

Metodologia para identificação de sistemas em espaço de estados por meio de excitações pulsadas

Rafael Bezerra Correia Lima

Tese de Doutorado apresentada à Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande - Campus de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Instrumentação e Controle

Péricles Rezende Barros, Ph.D

Orientador

George Acioli Júnior, D.Sc

Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Rafael Bezerra Correia Lima, Setembro de 2016

Metodologia para identificação de sistemas em espaço
de estados por meio de excitações pulsadas

Rafael Bezerra Correia Lima

Tese de Doutorado apresentada em Setembro de 2016

Péricles Rezende Barros, Ph.D

Orientador

George Acioli Júnior, D.Sc

Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil, Setembro de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

L732m Lima, Rafael Bezerra Correia.
Metodologia para identificação de sistemas em espaço de estados por meio de excitações pulsadas / Rafael Bezerra Correia Lima. – Campina Grande, 2016.
136 f. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Péricles Rezende Barros, Prof. Dr. George Acioli Júnior".
Referências.

1. Identificação de Sistemas – Engenharia Elétrica. 2. Excitações Pulsadas. 3. Modelos em Espaço de Estados. 4. Aplicações Industriais. I. Barros, Péricles Rezende. II. Acioli Júnior, George. III. Título.

CDU 621.3:681.5.015(043)

**"METODOLOGIA PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS
POR MEIO DE EXCITAÇÕES PULSADAS "**

RAFAEL BEZERRA CORREIA LIMA

TESE APROVADA EM 20/09/2016



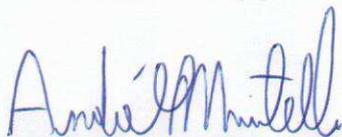
PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D., UFCG
Orientador(a)



GEORGE ACIOLI JUNIOR, D.Sc., UFCG
Orientador(a)



AMAURI OLIVEIRA, D.Sc, UFBA
Examinador(a)



ANDRÉ LAURINDO MAITELLI, Dr., UFRN
Examinador(a)



JOSÉ SÉRGIO DA ROCHA NETO, D.Sc., UFCG
Examinador(a)

MAURÍCIO BELTRÃO DE ROSSITER CORRÊA, D.Sc., UFCG
Examinador(a)

CAMPINA GRANDE - PB

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Muitas foram as pessoas que ao longo destes quatro anos de trabalho e convívio me auxiliaram e encorajaram na elaboração desta Tese de doutorado. Cabe aqui porém, neste pequeno espaço, uma homenagem sincera àqueles que de forma muito especial contribuíram direta e decisivamente para a realização deste trabalho.

Agradeço inicialmente a minha família por todo apoio e dedicação que me fizeram trilhar, com sucesso, meus próprios caminhos.

Agradeço também à Universidade Federal de Campina Grande, e em especial ao Departamento de Engenharia Elétrica, pela excelente infraestrutura oferecida, permitindo não somente a realização deste trabalho, mas também o meu crescimento e aperfeiçoamento profissional.

Um agradecimento fraterno aos meus colegas de laboratório, em especial ao pessoal da sala 117, pelo motivador convívio diário ao longo de todos esses anos de trabalho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço aos professores Péricles Rezende Barros e Geroge Acioli Jr. pela maneira firme e elucidante com a qual me encaminharam ao longo desse trabalho de Tese e de tantos outros projetos vinculados ao laboratório.

Resumo

Nesse trabalho são apresentadas contribuições na área de identificação de sistemas representados em espaço de estados. É proposta uma metodologia completa para estimação de modelos que representem as principais dinâmicas de processos industriais.

O fluxo natural dos procedimentos de identificação consiste da coleta experimental dos dados, seguido pela escolha dos modelos candidatos e da utilização de um critério de ajuste que selecione o melhor modelo possível. Nesse sentido é proposta uma metodologia para estimativa de modelos em espaço de estados, utilizando excitações pulsadas. A abordagem desenvolvida combina algoritmos precisos e eficientes com experimentos rápidos, adequados a ambientes industriais.

O projeto das excitações é realizado em tempo real, por meio de informações coletadas em um curto experimento inicial, baseado em uma única oscilação de uma estrutura realimentada por um relé. Esse mecanismo possibilita uma estimativa preliminar do atraso e da constante de tempo dominante do sistema.

O método de identificação proposto é baseado na teoria de realizações de Kalman. É apresentada uma reformulação do problema de realizações clássico, para comportar sinais de entrada pulsados. Essa abordagem se mostra computacionalmente eficiente, assim como apresenta resultados semelhantes aos métodos de benchmark. A técnica possibilita também a estimativa de atrasos de transporte e a inserção de conhecimentos prévios por meio de um problema de otimização com restrições via LMI *Linear Matrix Inequalities*.

Em muitos casos, somente as características principais do sistema são relevantes em um projeto de sistema de controle. Portanto é proposta uma técnica para obtenção de modelos de primeira ordem com atraso, a partir da redução de modelos balanceados em espaço de estados.

Por fim, todas as contribuições discutidas nesse trabalho de tese são validadas em uma série de plantas experimentais em escala de laboratório. Plantas essas, projetadas e construídas com o intuito de emular o cotidiano operacional de instalações industriais reais.

Palavras chave: Identificação de Sistemas, Excitações Pulsadas, Modelos em Espaço de Estados e Aplicações Industriais.

Abstract

This work introduces contributions related to the field of systems identification of state space models. It is proposed a complete methodology for model estimation that encompasses the main dynamics of industrial processes.

The natural flux of the identification procedures rests on the the empirical collection of data followed by the choice of candidate models and posterior use of an adjusting criteria that drafts the best model among the contenders. In this sense, a new methodology is proposed for models estimation in state spaces using pulsed excitation signal. The developed approach combines accurate and efficient algorithms with quick experiments whose are suitable for the industrial environment.

The excitation design is performed in real time by means of information collected in a short initial experiment based in an single oscillation of a relay feedback. This mechanism allows a preliminary estimation of both delay and time constant prevalent in the system.

The identification method proposed is based on Kalman's realization theory. The thesis introduces a reformulation of the classic realization problem so it can admit pulsed input signals. This approach show itself as computationally efficient as well as provides similar results compared to those obtained when performing the benchmark methods. Moreover, the technic allows the transport delay estimation and insertion of prior knowledge by means of an optimization problem with restrictions via linear matrix inequalities restrictions.

In many cases only the characteristics of the main system are relevant in control systems design. Therefore a technique for the attainment first order models with time delay based on balanced state space models reduction.

Lastly all the contributions provided along the thesis are discussed and validated in a series of pilot scale plants, designed and built to emulate the operational cycle in real industrial plants.

Keywords: System Identification, Pulsed Signals, State Space Models e Industrial Applications.

Índice

1	Introdução	4
1.1	Introdução Geral	4
1.2	Revisão bibliográfica	6
1.3	Contribuições	8
1.4	Estrutura do documento	9
2	Fundamentos teóricos	10
2.1	Introdução	10
2.2	Definições	10
2.2.1	Representação em espaço de estados	10
2.2.2	Organização dos dados	11
2.2.3	Matrizes Importantes	13
2.3	Realizações em espaço de estados	15
2.4	Técnicas baseadas em subespaços	18
2.4.1	Propriedades geométricas dos sistemas determinísticos	19
2.4.2	Implementação numérica da estimativa de Γ e X	21
2.4.3	Cálculo das matrizes do sistema	22
2.5	Identificação por subespaços utilizando normas nucleares (N2SID)	24
2.5.1	Redução de posto por normas nucleares	24
2.6	Conclusões	25
3	Projeto de excitações pulsadas	26
3.1	Introdução	26
3.2	Experimento do relé	27
3.3	Estimativa inicial das dinâmicas dominantes	28
3.3.1	Sistemas com atraso	28
3.3.2	Sistemas sem atraso	31
3.4	Definição das excitações	33

3.4.1	Pulso Simples	34
3.4.2	Pulsos Compostos	35
3.4.3	Persistência das excitações	36
3.5	Exemplos de simulação	37
3.5.1	Exemplo simulado 1	37
3.5.2	Exemplo simulado 2	38
3.6	Conclusões	40
4	Identificação de modelos em espaço de estados, por meio de excitações pulsadas	41
4.1	Introdução	41
4.2	Construção de realizações em espaço de estados utilizando sinais pulsados .	42
4.2.1	Realizações por pulso simples (RPS)	43
4.2.2	Realizações por pulsos compostos (RPC)	47
4.3	Modelos com atraso	48
4.3.1	Classificação de métodos para estimativa de atraso	48
4.3.2	Estimativa do atraso no domínio do tempo	49
4.3.3	Realizações por pulsos compostos com atraso (RPC-TD)	51
4.4	Inserção de restrições via <i>Linear Matrix Inequalities</i> (LMI)	52
4.4.1	Regiões LMI	53
4.4.2	Incorporando as restrições nos autovalores	57
4.4.3	Incorporando as restrições na resposta temporal	57
4.5	Exemplos de simulação	59
4.5.1	Exemplo simulado 1	59
4.5.2	Exemplo simulado 2	62
4.5.3	Exemplo simulado 3	66
4.5.4	Exemplo simulado 4	69
4.5.5	Exemplo simulado 5	73
4.5.6	Exemplo simulado 6	75
4.6	Conclusões	78
5	Obtenção de modelos FOPTD a partir da redução de modelos balanceados	79
5.1	Introdução	79
5.2	Equações de Lyapunov	80
5.3	Realizações Balanceadas	80

5.4	Redução de Modelo por Truncagem Balanceada	82
5.5	Redução de Modelo por Residualização Balanceada	83
5.6	Método proposto para redução de modelos	84
5.6.1	Cálculo da constante de tempo	86
5.6.2	Calculo do ganho	86
5.6.3	Cálculo do atraso	86
5.7	Exemplos de simulação	87
5.7.1	Exemplo simulado 1	87
5.7.2	Exemplo simulado 2	89
5.8	Conclusões	91
6	Aplicações Experimentais	92
6.1	Planta didática termoeétrica	92
6.1.1	Descrição da planta	93
6.1.2	Resultados experimentais	95
6.2	Trocador de calor	104
6.2.1	Descrição da planta	105
6.2.2	Resultados experimentais	106
6.3	Planta com quatro tanques acoplados	111
6.3.1	Descrição da planta	112
6.3.2	Resultados experimentais	114
7	Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros	123
7.1	Conclusões	123
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	124
A	Conceitos auxiliares	126
A.1	Subespaços	126
A.1.1	Espaço imagem	126
A.1.2	Espaço nulo	127
A.2	Pseudoinversa (Moore-Penrose)	127
A.3	Projeções	127
A.3.1	Propriedades	128
A.3.2	Projeções Ortogonais	128
A.3.3	Projeções Oblíquas	129
A.4	Decomposição QR	130
A.5	Decomposição em valores singulares (SVD)	130

Lista de Símbolos e Abreviaturas

ARX Autoregressive exogenous model

CLP Controlador Lógico Programável

CUSUM Cumulative sum

IHM Interface Homem Máquina

LMI Linear Matrix Inequalities

MIMO Multiple Input Multiple Output

MOESP Multivariable Output Error State Space algorithm

N2SID Nuclear Norm Subspace Identification

N4SID Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification

NRMSE Normalized root mean square error

OPC OLE for process control

PEM Prediction Error Methods

PWM Pulse With Modulation

RPC Realizações por pulsos compostos

RPC-TD Realizações por pulsos compostos com atraso

RPCR Algoritmo de realizações por pulsos com restrições

RPS Realizações por pulso simples

SBR Step Based Realization

SCADA Supervisory Control and Data Acquisition

SISO Single Input Single Output

SMI Subspace Model Identification

SVD Singular Value Decomposition

Lista de Tabelas

2.1	Cálculo das matrizes da representação em espaço de estados	17
2.2	Matrizes de ponderação	20
2.3	Resumo do teorema 3	21
4.1	Formulação do problema de otimização dos autovalores de \hat{A}	57
4.2	Formulação do problema de otimização da resposta temporal	58
4.3	Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.2 . .	66
4.4	Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.3 . .	69
4.5	Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.4 . .	72
4.6	Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.5 . .	75
4.7	Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.6 . .	77
5.1	Comparativo entre os modelos reduzidos do exemplo simulado 5.7.1	89
5.2	Comparativo entre os modelos reduzidos do exemplo simulado 5.7.2	91
6.1	Variáveis de interesse da planta	94
6.2	Comparativo entre os modelos identificados para malha TIC1-1	98
6.3	Comparativo entre os modelos identificados para malha TIC1-2	102
6.4	Comparativo entre os modelos identificados para malha TIC12-12	104
6.5	Ponto de operação	107
6.6	Comparativo entre os modelos identificados para Malha TIC1	109
6.7	Comparativo entre os modelos identificados para Malha TIC2	111
6.8	Comparativo entre os modelos identificados para malha LIC1	117
6.9	Comparativo entre os modelos identificados para malha FIC1	120
6.10	Comparativo entre os modelos reduzidos da Malha FIC1	122

Lista de Figuras

1.1	Representação do fluxograma básico para identificação de sistemas	5
2.1	Interpretação geométrica da equação 2.31	21
3.1	Diagrama de blocos de um processo realimentado com um relé	27
3.2	Exemplo de sinais de entrada e saída para um processo realimentado com um relé	27
3.3	Representação gráfica da função relé	28
3.4	Sinais de entrada e saída para uma oscilação de um modelo FOPTD realimentado por um relé padrão	29
3.5	Sinais de entrada e saída para uma oscilação de um modelo de primeira ordem realimentado por um relé com histerese	31
3.6	Ilustração do pulso base $u_B(t)$	34
3.7	Pulso Duplo (caso 1)	35
3.8	Pulso Duplo (caso 2)	36
3.9	Gráfico dos sinais da primeira oscilação do relé do Exemplo 3.5.1	37
3.10	Gráfico do sinal de excitação projetado no Exemplo 3.5.1	38
3.11	Gráfico dos sinais da primeira oscilação do relé do Exemplo 3.5.2	39
3.12	Gráfico do sinal de excitação projetado no Exemplo 3.5.2	39
4.1	Representação gráfica da Equação 4.24	50
4.2	Exemplo do método CUSUM-TD	50
4.3	Mapeamento da influência da localização dos polos na resposta temporal do sistema	54
4.4	LMI para restrição de estabilidade	55
4.5	LMI para restrição de autovalores puramente reais	56
4.6	LMI para restrição de autovalores com parte real positiva	56
4.7	Gabarito temporal para saída do modelo	58
4.8	Gráfico dos sinais de entrada e saída do exemplo 4.5.1	60

4.9	Gráfico dos sinais para busca do atraso do exemplo 4.5.1	61
4.10	Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.1	61
4.11	Simulação dos modelos identificados no Exemplo 4.5.1	62
4.12	Gráfico dos sinais de entrada e saída do exemplo 4.5.2	63
4.13	Gráfico dos sinais para busca do atraso do exemplo 4.5.2	64
4.14	Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.2	64
4.15	Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.2	65
4.16	Gráfico dos sinais de entrada e saída do exemplo 4.5.3	67
4.17	Gráfico dos sinais para busca do atraso do exemplo 4.5.3	67
4.18	Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.3	68
4.19	Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.3	69
4.20	Gráfico dos sinais de entrada e saída reais do exemplo 4.5.4	70
4.21	Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.4	70
4.22	Região LMI \mathcal{N}_{D_1}	71
4.23	Gráfico dos sinais de saída do exemplo 4.5.4	72
4.24	Polos dos modelos identificados no exemplo 4.5.4	73
4.25	Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.5	74
4.26	Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.5	74
4.27	Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.6	76
4.28	Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.6	77
5.1	Gráfico da resposta ao degrau do exemplo 5.7.1	88
5.2	Gráfico de bode do exemplo 5.7.1	88
5.3	Gráfico da resposta ao degrau do exemplo 5.7.2	90
5.4	Gráfico de bode do exemplo 5.7.2	90
6.1	Módulo de temperatura	93
6.2	Foto da planta didática termoeétrica	94
6.3	Diagrama da planta didática termoeétrica	95
6.4	Gráfico dos sinais de entrada e saída da Malha TIC1-1	96
6.5	Gráfico dos sinais para busca do atraso da Malha TIC1-1	96
6.6	Sequência de valores singulares da Malha TIC1-1	97
6.7	Simulação dos modelos identificados da Malha TIC1-1	98
6.8	Gráfico dos sinais de entrada e saída da Malha TIC1-2	99
6.9	Gráfico dos sinais para busca do atraso da Malha TIC1-2	100
6.10	Sequência de valores singulares da Malha TIC1-2	100
6.11	Simulação dos modelos identificados da Malha TIC1-2	101

6.12	Simulação dos modelos identificados da Malha TIC12-12	102
6.13	Sequência de valores singulares da Malha TIC12-12	103
6.14	Foto do Trocador de calor	104
6.15	Diagrama esquemático da planta de troca de calor	105
6.16	Trocador de calor do tipo serpentina	106
6.17	Estimativa dos atrasos da malha TIC1	107
6.18	Resultados para Bomba H x Temp H_{out}	108
6.19	Resultados para Bomba H x Temp C_{out}	108
6.20	Estimativa dos atrasos da malha TIC2	109
6.21	Resultados para Bomba C x Temp H_{out}	110
6.22	Resultados para Bomba C x Temp C_{out}	110
6.23	Sequência de valores singulares das Malhas TIC1 e TIC2	111
6.24	Foto da planta de tanques acoplados	112
6.25	Diagrama da planta com quatro tanques acoplados	113
6.26	Diagrama esquemático da malha de nível LIC1	114
6.27	Gráfico dos sinais de entrada e saída reais da malha LIC1	115
6.28	Gráfico dos sinais para busca do atraso da malha LIC1	115
6.29	Sequência de valores singulares da malha LIC1	116
6.30	Gráfico dos sinais de saída da malha LIC1	116
6.31	Diagrama esquemático da malha de vazão FIC1	117
6.32	Gráfico dos sinais de entrada e saída reais da malha FIC1	118
6.33	Gráfico dos sinais para busca do atraso da malha FIC1	118
6.34	Sequência de valores singulares da malha FIC1	119
6.35	Gráfico dos sinais de saída da malha FIC1	120
6.36	Gráfico da resposta ao degrau da malha FIC1	121
6.37	Gráfico de bode da malha FIC1	122
A.1	A transformação P é a projeção ortogonal na linha m	127

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução Geral

A área da Identificação de sistemas trata da construção de modelos matemáticos para sistemas dinâmicos, a partir de dados experimentais (LJUNG, 2010). A concepção de modelos matemáticos é utilizada nos diversos ramos da ciência. Na engenharia de controle, modelos de sistemas são utilizados para o projeto de controladores, simulação, detecção de falhas, treinamento de operadores ou até em situações onde realizar experimentos com o sistema real é demasiadamente caro, difícil ou até mesmo impossível.

Na construção de modelos através de dados, três princípios devem ser observados:

- **Os dados coletados:** Normalmente é realizado um experimento onde o sistema é excitado por um sinal que gere informações suficientes para caracterizá-lo. Lembrando que as entradas aplicadas estão sempre sujeitas às restrições operacionais e de segurança do sistema.
- **Um conjunto de modelos candidatos:** Tal conjunto é obtido ao definir a coleção de modelos no qual está contido o modelo a ser escolhido.
- **Um critério no qual o modelo candidato é ajustado aos dados coletados:** Esse é o método de identificação.

Uma vez obtido o melhor modelo, conforme o critério definido, é necessário fazer a validação do mesmo. Tais testes avaliam como o modelo se relaciona com os dados coletados, o conhecimento a priori do sistema e a sua finalidade. Em suma, identificação de sistemas é um processo iterativo, cujo fluxograma é apresentado na Figura 1.1.

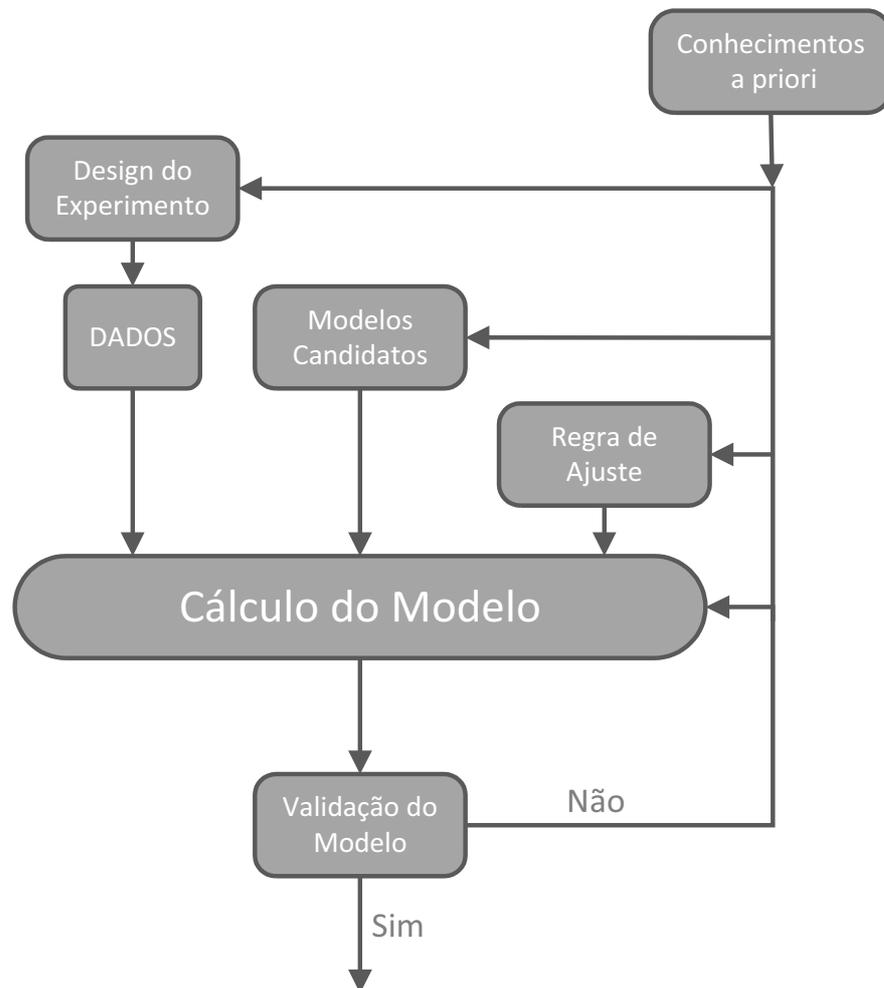


Figura 1.1: Representação do fluxograma básico para identificação de sistemas

Nesse trabalho, todos os aspectos presentes na Figura 1.1 são abordados. É proposta uma metodologia para a identificação de sistemas, partindo do projeto automático de excitações pulsadas, passando pela identificação de modelos de alta ordem em espaço de estados e por fim a obtenção de modelos de ordem reduzida, que capturam as principais dinâmicas do sistema alvo. As ferramentas desenvolvidas nessa tese tem como foco a aplicação em processos industriais, os quais invariavelmente apresentam restrições na etapa de aquisição de dados. Experimentos longos e complexos são muitas vezes inviáveis, devido aos altos custos operacionais envolvidos, assim como sinais muito excitantes são dificilmente permitidos, devido a limitações operacionais das próprias plantas.

1.2 Revisão bibliográfica

A área de identificação de sistemas tem recebido inúmeras contribuições ao longo dos últimos 50 anos. Apesar de alguns trabalhos anteriores existirem, é reconhecido que a área de identificação de sistemas iniciou-se nos anos 60 com a publicação de dois importantes trabalhos; (ASTROM; BOHLIN, 1965), onde o método de máxima verossimilhança foi estendido para estimativa de modelos ARMAX por meio de séries temporais e (KALMAN, 1963) onde uma realização em espaço de estados foi, pela primeira vez, calculada através dos coeficientes da resposta ao impulso do sistema (GEVERS, 2003).

O trabalho de Astrom e Bohlin deu origem aos algoritmos hoje chamados de *Prediction Error Methods* (PEM). Extensivamente aplicados a sistemas SISO (*single-input single-output*), culminaram em publicações prestigiadas como (LJUNG, 2010) e (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Nos métodos PEM o erro de predição é utilizado para criar uma função de custo. O problema de identificação então se resume a calcular o conjunto de parâmetros do modelo que minimiza a função de custo. Para um grupo restrito de modelos candidatos, esse problema de otimização é linear, porém na maioria dos casos é necessária uma técnica de otimização não-linear.

Para encontrar o modelo ótimo na ótica dos métodos PEM, um número grande de escolhas deve ser feito. Essas escolhas incluem a seleção da classe de modelos candidatos, a ordem dos modelos e os valores iniciais dos parâmetros, a fim de evitar mínimos locais.

A segunda grande contribuição para o ramo de identificação nos anos 60 foi dada em (HO; KALMAN, 1966) com a construção de realizações em espaço de estados por meio de uma decomposição de matrizes de Hankel dos coeficientes da resposta ao impulso do sistema. Alguns anos mais tarde o problema foi refinado em (KUNG, 1978) utilizando a SVD (*Singular Value Decomposition*) para gerar uma realização de posto mínimo, numericamente estável.

Apesar do potencial apresentado pela teoria de realizações, o próximo grande avanço na identificação de sistemas em espaço de estados só ocorreu 25 anos mais tarde com o surgimento de algoritmos de identificação por subespaços (SMI - *Subspace Model Identification*) (MOOR et al., 1988) e (LARIMORE, 1990). Essa metodologia é fortemente relacionada ao método de Kalman e difere significativamente das técnicas baseadas em erros de predição, apresentando uma série de novas vantagens. A ordem dos modelos pode ser estimada de maneira muito mais simples do que os métodos PEM. Nenhuma função de custo explícita é otimizada e a solução do problema é baseada em propriedades geométricas dos espaços gerados pelos dados. Além disso o uso da representação em espaço de estados ao invés de funções de transferência é geralmente mais tratável em pro-

blemas multivariáveis. Essa linha de desenvolvimento resultou em métodos SMI bastante eficientes tais como (OVERSCHEE; MOOR, 1996), (VERHAEGEN; DEWILDE, 1992a), (VERHAEGEN; DEWILDE, 1992b), (VERHAEGEN, 1993).

Um dos aspectos mais importantes no processo de identificação de sistemas é a qualidade dos dados coletados. Os experimentos realizados devem extrair somente informações pertinentes às dinâmicas de interesse, sem desperdiçar energia em frequências irrelevantes. Diretrizes para o projeto de excitações, podem ser encontradas em (PINTELON, 2012) e (BARENTHIN, 2006).

O problema da identificação de modelos dinâmicos tem aplicações nos mais variados ramos desde áreas de saúde, engenharias e até economia. No ramo de controle de processos em especial, grande parte dos modelos utilizados são de ordem reduzida, assim como os dados disponíveis são restritos a experimentos simples e curtos, devido a restrições operacionais. Uma abordagem bastante popular na indústria são os modelos obtidos por meio da resposta ao degrau. Uma visão geral desde os métodos gráficos até técnicas mais modernas, pode ser encontrada em (AHMED; HUANG; SHAH, 2007).

Seguindo a linha da representação em espaço de estados, o método SBR (*Step Based Realization*) proposto em (HELMONT; WEIDEN; ANNEVELD, 1990) e posteriormente re-editado para o contexto de subespaços em (MILLER; CALLAFON, 2009), generaliza a teoria de realizações clássica para construir modelos em espaço de estados a partir da resposta ao degrau, no tempo discreto. Salientando que somente é requerida a linearidade do sistema alvo, sendo a ordem do mesmo estimada durante a etapa de identificação.

Técnicas de identificação por subespaços são normalmente do tipo caixa-preta, totalmente voltada a dados. Porém em algumas situações práticas existem informações a priori sobre o sistema que devem entrar na elaboração do modelo. Trabalhos como (LACY; BERNSTEIN, 2003) e (MILLER; CALLAFON, 2012a) apresentam uma metodologia generalizada para inserção de restrições do tipo LMI (*Linear Matrix Inequalities*) em métodos SMI com o objetivo de inserir esses conhecimentos a priori nos modelos identificados. A técnica restringe os autovalores do modelo à uma região convexa do plano complexo onde as matrizes da realização em espaço de estados são calculadas por meio de um problema de otimização.

Modelos e controladores simples são normalmente mais utilizados em situações práticas em geral, por serem fáceis de implementar e mais tolerantes a falhas. Uma das estratégias mais populares para redução de modelos é através de modelos balanceados. Foi proposta primeiramente em (MULLIS; ROBERTS, 1976) e posteriormente editada no contexto de sistemas de controle em (MOORE, 1981). Primeiramente o modelo é transformado para uma base onde os estados são simultaneamente difíceis de observar e controlar,

em seguida é realizada a redução do modelo por alguma técnica como truncagem ou residualização. Informações mais detalhadas podem ser encontradas em (GUGERCIN; ANTOULAS, 2004) e (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995).

1.3 Contribuições

Como contribuições principais do trabalho pode-se citar:

- Foi proposto em (LIMA; BARROS, 2013), (LIMA; BARROS, 2015) e (LIMA; BARROS; ACIOLI, 2016b) uma técnica para construção de realizações em espaço de estados a partir de dados obtidos por um experimento com sinais de entrada pulsados. Tal técnica permite experimentos curtos, de baixo impacto e possibilita estimativas de atrasos assim como a inserção de conhecimentos a priori do sistema no modelo identificado;
- Foi proposto em (LIMA; BARROS, 2014) um método para geração de modelos de primeira ordem com atraso a partir de modelos em espaço de estados balanceados. Tais modelos de ordem reduzida são utilizados no projeto de sistemas de controle, mediante técnicas clássicas de sintonia de PIDs;
- Foi proposto em (LIMA; BARROS; ACIOLI, 2016a) uma técnica para a estimativa rápida do atraso e da constante de tempo dominante de um sistema, através de uma única oscilação realimentada por um relé;
- Por fim, foi proposta em (LIMA et al., 2015) a utilização de uma técnica baseada em subespaços para estimativa da resposta ao degrau e consequente projeto de um sistema de controle preditivo, aplicado a uma planta térmica;

1.4 Estrutura do documento

A Tese está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Capítulo introdutório no qual estão dispostas a motivação do trabalho, a revisão bibliográfica e as contribuições da tese;
- **Capítulo 2:** São apresentadas definições matemáticas relevantes ao contexto da tese, seguido por uma revisão sobre construção de realizações em espaço de estados. São abordados conceitos do método de Kalman, métodos por subespaços até a utilização de normas nucleares;
- **Capítulo 3:** É apresentada uma técnica para estimativa da constante de tempo dominante de um sistema, a partir da primeira oscilação de um experimento do relé. Em seguida são definidos os sinais de excitação utilizados na tese;
- **Capítulo 4:** É proposta uma técnica de identificação baseada em excitações construídas por pulsos. Tal técnica engloba a estimativa de atrasos assim como a inserção de conhecimentos a priori no formato de restrições de um problema de otimização;
- **Capítulo 5:** É apresentada uma breve revisão de métodos tradicionais de redução de modelos balanceados, assim como é definida uma nova metodologia para geração de modelos de primeira ordem com atraso a partir de uma representação em espaço de estados;
- **Capítulo 6:** É apresentada uma série de aplicações, em plantas reais, dos conceitos desenvolvidos na tese;
- **Capítulo 7:** Conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1 Introdução

A representação de modelos em espaço de estados possibilita uma descrição muito mais rica das estruturas internas do sistema em comparação a modelos de entrada-saída. Além disso sistemas MIMO são retratados de forma natural.

Existem três abordagens principais para identificação de modelos em espaço de estados. A primeira é através da adaptação de métodos clássicos PEM, em seguida a teoria de realizações e por último os métodos por subespaços.

Esse trabalho está focado nas abordagens de realizações e subespaços. Essas técnicas combinam de maneira elegante ferramentas de álgebra linear (decomposições QR, LQ, SVD) com uma abordagem geométrica para estimativa dos modelos, sem os problemas causados por parametrizações explícitas e otimizações não lineares. Esse capítulo se destina a revisar o ferramental básico para implementação de tais técnicas.

2.2 Definições

2.2.1 Representação em espaço de estados

Assumindo que o sistema modelado tem características lineares, invariantes ao deslocamento e é possivelmente MIMO, os modelos candidatos serão representados em espaço de estados, conforme a Equação 2.1

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t-t_d) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t-t_d)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e t_d é um conjunto de atrasos.

O modelo também pode ser representado de forma alternativa como soma de convolução

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)u(t - k - t_d) \quad (2.2)$$

onde $G(k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ representa os coeficientes da resposta ao impulso (parâmetros de Markov) do sistema sem atraso

$$G(k) = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.2 Organização dos dados

Nos algoritmos de identificação por subespaços, os vetores de dados são frequentemente agrupados na forma de blocos de Hankel.

Definição 1 *Matriz de Hankel:* Dada uma sequência de dados $d(t) \in \mathbb{R}^{p \times q} \forall t = 0, 1, 2, \dots, N$, a matriz de Hankel $D_{0|r-1}$ com r linhas de blocos e l colunas de blocos é definida como

$$D_{0|r-1} \triangleq \begin{pmatrix} d(0) & d(1) & \dots & d(l-1) \\ d(1) & d(2) & \dots & d(l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d(r-1) & d(r) & \dots & d(l+r-2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{rp \times lq} \quad (2.4)$$

onde normalmente $l \gg r$ e $N \geq l+r-2$. A notação $D_{a|b}$ indica que o primeiro e o último elemento da primeira coluna de D tem respectivamente índices a e b . Por construção, matrizes de Hankel apresentam elementos constantes nas diagonais transversais. Mais detalhes em (PARTINGTON, 1988).

Quando não especificado de forma diferente os dados de entrada e saída serão agrupados em matrizes bloco de Hankel. Cada elemento da matriz é formado pelo empilhamento de amostras no instante t das várias entradas ou saídas do sistema.

As matrizes de blocos de Hankel das entradas são definidas como

$$U_{0|2i-1} = \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ i \end{array} \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(j-1) \\ u(1) & u(2) & u(3) & \dots & u(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(i-1) & u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-2) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ u(i) & u(i+1) & u(i+2) & \dots & u(i+j-1) \\ u(i+1) & u(i+2) & u(i+3) & \dots & u(i+j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(2i-1) & u(2i) & u(2i+1) & \dots & u(2i+j-2) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{passado} \\ \text{---} \\ \text{futuro} \end{array} \quad (2.5)$$

$$= \begin{pmatrix} U_{0|i-1} \\ U_{i|2i-1} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} U_p \\ U_f \end{pmatrix}$$

$$U_{0|2i-1} = \begin{array}{c} i+1 \\ \text{---} \\ i-1 \end{array} \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(j-1) \\ u(1) & u(2) & u(3) & \dots & u(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(i-1) & u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-2) \\ u(i) & u(i+1) & u(i+2) & \dots & u(i+j-1) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ u(i+1) & u(i+2) & u(i+3) & \dots & u(i+j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(2i-1) & u(2i) & u(2i+1) & \dots & u(2i+j-2) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{passado} \\ \text{---} \\ \text{futuro} \end{array} \quad (2.6)$$

$$= \begin{pmatrix} U_{0|i} \\ U_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} U_p^+ \\ U_f^- \end{pmatrix}$$

O número de blocos de linhas i é arbitrário e deve ser no mínimo maior do que a ordem máxima do sistema, para garantir que todos os modos sejam identificados. Vale salientar que cada elemento $u(t)$ da matriz é composto de m linhas portanto $U_{0|2i-1}$ tem $2mi$ linhas. Já o número de colunas é normalmente $j = N - 2i + 2$, de modo que todas as N amostras das entradas sejam utilizadas.

As matrizes blocos de Hankel de saída $Y_{0|2i-1}, Y_p, Y_f, Y_p^+, Y_f^-$ são definidas de maneira similar. Definem-se ainda as matrizes de bloco de Hankel mistas de entradas e saídas como $W_{0|i-1}$:

$$W_{0|i-1} \triangleq \begin{pmatrix} U_{0|i-1} \\ Y_{0|i-1} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$= \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$= W_p$$

Da mesma forma, W_p^+ é definida como:

$$W_p^+ = \begin{pmatrix} U_p^+ \\ Y_p^+ \end{pmatrix}$$

As sequências de estados assumem um papel importante na derivação e interpretação dos algoritmos de identificação por subespaços. A sequência de estado $X_{a|b}$ é definida na Equação 2.9, onde os índices a e b denotam respectivamente o primeiro e o último elemento da sequência.

$$X_{a|b} = \begin{pmatrix} x_a & x_{a+1} & \dots & x_{b-1} & x_b \end{pmatrix} \in R^{n \times b-a+1} \quad (2.9)$$

Analogamente às entradas e saídas passadas, representam-se as sequências passadas de estado por X_p e as sequências futuras por X_f .

$$X_p \triangleq X_{0|j-1} \quad , \quad X_f \triangleq X_{i|i+j-1}.$$

2.2.3 Matrizes Importantes

A seguir são definidas algumas matrizes chave para as futuras deduções desse capítulo.

Definição 2 *Matriz estendida de observabilidade* (Γ_r)

$$\Gamma_r \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \in R^{rp \times n} \quad (2.10)$$

Definição 3 *Matriz estendida de controlabilidade* (Ω_l)

$$\Omega_l \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{l-1}B \end{bmatrix} \in R^{n \times lm} \quad (2.11)$$

Definição 4 *Matriz estendida reversa de controlabilidade* (Δ_l)

$$\Delta_l \triangleq \begin{bmatrix} A^{l-1}B & A^{l-2}B & \dots & A^2B & AB & B \end{bmatrix} \in R^{n \times lm} \quad (2.12)$$

Definição 5 *Matriz de Hankel dos parâmetros de Markov* ($H_{1|r}$)

$$H_{1|r} \triangleq \begin{bmatrix} G(1) & G(2) & \dots & G(l) \\ G(2) & G(3) & \dots & G(l+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G(r) & G(r+1) & \dots & G(r+l-1) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$= \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{l-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^lB \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{r-1}B & CA^rB & \dots & CA^{r+l-2}B \end{bmatrix} \in R^{rp \times lm} \quad (2.14)$$

onde $r > n$ e $l \geq r$

Definição 6 *Matriz Toeplitz dos parâmetros de Markov* ($T_{0|r-1}$)

$$T_{0|r-1} \triangleq \begin{bmatrix} G(0) & 0 & \dots & 0 \\ G(1) & G(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G(r-1) & G(r-2) & \dots & G(0) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$= \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{r-2}B & CA^{r-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \in R^{rp \times rp} \quad (2.16)$$

onde $r > n$.

2.3 Realizações em espaço de estados

O problema de realizações foi proposto por Kalman como a construção de modelos em espaço de estados a partir dos coeficientes da resposta ao impulso de um sistema, (KALMAN, 1963). Mais tarde foi estabelecido, em (HO; KALMAN, 1966), um algoritmo que gera as realizações por meio de uma decomposição das matrizes de Hankel dos parâmetros de Markov. O problema foi então refinado em (KUNG, 1978) utilizando a SVD (*Singular Value Decomposition*) para gerar uma realização de posto mínimo. Ao longo dessa seção serão apresentados os fundamentos do algoritmo de Ho-Kalman-Kung.

Considerando um atraso nulo $t_d = 0$, entradas passadas u_p e futuras u_f são relacionadas às saídas futuras y_f como

$$y_f = H_{1|r}u_p + T_{0|r-1}u_f \quad (2.17)$$

onde,

$$\begin{aligned} u_p &= \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & u(-2) & \dots & u(-r+1) \end{bmatrix}^T \\ u_f &= \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & u(3) & \dots & u(r-1) \end{bmatrix}^T \\ y_f &= \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & y(3) & \dots & y(r-1) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

$T_{0|r-1}$ é uma matriz bloco-Toeplitz e $H_{1|r}$ uma matriz bloco de Hankel dos coeficientes da resposta ao impulso do sistema. Em outras palavras, a Equação (2.17) é o equivalente matricial do modelo (2.2), quando $r \rightarrow \infty$.

Teorema 1 *Propriedades da matriz de coeficientes da resposta ao impulso $H_{1|r}$:*

Caso a realização (A, B, C, D) seja mínima, as seguintes afirmativas são verdadeiras:

- $H_{1|r}$ tem posto n e pode ser fatorado como o produto entre a matriz de observabilidade estendida (Γ_r) e a matriz de controlabilidade estendida (Ω_l)

$$H_{1|r} = \Gamma_r \Omega_l = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{l-1}B \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

- A matriz de Hankel $H_{1|r}$ é invariante ao deslocamento. Portanto $H_{2|r+1}$, definida

deslocando uma linha para cima ou uma coluna para esquerda é dada por

$$H_{2|r+1} = \Gamma_r A \Omega_l. \quad (2.20)$$

Prova. A prova do teorema é alcançada através da substituição direta das Equações 2.10 e 2.11 em 2.13. ■

Definição do problema de realizações:

Suponha que são medidos ou estimados N pontos da resposta ao impulso do sistema. Determinar a ordem do sistema assim como uma realização para o conjunto de matrizes (A, B, C, D) da Equação 2.1, partindo de $H_{1|r}$.

Caso a resposta ao impulso estimada seja corrompida por ruídos, a matrix $H_{1|r}$ apresenta $\text{posto}(H_{1|r}) > n$. Com o intuito de isolar somente a dinâmica real do sistema, uma aproximação $\hat{H}_{1|r}$ de $\text{posto}(\hat{H}_{1|r}) = n$, é definida a partir da decomposição SVD

$$H_{1|r} = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_n & U_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_s^T \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde U e V são matrizes ortogonais e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_r)$ é uma matriz diagonal composta pelos valores singulares de $H_{1|r}$, organizados de forma decrescente.

Supondo uma relação sinal ruído favorável, a ordem n do sistema pode ser estimada examinando o ponto onde ocorre uma queda na magnitude da sequência dos valores singulares em Σ . Uma vez determinada a ordem do sistema, a aproximação $\hat{H}_{1|r}$ de $\text{posto}(\hat{H}_{1|r}) = n$ é definida como

$$\hat{H}_{1|r} = U_n \Sigma_n V_n^T. \quad (2.22)$$

Considerando a norma-2 da matriz $\|H_{1|r}\|_2$

$$\|H_{1|r}\|_2 = \|U \Sigma V^T\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1 \quad (2.23)$$

assim como a norma de Frobenius $\|H_{1|r}\|_F$

$$\|H_{1|r}\|_F = \|U \Sigma V^T\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} \quad (2.24)$$

é demonstrado em (ECKART; YOUNG, 1936) que $\hat{H}_{1|r}$ é o mais próximo possível de $H_{1|r}$ no sentido das referidas normas

$$\hat{H}_{1|r} = \arg \min_{\text{posto}(\hat{H}_{1|r})=n} \left\| \hat{H}_{1|r} - H_{1|r} \right\|_2 = \arg \min_{\text{posto}(\hat{H}_{1|r})=n} \left\| \hat{H}_{1|r} - H_{1|r} \right\|_F. \quad (2.25)$$

Além disso, a norma-2 do erro da redução de posto é

$$\left\| \hat{H}_{1|r} - H_{1|r} \right\|_2 = \sigma_{n+1} \quad (2.26)$$

Estimativas internamente balanceadas para as matrizes de observabilidade e controlabilidade são dadas pela fatoração

$$\hat{\Gamma}_r = U_n \Sigma_n^{1/2} \quad \hat{\Omega}_l = \Sigma_n^{1/2} V_n^T \quad (2.27)$$

que resulta em

$$\left\| \hat{\Gamma}_r \right\|_2 = \left\| \hat{\Omega}_l \right\|_2 = \sqrt{\left\| \hat{H}_{1|r} \right\|_2}. \quad (2.28)$$

Portanto o modelo determinado é observável e controlável, com

$$\text{posto}(\hat{\Gamma}_r) = \text{posto}(\hat{\Omega}_l) = \text{posto}(\hat{H}_{1|r}) = n. \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação 2.27 em 2.20 é possível calcular uma realização em espaço de estados conforme a Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Cálculo das matrizes da representação em espaço de estados

$\hat{A} = (\hat{\Gamma}_r)^\dagger \hat{H}_{2 r+1} (\hat{\Omega}_l)^\dagger = \Sigma_n^{-1/2} U_n^T \hat{H}_{2 r+1} V_n \Sigma_n^{-1/2}$
$\hat{B} = \hat{\Omega}_l(:, 1)$
$\hat{C} = \hat{\Gamma}_r(1, :)$
$\hat{D} = G(0)$

O operador $(\cdot)^\dagger$ representa a pseudoinversa a esquerda e a notação $X(:, 1)$ e $X(1, :)$ indica respectivamente a primeira coluna e a primeira linha de X . O Algoritmo 1 resume o problema de realizações resolvido em (KUNG, 1978). Discussões adicionais podem ser encontradas em (JUANG; PAPPA, 1985).

Algoritmo 1 *Algoritmo de Ho-Kalman-Kung*

- Assuma que os N primeiros coeficientes da resposta ao impulso do sistema são conhecidos;
- Defina $r > n$ e $l \leq N - r + 2$;
- Monte a matriz $H_{1|r}$ e realize a SVD definida na Equação 2.21;
- Determine a ordem do sistema n inspecionando os valores singulares de $H_{1|r}$;
- Monte a matriz $H_{2|r+1}$ e calcule $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ conforme a Tabela 2.1.

2.4 Técnicas baseadas em subespaços

Na última década se tem dado bastante atenção a métodos de identificação baseados em subespaços (SMI - *Subspace Model Identification*). A maioria desses parte do princípio que uma base para o subespaço gerado pelas colunas da matriz de observabilidade estendida pode ser determinado por meio de dados de entrada e saída. Uma vez conhecida essa base é possível estimar, implícita ou explicitamente, a sequência de estados e as matrizes do sistema. Três abordagens distintas se destacam por sua popularidade N4sid (OVERSCHEE; MOOR, 1994), Moesp (VERHAEGEN, 1994) e CVA (LARIMORE, 1996). Cada uma dessas recorre a uma decomposição SVD de uma matriz diferente de projeções de subespaços gerados por matrizes de Hankel dos dados.

Essa família de métodos apresenta algumas características em comum, tais quais

- Algoritmos não-iterativos e numericamente estáveis, já que utilizam ferramentas estabelecidas como decomposição QR e SVD;
- Pouco conhecimento a priori é necessário. Somente a ordem do sistema é exigida e mesmo assim ela pode ser determinada pela inspeção dos valores singulares de uma matriz calculada durante a identificação;
- Originalmente adequados a sistemas MIMO, visto que a representação dos modelos é em espaço de estados.

Serão apresentadas nesta seção uma série de definições e teoremas básicos para o emprego de técnicas de identificação determinística por subespaços, bem como algoritmos funcionais para aplicação prática dos conceitos estabelecidos.

2.4.1 Propriedades geométricas dos sistemas determinísticos

Teorema 2 *Equações Matriciais das Entradas e Saídas*

O modelo em espaço de estados apresentado na Equação 2.1 pode ser reformulado matricialmente conforme as Equações 2.30, 2.31 e 2.32.

$$Y_p = \Gamma_i X_p + T_{0|i-1} U_p, \quad (2.30)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + T_{0|i-1} U_f, \quad (2.31)$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i U_p. \quad (2.32)$$

Prova. A prova do teorema se dá pela concatenação lateral dos vetores de entrada e saída da Equação 2.17. ■

Teorema 3 *Estimativa de Γ e X_f por projeções oblíquas*

Assumindo que:

- A entrada $u(t)$ é persistentemente excitante de ordem $2i$;
- A intersecção do espaço linha de U_f (entradas futuras) e o espaço linha de X_p (estados passados) é vazia;
- As matrizes de ponderação $W_1 \in R^{li \times li}$ e $W_2 \in R^{j \times j}$ são tais que W_1 é de posto completo (li) e W_2 obedece: $\text{posto}(W_p) = \text{posto}(W_p, W_2)$, onde W_p é a matriz de bloco de Hankel contendo entradas e saídas passadas.

Definindo-se O_i como a projeção oblíqua,

$$O_i = Y_f /_{U_f} W_p \quad (2.33)$$

e a decomposição em valores singulares,

$$\begin{aligned} W_1 O_i W_2 &= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \\ &= U_1 S_1 V_1^T \end{aligned} \quad (2.34)$$

tem-se:

1. O espaço linha de X_f é o mesmo de W_p , portanto observando a Figura 2.1 conclui-se que a projeção oblíqua O_i é igual ao produto entre a matriz estendida de observabilidade e os estados, Equação 2.35.

$$O_i = \Gamma_i \cdot X_f. \quad (2.35)$$

2. A ordem do sistema é igual ao número de valores singulares não desprezíveis, na equação 2.34.

3. A matriz estendida de observabilidade Γ_i compartilha o mesmo espaço coluna de O_i portanto é obtida pela Equação 2.36

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} \cdot T. \quad (2.36)$$

sendo $T \in R^{n \times n}$ uma transformação de similaridade arbitrária não singular.

4. Visto que a sequência de estado X_f fica no espaço linha de O_i , pode ser recuperada pela Equação 2.37.

$$X_f W_2 = T^{-1} \cdot S_1^{1/2} V_1^T. \quad (2.37)$$

5. A sequência de estados X_f é igual a:

$$X_f = \Gamma_i^\dagger \cdot O_i \quad (2.38)$$

6. A escolha das matrizes de ponderação W_1 e W_2 determina a base em que a realização em espaço de estados é construída. Duas escolhas típicas estão representadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Matrizes de ponderação

Método	W_1	W_2
N4SID	I_{pi}	I_j
MOESP	I_{pi}	$\Pi_{U_f^\perp}$

Mais informações sobre projeções no Apêndice A.3.

Prova. Prova do teorema em (OVERSCHEE; MOOR, 1996). ■

Vale salientar que o método MOESP foi originalmente desenvolvido utilizando o projetor ortogonal $\Pi_{U_f^\perp} = U_f^T (U_f U_f^T)^\dagger U_f$ para a extração da matriz de observabilidade, con-

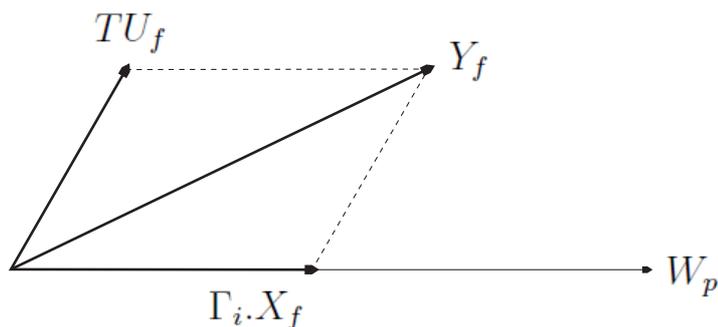


Figura 2.1: Interpretação geométrica da equação 2.31

forme

$$(Y_f)\Pi_{U_f^\perp} = (\Gamma_i X_f + T_{0|i-1}U_f)\Pi_{U_f^\perp} \quad (2.39)$$

$$Y_f\Pi_{U_f^\perp} = \Gamma_i X_f\Pi_{U_f^\perp} \quad (2.40)$$

essa metodologia, no entanto, pode ser representada sem perda de generalidade pelo Teorema 3 com $W_2 = \Pi_{U_f^\perp}$.

Fica claro na Tabela 2.3 porque a técnica apresentada é denominada identificação por subespaços. As matrizes relacionadas ao sistema são resgatadas como subespaços de projeções dos dados de entradas e saídas coletados.

Tabela 2.3: Resumo do teorema 3

Posto($Y_f/U_f W_p$) = n
Espaço linha($Y_f/U_f W_p$) = Espaço linha(X_f)
Espaço coluna($Y_f/U_f W_p$) = Espaço coluna(Γ_i)

2.4.2 Implementação numérica da estimativa de Γ e X

O teorema 3 tem como principal consequência o fato de que a sequência de estados X_f e a matriz de controlabilidade estendida Γ_i podem ser diretamente determinadas a partir das entradas e saídas $u(t)$ e $y(t)$, sem conhecimento das matrizes do sistema A , B , C e D . Na prática as projeções utilizadas são calculadas por meio da seguinte decomposição LQ

$$\begin{bmatrix} U_f \\ W_p \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde

$$O_i = Y_f/U_f W_p = R_{32} R_{22}^\dagger W_p = \Gamma_i X_f \quad (2.42)$$

2.4.3 Cálculo das matrizes do sistema

Serão apresentados dois algoritmos para o cálculo das matrizes do sistema. O algoritmo 2 explora conceitos do método N4sid e o algoritmo 3 do método Moesp.

Definição do problema de identificação por subespaços:

Suponha que é realizado um experimento e são coletadas N amostras das entradas $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e saídas $y(t) \in \mathbb{R}^p$ do sistema. Determinar a ordem do sistema assim como o conjunto de matrizes (A, B, C, D) .

Algoritmo 2 Sequência de estados

As matrizes do sistema são calculadas por meio da estimação prévia da sequência de estados. Partindo do teorema 3, encontra-se:

- A ordem do sistema pela inspeção dos valores singulares da Equação 2.34;
- A sequência de estados X_i a partir da Equação 2.37.

Definindo as matrizes

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} x(i+1) & x(i+2) & \dots & x(i+j) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$X_i = \begin{bmatrix} x(i) & x(i+1) & \dots & x(i+j-1) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$U_{i|i} = \begin{bmatrix} u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-1) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$Y_{i|i} = \begin{bmatrix} y(i) & y(i+1) & \dots & y(i+j-1) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

as matrizes A, B, C e D são a solução do sistema linear de Equações 2.47

$$\begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ U_{i|i} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ U_{i|i} \end{pmatrix}^\dagger, \quad (2.48)$$

Algoritmo 3 Invariância da matriz de observabilidade

Diferentemente do algoritmo 2, neste caso as matrizes do sistema são determinadas em dois passos. Primeiramente, determinam-se A e C através de Γ_i , e num segundo passo B e D são computados. Pelo teorema 3, tem-se:

- A ordem do sistema a partir da inspeção dos valores singulares da Equação 2.34;
- A matriz de observabilidade estendida Γ_i pela Equação 2.36.

A matriz A é determinada por meio da Equação 2.49, onde $\overline{\Gamma}_i$ denota a exclusão das primeiras l (número de saídas) linhas de Γ_i e $\underline{\Gamma}_i$ a exclusão das l últimas linhas.

$$A = \underline{\Gamma}_i^\dagger \cdot \overline{\Gamma}_i \quad (2.49)$$

A matriz C é obtida a partir das l primeiras linhas Γ_i . Já as matrizes B e D são determinadas da seguinte maneira:

Levando-se em consideração o complemento ortogonal, $\Gamma_i^\perp = U_2^T W_1$, da Equação 2.31 obtém-se,

$$\Gamma_i^\perp \cdot Y_f = \Gamma_i^\perp \cdot \Gamma_i \cdot X_f + \Gamma_i^\perp \cdot T_{0|i-1} \cdot U_f \quad (2.50)$$

$$= \Gamma_i^\perp \cdot T_{0|i-1} \cdot U_f, \quad (2.51)$$

isto leva a,

$$\Gamma_i^\perp \cdot Y_f \cdot U_f^\dagger = \Gamma_i^\perp T_{0|i-1}. \quad (2.52)$$

Por simplicidade de notação, denota-se o termo do lado direito da equação com M e Γ_i^\perp com L . Esta equação pode ser reescrita como:

$$\left(M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i \right) = \left(L_1 \ L_2 \ \dots \ L_i \right) \times \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

onde $M_k \in R^{(l_i-n) \times m}$ e $\Omega_k \in R^{(l_i-n) \times l}$. Finalmente tem-se:

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_{i-1} & L_i \\ L_2 & L_3 & \cdots & L_i & 0 \\ L_3 & L_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ L_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \underline{\Gamma}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

2.5 Identificação por subespaços utilizando normas nucleares (N2SID)

Métodos de identificação por subespaços têm um grande apelo computacional por utilizarem eficientes algoritmos matriciais (decomposição QR e SVD) para gerar aproximações de posto reduzido para matrizes construídas através dos dados de entrada e saída. Porém tais métodos falham em garantir a otimalidade de suas estimativas.

Recentemente tem se popularizado a minimização por normas nucleares como uma alternativa para determinar aproximações de posto reduzido de matrizes. A minimização da norma nuclear (soma dos valores singulares) é uma heurística popular para aproximação de matrizes de posto reduzido proposta inicialmente em (FAZEL; HINDI; BOYD, 2001). Ela oferece a vantagem de preservar a estrutura linear matricial, ao contrário da SVD, normalmente utilizada em métodos por subespaços. Esse problema de minimização é também facilmente combinado com termos de regularização convexa assim como restrições convexas nos parâmetros.

Definição 7 Norma Nuclear

A norma nuclear $\|X\|_*$ de uma matriz $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ é definida como a soma dos valores singulares de X

$$\|X\|_* = \text{trace}(\sqrt{X^*X}) = \sum_{i=1}^{\min(p,q)} \sigma_i \quad (2.56)$$

2.5.1 Redução de posto por normas nucleares

O problema de redução de posto resolvido no Teorema 3, com a decomposição SVD da projeção O_i , pode ser reescrito como um problema de otimização da função de custo J . A função de custo pondera a norma nuclear de O_i e o termo de regularização.

O vetor $\check{y}(t)$ $t = 0, \dots, N - 1$ é utilizado como variável de otimização. Não confundir com $y(t)$, que é o vetor de medições da saída. O objetivo é gerar um vetor ótimo $\check{y}(t)$,

que minimize a função de custo J

$$J = \|\check{O}_i\|_* + \gamma \sum_{t=0}^{N-1} \|\check{y}(t) - y(t)\|_2^2 \quad (2.57)$$

onde $\check{O}_i = \check{Y}_f / U_f W_p$ e \check{Y}_f é construído por $\check{y}(t)$.

O parâmetro γ garante uma ponderação entre a redução de posto de O_i e o desvio entre a saída otimizada $\check{y}(t)$ e a saída medida $y(t)$. Uma vez calculada a nova saída, os algoritmos 2 e 3, podem ser utilizados para gerar as realizações em espaço de estados. Além de obter uma resposta ótima, a maior vantagem dessa abordagem é a possibilidade de inserção de restrições no problema de otimização.

2.6 Conclusões

Nesse capítulo foram apresentadas algumas técnicas para construção de realizações em espaço de estados. É feita uma revisão bibliográfica desde o método de Kalman baseado na resposta ao impulso do sistema, seguindo aos métodos por subespaços até a utilização de técnicas mais modernas de otimização por normas nucleares para obtenção de uma realização de posto mínimo.

Capítulo 3

Projeto de excitações pulsadas

3.1 Introdução

O projeto de excitações é uma etapa fundamental na identificação de sistemas. O grau de semelhança entre um modelo identificado e o sistema original é uma função direta da qualidade dos dados experimentais (PINTELO, 2012). É um consenso na literatura que sinais de excitação longos e energéticos melhoram a estimativa de modelos, porém em ambientes industriais, esses requisitos são conflitantes com restrições econômicas e operacionais. Idealmente, devem ser coletadas informações suficientes para caracterização das dinâmicas de interesse da planta, sem desperdício de tempo ou energia em frequências irrelevantes.

A modelagem de sistemas é a etapa mais demorada e dispendiosa em um projeto de sistema de controle (OGUNNAIKE, 1996). Do ponto de vista econômico, é desejável que os experimentos sejam curtos e gerem a menor interferência possível na operação normal da planta. O projeto de excitações ideal deve ponderar o compromisso entre gerar modelos precisos e os custos operacionais, além de ser simples o suficiente para ser executado por operadores não especializados em identificação de sistemas.

É proposto nesse capítulo um algoritmo capaz de gerar automaticamente excitações pulsadas baseadas no atraso e na constante de tempo dominante do sistema. O procedimento desenvolvido é capaz de gerar excitações de baixas e médias frequências, com pouco conhecimento prévio do processo. O projeto da excitação é dividido em duas etapas. É realizada uma estimativa inicial do atraso e da constante de tempo do sistema, por meio de uma única oscilação com um experimento do relé, em seguida um sinal pulsado é gerado na frequência de interesse.

3.2 Experimento do relé

Foi proposto em (ASTROM; HAGGLUND, 1984) que o ganho e a frequência crítica de um processo podem ser estimados a partir das oscilações geradas por uma realimentação com um relé. A estrutura de realimentação mostrada na Figura 3.1 força o aparecimento de uma oscilação crítica na saída, com frequência w_c e defasamento de -180 em relação ao sinal de controle aplicado. É ilustrado um exemplo de sinais de entrada e saída na Figura 3.2.

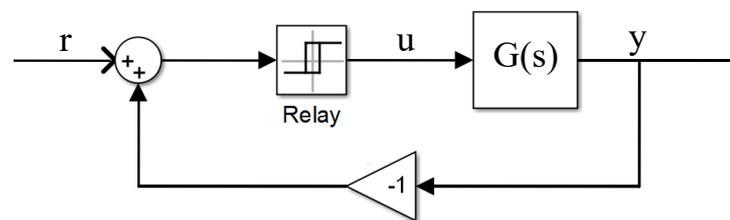


Figura 3.1: Diagrama de blocos de um processo realimentado com um relé

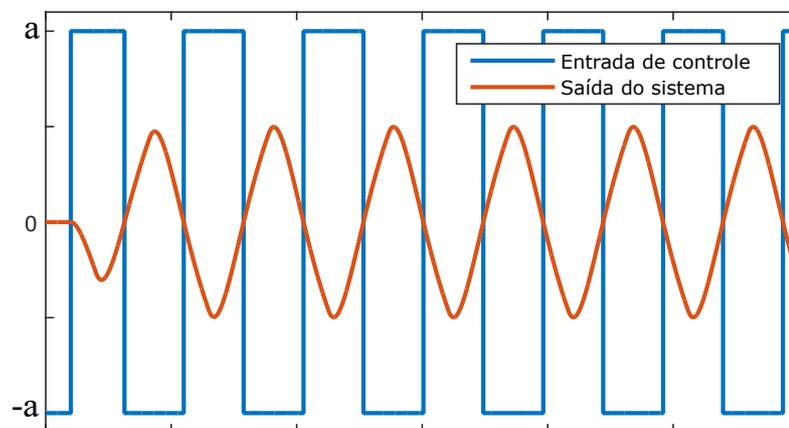


Figura 3.2: Exemplo de sinais de entrada e saída para um processo realimentado com um relé

Definição 8 A função relé é definida matematicamente conforme

$$y = \begin{cases} a, & u \geq \varepsilon \\ -a, & u < \varepsilon \end{cases} \quad (3.1)$$

onde a é a amplitude e ε a histerese do relé. Uma representação gráfica da função relé é ilustrada na Figura 3.3.

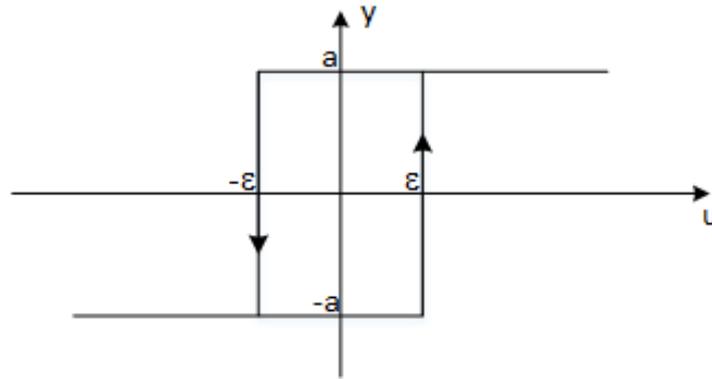


Figura 3.3: Representação gráfica da função relé

O ganho crítico K_{180} é uma função da amplitude do relé e do ganho do sistema k

$$K_{180} = \frac{\pi k}{4a} \quad (3.2)$$

Nota-se que essa estrutura experimental proporciona uma maneira segura e estável de obter uma oscilação crítica, visto que o sinal de controle é sempre mantido em uma faixa fixa determinada pela amplitude do relé.

3.3 Estimativa inicial das dinâmicas dominantes

É demonstrado em (ASTROM; HAGGLUND, 2007) que é possível estabelecer uma relação entre os parâmetros de um modelo FOPTD e estimativas da frequência e ganho crítico, obtidos por um experimento do relé. Essa abordagem é válida para um experimento longo, onde os transitórios iniciais são desprezados, até que uma oscilação permanente se estabeleça. Nesta seção, propõe-se a utilização da primeira oscilação do relé (transitório) para uma estimativa rápida do atraso e da constante de tempo dominante do sistema. Esses parâmetros serão utilizados posteriormente na construção do sinal de excitação principal.

3.3.1 Sistemas com atraso

Assumindo que o sistema alvo possa ser aproximado, de forma razoável, por um modelo FOPTD

$$G(s) = \frac{K}{sT + 1} e^{-sL} \quad (3.3)$$

uma oscilação do relé padrão com amplitude $-a, a$ e histerese $\varepsilon = 0$, é ilustrada na Figura 3.4. Observa-se que a primeira e a segunda transição do sinal de controle ocorrem respectivamente nos instantes t_1 e t_2 .

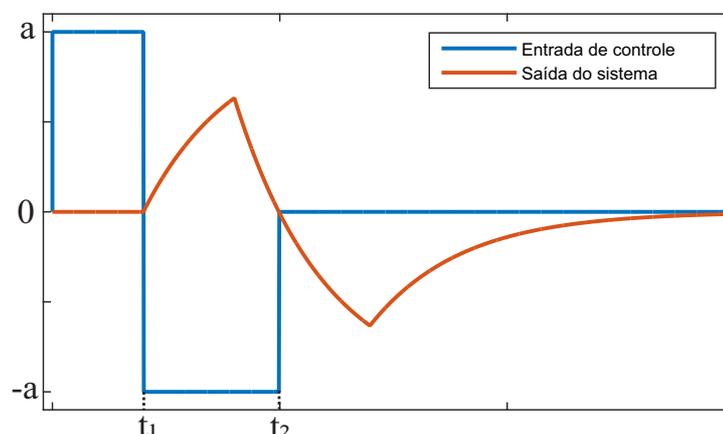


Figura 3.4: Sinais de entrada e saída para uma oscilação de um modelo FOPTD realimentado por um relé padrão

O atraso L é obtido diretamente de t_1 e a constante de tempo dominante do sistema T é relacionada aos instantes de chaveamento conforme o Teorema 4.

Teorema 4 *A constante de tempo T de um sistema FOPTD é relacionada diretamente aos instantes de chaveamento t_1 e t_2 da primeira oscilação de um experimento do relé sem histerese, conforme a Equação*

$$2e^{-\frac{t_2-2t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2-t_1}{T}} = 1 \quad (3.4)$$

Prova. Fatore o sinal da entrada de controle u_{relay} como a soma de três degraus $u_{d1}(t) = au(t)$, $u_{d2}(t) = -2au(t - t_1)$ e $u_{d3}(t) = au(t - t_2)$. Usando o teorema da superposição, a saída do sistema pode ser escrita como uma função dos três sinais de entrada

$$Y(s) = G(s)U_{relay}(s) \quad (3.5)$$

$$Y(s) = G(s)(U_{d1}(s) + U_{d2}(s) + U_{d3}(s)) \quad (3.6)$$

$$Y(s) = G(s)U_{d1}(s) + G(s)U_{d2}(s) + (s)G(s)U_{d3} \quad (3.7)$$

tomando a transformada inversa de Laplace

$$y(t) = aK(1 - e^{-\frac{t-L}{T}}) - 2aK(1 - e^{-\frac{t-L-t_1}{T}}) + aK(1 - e^{-\frac{t-L-t_2}{T}}) \quad (3.8)$$

Como o relé utilizado não apresenta histerese, a saída do sistema é zero nas transições $y(t_1) = y(t_2) = 0$. O atraso do sistema é estimado como o tempo da primeira transição $L = t_1$ e a saída do sistema na transição t_2 é dada por

$$y(t_2) = 0 = aK(1 - e^{-\frac{t_2-L}{T}}) - 2aK(1 - e^{-\frac{t_2-L-t_1}{T}}) \quad (3.9)$$

$$0 = aK(1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{T}}) - 2aK(1 - e^{-\frac{t_2-t_1-t_1}{T}}) \quad (3.10)$$

$$2e^{-\frac{t_2-2t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2-t_1}{T}} = 1 \quad (3.11)$$

■

Não existe uma solução analítica para T na Equação 3.11. Porém um resultado aproximado pode ser calculado por meio da expansão em série de Maclaurin da função exponencial, conforme o Teorema 5.

Teorema 5 *Uma aproximação para a constante de tempo T de um sistema FOPTD pode ser calculada a partir dos tempos de chaveamento t_1 e t_2 da primeira oscilação de um experimento do relé sem histerese.*

$$T = \frac{t_2^2 - 6t_1t_2 + 7t_1^2}{2t_2 - 6t_1} \quad (3.12)$$

Prova. A expansão em série de Maclaurin da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots \quad (3.13)$$

os termos exponenciais da Equação 3.11 podem ser aproximados como uma expansão de segunda ordem conforme

$$2e^{-\frac{t_2-2t_1}{T}} \approx 2\left[1 - \frac{(t_2 - 2t_1)}{T} + \frac{(t_2 - 2t_1)^2}{2T^2}\right] \quad (3.14)$$

$$e^{-\frac{t_2-t_1}{T}} \approx 1 - \frac{(t_2 - t_1)}{T} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2T^2} \quad (3.15)$$

substituindo 3.14 e 3.15 em 3.11

$$2\frac{2T^2 + (4t_1 - 2t_2)T + (t_2^2 - 4t_2t_1 + 4t_1^2)}{2T^2} - \quad (3.16)$$

$$\frac{2T^2 + (2t_1 - 2t_2)T + (t_2^2 - 2t_2t_1 + t_1^2)}{2T^2} = 1 \quad (3.17)$$

$$T(-2t_2 + 6t_1) + (t_2^2 - 6t_1t_2 + 7t_1^2) = 0 \quad (3.18)$$

$$T = \frac{t_2^2 - 6t_1t_2 + 7t_1^2}{2t_2 - 6t_1} \quad (3.19)$$

■

3.3.2 Sistemas sem atraso

Assumindo que o sistema alvo possa ser aproximado, de forma razoável, por um modelo de primeira ordem, e não apresente atraso

$$G(s) = \frac{K}{sT + 1} \quad (3.20)$$

uma oscilação do relé padrão com amplitude $-a, a$ e histerese ε , é ilustrada na Figura 3.5. Observa-se que a primeira e a segunda transição do sinal de controle ocorrem respectivamente nos instantes t_1 e t_2 . Salientando que a histerese deve ser não nula para possibilitar uma oscilação sustentada, visto que nesse caso o sistema é aproximado por um modelo de primeira ordem.

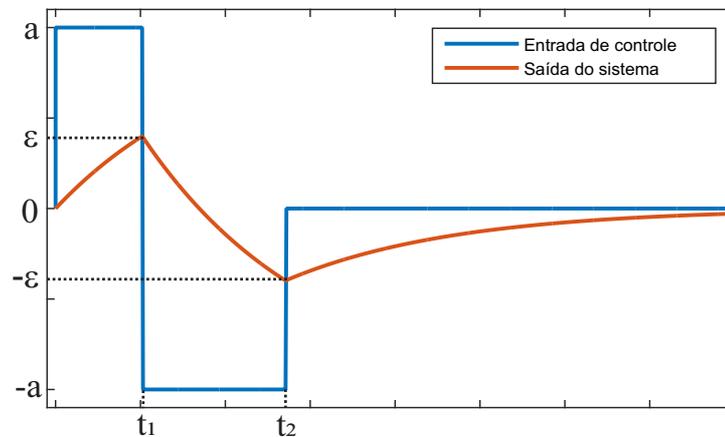


Figura 3.5: Sinais de entrada e saída para uma oscilação de um modelo de primeira ordem realimentado por um relé com histerese

De forma semelhante ao sistema com atraso, a constante de tempo T tem uma relação direta com os instantes de chaveamento t_1 e t_2 . Essa dependência é dada pelo Teorema 6

Teorema 6 *A constante de tempo T de um sistema de primeira ordem é relacionada diretamente aos instantes de chaveamento t_1 e t_2 da primeira oscilação de um experimento do relé com histerese, conforme a Equação*

$$2e^{-\frac{t_2-t_1}{T}} - e^{-\frac{t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2}{T}} = 0 \quad (3.21)$$

Prova. Fatore o sinal da entrada de controle u_{relay} como a soma de três degraus $u_{d1}(t) = au(t)$, $u_{d2}(t) = -2au(t - t_1)$ e $u_{d3}(t) = au(t - t_2)$. Usando o teorema da superposição, a saída do sistema pode ser escrita como uma função dos três sinais de entrada

$$Y(s) = G(s)U_{relay}(s) \quad (3.22)$$

$$Y(s) = G(s)(U_{d1}(s) + U_{d2}(s) + U_{d3}(s)) \quad (3.23)$$

$$Y(s) = G(s)U_{d1}(s) + G(s)U_{d2}(s) + G(s)U_{d3}(s) \quad (3.24)$$

tomando a transformada inversa de Laplace

$$y(t) = aK(1 - e^{-\frac{t}{T}}) - 2aK(1 - e^{-\frac{t-t_1}{T}}) + aK(1 - e^{-\frac{t-t_2}{T}}) \quad (3.25)$$

Como o relé utilizado apresenta histerese, a saída do sistema nas transições é $y(t_1) = \varepsilon$ e $y(t_2) = -\varepsilon$. Substituindo na Equação 3.25

$$y(t_1) = \varepsilon = aK(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}) \quad (3.26)$$

$$y(t_2) = -\varepsilon = aK(1 - e^{-\frac{t_2}{T}}) - 2aK(1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{T}}) \quad (3.27)$$

dividindo as Equações 3.26 e 3.27

$$\frac{y(t_1)}{y(t_2)} = \frac{\varepsilon}{-\varepsilon} = \frac{aK(1 - e^{-\frac{t_1}{T}})}{aK(1 - e^{-\frac{t_2}{T}} - 2 + 2e^{-\frac{t_2-t_1}{T}})} = -1 \quad (3.28)$$

$$2e^{-\frac{t_2-t_1}{T}} - e^{-\frac{t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2}{T}} = 0 \quad (3.29)$$

■

Não existe uma solução analítica para T na Equação 3.29. Porém um resultado aproximado pode ser calculado por meio da expansão em série de Maclaurin da função exponencial, conforme o Teorema 7.

Teorema 7 *Uma aproximação para a constante de tempo T de um sistema de primeira ordem, pode ser calculada, a partir dos tempos de chaveamento t_1 e t_2 da primeira oscilação de um experimento do relé com histerese.*

$$T = \frac{t_2^2 - 4t_1t_2 + t_1^2}{2t_2 - 6t_1} \quad (3.30)$$

Prova. A expansão em série de Maclaurin da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots \quad (3.31)$$

os termos exponenciais da Equação 3.11 podem ser aproximados como uma expansão de segunda ordem conforme

$$2e^{-\frac{t_2-t_1}{T}} \approx 2\left(1 - \frac{(t_2 - t_1)}{T} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2T^2}\right) \quad (3.32)$$

$$e^{-\frac{t_2}{T}} \approx 1 - \frac{(t_2)}{T} + \frac{(t_2)^2}{2T^2} \quad (3.33)$$

$$e^{-\frac{t_1}{T}} \approx 1 - \frac{(t_1)}{T} + \frac{(t_1)^2}{2T^2} \quad (3.34)$$

substituindo 3.32, 3.33 e 3.34 em 3.29

$$2 \frac{2T^2 + (2t_1 - 2t_2)T + (t_2^2 - 2t_2t_1 + t_1^2)}{2T^2} - \quad (3.35)$$

$$\frac{2T^2 - 2t_1T + t_1^2}{2T^2} - \frac{2T^2 - 2t_2T + t_2^2}{2T^2} = 0 \quad (3.36)$$

$$T(-2t_2 + 6t_1) + (t_2^2 - 4t_1t_2 + t_1^2) = 0 \quad (3.37)$$

$$T = \frac{t_2^2 - 4t_1t_2 + t_1^2}{2t_2 - 6t_1} \quad (3.38)$$

■

3.4 Definição das excitações

Em grande parte das aplicações industriais, experimentos longos com sinais complexos são inviáveis devido à necessidade de manter a taxa de produção. Dessa forma a maioria dos experimentos se resumem a entradas do tipo degrau ou pulso (BARENTHIN, 2006). Nessa seção, serão projetados sinais de excitação pulsados baseados nas estimativas de atraso e constante de tempo dominante obtidas na Seção 3.3.

Os métodos de identificação propostos no próximo capítulo partem da premissa que o sinal de excitação aplicado ao sistema é formado por uma combinação de pulsos com uma determinada configuração. Primeiramente é definido um único pulso simples, em seguida sinais mais complexos são generalizados.

3.4.1 Pulso Simples

A unidade básica para construção dos sinais de entrada é definida na Equação 3.39 e ilustrada na Figura 3.6.

$$u_B(t) = \begin{cases} u_B(t) = 0, & t < \gamma \\ u_B(t) = \beta, & \gamma \leq t < \alpha + \gamma \\ u_B(t) = 0, & t \geq \alpha + \gamma \end{cases} \quad (3.39)$$

onde γ é o atraso inicial do sinal, α é a duração do pulso e β é a sua amplitude. De maneira geral, α e γ determinam a faixa de frequência que o sinal vai excitar. É proposto que esses parâmetros sejam escolhidos como uma função da constante de tempo dominante, estimada na Seção 3.3.

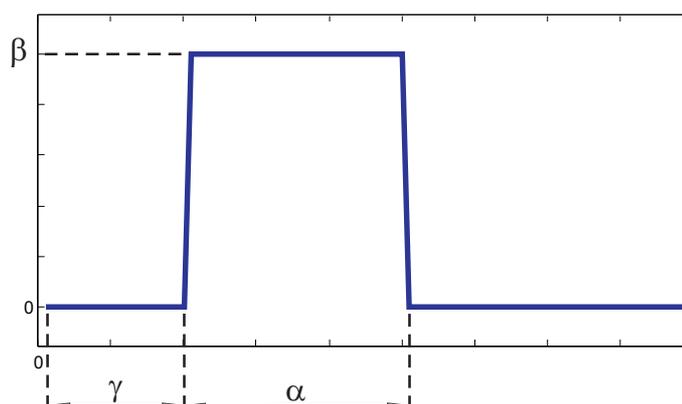


Figura 3.6: Ilustração do pulso base $u_B(t)$

Proposição 8 *Com o intuito de garantir que o estado estacionário seja atingido a cada transição, é proposto que os parâmetros $\alpha = \gamma = 5T$. Assumindo que T é a constante de tempo dominante, no instante $t = L + 5T$ a saída do sistema será aproximadamente 99% do regime estacionário.*

Prova. A resposta ao degrau de um modelo FOPTD é dada por

$$y(t) = aK(1 - e^{-\frac{t-L}{T}}) \quad (3.40)$$

portanto a razão entre o valor da saída no instante $t = L + 5T$ e $t = \infty$ é

$$\frac{y(L + 5T)}{y(\infty)} = \frac{aK(1 - e^{-\frac{L+5T-L}{T}})}{aK} = 1 - e^{-5} = 0,9933 \quad (3.41)$$

■

A matriz de Hankel da entrada $U_{1|r}^B$ é construída através de um janelamento de horizonte r no vetor de entrada $u_B(t)$. Devido ao formato pulsado da entrada, a matriz de Hankel pode ser expressa em três termos

$$U_{1|r}^B = \left[U_{1|r}^{B\Delta} \mid U_{1|r}^{B\Phi} \mid U_{1|r}^{B\Psi} \right] \quad (3.42)$$

$$U_{1|r}^{B\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta & \beta & \beta \end{bmatrix} \quad U_{1|r}^{B\Phi} = \begin{bmatrix} \beta & \dots & \beta \\ \beta & \dots & \beta \\ \beta & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta & \dots & \beta \end{bmatrix} \quad U_{1|r}^{B\Psi} = \begin{bmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

onde $U_{1|r}^{B\Delta} \in R^{(r) \times (\gamma)}$, $U_{1|r}^{B\Phi} \in R^{(r) \times (\alpha-r)}$ e $U_{1|r}^{B\Psi} \in R^{(r) \times (r-1)}$.

3.4.2 Pulsos Compostos

Existem situações em que uma excitação mais rica é necessária, caso seja fundamental a captura de dinâmicas mais complexas do sistema em estudo. Partindo do pulso simples, definido na Equação 3.39, é possível construir sinais de entrada mais complexos por concatenação. Duas possíveis configurações são ilustradas nas Figuras 3.7 e 3.8.

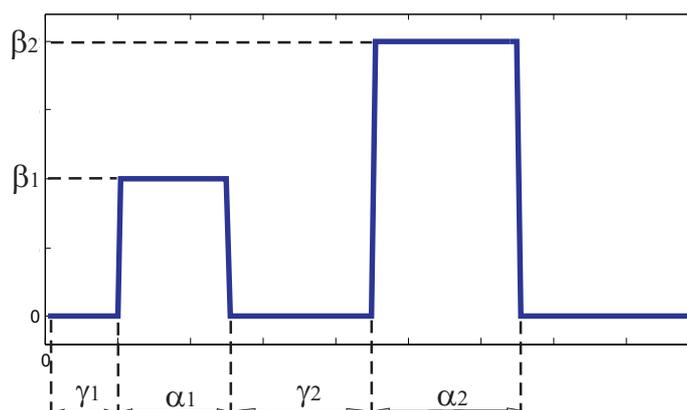


Figura 3.7: Pulso Duplo (caso 1)

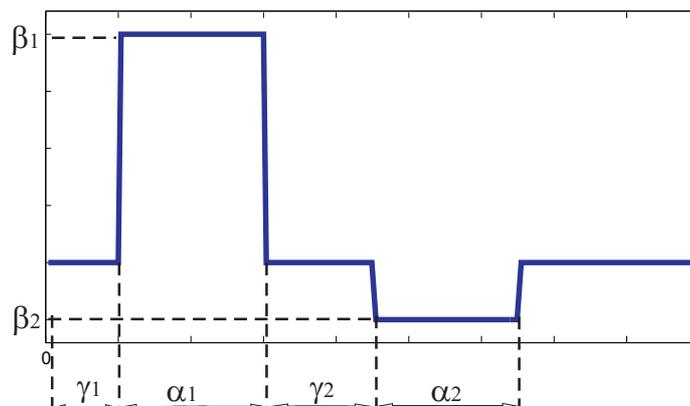


Figura 3.8: Pulso Duplo (caso 2)

Considerando que um sinal genérico $u_M(t)$ seja formado pela concatenação de uma série de pulsos base $u_B(t)$ com amplitudes e períodos diferentes

$$u_M(t) = \begin{cases} u(t) = u_{B1}(t), & t < \alpha_1 + \gamma_1 \\ u(t) = u_{B2}(t), & \alpha_1 + \gamma_1 < t < \alpha_2 + \gamma_2 \\ \dots \\ u(t) = u_{Bn}(t), & \alpha_{n-1} + \gamma_{n-1} < t < \alpha_n + \gamma_n \end{cases} \quad (3.44)$$

A representação em blocos de Hankel de $u_M(t)$, é simplesmente a concatenação dos blocos de Hankel de cada sinal do tipo $u_B(t)$ aplicado

$$U_{1|r}^M = \begin{bmatrix} U_{1|r}^{B1} & U_{1|r}^{B2} & \dots & U_{1|r}^{Bn} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

3.4.3 Persistência das excitações

O conceito de persistência de excitação está relacionado a ordem que um modelo linear pode ser estimado. Segundo (LJUNG, 2010), um sinal de entrada com persistência de ordem n pode ser utilizado, no máximo, para estimar n variáveis, de forma consistente.

Definição 9 *Persistência da Excitação*

A sequência de entrada $u(t)$ é persistentemente excitante de ordem n se a matriz covariância de entrada R_{uu} tem posto completo. (LJUNG, 2010)

$$R_{uu} = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \dots & R_u(n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \dots & R_u(n-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix} = E[U_{0|n-1}U_{0|n-1}^T] \quad (3.46)$$

onde $R_u(\tau)$ é a função de covariância do sinal de entrada

$$R_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-\tau) \quad (3.47)$$

3.5 Exemplos de simulação

É realizada uma série de simulações para exemplificar os conceitos definidos nesse capítulo.

3.5.1 Exemplo simulado 1

Assumindo um sistema alvo de primeira ordem com atraso, representado pela função de transferência

$$G(s) = \frac{e^{-0,8s}}{(5s+1)} \quad (3.48)$$

é realizada a montagem da Figura 3.1 e a primeira oscilação do relé é coletada. Foi utilizado um relé de amplitude $a = 1$ e histerese $\varepsilon = 0$. Os sinais, amostrados com $0,01s$, são representados na Figura 3.9

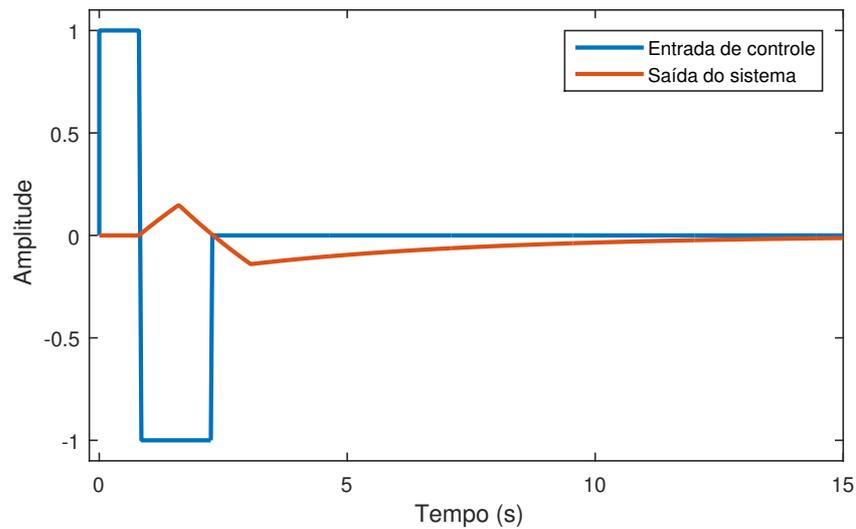


Figura 3.9: Gráfico dos sinais da primeira oscilação do relé do Exemplo 3.5.1

As transições ocorreram respectivamente nos instantes $t_1 = 0,81s$ e $t_2 = 2,30s$. Dessa forma, segundo o Teorema 5, o atraso estimado é $L = 0,81s$ e a constante de tempo é $T = 4,982$. Um sinal de excitação completo, composto por um pulso simples com $\alpha = 5T$, $\beta = 1$ e $\gamma = 4T$, é ilustrado na Figura 3.10

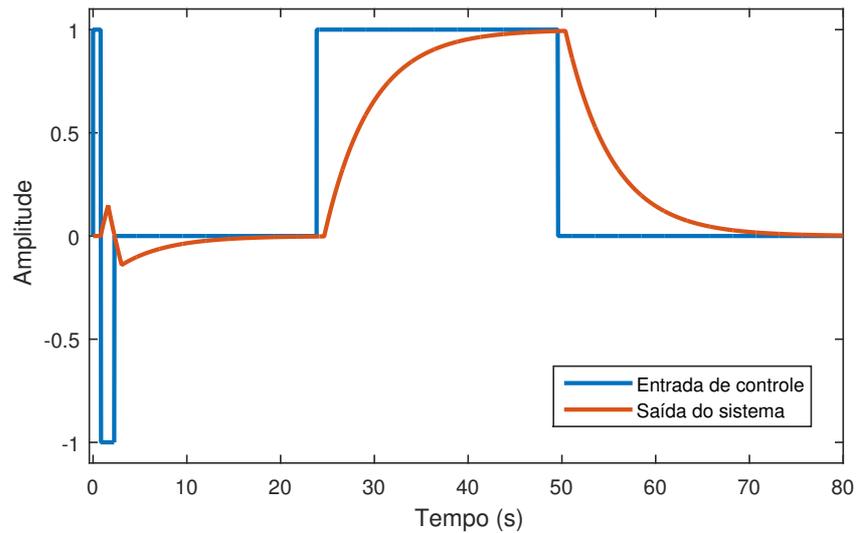


Figura 3.10: Gráfico do sinal de excitação projetado no Exemplo 3.5.1

3.5.2 Exemplo simulado 2

Assumindo um sistema alvo de primeira ordem, representado pela função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(2s + 1)} \quad (3.49)$$

é realizada a montagem da Figura 3.1 e a primeira oscilação do relé é coletada. Foi utilizado um relé de amplitude $a = 1$ e histerese $\varepsilon = 0,2$. Os sinais, amostrados com $0,01s$, são representados na Figura 3.11

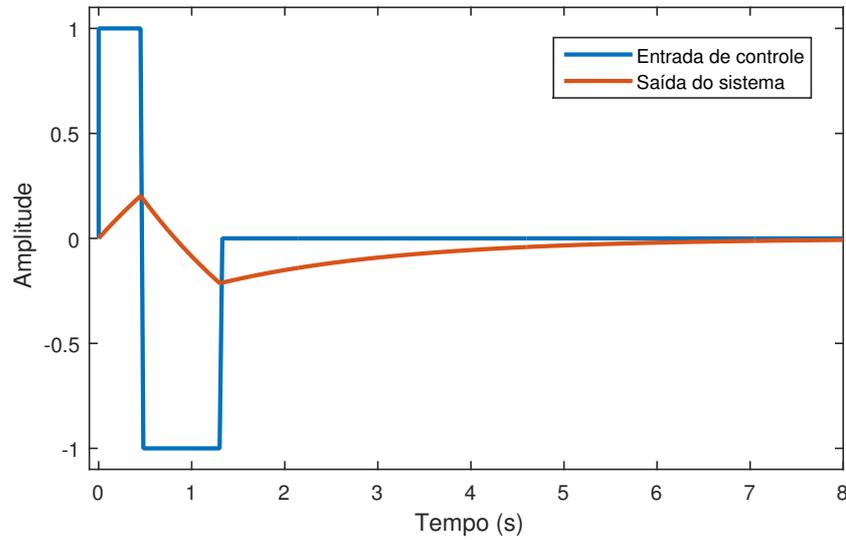


Figura 3.11: Gráfico dos sinais da primeira oscilação do relé do Exemplo 3.5.2

As transições ocorreram respectivamente nos instantes $t_1 = 0,50s$ e $t_2 = 1,34s$. Dessa forma, segundo o Teorema 7, a constante de tempo é $T = 1,983$. Um sinal de excitação completo, formado por um pulso composto com $\alpha_1 = 5T$, $\alpha_2 = 5T$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -0,5$, $\gamma_1 = 4T$ e $\gamma_2 = 5T$, é ilustrado na Figura 3.12

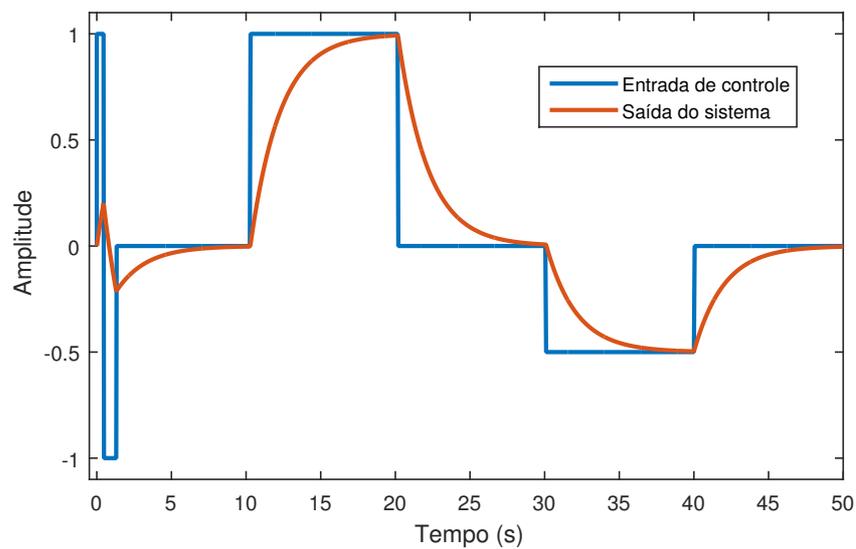


Figura 3.12: Gráfico do sinal de excitação projetado no Exemplo 3.5.2

3.6 Conclusões

Nesse capítulo foi definido o formato das excitações que serão utilizadas nos métodos de identificação propostos nessa tese. Assumindo que poucas informações são disponibilizadas a priori, foi proposta uma metodologia para estimar a constante de tempo dominante, por meio da primeira oscilação de um experimento do relé. Essa informação, serve de parâmetro para o projeto da excitação principal, que é composta por um ou mais pulsos concatenados.

Capítulo 4

Identificação de modelos em espaço de estados, por meio de excitações pulsadas

4.1 Introdução

A representação de sistemas em espaço de estados foi largamente popularizada após os anos 60, devido a uma série de vantagens como proporcionar uma descrição interna detalhada dos sistemas, ser apropriada a sistemas multivariáveis, possibilitar a utilização de técnicas numéricas eficientes e viabilizar a aplicação de técnicas de controle avançadas. Foram revisados, no Capítulo 2, métodos clássicos para construção de realizações em espaço de estados, especialmente o método de Kalman que deu origem as técnicas por subespaços. Os métodos por subespaços têm sido extensivamente investigados nos últimos anos, porém aspectos importantes, quanto a sua aplicação em processos reais, ainda não foram completamente dominados. Um dos pontos críticos é relativo ao projeto de excitações. Métodos por subespaços apresentam melhores resultados para sinais de entrada bastante excitantes, de forma que sua performance é degradada a medida que a banda dos sinais de entrada é reduzida (QIN, 2006).

O algoritmo original de Kalman, apresentado na Seção 2.3, assume que os coeficientes da resposta ao impulso do sistema são conhecidos como passo inicial para a construção das realizações em espaço de estados. Porém medir diretamente a resposta ao impulso de um sistema é muitas vezes inviável. Amortecimentos de alta frequência podem resultar em uma resposta bastante curta à medida que a relação sinal ruído se torna impraticável, além de que o impulso unitário pode excitar não linearidades de alta frequência que degradam

a qualidade da estimativa. Realizar a transformada inversa de Fourier da resposta em frequência é uma das opções para contornar essa dificuldade, porém as estimativas dos parâmetros de Markov somente convergirão caso o sinal de entrada tenha uma banda de frequência larga. Os sinais de entrada utilizados em grande parte dos experimentos práticos de identificação são de banda estreita, portanto em muitos casos o cálculo da resposta em frequência por inversão do espectro de entrada acentua os ruídos de medição.

Aplicações industriais normalmente não possibilitam a aplicação de sinais com banda de frequência larga. Devido a uma série de restrições operacionais, limitações dos atuadores ou econômicas, muitos dos experimentos práticos são restritos a excitações do tipo degrau ou pulso. Algumas soluções para esse problema foram desenvolvidas em trabalhos como o de (HELMONT; WEIDEN; ANNEVELD, 1990) e (MILLER; CALLAFON, 2012b), nos quais o problema de realizações é resolvido para resposta ao degrau. Essa questão também pode ser encarada como um problema de identificação usando segmentos de dados (NADERI; KHORASANI, 2016), ou um problema de minimização de normas nucleares (VERHAEGEN; HANSSON, 2014).

É proposto nesse capítulo um novo método para identificação de modelos de alta ordem em espaço de estados a partir da resposta ao pulso de um sistema. A metodologia desenvolvida é computacionalmente eficiente e possibilita a estimativa de atrasos de transporte, assim como a inserção de conhecimentos prévios por meio de um problema de otimização com restrições via LMI *Linear Matrix Inequalities*. O conjunto de técnicas desenvolvidas é especialmente voltado para aplicações reais.

4.2 Construção de realizações em espaço de estados utilizando sinais pulsados

O método de identificação proposto parte da premissa que o sinal de excitação aplicado ao sistema é formado por uma combinação de pulsos com uma determinada configuração. Primeiramente é exposta a ideia para um único pulso, em seguida o método é generalizado para sinais mais complexos.

4.2.1 Realizações por pulso simples (RPS)

Sem perda de generalidade, assumindo por um momento que o sistema não apresenta atraso ($t_d = 0$). As matrizes de Hankel das entradas e saída são definidas como

$$Y_{1|r} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(l) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(l+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(r) & y(r+1) & \dots & y(l+r) \end{bmatrix} \quad Y_{2|r+1} = \begin{bmatrix} y(2) & y(3) & \dots & y(l+1) \\ y(3) & y(4) & \dots & y(l+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(r+1) & y(r+2) & \dots & y(l+r+1) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$U_{1|r} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(l) \\ u(2) & u(3) & \dots & u(l+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(r) & u(r+1) & \dots & u(l+r) \end{bmatrix} \quad U_{2|r+1} = \begin{bmatrix} u(2) & u(3) & \dots & u(l+1) \\ u(3) & u(4) & \dots & u(l+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(r+1) & u(r+2) & \dots & u(l+r+1) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde $Y_{1|r} \in \mathbb{R}^{r \times l}$, $Y_{2|r+1} \in \mathbb{R}^{r \times l}$, $U_{1|r} \in \mathbb{R}^{r \times l}$, $U_{2|r+1} \in \mathbb{R}^{r \times l}$.

Considerando somente a parte determinística do modelo em questão, a equação (2.17) é estendida para forma de blocos de Hankel conforme

$$Y_{1|r} = H_{1|r}U_a + T_{0|r-1}U_{1|r} \quad (4.3)$$

$$Y_{2|r+1} = H_{2|r+1}U_a + T_{1|r}U_{1|r} \quad (4.4)$$

onde $T_{0|r-1}$ e $T_{1|r}$ são matrizes de blocos Toeplitz, $U_{1|r} \in \mathbb{R}^{(r) \times (l)}$ é a matriz de entrada de Hankel, $Y_{1|r} \in \mathbb{R}^{(r) \times (l)}$ é a matriz de saída de Hankel e $U_a \in \mathbb{R}^{(l) \times (l)}$ é uma matriz triangular inferior.

$$T_{0|r-1} = \begin{bmatrix} G(0) & & & & \\ G(1) & G(0) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ G(r-1) & G(r-2) & \dots & G(0) & \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$T_{1|r} = \begin{bmatrix} G(1) & G(0) & & & \\ G(2) & G(1) & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & G(0) & \\ G(r) & G(r-1) & \dots & G(1) & \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$U_a = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(l-1) \\ 0 & u(0) & \dots & u(l-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u(0) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

O objetivo da técnica é calcular uma estimativa para a matriz $H_{1|r}$ e gerar a realização em espaço de estados por meio do algoritmo de Kalman. Em métodos tradicionais baseados em subespaços isso é realizado por meio de uma projeção que separe $H_{1|r}$ e $T_{0|r-1}$, como visto no Teorema 2. Uma das condições para esse projetor existir é a persistência de ordem r do sinal de excitação.

É proposta uma forma de calcular analiticamente uma estimativa da matriz $H_{1|r}$ utilizando somente os sinais de entrada e saída coletados experimentalmente. Assumindo que o sistema é excitado com um pulso $u_B(t)$ definido na Equação 3.39, é possível calcular explicitamente o termo $T_{0|r-1}U_{1|r}$ na Equação 4.3 e isolar $H_{1|r}$. Se $r < \alpha$ e $r < \gamma$, então a matriz de Hankel da entrada $U_{1|r}^B$, pode ser expressa em três termos

$$U_{1|r}^B = \left[U_{1|r}^{B\Delta} \mid U_{1|r}^{B\Phi} \mid U_{1|r}^{B\Psi} \right] \quad (4.8)$$

$$U_{1|r}^{B\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta & \beta & \beta \end{bmatrix} U_{1|r}^{B\Phi} = \begin{bmatrix} \beta & \dots & \beta \\ \beta & \dots & \beta \\ \beta & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta & \dots & \beta \end{bmatrix} U_{1|r}^{B\Psi} = \begin{bmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde $U_{1|r}^{B\Delta} \in R^{(r) \times (\gamma)}$, $U_{1|r}^{B\Phi} \in R^{(r) \times (\alpha-r)}$ e $U_{1|r}^{B\Psi} \in R^{(r) \times (r-1)}$.

Substituindo as Equações 4.5 e 4.8

$$T_{0|r-1}U_{1|r}^B = \begin{bmatrix} \Delta & \Phi & \Psi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\Delta = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G(0) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G(0) + G(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & G(0) & \dots & G(0) + G(1) \dots + G(r-3) \\ 0 & G(0) & G(0) + G(1) & \dots & G(0) + G(1) \dots + G(r-2) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\Phi = \beta \begin{bmatrix} G(0) & \dots & G(0) \\ G(0) + G(1) & \dots & G(0) + G(1) \\ G(0) + G(1) + G(2) & \dots & G(0) + G(1) + G(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ G(0) + G(1) \dots + G(r-2) & \dots & G(0) + G(1) \dots + G(r-2) \\ G(0) + G(1) \dots + G(r-1) & \dots & G(0) + G(1) \dots + G(r-1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Psi = \beta \begin{bmatrix} G(0) & G(0) & \dots & G(0) \\ G(0) + G(1) & G(0) + G(1) & \dots & G(1) \\ G(0) + G(1) + G(2) & G(0) + G(1) + G(2) & \dots & G(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(0) + G(1) \dots + G(r-2) & G(1) + G(2) \dots + G(r-2) & \dots & G(r-2) \\ G(1) + G(2) \dots + G(r-1) & G(2) + G(3) \dots + G(r-1) & \dots & G(r-1) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Sabe-se que para um sistema linear

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k)u(t-k) \quad (4.14)$$

portanto a matriz $T_{0|r-1}U_{1|r}^B$ pode ser re-escrita somente como uma função do sinal de

saída $f(y(t))$ da seguinte forma

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y(\gamma+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & y(\gamma) & \dots & y(\gamma+r-2) \\ 0 & y(\gamma) & y(\gamma+1) & \dots & y(\gamma+r-3) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} y(\gamma) & \dots & y(\gamma) \\ y(\gamma+1) & \dots & y(\gamma+1) \\ y(\gamma+2) & \dots & y(\gamma+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(\gamma+r-2) & \dots & y(\gamma+r-2) \\ y(\gamma+r-1) & \dots & y(\gamma+r-1) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} y(\gamma) & y(\gamma) & \dots & y(\gamma) \\ y(\gamma+1) & y(\gamma+1) & \dots & y(\gamma+1) - y(\gamma) \\ y(\gamma+2) & y(\gamma+2) & \dots & y(\gamma+2) - y(\gamma+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(\gamma+r-2) & y(\gamma+r-2) - y(\gamma) & \dots & y(\gamma+r-2) - y(\gamma+r-3) \\ y(\gamma+r-1) - y(\gamma) & y(\gamma+r-1) - y(\gamma+1) & \dots & y(\gamma+r-1) - y(\gamma+r-2) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde $\Delta \in R^{(r) \times (\gamma)}$, $\Phi \in R^{(r) \times (\alpha-r)}$ e $\Psi \in R^{(r) \times (r-1)}$.

Então chega-se a conclusão de que $H_{1|r}$ e $H_{2|r+1}$ são funções apenas dos dados de entradas e saídas conforme as Equações 4.18 e 4.19

$$H_{1|r} \approx (Y_{1|r} - T_{0|r-1} U_{1|r}^B) U_a^\dagger = (Y_{1|r} - f(y(t))_{1|r}) U_a^\dagger \quad (4.18)$$

$$H_{2|r+1} \approx (Y_{2|r+1} - T_{0|r-1} U_{2|r+1}^B) U_a^\dagger = (Y_{2|r+1} - f(y(t))_{2|r+1}) U_a^\dagger. \quad (4.19)$$

Essa metodologia também é válida para sistemas multivariáveis, contanto que o sistema seja excitado de forma sequencial. Cada entrada é excitada isoladamente enquanto as demais permanecem em repouso. Essa estratégia gera matrizes de Hankel em que cada elemento é um bloco com dimensões $p \times m$, onde p é o número de saídas e m o de entradas.

Em suma, a realização em espaço de estados é obtida de acordo com o Algoritmo 4.

Algoritmo 4 *Algoritmo de realizações por pulso simples (RPS)*

- Defina o formato do pulso de entrada, (α, β, γ) ;
- Calcule $T_{0|r-1}U_{1|r}^B = \begin{bmatrix} \Delta & \Phi & \Psi \end{bmatrix}$ por meio das Equações 4.15, 4.16 e 4.17;
- Calcule $H_{1|r}$ e $H_{2|r+1}$ por meio das Equações 4.18 e 4.19;
- Efetue a SVD de $H_{1|r}$ conforme a Equação 2.21;
- Determine a ordem n do sistema inspecionando os valores singulares de $H_{1|r}$;
- Calcule $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ de acordo com a Tabela 2.1.

4.2.2 Realizações por pulsos compostos (RPC)

O método RPC é uma extensão direta do RPS quando excitações mais ricas são necessárias. Caso seja essencial capturar informações em faixas de frequência mais abrangentes, é possível construir sinais mais complexos por concatenação do pulso simples, definido na Equação 3.39. Os parâmetros α e γ estão diretamente ligados ao espectro do sinal gerado.

Considerando que um sinal genérico $u_M(t)$ seja formado pela concatenação de uma série de pulsos base $u_B(t)$ com amplitudes e períodos diferentes

$$u_M(t) = \begin{cases} u(t) = u_{B1}(t), & t < \alpha_1 + \gamma_1 \\ u(t) = u_{B2}(t), & \alpha_1 + \gamma_1 < t < \alpha_2 + \gamma_2 \\ \dots \\ u(t) = u_{Bn}(t), & \alpha_{n-1} + \gamma_{n-1} < t < \alpha_n + \gamma_n \end{cases} \quad (4.20)$$

a representação em blocos de Hankel de $u_M(t)$, é simplesmente a concatenação dos blocos de Hankel de cada sinal do tipo $u_B(t)$ aplicado

$$U_{1|r}^M = \begin{bmatrix} U_{1|r}^{B1} & U_{1|r}^{B2} & \dots & U_{1|r}^{Bn} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Desta forma o método RPC é a extensão natural do método RPS, quando uma sequência de pulsos base é aplicada na entrada.

Partindo da Equação 4.21 é fácil ver que o termo $T_{0|r-1}U_{1|r}^M$ da Equação 4.3 pode ser subdividido em n termos, os quais podem ser calculados individualmente conforme a Equação 4.10

$$T_{0|r-1}U_{1|r}^M = \begin{bmatrix} T_{0|r-1}U_{1|r}^{B1} & T_{0|r-1}U_{1|r}^{B2} & \dots & T_{0|r-1}U_{1|r}^{Bn} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Uma vez que $T_{0|r-1}U_{1|r}^M$ é calculado, $H_{1|r}^M$ é estimado conforme

$$H_{1|r}^M \approx (Y_{1|r} - T_{0|r-1}U_{1|r}^M)U_a^\dagger \quad (4.23)$$

e a realização em espaço de estados é obtida pelo Algoritmo 5.

Algoritmo 5 *Algoritmo de realizações por pulsos compostos (RPC)*

- Defina o formato dos n pulsos de entrada, $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$;
- Calcule os n termos $T_{0|r-1}U_{1|r}^{Bn}$ e monte a matriz $T_{0|r-1}U_{1|r}^M$, conforme a Equação 4.22;
- Calcule $H_{1|r}^M$ e $H_{2|r+1}^M$ por meio da Equação 4.23;
- Efetue a SVD de $H_{1|r}^M$ definida na Equação 2.21;
- Determine a ordem do sistema inspecionando os valores singulares de $H_{1|r}^M$;
- Calcule $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ conforme a Tabela 2.1.

4.3 Modelos com atraso

Muitos sistemas dinâmicos envolvem atrasos, também chamados de tempo morto ou atrasos de transporte. Tal fenômeno normalmente está relacionado ao transporte de massa ou energia entre dois pontos de um sistema, mascarando a sua resposta dinâmica. Encontram-se exemplos de atrasos em sistemas térmicos, pneumáticos, hidráulicos, redes de comunicação etc.

A presença de atrasos tende a causar instabilidade em malha fechada, assim como torna o problema de controle desafiador por causar um deslocamento de fase que limita a banda de atuação do controlador. Por esses e outros motivos é importante o desenvolvimento de ferramentas para estimativa consistente desse parâmetro.

4.3.1 Classificação de métodos para estimativa de atraso

A maioria dos métodos para estimação de atrasos encontrados na literatura pode ser enquadrada nas seguintes categorias (BJORKLUND; LJUNG, 2003)

1. **Métodos de aproximação por modelos:** Os sinais de entrada e saída são representados em uma certa base e o atraso é estimado a partir de uma aproximação da relação entre esses sinais. Existem duas etapas nessa metodologia, estimar o modelo aproximado, em seguida estimar o atraso a partir do modelo.

- Domínio do tempo: O atraso é estimado pela detecção do ponto onde a resposta ao impulso inicia (CARLEMALM et al., 1999);
- Domínio da frequência: O atraso é estimado pela sua fase (ASTROM; HAGGLUND, 2007);
- Domínio de Laguerre: O atraso é obtido pela relação entre os sinais de entrada e saída representados no domínio de Laguerre (FISCHER; MEDVEDEV, 1999).

2. **Métodos onde o atraso é um parâmetro explícito:** O atraso é um parâmetro do modelo

- Métodos de um passo: O atraso assim como os outros parâmetros são estimados simultaneamente;
- Métodos de dois passos: Há uma alternância entre a estimativa do atraso e dos outros parâmetros;
- Métodos de amostragem: Utilização da amostragem para derivar uma expressão para o atraso;

3. **Métodos de áreas:** Esses métodos utilizam a relação entre o atraso e certas áreas abaixo ou acima da resposta ao degrau ou impulso do sistema (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

Um estudo comparativo entre as principais técnicas presentes na literatura pode ser encontrado em (BJORKLUND; LJUNG, 2003) e (RICHARD, 2003).

4.3.2 Estimativa do atraso no domínio do tempo

Nesse trabalho optou-se por estimar o atraso no domínio do tempo, através da detecção do ponto onde a resposta do sistema se inicia. Qualquer sistema com atraso, representado por sua resposta ao impulso $g(t)$, pode ser decomposto como a convolução entre o sistema sem atraso $g_r(t)$ e um atraso puro $\delta(t - t_d)$, conforme

$$g(t) = g_r(t) * \delta(t - t_d) \quad (4.24)$$

essa operação é representada graficamente na Figura 4.1

O Algoritmo *Cumulative sum* CUSUM originalmente proposto em (PAGE, 1954), é uma ferramenta de análise de sinais utilizada para detectar mudanças de tendências. Definindo os parâmetros *drift* ν e *threshold* h é possível estimar o atraso pelo ponto de início efetivo da resposta do sistema ao sinal de entrada.

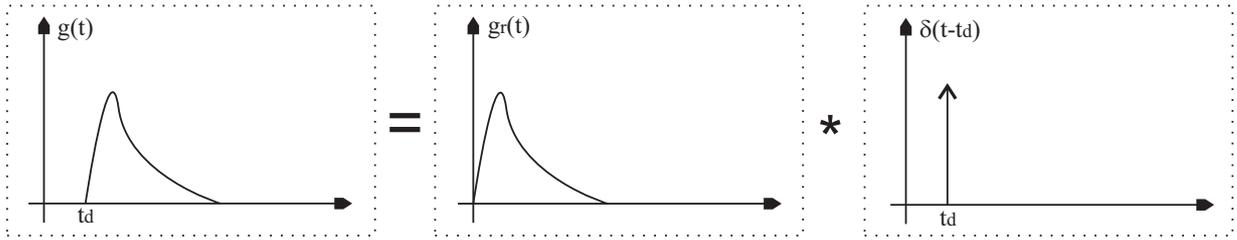


Figura 4.1: Representação gráfica da Equação 4.24

Algoritmo 6 CUSUM-TD

Primeiramente é introduzida uma variável auxiliar $\rho(t)$, de modo que $t = \hat{t}_d$ caso $\rho(t) > h$.

- Obtenha a resposta do sistema $s(t)$;
- Defina drift ν e threshold h ;
- $\rho(t) = \rho(t - 1) + s(t) - \nu$;
- $\rho(t) = 0$ se $\rho(t) < 0$;
- $\hat{t}_d = t$ se $\rho(t) > h > 0$.

O sinal de teste $s(t)$ é acumulado em $\rho(t)$ até que o *threshold* h seja superado. Para evitar que ruídos positivos gerem alarmes falsos, a cada instante de tempo é subtraído ν . Por outro lado para evitar que ruídos negativos aumentem o tempo de detecção, a soma é zerada caso $\rho(t) < 0$.

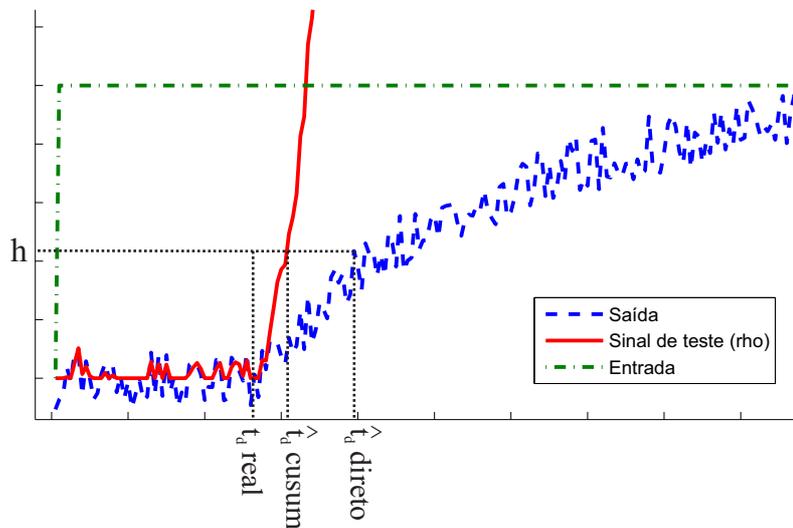


Figura 4.2: Exemplo do método CUSUM-TD

É ilustrado na Figura 4.2 um exemplo da aplicação da técnica. Observa-se que para um mesmo *threshold* h a estimativa do atraso \hat{t}_{acusum} é mais precisa do que a estimativa \hat{t}_{direto} obtida pelo sinal original.

4.3.3 Realizações por pulsos compostos com atraso (RPC-TD)

Foi definido nos métodos RPS e RPC que o sinal de entrada seria composto por um ou mais pulsos. Dessa forma o atraso pode ser estimado detectando o instante de tempo em que o sistema começa a reagir ao pulso inicial. Como visto na Seção 4.3.2 o algoritmo CUSUM-TD é uma alternativa para estimar esse ponto de transição minimizando o efeito dos ruídos de medição. O problema então se restringe a sintonizar os parâmetros *drift* ν e *threshold* h .

Os parâmetros do método de busca estão intimamente ligados ao ruído inserido na saída do sistema. Devido ao formato característico do pulso base, definido na Equação 3.39, é possível calcular uma estimativa do desvio padrão do ruído de medição analisando a saída do sistema nos instantes $t = 0, 1, 2, \dots, \gamma$. Assumindo que o ruído tem média zero e variância σ^2

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{\gamma} s(t)^2 - \frac{1}{\gamma+1} (\sum_{t=0}^{\gamma} s(t))^2}{\gamma}} \quad (4.25)$$

dessa forma o método é re-parametrizado conforme $\nu = \sigma/2$ e $h = \mu\sigma$ onde $\mu > 1$ indica quantas vezes o *threshold* é maior do que o desvio padrão do ruído de medição da saída, no ponto de operação inicial.

Uma vez obtida uma estimativa do atraso (\hat{t}_d) como um múltiplo inteiro do tempo de amostragem, essa informação pode ser facilmente incorporada ao método RPC para gerar um modelo em espaço de estados com atraso explícito na entrada.

Conforme a Equação 4.24, em um sistema com atraso, os primeiros \hat{t}_d coeficientes da resposta ao impulso são nulos, de modo que é possível separar as duas dinâmicas $g_r(t)$ e $\delta(t - t_d)$ caso essa transição seja conhecida. Recordando-se que a matriz $H_{1|r}$ definida na Equação 5 é constituída pelos coeficientes da resposta ao impulso organizados em blocos de Hankel, dessa forma é fácil ver que uma matriz $H_{1|r}^0$ que represente a parcela do modelo sem atrasos pode ser obtida eliminando as \hat{t}_d primeiras linhas de $H_{1|r}$.

Teorema 9 *A matriz de coeficientes da resposta ao impulso $H_{1|r}^0$ correspondente a componente sem atraso do modelo, é obtida pela eliminação das \hat{t}_d primeiras linhas de $H_{1|r}$.*

$$H_{1|r}^0 = H_{1|r}(t_d + 1 : r, :) \quad (4.26)$$

Prova. A prova vem diretamente da definição de $H_{1|r}$ na Equação 2.13. ■

Algoritmo 7 *Algoritmo de realizações por pulsos compostos com atraso (RPC-TD)*

- Defina o formato dos n pulsos de entrada, $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$;
- Calcule os n termos $T_{0|r-1}U_{1|r}^{Bn}$ e monte a matriz $T_{0|r-1}U_{1|r}^M$, conforme a Equação 4.22;
- Calcule $H_{1|r}^M$ e $H_{2|r+1}^M$ por meio da Equação 4.23;
- Calcule σ pela Equação 4.25;
- Defina μ , $\nu = \sigma/2$, $h = \mu\sigma$ e estime o atraso do sistema pelo Algoritmo 6;
- Calcule $H_{1|r}^{0M}$ pela Equação 4.26;
- Efetue a SVD de $H_{1|r}^{0M}$ conforme a Equação 2.21;
- Determine a ordem do sistema inspecionando os valores singulares de $H_{1|r}^{0M}$;
- Calcule $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ conforme a Tabela 2.1.

4.4 Inserção de restrições via *Linear Matrix Inequalities* (LMI)

Ao identificar modelos matemáticos por meio de dados experimentais, é muitas vezes desejável que o modelo obtido seja compatível com algumas características fundamentais do sistema original. Através de especialistas ou operadores do sistema, é possível colher requisitos básicos tais como condições para estabilidade, pontos de operação ou até princípios físicos que o regem.

Conhecimentos prévios do sistema podem ser incorporados ao modelo, mesmo que a estratégia de identificação seja totalmente voltada a dados. Para isso, são realizados procedimentos de otimização com restrições que impõe ao modelo certas características definidas *a priori*.

O método RPC proposto anteriormente pode ser reformulado como dois problemas de otimização convexa sujeita à desigualdades lineares matriciais (LMI) que restringem a localização dos seus autovalores e delimitam seu gabarito temporal.

4.4.1 Regiões LMI

Introduzida por (CHILALI; GAHINET, 1996) uma região LMI é uma região convexa \mathbb{D} , no plano complexo, definida por uma matriz simétrica α e uma matriz quadrada β

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathbb{D}}(z) \geq 0\} \quad (4.27)$$

onde,

$$f_{\mathbb{D}}(z) = \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z}. \quad (4.28)$$

A função $f_{\mathbb{D}}(z)$ é denominada função descritiva de \mathbb{D} . Em (CHILALI; GAHINET, 1996) é demonstrado que os autovalores de uma matriz A estão contidos na região \mathbb{D} se e somente se:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\mathbb{D}}(A, P) &\geq 0 \\ P = P^T &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

no qual \otimes representa o produto de Kronecker,

$$\mathfrak{N}_{\mathbb{D}}(A, P) = \alpha \otimes P + \beta \otimes (AP) + \beta^T \otimes (AP)^T \quad (4.30)$$

Regiões LMI generalizam a noção de estabilidade de sistemas. Por exemplo, a região formada pelo disco unitário e seu interior é descrita por:

$$f_{\mathbb{D}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{z} \quad (4.31)$$

que resulta na restrição,

$$\mathfrak{N}_{\mathbb{D}}(A, P) = \begin{bmatrix} P & AP \\ PA^T & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.32)$$

A intersecção de duas regiões LMI é também uma região LMI descrita pela função,

$$f_{\mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2}(z) = \begin{bmatrix} f_{\mathbb{D}_1} & 0 \\ 0 & f_{\mathbb{D}_2} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Conforme as informações *a priori* disponíveis do sistema, pode-se especificar uma ou mais regiões LMI, com o intuito de restringir o posicionamento dos polos do modelo

obtido. É ilustrada na Figura 4.3 a influência da localização dos polos no comportamento temporal da resposta livre do sistema.

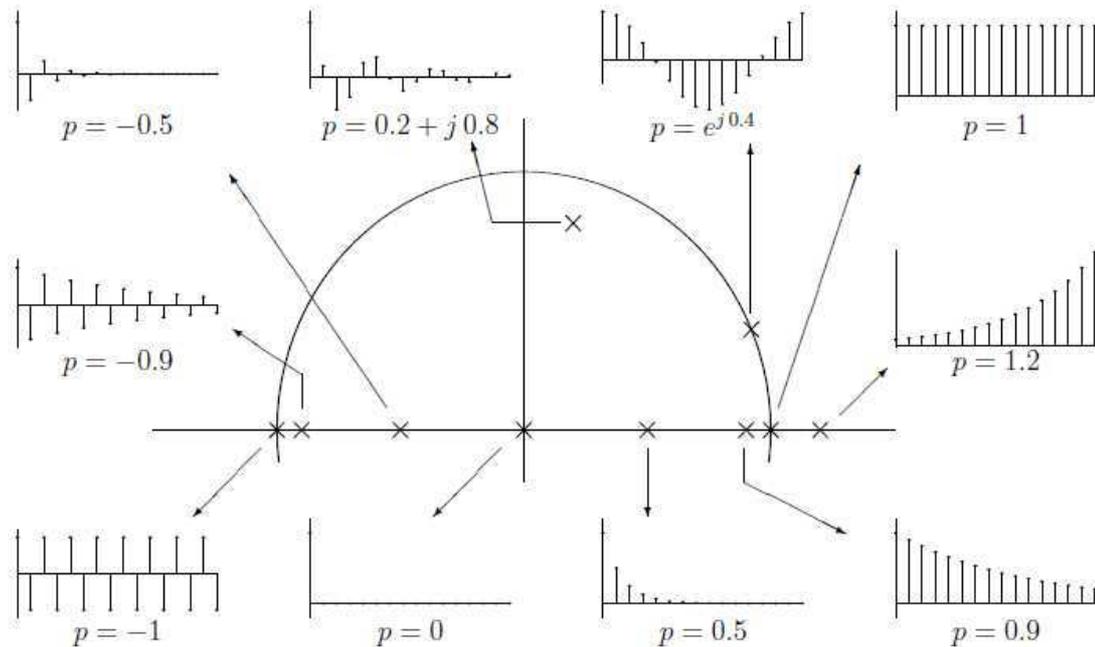


Figura 4.3: Mapeamento da influência da localização dos polos na resposta temporal do sistema

Em termos gerais, o seguinte comportamento é observado

- Polos reais no interior do círculo unitário implicam em exponenciais decrescentes. Quanto mais próximo da origem mais rápida a taxa de decaimento;
- Polos reais negativos alternam o sentido do ganho;
- Polos reais no exterior do círculo unitário implicam em exponenciais crescentes (instabilidade);
- Polos complexos com parte imaginária não nula geram um comportamento oscilatório na saída.

Dessa forma é possível definir uma série de regiões de interesse no plano complexo que impliquem em um comportamento temporal conhecido do sistema real.

Restrição de estabilidade

A região LMI que engloba o disco de raio $1 - \delta_s$ e contém todos os números complexos cujo $|z| \leq 1 - \delta_s$ tem a seguinte função descritiva,

$$\alpha_s = (1 - \delta_s)I_2 \quad \beta_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{N}_s = \begin{bmatrix} (1 - \delta_s)P & AP \\ AP^T & (1 - \delta_s) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

no qual δ_s é um pequeno incremento para garantir uma margem de estabilidade.

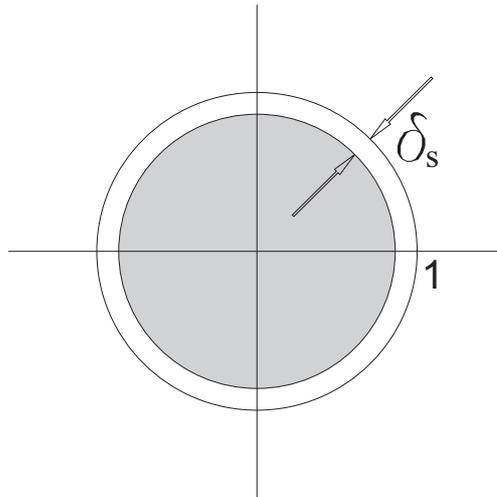


Figura 4.4: LMI para restrição de estabilidade

Restrição de autovalores puramente reais

A região LMI que descreve uma pequena faixa em torno do eixo real do plano complexo, cujo $|Im(z)| \leq \delta_r$ é dada por,

$$\alpha_r = \delta_r I_2 \quad \beta_r = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{N}_r = \begin{bmatrix} \delta_r P & 0,5(AP^T - AP) \\ 0,5(AP - AP^T) & \delta_r P \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

o parâmetro δ_r é um pequeno incremento para tornar o problema computacionalmente realizável

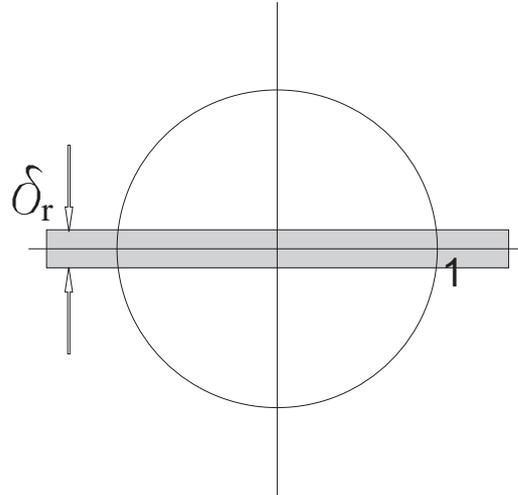


Figura 4.5: LMI para restrição de autovalores puramente reais

Restrição de autovalores com parte real positiva

A região LMI que descreve a porção da direita do plano complexo, cujo $Re(z) \geq \delta_p$, tem como parâmetros descritivos,

$$\alpha_p = \delta_p \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \beta_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{N}_p = \begin{bmatrix} 2\delta_p P & 0 \\ 0 & AP + AP^T - 2\delta_p P \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

δ_p é um pequeno incremento para garantir uma distância mínima do eixo imaginário.

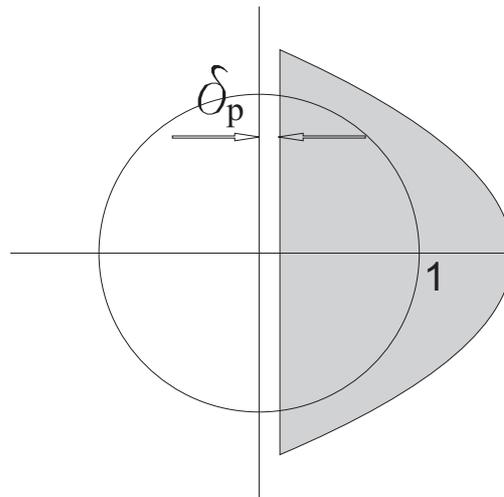


Figura 4.6: LMI para restrição de autovalores com parte real positiva

4.4.2 Incorporando as restrições nos autovalores

Revisitando o método de Kalman, mais precisamente a Equação 2.3, observa-se que o resultado $\hat{A} = \Sigma_n^{-1/2} U_n^T H_{2|r+1} V_n \Sigma_n^{-1/2}$ é referente a minimização de $J = \|\hat{H} - H\|_2$ sem nenhuma restrição.

O método RPC pode ser então aprimorado adicionando restrições LMI ao problema de otimização que define o posicionamento dos polos do modelo obtido. O método com restrições é denominado RPCR (Realizações por pulsos compostos com restrições). Para tanto, deve-se reescrever o problema de minimização definido na Equação 2.3, para incluir o termo de ponderação W ,

$$J_0(\hat{A}, W) = \left\| (\hat{\Gamma} \hat{A} \hat{\Omega} - \vec{H}) W \right\|_2 \quad (4.37)$$

$$W = (\hat{\Omega})^\dagger P = V_n \Sigma_n^{-1/2} P \quad (4.38)$$

então,

$$J_1(\hat{A}, P) = \left\| U_n \Sigma_n^{1/2} \hat{A} P - \vec{H} V_n \Sigma_n^{-1/2} P \right\|_2 \quad (4.39)$$

re-parametrizando com $Q = \hat{A} P$, tem-se a formulação do primeiro problema de otimização na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Formulação do problema de otimização dos autovalores de \hat{A}

Minimizar;	$J(Q, P) = \left\ U_n \Sigma_n^{1/2} Q - \vec{H} V_n \Sigma_n^{-1/2} P \right\ _2$
sujeito a;	$\aleph_{\mathbb{D}}(A, P) \geq 0$ e $P = P^T \geq 0$
onde;	$\aleph_{\mathbb{D}}(A, P) = \text{diag}(\aleph_1, \aleph_2 \dots \aleph_i)$

onde \aleph_i é uma restrição LMI. É demonstrado em (LACY; BERNSTEIN, 2003) que essa formulação é equivalente a um problema de programação linear convexa, com restrições de igualdade, quadráticas e positivas semidefinidas. Uma vez calculados Q e P , $\hat{A} = QP^{-1}$ e $\hat{C} = \Gamma_{(1:l,:)}.$

4.4.3 Incorporando as restrições na resposta temporal

Uma vez determinadas as matrizes \hat{A} e \hat{C} , pode ser formulado um problema de programação quadrática convexa adicional para restringir o comportamento do sistema a

um determinado gabarito temporal. As seguintes características podem ser forçadas ao modelo:

- Valor em regime permanente $\hat{y}(\infty) = y_\infty$;
- Overshoot máximo $\hat{y}(t) \leq y_{max}$;
- Undershoot máximo $\hat{y}(t) \geq y_{min}$.

ou seja $y_{min} \leq \hat{y} \leq y_{max}, \forall t$ e $\hat{C}(I_n - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} = y_\infty$, conforme o exemplo da Figura 4.7.

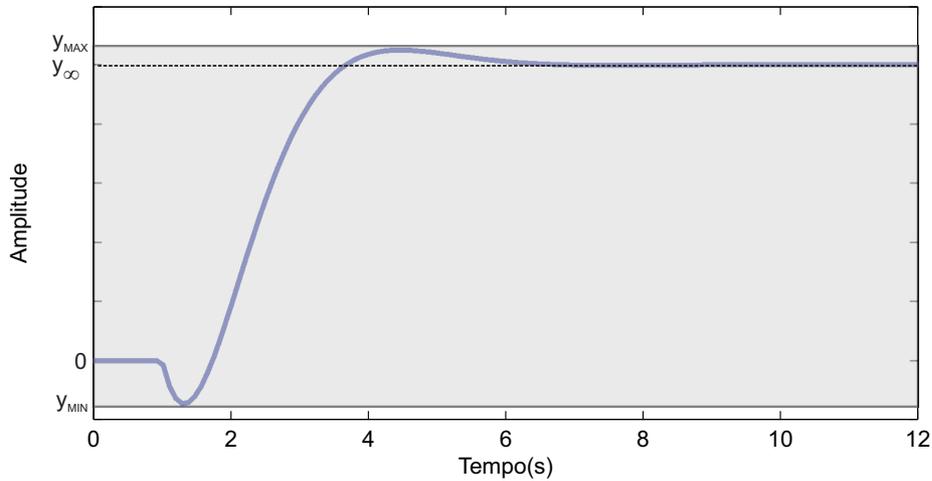


Figura 4.7: Gabarito temporal para saída do modelo

As matrizes \hat{B} e \hat{D} são por fim a solução do problema de otimização definido na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Formulação do problema de otimização da resposta temporal

Minimizar;	$J(\theta) = \ y - \psi\theta\ _2$	
sujeito a;	$\psi\theta \geq y_{min}, \psi\theta \leq y_{max}, \gamma\theta = y_\infty$	
onde;	$\psi(t) = \left[\sum_{k=0}^{t-1} \hat{C}\hat{A}^{t-k-1}u(k) \quad u(t) \right]$ $\psi = \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \psi(1) \\ \vdots \\ \psi(N) \end{bmatrix}$	$\gamma = \left[\hat{C}(I_n - \hat{A})^{-1} \quad 1 \right]$ $\theta = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$

Algoritmo 8 Algoritmo de realizações por pulsos com restrições (RPCR)

- Defina o formato dos n pulsos de entrada, $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$;
- Calcule os n termos $T_{0|r-1}U_{1|r}^{Bn}$ e monte a matriz $T_{0|r-1}U_{1|r}^M$, conforme a Equação 4.22;
- Calcule $H_{1|r}^M$ e $H_{2|r+1}^M$ por meio da Equação 4.23;
- Determine a ordem do sistema inspecionando os valores singulares de $H_{1|r}^M$;
- Defina a região \aleph_D que os autovalores do modelo estarão contidos e calcule \hat{A} e \hat{B} resolvendo o problema de minimização da Tabela 4.1;
- Defina os limites do gabarito temporal da resposta ao degrau do modelo e calcule \hat{C} e \hat{D} conforme a Tabela 4.2.

4.5 Exemplos de simulação

Uma série de simulações são apresentadas para exemplificar e comparar as técnicas discutidas nos capítulos 2, 3 e 4. É definido na Equação 6.1 o índice *NRMSE* (*Normalized root mean square error*) para avaliação das respostas dos modelos identificados. Tal índice varia de $-\infty\%$, para um ajuste pobre até 100% quando a resposta do modelo identificado é idêntica a real.

$$NRMSE = \left(1 - \frac{\|x_{ref} - x\|_2}{\|x_{ref} - \bar{x}_{ref}\|_2}\right)100\% \quad (4.40)$$

onde x_{ref} é o vetor de referência, x é o vetor de dados a ser testado e o operador $(\bar{\cdot})$ indica o valor médio dos elementos de um vetor.

Para fim de comparação entre os tempos de execução das rotinas utilizadas, todos os cálculos foram realizadas no ambiente do Matlab© em um computador com processador Intel® Core™ i7 e 4GB de memória ram.

4.5.1 Exemplo simulado 1

Assumindo que o sistema alvo tem função de transferência $G(s)$ e é livre de ruídos

$$G(s) = \frac{e^{-1s}}{4s + 1} \quad (4.41)$$

seu equivalente discreto com um segurador de ordem zero e período de amostragem $T_s = 0,1s$ é $G(z)$

$$G(z) = \frac{0,0247}{z - 0,975} z^{-10} \quad (4.42)$$

Seguindo a metodologia do Capítulo 3, foi aplicada uma oscilação realimentada por um relé, seguida por um pulso simples. As transições do sinal de controle ocorreram nos instantes $t_1 = 1,02s$ e $t_2 = 2,82s$, o que resultou em uma aproximação da constante de tempo $T = 4,21s$. Conforme a Proposição 8, os parâmetros do pulso foram definidos como $\alpha = \gamma = 5T$ e $\beta = 1$ e a amplitude do relé $a = 1$. Os sinais de entrada e saída são representados na Figura 4.8.

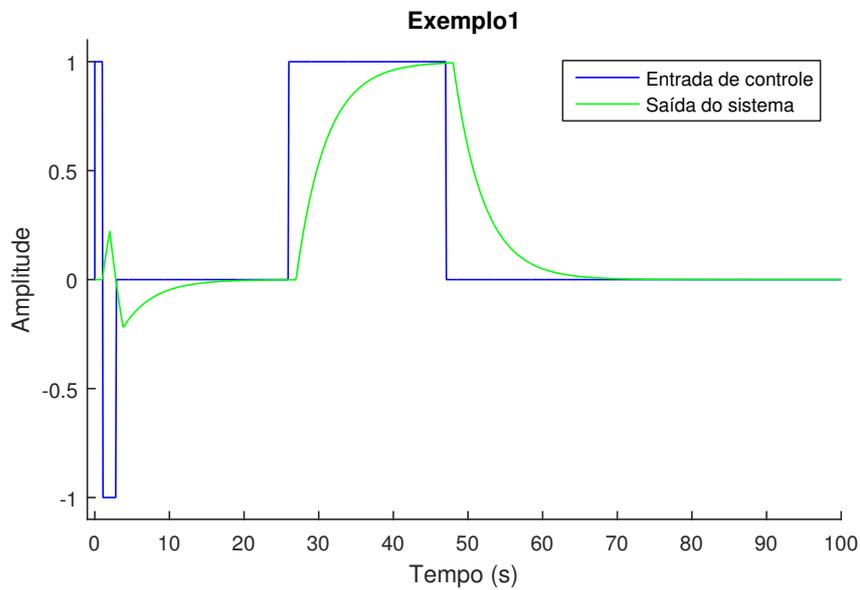


Figura 4.8: Gráfico dos sinais de entrada e saída do exemplo 4.5.1

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 20$. Como o sistema apresenta atraso mas não é contaminado por ruídos, é aplicado um *threshold* infinitesimal, resultando na estimativa $\hat{t}_d = 1s$. O sinal auxiliar *rho* é ilustrado na Figura 4.9.

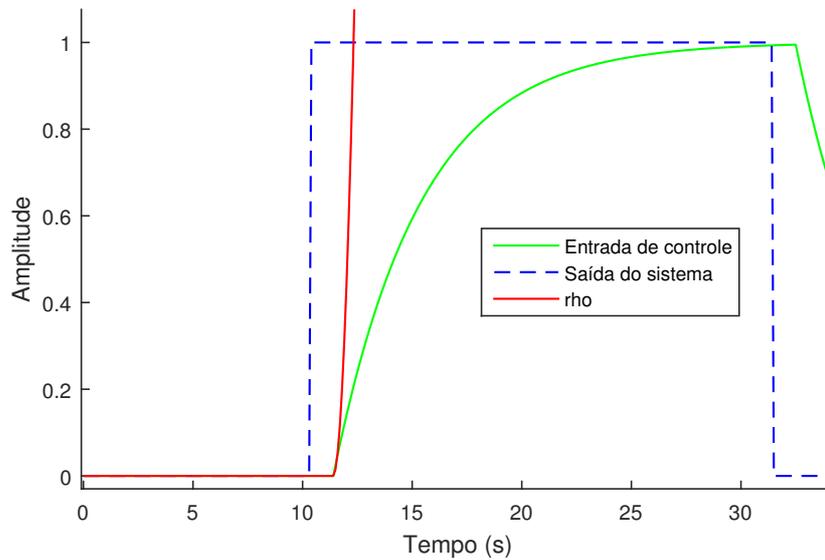


Figura 4.9: Gráfico dos sinais para busca do atraso do exemplo 4.5.1

Na Figura 4.10 é representada graficamente a sequência de valores singulares calculada. Como o exemplo não apresenta ruídos, e é de primeira ordem, somente o primeiro valor singular é não nulo.

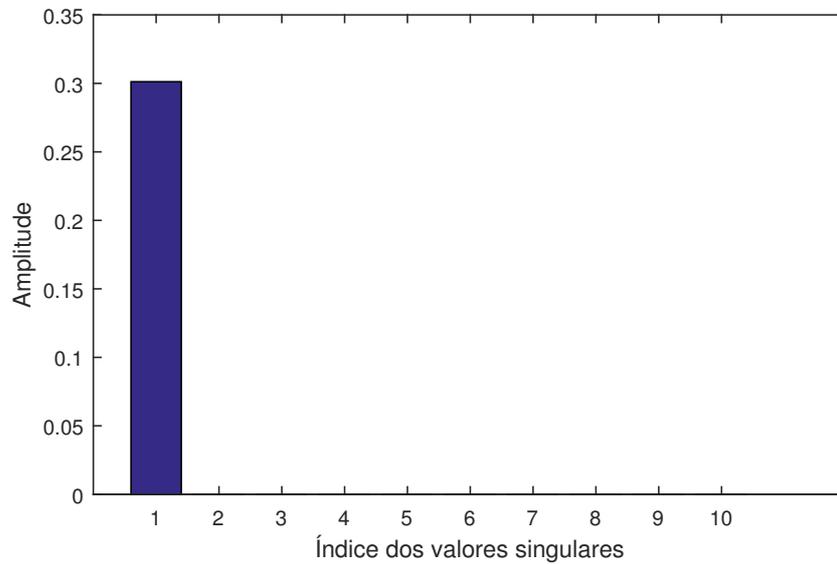


Figura 4.10: Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.1

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,975 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,127 \end{pmatrix} u(t-10) \quad (4.43)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0,193 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,000 \end{pmatrix} u(t-10) \quad (4.44)$$

Como esperado, para o exemplo sem ruídos, a representação entrada-saída do modelo identificado $G(z)_{RPS-TD}$ é idêntica ao sistema real $G(z)$.

$$G(z)_{RPS-TD} = \frac{0,0247}{z - 0,975} z^{-10} \quad (4.45)$$

As respostas de ambos os modelos foram coincidentes, conforme a Figura 4.11.

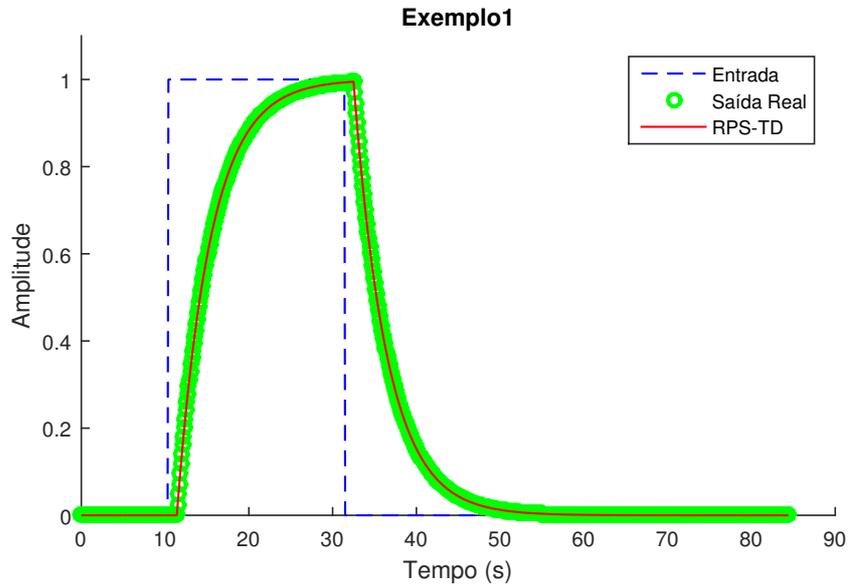


Figura 4.11: Simulação dos modelos identificados no Exemplo 4.5.1

4.5.2 Exemplo simulado 2

Assumindo que o sistema alvo tem função de transferência $G(s)$ e é contaminado por um ruído aditivo de variância $\sigma^2 = 0,01$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)} \quad (4.46)$$

seu equivalente discreto com um segurador de ordem zero e período de amostragem $Ts = 0,02s$ é $G(z)$

$$G(z) = \frac{0,020(z+0,819)}{(z-0,905)(z-0,606)} \quad (4.47)$$

Seguindo a metodologia do Capítulo 3, foi aplicada uma oscilação realimentada por um relé, seguida por um pulso simples. As transições do sinal de controle ocorreram nos instantes $t_1 = 0,58s$ e $t_2 = 1,42s$, o que resultou em uma aproximação da constante de tempo $T = 1,47s$. Conforme a Proposição 8, os parâmetros do pulso foram definidos como $\alpha = \gamma = 5T$ e $\beta = 1$, a amplitude do relé $a = 1$ e a histerese $\varepsilon = 0,3$. Os sinais de entrada e saída são representados na Figura 4.12.

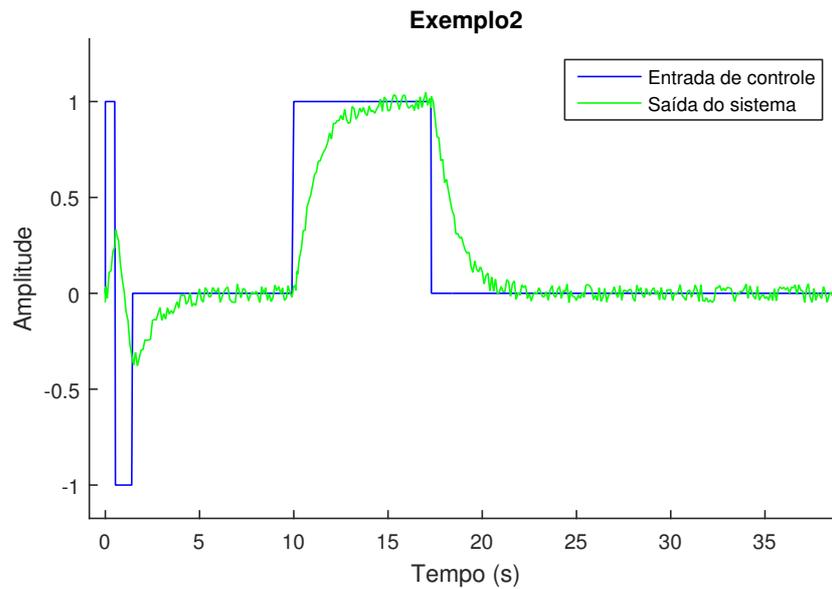


Figura 4.12: Gráfico dos sinais de entrada e saída do exemplo 4.5.2

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 15$ e $\mu = 2$. A análise do estado estacionário inicial indica um desvio padrão de $\sigma = 0,007$ portanto o *drift* e o *threshold* calculados são respectivamente $\nu = 0,0035$ e $h = 0,014$. Observa-se na Figura 4.13 que o atraso estimado é $\hat{t}_d = 0,2s$.

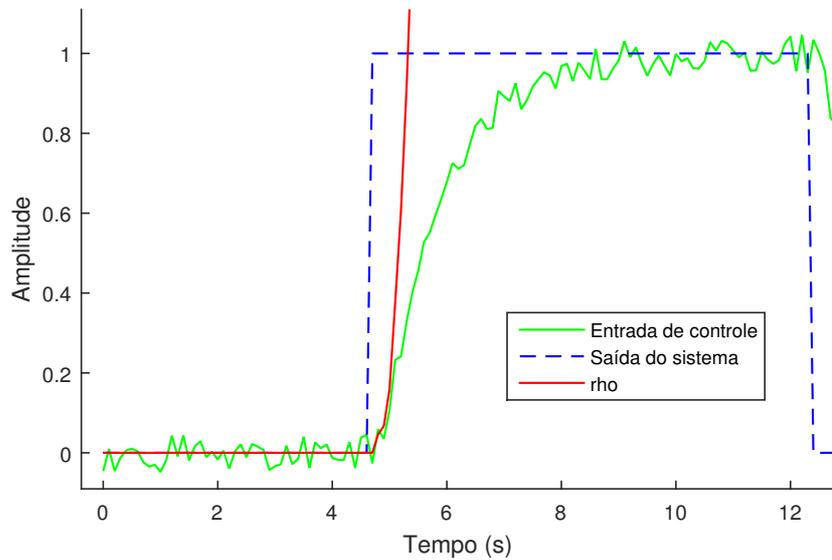


Figura 4.13: Gráfico dos sinais para busca do atraso do exemplo 4.5.2

Na Figura 4.14 é representada graficamente a Sequência de valores singulares calculada. Observa-se que existe uma mudança de amplitude entre os índices 2 e 3, levando a crer que o sistema pode ser representado por um modelo de segunda ordem.

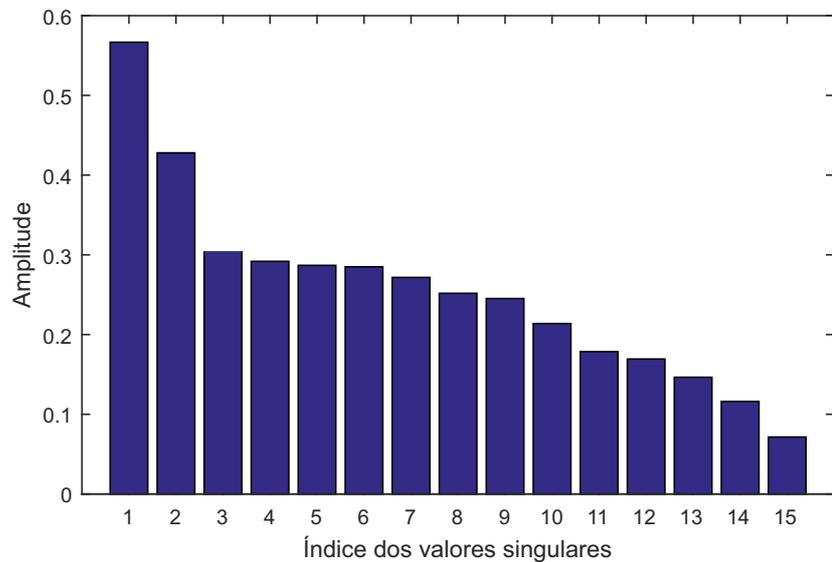


Figura 4.14: Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.2

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,873 & 0,317 \\ 0,247 & -0,541 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,275 \\ 0,072 \end{pmatrix} u(t-2) \quad (4.48)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -0,326 & 0,206 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,000 \end{pmatrix} u(t-2) \quad (4.49)$$

assim como a sua representação equivalente entrada-saída é

$$G(z)_{RPS-TD} = \frac{0,104(z + 0,133)}{(z - 0,926)(z - 0,595)} \quad (4.50)$$

A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX de ordem 2. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 4.15.

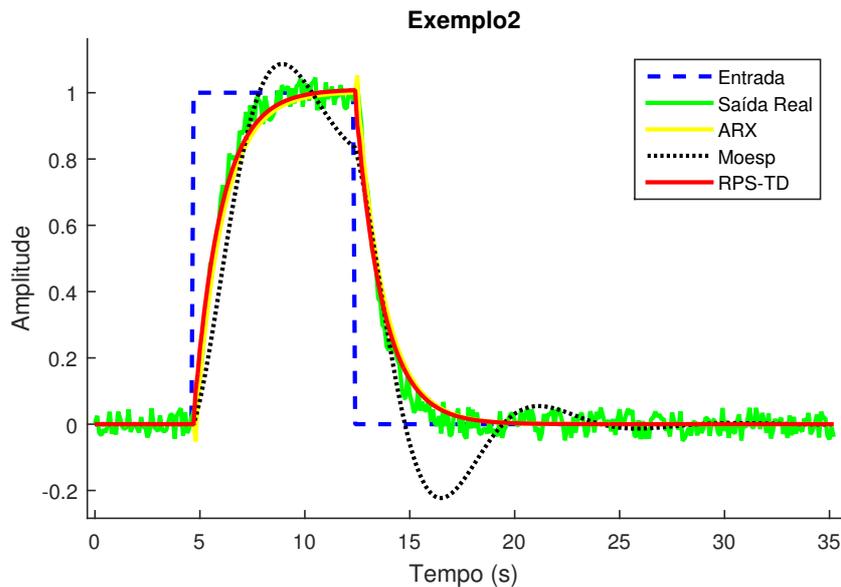


Figura 4.15: Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.2

Verifica-se na Tabela 4.3 que o método proposto apresentou o menor índice de erro assim como foi o de execução mais rápida. Tal fato se deve a estrutura da entrada ser fixada previamente como um pulso simples, eliminando a necessidade do cálculo de uma decomposição qr adicional.

Tabela 4.3: Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.2

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	91,1	10
Moesp	75,0	3159
ARX	90,6	871

4.5.3 Exemplo simulado 3

Assumindo que o sistema alvo tem função de transferência $G(s)$ e é contaminado por um ruído aditivo de variância $\sigma^2 = 0,002$

$$G(s) = \frac{(6s + 1)(3s + 1)}{(10s + 1)(8s + 1)(s + 1)} e^{-0,3s} \quad (4.51)$$

seu equivalente discreto com um segurador de ordem zero e período de amostragem $Ts = 0,1s$ é $G(z)$

$$G(z) = \frac{0,021(z - 0,983)(z - 0,967)}{(z - 0,990)(z - 0,987)(z - 0,904)} z^{-3} \quad (4.52)$$

Seguindo a metodologia do Capítulo 3, foi aplicada uma oscilação realimentada por um relé, seguida por um pulso simples. As transições do sinal de controle ocorreram nos instantes $t_1 = 2,83s$ e $t_2 = 7,79s$, o que resultou em uma aproximação da constante de tempo $T = 13,90s$. Conforme a Proposição 8, os parâmetros do pulso foram definidos como $\alpha_n = \gamma_n = 5T$ e $\beta_n = \{1, -1\}$, a amplitude do relé $a = 1$ e a histerese $\varepsilon = 0,3$. Os sinais de entrada e saída são representados na Figura 4.16.

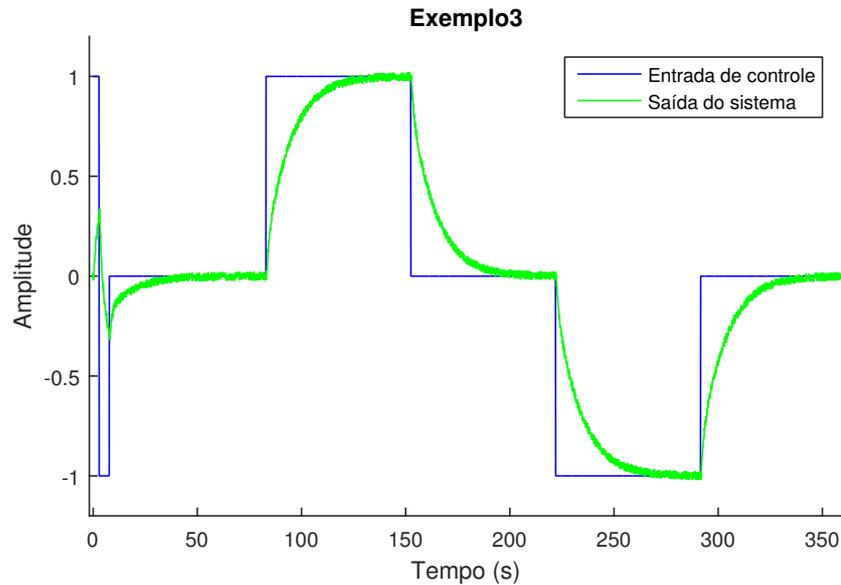


Figura 4.16: Gráfico dos sinais de entrada e saída do exemplo 4.5.3

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 15$ e $\mu = 2$. A análise do estado estacionário inicial indica um desvio padrão de $\sigma = 0,0017$ portanto o *drift* e o *threshold* calculados são respectivamente $\nu = 0,0008$ e $h = 0,0034$. Observa-se na Figura 4.17 que o atraso estimado é $\hat{t}_d = 0,3s$.

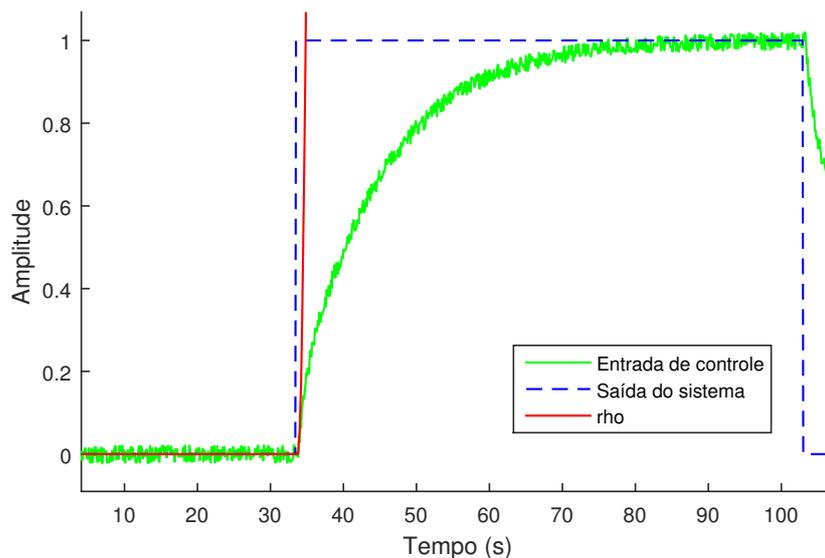


Figura 4.17: Gráfico dos sinais para busca do atraso do exemplo 4.5.3

Na Figura 4.18 é representada graficamente a sequência de valores singulares calculada. Observa-se que o sistema apresenta fortes características de primeira ordem, porém valores

singulares com índices 2 e 3 também são consideráveis. Para capturar todas as dinâmicas relevantes, serão identificados modelos de terceira ordem.

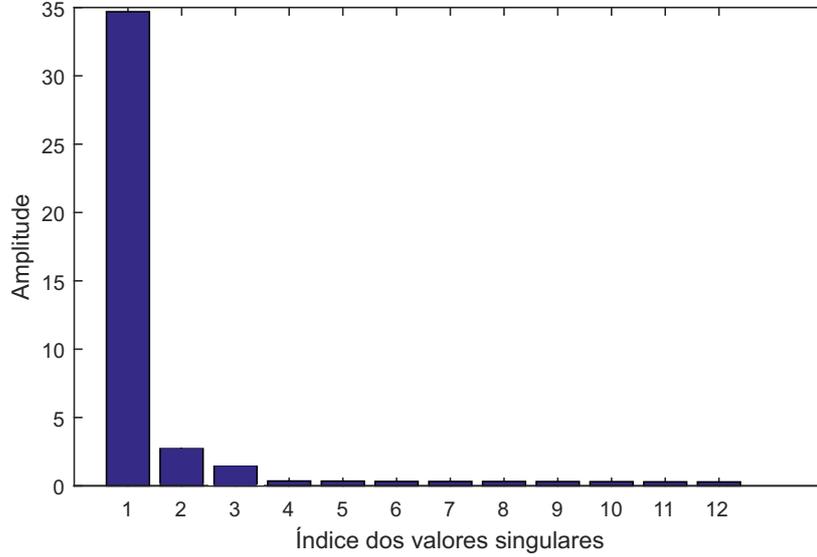


Figura 4.18: Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.3

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,977 & 0,035 & -0,006 \\ 0,124 & 0,581 & -0,288 \\ 0,161 & -0,557 & -0,725 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,002 \\ -0,038 \\ 0,000 \end{pmatrix} u(t-3) \quad (4.53)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1,947 & 0,432 & -0,112 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,000 \end{pmatrix} u(t-3) \quad (4.54)$$

assim como a sua representação equivalente entrada-saída é

$$G(z)_{RPS-TD} = \frac{-0,012(z-1,280)(z+0,871)}{(z+0,839)(z-0,988)(z-0,683)} z^{-3} \quad (4.55)$$

A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX de ordem 3. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 4.19.

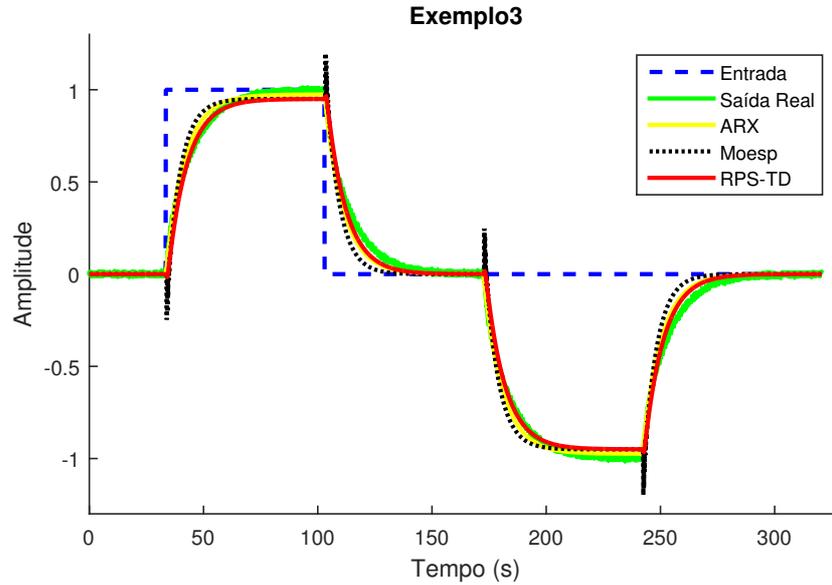


Figura 4.19: Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.3

Verifica-se na Tabela 4.4 que o método proposto apresentou o menor índice de erro assim como foi o de execução mais rápida. As técnicas MOESP e ARX apresentaram um ajuste similar, porém com um tempo de execução muito maior.

Tabela 4.4: Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.3

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	93,7	45
Moesp	88,4	3573
ARX	93,5	1237

4.5.4 Exemplo simulado 4

Considere o sistema alvo de terceira ordem discreto, representado pela função de transferência

$$G(z) = \frac{0,0075(z - 0,6)}{(z - 0,9)(z - 0,85)(z - 0,8)} \quad (4.56)$$

é aplicado um pulso simples com $\alpha = 10s$, $\beta = 1$ e $\gamma = 3,1s$. A saída do sistema é corrompida por um ruído aditivo de média zero e variância $\sigma^2 = 0,1$. Ambos os sinais, amostrados com $0,1s$, são ilustrados na Figura 4.20.

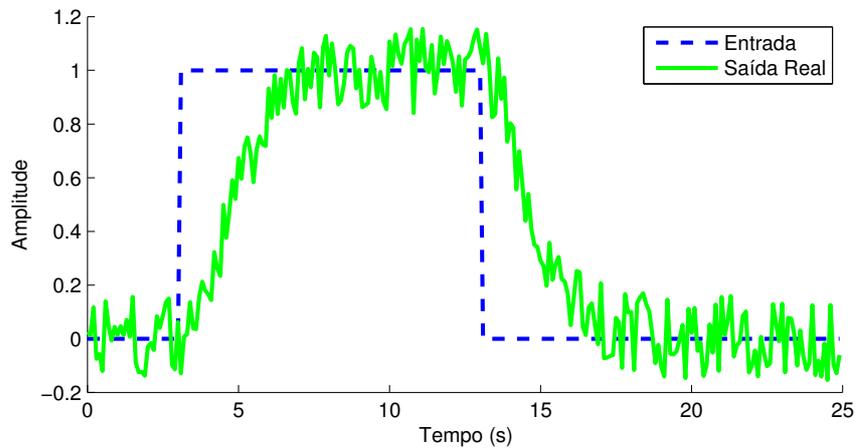


Figura 4.20: Gráfico dos sinais de entrada e saída reais do exemplo 4.5.4

Conforme uma eventual experiência anterior no sistema, imagine que sabe-se de antemão que o processo não é oscilatório e apresenta uma saída estacionária $y(\infty) = 1$. Com base nessas informações é utilizado o Algoritmo 8, com $r = 30$.

Na Figura 4.21 é representada graficamente a sequência de valores singulares. Observe-se que a partir do índice 4 a amplitude dos valores singulares se torna constante e desprezível, levando a crer que o sistema pode ser representado por um modelo de terceira ordem.

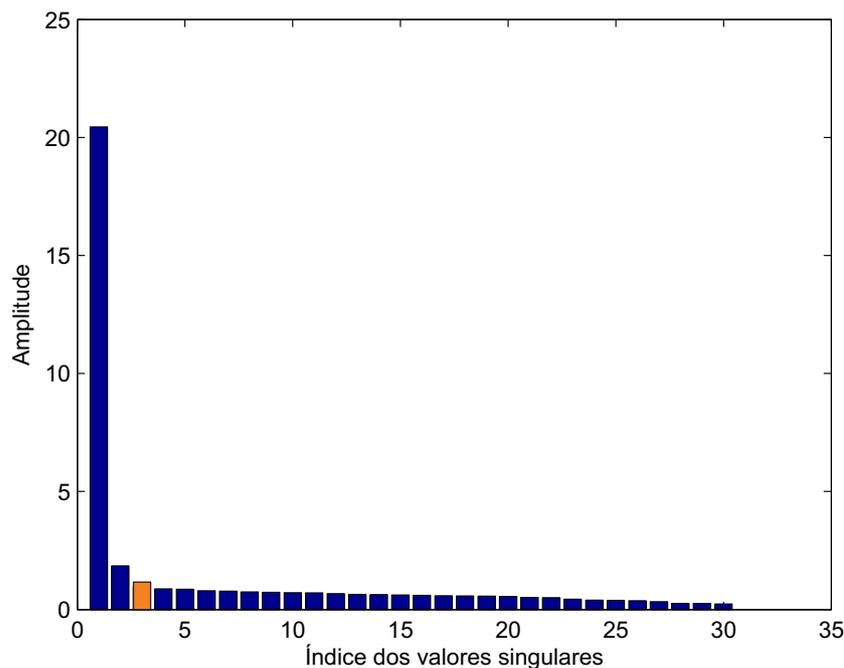


Figura 4.21: Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.4

Para garantir que o modelo será estável e não apresentará comportamentos oscilatórios é definida a região LMI \aleph_{D_1} , composta da intersecção das regiões apresentadas na Seção 4.4.1. Considerando $\delta_s = 0,01$, $\delta_r = 0,01$ e $\delta_p = 0,01$, \aleph_{D_1} é dada por

$$\aleph_{D_1} = \begin{bmatrix} 0,99P & Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q' & 0,99P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01P & 0,5(Q' - Q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(Q - Q') & 0,01P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q + Q' - 0,02P \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

É mostrada na Figura 4.22 a representação gráfica da região LMI \aleph_{D_1}

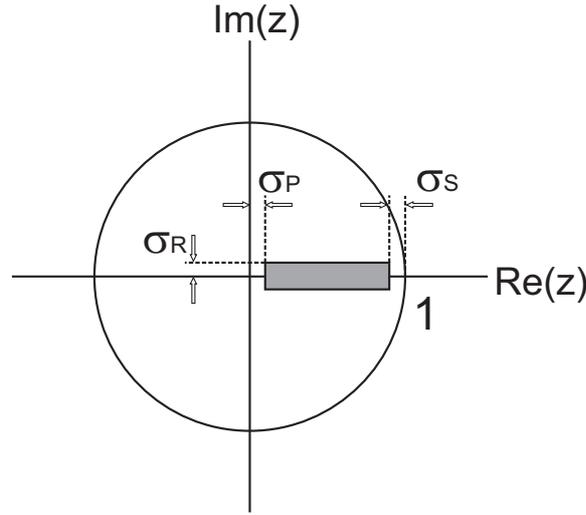


Figura 4.22: Região LMI \aleph_{D_1}

O modelo obtido, após a resolução do problema de otimização, é finalmente dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,898 & 0,047 & -0,052 \\ 0,095 & 0,814 & 0,090 \\ -0,142 & 0,188 & 0,690 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,060 \\ 0,044 \\ 0,216 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.58)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1,327 & -0,303 & -0,313 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,001 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.59)$$

assim como a sua representação equivalente entrada-saída é

$$G(z)_{RPS-TD} = \frac{0,001(z - 0,836)(z - 1,28 + 4,16i)(z - 1,28 - 4,16i)}{(z - 0,571)(z - 0,935)(z - 0,897)} \quad (4.60)$$

A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX de ordem 3. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 4.23.

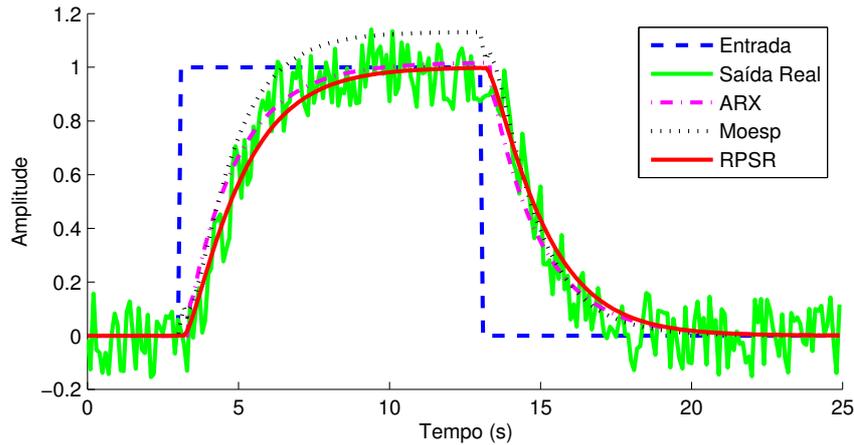


Figura 4.23: Gráfico dos sinais de saída do exemplo 4.5.4

Verifica-se na Tabela 4.5 que o método proposto apresentou o menor índice de erro porém devido à necessidade da resolução de um problema de otimização complexo, demandou maior tempo de execução. O método ARX teve desempenho e tempo de execução intermediários, já o Moesp obteve menor precisão porém maior agilidade na execução.

Tabela 4.5: Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.4

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPSR	78,0	6884
Moesp	74,9	1350
ARX	77,1	5392

Por fim é ilustrado na Figura 4.24 que o método proposto foi o único cujos polos respeitaram a região delimitada por \mathcal{N}_{D_1} (retângulo cinza).

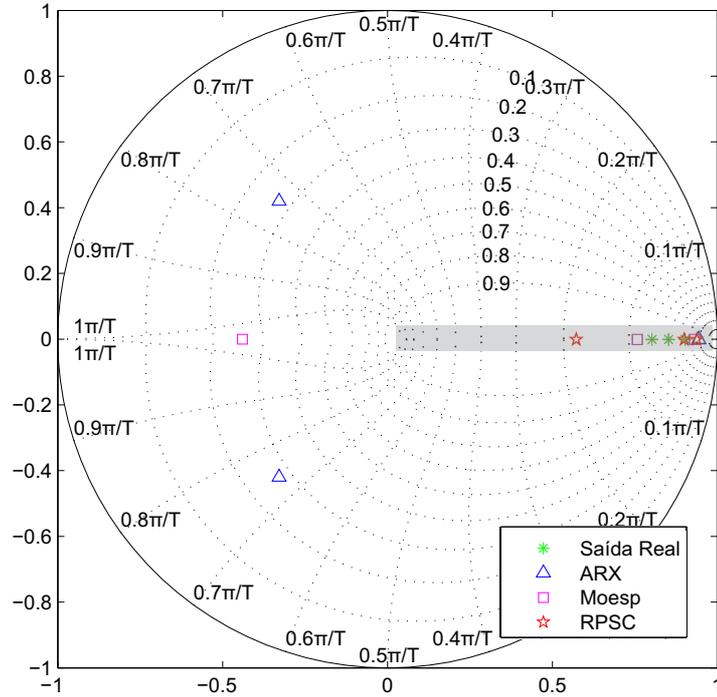


Figura 4.24: Polos dos modelos identificados no exemplo 4.5.4

4.5.5 Exemplo simulado 5

Nesse exemplo, a técnica de identificação proposta é aplicada em um processo MIMO com duas entradas e duas saídas. A representação entrada saída do sistema real é dada por

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{4}{4s+1} \\ \frac{3}{3s+1} & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

O sistema discretizado com um segurador de ordem zero e período de amostragem $T_s = 0,1$ é dado por

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,095}{z-0,904} & \frac{0,098}{z-0,975} \\ \frac{0,098}{z-0,967} & \frac{0,097}{z-0,951} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

O sistema MIMO é abordado com uma estratégia sequencial. É aplicado um pulso por vez em cada uma das duas entradas, de forma que a entrada não excitada permanece em repouso. Os sinais aplicados são representados na Figura 4.25.

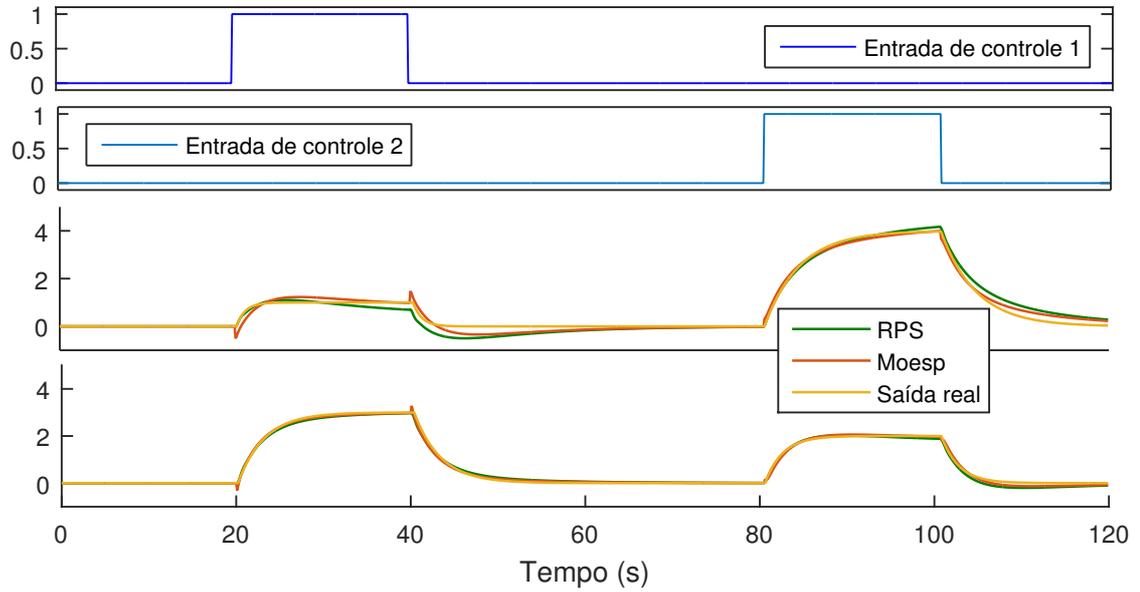


Figura 4.25: Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.5

Na Figura 4.26 é representada graficamente a sequência de valores singulares calculada. Observa-se que o sistema apresenta valores singulares consideráveis até o índice 4.

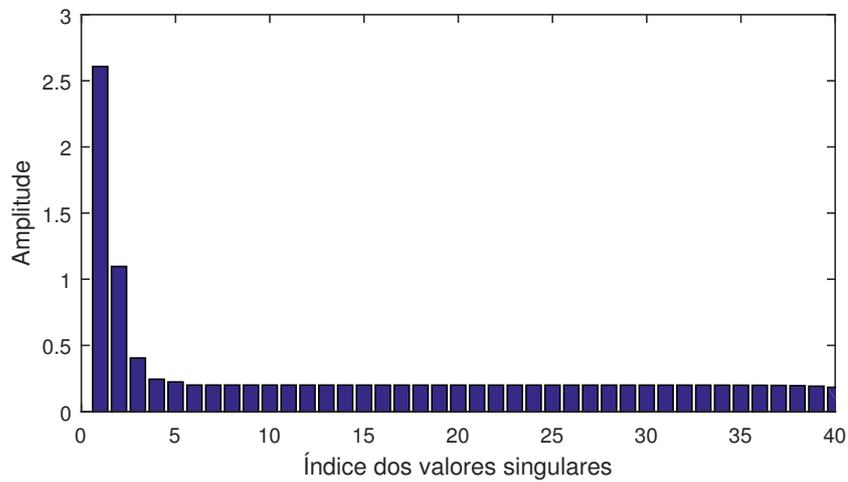


Figura 4.26: Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.5

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,00 & -0,07 & -0,00 \\ 0,00 & 0,98 & 0,02 & 0,01 \\ 0,07 & -0,04 & 0,49 & -0,40 \\ -0,02 & 0,00 & 0,38 & 0,78 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,23 & -0,30 \\ 0,13 & -0,06 \\ 0,23 & 0,12 \\ 0,04 & -0,01 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.63)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -0,28 & -0,10 & -0,30 & 0,05 \\ -0,26 & 0,14 & -0,34 & -0,11 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.64)$$

A título de comparação, foi estimado outro modelo utilizando a técnica MOESP. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 4.25. Verifica-se na Tabela 4.6 que os métodos apresentaram índices de erro semelhantes, porém o método proposto foi o de execução mais rápida.

Tabela 4.6: Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.5

Técnica	Saída	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	1	82,3	311
RPS-TD	2	92,0	311
Moesp	1	87,3	979
Moesp	2	91,6	979

4.5.6 Exemplo simulado 6

Nesse exemplo, a técnica de identificação proposta é aplicada a um modelo simplificado de uma coluna de destilação com duas entradas e duas saídas. Ambas as saídas são corrompidas por ruídos de medição de média zero e variância $\sigma^2 = 1$. A representação entrada saída do modelo da coluna é dada por

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12,8}{16,7s+1}e^{-s} & -\frac{18,9}{21s+1}e^{-3s} \\ \frac{6,6}{10,9s+1}e^{-s} & -\frac{19,4}{14,4s+1}e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

O sistema discretizado com um segurador de ordem zero e período de amostragem

$T_s = 0,2$ é dado por

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,152}{z-0,988} & -\frac{0,179}{z-0,990} \\ \frac{0,120}{z-0,981} & -\frac{0,267}{z-0,986} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z-5) \\ U_2(z-15) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

O sistema MIMO é abordado com uma estratégia sequencial. É aplicado um pulso por vez em cada uma das duas entradas, de forma que a entrada não excitada permanece em repouso. Os sinais aplicados são representados na Figura 4.27.

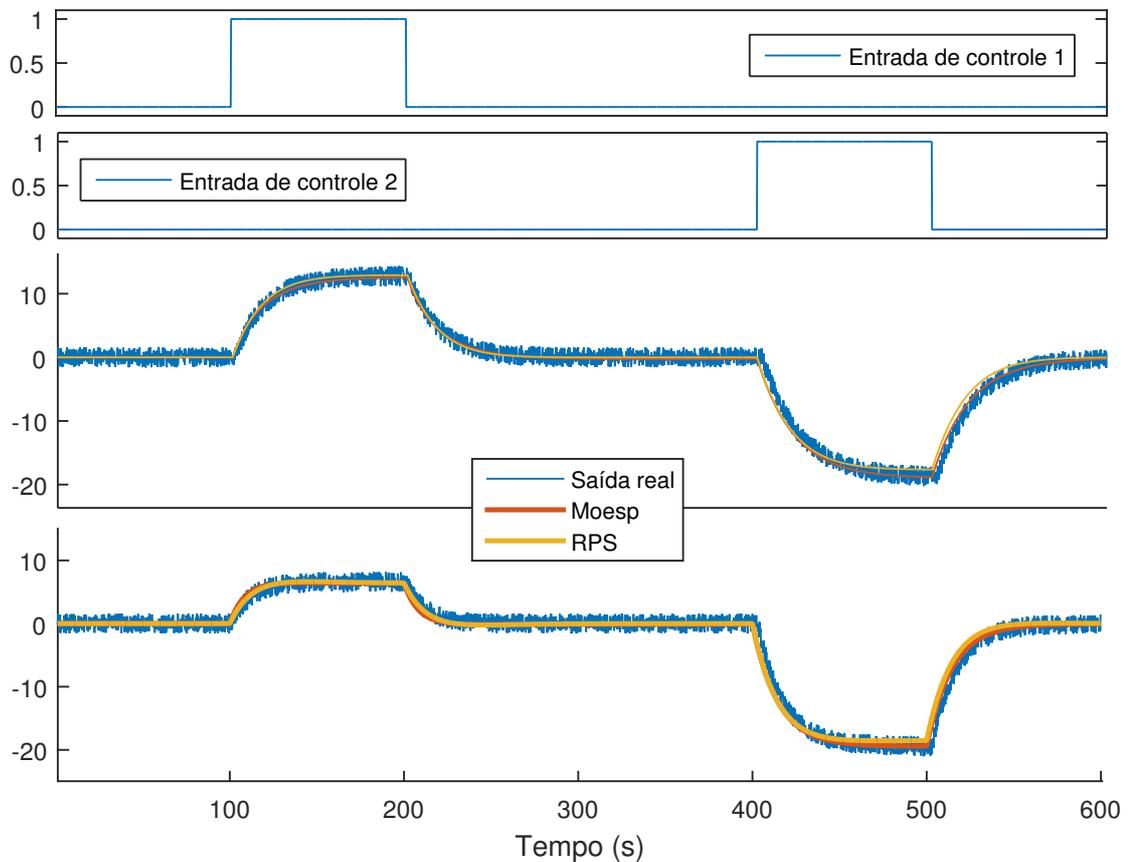


Figura 4.27: Simulação dos modelos identificados no exemplo 4.5.6

Na Figura 4.28 é representada graficamente a seqüência de valores singulares calculada. Observa-se que o sistema apresenta valores singulares consideráveis até o índice 2.

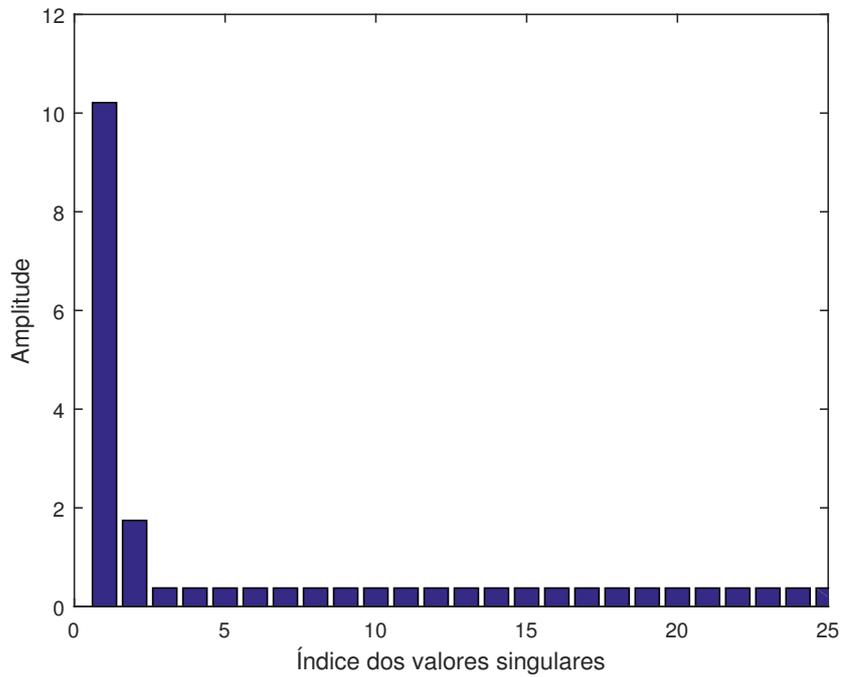


Figura 4.28: Sequência de valores singulares do exemplo 4.5.6

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,00 \\ -0,00 & 0,98 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,25 & 0,43 \\ 0,09 & 0,17 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -0,50 & 0,22 \\ -0,53 & -0,20 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

A título de comparação, foi estimado outro modelo utilizando a técnica MOESP. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 4.27. Verifica-se na Tabela 4.7 que os métodos apresentaram índices de erro semelhantes, porém o método proposto foi o de execução mais rápida.

Tabela 4.7: Comparativo entre os modelos identificados no exemplo simulado 4.5.6

Técnica	Saída	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	1	85,4	436
RPS-TD	2	83,6	436
Moesp	1	86,2	2673
Moesp	2	84,3	2673

4.6 Conclusões

Nesse capítulo foi apresentado um método para identificação de sistemas em espaço de estados utilizando sinais de entrada pulsados. Foi comprovado experimentalmente que para o tipo de entrada proposta, tal técnica apresenta performance similar à métodos tradicionais por subespaços, porém possui maior simplicidade numérica, resultando em um menor tempo de execução.

Também foram desenvolvidas variações do método para tratar sistemas com atraso de transporte, assim como inserir informações conhecidas a priori do sistema. A técnica de análise de tendências CUSUM foi adaptada para fornecer estimativas do atraso mesmo em um ambiente ruidoso. O único parâmetro de ajuste informado pelo usuário é a relação (μ) entre o *threshold* e o desvio padrão do ruído.

Por fim, informações conhecidas a priori podem ser inseridas no modelo por meio de restrições nos seus polos. Tais restrições são modeladas como regiões LMI que dão origem a um problema de otimização convexa.

Capítulo 5

Obtenção de modelos FOPTD a partir da redução de modelos balanceados

5.1 Introdução

Modelos simplificados são largamente utilizados no projetos de sistemas de controle. Em muitos casos, somente as características principais do sistema são relevantes. Quando o modelo identificado captura dinâmicas desnecessárias ao projeto de controle, se torna necessária a utilização de mecanismos de redução de modelos.

Uma das metodologias mais populares na literatura são as técnicas de redução baseadas em representações balanceadas em espaço de estados. Tais métodos são fundamentados na eliminação dos estados com baixa contribuição na relação entrada/saída. O problema consiste em encontrar um modelo simplificado G_r a partir do modelo completo G

$$G = G_r + \Delta_a \quad (5.1)$$

onde Δ_a é um resto de acordo com a norma infinita

$$\inf_{deg(G_r) \leq r} \|G - G_r\|_\infty. \quad (5.2)$$

Nesse capítulo é desenvolvida uma técnica para obtenção de modelos FOPTD a partir de realizações balanceadas em espaço de estados. A técnica proposta inclui, na constante de tempo, a contribuição de cada estado de maneira proporcional a sua importância na relação entrada/saída.

5.2 Equações de Lyapunov

As equações de Lyapunov são utilizadas para testar de forma indireta a estabilidade, controlabilidade e observabilidade de modelos

$$A^*X + XA + H = 0 \quad (5.3)$$

dadas as matrizes A e H reais, X é uma solução única se $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. X está diretamente ligado a estabilidade de A .

Lema 1 *Se A é estável, então:*

- $X = \int_0^\infty e^{A^*t} H e^{At} dt$
- ($X > 0$ se $H > 0$) e ($X \geq 0$ se $H \geq 0$)
- Se $H \geq 0$ então (H, A) é observável se e somente se $X > 0$

Como consequência direta do Lema 1, dada uma matriz A estável, o par (C, A) é observável se e somente se a solução da equação de Lyapunov for positiva definida

$$A^*Q + QA + C^*C = 0 \quad (5.4)$$

onde Q é definido como o Gramiano de Observabilidade;

O par (A, B) é controlável se e somente se a solução da equação de Lyapunov for positiva definida

$$AP + PA^* + BB^* = 0 \quad (5.5)$$

onde P é definido como o Gramiano de Controlabilidade;

Lema 2 *Supondo que X é a solução da equação de Lyapunov $A^*X + XA + H = 0$*

- $Re\lambda_i(A) \leq 0$ se $X > 0$ e $H \geq 0$
- A é estável se $X > 0$ e $H > 0$
- A é estável se $X \geq 0, H \geq 0, (H, A)$ é detectável

5.3 Realizações Balanceadas

Embora existam infinitas representações em espaço de estados para uma mesma matriz de funções de transferência, algumas realizações se mostram mais convenientes para a utilização em problemas de controle, dentre elas as realizações balanceadas (ZHOU; DOYLE;

GLOVER, 1995). Nessa caracterização, é obtida uma representação em espaço de estados tal que os gramianos de observabilidade e controlabilidade são iguais e diagonais. A diagonal do gramiano define um conjunto de parâmetros invariantes chamados de valores singulares de Hankel σ_i .

Supondo $\begin{bmatrix} A|B \\ C|D \end{bmatrix}$ uma realização não balanceada e estável de um sistema G , os gramianos de controlabilidade P e observabilidade Q são obtidos como a solução das equações de Lyapunov

$$A^*Q + QA + C^*C = 0 \quad (5.6)$$

$$AP + PA^* + BB^* = 0$$

$$\text{Onde } P \geq 0 \text{ e } Q \geq 0$$

além disso, o par (A, B) é controlável se e somente se $P > 0$ e (C, A) é observável se e somente se $Q > 0$.

Considerando que a realização é mínima e o modelo é controlável e observável, os valores singulares de Hankel (σ_i) são definidos como a raiz quadrada dos autovalores do produto PQ

$$\sigma_i = (\lambda_i(PQ))^{1/2}. \quad (5.7)$$

Portanto uma realização balanceada $\begin{bmatrix} \hat{A}|\hat{B} \\ \hat{C}|\hat{D} \end{bmatrix}$ pode ser obtida por meio da transformação de similaridade $\hat{x} = Tx$ que resulte em uma representação em espaço de estados com gramianos de controlabilidade e observabilidade iguais e diagonais $\hat{P} = \hat{Q} = \Sigma$.

$$G = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline -- & -- \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline -- & -- \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] \quad (5.8)$$

considerando a realização mínima, os novos gramianos são obtidos por

$$\hat{P} = TPT^* \quad (5.9)$$

$$\hat{Q} = T^{*-1}QT \quad (5.10)$$

$$\hat{P} = \hat{Q} = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

note que $\hat{P}\hat{Q} = \Sigma^2 = TPQT^{-1}$, portanto os autovalores do produto dos gramianos (valores

singulares) permanecem invariantes a transformações de estado.

Como P é positivo definido, pode-se fatorar $P = R^*R$ e diagonalizar $RQR^* = U\Sigma^2U^*$ resultando na transformação

$$T = \Sigma^{-1/2}U^*R^{-*} \quad (5.12)$$

$$T^{-1} = R^*U\Sigma^{1/2} \quad (5.13)$$

Essa nova realização com $\hat{P} = \hat{Q} = \Sigma$ é chamada de Realização Balanceada e os termos $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r \geq 0$ são denominados Valores Singulares de Hankel.

5.4 Redução de Modelo por Truncagem Balanceada

Considerando um sistema estável $G \in RH_\infty$, suponha que a realização $G = \begin{bmatrix} A|B \\ \hline C|D \end{bmatrix}$ é balanceada (gramianos iguais e diagonais, representados por Σ)

$$A^*\Sigma + \Sigma A + C^*C = 0 \quad (5.14)$$

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0$$

particionando o gramiano e o sistema balanceado obtém-se:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & | & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & | & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & | & D \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Teorema 10 *Caso Σ tenha valores singulares distintos então todos os possíveis subsistemas $\begin{bmatrix} A_{ii}|B_i \\ \hline C_i|D \end{bmatrix}$ são assintoticamente estáveis.*

Prova. A prova se encontra em (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995). ■

Por definição, os valores singulares de Hankel são agrupados em ordem decrescente, de tal forma que quanto maior o índice i de σ_i menor a relevância do estado correspondente na representação entrada saída do modelo.

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r}) \quad (5.16)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N I_{s_N}) \quad (5.17)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \sigma_{r+2} > \dots > \sigma_N \quad (5.18)$$

de forma que é possível truncar o modelo G considerando somente os r estados mais relevantes. O modelo truncado é balanceado e assintoticamente estável

$$G_r \approx \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (5.19)$$

ainda pode-se definir o limite máximo do erro de truncagem em função dos valores singulares descartados

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_N). \quad (5.20)$$

O Algoritmo 9 resume o método de truncagem balanceada.

Algoritmo 9 *Redução de modelos por truncagem balanceada*

- Calcule a transformação linear T e obtenha uma representação balanceada do sistema;
- Defina a ordem do modelo reduzido e particione a representação em espaço de estados conforme a Equação 5.15;
- De acordo com o Teorema 10 o modelo reduzido em espaço de estados é dado por $\left[\begin{array}{c|c} A_{ii} & B_i \\ \hline C_i & D \end{array} \right]$.

5.5 Redução de Modelo por Residualização Balanceada

Na residualização balanceada, o termo derivativo dos estados irrelevantes \dot{x}_2 é substituído por zero, ou seja, os estados desprezados são assumidos como infinitamente rápidos. No tempo discreto $x_2(k+1) = x_2(k)$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + Du(k) \end{aligned} \quad (5.21)$$

simplificando a equação 5.21 obtém-se o modelo de ordem reduzida

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \left[A_{11} + A_{12}(I - A_{22})^{-1}A_{21} \right] x_1(k) + \\ &\quad \left[B_1 + A_{12}(I - A_{22})^{-1}B_2 \right] u(k) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} y(k) &= \left[C_1 + C_2(I - A_{22})^{-1}A_{21} \right] x_1(k) + \\ &\quad \left[D + C_2(I - A_{22})^{-1}B_2 \right] u(k) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Essa metodologia proporciona ao modelo reduzido um ganho DC igual ao modelo de alta ordem original. O erro de aproximação por sua vez é o mesmo da truncagem balanceada, na ótica da norma infinita.

$$\| G(s) - G_r(s) \|_{\infty} \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots \sigma_N) \quad (5.24)$$

O Algoritmo 10 resume o método de residualização balanceada.

Algoritmo 10 *Redução de modelos por residualização balanceada*

- Calcule a transformação linear T e obtenha uma representação balanceada do sistema;
- Defina a ordem do modelo reduzido e particione a representação em espaço de estados conforme a Equação 5.15;
- Defina $x_2(k+1) = x_2(k)$ e calcule a realização em espaço de estados conforme a Equação 5.22.

5.6 Método proposto para redução de modelos

Foi proposto pelo autor em (LIMA; BARROS, 2014) uma metodologia para obtenção de modelos de primeira ordem com atraso, a partir de um modelo RPC-TD de alta ordem. A redução do modelo é obtida por uma série de operações de truncagem balanceada, combinada com a avaliação do modelo na frequência zero.

A primeira etapa do procedimento é obter o equivalente contínuo da representação em espaço de estados discreta $\left[\frac{A_c|B_c}{C_c|D_c} \right]$. A representação contínua é calculada por uma

aproximação do tipo *zero-order-hold* (zoh)

$$\left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ C_d & D_d \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ C_c & D_c \end{array} \right] \quad (5.25)$$

$$L = T_s k_d \quad (5.26)$$

onde L é o atraso em tempo contínuo e T_s é o tempo de amostragem.

O modelo contínuo é então convertido em uma realização balanceada por meio da transformação de similaridade $x_B = Tx$, que torna os gramianos de controlabilidade e observabilidade iguais e diagonais ($P = Q = \Sigma$).

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}A_cT & T^{-1}B_c \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ CT_c & D_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_B & B_B \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ C_B & D_B \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & \dots & b_2 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} & b_n \\ \hline - & - & - & - & + \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & d \end{array} \right] \quad (5.27)$$

Conforme o Teorema 10, caso os valores singulares de Σ não se repitam, todos os subsistemas gerados por uma truncagem da realização balanceada serão estáveis. Portanto é possível gerar n modelos de primeira ordem que representem a contribuição principal de cada estado do sistema.

$$G_i(s) = \frac{\frac{c_i b_i}{a_{ii}}}{\frac{1}{a_{ii}}s - 1} + d, \text{ onde } a_{ii} < 0 \text{ e } i = \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.28)$$

A magnitude dos valores singulares de Σ indica a contribuição do estado na relação entrada/saída do processo. Portanto uma maneira direta de obter um modelo médio de primeira ordem (G_M) é proposta como a média ponderada em relação aos valores singulares de Hankel.

$$G_M(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-sL} \quad (5.29)$$

5.6.1 Cálculo da constante de tempo

A constante de tempo do modelo médio de primeira ordem é calculada como a média ponderada das constantes de tempo individuais obtidas na Equação 5.28. Onde os fatores de peso são os valores singulares de Hankel.

$$\tau = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}} \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i} \quad (5.30)$$

5.6.2 Calculo do ganho

O ganho do modelo médio é obtido ao tomar o limite em $t \rightarrow \infty$ do modelo balanceado de alta ordem. Partindo do modelo em espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.31)$$

$$y = Cx + Du \quad (5.32)$$

p/ $\dot{x} = 0$

$$Ax = -Bu_{t \rightarrow \infty} \quad (5.33)$$

$$x = -A^{-1}Bu_{t \rightarrow \infty} \quad (5.34)$$

$$y_{t \rightarrow \infty} = (-CA^{-1}B + D)u_{t \rightarrow \infty} \quad (5.35)$$

$$k = \frac{y_{t \rightarrow \infty}}{u_{t \rightarrow \infty}} = -CA^{-1}B + D \quad (5.36)$$

5.6.3 Cálculo do atraso

O atraso do sistema é obtido pelo Algoritmo 6

$$L = T_s t_d \quad (5.37)$$

O Algoritmo 11 resume o método proposto para obtenção de modelos FOPTD a partir de modelos de alta ordem em espaço de estados.

Algoritmo 11 Método proposto para obtenção de modelos FOPTD

- Obtenha o equivalente contínuo do modelo em espaço de estados $\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$;
- Calcule a transformação linear T e obtenha uma representação balanceada do sistema;

- Calcule a constante de tempo do modelo $\tau = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}} \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i}$;
- Calcule o ganho do modelo $k = -CA^{-1}B + D$;
- Adicione o atraso de transporte $L = T_s t_d$.

5.7 Exemplos de simulação

Uma série de simulações são apresentadas para exemplificar e comparar as técnicas discutidas nesse capítulo.

5.7.1 Exemplo simulado 1

Assumindo que o sistema alvo tem função de transferência $G(s)$ e é livre de ruídos

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4} \quad (5.38)$$

uma possível realização em espaço de estados é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,07 & -0,46 & -0,12 & 0,07 \\ 0,34 & -0,40 & -0,83 & 0,19 \\ -0,12 & 0,65 & -1,12 & 1,06 \\ -0,04 & 0,19 & -0,88 & -2,40 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1,11 \\ 1,46 \\ -0,95 \\ -0,35 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.39)$$

$$y = \begin{bmatrix} -0,11 & -0,12 & -0,07 & 0,02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,00 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.40)$$

A transformação $x_B = Tx$ foi aplicada no modelo, tornando-o balanceado

$$T = \begin{bmatrix} -0,28 & 0,03 & -0,01 & -0,00 \\ -0,01 & -0,29 & 0,04 & 0,01 \\ 0,00 & -0,01 & -0,30 & 0,04 \\ -0,00 & 0,00 & -0,01 & 0,31 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Foram então aplicadas três técnicas de redução de modelos: truncagem balanceada, residualização balanceada e a técnica proposta. As respostas dos modelos no tempo e na frequência são representadas respectivamente nas Figuras 5.1 e 5.2.

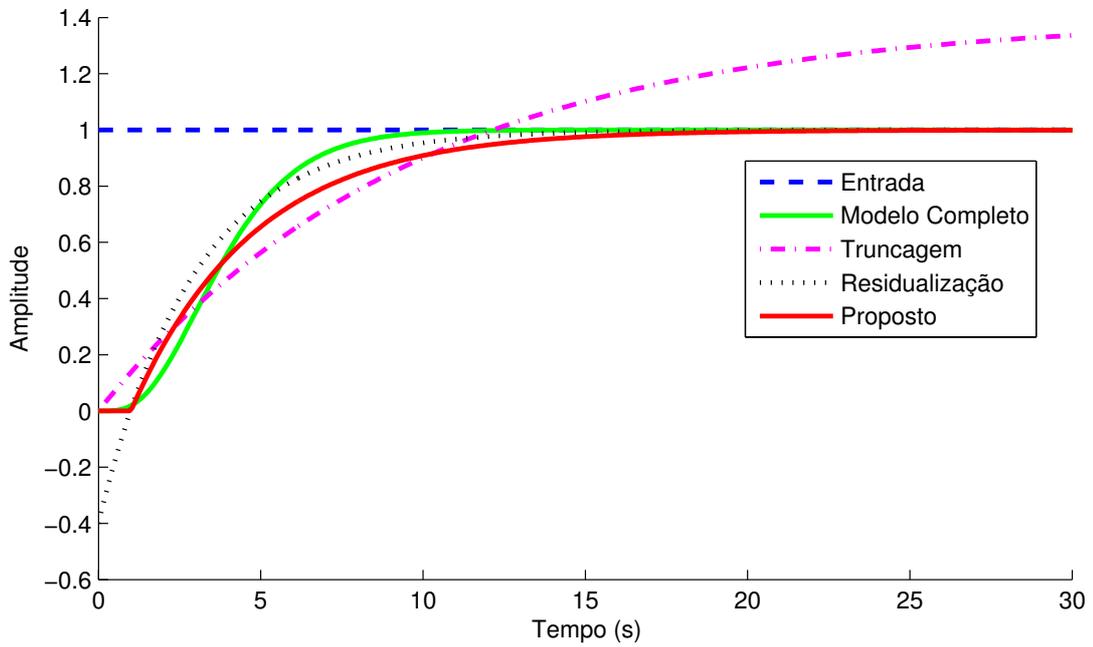


Figura 5.1: Gráfico da resposta ao degrau do exemplo 5.7.1

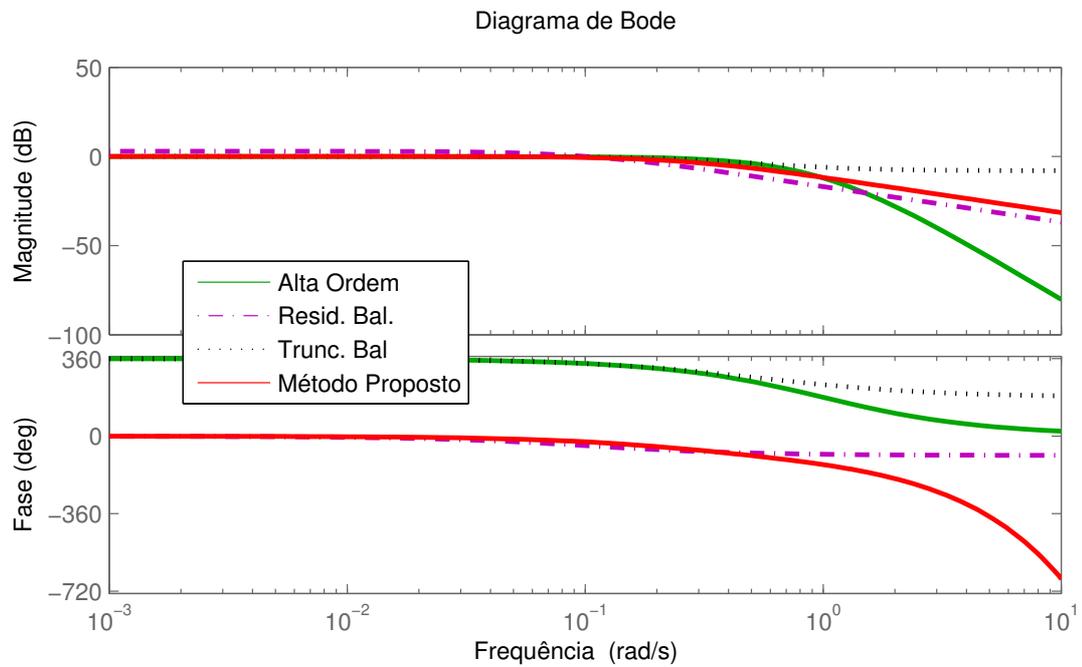


Figura 5.2: Gráfico de bode do exemplo 5.7.1

São mostrados na Tabela 5.1 os índices de desempenho no tempo e na frequência

dos modelos identificados. Observa-se que o método proposto apresentou os melhores índices, salientando que foi adicionado um atraso de 1,04s, obtido através do Algoritmo 6. A residualização balanceada obteve boa representatividade no tempo, porém possui o inconveniente de um ganho direto. Já a truncagem balanceada obteve um melhor ajuste na frequência, porém o ganho DC divergiu muito do modelo original.

Tabela 5.1: Comparativo entre os modelos reduzidos do exemplo simulado 5.7.1

Técnica	NRMSE Tempo (%)	NRMSE Freq. (%)	Modelo
Residualização	95,2	48,8	$\frac{1,4}{2,93s+1} - 0,4$
Truncagem	41,1	75,3	$\frac{1,4}{9,70s+1}$
Proposta	96,5	93,6	$\frac{1}{3,75s+1}e^{-1,04}$

5.7.2 Exemplo simulado 2

Na Seção 4.5.4 foi identificado um modelo de terceira ordem discreto representando o sistema alvo dado pela Equação 4.56. O Algoritmo 11 é aplicado com o intuito de obter-se uma representação de primeira ordem, para um posterior projeto de sistema de controle clássico.

O equivalente contínuo do modelo identificado é dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1,16 & 0,64 & -0,70 \\ 1,23 & -2,23 & 1,26 \\ -1,98 & 2,60 & -3,94 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0,57 \\ 0,38 \\ 2,49 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.42)$$

$$y = \begin{bmatrix} -1,32 & -0,30 & -0,31 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,001 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.43)$$

A transformação $x_B = Tx$ foi aplicada no modelo, tornando-o balanceado

$$T = \begin{bmatrix} 1,38 & 0,48 & 0,00 \\ 0,73 & 0,24 & 0,39 \\ 0,02 & 0,65 & -0,18 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Foram então aplicadas três técnicas de redução de modelos: truncagem balanceada, residualização balanceada e a técnica proposta. As respostas dos modelos no tempo e na frequência são representadas respectivamente nas Figuras 5.3 e 5.4.

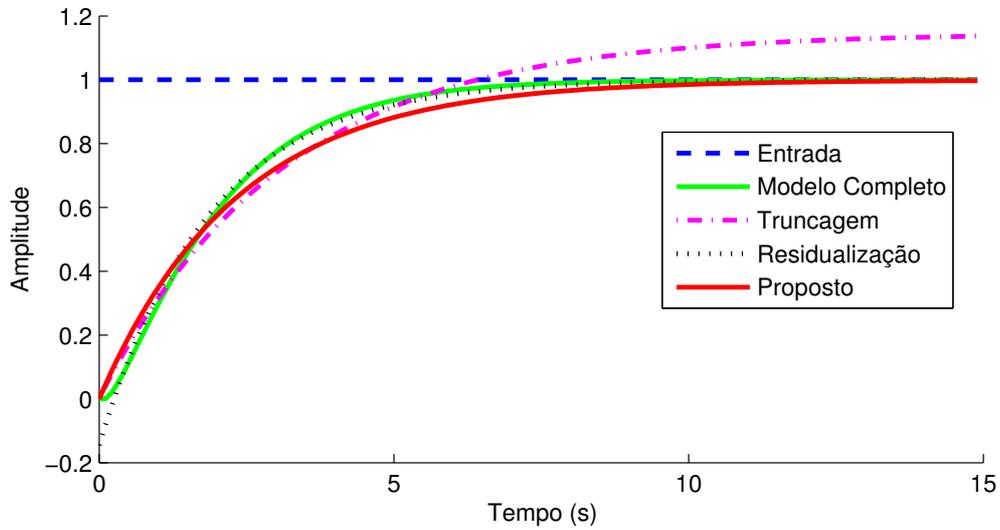


Figura 5.3: Gráfico da resposta ao degrau do exemplo 5.7.2

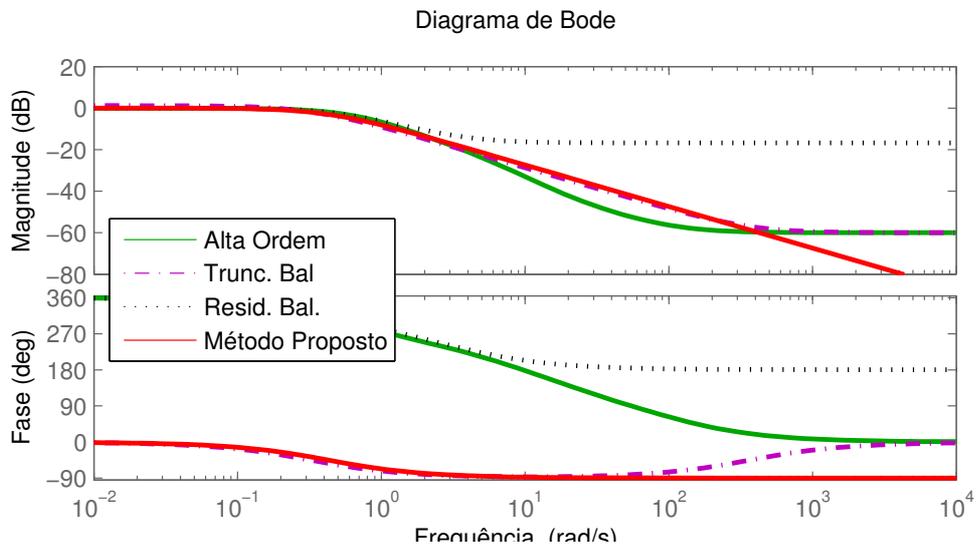


Figura 5.4: Gráfico de bode do exemplo 5.7.2

São mostrados na Tabela 5.2 os índices de desempenho no tempo e na frequência dos modelos identificados. Observa-se que o método proposto apresentou o melhor índice no tempo e na frequência. A residualização balanceada obteve melhor ajuste nas baixas frequências, assim como a truncagem se mostrou mais eficaz para as altas frequências.

Tabela 5.2: Comparativo entre os modelos reduzidos do exemplo simulado 5.7.2

Técnica	NRMSE Tempo (%)	NRMSE Freq. (%)	Modelo
Residualização	98,0	93,4	$\frac{1,14}{1,86s+1} - 0,14$
Truncagem	88,9	97,1	$\frac{1,14}{3,11s+1}$
Proposta	98,1	99,4	$\frac{1}{2,33s+1}$

5.8 Conclusões

Nesse capítulo foi introduzido o conceito de realizações balanceadas, em seguida foram apresentadas algumas técnicas para redução de modelos. Foi exposto o método de truncagem balanceada, adequado para uma faixa de frequência mais elevada assim como a residualização balanceada adequada para baixas frequências.

Por fim foi proposta uma técnica para obtenção de modelos de primeira ordem com atraso adequada a baixas e médias frequências. A técnica incorpora mais informações do modelo de alta ordem do que a truncagem balanceada, assim como iguala o ganho em regime estacionário tal qual a residualização balanceada. Em resumo, a técnica proposta inclui a contribuição de cada estado de maneira proporcional a sua importância na relação entrada/saída.

Capítulo 6

Aplicações Experimentais

Nesse capítulo, os métodos desenvolvidos na tese serão validados em uma série de aplicações experimentais. Será utilizada uma planta didática termoelétrica, um trocador de calor e uma planta de vazão e nível com quatro tanques acoplados. Detalhes adicionais sobre plataformas didáticas são encontrados em (LIMA; DIAS; BARROS, 2014), (LIMA et al., 2014), (BARROSO; LIMA; BARROS, 2014), (SILVA et al., 2015) e (MOREIRA et al., 2016).

Mais uma vez é utilizado o índice *NRMSE* (*Normalized root mean square error*) para avaliação das respostas dos modelos identificados. Tal índice varia de $-\infty\%$, para um ajuste pobre até 100% quando a resposta do modelo identificado é idêntica a real.

$$NRMSE = \left(1 - \frac{\|x_{ref} - x\|_2}{\|x_{ref} - \bar{x}_{ref}\|_2}\right)100\% \quad (6.1)$$

onde x_{ref} é o vetor de referência, x é o vetor de dados a ser testado e o operador $(\bar{\cdot})$ indica o valor médio dos elementos de um vetor.

Para fim de comparação entre os tempos de execução das rotinas utilizadas, todos os cálculos foram realizadas no ambiente do Matlab© em um computador com processador Intel® CoreTM i7 e 4GB de memória ram.

6.1 Planta didática termoelétrica

O efeito termoelétrico tem sido amplamente utilizado para o controle de temperatura em diversas áreas, tais quais, sistemas microeletrônicos, telecomunicações, equipamentos óticos e aplicações aeroespaciais. As principais vantagens desse tipo de tecnologia estão relacionadas a uma estrutura física compacta, com alta confiabilidade, ausente de vibrações que proporciona uma conversão direta entre energia elétrica e térmica. O maior

impedimento para o uso de módulos termoeletricos é sua baixa eficiência energética, o que restringe suas aplicações em situações em que o fornecimento de energia é crítico (ZHAO; TAN, 2014).

O aumento da utilização de módulos termoeletricos, em ambientes industriais, vem motivando o aparecimento de diversas técnicas de modelagem e controle de tais sistemas (CHEN; LIAO; HUNG, 2012) (JEONG, 2014).

6.1.1 Descrição da planta

Foi projetada e desenvolvida uma planta didática composta por dois elementos peltier acionados separadamente. Cada pastilha peltier possui uma face acoplada a um dissipador de calor de um *cooler*, com o objetivo de melhorar a troca de calor com o ambiente. A outra face é acoplada termicamente a uma peça cilíndrica de alumínio sólido, composta por 3 discos de diâmetros diferentes. Nesta peça de alumínio, estão fixados dois sensores de temperatura do tipo LM35. Conforme a Figura 6.1, pode-se ver que a temperatura em qualquer ponto do cilindro de testes é influenciada de maneira distinta pela tensão aplicada em cada uma das pastilhas peltier, caracterizando um sistema multivariável de duas entradas e duas saídas. Devido aos diferentes diâmetros dos discos, são evidenciadas quatro dinâmicas distintas entre as tensões de alimentação das pastilhas e os dois pontos de medição de temperatura.

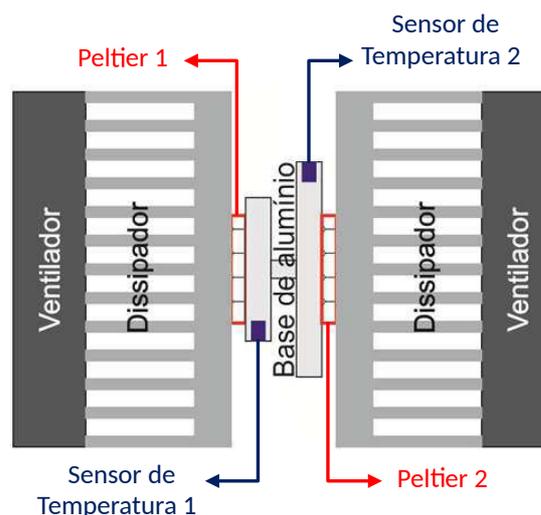


Figura 6.1: Módulo de temperatura

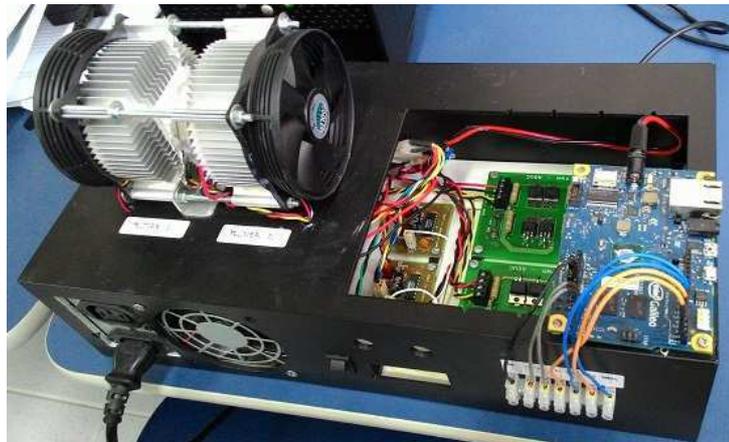


Figura 6.2: Foto da planta didática termoelétrica

Com os atuadores em potência máxima, a montagem atinge temperaturas na faixa de $0 - 100^{\circ}\text{C}$. As variáveis de interesse são caracterizadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Variáveis de interesse da planta

Variável	Caract.	Unidade	Valor Min	Valor Máx
Tensão Peltier 1	Entrada 1	Volts	0 (0%)	12 (100%)
Tensão Peltier 2	Entrada 2	Volts	0 (0%)	12 (100%)
Temp. Sensor 1	Saída 1	$^{\circ}\text{C}$	0	100
Temp. Sensor 2	Saída 2	$^{\circ}\text{C}$	0	100

A planta piloto é composta pelo módulo de temperatura com duas pastilhas peltier, circuitos de acionamento em ponte H, amplificadores para o sensor de temperatura, uma fonte de alimentação ATX, um micro controlador arduino e um PC, conforme a Figura 6.3. A comunicação entre o PC e o arduino é baseada em uma arquitetura cliente OPC (*OLE for process control*). Mais detalhes em (LIMA; DIAS; BARROS, 2014) e (LIMA et al., 2015).

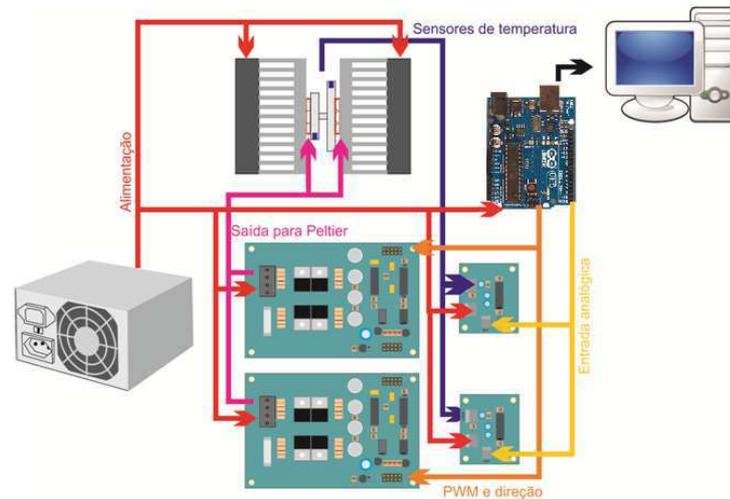


Figura 6.3: Diagrama da planta didática termoeétrica

6.1.2 Resultados experimentais

Malha TIC1-1

- Entrada: Tensão aplicada no módulo Peltier 1;
- Saída: Temperatura aferida no sensor 1.

A malha TIC1-1 relaciona a tensão de entrada do módulo peltier 1 e a temperatura aferida pelo sensor 1. Seguindo a metodologia do Capítulo 3, foi aplicada uma oscilação realimentada por um relé, seguida por um pulso simples. As transições do sinal de controle ocorreram nos instantes $t_1 = 5,2s$ e $t_2 = 14,8s$, o que resultou em uma aproximação da constante de tempo $T = 38,6s$. Conforme a Proposição 8, os parâmetros do pulso foram definidos como $\alpha_n = \gamma_n = 5T$ e $\beta_n = \{40, 60\}$, a amplitude do relé $a = 10$ e a histerese $\varepsilon = 0,15$. Os sinais de entrada e saída, amostrados com $0,2s$ são representados na Figura 6.4.

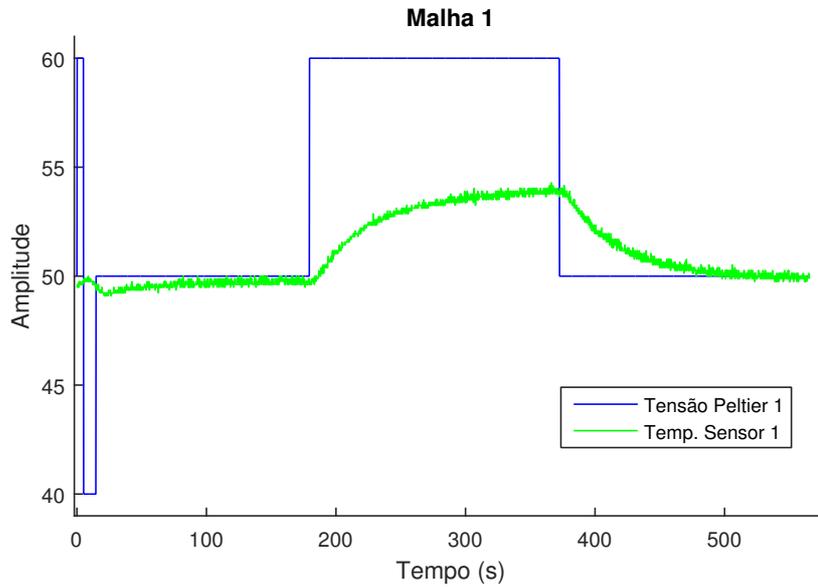


Figura 6.4: Gráfico dos sinais de entrada e saída da Malha TIC1-1

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 16$ e $\mu = 2$. A análise do estado estacionário inicial indica um desvio padrão de $\sigma = 0,018$ portanto o *drift* e o *threshold* calculados são respectivamente $\nu = 0,009$ e $h = 0,036$. Observa-se na Figura 6.5 que o atraso estimado é $\hat{t}_d = 0,2s$.

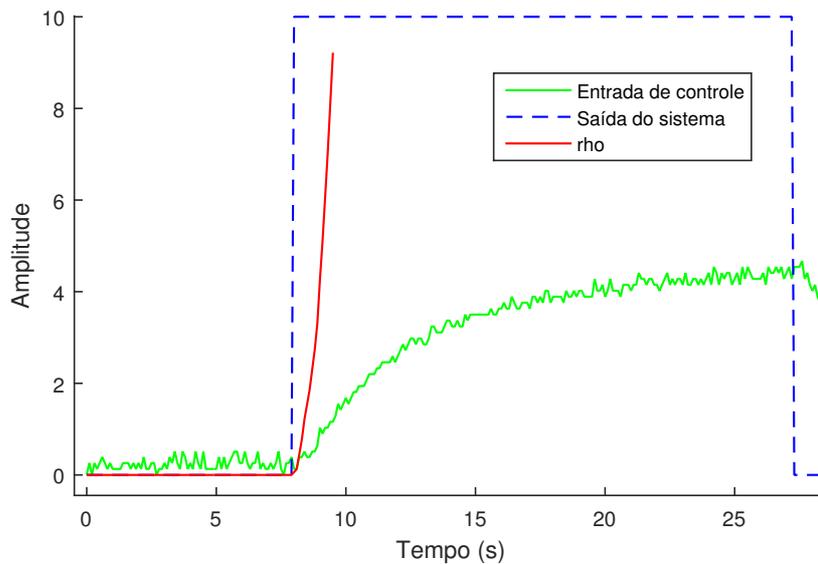


Figura 6.5: Gráfico dos sinais para busca do atraso da Malha TIC1-1

Na Figura 6.6 é representada graficamente a sequência de valores singulares calculada. Observa-se que a partir do índice 2 os valores singulares são desprezíveis, levando a crer

que o sistema pode ser representado por um modelo de primeira ordem.

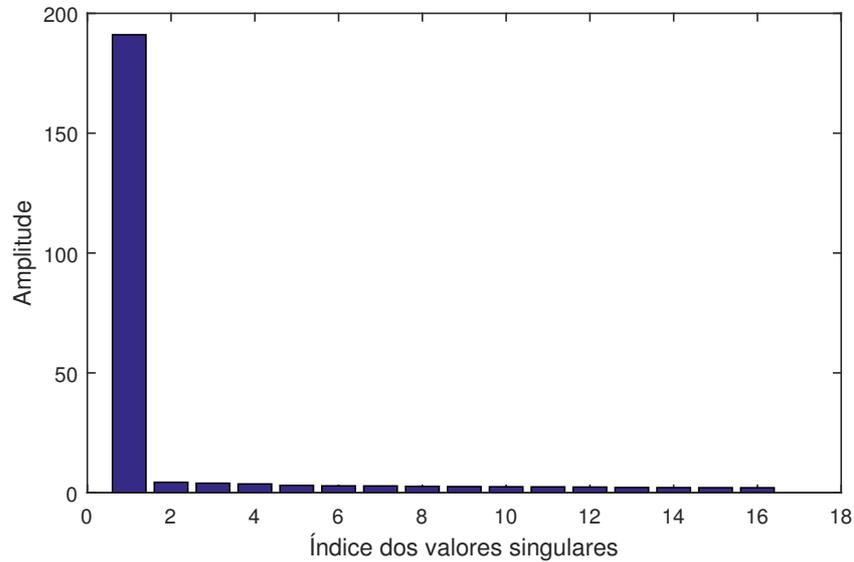


Figura 6.6: Sequência de valores singulares da Malha TIC1-1

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,981 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,058 \end{pmatrix} u(t-1) \quad (6.2)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -0,114 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,000 \end{pmatrix} u(t-1) \quad (6.3)$$

assim como a sua representação equivalente entrada-saída é

$$G(z)_{RPS-TD} = \frac{0,008}{(z - 0,981)} z^{-1} \quad (6.4)$$

A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX de ordem 1. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 6.7.

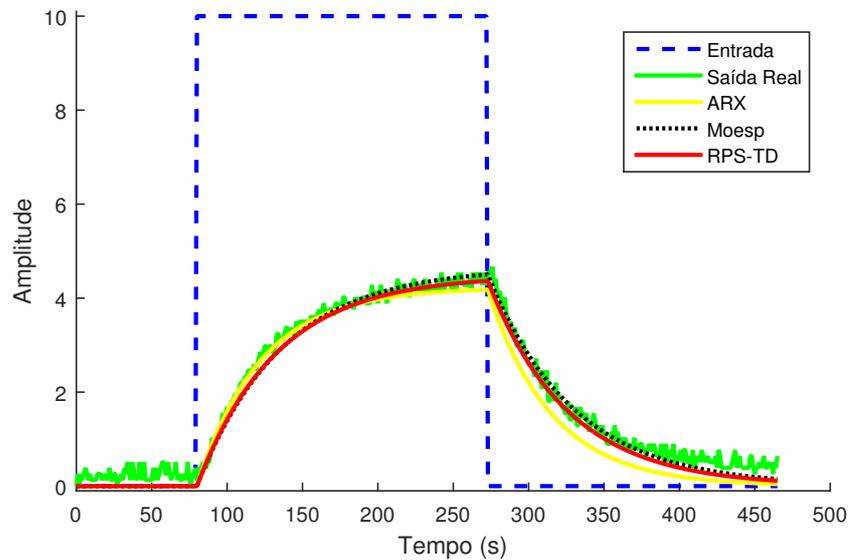


Figura 6.7: Simulação dos modelos identificados da Malha TIC1-1

Verifica-se na Tabela 6.2 que o método proposto apresentou o critério de erro semelhante ao MOESP, porém foi o de menor tempo de execução. O modelo ARX apresentou um ajuste inferior, além de um tempo de execução maior.

Tabela 6.2: Comparativo entre os modelos identificados para malha TIC1-1

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	85,9	28
Moesp	86,9	3161
ARX	79,0	993

Malha TIC1-2

- Entrada: Tensão aplicada no módulo Peltier 1;
- Saída: Temperatura aferida no sensor 2.

A malha TIC1-2 relaciona a tensão de entrada do módulo peltier 1 e a temperatura aferida pelo sensor 2. Seguindo a metodologia do Capítulo 3, foi aplicada uma oscilação realimentada por um relé, seguida por um pulso simples. As transições do sinal de controle ocorreram nos instantes $t_1 = 5,2s$ e $t_2 = 14,8s$, o que resultou em uma aproximação da

constante de tempo $T = 150,2s$. Conforme a Proposição 8, os parâmetros do pulso foram definidos como $\alpha_n = \gamma_n = 5T$ e $\beta_n = \{40, 60\}$, a amplitude do relé $a = 10$ e a histerese $\varepsilon = 0,20$. Os sinais de entrada e saída, amostrados com $0,2s$, são representados na Figura 6.8.

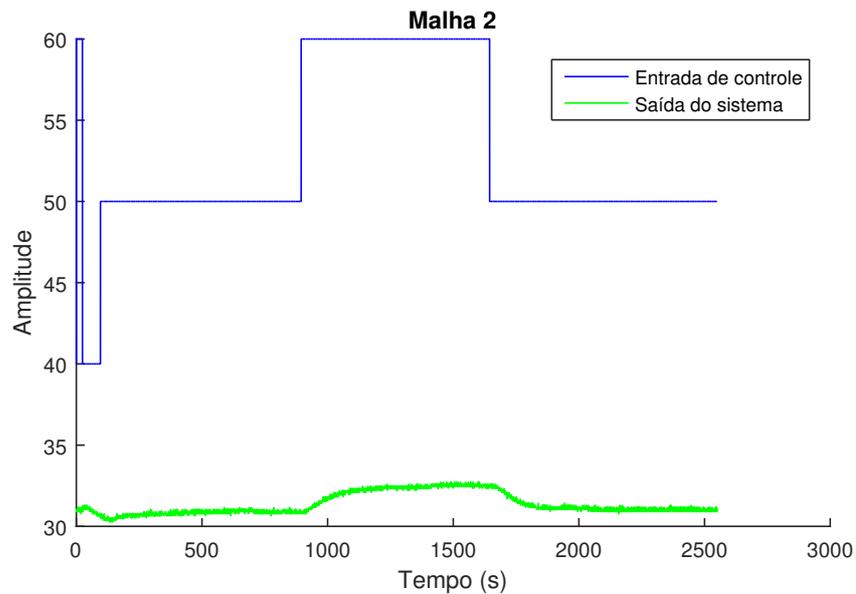


Figura 6.8: Gráfico dos sinais de entrada e saída da Malha TIC1-2

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 50$ e $\mu = 2$. A análise do estado estacionário inicial indica um desvio padrão de $\sigma = 0,008$ portanto o *drift* e o *threshold* calculados são respectivamente $\nu = 0,004$ e $h = 0,016$. Observa-se na Figura 6.9 que o atraso estimado é $\hat{t}_d = 1,0s$.

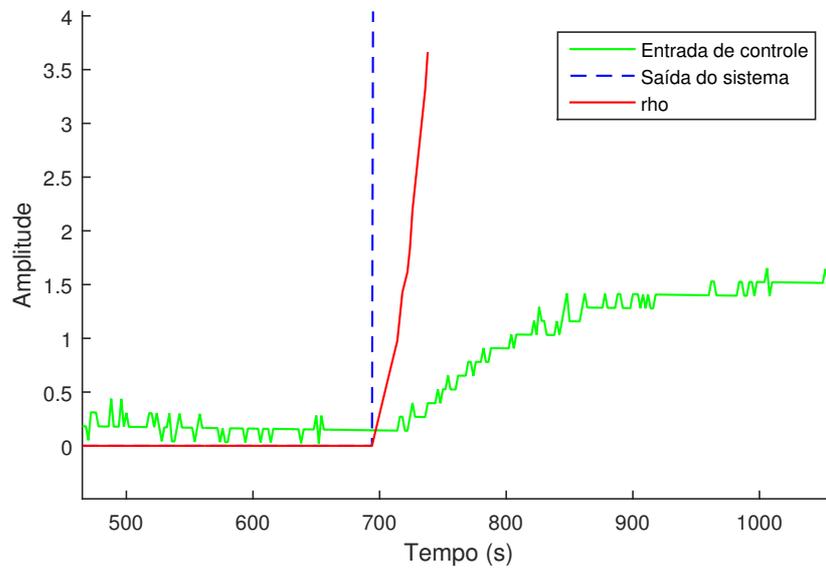


Figura 6.9: Gráfico dos sinais para busca do atraso da Malha TIC1-2

Na Figura 6.10 é representada graficamente a sequência de valores singulares calculada. Observa-se que a partir do índice 2 os valores singulares são desprezíveis, levando a crer que o sistema pode ser representado por um modelo de primeira ordem.

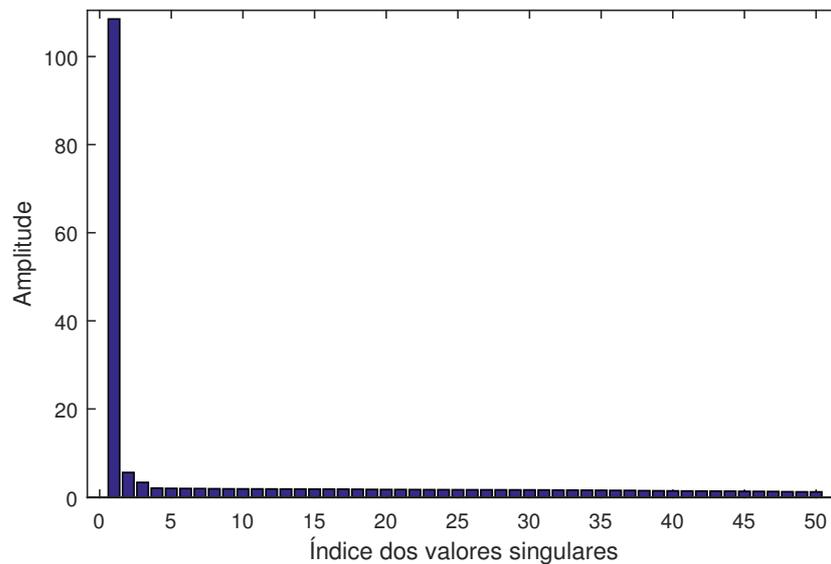


Figura 6.10: Sequência de valores singulares da Malha TIC1-2

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = (0,986)x(t) + (-0,024)u(t-5) \quad (6.5)$$

$$y(t) = (-0,088)x(t) + (0,000)u(t-5) \quad (6.6)$$

assim como a sua representação equivalente entrada-saída é

$$G(z)_{RPS-TD} = \frac{0,002}{(z - 0,986)}z^{-5} \quad (6.7)$$

A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX de ordem 1. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 6.11.

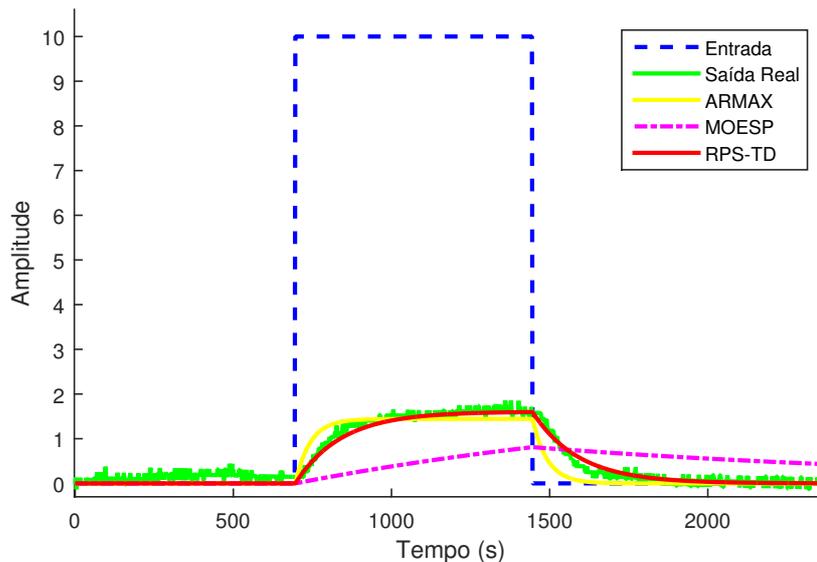


Figura 6.11: Simulação dos modelos identificados da Malha TIC1-2

Verifica-se na Tabela 6.3 que o método proposto apresentou o melhor critério de erro assim como foi o de menor tempo de execução. O modelo ARX apresentou ajuste e tempo de execução intermediários. Já o MOESP se mostrou lento e pouco preciso.

Tabela 6.3: Comparativo entre os modelos identificados para malha TIC1-2

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	80,4	51
Moesp	2,5	2948
ARX	65,0	856

Malha TIC12-12

- Entradas: Tensões aplicadas nos módulos Peltier 1 e 2;
- Saídas: Temperaturas aferidas nos sensores 1 e 2.

A malha multivariável TIC12-12 relaciona as tensões aplicadas nos módulos peltier 1 e 2 e as temperaturas aferidas pelos sensores 1 e 2. O experimento é executado de forma sequencial e os atrasos são negligenciados. É aplicado um pulso por vez em cada uma das duas entradas, de forma que a entrada não excitada permanece em repouso. Os sinais aplicados são representados na Figura 6.12.

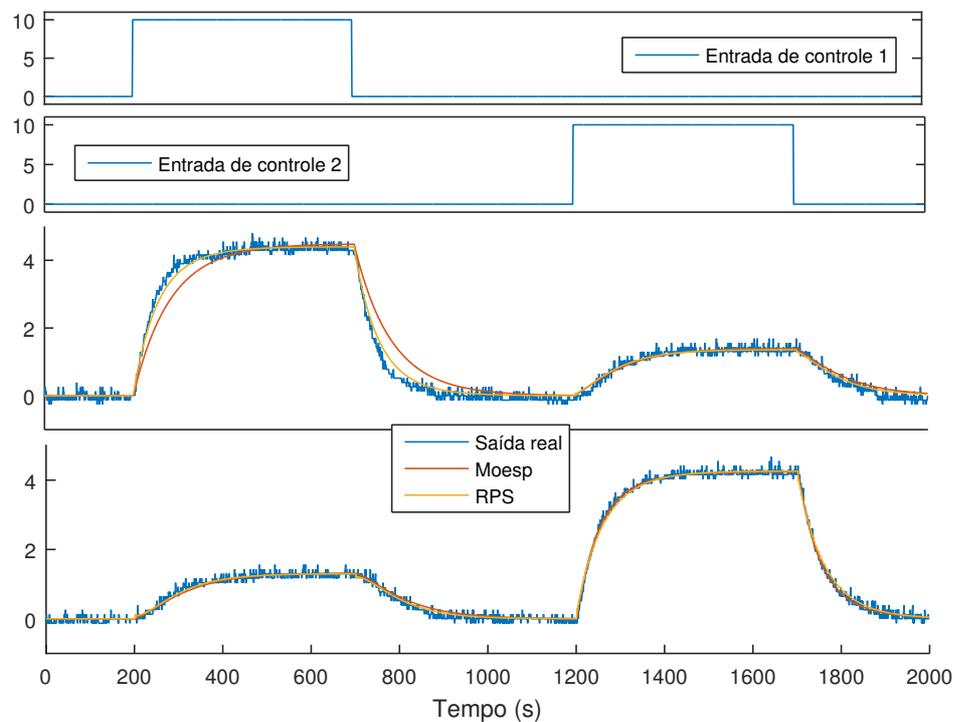


Figura 6.12: Simulação dos modelos identificados da Malha TIC12-12

Na Figura 6.13 é representada graficamente a sequência de valores singulares calculada. Observa-se que o sistema apresenta valores singulares consideráveis até o índice 2.

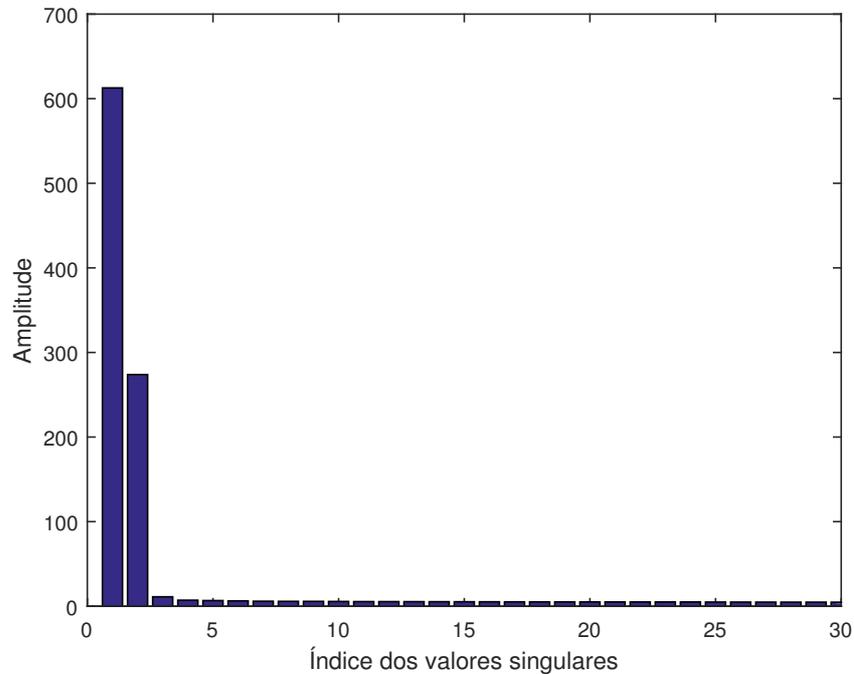


Figura 6.13: Sequência de valores singulares da Malha TIC12-12

Finalmente o modelo identificado em espaço de estados é dado por

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,01 \\ 0,00 & 0,98 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,0002 & -0,0002 \\ 0,0001 & 0,0001 \end{pmatrix} u(t) \quad (6.8)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 16,42 & 27,61 \\ -8,32 & 32,12 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} u(t) \quad (6.9)$$

A título de comparação, foi estimado outro modelo utilizando a técnica MOESP. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas na Figura 6.12. Verifica-se na Tabela 6.4 que o método proposto apresentou o critério de erro semelhante ao MOESP, porém foi o de menor tempo de execução.

Tabela 6.4: Comparativo entre os modelos identificados para malha TIC12-12

Técnica	Saída	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	1	90,6	403
RPS-TD	2	92,1	403
Moesp	1	80,2	2360
Moesp	2	93,0	2360

6.2 Trocador de calor

Foi projetada e construída uma planta piloto de troca de calor com o intuito de simular a operação de várias malhas de controle, usando os mesmos equipamentos e procedimentos adotados na indústria de processos. Uma foto da montagem final da planta é ilustrada na Figura 6.14



Figura 6.14: Foto do Trocador de calor

6.2.1 Descrição da planta

A planta didática é subdividida em duas regiões relacionadas a sua temperatura.

- **O circuito quente:** O fluido é bombeado a partir do tanque quente, passa pelo aquecedor elétrico, é parcialmente resfriado no trocador de calor, vai para o tanque de nível e retorna para o tanque quente.
- **O circuito frio:** O fluido é bombeado a partir do tanque frio, é aquecido no trocador de calor, é resfriado no radiador e volta para o tanque frio.

São monitoradas as temperaturas de entrada e saída do trocador, assim como a vazão do circuito quente e o nível do tanque de nível. Uma representação gráfica do funcionamento da planta é ilustrada na Figura 6.15.

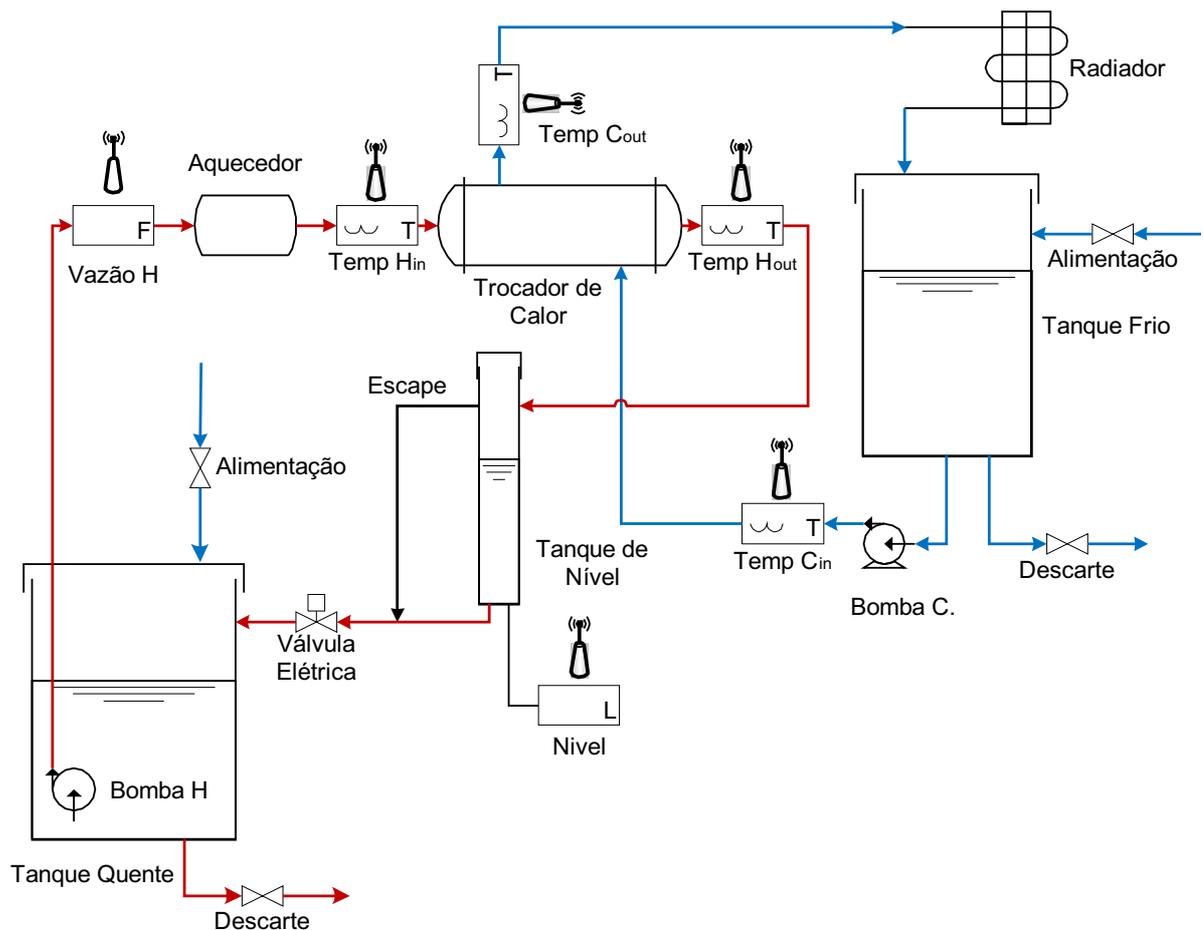


Figura 6.15: Diagrama esquemático da planta de troca de calor

Foi escolhido um trocador de calor do tipo serpentina, conforme ilustrado na Figura 6.16. Graças a sua estrutura compacta e alto coeficiente de troca de calor, trocadores

do tipo serpentina são largamente utilizados em aplicações alimentícias, usinas termoelétricas, usinas nucleares, refrigeração, sistemas de recuperação de energia, etc (JAYAKUMAR, 2012).

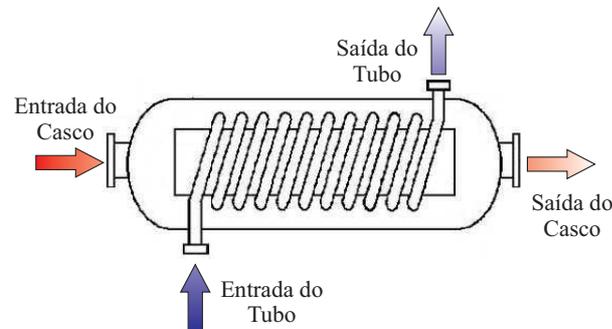


Figura 6.16: Trocador de calor do tipo serpentina

A planta é controlada por um CLP 1769 Compactlogix da Rockwell Automation e todos os atuadores são conectados via 4-20mA. A aquisição de dados é realizada através de uma rede WirelessHART dedicada. Essa rede sem fio é composta por quatro transmissores de temperatura Rosemount 648, dois transmissores diferenciais de pressão Rosemount 3051 e um gateway. A comunicação entre os diferentes fabricantes é atingida por meio de uma arquitetura cliente/servidor OPC-DA. Para mais informações sobre a instrumentação, veja (ROCKWELLAUTOMATION, 2016) e (EMERSONPROCESS, 2016).

O volume dos tanques é muito maior do que o do trocador de calor, portanto as temperaturas de saída são consideradas constantes. O radiador mantém o tanque frio em temperatura ambiente e um controlador PID atua na resistência de aquecimento, mantendo a temperatura do tanque quente em um determinado setpoint. Existe também um PID secundário para controlar o nível do tanque de nível através da válvula de saída H . O ponto de operação utilizado é descrito na Tabela 6.5.

6.2.2 Resultados experimentais

Os resultados experimentais foram obtidos em torno do ponto de operação descrito na Tabela 6.5. Todos os sinais são amostrados a cada 16 segundos, equivalente a taxa máxima dos transmissores WirelessHART.

Malha TIC1

- Entrada: Frequência da Bomba H;

Tabela 6.5: Ponto de operação

Variável	Valor	Unidade	Tipo
Temp H_{in}	42,7	$^{\circ}C$	Saída
Temp H_{out}	29,2	$^{\circ}C$	Saída
Temp C_{in}	26,2	$^{\circ}C$	Saída
Temp C_{out}	30,6	$^{\circ}C$	Saída
Vazão H	15	l/min	Saída
Nível L	0	mm	Saída
Bomba H	32	Hz	Entrada
Bomba C	26	Hz	Entrada
Resistência	88	Volts	Entrada
Valvula H	100	%	Entrada

- Saídas: Temp C_{out} e Temp H_{out} .

Assumindo que uma estimativa da constante de tempo mais lenta da malha já era conhecida previamente, foi aplicado um pulso simples com $\gamma = 464s$, $\alpha = 1296s$ e $\beta = 1$.

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 10$ e $\mu = 1,5$. Observa-se na Figura 6.17 que o atraso estimado para a saída Temp C_{out} é $64s$ e para saída Temp H_{out} é $48s$. A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas nas Figuras 6.18 e 6.19. A ordem dos modelos foi selecionada baseada nos valores singulares representados na Figura 6.23.

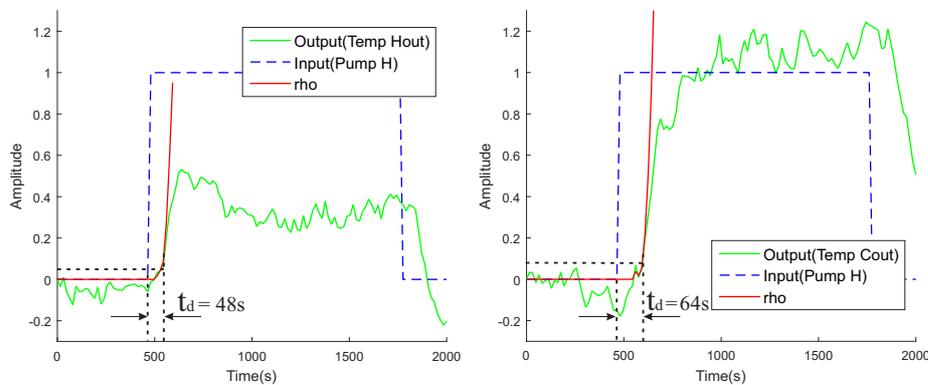


Figura 6.17: Estimativa dos atrasos da malha TIC1

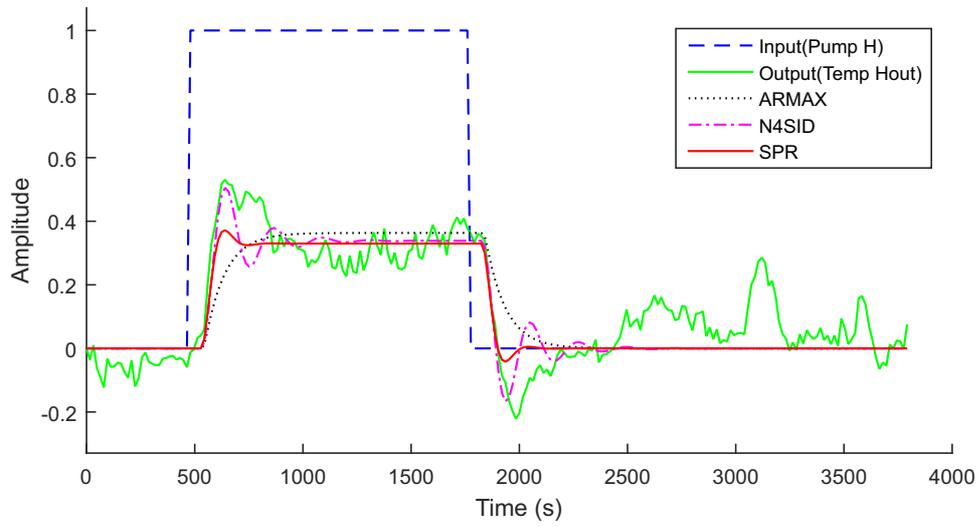


Figura 6.18: Resultados para Bomba H x Temp H_{out}

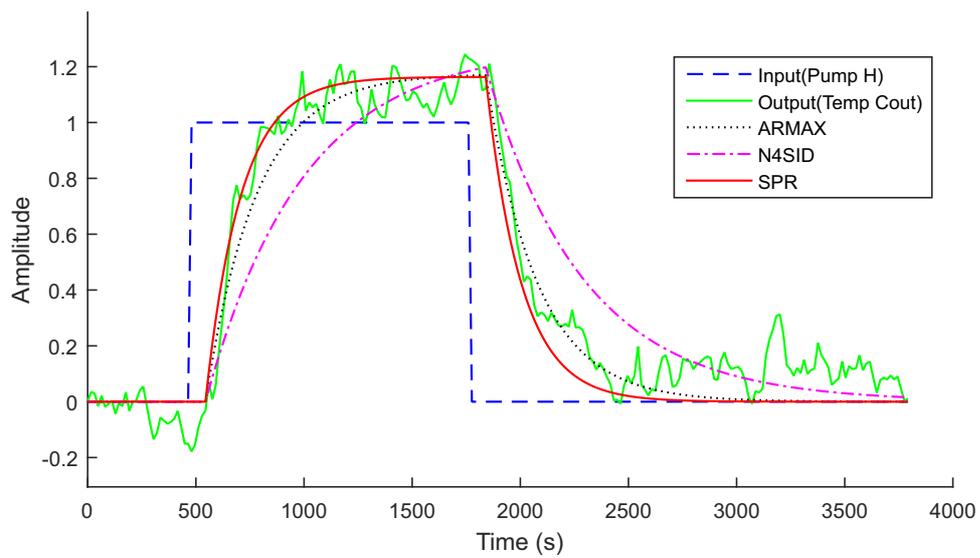


Figura 6.19: Resultados para Bomba H x Temp C_{out}

É mostrado na tabela 6.6 que o método proposto apresentou um dos melhores índices de erro, assim como foi o de execução mais rápida.

Tabela 6.6: Comparativo entre os modelos identificados para Malha TIC1

Método	Saída	<i>NRMSE</i> (%)	Tempo de Cálculo (s)
ARMAX	Temp H_{out}	39.8	0.88
MOESP	Temp H_{out}	51.1	3.11
RPS-TD	Temp H_{out}	51.5	0.21
ARMAX	Temp C_{out}	78.8	0.87
MOESP	Temp C_{out}	62.6	3.24
RPS-TD	Temp C_{out}	77.0	0.22

Malha TIC2

- Entrada: Frequência da Bomba C;
- Saídas: Temp C_{out} e Temp H_{out} .

Assumindo que uma estimativa da constante de tempo mais lenta da malha já era conhecida previamente, foi aplicado um pulso duplo com $\gamma_1 = 176s$, $\alpha_1 = 880s$, $\beta_1 = -1.5$, $\gamma_2 = 416$, $\alpha_2 = 560s$ e $\beta_2 = 0.5$.

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 10$ e $\mu = 1, 5$. Observa-se na Figura 6.20 que o atraso estimado para a saída Temp C_{out} é $48s$ e para saída Temp H_{out} é $48s$. A título de comparação foram estimados dois outros modelos utilizando o toolbox de identificação do Matlab. Um modelo, por subespaços, utilizando a ponderação MOESP, assim como outro modelo ARX. As curvas das saídas dos modelos obtidos são representadas nas Figuras 6.21 e 6.22. A ordem dos modelos foi selecionada baseada nos valores singulares representados na Figura 6.23.

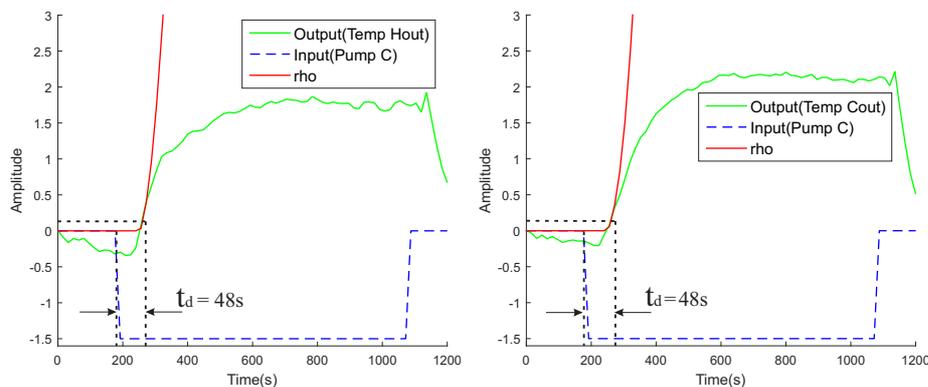


Figura 6.20: Estimativa dos atrasos da malha TIC2

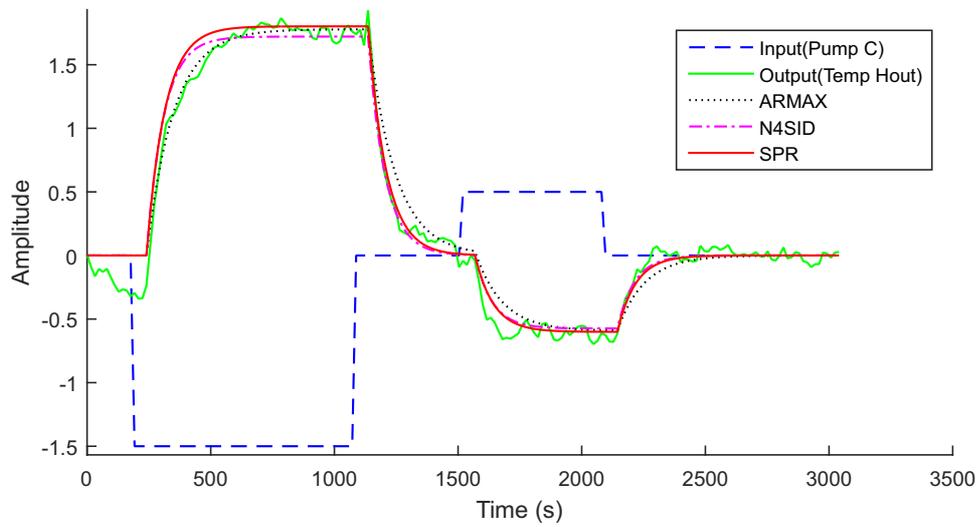


Figura 6.21: Resultados para Bomba C x Temp H_{out}

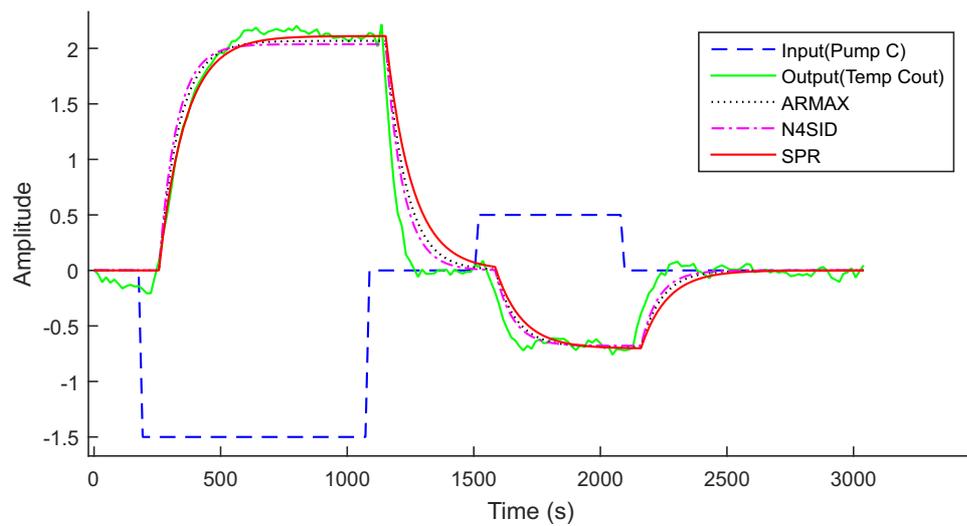


Figura 6.22: Resultados para Bomba C x Temp C_{out}

Nesse caso o $NRMSE$ do método proposto foi similar às técnicas comparadas, porém o tempo de execução foi muito inferior. O RPC-TD foi 4 vezes mais rápido do que o ARX e cerca de 10 vezes mais rápido que o MOESP

Tabela 6.7: Comparativo entre os modelos identificados para Malha TIC2

Método	Saída	<i>NRMSE</i> (%)	Tempo de Cálculo (s)
ARMAX	Temp H_{out}	85.4	0.87
MOESP	Temp H_{out}	86.6	3.17
RPC-TD	Temp H_{out}	86.2	0.20
ARMAX	Temp C_{out}	84.1	0.88
MOESP	Temp C_{out}	85.7	3.18
RPC-TD	Temp C_{out}	80.0	0.25

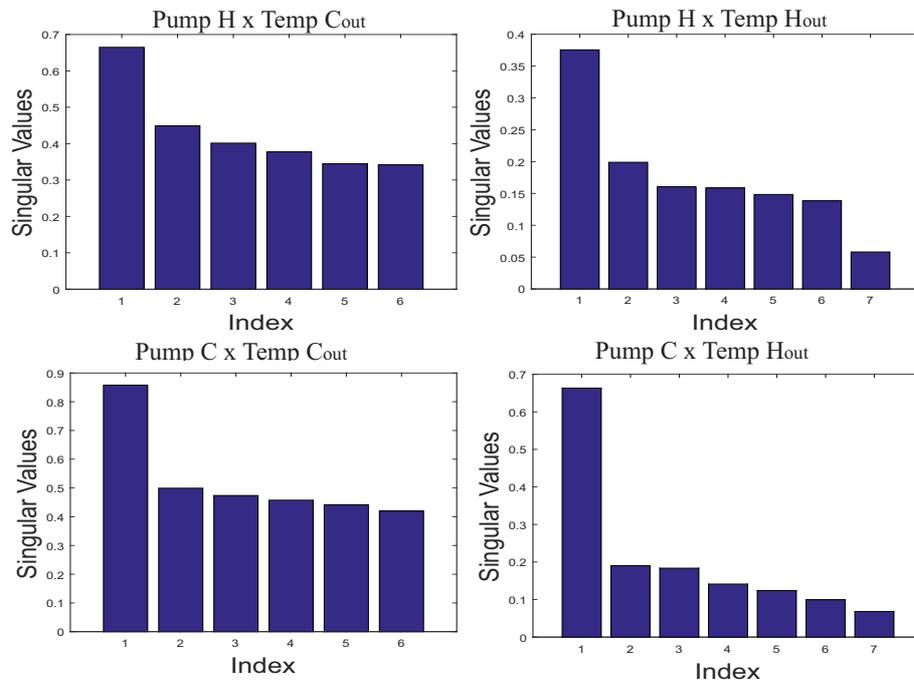


Figura 6.23: Sequência de valores singulares das Malhas TIC1 e TIC2

6.3 Planta com quatro tanques acoplados

Foi utilizada a planta piloto de tanques acoplados ilustrada na Figura 6.24



Figura 6.24: Foto da planta de tanques acoplados

6.3.1 Descrição da planta

A planta piloto é composta por quatro tanques com diferentes tamanhos, duas bombas centrífugas acionada através de inversores de frequência, duas válvulas globo elétricas, seis transmissores diferenciais de pressão, um CLP e um computador com um sistema SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition).

Os transmissores diferenciais de pressão são interligados no cartão de entrada analógica do CLP utilizando o padrão de comunicação 4-20mA. Quatro transmissores são utilizados para medição do nível de líquido em cada um dos tanques. A tomada de pressão para medição do nível é feita no fundo do tanque. Como os tanques não são pressurizados, a pressão de referência é a atmosférica. Os outros dois transmissores são utilizados para medição de vazão de líquido. O elemento primário para medição de vazão é a placa de orifício.

Na Figura 6.25 é apresentado um diagrama esquemático do processo de quatro tanques

acoplados.

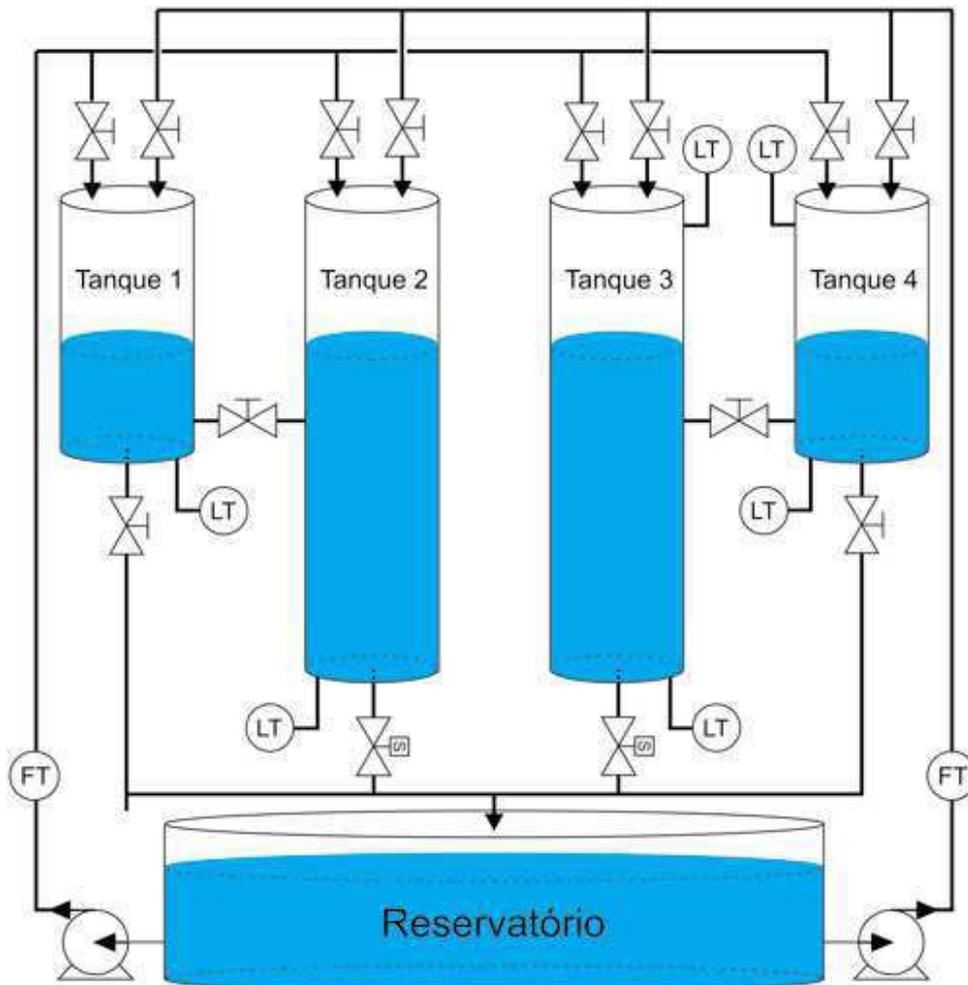


Figura 6.25: Diagrama da planta com quatro tanques acoplados

O algoritmo de controle pode ser implementado diretamente no CLP ControlLogix da Allen-Bradley ou no Matlab. A comunicação entre o CLP e o Matlab é realizada através do padrão de comunicação OPC (OLE for Process Control).

O operador do processo pode fazer todas as alterações de referências, parâmetros do controlador e visualização das variáveis de interesse através da tela do supervisório implementado no software Intouch ou através da IHM física instalada no processo.

O arranjo das válvulas manuais permite selecionar diferentes configurações como tanques em cascata, acoplados, com realimentação entre outras possíveis. Isso possibilita a realização de experimento SISO, TITO e MIMO.

De maneira geral existem dois tipos de malhas de controle na planta:

- Malhas de vazão: A vazão de entrada dos tanques é controlada por meio da atuação nas bombas através dos inversores de frequência;

- Malhas de nível: O nível dos tanques é controlado por meio da sua vazão de entrada e é perturbado através da variação do percentual de abertura das válvulas de saída.

6.3.2 Resultados experimentais

Malha LIC1

- Entrada: Frequência da bomba 1;
- Saída: Nível do Tanque 2.

A malha utilizada consiste no monitoramento do nível em um tanque que é alimentado por uma bomba trifásica controlada por um inversor de frequência. A saída do tanque é por gravidade, através de uma válvula proporcional, operando com a abertura fixa. É apresentada na Figura 6.26 uma representação gráfica da malha utilizada.

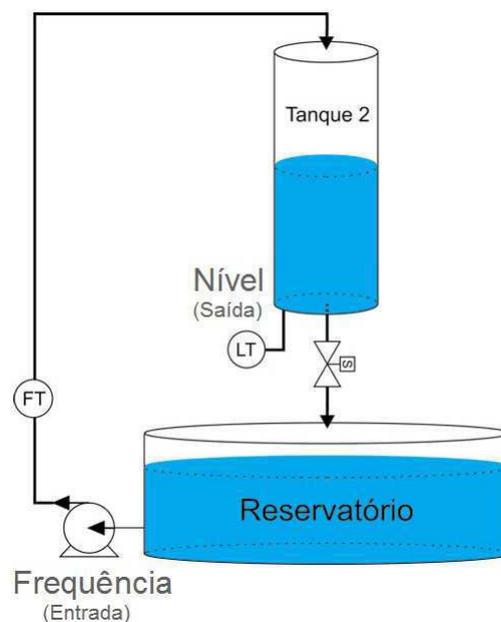


Figura 6.26: Diagrama esquemático da malha de nível LIC1

É aplicado um sinal de entrada $u_B(t)$ com $\alpha = 6000s$, $\beta = 10Hz$ e $\gamma = 2500s$. Ambos os sinais, amostrados com $50s$, são ilustrados na Figura 6.27. Devido as próprias características da planta, observa-se pouco ruído de medição.

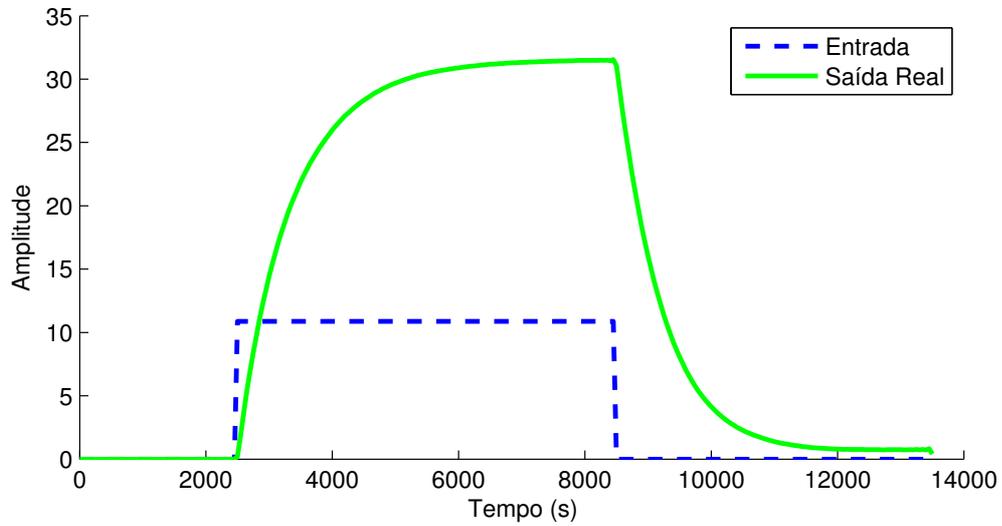


Figura 6.27: Gráfico dos sinais de entrada e saída reais da malha LIC1

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 30$. A análise do estado estacionário inicial indica um ruído de medição desprezível. Como pode-se ver na Figura 6.28 o atraso estimado também é nulo.

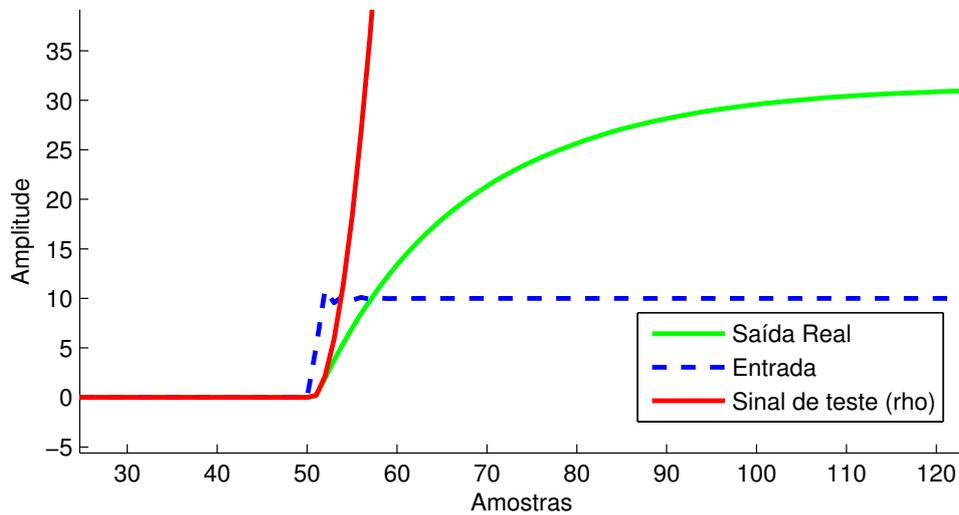


Figura 6.28: Gráfico dos sinais para busca do atraso da malha LIC1

Na Figura 6.29 é representada graficamente a Sequência de valores singulares calculada. Observa-se que existe uma predominância muito acentuada do primeiro valor singular, levando a crer que o sistema pode ser representado por um modelo de primeira ordem.

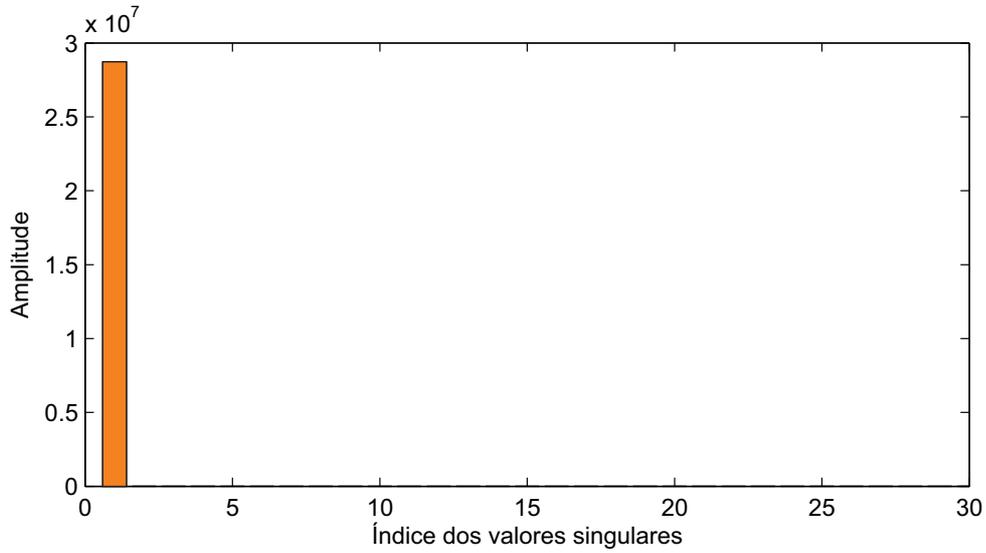


Figura 6.29: Sequência de valores singulares da malha LIC1

Finalmente o modelo obtido é dado por

$$x(t + 1) = (0,954) x(t) + (-0,0001) u(t) \tag{6.10}$$

$$y(t) = (-1561) x(t) + (0,000) u(t) \tag{6.11}$$

A título de comparação também foram identificados dois outros modelos. Foi utilizado o Algoritmo 3 com a ponderação Moesp assim como foi estimado um modelo ARMAX de segunda ordem, utilizando o toolbox padrão do Matlab. As curvas das saídas dos modelos identificados são representadas na Figura 6.30.

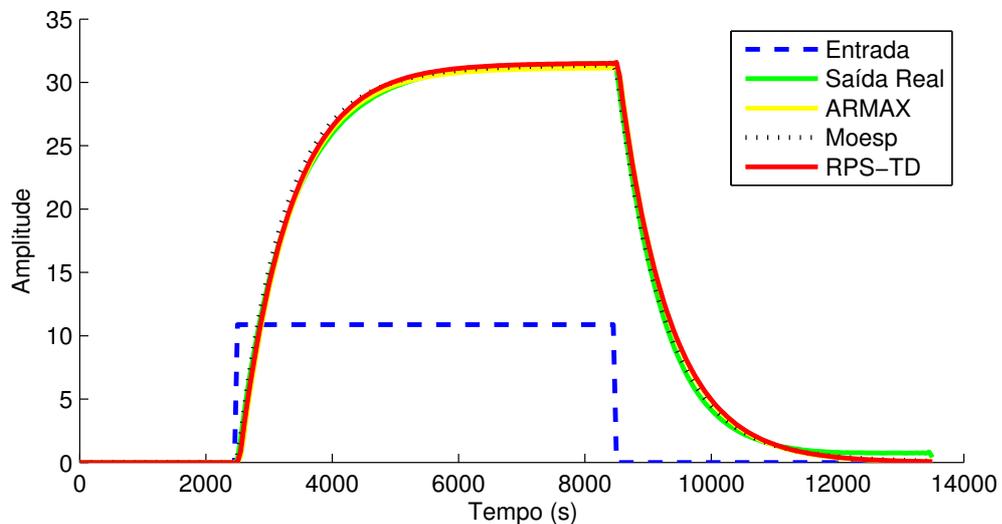


Figura 6.30: Gráfico dos sinais de saída da malha LIC1

Verifica-se na Tabela 6.8 que o método proposto apresentou o segundo melhor índice de erro assim como foi o de execução mais rápida. O método ARMAX teve pior desempenho e tempo de execução mais longo, já o Moesp obteve ligeira melhora na precisão porém tempo de execução intermediário.

Tabela 6.8: Comparativo entre os modelos identificados para malha LIC1

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	96,6	87
ARMAX	95,5	1601
Moesp	96,9	103

Malha FIC1

- Entrada: Frequência da bomba 1;
- Saída: Vazão após a bomba 1.

A malha utilizada consiste na aferição da vazão logo após a saída de uma bomba trifásica que por sua vez é controlada por um inversor de frequência. Uma representação gráfica da malha utilizada é apresentada na Figura 6.31.

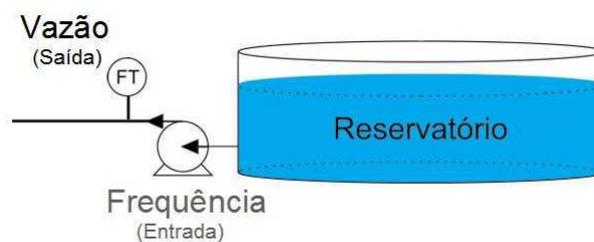


Figura 6.31: Diagrama esquemático da malha de vazão FIC1

É aplicado um sinal de entrada $u_B(t)$ com $\alpha = 8,8s$, $\beta = 20\%$ e $\gamma = 4,5s$. Ambos os sinais, amostrados com $0,1s$, são ilustrados na Figura 6.32.

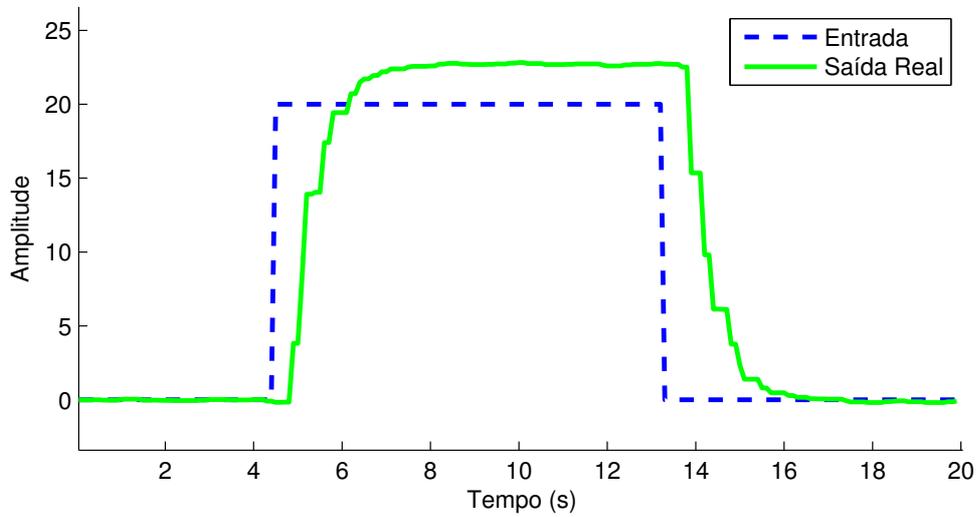


Figura 6.32: Gráfico dos sinais de entrada e saída reais da malha FIC1

O Algoritmo 7 RPC-TD é empregado com $r = 30$. A análise do estado estacionário inicial indica um ruído de medição desprezível. Como pode-se ver na Figura 6.33 o atraso estimado é $\hat{t}_d = 0,4s$.

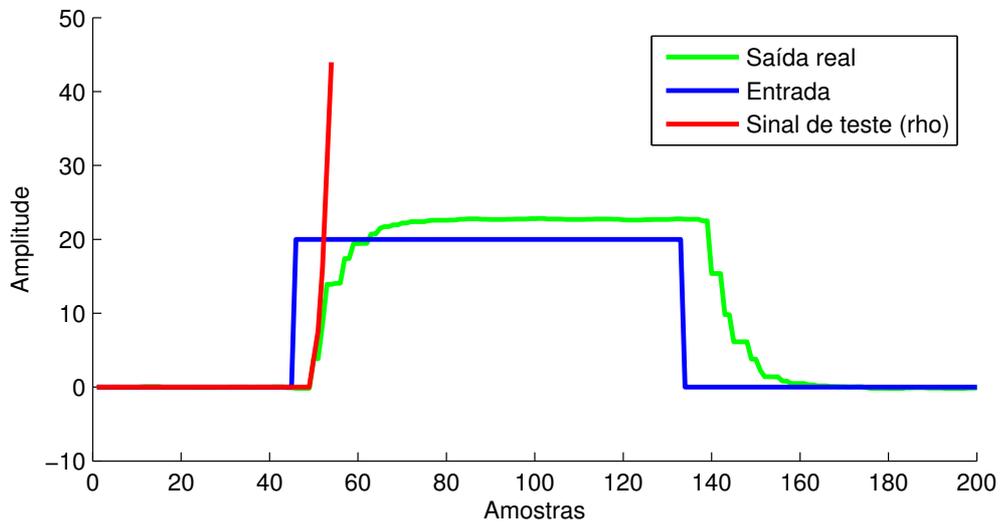


Figura 6.33: Gráfico dos sinais para busca do atraso da malha FIC1

Na Figura 6.34 é representada graficamente a Sequência de valores singulares calculada. Observa-se que não existe uma queda brusca entre os índices. Para fins didáticos, será escolhido um modelo de quarta ordem.

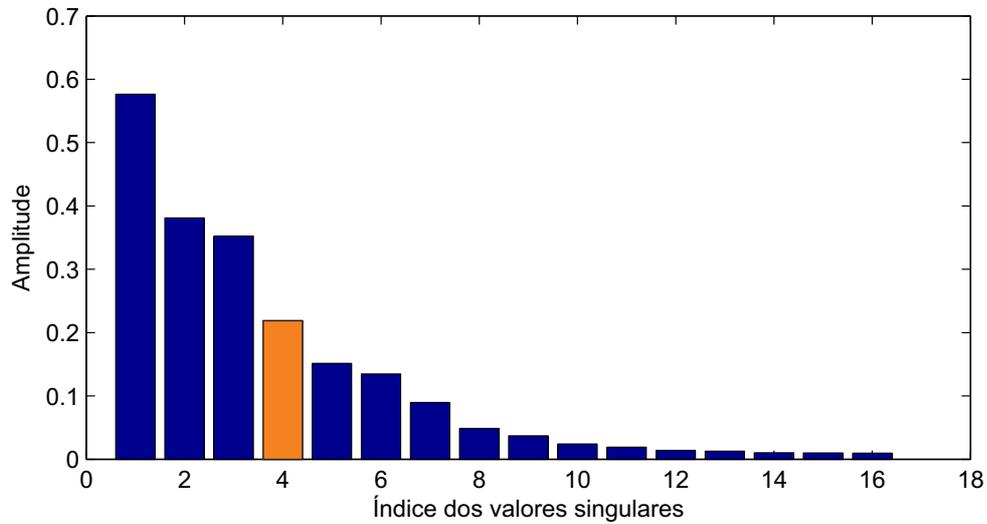


Figura 6.34: Sequência de valores singulares da malha FIC1

Finalmente o modelo obtido é dado por

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \begin{pmatrix} 0,766 & 0,406 & -0,072 & -0,195 \\ -0,404 & -0,056 & 0,331 & -0,515 \\ -0,078 & -0,316 & -0,898 & -0,207 \\ -0,195 & 0,517 & -0,196 & 0,399 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -0,405 \\ -0,426 \\ -0,127 \\ -0,044 \end{pmatrix} u(t-4) \quad (6.12) \\
 y(t) &= \begin{pmatrix} -0,507 & 0,535 & -0,151 & -0,054 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,000 \end{pmatrix} u(t-4) \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

A título de comparação também foram identificados dois outros modelos. Foi utilizado o Algoritmo 3 com a ponderação Moesp assim como foi estimado um modelo ARMAX de quarta ordem, utilizando o toolbox padrão do Matlab. As curvas das saídas dos modelos identificados são representadas na Figura 6.35.

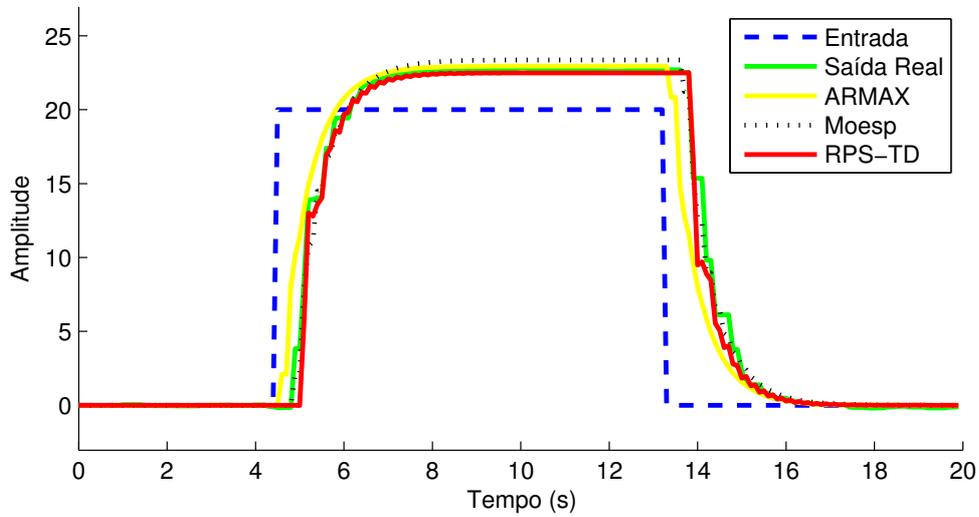


Figura 6.35: Gráfico dos sinais de saída da malha FIC1

Verifica-se na Tabela 6.9 que o método proposto apresentou o melhor índice de erro assim como foi o de execução mais rápida. O método ARMAX teve pior desempenho e tempo de execução mais longo, já o Moesp obteve precisão intermediária e tempo de execução intermediário.

Tabela 6.9: Comparativo entre os modelos identificados para malha FIC1

Técnica	NRMSE (%)	Tempo de execução (ms)
RPS-TD	94,1	61
ARMAX	81,6	1673
Moesp	93,8	90

Foi identificado um modelo de quarta ordem com atraso representando a malha alvo de vazão. O Algoritmo 11 é aplicado com o intuito de obter-se uma representação de primeira ordem, para um posterior projeto de sistema de controle clássico.

O equivalente contínuo do modelo identificado é dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0,17 & 7,86 & 0,82 & 2,05 & 3,73 \\ -7,87 & -8,43 & 2,51 & -12,1 & -5,92 \\ 0,68 & -2,63 & -2,03 & 1,61 & 31,6 \\ 2,03 & 12,11 & 1,82 & -0,22 & 7,71 \\ -3,49 & -5,06 & -29,9 & -7,32 & -1,06 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1,57 \\ -7,83 \\ 0,39 \\ 3,96 \\ -4,05 \end{bmatrix} u(t - 0,4) \quad (6.14)$$

$$y = \begin{bmatrix} -0,51 & 0,54 & -0,15 & -0,30 & -0,05 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,00 \end{bmatrix} u(t - 0,4) \quad (6.15)$$

A transformação $x_B = Tx$ foi aplicada no modelo, tornando-o balanceado

$$T = \begin{bmatrix} 0,34 & 0,08 & -0,02 & 0,01 & 0,02 \\ -0,02 & 0,24 & 0,13 & -0,05 & -0,12 \\ 0,01 & -0,03 & 0,20 & -0,05 & 0,18 \\ 0,01 & -0,10 & 0,14 & 0,07 & -0,16 \\ 0,02 & -0,06 & 0,00 & -0,32 & -0,07 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Foram então aplicadas três técnicas de redução de modelos: truncagem balanceada, residualização balanceada e a técnica proposta. As respostas dos modelos no tempo e na frequência são representadas respectivamente nas Figuras 6.36 e 6.37.

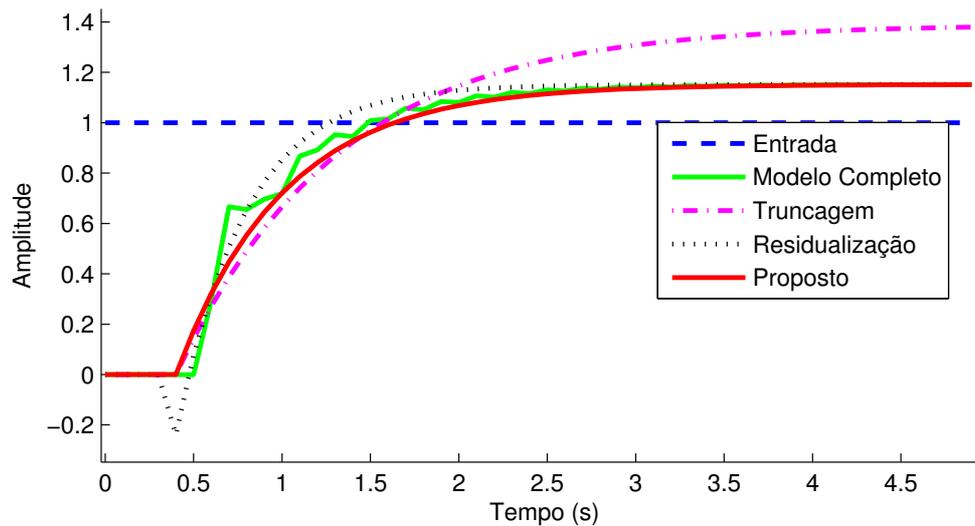


Figura 6.36: Gráfico da resposta ao degrau da malha FIC1

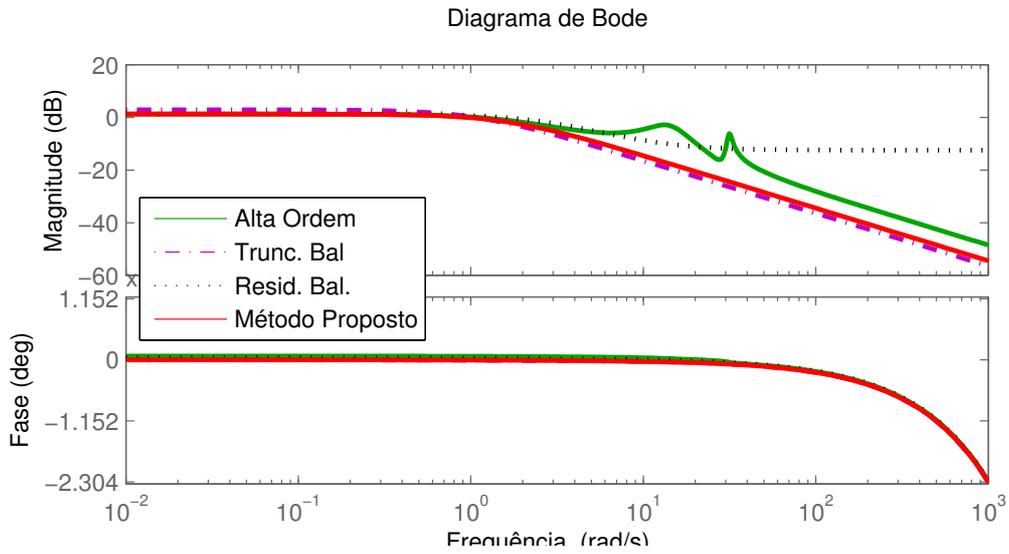


Figura 6.37: Gráfico de bode da malha FIC1

São mostrados na Tabela 6.10 os índices de desempenho no tempo e na frequência dos modelos identificados. Observa-se que o método proposto e a residualização balanceada apresentaram os melhores índices no tempo. A residualização balanceada obteve melhor ajuste nas baixas frequências, assim como o método proposto se mostrou mais representativo nas baixas e médias frequências.

Tabela 6.10: Comparativo entre os modelos reduzidos da Malha FIC1

Técnica	NRMSE Tempo (%)	NRMSE Freq. (%)	Modelo
Residualização	97,8	83,2	$\frac{1,39e^{-0,4}}{0,39s+1} - 0,24$
Truncagem	83,7	64,5	$\frac{1,39e^{-0,4}}{0,91s+1}$
Proposta	98,4	73,1	$\frac{1,15e^{-0,4}}{0,60s+1}$

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros

7.1 Conclusões

Nesse trabalho de tese foram apresentadas contribuições na área de identificação de sistemas representados em espaço de estados. Foi proposta uma metodologia completa para estimação de modelos que representem as principais dinâmicas de processos industriais. Foram abordados todos os passos em um procedimento identificação, desde o projeto das excitações, a definição do critério de ajuste para modelos em espaço de estados, até a redução de modelos de primeira ordem com atraso.

No Capítulo 1 foi apresentada uma breve revisão do estado da arte de identificação de sistemas, seguida pelas principais contribuições do trabalho de Tese.

No Capítulo 2 foram apresentadas técnicas clássicas para construção de realizações em espaço de estados. Foi feita uma revisão bibliográfica desde o método de Kalman, baseado na resposta ao impulso do sistema, seguindo aos métodos por subespaços, até a utilização de técnicas mais modernas de otimização por normas nucleares para obtenção de uma realização de posto mínimo.

No Capítulo 3 foi definido o formato das excitações utilizadas na Tese. Assumindo que poucas informações são disponibilizadas a priori, foi proposta uma metodologia para estimar a constante de tempo dominante, por meio da primeira oscilação de um experimento do relé. Essa informação, serve de parâmetro para o projeto da excitação principal, que é composta por um ou mais pulsos concatenados. Essa metodologia possibilita uma estimativa rápida de parâmetros básicos, em uma situação de projeto onde não há informações anteriores sobre a planta.

No Capítulo 4 foi apresentado um método para identificação de sistemas em espaço de estados, utilizando sinais de entrada pulsados. Foi comprovado experimentalmente que para o tipo de entrada proposta, tal técnica apresentou performance similar a métodos tradicionais, porém possui maior simplicidade numérica, resultando em uma redução do tempo de execução em até dez vezes. Também foram desenvolvidas variações do método para tratar sistemas com atraso de transporte assim como inserir informações conhecidas a priori do sistema. A técnica de análise de tendências CUSUM foi adaptada para fornecer estimativas do atraso mesmo em um ambiente ruidoso. Por fim, informações conhecidas a priori foram inseridas no modelo por meio de restrições nos seus pólos. Tais restrições são modeladas como regiões LMI que dão origem a um problema de otimização convexa.

No Capítulo 5 foi proposta uma técnica para obtenção de modelos de primeira ordem com atraso, adequada a baixas e médias frequências. A técnica incorpora mais informações do modelo de alta ordem do que a truncagem balanceada, assim como iguala o ganho em regime estacionário tal qual a residualização balanceada. Em resumo, a técnica proposta inclui a contribuição de cada estado de maneira proporcional a sua importância na relação entrada/saída.

No Capítulo 6 as técnicas desenvolvidas ao longo da Tese são validadas experimentalmente em uma série de plantas didáticas em escala piloto. São utilizadas malhas térmicas, de vazão e nível.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Alguns pontos explorados de forma parcial ou inexplorados nesse trabalho de Tese podem ser utilizados como sugestão para desenvolvimentos posteriores. Entre eles destacam-se:

- Refinar a técnica de identificação proposta utilizando os conceitos de normas nucleares;
- Expandir o método de redução de modelos para contemplar sistemas de segunda ordem com atraso;
- Caracterizar a influência de não linearidades na qualidade dos modelos identificados;
- Incluir considerações sobre a direção do ganho no projeto de excitações de sistemas MIMO;
- Propor métodos de sintonia de controladores PID a partir dos modelos identificados em espaço de estados;

- Analisar a capacidade de predição k passos a frente dos modelos identificados. Característica necessária para o projeto de controladores preditivos

Apêndice A

Conceitos auxiliares

A.1 Subespaços

Dado um subconjunto não vazio S de um espaço vetorial V sobre F . Caso S seja também um espaço vetorial e portanto satisfaça as condições das equações A.1 e A.2 então S é um subespaço de V (MEYER, 2000).

$$x, y \in S \implies x + y \in S \tag{A.1}$$

$$x \in S \implies \alpha x \in S \forall \alpha \in F \tag{A.2}$$

Geometricamente um subespaço é representado como uma superfície planificada que passa pela origem do espaço vetorial base.

A.1.1 Espaço imagem

O espaço imagem $R(A)$ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido na equação A.3.

$$R(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m \tag{A.3}$$

$R(A)$ pode ser geometricamente encarado como o espaço gerado pela combinação linear das colunas da matriz A , também chamado de espaço coluna de A . Caso o espaço seja formado pelas linhas de A , é denominado espaço linha.

A.1.2 Espaço nulo

O espaço nulo $N(A)$ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido na equação A.4 como o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$.

$$N(A) = \{x_{n \times 1} | Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{A.4}$$

A.2 Pseudoinversa (Moore-Penrose)

A matriz pseudoinversa de Moore-Penrose é uma generalização do conceito clássico de inversa de matrizes. É largamente utilizada quando os números de linhas e colunas, da matriz a ser invertida, são diferentes. (MEYER, 1973)

Quando as linhas de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são linearmente independentes ($m \leq n$), a pseudoinversa de A segue a equação A.5. Onde A^\dagger é a inversa de A pela direita: $AA^\dagger = I_m$

$$A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1} \tag{A.5}$$

A.3 Projeções

Em algebra linear, uma projeção é nada menos do que uma transformação linear P de um espaço vetorial para ele mesmo, onde $P = P^2$ (MEYER, 2000). É ilustrado na Figura A.1 um exemplo de projeção ortogonal.

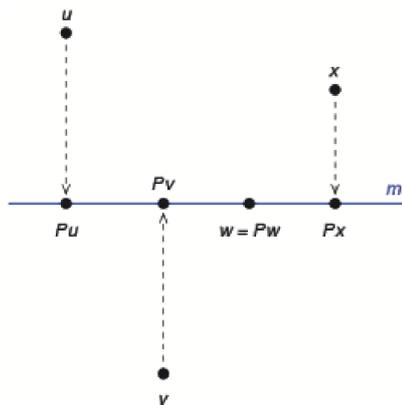


Figura A.1: A transformação P é a projeção ortogonal na linha m

A.3.1 Propriedades

Considera-se U e V subespaços de W representando o espaço imagem e o espaço nulo de P .

- P é o operador Identidade em $U : \forall x \in U : Px = x$.
- Tem-se a soma direta $W = U \oplus V$. Ou seja cada vetor x pode ser unicamente decomposto segundo $x = u + v : u \in U, v \in V$. A decomposição é da seguinte forma $u = Px$ e $v = x - Px = (I - P)x$.

O espaço imagem e o espaço nulo de uma projeção são complementares ($P + Q = I$). P e Q são projetores de modo que o espaço imagem de um é o espaço nulo do outro e vice-versa. P é a projeção ao longo de V em U e Q é a projeção ao longo de U em V .

A.3.2 Projeções Ortogonais

Uma projeção é ortogonal quando seu espaço imagem U e seu espaço nulo V são subespaços ortogonais, a condição necessária e suficiente para tal fato é $P = P^T$. Se x e y são vetores no domínio da projeção, $Px \in U$ e $y - Py \in V$ então seu produto escalar deve ser nulo para satisfazer a condição de ortogonalidade:

$$\langle Px, y - Py \rangle = (Px)^T (y - Py) = x^T (P^T - P^T P) y \quad (\text{A.6})$$

Portanto caso uma projeção seja ortogonal $P^T - P^T P = 0$ ou $P = P^T$ e $P = P^2$.

O caso mais simples é a projeção ortogonal numa linha gerada por um vetor unitário u . Nesse caso o projetor é $P = uu^T$, P anula qualquer vetor perpendicular a u e mantém invariável vetores em sua direção. Uma maneira simples de provar tal fato é considerando um vetor x como a soma de duas componentes, uma na direção de u e outra perpendicular $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$, aplicando a projeção:

$$P_u x = uu^T x_{\parallel} + uu^T x_{\perp} = u|x_{\parallel}| + u0 = x_{\parallel} \quad (\text{A.7})$$

Esse conceito pode ser generalizado para projeções em subespaços de qualquer dimensão. Caso os vetores $u_1 u_2 \dots u_k$ sejam uma base ortonormal para o subespaço U_c e as colunas da matriz A_c sejam compostas desses mesmos vetores, o projetor ortogonal em U_c é dado pela equação A.8.

$$P_{A_c} = A_c A_c^T \quad (\text{A.8})$$

Se as colunas de A_c não formarem uma base ortonormal, é necessário o termo de normalização $(A_c A_c^T)^{-1}$, e o novo projetor é indicado na equação A.9.

$$P_{A_c} = A_c (A_c^T A_c)^{-1} A_c^T \quad (\text{A.9})$$

Seguindo esse mesmo raciocínio, é possível construir o projetor ortogonal P_{A_l} que projeta vetores linha ortogonalmente ao subespaço U_l , que por sua vez é gerado a partir da combinação linear das linhas da matriz A_l .

$$P_{A_l} = A_l^T (A_l A_l^T)^{-1} A_l \quad (\text{A.10})$$

Portanto a projeção ortogonal do subespaço gerado pelas linhas de B , no subespaço gerado pelas linhas de A_l , é definido na equação A.11.

$$B/A_l \triangleq B.P_{A_l} \quad (\text{A.11})$$

A.3.3 Projeções Oblíquas

A projeção ortogonal é um caso particular de projeção oblíqua. Projeções oblíquas são definidas pelos seus espaço imagem e espaço nulo. Considere que os vetores $u_1 u_2 \dots u_k$ representados como colunas da matriz A_c , são uma base para o espaço imagem de P_c . O espaço imagem e o espaço nulo são complementares logo $\dim(\text{nullspace}) = n - k$. Definindo-se que os vetores $v_1 v_2 \dots v_k$, representados como colunas da matriz B_c , formam uma base para o complemento ortogonal do espaço nulo, então o projetor é dado pela equação A.12:

$$P_c = A_c (B_c^T A_c)^{-1} B_c^T \quad (\text{A.12})$$

Mais uma vez o resultado da projeção pode ser estendido para o caso em que as matrizes A_l e B_l são geradas pelo empilhamento de vetores linha. O projetor P_l é então dado pela equação A.13.

$$P_l = B_l^T (A_l B_l^T)^{-1} A_l \quad (\text{A.13})$$

Segundo (OVERSCHEE; MOOR, 1996), a projeção oblíqua do espaço linha de C ao longo do espaço linha de B no espaço linha de A pode também ser definida pela equação A.14.

$$C/B A \triangleq [C/B^\perp] \cdot [A/B^\perp]^\dagger \cdot A \quad (\text{A.14})$$

A.4 Decomposição QR

Em algebra linear, a decomposição QR de uma matriz A é definida como a fatorização de A em um produto de duas matrizes $A = QR$, onde Q é uma matriz ortogonal e R uma matriz triangular superior. Em suma, as primeiras k colunas de Q formam uma base ortonormal para o *span* das k primeiras colunas de A , $k < n^\circ$ de colunas independentes de A . (KATAYAMA, 2005)

A projeção ortogonal do subespaço gerado pelas linhas da matriz A no subespaço gerado pelas linhas de B é, segundo a seção A.3.2, definida na equação A.15.

$$A/B = AB^T(BB^T)^\dagger B \quad (\text{A.15})$$

Ao fazer a decomposição QR de $A = R_A Q^T$ e $B = R_B Q^T$ a projeção pode ser representada conforme a equação A.16. (OVERSCHEE; MOOR, 1996)

$$A/B = R_A R_B^T [R_B R_B^T]^\dagger R_B Q^T \quad (\text{A.16})$$

A.5 Decomposição em valores singulares (SVD)

A decomposição SVD de uma matriz A é definida na equação A.17 como o produto de três matrizes. (TREFETHEN; BAU, 1997)

$$SVD(A) \triangleq U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

Onde $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ é uma matriz real, $U \in \mathcal{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathcal{R}^{n \times n}$ são matrizes ortogonais e $\Sigma \in \mathcal{R}^{m \times n}$ uma matriz diagonal. As colunas de U e V são denominadas vetores singulares a esquerda e direita respectivamente, já os elementos da diagonal de Σ são os valores singulares de A . Os valores singulares σ_i de A são normalmente ordenados de forma decrescente na diagonal de Σ portanto convencionou-se que Σ_{22} abriga a parcela de Σ onde os valores singulares são nulos.

Essa decomposição fornece uma maneira prática para a representação do espaço imagem e espaço nulo de A . As colunas de U_1 formam uma base para o espaço imagem de A assim como as colunas de V_2 formam uma base para o seu espaço nulo. O número de

elementos na diagonal de Σ_{11} por sua vez indica o posto de A .

A decomposição SVD também pode ser utilizada para o cálculo da pseudoinversa de uma matriz onde:

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T \tag{A.18}$$

Referências Bibliográficas

AHMED, S.; HUANG, B.; SHAH, S. L. Novel identification method from step response. *Control Engineering Practice*, n. 15, p. 545/556, 2007.

ASTROM, K.; HAGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, v. 20, n. 5, p. 645/651, 1984.

ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *PID Controllers Theory, Design and Tuning*. [S.l.]: Instrument Society of America, 1995.

ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *Advanced PID Control*. [S.l.]: ISA - The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2007.

ASTROM, K. J.; BOHLIN, T. Numerical identification of linear dynamic systems for normal operating records. *Proc. 2nd IFAC Symp. Theory of Self-Adaptive Systems, Teddington*, p. 96/111, 1965.

BARENTHIN, M. *On Input Design in System Identification for Control*. Tese (Tese de Doutorado) — KTH School of Electrical Engineering, Stockholm, SWEDEN, 2006.

BARROSO, H.; LIMA, R.; BARROS, P. Processo didático flexível de quatro tanques acoplados para ensino e pesquisa em controle. *XLII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE)*, 2014.

BJORKLUND, S.; LJUNG, L. A review of time-delay estimation techniques. *Control and Communication group in Linköping*, 2003.

CARLEMALM, C. et al. Algorithms for time delay estimation using a low complexity exhaustive search. *IEEE Trans. Automatic Control*, p. 1031/1037, 1999.

CHEN, W.; LIAO, C.; HUNG, C. A numerical study on the performance of miniature thermoelectric cooler affected by thomson effect. *Applied Energy*, v. 89, n. 1, p. 464/473, 2012. Special issue on Thermal Energy Management in the Process Industries.

CHILALI, M.; GAHINET, P. H-infinity design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, n. 41, p. 358/367, 1996.

ECKART, C.; YOUNG, G. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, n. 3 vol1, p. 1/10, 1936.

EMERSONPROCESS. *Technical specifications*. 2016. Accessed: 2016-04-15. Disponível em: <<http://www2.emersonprocess.com/en-US/brands/rosemount/Wireless/Pages/index.aspx>>.

- FAZEL, M.; HINDI, H.; BOYD, S. A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation. *American Control Conference*, p. 4734/4739, 2001.
- FISCHER, B.; MEDVEDEV, A. Laguerre domain estimation of time delays in narrowband ultrasonic echoes. *14th Triennial IFAC World Congress*, p. 361/366, 1999.
- GEVERS, M. A personal view on the development of system identification. *13th IFAC Symp. System Identification*, p. 773/784, 2003.
- GUGERCIN, S.; ANTOULAS, A. C. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results. *International Journal of Control*, p. 748/766, 2004.
- HELMONT, J. van; WEIDEN, A. van der; ANNEVELD, H. Design of optimal controller for a coal fired Benson boiler based on a modified approximate realisation algorithm. *Applications of Multivariable System Techniques - Elsevier Applied Science*, p. 313/320, 1990.
- HO, B. L.; KALMAN, R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Regelungstechnik vol. 14*, n. 12, p. 545/548, 1966.
- JAYAKUMAR, J. S. *Helically Coiled Heat Exchangers, Heat Exchangers - Basics Design Applications*. [S.l.]: InTech, 2012.
- JEONG, E. S. A new approach to optimize thermoelectric cooling modules. *Cryogenics*, v. 59, p. 38/43, 2014.
- JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm (era) for modal parameter identification and model reduction. *Workshop on Identification and Control of Flexible Space Structures*, n. 3, p. 299/318, 1985.
- KALMAN, R. E. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, p. 152/155, 1963.
- KATAYAMA, T. *Subspace methods for system identification : a realization approach*. [S.l.]: Springer, 2005.
- KUNG, S. A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. *12th Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers*, p. 705/714, 1978.
- LACY, S. L.; BERNSTEIN, D. S. Subspace identification with guaranteed stability using constrained optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, n. 48, p. 1259/1263, 2003.
- LARIMORE, W. Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control. *29th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 596/604, 1990.
- LARIMORE, W. E. Statistical optimality and canonical variate analysis system identification. *Signal Processing*, n. 52, p. 131/144, 1996.

- LIMA, R. et al. Controlador preditivo aplicado a um processo térmico multivariável. *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, 2015.
- LIMA, R.; BARROS, P. Identificação de sistemas por meio de realizações baseadas na resposta a um pulso duplo. *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, 2013.
- LIMA, R.; BARROS, P. Método para redução de modelos balanceados obtidos por subespaços. *XX Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, 2014.
- LIMA, R.; BARROS, P. Identification of time-delay systems: a state space realization approach. *9th International symposium on advanced chemical process (ADCHEM)*, 2015.
- LIMA, R.; BARROS, P.; ACIOLI, G. New state-space approach for system identification of industrial process. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 2016. (UNDER REVIEW).
- LIMA, R.; BARROS, P.; ACIOLI, G. System identification of a pilot scale heat exchanger: a state-space realization approach. *42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, 2016.
- LIMA, R. et al. Desenvolvimento de uma planta piloto térmica com rede wireless para uso em ensino e pesquisa. *XLII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE)*, 2014.
- LIMA, R.; DIAS, C.; BARROS, P. Desenvolvimento de uma planta didática térmica multivariável baseada em módulos peltier. *XLII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE)*, 2014.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the user (2nd ed.)*. [S.l.]: Prentice Hall, New Jersey, 2010.
- MEYER, C. D. *Generalized inverses and ranks of block matrices*. [S.l.]: Siam, 1973.
- MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. [S.l.]: Siam, 2000.
- MILLER, D. N.; CALLAFON, R. A. de. Subspace identification from classical realization methods. *15th IFAC Symposium on System Identification*, 2009.
- MILLER, D. N.; CALLAFON, R. A. de. Eigenvalue constraints for realization-based identification. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, n. 4951, 2012.
- MILLER, D. N.; CALLAFON, R. A. de. Identification of linear time-invariant systems via constrained step-based realization. *16th IFAC Symposium on System Identification*, p. 1155/1160, 2012.
- MOOR, B. D. et al. A geometrical strategy for the identification of state space models of linear multivariable systems with svd. *IFAC 88*, p. 700/704, 1988.
- MOORE, B. C. Principal component analysis in linear system: controllability, observability and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, p. AC26, 1981.

- MOREIRA, L. et al. Modeling and control of a xy positioning table. *12th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications*, 2016.
- MULLIS, C. T.; ROBERTS, R. A. Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, p. 551/562, 1976.
- NADERI, E.; KHORASANI, K. Subspace-based identification of linear systems using arbitrary data segments. *American Control Conference (ACC)*, 2016.
- OGUNNAIKE, B. A contemporary industrial perspective on process control theory and practise. *Annual Reviews in Control*, v. 20, p. 1/18, 1996.
- OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. *Subspace Identification for Linear Systems*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D. N4sid - subspace algorithms for the identification of combined deterministic - stochastic systems. *Automatica*, vol. 30, n. 1, p. 75/93, 1994.
- PAGE, E. Continuous inspection schemes. *Biometrika*, n. 41, p. 100/115, 1954.
- PARTINGTON, J. R. An introduction to hankel operators. *London Mathematical Society Student Texts 13*, Cambridge University Press, 1988.
- PINTELON, J. S. R. *System Identification: A Frequency Domain Approach, Second Edition*. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2012.
- QIN, S. J. An overview of subspace identification. *Computers & Chemical Engineering*, v. 30, p. 1502/1513, 2006.
- RICHARD, J. P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, n. 39, p. 1667/1694, 2003.
- ROCKWELLAUTOMATION. *Technical specifications*. 2016. Accessed: 2016-04-15. Disponível em: <<http://www.rockwellautomation.com>>.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System Identification*. [S.l.]: Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- SILVA, M. et al. Modelagem simulação identificação e controle de uma planta didática com variáveis de nível e temperatura. *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, 2015.
- TREFETHEN, L.; BAU, D. *Numerical Linear Algebra*. [S.l.]: SIAM, 1997.
- VERHAEGEN, M. Subspace model identification, part 3: Analysis of the ordinary outputerror state-space model identification algorithm. *Int. J. Control*, vol. 58, n. 3, p. 555/586, 1993.
- VERHAEGEN, M. Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input output data. *Automatica*, n. 30, p. 61/74, 1994.

VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification, part 1: The output-error state-space model identification class of algorithms. *Int. J. Control*, vol. 56, n. 5, p. 1187/1210, 1992.

VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification, part 2: Analysis of the elementary output-error state space model identification algorithm. *Int. J. Control*, vol. 56, n. 5, p. 1211/1241, 1992.

VERHAEGEN, M.; HANSSON, A. Nuclear norm subspace identification (n2sid) for short data batches. *IFAC World Congress*, p. 1401/4273, 2014.

ZHAO, D.; TAN, G. A review of thermoelectric cooling: Materials, modeling and applications. *Applied Thermal Engineering*, v. 66, n. 1/2, p. 15/24, 2014.

ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.