta meneira, faz sentido definir $\underline{\overline{s}_{k,l}(\lambda) = \sqrt{\dim B_\lambda}}$.

Corolário 4.14 *Com a notação acima, vale:*

$$\dim W_\lambda = \overline{s}_{k,l}(\lambda) \cdot d_\lambda.$$

Prova. Segue do Teorema 4.13 que

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W_\lambda, W_\lambda)) = (\dim W_\lambda)^2 = \dim B_\lambda \cdot \mathrm{dimA}_\lambda.$$

Donde,

$$\dim W_\lambda = \sqrt{\dim B_\lambda} \cdot \sqrt{\dim A_\lambda} = \overline{s}_{k,l}(\lambda) \cdot d_\lambda.$$

$\blacksquare$

Corolário 4.15 *Ainda com a mesma notação, vale:*

$$(k+l)^n = \sum_{\lambda \vdash n} \overline{s}_{k,l}(\lambda) d_\lambda.$$

Prova. Temos que

$$W = \bigoplus_{\lambda \vdash n} W_\lambda.$$

Daí, pelo corolário acima

$$(k+l)^n = \dim W = \sum_{\lambda \vdash n} \dim W_\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} \overline{s}_{k,l}(\lambda) d_\lambda.$$

$\blacksquare$

Observação 4.16 Consideremos a $\mathbb{K}$-álgebra $A = M_n(\mathbb{K})$ e N um A-módulo irredutível. Se $a \in N$, então $N = A \cdot a$. Daí, existe I ideal minimal à esquerda de A tal que $I \cdot a \neq \{0\}$. Logo, devemos ter $N = I \cdot a$. Ademais, a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & I & \longrightarrow & N \\ & & x & \longmapsto & \varphi(x) = x \cdot a \end{array}$$

é um isomorfismo. Assim, $\dim N = \dim I$. É um fato conhecido que $\dim I = n$.

Teorema 4.17 *(a) Sejam T_j, com $1 \leq j \leq d_\lambda$, as d_λ tabelas standard da partição $\lambda \vdash n$ com respectivos elementos idempotentes $E_{T_j} \in J_\lambda$. Então, cada $M_i = W * E_{T_i}$ é um B_λ-módulo (portanto, B-módulo) irredutível e*

$$W_\lambda = \bigoplus_{i \leq d_\lambda} W * E_{T_j}.$$

(b) Como $\mathbb{K}S_n$-módulos à direita, temos

$$W_\lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^{\overline{s}_{k,l}(\lambda)} I_i,$$

onde $I_i \simeq I_\lambda$ e I_λ é um ideal minimal à direita contido em J_λ.

Prova. (a) Da forma que foram tomados, claramente, cada M_i é um B-módulo, em particular, B_λ-módulo. Agora, para provar a soma direta, sejam $w_1, \ldots, w_{d_\lambda} \in W$ elementos arbitrários de modo que

$$w_1 * E_{T_1} + \cdots + w_{d_\lambda} * E_{T_{d_\lambda}} = 0. \tag{4.3}$$

É possivel determinar uma ordem entre as tabelas standard da partição $\lambda \vdash n$ de modo que $E_{T_i} E_{T_j} = 0$ se $i > j$ (veja [4], Teorema 4.4, página 113). Daí, aplicando E_{T_1} a direita na igualdade 4.3, temos

$$w_1 * E_{T_1} * E_{T_1} + \cdots + w_{d_\lambda} * E_{T_{d_\lambda}} * E_{T_1} = 0,$$

donde $w_1 * E_{T_1} * E_{T_1} = 0$, e assim $w_1 * E_{T_1} = 0$, já que $E_{T_1} * E_{T_1} = E_{T_1}$. Do mesmo modo, aplicando E_{T_2}, obtemos $w_2 * E_{T_2} = 0$, e repetindo temos $w_k * E_{T_k} = 0$ para $k = 1, \ldots, d_\lambda$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{d_\lambda} M_i = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} M_i \subseteq W_\lambda.$$

Por outro lado, suponha que exista um B_λ-módulo N de modo que

$$W_\lambda = \left(\sum_{i=1}^{d_\lambda} M_i \right) \oplus N.$$

Decompondo N e cada M_i em B_λ-módulos irredutíveis ($\text{char}\mathbb{K} = 0$), vem

$$W_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{\overline{d}_\lambda} N_i,$$

onde $d_\lambda \leq \overline{d}_\lambda$. Como, pela Observação 4.16, $B_\lambda \simeq M_{\overline{s}_{k,l}(\lambda)}(\mathbb{K})$ devemos ter $W_\lambda = \overline{s}_{k,l}(\lambda) \cdot \overline{d}_\lambda$. Donde, pelo Corolário 4.14, segue que

$$\overline{s}_{k,l}(\lambda) \cdot \overline{d}_\lambda = \dim W_\lambda = \overline{s}_{k,l}(\lambda) \cdot d_\lambda.$$

Portanto, $\overline{d}_\lambda = d_\lambda$ para toda partição λ. Provando (a).
(b) Pelo que foi feito no item (a), observemos que para $W_\lambda * I_\mu \neq 0$ é necessário e suficiente que $\lambda = \mu$. Disto, como $\mathbb{K}S_n$-módulo, W_λ é isomorfo a uma soma direta de $\mathbb{K}S_n$-módulos irredutíveis, cada um isomorfo a algum J_λ. Por fim, comparando-se as dimensões das componentes dessa soma direta, temos o resultado. ■

Fixemos uma tabela de Young T_λ associada a um diagrama D_λ, da partição $\lambda \vdash n$. Fixemos também uma base $\beta = \{t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_l\}$ de $V = T \oplus U$ (sendo $\{t_1, \ldots, t_k\}$ base de T e $\{u_1, \ldots, u_l\}$ base de U), e considere a ordem $t_1 < \cdots < t_k < u_1 < \cdots < u_l$. Representaremos um tensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, com $v_i \in \beta$, como uma tabela associada ao diagrama D_λ da seguinte maneira: Se na célula (i, j) da tabela T_λ aparece o número $a(i, j)$, então nessa entrada correspondente escrevemos o vetor $v_{a(i,j)}$. Por exemplo, consideremos a tabela de Young

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

onde $k = l = 2$, e $\lambda = (3, 3, 1) \vdash 7$. Sendo $w = v_1 \otimes \cdots \otimes v_7 = u_2 \otimes u_1 \otimes t_1 \otimes t_1 \otimes u_2 \otimes t_2 \otimes u_2$, então

$$w \equiv_{T_\lambda} \begin{array}{|c|c|c|} \hline u_2 & t_1 & u_2 \\ \hline u_1 & t_1 & t_2 \\ \hline u_2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

denotaremos essa equivalência por $w \equiv_{T_\lambda} D_\lambda(v_{a(i,j)})$, onde $D_\lambda(v_{a(i,j)})$ representa a última tabela acima.

Proposição 4.18 *O subconjunto de* $W * E_{T_\lambda}$

$$\{w * E_{T_\lambda}; w \equiv_{T_\lambda} D_\lambda(v_{a(i,j)}) \text{ é uma } (k,l) - \text{tabela semistandard}\}$$

é LI.

Prova. Veja [3], página 133. ■

Corolário 4.19 $s_{k,l}(\lambda) \leq \overline{s}_{k,l}(\lambda)$ *para qualquer partição* $\lambda \vdash n$.

Prova. Claramente, o conjunto descrito na Proposição 4.18 possui exatamente $s_{k,l}(\lambda)$ elementos, os quais pertencem a $W * E_{T_\lambda}$. Mas, este B_λ-módulo irredutível possui dimensão, como foi definida, igual a $\overline{s}_{k,l}(\lambda)$. Logo, $s_{k,l}(\lambda) \leq \overline{s}_{k,l}(\lambda)$. ■

Teorema 4.20 *Com as notações até aqui estabelecidas temos* $s_{k,l}(\lambda) = \overline{s}_{k,l}(\lambda)$.

Prova. Pelo Corolário 4.14, temos que

$$\dim W_\lambda = \overline{s}_{k,l}(\lambda) \cdot d_\lambda.$$

Com isso, do Teorema 4.5, segue que

$$\sum_{\lambda \vdash n} \overline{s}_{k,l}(\lambda) d_\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} \dim W_\lambda = \dim W = (k+l)^n = \sum_{\lambda \vdash n} s_{k,l}(\lambda) d_\lambda.$$

Portanto, pelo Corolário 4.19, tem-se que $s_{k,l}(\lambda) = \overline{s}_{k,l}(\lambda)$, como queríamos. ■

Deste último teorema e do Teorema 4.17 (b) segue o seguinte resultado.

Teorema 4.21 *Se* $W = V^{\otimes n}$ *possui uma* (k,l)*-estrutura como um* S_n*-módulo, então*

$$\chi_{S_n}(W) = \sum_{\lambda \in H(k,l;n)} s_{k,l}(\lambda) \chi_\lambda.$$

Esta é uma versão, muito útil para o nosso objetivo, do seguinte teorema.

Teorema 4.22 (Teorema do Gancho) *Seja* $\Gamma \in \mathrm{Par}(n)$ *como descrito anteriormente. Então,* $\Gamma = H(k,l;n)$, *ou seja,*

$$\rho(\mathbb{K}S_n) \simeq \bigoplus_{\lambda \in H(k,l;n)} I_\lambda.$$

Prova. Como $s_{k,l}(\lambda) = \overline{s}_{k,l}(\lambda)$, pelo Corolário 4.14 conseguimos ver que $s_{k,l}(\lambda) = \sqrt{\dim B_\lambda}$. Daí, como para que $s_{k,l}(\lambda) \neq 0$ é necessário e suficiente que $\lambda \in H(k,l;n)$, fica então provado que $B_\lambda \neq 0$ (e então $A_\lambda \neq 0$) se, e somente se, $\lambda \in H(k,l;n)$. Logo, $\Gamma = H(k,l;n)$. ■

Dadas PI-álgebras A e B, o teorema a seguir permite determinar k e l tais que $(k,l) \in H(A \otimes B)$.

Teorema 4.23 *Se* $(k_1,l_1) \in H(A)$ *e* $(k_2,l_2) \in H(B)$*, então* $(k,l) \in H(A \otimes B)$*, onde* $k = k_1k_2 + l_1l_2$ *e* $l = k_1l_2 + k_2l_1$*.*

Prova. Pelo Teorema 3.7, temos que $\chi_n(A \otimes B) \leq \chi_n(A) \otimes \chi_n(B)$ (o Produto de Kronecker). Dai, será suficiente mostrar que $\chi_n(A) \otimes \chi_n(B) \subseteq H(k,l)$, pois dessa forma, teremos $\chi_n(A \otimes B) \subseteq H(k,l)$. Segue de 3.1 que $\chi_n(A) \otimes \chi_n(B)$ é uma combinação linear de S_n-caracteres da forma $\chi_\nu \otimes \chi_\mu$, com $\nu \in H(k_1,l_1;n)$ e $\mu \in H(k_2,l_2;n)$. Devemos então mostrar que sendo χ_λ um S_n-caracter irredutível componente do produto de Kronecker $\chi_\nu \otimes \chi_\mu$ temos que $\lambda \in H(k,l;n)$. De fato, consideremos espaços vetoriais T_i e U_i, com $\dim T_i = k_i$ e $\dim U_i = l_i$, $V_i = T_i \oplus U_i$ e $W_i = V_i^{\otimes n}$ para $i = 1, 2$. Suponha que W_i possua uma (k_i,l_i)-estrutura como um $\mathbb{K}S_n$-módulo. Pelo Teorema 4.21, cada W_i possui um submódulo irredutível M_i, para $i = 1, 2$, tais que $\chi_{S_n}(M_1) = \chi_\nu$ e $\chi_{S_n}(M_2) = \chi_\mu$. Daí segue que $W_1 \otimes W_2$, com a ação de S_n em cada entrada dos tensores, possui um submódulo N tal que $\chi_{S_n}(N) = \chi_\nu \otimes \chi_\mu$. Por outro lado, $W_1 \otimes W_2 = V_1^{\otimes n} \otimes V_2^{\otimes n} \equiv (V_1 \otimes V_2)^{\otimes n} = W$ possui, pelo Exemplo 4.11, uma (k,l)-estrutura. Portanto, pelo Teorema 4.21, temos

$$\chi_{S_n}(W) = \sum_{\lambda \in H(k,l;n)} s_{k,l}(\lambda)\chi_\lambda.$$

Logo, $\chi_\lambda \leq \chi_\nu \otimes \chi_\mu = \chi_{S_n}(N) \leq \chi_{S_n}(W)$ e assim $\lambda \in H(k,l;n)$. Concluimos então que $(k,l) \in H(A \otimes B)$. ■

Exemplo 4.24 Sendo E a álgebra de Grassmann (Exemplo 1.3), mostra-se que

$$\chi_n(E) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(1,1)}} \chi_\lambda,$$

isto é, $\chi_n(E) \subset H(1,1)$ (veja [8], Teorema 4.1.8, página 90). Daí, pelo Teorema 4.23, temos que $\chi_n(E \otimes E) \subset H(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = H(2,2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ▲

Vejamos uma importante consequência do Teorema do Gancho, a qual, *a posteriori*, nos garantirá a existência de uma potência do polinômio standard que é identidade para a álgebra $A \otimes B$.

Lema 4.25 *Sejam $\lambda = (m^r) \vdash n = rm$ e a tabela de Young*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & r+1 & \cdots & (m-1)r+1 \\ \hline 2 & r+2 & \cdots & (m-1)r+2 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline r & 2r & \cdots & mr \\ \hline \end{array}.$$

Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{rm}) = E_{T_\lambda}(x_1 x_2 \cdots x_{rm}) \in P_{rm}$, então

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_r) &= f(\underbrace{\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_r}, \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_r}, \ldots, \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_r}}_{m-\text{vezes}}) \\ &= (m!)^r \cdot St_r^m(x_1, x_2, \ldots, x_r). \end{aligned}$$

Prova. Veja [8], Teorema 4.5.4, página 107. ■

Teorema 4.26 *Para qualquer PI-álgebra A, existem inteiros positivos r e m tais que A satisfaz a identidade $St_r^m(x_1, \ldots, x_r) = 0$.*

Prova. Seja $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Pelo teorema do gancho, devem existir inteiros positivos k e l de modo que $m_\lambda = 0$ quando $D_\lambda \not\subseteq H(k,l)$. Tomemos então $r = k+1$, $m = l+1$ e $\mu = (m^r) \vdash mr$. Temos que $D_\mu \not\subseteq H(k,l)$, donde $m_\mu = 0$. Como $m_\mu = 0$, pelo Teorema 2.3, temos

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{mr}) = E_{T_\mu}(x_1 x_2 \cdots x_{mr}) \in T(A),$$

daí

$$g(x_1, \ldots, x_r) = f(\underbrace{\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_r}, \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_r}, \ldots, \underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_r}}_{m-\text{vezes}}) \in T(A).$$

Pelo Lema 4.25

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_r) = (m!)^r \cdot St_r^m(x_1, x_2, \cdots, x_r).$$

Logo, como $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$, temos que $St_r^m(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in T(A)$, como queríamos. ■

Pelo Teorema 4.23, conseguimos um gancho $H(k,l)$ contendo os cocaracteres de $A \otimes B$. Daí, pelo teorema anterior, podemos obter uma potência de um polinômio standard que é identidade para $A \otimes B$.

Bibliografia

[1] S. A. Amitsur, A. Regev, *PI-Algebras and Their Cocharacters*, J. of Algebra 78 (1982) 248-254.

[2] A. Berele, A. Regev, *Applications of Hook Young Diagrams to P.I. Algebras*, J. of Algebra 82 (1983) 559-567.

[3] A. Berele, A. Regev, *Hook Young Diagrams with Applications to Combinatorics ans to Representations of Lie Superalgebras*, Adv. in Math. 64 (1987) 118-175.

[4] H. Boerner. *Representations of groups*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[5] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, John Wiley and Sons, New York-London, 1962.

[6] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[7] A. Giambruno, D. La Marttina, *PI-Algebras with slow codimension growth*, J. of Algebra, 284 (2005) 371-391.

[8] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math.Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.

[9] A. Giambruno, M. Zaicev, *A characterization of algebras with polinomial growth of the codimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. 129, 59 - 67 (2000).

[10] M. Hall, *Combinatorial Theory*, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc. USA, 1986.

[11] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, 2ª Edicão, Dover, New York, 2009.

[12] G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Volume 16, Addison - Wesley, 1981.

[13] A. Kanel-Belov, L. H. Rowen, *Computational Aspects of Polynomial Identities*, A K Peters Wellesley, Massachusetts, 2005.

[14] A. A. Klein, A. Regev, *The Codimensions of a PI-algebra*, Israel J. Math. 12 (1972) 421-426.

[15] D. Krakowski, A. Regev, *The polinomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the A. math. Society 181, 429-438 (1973).

[16] V. N. Latyshev, *On Regev's theorem on identities in tensor product of PI-algebras*, Ups. Mat. Nauk. 27 (1973), 213-214, (Língua Russa).

[17] A. I. S. de Oliveira, *Codimensões e Cocaracteres de PI-Álgebras*, 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2011.

[18] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math. 11 (1972) 131-152.

[19] A. Regev, *The Representations of S_n and Explicit Identities for PI-algebras*, J. of Algebra 51 (1978) 25-40.

[20] A. Regev, *The Representations of S_n and Explicit Identities for P.I. Algebras*, J. of Algebra 51 (1978) 25-40.

[21] A. Regev, *Algebras Satisfying a Capelli Identity*, Israel J. Math. 33 (1979) 149-154.

[22] A. Regev, *The Kronecker Product of S_n-Characters and an $A \otimes B$ Theorem for Capelli Identities*, J. of Algebra 66 (1980) 505-510.

[23] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995.

[24] A. C. Vieira, *On minimal varieties of quadratic growth*, Linear Algebra and its App. 418 (2006) 925-938.

[25] H. Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants And Representations*, Princenton University Press, Pincenton, N. J., 1939.