

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Modelagem e Simulação da Transferência
de Calor em Alimentos com Forma
Esferoidal Prolata. Estudo de Caso:
Resfriamento e Congelamento de Banana.**

Autor: **Hugo Carvalho Amorim**
Orientador: **Antonio Gilson Barbosa de Lima**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Térmica e Fluidos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,
como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campina Grande - PB, julho de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

A524m Amorim, Hugo Carvalho.
Modelagem e simulação da transferência de calor em alimentos com forma esferoidal prolato. Estudo de caso : resfriamento e congelamento de banana / Hugo Carvalho Amorim. – Campina Grande, 2016.
114 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima".
Referências.

1. Congelamento. 2. Banana. 3. Esferoide Prolato. 4. Numérico.
5. Volumes Finitos. I. Lima, Antonio Gilson Barbosa de. II. Título.

CDU 66.045.5(043)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Severino Carvalho Filho e Maria da Guia Carvalho, por estarem sempre presentes em todas as etapas, sejam de conquistas ou falhas, da minha vida. A minha esposa Maria Juliana Chaves da Silva que sempre esteve presente nesses dois anos de mestrado, sempre me dando apoio para que pudesse me dedicar aos estudos. Por fim, a minha sogra, Dora, sem a qual a sua caridade, sequer eu conseguisse dar início a esse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, em especial, pois sem eles não seria possível o meu nascimento, minha educação, tanto acadêmica quanto social, bem como o meu crescimento como ser humano e futuro mestre em engenharia mecânica.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima, que além de sugerir o tema do trabalho, sempre que o tempo permitia, me auxiliava tirando dúvidas e/ou fornecia material para o entendimento dos assuntos tratados neste trabalho.

Agradecimento especial ao professor Dr. Wilton Pereira da Silva, quem, junto com o professor Antônio Gilson, me ensinou todo o assunto referente a modelagem matemática tanto para coordenadas já comumente conhecidas quanto para coordenadas generalizadas.

Aos professores Dra. Ivonete Batista dos Santos e Dr. Rennan Pereira de Gusmão pelas correções e sugestões para o trabalho.

Aos meus colegas Robson, Vanderson e Balbina, que estiveram comigo junto nessa etapa da minha vida, principalmente no que tange os estudos referentes as disciplinas do mestrado. Um destaque especial a Vanderson por gentilmente me fornecer os dados experimentais necessários para a elaboração do meu trabalho.

Ao meu amigo, Igohr Brennand, pelo auxílio na elaboração do *abstract*.

A CAPES, a qual através do auxílio financeiro, permitiu meu sustento durante os estudos.

A Ivanilda Rodrigues da Silva, por ser uma ótima secretária a qual sempre foi muito prestativa e atenciosa nas minhas demandas.

Por último e não menos importante, meus agradecimentos a minha esposa Maria Juliana Chaves da Silva, que teve que suportar minhas raivas, angustias e todos os tipos de sentimento durante a elaboração e conclusão do projeto.

SUMÁRIO

1	Introdução	16
1.1	Uma breve introdução	16
1.2	Objetivo geral	19
1.3	Objetivos específicos	19
1.4	Justificativas	20
1.5	Delimitação do problema	20
2	Revisão da literatura	22
2.1	A Banana	22
2.2	O processo de congelamento	26
2.2.1	Curva de congelamento	27
2.2.2	Propriedades termofísicas	31
2.2.2.1	Densidade	32
2.2.2.2	Fração de gelo	33
2.2.2.3	Calor específico	33
2.2.2.4	Entalpia	34
2.2.2.5	Condutividade térmica	36
2.2.3	Importância do coeficiente de transferência de calor convectivo	37
2.2.4	Nucleação e Cristalização	38
2.2.5	Recristalização	43
2.3	Modelagem Matemática	44
2.3.1	Método Analítico	45
2.3.2	Método Numérico	49
2.4	O esferóide prolato e sua coordenada	54

3	Material e métodos	57
3.1	Modelagem matemática	57
3.1.1	A equação da difusão	58
3.1.2	A formulação matemática aplicada ao problema de resfriamento e congelamento	64
3.1.3	Procedimento numérico	66
3.1.3.1	Discretização da equação governante	66
3.1.3.2	Estimativa das propriedades de transporte na interface	76
3.1.3.3	Estimativa das temperaturas nos pontos de simetria e fronteira	77
3.1.3.4	A malha	81
3.1.3.5	Refinamento de malha e passo de tempo	84
3.1.3.6	Aplicação ao resfriamento e congelamento de banana prata com casca	86
3.1.3.7	Casos simulados	88
4	Resultados e discussão	89
4.1	Validação da modelagem matemática	89
4.2	Casos simulados	96
4.2.1	Simulação para várias dimensões	96
4.2.2	Simulação para vários aspectos de forma	101
5	Conclusões e sugestões	106
5.1	Conclusões	106
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	107
	Referências	108

RESUMO

AMORIM, Hugo Carvalho. *Modelagem e Simulação da Transferência de Calor em Alimentos com Forma Esferoidal Prolato. Estudo de Caso: Resfriamento e Congelamento de Banana*. Campina Grande: UFCG, 2016. 114 p. Dissertação.

Frutas são alimentos compostos normalmente por 80% a 90% de água, tornando-as extremamente perecíveis. Dessa forma, métodos de conservação devem ser aplicados para prolongar sua vida útil e conservar características de aceitação pelo consumidor. Assim, este trabalho teve como objetivo estudar a transferência de calor durante os processos de resfriamento e congelamento de banana utilizando geometria esferoidal prolata. Para a modelagem matemática, utilizou-se a equação da conservação de energia escrita em coordenadas esferoidais prolatas. A solução numérica da equação governante foi realizada através do método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita. Um programa computacional foi escrito para simular o processo, através de linguagem computacional do software Mathematica, afim de se obter o histórico de temperatura no centro da banana e o perfil de temperatura, sendo os dados comparados a valores experimentais de congelamento de banana prata com casca, visando obter o coeficiente de transferência de calor convectivo e condutividade térmica da banana. Avaliou-se a influência das dimensões da fruta na cinética de resfriamento e nas frentes de congelamento. Concluiu-se que para a curva de resfriamento da banana, a modelagem pôde prever com bastante exatidão o período de resfriamento mas não o de pós-congelamento. Verificou-se que quanto menor o tamanho do produto, mais rápido é o processo e quanto maior a razão de aspecto de forma, maiores serão os gradientes de temperatura na ponta do produto. As taxas de resfriamento sofreram maior influência quando variou-se as dimensões mantendo um aspecto de forma constante do que variando as dimensões e mudando também o aspecto de forma. Por fim, verificou-se que quanto maior o aspecto de forma, mais não uniforme se dá o processo de transferência de calor na banana.

Palavras Chave:

Congelamento. Banana. Esferoide prolato. Numérico. Volumes Finitos.

ABSTRACT

AMORIM, Hugo Carvalho. *Modeling and Simulation of Heat Transfer in foods with Spheroid Prolate Form. Case Studied: Cooling and Freezing of Banana Campina Grande*: UFCG, 2016. 114 p. Dissertação.

Fruits are a type of food that are typically made by 80% to 90% water, making them extremely perishable. Thus, conservation methods should be applied to prolong their shelf life and consumer acceptance characteristics. This work aims to study the heat transfer during the cooling and freezing processes of fruits with a prolate spheroid shape. The mathematical modeling consisted of energy conservation equation written in spheroidal prolate coordinates. The numerical solution of the governing equation was performed using the finite volume method with a fully implicit formulation. The process was simulated by computer-based language within the Mathematica software, to obtain the temperature history at the center of the fruit and the temperature profile, the data being compared with experimental values of frozen banana prata, to obtain the transfer coefficient convective-heat and thermal conductivity of the fruit. We evaluated the influence of fruit dimensions of the cooling kinetics and the freezing fronts. It was found that the lower the product size, the faster the process, and the higher the aspect ratio of shape, higher will be the temperature gradient at the top of the product.

Key Words:

Freezing. Banana. Prolate Spheroid. Numerics. Finite Volume.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Cinco maiores produtores mundiais de banana nos anos de 2013-2014.	24
Figura 2.2 – Parcela de produção de banana por continente nos anos de 2013-2014.	24
Figura 2.3 – Cinco maiores exportadores mundiais de banana no ano de 2013.	25
Figura 2.4 – Histórico de temperatura para um congelamento sem cristalização do soluto.	28
Figura 2.5 – Histórico de temperatura para um congelamento com cristalização do soluto.	28
Figura 2.6 – Gráfico histórico temperatura e taxa de resfriamento do <i>sucrose syrup</i> .	30
Figura 2.7 – Histórico de temperatura e taxa de congelamento para <i>starch gel</i> .	31
Figura 2.8 – Capacidade térmica vs temperatura.	34
Figura 2.9 – Entalpia vs temperatura.	35
Figura 2.10 – Condutividade térmica vs temperatura.	36
Figura 2.11 – Influência da taxa de congelamento no tamanho do cristal de gelo.	39
Figura 2.12 – Influência das taxas de congelamento em certas propriedades.	40
Figura 2.13 – Influência das taxas de congelamento na estrutura da célula de maçã.	42
Figura 2.14 – Exemplo de um esferóide prolato.	54
Figura 2.15 – Coordenadas esferoidais prolatas em 3D.	54
Figura 2.16 – Coordenada esferoidais prolatas em 2D.	55
Figura 2.17 – Relação coordenada cartesiana-esferoidal prolata.	56
Figura 3.1 – Vetores no sistema de coordenadas generalizadas.	63
Figura 3.2 – Área no sistema de coordenadas generalizadas.	63
Figura 3.3 – Volume de controle bidimensional.	66
Figura 3.4 – Tipos de volumes de controle usados nesta pesquisa.	69
Figura 3.5 – Estimativa da condutividade térmica.	76
Figura 3.6 – Pontos onde a Equação 3.64 é válida.	78
Figura 3.7 – Pontos onde a Equação 3.66 é válida.	79
Figura 3.8 – Pontos onde a Equação 3.68 é válida.	80

Figura 3.9 – Pontos onde a Equação 3.70 é válida.	81
Figura 3.10 – Parte do domínio físico.	82
Figura 3.11 – Malhas no plano físico e computacional.	83
Figura 3.12 – Materiais do experimento.	87
Figura 4.1 – Histórico de temperatura (°C) e taxas de resfriamento (°C/s) para resultados numéricos e experimentais para banana.	90
Figura 4.2 - Histórico de temperatura para resultados numéricos e experimentais para batata.	91
Figura 4.3 - Histórico de temperatura para resultados numéricos e experimentais para polpa de limão.	92
Figura 4.4 – Perfil de temperatura (°C) da banana durante o processo de congelamento.	94
Figura 4.5 – Perfil de temperatura (°C) da banana durante o processo de congelamento.	95
Figura 4.6 – Histórico de temperatura e taxa de resfriamento da banana com dimensões diversas e aspecto de forma igual a 2.	97
Figura 4.7 – Perfis de temperatura (°C) para dimensões de 8 x 16 mm ² .	98
Figura 4.8 – Perfis de temperatura (°C) para dimensões de 16 x 32 mm ² .	99
Figura 4.9 – Perfis de temperatura (°C) para dimensões de 32 x 64 mm ² .	100
Figura 4.10 – Histórico de temperatura e taxas de resfriamento para aspectos utilizados na pesquisa.	102
Figura 4.11 – Perfis de temperatura para (°C) aspecto de forma igual a 1.	103
Figura 4.12 – Perfis de temperatura para (°C) aspecto de forma igual a 3.	104
Figura 4.13 – Perfis de temperatura para (°C) aspecto de forma igual a 4.	105

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Culturas de banana.	23
Quadro 2.2 – Influência das taxas de congelamento no tecido de maçã.	43
Quadro 2.3 – Métodos para tratar o calor latente nas soluções numéricas.	52
Quadro 3.1 – Valores para alfa.	60
Quadro 3.2 – Métricas de transformação.	61
Quadro 3.3 – Áreas de troca de calor no novo sistema de coordenadas.	63

Quadro 3.4 – Valores de A_i e B para volumes de controle internos.	68
Quadro 3.5 – Volumes de controle e suas condições de contorno.	70
Quadro 3.6 – Coeficientes A_p .	73
Quadro 3.7 – Coeficientes A_N, A_S, A_E, A_W .	74
Quadro 3.8 – Coeficientes B.	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Resultados para o teste de passo de tempo.	85
Tabela 3.2 – Resultados para o teste de malha.	85
Tabela 3.3 – Dados para a simulação.	87
Tabela 3.4 – Casos simulados.	88
Tabela 4.1 – Valores para condutividade térmica e coeficiente convectivo obtidos através de dados numéricos.	93
Tabela 4.2 – Relação área/volume e tempos de processo para diferentes dimensões.	97
Tabela 4.3 – Relação área/volume e tempos de processo para diferentes aspectos de forma utilizados na pesquisa.	101

LISTA DE SÍMBOLOS

C_p	Calor específico [kJ/(kg °C)]
c_i	Calor específico de um componente [kJ/(kg °C)]
x_i	Fração mássica
H	Entalpia [kJ/kg]
h_i	Entalpia de um componente [kJ/kg]
H_s	Entalpia sólidos totais [kJ/kg]
H_u	Entalpia água descongelada [kJ/kg]
H_{gelo}	Entalpia gelo [kJ/kg]
W_u	Fração de água descongelada
L_s	Calor latente do gelo [kJ/kg]
k	Condutividade térmica [W / (m °C)]
ϕ_i	Fração volumétrica de um componente
k_i	Condutividade térmica de um componente [W / (m °C)]
t_{plank}	Tempo de congelamento segundo Plank [s]
ρ_s	Densidade no congelamento [kg/m ³]
L_1	Calor latente volumétrico de solidificação [kJ/kg]
T_f	Temperatura de congelamento [°C]
T_a	Temperatura ambiente [°C]
h	Coefficiente de transferência de calor por convecção [W/(m ² °C)]
k_s	Condutividade térmica do material congelado [W / (m °C)]
P	Fator geométrico
Q	Fator geométrico
T	Temperatura [°C]
ρ	Densidade [kg/m ³]
t	Tempo [s]
Δt	Passo de tempo [s]
S	Termo fonte
T_s	Temperatura final de congelamento [°C]
T_L	Temperatura inicial de congelamento [°C]
$C_{\text{congelado}}$	Calor específico do produto congelado [kJ/(kg °C)]
$C_{\text{descongelado}}$	Calor específico do produto descongelado [kJ/(kg °C)]
ξ	Superfícies elipsoidais de revolução
η	Superfícies hiperboloides de revolução
φ	Plano vertical
μ, φ, ω	Coordenadas esferoidais prolatas
L	Distância focal [m]
L_1	Eixo menor [m]
L_2	Eixo maior [m]
x, y, z	Coordenada cartesianas
J	Jacobiano de transformação

Φ	Magnitude qualquer (temperatura, velocidade, massa, ...)
Γ^Φ	Propriedade de transporte
u, v, w	Velocidades de um fluido [m/s]
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Vetores unitários no sistema cartesiano
$\overrightarrow{\Delta L}_\xi, \overrightarrow{\Delta L}_\eta, \overrightarrow{\Delta L}_\gamma$	Vetores posição [m]
$dS_\xi, dS_\eta, dS_\gamma$	Áreas elementares [m ²]
$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\gamma$	Distâncias elementares [m]
ΔV	Volume elementar [m ³]
$\nabla\Phi$	Gradiente de uma magnitude
f_s	Fração de gelo
P	Ponto de um volume de controle
N	Ponto a norte de um volume de controle
S	Ponto a sul de um volume de controle
E	Ponto a leste de um volume de controle
W	Ponto a oeste de um volume de controle
$\delta\xi_s, \delta\xi_n, \delta\eta_e, \delta\eta_w$	Distância entre os pontos centrais de volumes de controle adjacentes [m]
n, s, e, w	Fronteiras de um volume de controle
θ	Valor dependente do método utilizado na integração temporal
T_N, T_P, T_S, T_E, T_W	Temperatura dos volumes de controle [°C]
T_P^0	Temperatura em P conhecida [°C]
Φ''	Fluxo convectivo [W/m ²]
T_n, T_p, T_s, T_e, T_w	Temperatura nas interfaces dos volumes de controle [°C]
T_{amb}	Temperatura ambiente [°C]
\hat{f}_i	Fator de interpolação
$\delta d_{i-}, \delta d_{i+}$	Distâncias da interface aos pontos adjacentes [m]
k_P, k_E	Condutividade térmica dos volumes P e E [W / (m °C)]
$npksi$	Quantidade de pontos nodais na direção ξ
$npeta$	Quantidade de pontos nodais na direção η
n	Número de dados experimentais
$n_{ajustado}$	Número de parâmetros ajustados

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O trabalho inicia falando um pouco sobre as frutas, principalmente a banana, e da necessidade de se utilizar um método de conservação, nesse caso, o congelamento. Em seguida, debruça-se levemente sobre o processo de congelamento, apontando suas vantagens e desvantagens. Apresenta também quais os tipos de soluções existentes para esse tipo de problema e as suas vantagens. Após essa breve introdução, são apresentados o objetivo geral e específicos buscados por esse trabalho bem como a justificativa para o seu desenvolvimento. Finalizando, são apresentadas as delimitações as quais o estudo é submetido.

1.1 Uma breve introdução

O consumo de frutas está associado a uma boa dieta e hábitos saudáveis. Frutas são fontes de açúcares, minerais, proteínas, gorduras, fibras dietéticas solúveis e insolúveis e também são a principal fonte de vitaminas A, C e E. Estudos mostram que o seu consumo pode diminuir a incidência de doenças cardiovasculares e taxa de mortalidade ocasionada pelo câncer (STEINMETZ e POTTER, 1996; TIBBLE et al., 1998; WILCOX et al., 2003 apud ANCOS et al., 2006). Como o cultivo de frutas é feito normalmente em lugares distantes dos centros urbanos, há uma grande necessidade de se empregar métodos de conservação. Não só por isso: muitas culturas só podem ser desenvolvidas em certas regiões do planeta ou até

mesmo em certas estações do ano e o seu transporte e armazenamento devem garantir a conservação de suas propriedades físicas e químicas.

Uma das frutas com bastante aproveitamento, produção e consumo é a banana. Ela é rica em vitaminas, minerais e compostos fenólicos, os quais ajudam na prevenção de doenças. A banana pode ser consumida *in natura* ou processada e/ou cozidas. Possui um consumo anual mundial de aproximadamente 12 kg por pessoa enquanto que no Brasil essa média chega a 29 kg (FAOSTAT, 2016). Tanto sua polpa quanto sua casca podem ser utilizadas na indústria, seja alimentícia ou outros ramos. A polpa pode ser consumida crua ou processada e utilizada na fabricação de farinhas, purês, sorvetes e doces. Já a casca, além de servir como alimento para animais, quando processada, também serve para enriquecer alimentos consumidos pelo ser humano, transformação em biocombustível e até mesmo na purificação da água.

No geral, as frutas, incluindo a banana, possuem um teor de água elevado, por volta de 85% a 90% de sua composição total (ANCOS et al., 2006). Isso ocasiona a rápida senescência do produto, pois se apresenta como um ambiente propício ao desenvolvimento de microrganismos. Sendo assim, há grande necessidade do emprego de métodos de conservação que possibilitem a máxima retenção de nutrientes e propriedades físicas da fruta no trajeto produtor/consumidor. Dentre eles, destaca-se o congelamento. O congelamento consegue conservar as propriedades físicas, químicas, bioquímicas e nutricionais por longos períodos de tempo. Isso se deve ao fato de, devido às baixas temperaturas, as atividades enzimáticas, biológicas e de microrganismos presentes no produto, serem diminuídas podendo até, dependendo da temperatura, serem cessadas. Segundo Berry et al. (2006), originalmente o congelamento tinha como vantagem, quando comparado a outros métodos de preservação de alimentos, entregar a melhor qualidade possível para vegetais, peixes e carnes em lugares distantes do ponto de colheita e abate.

Apesar das boas vantagens apresentadas no processo de congelamento, a sua má execução pode causar danos irreversíveis ao produto. Perda da cor característica, sabor, aroma, propriedades nutricionais e textura, normalmente já são observadas no processo de congelamento (FONSECA et al., 2010; FONSECA et al., 2009; ANCOS et al., 2006). Porém, se ele não for bem executado, essas perdas alcançarão níveis não aceitáveis para o consumo humano. Dessa forma, predizer os tempos de congelamento e seus efeitos na qualidade do

produto é fundamental para um processo ótimo. Aliado a isso, o bom conhecimento do congelamento permite o dimensionamento e a otimização de sistemas de refrigeração, levando em conta a minimização do consumo de energia, confiabilidade, segurança e qualidade do produto (SILVA, M., 2005).

O processo de congelamento é considerado complexo; lida com variações das propriedades termofísicas do produto, bem como a fração de gelo, volume e densidade (FRICKE e BECKER, 2001; GULATI e DATTA, 2013). Para o seu estudo e modelagem, pode-se utilizar dos métodos: analíticos, empíricos e numéricos (PHAM, 2008). Maliska (2004) ainda acrescenta o método experimental.

O método analítico produz resultados exatos aplicados a um meio contínuo porém, para a sua solução é necessário muitas vezes considerar: geometrias simples e propriedades constantes. Isso pode simplificar por demais o problema, chegando até mesmo a não condizer com a realidade do estudo. Segundo Maliska (2004) e Pham (2008), esse método possui como principal utilização validar os métodos numéricos.

O método empírico fornece fórmulas através de correlações estatísticas de dados obtidos experimentalmente. O seu objetivo maior é apresentar respostas rápidas com uma precisão de aproximadamente 10% para ser usada pelos usuários da indústria (PHAM, 2008). Como desvantagem, as correlações só podem ser utilizadas em condições similares às aquelas que foram obtidas (PHAM, 2008; GULATI e DATTA, 2013).

O método numérico é aquele no qual se obtêm resultados para os casos mais gerais possíveis: com geometrias complexas, variação de propriedades e volume, condições de contorno complexas, regime transiente. Segundo Pham (2008), para problemas complexos, métodos numéricos são sempre a primeira escolha. O método também ajuda a diminuir o tempo e custos de projetos (MALISKA, 2004). Como desvantagem, os seus resultados são aproximados e aplicados à meios discretos. Também destaca-se que, quanto mais complexo for o problema, maior a necessidade computacional para a sua solução, elevando assim o tempo de simulação.

No auxílio do desenvolvimento dos cálculos numéricos, existem, dentre outros, três métodos bem conhecidos que são: diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos.

Diferenças finitas é o método mais antigo e até hoje o mais empregado no campo de estudo do congelamento. Tem como vantagem a facilidade do seu desenvolvimento, porém torna-se complicado ou até mesmo inviável a sua utilização quando o produto é não homogêneo ou as condições de contorno são complexas. Elementos finitos é mais amplamente empregado na área estrutural apesar de existirem trabalhos na área de resfriamento. Não possui limitações quanto ao tipo de produto ou condição de contorno, entretanto sua solução é a mais complexa dentre os métodos. Volumes finitos alia a simplicidade das diferenças finitas com as não limitações dos elementos finitos. É amplamente utilizado na área de fluidos, principalmente por ser um método onde as propriedades são conservativas. Também possui como vantagem facilitar a interpretação física e matemática dos resultados (MALISKA, 2004).

As equações, sejam obtidas por métodos analíticos ou numéricos, dependem de qual coordenada elas foram elaboradas. As comumente usadas são as coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Vários formatos na natureza não são bem representados diretamente por elas, necessitando a aproximação dessas formas para as coordenadas que mais se assemelhem a elas ou a utilização de um outro sistema. O presente trabalho procurou abranger banana com forma de esferóide prolato. Esse é um sólido obtido pela revolução de uma elipse em torno do seu eixo maior. Uma forma prática de trabalhar com esses objetos é realizar a modelagem matemática através das coordenadas esferoidais prolatas. Esse sistema de coordenadas é composto por duas famílias de superfícies de revolução, elipsóides e hiperbolóides, e planos verticais, permitindo assim indicar com maior facilidade, em relação as coordenadas cartesianas, as posições de pontos internos em sólidos com formato esferoidal prolato.

1.2 Objetivo geral

Diante do exposto, o presente trabalho tem por objetivo estudar, modelar e simular a transferência de calor, nos processos de resfriamento e congelamento de banana com forma de esferóide prolato, utilizando método numérico de volumes finitos e as coordenadas esferoidais prolatas.

1.3 Objetivos específicos

Já como objetivos mais específicos, pode-se citar:

- a) Apresentar uma modelagem matemática bidimensional transiente em coordenadas esferoidais prolatas para descrever as trocas de energia entre o produto e o fluido refrigerante;
- b) Apresentar a solução numérica da equação governante via método dos volumes finitos;
- c) Desenvolver um código computacional para simular o problema;
- d) Apresentar as cinéticas de resfriamento e congelamento bem como os perfis de temperatura no interior do sólido;
- e) Aplicar a metodologia desenvolvida no presente trabalho ao resfriamento de banana prata com casca, afim de determinar os coeficientes de transporte (k , h);
- f) Avaliar a influência das dimensões e forma do sólido na cinética de resfriamento.

1.4 Justificativas

A realização do trabalho surgiu para preencher uma lacuna no campo dos processos de resfriamento e congelamento. A maioria dos trabalhos normalmente se limitam a estudar o período de resfriamento. Poucos são aqueles que adentram na região de mudança de fase, de pós congelamento e que utilizaram elementos e volumes finitos. Normalmente aqueles que o fazem, ou utilizam de métodos analíticos para predizer os tempos do processo comparando com dados experimentais, ou então utilizam soluções numéricas mas restrita à diferenças finitas.

Em relação as coordenadas mais utilizadas, limitam-se as: cartesianas, esféricas e cilíndricas. Na literatura, nenhum trabalho utilizou-se das coordenadas esferoidais com o objetivo de modelar e simular todo o processo de congelamento.

Por fim, verificou-se pouca preocupação dos trabalhos em apresentar os perfis de temperatura interna dos produtos. Pouquíssimos trabalhos foram encontrados que apresentavam esses perfis mas nenhum aplicável a banana.

1.5 Delimitação do problema

A proposta do estudo é aplicável as seguintes situações:

- a) Condição de contorno convectiva uniforme ao redor de toda a fruta;
- b) Fruta homogênea (sem porosidade);
- c) Processo de congelamento sem secagem (não há transferência de massa);
- d) Propriedades termofísicas constantes nos períodos de pré e pós congelamento;
- e) Propriedades termofísicas variáveis na região de mudança de fase;
- f) Volume constante.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção será apresentada a revisão da literatura usada como base na elaboração do trabalho. O primeiro tópico falará brevemente sobre a banana: sua origem, seus vários tipos, maiores produtores e também seus benefícios na saúde humana. Após, dar-se-á destaque ao processo de congelamento, explicando sobre a curva de resfriamento, a influência das taxas de resfriamento no tamanho do cristal de gelo, bem como o quanto o congelamento influencia nas propriedades e na qualidade das frutas. Em seguida, serão apresentadas as diferentes modelagens matemáticas aplicadas ao problema, mostrando um breve histórico nas soluções analíticas, quais os problemas encontrados e como tratá-los nas soluções numéricas. Por fim, apresenta-se o conceito de um esferóide prolato e como é composto o sistema de coordenadas esferoidais prolatas.

2.1 A banana

A banana é uma fruta pertencente à família da *Musacea*, dentro do gênero *Musa*, e tem como provável origem o vale do Kuk, localizado na Nova Guiné, no ano 8000 antes de Cristo. É uma fruta rica em vitaminas, como a A, minerais, como o fósforo, sódio, potássio, cálcio, magnésio, ferro, cobre zinco e manganês e também por compostos fenólicos, os quais auxiliam na prevenção de doenças. Possui grande variedade, tendo mais de 300 tipos de

culturas ao redor do mundo. Elas são diferenciadas e classificadas de acordo com o número de cromossomos presentes bem como da proporção de genoma, sendo esses derivados de duas espécies: o genoma A, vindo da *Musa acuminata* e o genoma B, derivado da *Musa balbisiana*. Todas as outras espécies são resultados da intervenção humana (LEJJU et al., 2006 apud SINGH et al., 2016). As bananas derivadas da *Musa acuminata* são normalmente usadas para consumo *in natura* enquanto que as derivadas da *Musa balbisiana* e sua hibridização são processadas ou cozidas. Elas possuem características distintas, seja no tamanho, forma, cor, gosto e pigmentação. Os subgrupos e os cultivares de bananas são apresentados no Quadro 2.1.

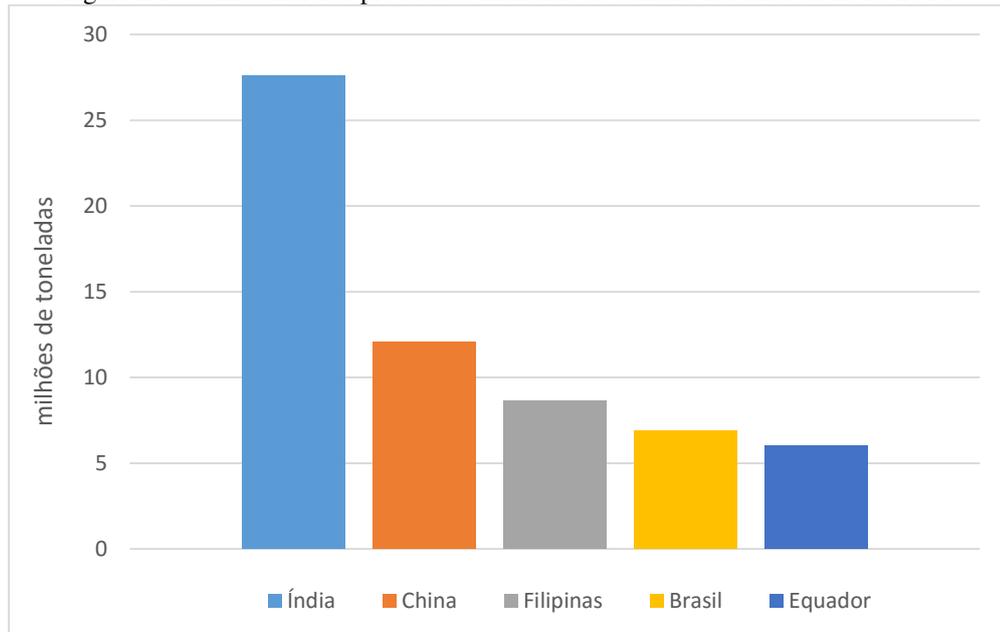
Quadro 2.1 – Culturas de banana.

Subgrupo (genoma)	Culturas	Característica
Sucrier (AA)	Figue Sucree, Fraysinette	Pele fina, pequena e frutos doces.
Cavendish (AAA)	Grande naine, Poyo, Lacatan, Petite naine, Williams	Tipo exportação consumida <i>in natura</i> .
Lujugira (AAA)	Intutu, Mujuba	São cozinhadas ou usadas na produção de cerveja.
Lacatan (AAA)	Pisang	Frutas altamente aromáticas.
Robusta (AAA)	Valery	Cachos grandes possuindo frutas de alta qualidade.
Goldfinger (AAAB)	-	Normalmente consumida <i>in natura</i> nas américas e Austrália.
Saba Bluggoe (ABB)	-	Banana normalmente processada. Produzida nas Filipinas e América Latina.
Figue Pomme (AAB)	Maca, Silk.	Fruta ácida, consumida normalmente <i>in natura</i> .
Plantain (AAB)	French, Corn, falso Corn.	Bananas processadas. Produzidas principalmente na África e América do Sul.
Saba (BBB)	-	Produzida na Malásia e Indonésia. É usada cozida.
Ney poovan (AB)	Sukari, Safet Velchi	Produzido principalmente na Índia e leste Africano.

Fonte – Singh et al. (2016).

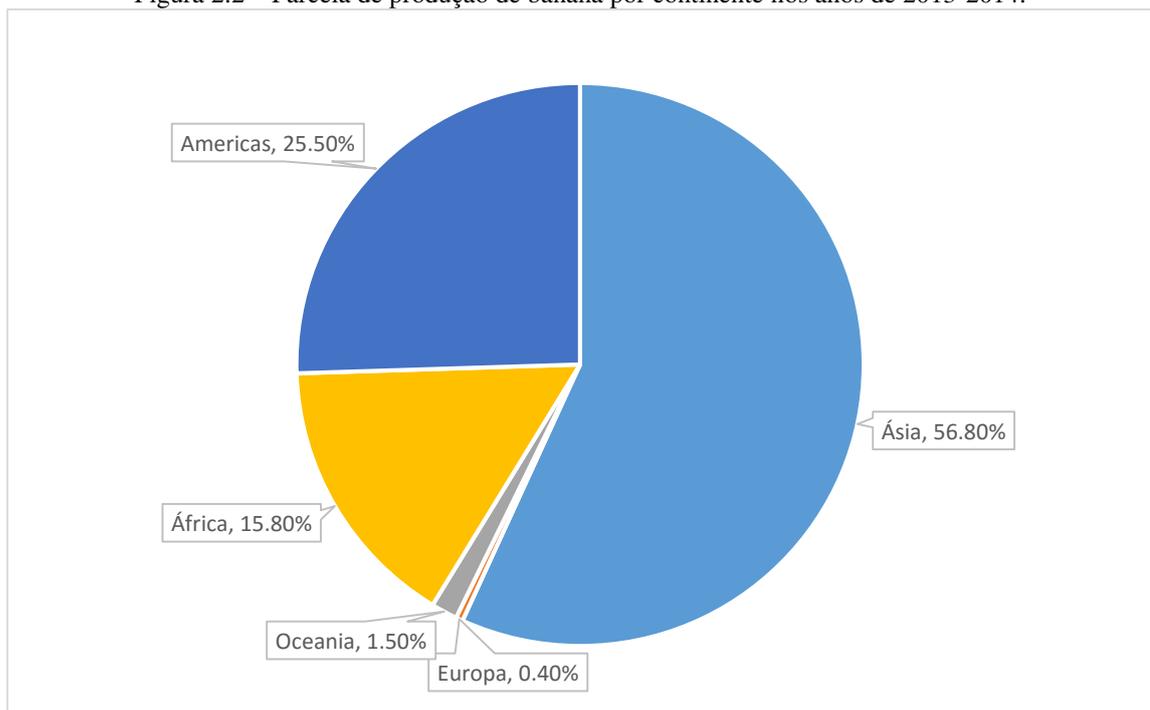
No campo da produção, segundo FAOSTAT (2016), a Índia assume o primeiro lugar, com 27,5 milhões de toneladas na soma dos anos de 2013 e 2014, sendo a Ásia a região onde mais se produz, representando cerca de 56,8% de todo cultivo mundial. As Figuras 2.1 e 2.2 apresentam os cinco maiores produtores pelo mundo e onde essa produção está concentrada em cada continente.

Figura 2.1 – Cinco maiores produtores mundiais de banana nos anos de 2013-2014.



Fonte – FAOSTAT (2016)

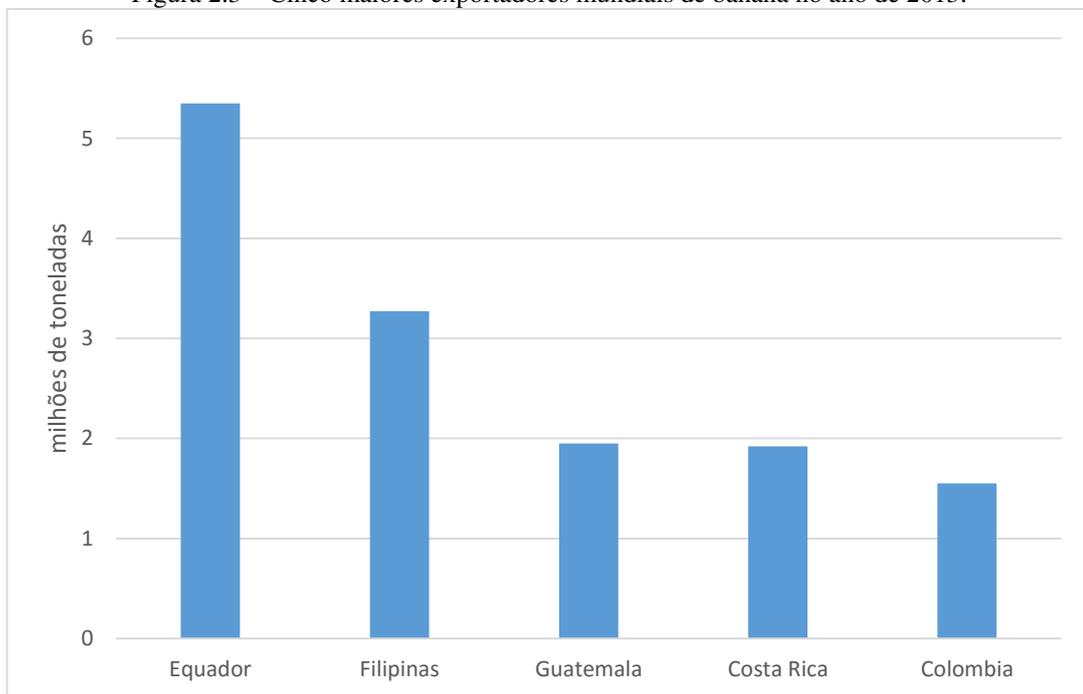
Figura 2.2 – Parcela de produção de banana por continente nos anos de 2013-2014.



Fonte – FAOSTAT (2016)

No campo das negociações, o Equador se destaca como o maior exportador mundial, com um fluxo de 5,35 milhões de toneladas no ano de 2013, enquanto que os maiores importadores são a Europa, comprando por volta de 9,13 milhões de toneladas, seguida dos Estados Unidos, com um volume de 4,55 milhões de toneladas nesse mesmo ano (FAOSTAT, 2016). A Figura 2.3 mostra os cinco maiores exportadores mundiais. É interessante perceber como eles encontram-se afastados dos grandes centros importadores. Sendo a banana um alimento altamente perecível, é fácil notar a necessidade de métodos de conservação que garantam a qualidade da fruta no trajeto exportador-importador.

Figura 2.3 – Cinco maiores exportadores mundiais de banana no ano de 2013.



Fonte – FAOSTAT (2016)

O Brasil é um país de destaque entre os grandes produtores, mas não é um bom exportador/importador. Sendo o quarto maior produtor no mundo, entre os anos de 2013 e 2014, exportou somente 98 mil toneladas e importou 4 toneladas. Dessa forma, vê-se que o maior consumidor da banana produzida no Brasil é o seu mercado interno.

A banana é uma fruta extremamente versátil. Tanto a sua polpa quanto a sua casca têm utilidades seja na culinária ou em outros campos. Ela pode ser consumida tanto crua, sendo classificadas como *dessert bananas* (do inglês), quanto podem ser processadas ou cozidas, assim sendo classificadas como *platain* (do inglês) ou *plátanos* (do espanhol). Sua utilização na indústria alimentícia é vasta, sendo empregada em farinhas, doces, purês, sucos, chips,

essências, cervejas e até vinhos. Como farinha, a banana enriquece as propriedades nutritivas de alimentos como bolos, pães, biscoitos e principalmente os alimentos destinados a consumo infantil. Como purês, ela é empregada na fabricação de sorvetes, geleias e também alimentos para bebês. Essa sua vasta gama de aplicação justifica-se por sua polpa ser muito bem vista entre os profissionais de saúde, principalmente por ser rica em antioxidantes, como vitaminas, carotenóides e compostos fenólicos. Assim, a fruta possui ação antibactericida, antiviral, anti-inflamatória, antialérgico e efeito de vaso dilatador (COOK e SAMMON, 1996 apud PEREIRA e MARASCHIN, 2015). Destaca-se também a sua capacidade em evitar problemas vasculares, câncer e doenças nos olhos.

A casca da banana também possui grande utilidade. Além de poder ser processada para utilização na alimentação humana, ela também é empregada para produzir etano, metano, alimento para animais, fertilizante e até mesmo na purificação da água. Seo et al. (2015) estudaram a utilização da banana na melhoria da fermentação de vinhos de *blueberry* e obtiveram bons resultados.

Na área da conservação, essa fruta tem certos problemas. Ela não é congelável pois já sofre danos na fase do resfriamento, quando temperaturas abaixo dos 13 °C são alcançadas. Isso limita seu tempo de vida e ao mesmo tempo eleva o seu desperdício. Devido aos danos, pode ocorrer a demora do desenvolvimento da cor amarela, surgimento de manchas escuras na casca e problema no amolecimento da fruta, diminuindo a sua aceitação pelo consumidor (JIANG et al., 2004 apud WANG et al., 2015). Diante desse empecilho, alguns trabalhos se dedicaram a examinar formas de diminuir os danos causados pelo abaixamento de temperatura.

Luo et al. (2015), estudou a aplicação do Sulfeto de Hidrogênio, Huang et al. (2016), a do ácido málico e, Wang et al. (2015), a do óxido nítrico; todos eles obtiveram bons resultados, com a diminuição dos danos causados pelo resfriamento.

2.2 O processo de congelamento

Água é um constituinte presente em altas concentrações nas frutas. Segundo Ancos et al. (2006), ela pode representar de 85% a 90% da composição total delas. Assim, os tecidos vegetais podem ser considerados meios aquosos diluídos e é neles onde as reações químicas e

bioquímicas acontecem, sendo também o local para o surgimento e desenvolvimento dos microrganismos.

O congelamento é um processo que combina os efeitos de redução da temperatura e conversão da água líquida em sólida. Segundo Delgado e Sun (2001), temperaturas abaixo de $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ reduzem bem as taxas de reações químicas e metabólicas bem como o desenvolvimento dos microrganismos. Como nesse processo uma grande porção da água cristaliza, a quantidade de água ativa disponível como solvente para reações, presente nos tecidos, é reduzida e, conseqüentemente, diminui as reações ali presentes (REID, 1993 apud PETZOLD e AGUILERA, 2009). Mesmo após o fim do congelamento, existe uma porção de água a qual não sofreu mudança de fase, composta por água livre não convertida em gelo e água de fronteira ligada à matriz sólida da fruta (NI et al., 2015).

O processo de congelamento se inicia quando o alimento é posto em contato com o meio frio, podendo ser sólido, líquido ou gasoso. As temperaturas diminuem partindo da parte externa do produto para dentro do mesmo, ou seja, da casca do alimento para o seu núcleo. O calor trocado com a superfície é realizada pelo mecanismo da convecção já a transferência de calor do centro até a superfície é feita pela condução. Nesse processo, a superfície congela primeiro, formando uma casca de gelo que gradualmente engrossa até chegar ao centro. É a chamada frente de congelamento e seu movimento depende das condições do processo e da forma, tamanho e propriedades térmicas do produto (PHAM et al., 2006).

Bail et al. (2000) dividem o congelamento em três etapas: a primeira é o resfriamento inicial sem mudança de fase, também chamada no inglês de *precooling*; a segunda é representada por um platô correspondente a zona de cristalização (transformação água-gelo), e a última é denominada de etapa de têmpera. Já em termos de regiões presentes no processo, Salvadori e Mascheroni (1991) dividem em três zonas: descongelada, congelada e desidratada.

2.2.1 Curva de congelamento

A curva de congelamento, Figuras 2.4 e 2.5, é um gráfico da temperatura versus tempo onde é possível verificar claramente as etapas presentes nesse processo.

Figura 2.4 – Histórico de temperatura para um congelamento sem cristalização do soluto.

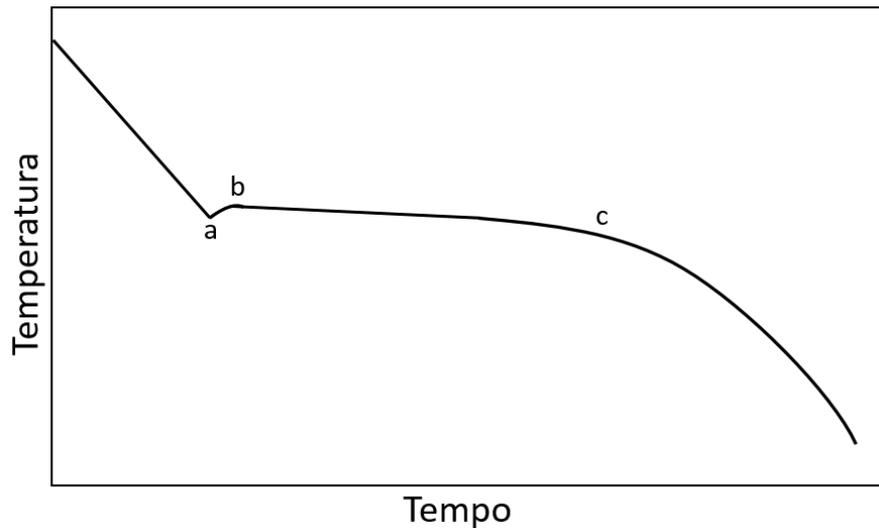
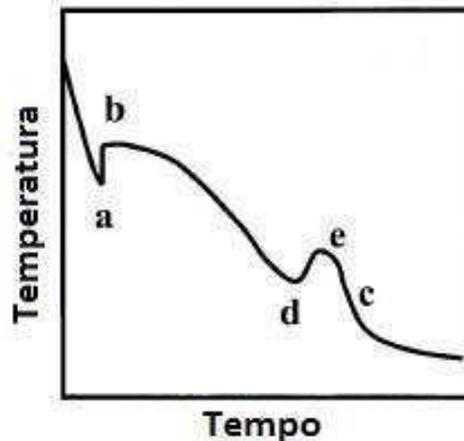


Figura 2.5 – Histórico de temperatura para um congelamento com cristalização do soluto.



Fonte – Rahman et. al. (2002).

Uma curva típica é constituída de 3 fases: (1) resfriamento, indo da temperatura inicial até o ponto b; (2) o congelamento partindo de b até c; (3) o pós-congelamento ou período de têmpera que é de c até o produto alcançar o equilíbrio térmico com o meio refrigerante.

No período de resfriamento, o material sai de sua temperatura inicial até a temperatura de início do congelamento (ponto b). É uma região caracterizada pelos elevados gradientes de temperatura devido a diferença entre a temperatura inicial da fruta e a do meio. O local onde se forma um vale, devido ao decaimento a níveis abaixo da temperatura de início do congelamento, sem a formação de cristais de gelo, é chamado de super congelamento (*supercooling* no inglês). Esse queda é tanto menor quanto maior for a concentração de partículas sólidas (GUANGMING et al., 2007). Rahman et al. (2002) citam dois motivos para esse fenômeno em função da concentração de soluto: (1) devido a rápida nucleação que a

presença de sólidos proporciona, e (2) devido ao abaixamento da temperatura de congelamento. O ponto a é chamado de temperatura de cristalização do gelo e é onde os cristais começam a se formar (RAHMAN et al., 2002). Devido a isso, calor latente de solidificação é liberado, ocasionando o rápido crescimento dos gráficos até o ponto b.

A região compreendida entre os pontos b e c é conhecida como o platô de mudança de fase e é onde ocorre o congelamento propriamente dito. Para substâncias puras essa temperatura é constante porém para misturas, ela é variável. Nessa fase, a temperatura varia muito lentamente e é onde a maior parte da energia perdida para o meio ocorre devido ao processo exotérmico de solidificação (POWER et al., 2015). A duração dessa fase (tamanho do platô) é função da quantidade de água presente na fruta, a qual influencia no calor latente de solidificação, bem como na taxa de resfriamento (ANZALDÚA-MORALES et al., 1999; POWER et al., 2015). Com a contínua formação da fração de gelo, os sólidos solúveis podem precipitar, tornando mais concentrada a fase aquosa, fazendo o ponto de solidificação decrescer. Diversos trabalhos comentam sobre esse assunto (ANCOS et al., 2006; POWER et al., 2015; NI et al., 2015). Segundo Ancos et al. (2006), esse aumento na concentração causa no meio aquoso alterações consideráveis em suas propriedades físicas. Isso leva ao possível aumento das reações enzimáticas e químicas, ocasionando efeitos negativos na qualidade da fruta congelada. Sendo assim, é preferível que essa região seja a mais curta quanto possível. Os mesmos autores afirmam que, o aumento dessa concentração na matriz descongelada pode vazar para a célula, ocasionando danos internos e até mesmo a perda de turgor. Esse tipo de dano independe da velocidade com o qual a fruta é congelada e só pode ser reduzido aplicando-se certas técnicas.

A fase de congelamento também diminui a quantidade de água ativa presente na matriz do alimento, necessária para o desenvolvimento de microrganismos. Assim, segundo Nesvadba (2008): “Grande parte dos microrganismos cessam suas funções quando a atividade de água está abaixo de 0,7.”

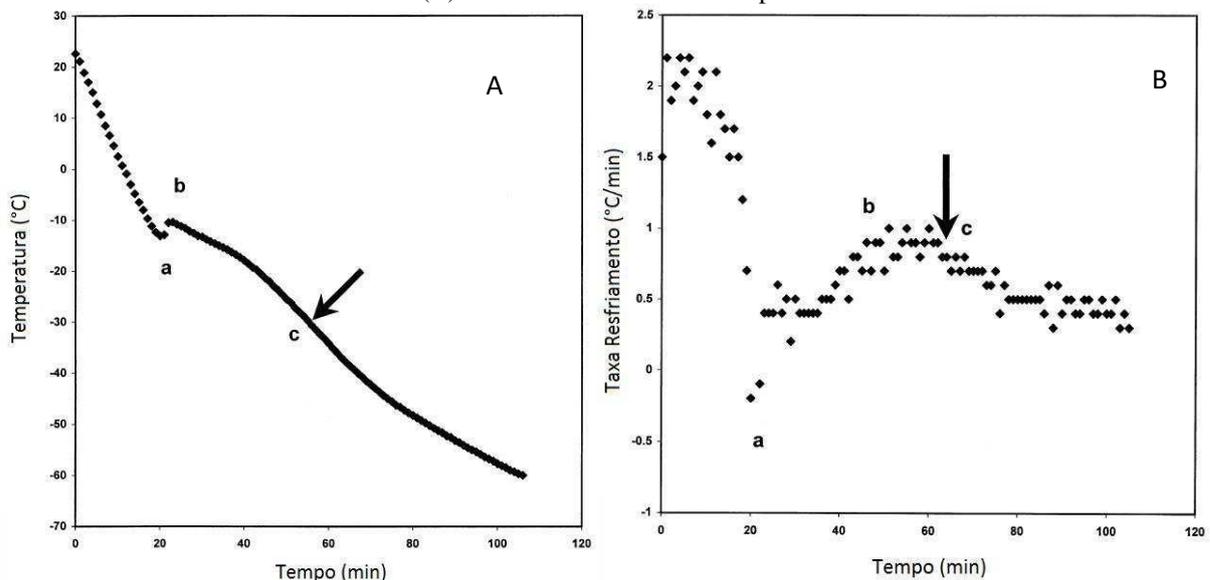
Ainda é possível o aparecimento da cristalização do soluto durante a mudança de fase, como mostrado na Figura 2.5. O ponto d indica o início dessa cristalização e, devido a ela, novamente calor latente é liberado, elevando mais uma vez a temperatura até o ponto e. Esse é conhecido como ponto eutético.

Após o ponto c, já não há mais a transformação da água líquida em sólido e a temperatura alcançará o equilíbrio com o meio. Dependendo de qual seja essa temperatura, ainda pode-se chegar a chamada fase vítrea. Ela é caracterizada pela estabilidade do alimento pois a mobilidade molecular é significativamente reduzida (NI et al., 2015).

A curva de congelamento é uma ferramenta importante para a determinação do ponto inicial da transformação água-gelo de um produto. Segundo Rahman et al. (2002), o método que utiliza este tipo de gráfico é um dos mais precisos e usados, além de ser simples. Os autores ainda afirmam a importância da determinação do ponto de congelamento do produto. Ela é requerida para se estimar as propriedades termofísicas, pois nesse ponto ocorre uma grande descontinuidade dessas propriedades.

Em seu trabalho, Rahman et al. (2002) determinaram a temperatura inicial de congelamento de *sucrose syrup* e de *starch gel* através das curvas de histórico de temperatura e das taxas de resfriamento. Esses gráficos são apresentados pelas Figuras 2.6 e 2.7, respectivamente.

Figura 2.6 – Gráfico histórico temperatura e taxa de resfriamento do *sucrose syrup*. (A) temperatura vs tempo, (B) taxa de resfriamento vs tempo.

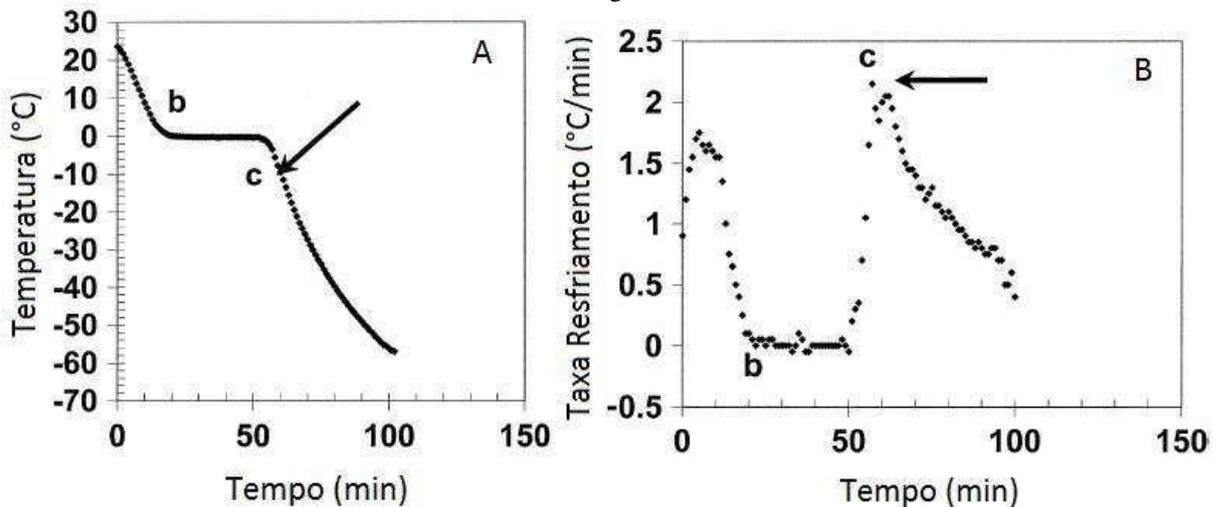


Fonte – Rahman et al. (2002).

Para determinar o ponto de início da cristalização, é necessário a análise das Figuras 2.6.A e 2.6.B em simultâneo. Na Figura 2.6.A, observa-se a fase de resfriamento do produto junto com o seu super congelamento, o qual é apresentado até o ponto a. Ele é mostrado na

Figura 2.6.B como o ponto de menor valor para a taxa de resfriamento. Após, observa-se um crescimento abrupto da temperatura até b (Figura 2.6.A), onde é indicado como o início da transformação da água em gelo. Ele é caracterizado na Figura 2.6.B como o ponto onde a taxa de resfriamento começa a se manter aproximadamente constante devido a pequena variação de temperatura, a qual a cristalização proporciona no processo (RAHMAN et al., 2002). De b para c tem-se a fase de cristalização da água líquida e o seu fim é apresentado na Figura 2.6.B como o ponto de maior taxa de resfriamento ou o final do platô. Após esse ponto, a taxa de resfriamento decresce.

Figura 2.7 – Histórico de temperatura e taxa de congelamento para *starch gel*. (A) histórico de temperatura, (B) taxa de congelamento.



Fonte – Rahman et. al. (2002).

Já para o *starch gel*, percebe-se que o ponto a, referente ao início da nucleação, não está presente no gráfico, pois o super congelamento não foi observado para esse caso. Na Figura 2.7.B é mais fácil verificar os pontos referentes ao início e fim do congelamento, do que no caso do *sucrose syrup*. Percebe-se também, comparando as Figuras 2.6 e 2.7, como a curva de congelamento pode diferir de forma drástica de um alimento para o outro devido a diferentes composições que cada produto possui. Concluindo o seu trabalho, Rahman et al. encontraram as temperaturas de início de congelamento de $-30,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ para *sucrose syrup* e $-7,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ para o *starch gel* e foram considerados bons resultados quando comparados com a literatura.

2.2.2 Propriedades termofísicas

Os dados das propriedades termofísicas usadas na solução do problema de congelamento são relevantes em relação a precisão dos tempos (SALVADORI et al., 1996).

Segundo Fricke e Becker (2001), essas propriedades possuem forte dependência da composição química do produto bem como da temperatura em que ele se encontra. Pham (1996) calculou as seguintes propriedades para os alimentos a partir de sua composição química: entalpia, temperatura de congelamento, calor específico do líquido e do sólido, e também a água não congelável. A utilização dessas propriedades calculadas geraram bons resultados na predição de tempos de congelamento, tendo erros aceitáveis (por volta de 10%) para carnes, peixes, frutas e queijos. Já sorvetes e gorduras tiveram grandes erros nos tempos.

Segundo Nesvadba (2008), na faixa de congelamento, as propriedades térmicas são altamente dependentes da temperatura devido, principalmente, à variação da porção de água líquida e sólida nessa fase. Sendo assim, para se ter um estudo mais fiel a realidade, é necessário conhecer e considerar as variações de cada propriedade no processo de congelamento. Algumas delas são necessárias para a modelagem desse tipo de problema: entalpia, densidade, calor específico e condutividade térmica. Segundo Erdogdu (2008), esses três últimos parâmetros são importantes na análise dos processos envolvendo alimentos.

2.2.2.1 Densidade

Em alimentos ricos em água, o congelamento é caracterizado pela variação do volume, acarretando em aumento da rigidez (módulo de Young) e conseqüentemente lidando com grandes tensões onde podem ocorrer até rupturas (PHAM, 2006). Isso acontece principalmente a partir do início da fase de congelamento devido ao fenômeno de expansão que ocorre na água abaixo dos 4 °C, e que continua durante a formação do gelo, onde é mais evidenciado. Como o fenômeno de cristalização não acontece ao mesmo tempo em todo o material, ou seja, o centro é a última região a ocorrer a cristalização, quando esse começa a congelar, e conseqüentemente a expandir, geram-se tensões internas na fruta.

A contração térmica durante o processo para temperaturas abaixo de -30°C é normalmente mascarada pela expansão devido a mudança de fase, essa iniciada a partir da formação dos primeiros cristais de gelo abaixo -30°C por causa da presença de solutos (PHAM, 2006).

2.2.2.2 Fração de gelo

As propriedades termofísicas de produtos congelados, como atividade de água, calor específico, entalpia e condutividade térmica, possuem grande dependência em relação a fração de gelo presente (GULATI e DATTA, 2013). Isso ocorre, porque as propriedades entre a água líquida e o gelo possuem valores bem distintos (NESVADBA, 2008). Assim, existe a necessidade do cálculo da fração de água cristalizada no processo.

2.2.2.3 Calor específico

Calor específico é definido como a energia necessária para se elevar em um grau a temperatura de uma unidade de massa do material. É uma importante propriedade para modelagens em regime transiente. Para alimentos descongelados, praticamente não há variação dela porém há um grande decaimento junto com o abaixamento da temperatura quando o produto está congelado (FRICKE e BECKER, 2001).

O cálculo do calor específico depende dos tipos de componentes presentes no produto e a sua proporção. O seu valor acima do ponto de congelamento, pode ser obtido através da Equação 2.1:

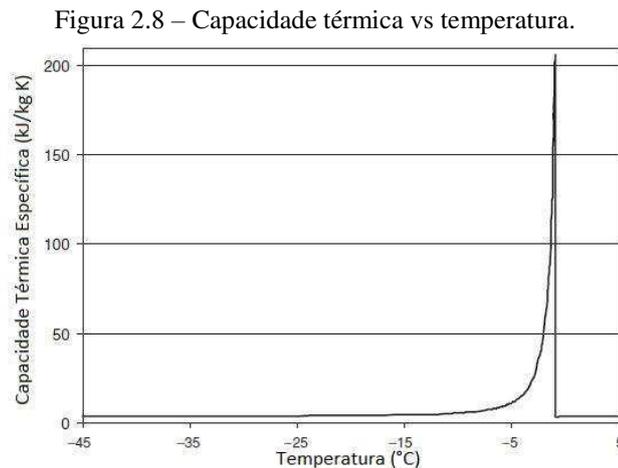
$$c_p = \sum_{i=1}^n (c_i x_i) \quad (2.1)$$

onde c_i é o calor específico do componente i e x_i é sua fração mássica.

Para o cálculo do calor específico na fase de congelamento, existem diversas equações e algumas delas podem ser encontradas em ASHRAE (1998a). Para a obtenção desses valores, é utilizado o chamado calor específico modificado, também conhecido como capacidade térmica específica, pois durante a fase de congelamento, o calor latente é liberado a temperatura variável. Assim, o calor específico modificado abrange tanto os efeitos do calor sensível quanto latente.

Essa propriedade é fortemente dependente do aparecimento de cristais de gelo, como apresentado na Figura 2.8.

Quando os primeiros cristais são formados, indicando o início do congelamento, calor latente é liberado de forma abrupta, elevando em um curto espaço de tempo o valor da capacidade térmica específica.



Segundo Pham (2014), esse pico é proporcional a temperatura inicial de congelamento. Após, essa variável diminui o seu valor rapidamente até chegar a fase de têmpera, onde a sua quantidade se mantém aparentemente estável.

2.2.2.4 Entalpia

Segundo Gulati e Datta (2013), a entalpia de uma substância é a soma da energia específica interna com o produto da pressão pelo volume específico.

ASHRAE (1998a) afirma que a mudança na entalpia de uma substância pode ser utilizado na estimativa da energia a ser adicionada ou removida pelo efeito da variação de temperatura.

Para se obter um valor aproximado dessa propriedade acima do ponto de congelamento, considera-se a entalpia como sendo composta pela energia sensível enquanto que, para abaixo do ponto de congelamento, ela é estimada englobando tanto a energia sensível quanto a

latente. Se o alimento estiver descongelado, o seu valor pode ser dado pela Equação 2.2, de acordo com Fricke e Becker (2001):

$$H = \sum_{i=1}^n (h_i x_i) \quad (2.2)$$

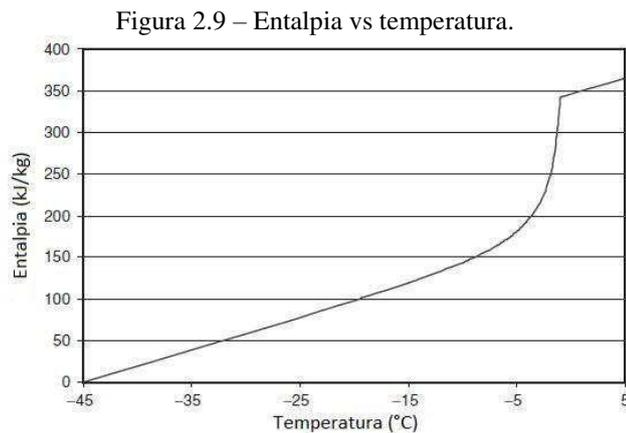
Em que h_i é a entalpia e x_i a fração mássica de um dos componentes presentes no material.

Para o alimento congelado, segundo Datta e Gulati (2013), a entalpia pode ser calculada como a soma do calor sensível (nesse caso a própria entalpia) dos sólidos totais, água descongelada, do gelo e do calor latente, como mostrado na Equação 2.3:

$$H = H_s + H_u + H_{\text{gelo}} + w_u L_s \quad (2.3)$$

sendo L_s o calor latente de transformação água-gelo. Muitas outras equações podem ser encontradas em ASHRAE (1998a).

A Figura 2.9 mostra a variação dessa propriedade de acordo com a temperatura.



Fonte – Nesvadba (2008).

Assim como no caso do calor específico, a entalpia também sofre grande variação próximo ao ponto inicial de congelamento, porém se difere pela diminuição contínua do seu valor com o abaixamento das temperaturas. Na modelagem computacional, a utilização da

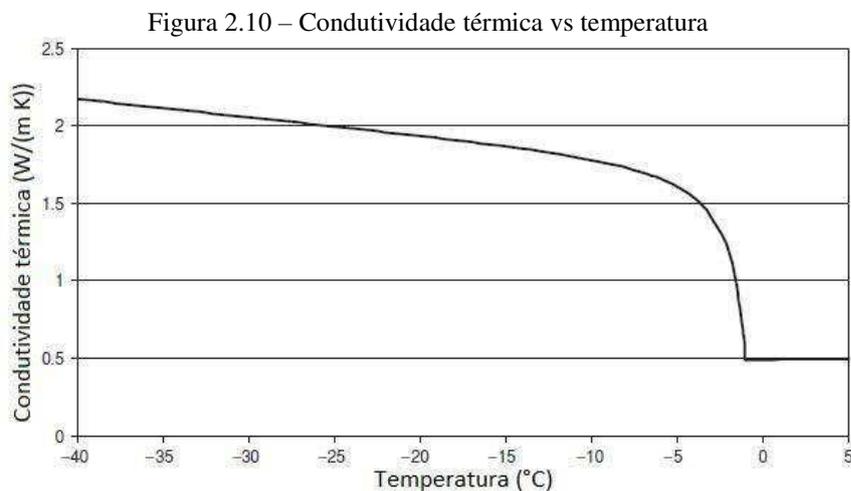
função $H(T)$ é mais adequada do que a da $C_p(T)$ por não ocorrer o pico presente no calor específico modificado (Figura 2.8) quando se ultrapassa a temperatura de congelamento.

2.2.2.5 Condutividade térmica

A condutividade térmica do material representa a capacidade com a qual o calor é conduzido com maior facilidade. Segundo Fricke e Becker (2001), essa propriedade depende da composição, estrutura e temperatura do produto. Comparado aos outros componentes que constituem a fruta, a parcela da condutividade térmica da água e do gelo são de maior relevância, pois os seus valores são bem elevados em comparação aos outros constituintes. É necessário realizar algumas premissas e considerações na estimativa do valor dessa propriedade. Dentre elas, pode-se destacar: estrutura do alimento, direção do fluxo de calor (paralelo ou perpendicular), ocorrência de poros, entre outros. Diversas são as formas de calcular essa propriedade mas, para sistemas com múltiplos componentes, pode-se estimar o seu valor utilizando-se dos modelos em paralelos e em séries, de forma análoga com a resistência elétrica. Para o modelo paralelo, o seu valor pode ser dado pela Equação 2.3:

$$k = \sum_{i=1}^n (\varphi_i k_i) \quad (2.3)$$

onde φ_i é a fração volumétrica e k_i é a condutividade térmica de um dos componentes presentes no material. Mais formas de calcular essa propriedade podem ser encontrados em (ASHRAE, 1998a). A Figura 2.10 mostra a sua dependência em relação a temperatura.



Fonte – Nesvadba (2008)

Novamente percebe-se como as propriedades variam drasticamente no ponto inicial de congelamento. No caso da condutividade térmica, além dessa variação, ainda se vê o seu aumento com a temperatura quando o material já se encontra completamente congelado.

2.2.3 Importância do coeficiente de transferência de calor convectivo

Além dos parâmetros já citados, o coeficiente de transferência de calor convectivo também possui grande contribuição no problema de congelamento. Ele é o fator de proporcionalidade presente na lei do resfriamento de Newton, dada pela Equação 2.4 (INCROPERA et al., 2008):

$$q'' = h (T_s - T_{amb}) \quad (2.4)$$

Em que q'' é o fluxo de calor por convecção (W/m^2), T_s a temperatura da superfície, T_{amb} a temperatura do fluido e h o coeficiente de transferência de calor convectivo.

O valor de h depende de muitas variáveis do processo, dentre elas: das características do produto (forma e dimensões), da variação da temperatura na superfície, da rugosidade e características do fluxo do fluido (velocidade e turbulência). A dificuldade na análise dessa variável é constatada pela existência de diversas equações, cada uma aplicável a casos específicos, para a obtenção do seu valor. Incropera et al. (2008), apresenta essas equações, sendo elas aplicáveis a certos formatos do corpo em estudo, faixas de número de Reynolds e Nusselt, dentre outras variáveis.

Nicolai e De Baerdeameken (1996 apud ERDOGDU, 2008) mostraram como pequenos desvios no coeficiente de transferência de calor podem resultar em grandes erros, especialmente quando o coeficiente é pequeno. Isso mostra como é importante conhecer bem o valor de h a ser empregado no problema em estudo.

Em seu trabalho, Erdogdu (2008) apresentou vários estudos sobre como determinar o coeficiente de transferência de calor convectivo e a difusividade térmica utilizando, principalmente, os dados de tempo-temperatura obtidos através de experimentos.

2.2.4 Nucleação e cristalização

A fase de nucleação/cristalização é a mais importante durante todo o processo de congelamento, pois é nela onde existe a possibilidade do controle do crescimento de gelo, principal responsável pela deterioração dos alimentos.

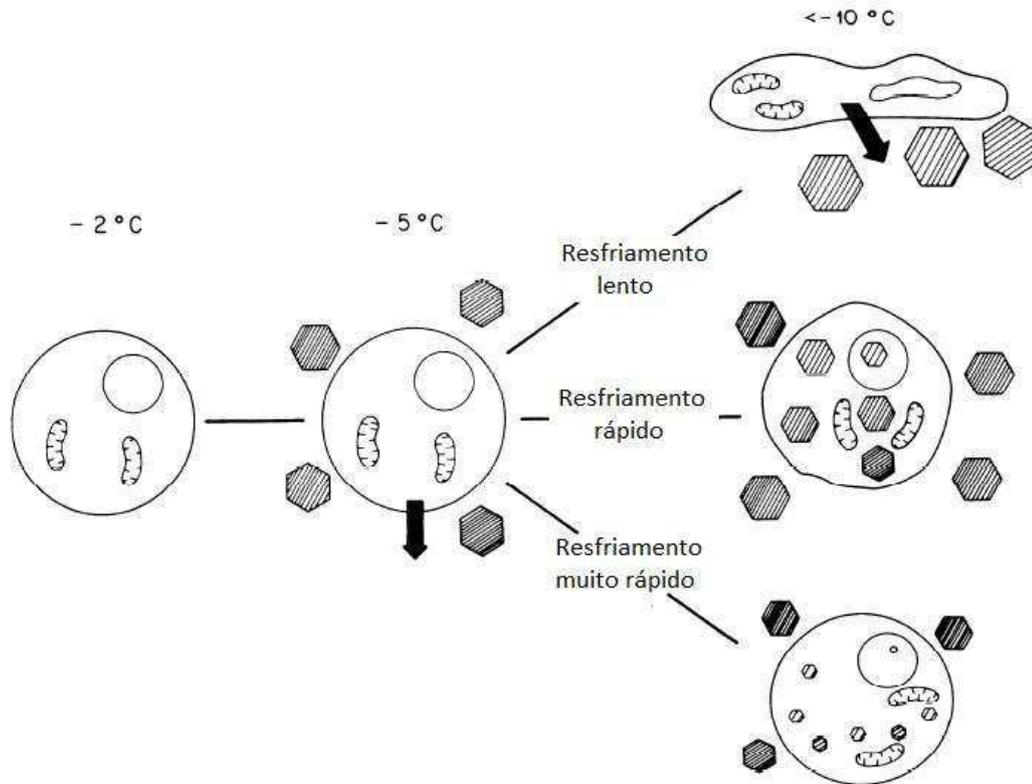
Segundo Hartel (2001 apud PETZOLD e AGUILERA, 2009), a cristalização do gelo pode ser dividida em três fases: (1) a nucleação ou formação de uma rede cristalina; (2) crescimento dos núcleos até que o cristal atinja o equilíbrio e (3) recristalização ou reorganização da estrutura cristalina para estados de baixa energia.

A nucleação se inicia quando o produto atinge a temperatura de nucleação, abaixo da temperatura inicial de congelamento. Esse abaixamento é chamado super congelamento ou *undercooling* e, segundo Petzold e Aguilera (2009), resulta em um estado termodinâmico instável até a formação de uma interface adequada, a qual ocorre pela agregação da água. Ainda segundo os autores, a mudança de fase não seria possível sem um núcleo estável, pois as moléculas de líquidos não se alinham facilmente para uma configuração cristalina.

Para a geração dessa interface, a nucleação pode ser realizada de forma homogênea que, segundo Pham (2008), ocorre em água pura, ou pode ser heterogênea que, ainda segundo o autor, ocorre devido ao contato com outras substâncias. Já Nesvadba (2008) faz uma abrangência maior em relação a nucleação homogênea, apontando sua ocorrência em líquidos com partículas muito pequenas (menores que 1 μm), devido as flutuações aleatórias das mesmas. Quando se forma um núcleo estável de gelo, o crescimento do cristal se dá pela adição de moléculas à interface (PETZOLD e AGUILERA, 2009).

Após esse período, os cristais de gelo iniciam o crescimento. O tamanho e a distribuição deles tem íntima ligação com as taxas de congelamento (NESVADBA, 2008; FONSECA et al., 2009; FONSECA et al., 2010). Já é consenso entre os estudiosos que, em processos de congelamento, altas taxas de resfriamento geram muitos cristais de gelos com tamanho pequeno enquanto que, baixas taxas geram poucos cristais, porém grandes. Eles também podem ser extra ou intracelular, em formatos dendríticos ou esferulíticos e podem estar parcialmente restringidos pela matriz do alimento. A Figura 2.11 mostra esquematicamente o tamanho e local de formação do gelo de acordo com a velocidade do resfriamento.

Figura 2.11 – Influência da taxa de congelamento no tamanho do cristal de gelo.



Fonte – Mazur (1984).

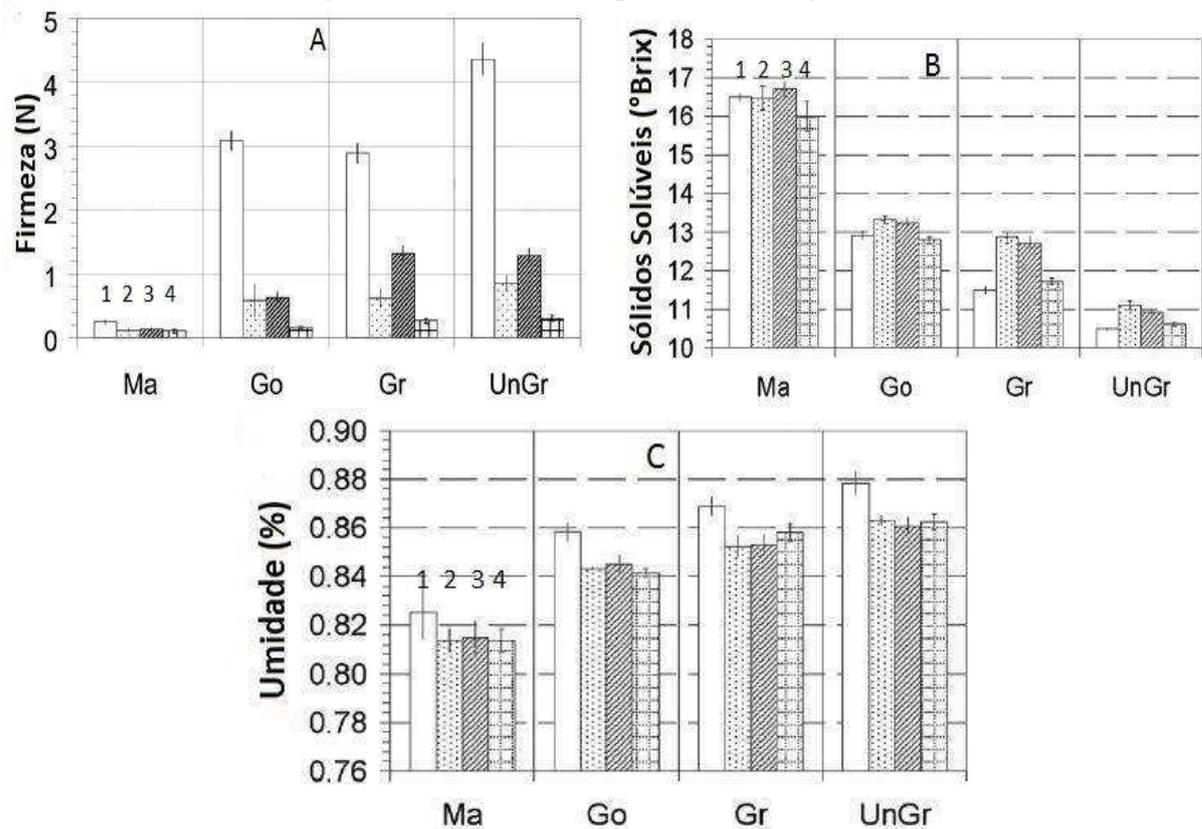
As baixas taxas de congelamentos geram cristais grandes e pontiagudos e são formados no exterior da célula, causando a migração da água do interior para fora pela pressão osmótica (ANCOS et al., 2006). Sendo assim, ocorrem danos a estrutura da membrana celular, podendo levar ao lançamento de sistemas enzimáticos e seus substratos, gerando perda de sabor, mudança da textura e coloração. Assim, essas velocidades estão associadas a frutas com baixa qualidade.

Taxas de congelamento rápidas geram cristais pequenos e arredondados, localizados tanto dentro quanto fora da célula, fazendo com que sua perda de água seja minimizada. Essas taxas estão associadas a entrega de produtos de boa qualidade.

Fonseca et al. (2010), Fonseca et al. (2009), Anzaldúa-Morales et al. (1999), Guangming et al. (2007), Bomben et al. (1983), Góral e Kluza (2009) e Van Buggenhout et al. (2006) estudaram a influência do congelamento nas propriedades físicas e químicas de frutas e verduras. Fonseca et al. (2010) investigaram os impactos da cinética para três condições de congelamento (-20°C , -80°C e imersão em nitrogênio líquido) nas propriedades de qualidade

do tecido das frutas. Também tentou-se identificar as propriedades de qualidade mais relevantes onde a diferenciação entre as frutas frescas e as frutas congeladas/descongeladas fosse possível. Foram verificadas a firmeza, o módulo de Young (para verificar a mudança na textura), a cor, teor de água, sólidos solúveis e pH. A Figura 2.12 mostra o impacto dessas condições em três propriedades: firmeza, sólidos solúveis e umidade.

Figura 2.12 – Influência das taxas de congelamento em certas propriedades. Ma: Manga. Go: Maçã Golden Delicious. Gr: Maçã Gran Smith. UnGr: Gran Smith imatura. (1) Fruta fresca. (2) -20 °C. (3) -80 °C. (4) Nitrogênio líquido. (A) Firmeza x protocolos de congelamento; (B) Sólidos Solúveis x protocolos de congelamento; (C) Umidade x protocolos de congelamento.



Fonte – Fonseca et al. (2010).

Percebe-se a ocorrência de mudanças das propriedades, tanto da fruta fresca para congelada, como entre as diferentes velocidades de congelamento. A firmeza, parâmetro relacionado com a textura da fruta, teve elevada depreciação (menos para a manga). Sólidos solúveis aumentaram no congelamento justamente pela elevação da concentração dos solutos devido a formação dos cristais de gelo. A umidade diminuiu, ratificando a ocorrência de secagem em todo processo de congelamento. Além desses parâmetros, o estudo mostrou que todas as outras propriedades também apresentaram diferenças tanto da fruta congelada para a fruta fresca, quanto entre as três condições. Eles concluíram que a textura, cor, sólidos solúveis e teor de água se mostraram mais relevantes quando da diferenciação entre frutas

frescas e congeladas. Textura e sólidos solúveis foram as propriedades onde melhor se verificou a influência das taxas de resfriamento. A taxa de resfriamento a -80°C foi considerada a melhor pois, em termos sensoriais perceptíveis ao consumidor, manteve a textura mais próxima da fruta fresca.

Guangming et al. (2007) investigaram a influência das taxas de congelamento em quatro tipos de vegetais: cogumelo, couve-flor verde, feijão branco e vagem da ervilha. Eles constataram que congelamento rápido produz pequenos cristais de gelo gerando pequenos danos as microestruturas.

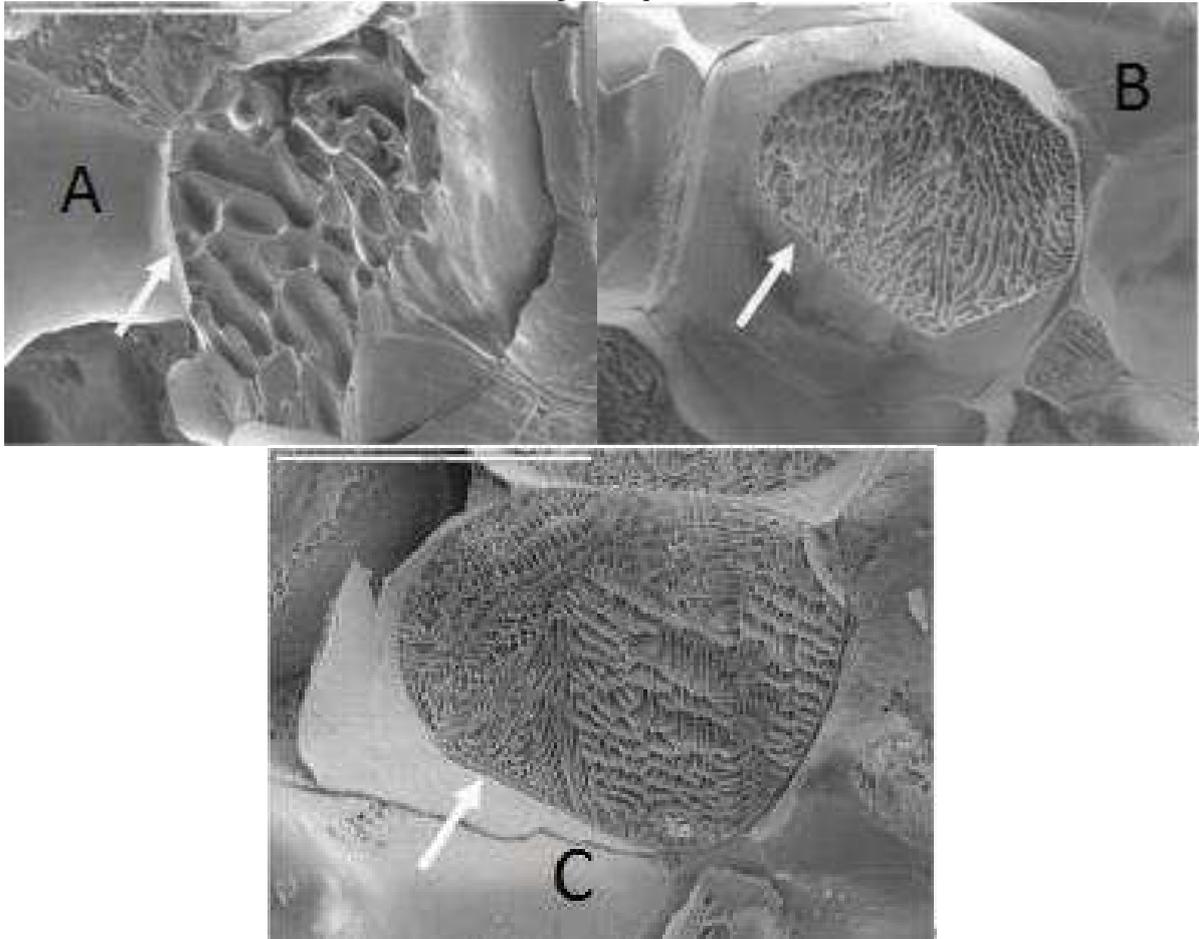
Bomben et al. (1983) analisaram a estrutura do tecido da maçã *Newton Pippin* para verificar a morfologia e distância dos cristais de gelo em função das taxas de resfriamento. Eles encontraram uma relação entre o espaço entre os gelos, com forma dendrítica, e as taxas de resfriamento. Assim, foi possível associar a distância entre os cristais e a qualidade da fruta.

Van Buggenhout et al. (2006) estudaram o impacto das condições de congelamento na qualidade da textura de cenouras. Utilizando de congelamento lento, rápido, criogênico e congelamento a altas pressões, eles concluíram que a perda da textura foi minimizada aplicando-se congelamento convencional rápido e criogênico. Essa conclusão se baseou na redução dos danos da parede celular do tecido das cenouras quando aplicados essas condições.

Anzaldúa-Morales et al. (1999) verificaram a influência das taxas de congelamento, descongelamento e temperatura do gabinete de exposição na modificação da textura da noz-pecan. Como conclusão, as altas taxas, tanto de congelamento, quanto de descongelamento tiveram menor efeito na textura do produto.

Fonseca et al. (2009) estudaram a mudança na textura, estrutura celular e composição da parede celular em tecidos de maçãs devido ao congelamento para três condições: -20°C , -80°C e nitrogênio líquido. A Figura 2.13 apresenta as imagens das células de acordo com o protocolo utilizado.

Figura 2.13 – Influência das taxas de congelamento na estrutura da célula de maçã. (A) -20°C ; (B) -80°C ; (C) Nitrogênio líquido.



Fonte – Fonseca et al. (2009).

A Figura 2.13.A é a imagem da célula para um resfriamento a -20°C , considerado taxa baixa de congelamento. A seta aponta para a parede celular e os espaços internos mostram os cristais de gelo ali formados. Observa-se como a membrana celular se encontra rasgada e a célula com um aspecto murcho devido ao surgimento de grandes cristais de gelo. Já na Figura 2.13.B, percebe-se como a parede celular está bem preservada assim como o formato da célula. Ao mesmo tempo, verifica-se cristais de gelo bem menores quando comparados a Figura 2.13.A. Por fim, a Figura 2.13.C apresenta gelo com o menor tamanho dentre as três condições mas uma membrana celular rompida, nesse caso fraturada, devido a elevada taxa de resfriamento. Mesmo assim, o formato da célula foi mantido. O Quadro 2.2 sintetiza o impacto de cada protocolo de congelamento nos diferentes níveis estruturais da célula.

Verificou-se como a menor taxa de resfriamento (-20°C), alterou profundamente a composição química da parede celular justamente pelo dano a ela causado e pelo lançamento de conteúdo internos da célula no meio.

Quadro 2.2 - Influência das taxas de congelamento no tecido de maçã.

Protocolo de Congelamento	Níveis da estrutura		
	Parede Celular	Célula	Tecido
	Modificação da composição	Integridade do vacúolo	Estrutura celular
-20°C (0.9 °C/min)	+++	Destruído	Parede celular colapsada, rasgada
-80°C (8.1 °C/min)	+	Destruído	Tecido preservado
-196°C (310 °C/min)	++	Destruído	Tecido preservado, ruptura

Fonte – Fonseca et al. (2009).

A utilização do nitrogênio líquido só não foi tão bom quanto a taxa de -80°C justamente pela fratura ocorrida na estrutura celular. Assim, de acordo com o quadro, concluiu-se que o protocolo onde melhor se verifica a conservação do tecido das maçãs foi justamente o de -80 °C. Vale salientar a destruição do vacúolo independentemente de qual velocidade de resfriamento se utilize no processo.

A perda de água também é um fator determinante na qualidade. Se ela não for bem controlada, produzirá perdas consideráveis. Essa diminuição na umidade se dá inicialmente pela evaporação (resfriamento), mas principalmente pela sublimação do gelo, o qual forma uma camada na superfície congelada. A perda de água ocorre devido a diferença de água ativa entre a superfície e o meio.

2.2.5 Recristalização

A recristalização é o processo em que, devido as flutuações de temperatura durante a armazenagem em câmaras frias, distribuição ou venda para o consumidor final, os cristais de gelo voltam a crescer. Ela acontece porque os grandes cristais são termodinamicamente mais estáveis (NESVADBA, 2008).

Esse processo é explicado da seguinte forma: quando a temperatura aumenta, certos cristais de gelos, principalmente os menores, tendem a derreter, aumentando a concentração

de água líquida (PETZOLD e AGUILERA, 2009). Assim, se a temperatura voltar a cair, não haverá nova nucleação, ou seja, não ocorrerá a criação de novos cristais. Sendo assim, a água livre irá se aglomerar na superfície dos grandes cristais, aumentando ainda mais os seus tamanhos. A recristalização é ligada a perda de qualidade do produto durante o período de armazenamento (PETZOLD e AGUILERA, 2009; ANCOS et al., 2006).

2.3 Modelagem Matemática

A solução matemática para os problemas físicos podem ser encontradas com a utilização dos seguintes métodos: analítico, empírico e numérico.

O método analítico produz resultados exatos aplicados a um meio contínuo porém, para a sua possível solução, muitas vezes há a necessidade de realizar certas simplificação do problema. Algumas delas podem ser: geometrias simples, propriedades constantes e regime estacionário. Isso pode por simplificar demais o problema podendo até mesmo não condizer com a realidade do estudo. Segundo Maliska (2004) e Pham (2008), esse método possui como principal utilização validar os métodos numéricos.

O método empírico apresenta fórmulas através de correlações estatísticas de dados obtidos experimentalmente. O seu objetivo maior é fornecer respostas rápidas com uma precisão de aproximadamente 10% para ser usada pelos usuários da indústria (PHAM, 2008). Como desvantagem, as correlações só podem ser utilizadas em condições similares a aquelas que foram obtidas (PHAM, 2008; DATTA e GULATI, 2013).

O método numérico é aquele onde se consegue obter resultados para os casos mais gerais possíveis: geometrias arbitrárias, variação de propriedades e volume, condições de contorno não uniformes, regime transiente, etc. Segundo Pham (2008), para problemas complexos, métodos numéricos são sempre a primeira escolha. O método também ajuda a diminuir o tempo e custos de projetos (MALISKA, 2004). Como desvantagem, os seus resultados são aproximados e aplicados para meios discretos. Também destaca-se que, quanto mais elaborado for o problema, maior será a necessidade computacional para a sua solução, elevando assim o tempo de simulação.

2.3.1 Método analítico

Segundo LeBlanc et al. (1990), os métodos analíticos podem ser separados em dois grupos: (a) aqueles que consideram todo o calor latente sendo retirado a temperatura constante e (b) os que consideram o calor latente sendo retirado em uma faixa de temperatura. O primeiro ainda pode ser dividido em modelos baseados na solução exata ou aproximada da equação de Fourier. O segundo é dividido em modelos aproximados ou empíricos.

Delgado e Sun (2001) comentam que as abordagens mais simples nas soluções aproximadas, com relação a predição dos tempos de congelamento, são normalmente baseadas na equação de Plank ou em sua modificação. Essa equação possui um erro de 10 a 40% e é dada pela Equação 2.5:

$$t_{\text{Plank}} = \left(\frac{\rho_s L_1}{T_f - T_a} \right) \left[\frac{PR}{h} + \frac{QR^2}{k_s} \right] \quad (2.5)$$

Em que ρ_s é a densidade no congelamento, L_1 o calor latente volumétrico de solidificação, T_f é a temperatura de congelamento, T_a a temperatura ambiente, h o coeficiente de transferência de calor por convecção, k_s a condutividade térmica do material congelado, e P e Q são fatores geométricos. Essa equação possui uma faixa de erro grande pois: (a) assume o congelamento a temperatura constante; (b) considera a condutividade térmica constante; (c) negligencia a remoção do calor sensível acima do ponto de congelamento.

Partindo dessas limitações, diversos autores propuseram modificações na equação de Plank, procurando dentre outros: (a) inserir correções para levar em conta a remoção do calor sensível do resfriamento e do período de têmpera; (b) ajustamento dos fatores geométricos; (c) consideração da variação de temperatura no período de cristalização da água e (d) substituição do calor latente volumétrico pela diferença da entalpia entre o ponto inicial de congelamento e a temperatura final do centro.

Cleland e Earle (1982) utilizaram-se do conceito de “dimensões de transferência de calor equivalentes” (EHTD, em inglês), no processo de congelamento com mudança de fase para prever tempos de congelamento. Esse método, baseado na equação de Plank, segundo os autores, é de fácil utilização e de boa precisão para a indústria (erro de no máximo 10%) e

pode ser usado tanto para formas regulares quanto para irregulares, apesar do método só ter sido validado com placas infinitas, cilindros infinitos, esferas e tijolos retangulares. Outras formas não foram validadas por falta de dados experimentais mas os autores afirmaram que, aparentemente, pode satisfatoriamente ser aplicável.

Pham (1984) propôs uma aproximação analítica onde se leva em conta o calor sensível e as mudanças graduais da mudança de fase, tendo obtida uma solução a qual não necessita do uso de fatores empíricos, gráficos ou contas avançadas. Separou-se o processo de congelamento em 3 etapas: pré, pós e congelamento propriamente dito. Para levar em conta a variação da condutividade térmica e do calor específico abaixo do ponto de congelamento, bem como a liberação do calor latente em uma faixa de temperatura, foi utilizada a temperatura média de congelamento. Para considerar os efeitos do calor sensível, foram utilizadas as ideias do trabalho de Mascheroni et al. (1982 apud Pham, 1984), em conjunto com o conceito de parâmetros aglomerados de Cochran. O trabalho apresentou resultados melhores em comparação a outros métodos existentes, incluindo fórmulas de regressão e cálculos computacionais por diferenças finitas. Foi utilizado para placas infinitas, cilindros infinitos e esferas.

Pham (1985) propôs um conceito aplicado a blocos retangulares, onde as resistências internas e externas ao fluxo de calor são tratadas separadamente. Utilizou-se a ideia do “caminho médio de condução” pois prover a visualização do efeito de forma: ele explica porque um cubo congela mais lentamente do que uma esfera, já que este último possui uma distância do centro para a superfície menor. Os resultados apresentados foram os melhores, comparado com outros métodos disponíveis naquele tempo, até mesmo diante de cálculos computacionais que utilizaram o método das diferenças finitas.

O uso do caminho médio de condução bem como do EHTD tem como desvantagem, a derivação dos fatores geométricos não possuírem uma base física. Além disso, sua aplicação é restringida a certos dados experimentais aos quais foram obtidos. Sendo assim, Hossain et al. (1991a) obtiveram novos fatores geométricos para múltiplas formas regulares, obtidos de forma analítica em vez de aproximações empíricas. Os autores compararam os resultados com fórmulas empíricas existentes, tanto para dados de cálculos numéricos quanto para dados experimentais e obtiveram uma resposta mais precisa. Em trabalhos posteriores, os autores

derivaram novos fatores geométricos para formas bidimensionais pseudo-elípticas e tridimensionais pseudo-elipsoides (HOSSAIN et al., 1991b, 1991c).

Salvadori e Mascheroni (1991) desenvolveram um método onde, a partir da solução numérica da equação do balanço térmico para pedaços de carne, chegaram a uma equação para o tempo de congelamento. Após solucioná-la, obtendo assim a temperatura do centro do alimento, os autores fizeram uso de uma variável adimensional a qual levava em conta a influência do tempo e parâmetros representativos de cada situação, sendo eles: número de Fourier, temperatura inicial de congelamento, número de Biot, temperatura inicial e temperatura do meio. Observando a relação entre a variação da temperatura do centro térmico com essa variável, eles chegaram a uma relação linear, de onde puderam obter a equação para o tempo de congelamento, função somente das propriedades da fruta fresca. Os autores obtiveram boa precisão quando confrontaram os resultados obtidos com a equação com dados experimentais e, também perceberam a sua aplicabilidade a dados além daqueles usados para se obter os parâmetros experimentais.

Em seu estudo sobre o congelamento de almôndegas, Tocci e Mascheroni (1994) compararam 6 métodos de aproximação (PHAM, 1984; CLELAND e EARLE, 1984 apud TOCCI e MASCHERONI, 1994; SALVADORI e MASCHERONI, 1991; ARROYO e MASCHERONI, 1990 apud TOCCI e MASCHERONI, 1994; MASCHERONI (no prelo) apud TOCCI e MASCHERONI, 1994, CLELAND, 1990 apud TOCCI e MASCHERONI, 1994), e um método numérico (diferenças finitas), com dados experimentais obtidos pelos autores. Para os dados das propriedades térmicas, eles utilizaram 3 trabalhos diferentes a fim de verificar se tais valores poderiam influenciar na predição das temperaturas. Ao final do trabalho, os pesquisadores concluíram que, no geral, o método numérico fornece melhores resultados quando comparado aos dados experimentais. Já comparando os métodos analíticos, o de Salvadori e Mascheroni foi considerado mais preciso. Ressalta-se a forte dependência dos dados de entrada pois, para cada conjunto de valores de propriedades térmicas calculadas por um dos três trabalhos, houveram diferenças nos tempos de predição.

Sanz et al. (1996) partiram da equação de Plank e, em vez de usar o calor latente, utilizaram a entalpia volumétrica equivalente, levando em conta a mudança de temperatura na zona de congelamento, bem como a variação da condutividade térmica em todo o processo. Tal método serviu para predizer os tempos totais de congelamento de uma substância

chamada KTS e de carnes, onde levou-se em conta, também, os tempos de pré e pós congelamento. Os resultados comparados a dados experimentais foram considerados bons.

Salvadori et al. (1996) aplicaram e compararam dois métodos (PHAM, 1986 apud SALVADORI et al., 1996; SALVADORI e MASCHERONI, 1991) para determinar o tempo de congelamento de uma placa. Outros 3 métodos (CLELAND e EARLE, 1982; CLELAND et al., 1987 apud TOCCI e MASCHERONI, 1994; ARROYO e MASCHERONI, 1990 apud TOCCI e MASCHERONI, 1994) foram utilizados para calcular os fatores de formas no congelamento de polpa de morangos em containers. Chegou-se a conclusão de que o método de Cleland et al. (1987 apud TOCCI e MASCHERONI, 1994) foi levemente mais preciso, apesar de nenhum método para o fator de forma ter sido considerado ótimo, pois há falta de praticidade entre eles.

Becker e Fricke (1999) fizeram um estudo comparativo entre alguns dos diversos métodos analíticos de soluções aproximadas presentes na época, com dados empíricos disponíveis na literatura do tempo de congelamento para certos alimentos com formas regulares. Apesar de certos estudos serem mais precisos para algumas formas e muito imprecisos para outras, o método de Salvadori e Mascheroni (1991) foi o único que manteve erros moderados para todas as formas estudadas.

Illicali e Icier (2010) realizaram um estudo sobre os tempos de congelamento de purê de mamão parcialmente seco. Essa fruta sofreu o processo denominado *dehidrofreezing*: frutas que foram parcialmente secas à umidades intermediárias e, em seguida, congeladas, objetivando alcançar uma melhor textura e reduzir os custos com frete. Os autores utilizaram diversos métodos analíticos para predizer os tempos de congelamento para esse produto à baixas umidades (entre 91,2 a 51,6%). Como conclusão, certos métodos puderam ser aplicados a esse tipo de fruta mas com alguns erros crescentes em função da umidade inicial.

Muitas formulações analíticas bem como revisões da literatura sobre os tempos de congelamento e descongelamento podem ser encontradas em LeBlanc et al. (1990), Delgado e Sun (2001) e López-Leiva e Hallstrom (2003).

2.3.2 Método Numérico

As soluções numéricas apresentam-se sendo mais vantajosas quando comparadas as soluções analíticas quando, no problema de transferência de calor, a geometria é complexa e/ou os parâmetros termofísicos, bem como as dimensões do produto, são variáveis (SILVA, W. et al., 2012). Pham (2014) afirma que a precisão do cálculo numérico depende dos dados de entrada, principalmente aqueles referente as propriedades termofísicas. Sanz et al. (1996) vão mais além, afirmando, também, da dependência, das simplificações feitas para a solução do problema, na precisão dos cálculos numéricos.

Para se obter a solução numérica, são necessárias duas etapas: uma consiste na discretização do domínio estudado e o outro passo é resolver tais equações governantes do problema físico de acordo com algum método numérico podendo ser, dentre outros: diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos.

As diferenças finitas possuem limitações para formas irregulares ou produtos não-homogêneos. Já o método de elementos finitos requer cálculos complexos mesmo para problemas muito simples. Assim, dentre esses métodos, destaca-se o de volumes finitos. Segundo Maliska (2004), ele permite associar a interpretação física à matemática. Nesse método também há conservação dos balanços das propriedades à nível dos volumes elementares.

Nas soluções numéricos, a equação da difusão pode ser escrita de duas maneiras:

$$\rho c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k(T) \nabla T] \quad (2.6)$$

e,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [k(H) \nabla T(H)] \quad (2.7)$$

A primeira é baseada no método da temperatura, sendo ela a única variável dependente do problema. Já a segunda representa o método pela entalpia e possui duas variáveis dependentes: a entalpia, como variável primária, e a temperatura, como secundária (DELGADO e SUN, 2001). Segundo Agnelli e Mascheroni (2001), a formulação pela

entalpia possui a vantagem de ser menos suscetível a mudanças bruscas nas propriedades térmicas do produto, dentro da fase de cristalização, comparado ao método que utiliza a temperatura como única variável dependente.

Deve-se ter cuidado com o tamanho do incremento de tempo da simulação. Se ele for muito grande, pode-se pular a faixa onde ocorre a perda de calor devido ao calor latente, encurtando assim o tempo total de congelamento.

Segundo Pham (2008), a principal dificuldade nas soluções numéricas dos problemas de transporte de calor está em lidar com o calor latente liberado numa estreita faixa de temperatura. O congelamento é considerado um problema de fronteira móvel onde há uma interface entre as duas fases existentes na região de congelamento, em que o calor é liberado ou absorvido. Assim, nesse tipo de problema físico, a dificuldade no tratamento numérico aumenta consideravelmente. Na tentativa de resolver esse entrave, pode-se utilizar métodos que são divididos em: métodos com malha fixa e métodos com malha em movimento.

O método com malha em movimento fornece soluções precisas e sem oscilações para a temperatura e a posição da frente de congelamento. Tem como desvantagem ser menos flexível que os métodos de malha fixa, pois considera a existência de um pico de calor específico na mudança de fase dos alimentos. Tal afirmativa só é válida para certos produtos, pois a grande maioria possui uma variação gradual dessa propriedade.

O método de malha fixa trabalha com a localização da frente de congelamento através de equações de interpolação. Ele pode ser dividido em: método do termo fonte, calor específico modificado, entalpia e semi-entálpico (PHAM, 2008).

O método do termo fonte trata o calor latente como um termo fonte e é dado pela Equação 2.8:

$$S = \rho \frac{L_s}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Sendo Δt o passo de tempo e L_s o calor latente liberado ao longo de Δt por unidade de massa. Um método iterativo é necessário para a solução pois L_s depende da mudança de

temperatura. Assim, o cálculo é feito na seguinte ordem: a nova temperatura do nodo é calculada, o termo fonte é re-estimado e finalmente as equações são novamente resolvidas para as novas temperaturas.

Nos métodos que utilizam calor específico modificado, o calor latente e sensível são agrupados, produzindo uma curva dessa propriedade onde existe um largo pico próximo a temperatura de congelamento. Deve-se ter cuidado com o tamanho do incremento de tempo da simulação. Se ele for muito grande, pode-se pular o pico, encurtando assim o tempo total de processo. Esse não é um método recomendável, pois a utilização do calor específico médio entre as temperaturas inicial e final de congelamento é sempre menor do que o pico do gráfico. Tal método pode ser utilizado, usando as Equações 2.9 a 2.11:

$$T \leq T_s, \quad c = c_{\text{congelado}} \quad (2.9)$$

$$T_s < T \leq T_L, \quad c = \frac{c_{\text{congelado}} + c_{\text{descongelado}}}{2} + \frac{Ls}{T_L - T_s} \quad (2.10)$$

$$T > T_L, \quad c = c_{\text{descongelado}} \quad (2.11)$$

Em que T_s é a temperatura final de congelamento, T_L é a temperatura inicial de congelamento, Ls é o calor latente, $c_{\text{congelado}}$ é o calor específico do produto congelado e $c_{\text{descongelado}}$ é o calor específico do produto descongelado.

O método semi-entalpico foi proposto por Pham e é considerado bem simples, pois lida bem com o pico do calor latente sem necessitar de processos iterativos. Ele utilizou o calor específico modificado, porém cada passo de tempo gera a estimativa do calor específico e a correção da temperatura. O Quadro 2.3 resume os métodos mencionados.

Existem muitos estudos utilizando as soluções numéricas para o cálculo dos tempos de congelamento. A grande maioria procura discretizar através das diferenças finitas para coordenadas conhecidas (cartesianas, cilíndricas e esféricas). Poucos estudos foram encontrados utilizando volumes finitos e não se encontrou pesquisas na área de congelamento utilizando coordenadas esferoidais prolatas na resolução do problema.

Quadro 2.3 - Métodos para tratar o calor latente nas soluções numéricas.

Método	Passo de tempo	Aplicação	Dificuldade de programação	Precisão	Velocidade
Malha Móvel	---	Pico de mudança de fase	Muito Difícil	Boa	---
Malha Fixa					
Métodos com Termo Fonte	Iteração implícita	Todos os materiais	Difícil	Bom	Baixa
Métodos com Calor específico modificado	Euler	Mudança de fase gradual	Muito Fácil	Pobre	Baixa
Métodos com Calor específico modificado	Implícito não-iterativo	Mudança de fase gradual	Fácil	Pobre	Baixa
Métodos com Calor específico modificado	Iteração implícita	Mudança de fase gradual	Fácil	Pobre	Baixa
Métodos com Entalpia	Euler	Todos os materiais	Muito Fácil	Bom	Baixa
Métodos com Entalpia	Iteração implícita	Todos os materiais	Difícil	Bom	Baixa
Método PhamSemi-Entálpico	Implícito não-iterativo	Todos os materiais	Fácil	Bom	Rápido

Fonte – Pham (2008).

Wang et al. (2007) utilizaram o método das diferenças finitas juntamente com a capacidade térmica específica para calcular os tempos de congelamento e o histórico de temperatura para fatias de pepino. Tendo validado a modelagem, fez comparações de tempos

de congelamento entre alimentos de diversas formas (placa, esfera e cilindro). As relações entre os tempos experimentais e numéricos foram consideradas ótimas.

Perussello et al. (2011) aplicaram o método das diferenças finitas utilizando da modelagem em função da entalpia para obter o histórico de temperatura de feijão verde. Eles conseguiram replicar a curva de congelamento com boa precisão, comparando dados experimentais obtidos pelos autores.

Uma modelagem mais abrangente deve levar em consideração tanto a mudança de temperatura quanto a transferência de massa. Assim, Campañone et al. (2005) trabalharam com as equações acopladas para esses dois fenômenos, devido à perda de água que ocorre no resfriamento/congelamento utilizando-se das diferenças finitas para a resolução das equações diferenciais. Eles compararam os resultados adquiridos numericamente com aqueles obtidos pela equação de Salvadori e Mascheroni (1991) e com dados experimentais. Como originalmente essa equação não considera a perda de água, os autores propuseram novos parâmetros para ela e confrontaram seus resultados com os numéricos, obtendo boa precisão. Da comparação com os dados experimentais, houve pequenos erros. Fez-se também uma comparação entre os tempos obtidos com a equação analítica utilizando parâmetros que consideram e que não consideram a desidratação, e verificaram grande discrepância nos resultados. Sendo assim, a desconsideração da perda de água pode incorrer em erros por volta de 50%. Os autores também observaram dois fatos que levam a efeitos opostos nos tempos de congelamento: (1) o decréscimo da quantidade total de calor a ser extraída devido ao calor levado pela evaporação ou sublimação e, (2) decréscimo da taxa de resfriamento devido a formação de uma camada superficial desidratada que possui baixa condutividade térmica.

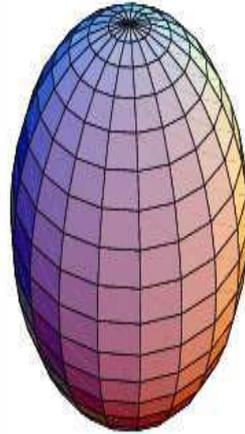
Como há poucos testes para alimentos com baixa umidade ou baixo ponto de congelamento, Pham (2014) elaborou um trabalho focado na geração de dados de tempos de congelamento em placa unidimensional. Para isso, utilizou o método das diferenças finitas, aplicado ao tratamento semi-entálpico. Com os dados gerados, fez-se o confronto com os métodos analíticos de Cleland (1984 apud Pham, 2014), Pham (1984), Pham (1986 apud Pham, 2014) e Salvadori et al. (1996) tendo proposto fatores de correção para os métodos de Pham. Analisando novamente os tempos de congelamento com o uso dos novos fatores, obteve-se bons resultados, suficientes para o uso na indústria.

2.4 O esferóide prolato e sua coordenada

Formalmente, um esferóide prolato é definido como um elipsóide de revolução gerado pela rotação de uma elipse ao redor de seu eixo maior. Logo, o sólido possui o raio polar maior do que o raio equatorial. A Figura 2.14 mostra um objeto genérico com esse formato.

Como exemplos de objetos com formas de um esferóide prolato, tem-se: bola de futebol americano e a tâmara. Um ovo simétrico pode ser aproximado para esse corpo.

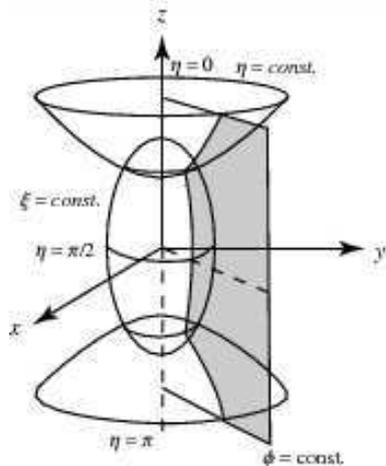
Figura 2.14 – Exemplo de um esferóide prolato.



Fonte – Weisstein (2016).

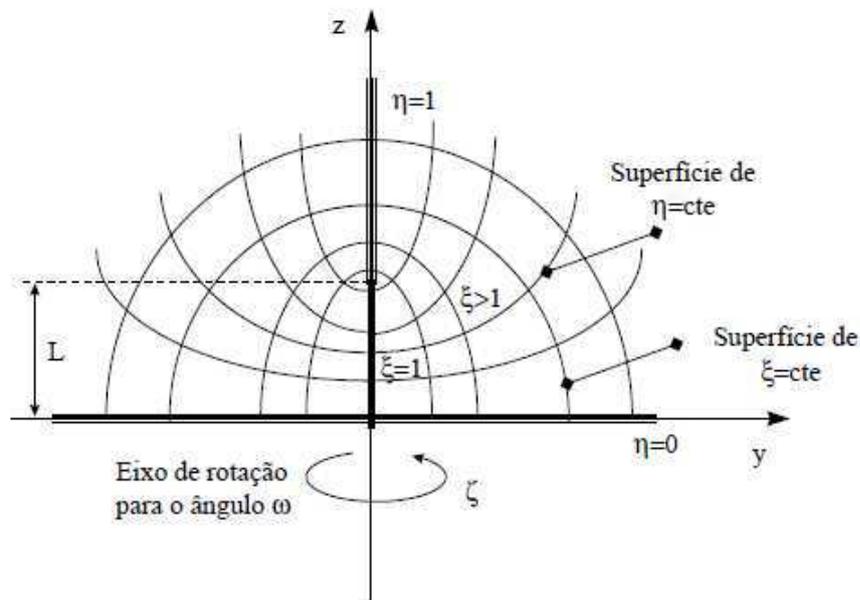
Com o objetivo de mais facilmente se trabalhar com esses tipos de objetos, é recomendado a utilização das coordenadas esferoidais prolatas, como é apresentado nas Figuras 2.15 e 2.16.

Figura 2.15 – Coordenadas esferoidais prolatas em 3D.



Fonte – Weisstein (2016).

Figura 2.16 - Coordenadas esferoidais prolatas em 2D.



Fonte – Lima, A. (1999)

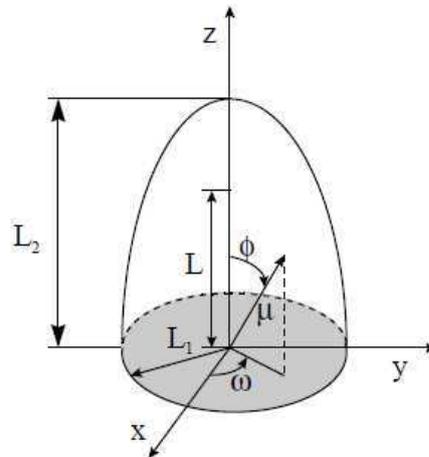
As coordenadas desse sistema de três dimensões são construídas a partir da rotação do sistema de coordenada elíptica de duas dimensões sobre o eixo focal, ou seja, o eixo z (YANG e WENG, 2011).

Nesse sistema, há duas famílias de superfícies de revolução ortogonais (BUDIMANA e TALIBB, 2011), mostradas na Figuras 2.15 e 2.16. Nela tem-se superfícies que são elipsóides de revolução, representadas por linhas ξ constante (Figura 2.15), variando de $\xi_i = 1$ até $\xi = L_2/L$ (Figura 2.16).

A linha reta unindo a origem $z = 0$ até o ponto focal ($z = L$) é representada pela superfície $\xi = 1$. Tem-se também superfícies que são hiperbolóides de revolução, representados por linhas η constantes variando de $\eta_i = 0$ até $\eta = 1$. Parte do eixo $z > L$ é representa pela superfície $\eta = 1$. Por último, tem-se planos verticais, representados por φ constante passando pelo eixo z e perpendiculares ao plano xy , formando o ângulo ω com o eixo x (YANG e WENG, 2011; LIMA, A., 1999).

A Figura 2.17 mostra as relações possíveis entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas esferoidal prolato (μ , φ , ω).

Figura 2.17 – Relação coordenada cartesiana-esferoidal prolata.



Fonte – Lima, A. (1999).

Na Figura 2.17, L é o comprimento focal o qual é medido a partir da origem da coordenada. Seu valor é obtido através da equação: $L = \sqrt{L_2^2 - L_1^2}$, sendo L_1 e L_2 , os eixos menor e maior, respectivamente. O parâmetro μ representa um vetor posição o qual indica a posição de uma superfície representada por um elipsóide de revolução. ϕ representa o ângulo desse vetor em relação a coordenada z . Essas duas variáveis, segundo Budimana e Talibb (2011) são chamadas de variáveis radial e angular, respectivamente. Por fim, ω é o ângulo feito entre a projeção do vetor no plano xy em relação a coordenada x .

CAPÍTULO 3

MATERIAL E MÉTODOS

Esse capítulo apresentará o desenvolvimento da modelagem matemática a partir do conceito de coordenadas generalizadas, sendo procedido pela forma como foi feita a discretização e aplicação do método dos volumes finitos. Finalizando, serão apresentados os testes necessários quando se utiliza um método numérico bem como quais dados foram utilizados na simulação do problema.

3.1 Modelagem matemática

O congelamento é um problema não trivial, principalmente pela não linearidade existente na região de mudança de fase. Diversos são os métodos onde se procura transformar a física em equações matemáticas. Os métodos analíticos são aplicáveis a meios contínuos e auxiliam na elaboração de soluções numéricas mais completas porém, para se ter um resultado possível, diversas simplificações devem ser feitas. Os métodos numéricos, apesar de só serem aplicados a meios discretos, não lidam com limitações quanto à forma, mudança de fase, mudança de propriedades, entre outros fatores. Ele pode explicar bem um problema físico, mas necessita de conhecimento de linguagem computacional do usuário que deseja sua implementação. Para a obtenção da equação regente do problema proposto, o qual consiste em transferência de calor

bidimensional no processo de resfriamento e congelamento com mudança de fase em coordenadas esferoidais prolatas, foi utilizado o método dos volumes finitos juntamente com o conceito de coordenadas generalizadas.

3.1.1 A equação da difusão

A metodologia utilizada para encontrar a equação de transferência de calor em coordenadas esferoidais prolatas foi realizada como se segue (MALISKA, 2004; LIMA, A., 1999).

Para a seguinte transformação de coordenadas, tem-se:

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

$$\eta = \eta(x, y, z, t) \quad (3.2)$$

$$\gamma = \gamma(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

$$\tau = t \quad (3.4)$$

Assim, sendo uma malha fixa no tempo, pode-se escrever a equação geral de conservação de uma magnitude da forma apresentada pela Equação 3.5:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\lambda U \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\lambda V \Phi) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\lambda W \Phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\alpha_{31} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) - P^\Phi + \frac{S}{J} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Em que:

$$U = \frac{\xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w}{J} \quad (3.6)$$

$$V = \frac{\eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w}{J} \quad (3.7)$$

$$W = \frac{\gamma_t + \gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w}{J} \quad (3.8)$$

são os termos usados quando se tem um problema advectivo, o que não acontece no presente trabalho. Dessa forma, as derivadas referente a eles deixam de existir na Equação 3.5. J representa o jacobiano de transformação e seu resultado é obtido através da determinante da seguinte matriz, Equação 3.9:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Em que x , y e z são as relações entre as coordenadas cartesianas e a coordenada que se deseja trabalhar, no presente caso, o sistema de coordenadas esferoidais prolatas. Quando não se conhece analiticamente as relações entre os sistemas, as derivadas da Equação 3.9 devem ser resolvidas de forma numérica. No presente trabalho, essas correlações entre esses sistemas de coordenadas já são conhecidas e dadas pelas Equações 3.10 a 3.12: (HAJI-SHEIKH; SPARROW, 1966 apud LIMA, A., 1999)

$$x = L \sinh(\mu) \sin(\phi) \cos(\omega) \quad (3.10)$$

$$y = L \sinh(\mu) \sin(\phi) \sin(\omega) \quad (3.11)$$

$$z = L \cosh(\mu) \cos(\phi) \quad (3.12)$$

Porém, a forma apresentada pelas Equações 3.10 a 3.12 não são fáceis de serem trabalhadas. Assim, utiliza-se das substituições de variáveis dadas pelas Equações 3.13 a-c:

$$\begin{array}{lll} \xi = \cosh(\mu) & \eta = \cos(\phi) & \gamma = \cos(\omega), \quad (3.13 \text{ a-c}) \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \end{array}$$

e substituindo essas novas variáveis diretamente nas Equações 3.10, 3.11 e 3.12, chega-se as relações entre os sistemas de coordenadas cartesiano e esferoidal prolato (MAGNUS et al., 1966 apud LIMA, A., 1999):

$$x = L \sqrt{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)} \gamma \quad (3.14)$$

$$y = L \sqrt{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)(1 - \gamma^2)} \quad (3.15)$$

$$z = L \xi \eta \quad (3.16)$$

Nas Equações 3.13 a-c, ξ , η , γ possuem como domínio:

$$\begin{array}{ccc} 1 \leq \xi \leq \frac{L_2}{L} & 0 \leq \eta \leq 1 & 0 \leq \omega \leq 2\pi, \quad (3.17 \text{ a-c}) \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \end{array}$$

Então, aplicando as derivadas da Equação 3.9 nas Equações 3.14, 3.15 e 3.16 e tirando a determinante da matriz, tem-se como resultado para a inversa do jacobiano:

$$J^{-1} = \frac{L^3(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3.18)$$

Os coeficientes α_{ij} são assim determinados, como descrito no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Valores para alfa.

$\alpha_{11} = \frac{V_{11}}{J^2}$	$\alpha_{22} = \frac{V_{22}}{J^2}$	$\alpha_{33} = \frac{V_{33}}{J^2}$
$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{V_{12}}{J^2} \text{ ou } \frac{V_{21}}{J^2}$	$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{V_{13}}{J^2} \text{ ou } \frac{V_{31}}{J^2}$	$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{V_{23}}{J^2} \text{ ou } \frac{V_{32}}{J^2}$

Os coeficientes V_{ij} são dados pelas Equações 3.19 a 3.21, os quais são a soma dos quadrados das métricas de transformação (Quadro 3.2):

$$V_{11} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 \quad (3.19)$$

$$V_{22} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 \quad (3.20)$$

$$V_{33} = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2 \quad (3.21)$$

Quadro 3.2 – Métricas de transformação.

	$\partial\xi$	$\partial\eta$	$\partial\gamma$
∂x	$J\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\gamma} - \frac{\partial y}{\partial\gamma}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)$	$-J\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\gamma} - \frac{\partial y}{\partial\gamma}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)$	$J\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)$
∂y	$-J\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\gamma} - \frac{\partial x}{\partial\gamma}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)$	$J\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\gamma} - \frac{\partial x}{\partial\gamma}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)$	$-J\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)$
∂z	$J\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\gamma} - \frac{\partial x}{\partial\gamma}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)$	$-J\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\gamma} - \frac{\partial x}{\partial\gamma}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)$	$J\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)$

Fonte – Maliska (2004).

Substituindo todas as equações do Quadro 3.2 nas Equações 3.19, 3.20 e 3.21 e essas substituídas nos alfas dados pelo Quadro 3.1, desenvolvendo as derivadas e fazendo algumas manipulações, chega-se as Equações 3.22 a 3.24:

$$\alpha_{11} = \frac{L^4(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)}{1 - \gamma^2} \quad (3.22)$$

$$\alpha_{22} = \frac{L^4(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}{1 - \gamma^2} \quad (3.23)$$

$$\alpha_{33} = \frac{L^4(\xi^2 - \eta^2)^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad (3.24)$$

Substituindo as Equações 3.22 a 3.24 na Equação 3.5, já desconsiderando os termos cruzados devido a ortogonalidade da malha (LIMA, A., 1999), tem-se a Equação 3.25:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\lambda\Phi L^3 \frac{(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{L^4(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)}{1 - \gamma^2} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{L^3(\xi^2 - \eta^2)} \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{L^4(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}{1 - \gamma^2} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{L^3(\xi^2 - \eta^2)} \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\frac{L^4(\xi^2 - \eta^2)^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{L^3(\xi^2 - \eta^2)} \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right) + L^3 \frac{(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} S \end{aligned} \quad (3.25)$$

Eliminando os termos em comum, e realizando outras manipulações matemáticas, chega-se a Equação 3.26:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau}(\lambda\Phi) &= \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{L^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{L}{1-\gamma^2} \sqrt{1-\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2-1)\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \\
&+ \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{L^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{L}{1-\gamma^2} \sqrt{1-\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1-\eta^2)\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \\
&+ \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{L^3(\xi^2-\eta^2)} \frac{L(\xi^2-\eta^2)}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sqrt{1-\gamma^2}\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \\
&+ L^3 \frac{(\xi^2-\eta^2)}{\sqrt{1-\gamma^2}} S
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Adicionalmente, eliminando os termos em comum na Equação 3.26, chega-se a equação aplicada a um esferóide prolato para um problema puramente difusivo com geração de energia (termo fonte):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau}(\lambda\Phi) &= \frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2-1)\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{L^2(\xi^2-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1-\eta^2)\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \\
&+ \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{L^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sqrt{1-\gamma^2}\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) + L^3 \frac{(\xi^2-\eta^2)}{\sqrt{1-\gamma^2}} S
\end{aligned} \tag{3.27}$$

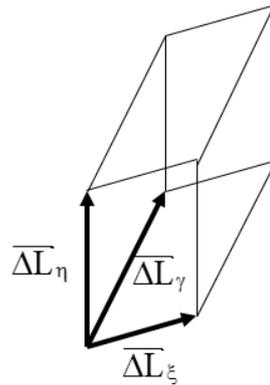
O cálculo das áreas de troca de calor, necessárias para a solução do problema, podem ser encontradas através de vetores (Figura 3.1) que definem essas áreas (Figura 3.2) no novo sistema de coordenadas. Dessa forma define-se:

$$\overrightarrow{\Delta L_\xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{k} \right) \Delta \xi \tag{3.28}$$

$$\overrightarrow{\Delta L_\eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{k} \right) \Delta \eta \tag{3.29}$$

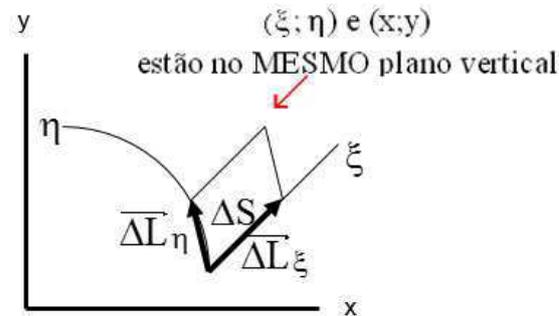
$$\overrightarrow{\Delta L_\gamma} = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \gamma} \vec{k} \right) \Delta \gamma \tag{3.30}$$

Figura 3.1 – Vetores no sistema de coordenadas generalizadas.



Fonte – Silva, W. (2015)

Figura 3.2 – Área no sistema de coordenadas generalizadas.



Fonte – Silva, W. (2015)

Para obter as áreas, basta fazer o produto vetorial entre os vetores citados e calcular os seus módulos. O Quadro 3.3 apresenta, resumidamente, esses valores:

Quadro 3.3 – Áreas de troca de calor no novo sistema de coordenadas.

ÁREA	OPERAÇÃO	RESULTADO
dS_ξ	$ \overrightarrow{\Delta L_\eta} \times \overrightarrow{\Delta L_\gamma} $	$\frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)} \sqrt{(\xi^2 - 1)}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \Delta \eta \Delta \gamma$
dS_η	$ \overrightarrow{\Delta L_\xi} \times \overrightarrow{\Delta L_\gamma} $	$\frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)} \sqrt{(1 - \eta^2)}}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \Delta \xi \Delta \gamma$
dS_γ	$ \overrightarrow{\Delta L_\xi} \times \overrightarrow{\Delta L_\eta} $	$\frac{L^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \Delta \xi \Delta \eta$

O cálculo do volume no novo sistema de coordenadas (Equação 3.31) é feito realizando o produto misto entre os vetores definidos anteriormente o qual recairá no inverso do jacobiano de transformação, ou seja:

$$\Delta V = |\overrightarrow{\Delta L_\xi} \cdot (\overrightarrow{\Delta L_\eta} \times \overrightarrow{\Delta L_\gamma})| = \frac{L^3(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \quad (3.31)$$

É de extrema importância o conhecimento do gradiente para a coordenada utilizada. Lima, A. (1999) apresenta as relações matemáticas e o desenvolvimento necessário para sua obtenção, onde tem-se como resposta a Equação 3.32:

$$\nabla \Phi = \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} ; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} ; \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \quad (3.32)$$

3.1.2 A formulação matemática aplicada ao problema de resfriamento e congelamento

Para a obtenção da formulação matemática de interesse, retorna-se a equação da difusão para uma coordenada generalizada ortogonal, o qual agora apresenta-se pela Equação 3.33:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(D_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) + \frac{S}{J} \quad (3.33)$$

O termo fonte da equação, o qual representa a liberação de calor latente devido a formação dos cristais de gelo é apresentado pela Equação 3.34, a qual foi proposta por Limeira (2003):

$$S = \rho L_s \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (3.34)$$

Logo, o termo fonte é função da densidade do material, do calor latente de solidificação e da taxa de cristalização. O parâmetro f_s é a fração de gelo presente no material num determinado instante de tempo e seu valor é obtido através da Equação 3.35, que apresenta uma interpolação:

$$f_s = \frac{T_L - T}{T_L - T_S} \quad (3.35)$$

Em que T_L é a temperatura de início de congelamento, T_S a temperatura de fim do congelamento e T a temperatura num dado instante de tempo qualquer durante a mudança de fase. Como o problema é a transferência de calor durante o resfriamento, congelamento e pós-

congelamento, sendo um problema puramente difusivo, as seguintes variáveis são substituídas por:

$$\lambda = \rho C_p \quad (3.36)$$

$$\Phi = T \quad (3.37)$$

$$\Gamma^\Phi = k \quad (3.38)$$

Os termos D_{ij} aglutinam os valores do jacobiano, do Γ^Φ (nesse caso representa a condutividade térmica), bem como os parâmetros α_{ij} (ver Equação 3.5), são dados pelas Equações 3.39 a 3.41:

$$D_{11} = k J \alpha_{11} = k \frac{L(\xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3.39)$$

$$D_{22} = k J \alpha_{22} = k \frac{L(1 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3.40)$$

$$D_{33} = k J \alpha_{33} = k \frac{L(\xi^2 - \eta^2)\sqrt{1 - \gamma^2}}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad (3.41)$$

Assim, substituindo todos os parâmetros na Equação 3.33, obtém-se a Equação 3.42:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\rho \left(C_p + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \frac{L^3(\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} T \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(D_{33} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

As condições iniciais e de contorno para o problema são:

- Condição inicial: $T(\xi, \eta, \gamma, t = 0) = T_0$;
- Condição de simetria nos planos centrais: o fluxo de calor é nulo;
- Condição de contorno: $-k \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \frac{L^2}{L}} = h \left[T \left(\xi = \frac{L^2}{L}, \eta, \gamma, t \right) - T_{amb} \right]$

3.1.3 Procedimento numérico

3.1.3.1 Discretização da equação governante

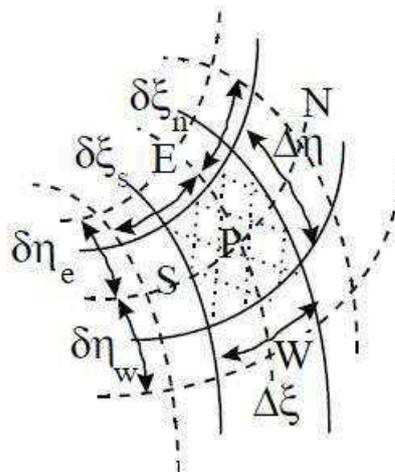
Para a solução numérica da equação da energia, utilizou-se o método dos volumes finitos. A escolha desse método deve-se a facilidade em visualizar a aplicação da matemática a física. Soma-se o fato também de ser um método onde o fluxo de calor é conservativo.

Os volumes finitos exige a integração da Equação 3.42 no espaço e no tempo. Dessa forma, para uma situação bidimensional, tem-se a Equação 3.43:

$$\begin{aligned} & \iint_{V_t} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\rho \left(C_p + \frac{L_s}{T_L - T_s} \right) \frac{L^3 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} T \right] \right) dt dV \\ &= \iint_{V_t} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) dt dV + \iint_{V_t} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) dt dV \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde V é o volume do volume de controle em estudo, como mostrado na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Volume de controle bidimensional.



Fonte – Lima, A. (1999).

As derivadas no cálculo numérico são resolvidas através de sua aproximação numérica. Para tanto, utilizou-se a aproximação de derivadas centrais para aquelas inerentes ao espaço.

Sendo assim, chega-se as Equações 3.44 e 3.45, onde θ define em qual instante de tempo a temperatura é considerada:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_p = \frac{\left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_n^\theta - \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s^\theta}{\Delta \xi} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_p = \frac{\left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_e^\theta - \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w^\theta}{\Delta \eta} \quad (3.45)$$

Substituindo as Equações 3.44 e 3.45 na Equação 3.43 e integrando no espaço, chega-se a Equação 3.46:

$$\begin{aligned} & \int_t \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\rho \left(C_p + \frac{L_s}{T_L - T_S} \right) \frac{L^3 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} T \right] \right\} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \, dt \\ &= \int_t \left[\frac{\left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_n^\theta - \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s^\theta}{\Delta \xi} \right] \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \, dt \\ &+ \int_t \left[\frac{\left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_e^\theta - \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w^\theta}{\Delta \eta} \right] \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \, dt \end{aligned} \quad (3.46)$$

As derivadas espaciais dependem do instante de tempo em que estão sendo calculadas. Para resolver tal problema, existem três formulações: a explícita ($\theta = 0$), a implícita ($0 < \theta < 1$) e a totalmente implícita ($\theta = 1$). A formulação explícita utiliza de dados no passado para estimar um dado futuro e tem como desvantagem ser condicionalmente instável. A implícita utiliza de dados no passado e do futuro para estimar um dado no futuro. Por fim, a formulação totalmente implícita utiliza de um dado no passado para estimar os dados no futuro e tem como vantagem ser incondicionalmente estável (é possível utilizar qualquer passo de tempo). Por causa disso, utilizou-se tal método, ou seja, $\theta = 1$ (avaliado no tempo final). Assim, chega-se as Equações 3.47 a 3.50, as quais são aproximações de derivadas:

$$D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n^\theta = D_{11} \left(\frac{T_N - T_P}{\delta \xi_n} \right) \quad (3.47)$$

$$D_{11} \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_s^{\theta} = D_{11} \left(\frac{T_P - T_S}{\delta \xi_s} \right) \quad (3.48)$$

$$D_{22} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_e^{\theta} = D_{22} \left(\frac{T_E - T_P}{\delta \eta_e} \right) \quad (3.49)$$

$$D_{22} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_w^{\theta} = D_{22} \left(\frac{T_P - T_W}{\delta \eta_w} \right) \quad (3.50)$$

Substituindo as Equações 3.47 a 3.50 na Equação 3.46, realizando a integração temporal, dividindo por Δt , substituindo as Equações 3.39 a 3.41 e colocando os termos em comum, chega-se a Equação 3.51, possuindo um formato mais compacto:

$$A_P T_P = A_N T_N + A_S T_S + A_E T_E + A_W T_W + B T_P^0 \quad (3.51)$$

Os termos A_i e B são apresentados no Quadro 3.4:

Quadro 3.4 – Valores de A_i e B para volumes de controle internos.

$A_N = L (\xi_n^2 - 1) k_n \frac{\Delta \eta}{\delta \xi_n}$	$A_S = L (\xi_s^2 - 1) k_s \frac{\Delta \eta}{\delta \xi_s}$
$A_E = L (1 - \eta_e^2) k_e \frac{\Delta \xi}{\delta \eta_e}$	$A_W = L (1 - \eta_w^2) k_w \frac{\Delta \xi}{\delta \eta_w}$
$A_P = \left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + A_N + A_S + A_E + A_W$	
$B = \left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta$	

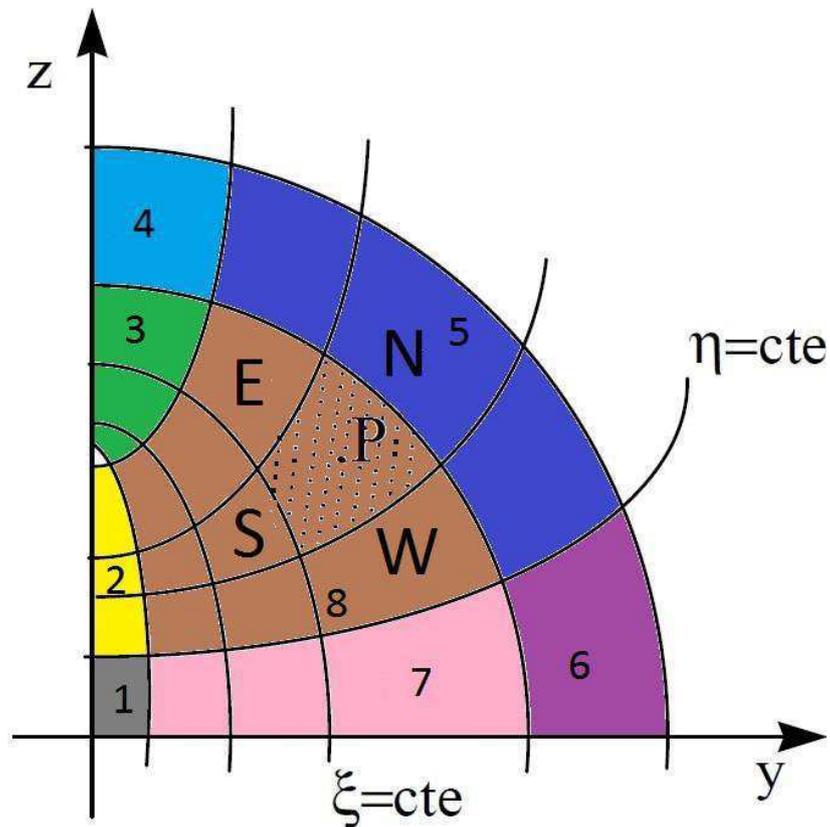
Como o estudo é feito em um plano $\gamma = \text{cte}$ (formulação bidimensional), os termos $\sqrt{1 - \gamma^2}$, que aparecem no denominador podem ser eliminados fazendo $\gamma = 0$ e $\Delta \gamma$ vale 1.

A Equação 3.51 juntamente com os valores do Quadro 3.4 é válida somente para os volumes de controle internos (nº 8, Figura 3.4) durante o período de congelamento. Nos períodos de pré e pós congelamento, o calor latente (Ls) é igual a zero.

O domínio analisado foi um plano (Figura 3.4) a qual equivale a $\frac{1}{4}$ de todo o objeto em estudo (visto em duas dimensões). Isso só é possível devido a simetria física presente no

problema. Assim, foram identificados oito tipos de volumes de controle, cada um se diferenciando de acordo com a condição de contorno a qual sua fronteira está sujeita. A indicação desses volumes de controle é apresentada na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Tipos de volumes de controle usados nesta pesquisa.



Estão presentes dois tipos de condição de contorno: a de simetria, encontrada nos eixos z e y , e a convectiva, encontrada nas fronteiras ao norte dos volumes 4, 5 e 6. A condição de simetria, aplicável a todos os volumes menos o 5 e o 8, indica que o fluxo atravessando essa fronteira é igual a zero.

Já a condição de contorno aplicável a fronteira norte dos volumes 4, 5 e 6, mostra a ação do meio sobre o objeto estudado devido ao fluxo convectivo.

O Quadro 3.5 apresenta de forma sintetizada todas as condições aplicáveis aos vários tipos de volume de controle encontrados nesse problema.

Quadro 3.5 – Volumes de controle e suas condições de contorno.

VOLUME DE CONTROLE	CONDIÇÃO DE CONTORNO	EQUAÇÃO
1	SIMETRIA	$\left[L (\xi^2 - 1) k \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_s = 0$
	SIMETRIA	$\left[L (1 - \eta^2) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w = 0$
2	SIMETRIA	$\left[L (\xi^2 - 1) k \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_s = 0$
3	SIMETRIA	$\left[L (1 - \eta^2) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e = 0$
4	CONVECTIVO	$\left[-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_n = h_n (T_n - T_{amb})$
	SIMETRIA	$\left[L (1 - \eta^2) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e = 0$
5	CONVECTIVO	$\left[-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_n = h_n (T_n - T_{amb})$
6	CONVECTIVO	$\left[-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_n = h_n (T_n - T_{amb})$
	SIMETRIA	$\left[L (1 - \eta^2) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w = 0$
7	SIMETRIA	$\left[L (1 - \eta^2) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w = 0$
8	VOLUMES DE CONTROLE INTERNOS	-

As equações que regem os volumes não-internos são obtidas de uma forma um pouco diferente em relação aos internos. Para obtê-las, é necessário substituir as condições de contorno na Equação 3.42 e em seguida desenvolver da forma como feito para o volume de controle interno. Como exemplo e também para apresentar uma forma mais compacta e fácil de aplicar essas condições, desenvolveu-se a discretização para o volume do tipo 1. A Equação 3.52, apresenta uma forma mais sintetizada da Equação 3.46, quando já feitas as integrações no espaço e no tempo.

$$\begin{aligned} & \left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p \\ & = \left[\left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta \eta \\ & + \left[\left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta \xi + B \end{aligned} \quad (3.52)$$

Assim, basta aplicar as condições de simetria apresentadas no Quadro 3.5, ou seja:

$$\left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s = \left(L (\xi^2 - 1) k \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s = 0 \quad (3.53)$$

$$\left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w = \left(L (1 - \eta^2) k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w = 0 \quad (3.54)$$

Fica fácil perceber, comparando as Equações 3.52 e 3.51, que os termos A_s e A_w serão iguais a zero. O resultado completo é apresentado nos Quadros 3.6 a 3.8.

Os volumes de controle 4, 5 e 6 merecem melhor atenção para o seu desenvolvimento devido ao problema convectivo. Para a resolução, utilizar-se-á os volumes do tipo 5 como exemplo. Pode-se escrever a Equação 3.52 de uma forma mais apropriada para a aplicação dessa condição de contorno.

$$\begin{aligned} & \left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p \\ & = \left[\Phi'' dS_\xi - \left(D_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s^\theta \right] \Delta \eta + \left[\left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_e^\theta - \left(D_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w^\theta \right] \Delta \xi + B \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde Φ'' é o fluxo convectivo por unidade de área. Ele é definido por:

$$\Phi'' = -\frac{k_n}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \left(\frac{T_n - T_p}{\delta \xi_n} \right) = h_n (T_n - T_{amb}) \quad (3.56)$$

Para determiná-lo, primeiramente iguala-se o segundo e o terceiro termo da igualdade, faz-se a distributiva, coloca os termos em relação a T_n em um lado da igualdade e de T_{amb} e T_p do outro, chegando a seguinte solução:

$$T_n = \frac{\frac{k_n}{L \delta \xi_n} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} T_p}{\left(\frac{k_n}{L \delta \xi_n} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_n \right)} + \frac{h_n T_{amb}}{\left(\frac{k_n}{L \delta \xi_n} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_n \right)} \quad (3.57)$$

Com esse resultado, o próximo passo é igualar o primeiro e o terceiro termo da igualdade da Equação 3.56, substituir o valor de T_n e com algumas manipulações algébricas, chegar-se-á Equação 3.58:

$$\Phi'' = \frac{T_p - T_{amb}}{(\widehat{Q} + \widehat{W})} \quad (3.58)$$

Em que \widehat{W} e \widehat{Q} são dados pelas Equações 3.59 e 3.60, respectivamente:

$$\widehat{W} = \frac{L \delta \xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}} \quad (3.59)$$

$$\widehat{Q} = \frac{1}{h_n} \quad (3.60)$$

Substituindo então esse Φ'' na Equação 3.55, juntamente com o resultado para a área elementar $d\xi$ obtida no Quadro 3.3, chegar-se-á equação desejada para o volume de controle do tipo 5. Para os tipos 4 e 6, basta seguir esses passos juntamente com que foi feito para condição de simetria. Os resultados de todos os volumes de controle são apresentados de forma sintetizada nos Quadros 3.6 a 3.8.

Quadro 3.6 – Coeficientes A_p .

Tipo de volume de controle	A_p
1	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + A_S + A_E$
2	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + A_N + A_E + A_W$
3	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + A_N + A_S + A_W$
4	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + \frac{L^2 \sqrt{(\xi_n^2 - \eta_p^2)} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)} \Delta \eta}{\frac{1}{h_n} + \frac{L \delta \xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}} + A_S + A_W$
5	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + \frac{L^2 \sqrt{(\xi_n^2 - \eta_p^2)} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)} \Delta \eta}{\frac{1}{h_n} + \frac{L \delta \xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}} + A_S + A_E + A_W$
6	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + \frac{L^2 \sqrt{(\xi_n^2 - \eta_p^2)} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)} \Delta \eta}{\frac{1}{h_n} + \frac{L \delta \xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}} + A_S + A_E$
7	$\left(C_{p_p} + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta + A_N + A_S + A_E$

Quadro 3.7 – Coeficientes A_N , A_S , A_E , A_W .

Tipo de volume de controle	A_N	A_S	A_E	A_W
1	0	$L_s(\xi_s^2 - 1)k_s \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_s}$	$L_e(1 - \eta_e^2)k_e \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_e}$	0
2	$L_n(\xi_n^2 - 1)k_n \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_n}$	0	$L_e(1 - \eta_e^2)k_e \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_e}$	$L_w(1 - \eta_w^2)k_w \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_w}$
3	$L_n(\xi_n^2 - 1)k_n \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_n}$	$L_s(\xi_s^2 - 1)k_s \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_s}$	0	$L_w(1 - \eta_w^2)k_w \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_w}$
4	0	$L_s(\xi_s^2 - 1)k_s \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_s}$	0	$L_w(1 - \eta_w^2)k_w \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_w}$
5	0	$L_s(\xi_s^2 - 1)k_s \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_s}$	$L_e(1 - \eta_e^2)k_e \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_e}$	$L_w(1 - \eta_w^2)k_w \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_w}$
6	0	$L_s(\xi_s^2 - 1)k_s \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_s}$	$L_e(1 - \eta_e^2)k_e \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_e}$	0
7	$L_n(\xi_n^2 - 1)k_n \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_n}$	$L_s(\xi_s^2 - 1)k_s \frac{\Delta\eta}{\delta\xi_s}$	$L_e(1 - \eta_e^2)k_e \frac{\Delta\xi}{\delta\eta_e}$	0

Quadro 3.8 – Coeficientes B

Tipo de volume de controle	B
1	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0$
2	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0$
3	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0$
4	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0 + \frac{T_{amb}}{\frac{1}{h_n} + \frac{L\delta\xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}} L^2 \sqrt{(\xi_n^2 - \eta_p^2)} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)} \Delta \eta$
5	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0 + \frac{T_{amb}}{\frac{1}{h_n} + \frac{L\delta\xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}} L^2 * \sqrt{(\xi_n^2 - \eta_p^2)} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)} \Delta \eta$
6	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0 + \frac{T_{amb}}{\frac{1}{h_n} + \frac{L\delta\xi_n}{k_n \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}} L^2 \sqrt{(\xi_n^2 - \eta_p^2)} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)} \Delta \eta$
7	$\left(C_{p_p}^0 + \frac{Ls}{T_L - T_S} \right) \rho_p^0 \frac{L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \Delta \xi \Delta \eta T_p^0$

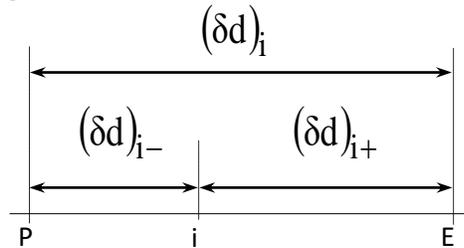
3.1.3.2 Estimativa das propriedades de transporte na interface

No método dos volumes finitos, as propriedades (k , ρ , c_p , dentre outras) são conhecidas somente no ponto interno central dos volumes. Existe um problema quando trata-se da condutividade térmica, pois ela é aplicável apenas nas fronteiras desses volumes. Assim, é necessário utilizar de alguma aproximação para estimar k nas fronteiras dos volumes de controle. (Patankar, 1980 apud Lima, A. 1999), propôs a Equação 3.61:

$$k_i = \left(\frac{1 - \hat{f}_i}{k_P} + \frac{\hat{f}_i}{k_E} \right) \quad (3.61)$$

Tal aproximação leva em conta a influência que cada ponto próximo à fronteira faz sobre ela: quanto mais próximo ao ponto ela estiver, mais assumirá valores próximo a ele (Figura 3.5). O fator que dita essa regra é o \hat{f}_i , também chamado de fator de interpolação, dado por $\hat{f}_i = \frac{\delta d_{i+}}{\delta d_{i-}}$.

Figura 3.5 – Estimativa da condutividade térmica.



Fonte – Silva, M. (2005).

Então, de acordo com a Figura 3.5, caso a malha seja uniforme e a interface esteja localizado no ponto médio entre dois pontos, o fator de interpolação assumirá o valor de 0,5, e portanto, k é calculado pela média harmônica de k_E e k_P , ou seja:

$$k_i = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (3.62)$$

A aproximação proposta por Patankar é fisicamente realista pois, caso a condutividade térmica k_P ou k_E sejam iguais a zero, a condutividade da interface também o será, indicando a não existência de fluxo.

3.1.3.3 Estimativa das temperaturas nos pontos de simetria e fronteira

Para a simulação, também é necessário ter o conhecimento das temperaturas nas paredes dos volumes de controle afetados pela condição de simetria e representadas pelas superfícies $\eta = 1$, $\eta = 0$, $\xi = 1$ e $\xi = L_2/L$. Essas temperaturas não são calculadas pelas equações já apresentadas. Primeiramente calcula-se tais equações e então com os resultados, estima-se os valores das temperaturas da fronteira. Para tanto, Lima, A. (1999) propôs os seguintes cálculos dessas estimativas:

a) Para os pontos em $\eta = 0$ ($0 < y < L_1$)

O fluxo atravessando a fronteira oeste e chegando ao ponto é o mesmo que deixa esse mesmo ponto atravessando a fronteira leste, dividido pela área (o qual tem-se o fluxo por unidade de área).

Assim:

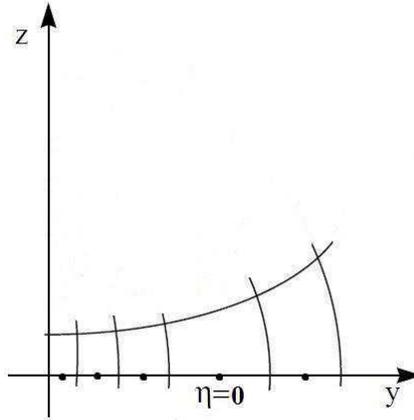
$$\left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_e = \left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w \quad (3.63)$$

Em que a temperatura de interesse é referente a fronteira oeste (T_w). Fazendo as aproximações de derivadas, realizando algumas manipulações algébricas, isolando T_w e, por fim eliminando os termos em comum, chega-se a Equação 3.64.

$$T_w = \left(\frac{\frac{\sqrt{(1-\eta_e^2)} k_e}{\sqrt{(\xi_e^2-\eta_e^2)} \delta \eta_e}}{\frac{\sqrt{(1-\eta_w^2)} k_w}{\sqrt{(\xi_w^2-\eta_w^2)} \delta \eta_w}} + 1 \right) T_P - \left(\frac{\frac{\sqrt{(1-\eta_e^2)} k_e}{\sqrt{(\xi_e^2-\eta_e^2)} \delta \eta_e}}{\frac{\sqrt{(1-\eta_w^2)} k_w}{\sqrt{(\xi_w^2-\eta_w^2)} \delta \eta_w}} \right) T_E \quad (3.64)$$

A Figura 3.6 apresenta os pontos para os quais a Equação 3.64 é válida.

Figura 3.6 – Pontos onde a Equação 3.64 é válida.



b) Para os pontos em $\eta = 1$ ($L < y < L_2$)

O mesmo aplicado a $\eta = 0$, é aplicado a $\eta = 1$, logo:

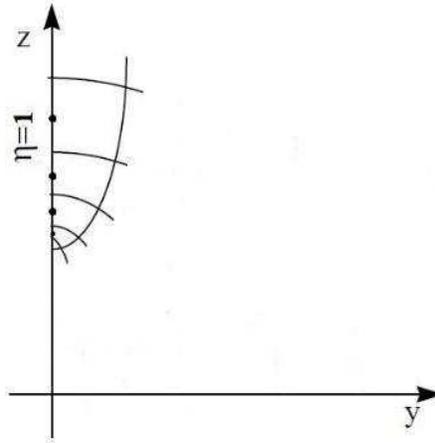
$$\left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_e = \left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \Big|_w \quad (3.65)$$

Fazendo as aproximações de derivadas, realizando algumas manipulações algébricas, isolando T_e e, por fim eliminando os termos em comum, chega-se a Equação 3.66:

$$T_e = \left(\frac{\frac{\sqrt{(1-\eta_w^2)} k_w}{\sqrt{(\xi_w^2-\eta_w^2)} \delta \eta_w}}{\frac{\sqrt{(1-\eta_e^2)} k_e}{\sqrt{(\xi_e^2-\eta_e^2)} \delta \eta_e}} + 1 \right) T_P - \left(\frac{\frac{\sqrt{(1-\eta_w^2)} k_w}{\sqrt{(\xi_w^2-\eta_w^2)} \delta \eta_w}}{\frac{\sqrt{(1-\eta_e^2)} k_e}{\sqrt{(\xi_e^2-\eta_e^2)} \delta \eta_e}} \right) T_W \quad (3.66)$$

A Figura 3.7 apresenta os pontos para os quais a Equação 3.66 é válida.

Figura 3.7 – Pontos onde a Equação 3.66 é válida.



c) Para os pontos em $\xi = 1$ ($0 < z < L$)

O fluxo atravessando a fronteira sul e chegando ao ponto é o mesmo que deixa esse mesmo ponto atravessando a fronteira norte, dividido pela área (o qual tem-se o fluxo por unidade de área). Assim, pode-se escrever a Equação 3.67:

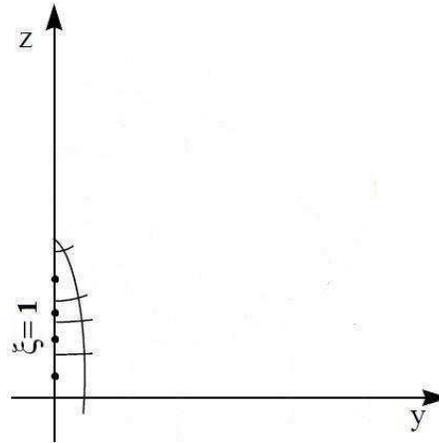
$$\left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_n = \left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_s \quad (3.67)$$

Fazendo as aproximações de derivadas, realizando algumas manipulações algébricas, isolando T_s e, por fim eliminando os termos em comum, chega-se a Equação 3.68:

$$T_s = \left(\frac{\frac{\sqrt{(\xi_n^2 - 1)} k_n}{\sqrt{(\xi_n^2 - \eta_n^2)} \delta \xi_n}}{\frac{\sqrt{(\xi_s^2 - 1)} k_s}{\sqrt{(\xi_s^2 - \eta_s^2)} \delta \xi_s}} + 1 \right) T_P - \left(\frac{\frac{\sqrt{(\xi_n^2 - 1)} k_n}{\sqrt{(\xi_n^2 - \eta_n^2)} \delta \xi_n}}{\frac{\sqrt{(\xi_s^2 - 1)} k_s}{\sqrt{(\xi_s^2 - \eta_s^2)} \delta \xi_s}} \right) T_N \quad (3.68)$$

A Figura 3.8 apresenta os pontos para os quais a Equação 3.68 é válida.

Figura 3.8 – Pontos onde a Equação 3.68 é válida.



d) Para os pontos em $\xi = L_2/L$

Para esses pontos, tem-se a condição de contorno convectiva. Para estimar o valor da temperatura no contorno, diz-se que o fluxo saindo do ponto até a fronteira norte é igual ao fluxo convectivo saindo da fronteira até o meio. Assim:

$$\left(-\frac{k}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Bigg|_n = h_n (T_n - T_{amb}) \quad (3.69)$$

Fazendo as aproximações de derivadas, realizando algumas manipulações algébricas, isolando T_n , cortando os termos em comum e reordenando a equação, chega-se a Equação 3.70:

$$T_n = \frac{\hat{A}T_p + \hat{B}T_{amb}}{\hat{A} + \hat{B}} \quad (3.70)$$

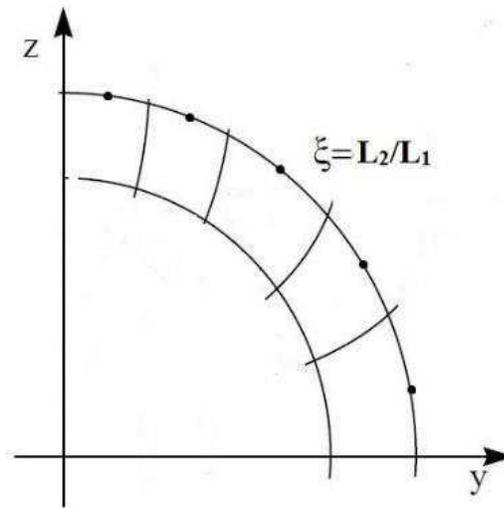
Em que os termos \hat{A} e \hat{B} são dados pelas Equações 3.71 e 3.72, respectivamente:

$$\hat{A} = \frac{1}{h_n} \quad (3.71)$$

$$\hat{B} = \frac{L\Delta\xi_n}{\sqrt{\frac{(\xi_n^2-1)}{(\xi_n^2-\eta_p^2)}}k_n} \quad (3.72)$$

A Figura 3.9 apresenta os pontos para os quais a Equação 3.70 é válida.

Figura 3.9 – Pontos onde a Equação 3.70 é válida.



3.1.3.4 A malha

Foi utilizada uma malha regular em coordenadas esferoidais prolatas para resolver o problema transiente bidimensional de transferência de calor com geração de energia. A posição dos pontos nodais no interior do domínio computacional foi obtida através das seguintes equações:

$$\xi_i = 1 ; \eta_j = 0, \quad \text{para } i = j = 1; \quad (3.73)$$

$$\xi_i = 1 + \frac{\Delta\xi}{2}, \quad \text{para } i = 2; \quad (3.74)$$

$$\eta_j = \frac{\Delta\eta}{2}, \quad \text{para } j = 2; \quad (3.75)$$

$$\xi_i = \xi_{i-1} + \Delta\xi, \quad \text{para } i = 3, \dots, \text{npksi}-1; \quad (3.76)$$

$$\eta_j = \eta_{j-1} + \Delta\eta, \quad \text{para } j = 3, \dots, \text{npeta}-1; \quad (3.77)$$

$$\xi_i = \frac{L_2}{L}, \quad \text{para } i = \text{npksi}; \quad (3.78)$$

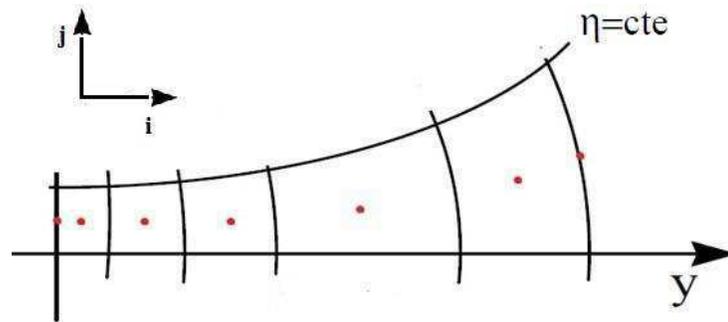
$$\eta_j = 1, \quad \text{para } j = \text{npeta}; \quad (3.79)$$

$$\Delta\xi = \left(\frac{L_2}{L} - 1 \right) / (\text{npksi} - 2); \quad (3.80)$$

$$\Delta\eta = 1 / (\text{npeta} - 2); \quad (3.81)$$

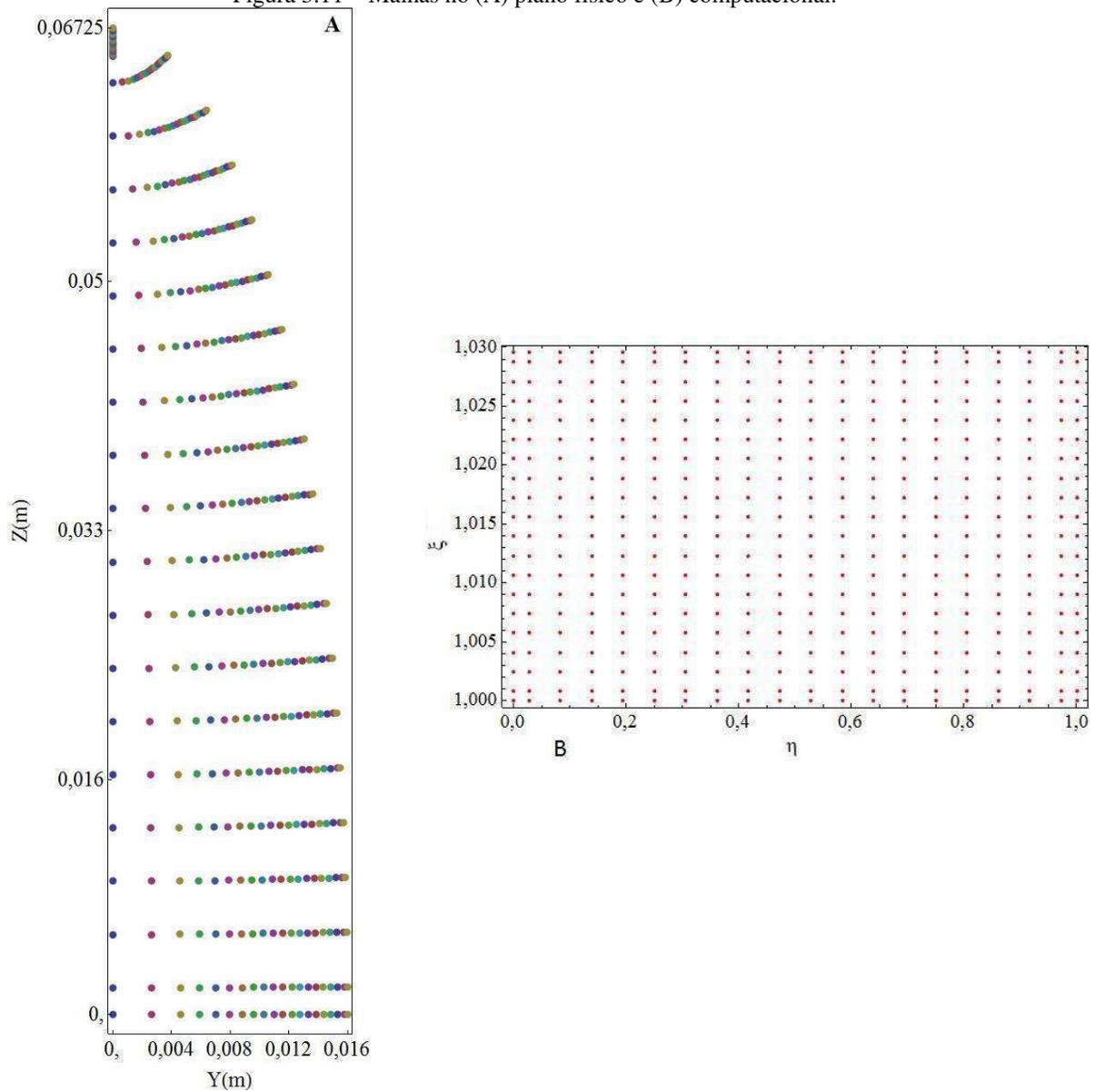
Nestas equações, npksi e npeta são as quantidades de pontos nodais nas direções ξ e η , respectivamente; $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, são as distâncias entre os centros de dois volumes de controle consecutivos nas direções ξ e η , respectivamente. Por ser uma malha uniforme, eles também são o tamanho dos lados do volume de controle nas direções ξ e η , respectivamente. A Figura 3.10 mostra as posições dos pontos nodais em parte do domínio físico afim de um melhor entendimento quanto a construção da malha.

Figura 3.10 – Parte do domínio físico.



Como se observa na Figura 3.10, o primeiro e o último ponto da malha na direção ξ (N-S) se encontram em uma das fronteiras, do primeiro e do último volume de controle respectivamente. Na direção η (L-O), ocorre a mesma situação. É importante salientar que a utilização de uma coordenada diferente da cartesiana, gera, primeiramente no campo computacional, uma malha com o aspecto de coordenada cartesiana. Se assim não o fosse, seria muito difícil conseguir visualizar o problema para ser implementado em um programa computacional. Após realizado todos os cálculos, através do mapeamento, o programa consegue então definir os valores da variável avaliada no domínio físico. Para melhor entendimento a Figura 3.11 é apresentada.

Figura 3.11 – Malhas no (A) plano físico e (B) computacional.



Para a obtenção dos resultados, foi desenvolvido um código computacional no ambiente Mathematica sendo o método de Gauss-Seidel escolhido para a solução iterativa das equações governantes para cada volume de controle. Utilizou-se o valor de 10^{-8} como erro máximo para o critério de tolerância. Apesar de ser feito, não foram realizados testes para verificar a melhor tolerância aplicável ao problema já que tal valor é recomendado caso se trabalhe com variáveis adimensionais.

O comportamento das propriedades ρ , c_p e k , durante o período de congelamento, foi implementado no programa de acordo com as Equações 3.82 a 3.84, dadas por Silva, M. (2005):

$$k_{dc} = f_s k_{ac} + (1 - f_s) k_{pc} \quad (3.82)$$

$$c_{P_{dc}} = f_s c_{P_{ac}} + (1 - f_s) c_{P_{pc}} \quad (3.83)$$

$$\rho_{dc} = f_s \rho_{ac} + (1 - f_s) \rho_{pc} \quad (3.84)$$

Em que os índices ac, dc e pc representam antes, durante e pós congelamento, respectivamente. Essas equações levam em conta o que já foi abordado no capítulo anterior: a variação desses parâmetros de acordo com a porção de gelo presente no material em cada instante de tempo (f_s). Nos períodos de pré e pós congelamento, esses parâmetros assumem valores fixos. Para a densidade e calor específico, os dados são apresentados na Tabela 3.3. A condutividade térmica foi estimada a partir do ajuste de dados entre a solução numérica e os valores experimentais.

3.1.3.5 Refinamento de malha e passo de tempo

Devido as aproximações numéricas realizadas nos métodos de cálculo numérico, existe a necessidade de se realizar o refinamento de malha e passo de tempo. O primeiro visa averiguar qual a quantidade de pontos necessários para que o resultado não sofra variações. Quando o resultado de uma malha 10x10 é diferente de uma 20x20, com os mesmos dados de entrada, então há erros devido as aproximações numéricas. Eles são minimizados quando se verifica a não variação dos resultados em função do tamanho da malha. Já o teste para o passo de tempo, verifica a partir de qual incremento de tempo não ocorre mudanças significativas dos resultados, pelos mesmos motivos já apresentados.

Para realizar os testes em relação ao tempo, fixou-se a malha em 10x10 e, aproveitando os dados experimentais já obtidos, observou-se a variação do erro quadrático médio entre os dados numéricos e experimentais: quando o erro variasse pouco de um passo de tempo para o outro, é porque o mesmo já não mais influenciava no resultado. O ERQM bem como a variância são dados pelas Equações 3.85 e 3.86:

$$ERQM = \sum_{i=1}^n (T_{i,num} - T_{i,exp})^2 \quad (3.85)$$

$$\text{Variância} = \frac{ERQM}{n - n_{ajustado}} \quad (3.86)$$

Nestas equações, n é o número de dados experimentais e $n_{ajustado}$ é o número de parâmetros ajustados.

A Tabela 3.1 representa o Δt , o tempo decorrido para a obtenção do resultado e o valor do ERQM.

Tabela 3.1 – Resultados para o teste de passo de tempo.

Passo de tempo (s)	Tempo de simulação (min)	ERQM
10	7,85	252,93
5	9,08	252,62
1	18,00	252,62

Como se observa, a variação do passo de tempo praticamente não muda o ERQM, ou seja, pode-se usar qualquer um desses Δt sem a perda da qualidade nos resultados. Por questões de economia de tempo de simulação, utilizou-se Δt igual a 10.

O teste para o tamanho de malha também se aproveitou dos valores do ERQM para verificar mudanças significativas nos resultados. Ele foi realizado com um passo de tempo de 10s e os valores obtidos são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Resultados para o teste de malha.

Malha	Tempo (min)	ERQM
6x6	0,78	232,75
10x10	7,85	252,93
20x20	159,60	276,42
30x30	685,20	275,27

É fácil perceber pela Tabela 3.2 que a malha 30x30 é a melhor em termos de variação do resultado, pois de 20x20 para ela, variou-se menos de 1 no ERQM. Porém, o tempo gasto para a

solução dessa malha foi de aproximadamente 12 horas, bem maior do que para a malha 20x20 (2,5 horas). Assim, levando em conta também o tempo gasto para se obter o resultado, optou-se pela utilização da malha 20x20 na realização das simulações, pois alia o menor tempo com a menor variação do ERQM.

3.1.3.6 Aplicação ao resfriamento e congelamento de banana prata com casca

O histórico de temperatura em função do tempo para a banana prata com casca foi gentilmente cedido pelo Engenheiro Vanderson Alves Agra Brandão. Foi realizado o congelamento utilizando: refrigerador convencional Consul 240, sistema de aquisição Agilent, desktop e três termopares tipo K. As amostras eram compostas por frutas com boa aparência, com umidade média de 83%, frescas, com poucas manchas, sem danos mecânicos e maturação adequada. A banana, do tipo prata, não possuía grande curvatura, sendo bem descrita como um esferóide prolato. Um termopar foi localizado no centro geométrico da fruta. As amostras foram envolvidas em rede de nylon, o furo central do termopar vedado com silicone, e a amostra posicionada suspensa no congelador por ganchos adaptados. O sistema de aquisição foi configurado para escanear a temperatura de cada termopar a cada 10 segundos. A fruta possuía em média 16 mm no eixo menor e 67,25 mm para o eixo maior com uma massa de 90,49 g. As temperaturas iniciais e finais de congelamento foram obtidas através do método aplicado por Rahman et al., (2002). A Figura 3.12 apresenta as amostras e os equipamentos utilizados no experimento.

As propriedades termofísicas da banana foram retiradas do trabalho de Rao (1992 apud Lima, A., 1999), para uma fruta onde sua temperatura de congelamento vale $-0,8^{\circ}\text{C}$, próxima da temperatura do presente trabalho ($-0,71^{\circ}\text{C}$). A densidade foi calculada através da Equação 3.87.

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi L_1^2 L_2} \quad (3.87)$$

Em que m é a massa medida da banana, L_1 e L_2 são os eixos menor e maior, respectivamente. Todos os dados de entrada necessários para a simulação são apresentados na Tabela 3.3.

Figura 3.12 – Materiais do experimento. (A) Amostras, (B) equipamentos utilizados no experimento ((1) PC, (2) congelador e (3) sistema de aquisição) e (C) desenho do perfil da banana com casca em escala 1x2.

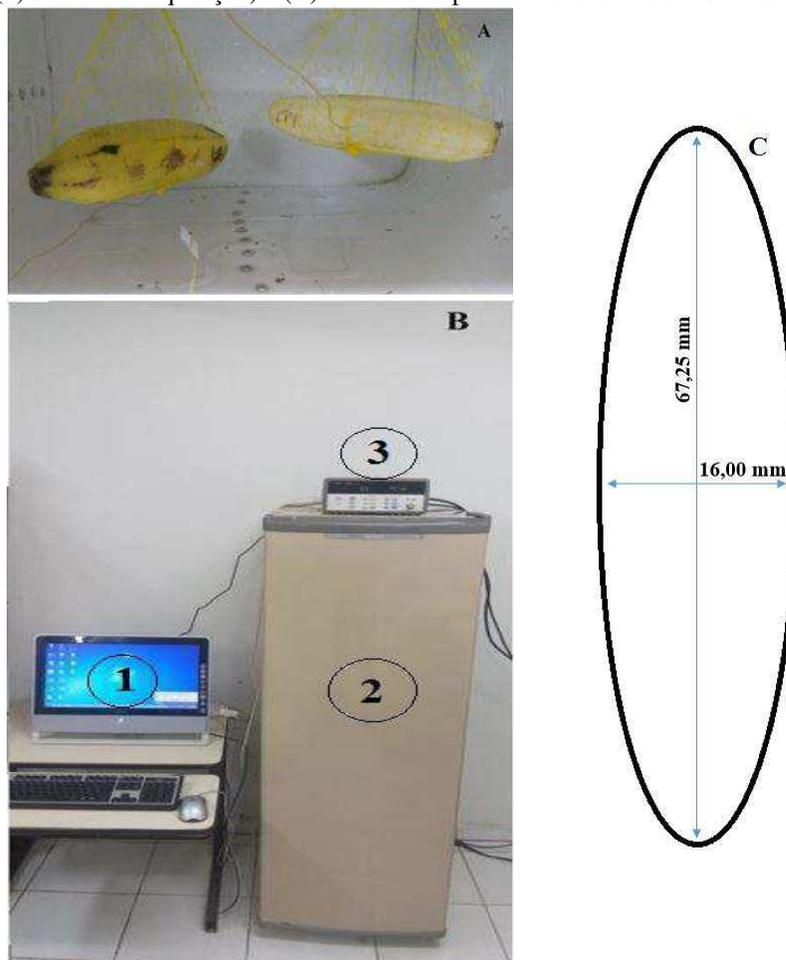


Tabela 3.3 – Dados para a simulação.

Variável	Valor
C_p (acima do congelamento)	3,684 (kJ/kgK)
C_p (abaixo do congelamento)	1,905(kJ/kgK)
Calor Latente de Fusão	250,16 (kJ/kg)
Densidade (acima do congelamento)	1254,87 (kg/m ³)
Temperatura Inicial	27,9 °C
Temperatura do refrigerador (média)	-18,3 °C
Temperatura de líquido	-0,711 °C
Temperatura de sólido	-2,21 °C
L_1 (eixo menor)	16 mm
L_2 (eixo maior)	67,25 mm

Para avaliar as propriedades como a condutividade térmica e o coeficiente de transferência de calor convectivo, foram comparados os dados numéricos com os dados experimentais da temperatura no centro da fruta a partir do método do erro quadrático mínimo (Equação 3.85).

Primeiro avaliou-se o período de resfriamento: partindo de um valor para a condutividade térmica, variou-se o coeficiente convectivo avaliando o valor do ERQM. Quando esse valor encontrado fosse maior que o anterior, o programa imprimia o resultado. Após, utilizando desse valor para h , variava-se o valor de k , averiguando sempre o valor de ERQM. Essas etapas foram repetidas até que não conseguisse mais alcançar um menor erro quadrático.

Tais dados então foram usados para simular o período de resfriamento e congelamento. Já no caso da verificação desses parâmetros no período de têmpera, foi necessário simular todo o processo e aplicou-se a mesma metodologia para encontrar seus valores.

3.1.3.7 Casos simulados

Neste ponto do trabalho, com o objetivo de verificar qual a influência das dimensões bem como do aspecto de forma do sólido na cinética de congelamento, foram realizadas simulações alterando esses valores. Foram mantidos todos os dados de entradas já apresentados na Tabela 3.3. As dimensões simuladas foram: $8 \times 16 \text{ mm}^2$, $16 \times 32 \text{ mm}^2$ e $32 \times 64 \text{ mm}^2$, mantendo um aspecto de forma igual a dois. Para os vários aspectos de forma, foram utilizadas as dimensões: $16 \times 16 \text{ mm}^2$, $16 \times 32 \text{ mm}^2$, $16 \times 48 \text{ mm}^2$ e $16 \times 64 \text{ mm}^2$, sendo os aspectos de formas iguais a 1, 2, 3 e 4 respectivamente. A Tabela 3.4 resume todos os casos estudados.

Tabela 3.4 – Casos simulados.

Caso	L_1 (mm)	L_2 (mm)	Aspecto de forma
1	8	16	2
2	16	32	2
3	32	64	2
4	16	16	1
5	16	32	2
6	16	48	3
7	16	64	4

CAPÍTULO 4

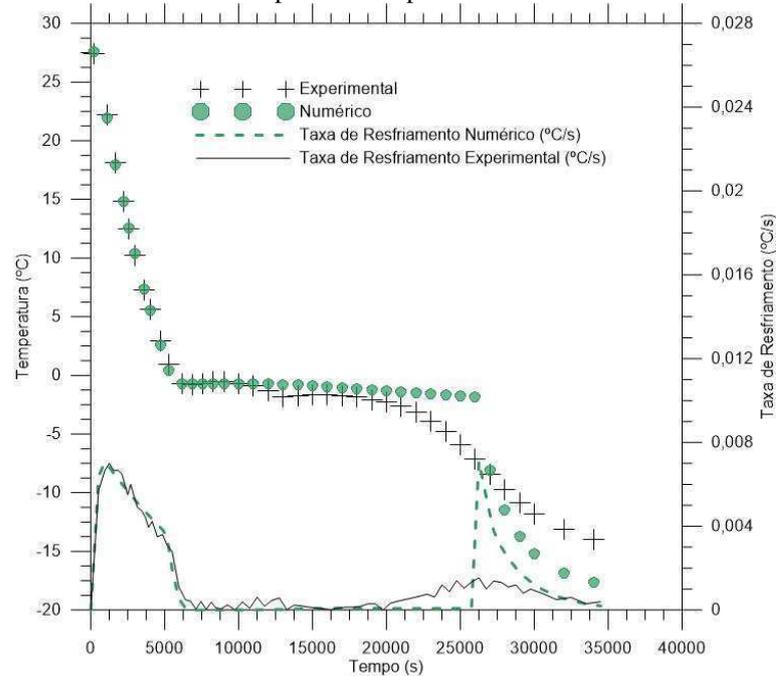
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta penúltima seção serão apresentados os dados obtidos durante todo o trabalho bem como as suas interpretações. Primeiramente será apresentada a validação da modelagem matemática, comparando-a também com outros trabalhos já realizados. Também será apresentado os valores da condutividade térmica e coeficiente convectivos estimados. Em seguida, mostra-se os perfis de temperatura para a banana com o intuito de se conhecer o comportamento das frentes de congelamento. Por último, resultados sobre a influência das dimensões de uma banana na cinética de congelamento são mostrados.

4.1 Validação da modelagem matemática

Os valores de uma solução numérica aplicada a uma modelagem matemática devem ser confrontados com resultados dados por soluções analítica, experimentais ou até mesmo por outras soluções numéricas, se elas já foram exaustivamente testadas. O presente trabalho usou dados experimentais do congelamento de banana prata com casca para validar a solução proposta. A Figura 4.1 mostra a comparação entre o histórico de temperatura teórico e experimental no centro de uma banana com casca e também as taxas de resfriamento aplicadas ao processo.

Figura 4.1 – Histórico de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) e taxas de resfriamento ($^{\circ}\text{C/s}$) para resultados numéricos e experimentais para banana.

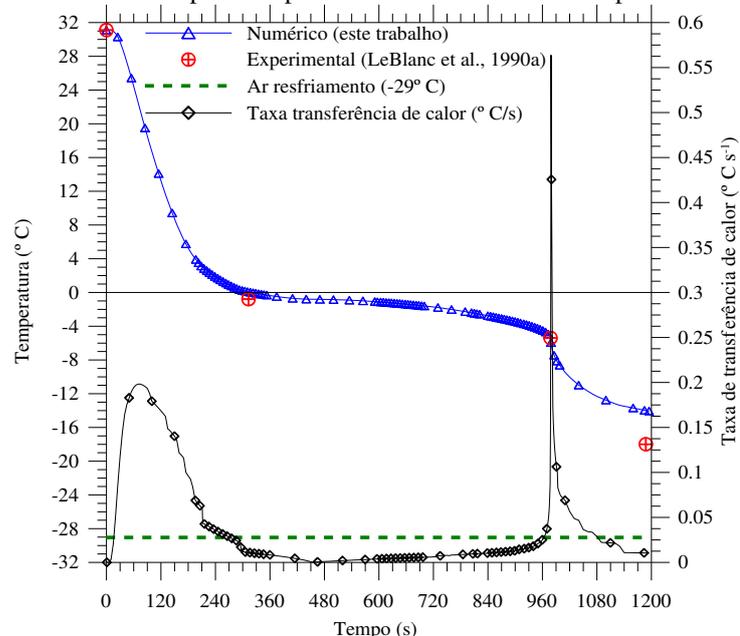


A partir da Figura 4.1, consegue-se captar perfeitamente o início e fim do processo de cristalização pelo método apresentado por Rahman et al. (2002). A fase de resfriamento inicia-se com a temperatura inicial do produto e tem o seu fim quando a temperatura do centro da fruta alcança por volta de $-0,71^{\circ}\text{C}$ em aproximadamente 6600 segundos. A partir desse ponto, tem-se o início da cristalização, caracterizada pela baixa taxa de resfriamento (próximo de zero) e variações da temperatura muito pequenas. O fim dessa fase se dá quando a taxa de resfriamento começa novamente a aumentar (no caso experimental) ou quando há um pico (no caso numérico). No histórico de temperatura isso é observado quando novamente as temperaturas voltam a cair rapidamente. Por fim, é possível verificar a última etapa do processo de congelamento, a fase de têmpera, onde as temperaturas abaixam até o equilíbrio térmico com o meio refrigerante. Avaliando o período de resfriamento, observa-se que os valores das temperaturas experimental e simulada foram bem próximos. Nesse mesmo período, as taxas de resfriamento apresentaram comportamento semelhante entre os casos. Isso indica que a modelagem matemática aplica-se muito bem nessa região. Esse comportamento se mantém até próximo do tempo final do congelamento experimental (aproximadamente 20016 s), onde a partir desse período começam as divergências. Enquanto os valores experimentais iniciam um crescimento por volta de $0,0004^{\circ}\text{C/s}$, as taxas de resfriamento numéricas permanecem próximas de zero e somente mudam por volta de 25992 s, indicando o fim da cristalização. Esse comportamento ocasiona a discrepância nas temperaturas apresentadas na Figura 4.1 para essa

região. Logo, verifica-se que a modelagem matemática para prever os tempos de pré, pós e congelamento necessitam de alguma complementação relativo aos processos. É possível ter diversas explicações para a discrepância nos resultados obtidos, principalmente em parte da fase de cristalização e na região de têmpera: a falta de consideração da variação das propriedades ao longo de todo o processo, a não consideração da secagem, da variação do volume, dentre muitos outros. Assim, com o intuito de verificar se a modelagem como um todo está incorreta ou alguma consideração feita no trabalho não corresponde ao comportamento real da curva de resfriamento da banana, investigou-se outros estudos que se utilizaram tanto do método dos volumes finitos, quanto da metodologia aplicada por Limeira (2003) na consideração do calor latente de fusão.

Silva, M. (2005), estudou o processo de congelamento de batatas em formato palito. As propriedades termofísicas foram consideradas constantes nos períodos de pré e pós congelamento e variáveis na cristalização. A Figura 4.2 apresenta o gráfico comparativo entre os resultados para as temperaturas obtidos pelo autor e os valores experimentais obtidos por LeBlanc et al. (1990 apud SILVA, M., 2005).

Figura 4.2 - Histórico de temperatura para resultados numéricos e experimentais para batata.



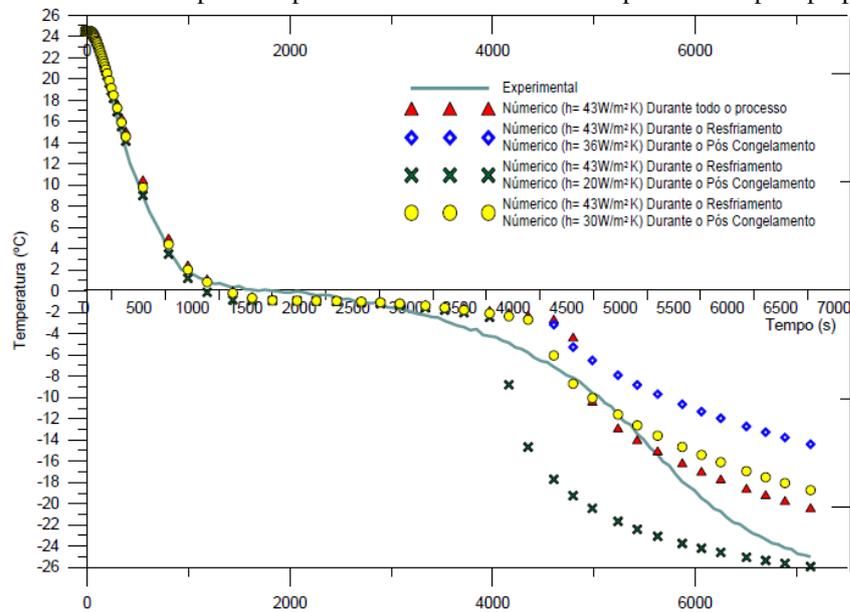
Fonte – Silva, M. (2005)

Notadamente, vê-se nesse estudo, a aplicação do método desenvolvido por Limeira (2003) sendo satisfatória e predizendo bem todo o processo de congelamento. O trabalho também captou de forma bem precisa os pontos de início e final da fase de cristalização. Mesmo

assim, ainda ocorreu certa discrepância nos resultados para a temperatura final de todo o processo.

Já Lima, W. (2012), estudou o congelamento de polpa de limão. As propriedades termofísicas no resfriamento e têmpera foram calculadas de acordo com Choi e Okos (1986 apud LIMA, W., 2012), onde a quantidade de cada componente do material bem como a temperatura possuem influência nos valores dessas propriedades. A Figura 4.3 apresenta o gráfico comparativo entre os resultados numéricos e experimentais para as temperaturas, ambos obtidos pelo autor.

Figura 4.3 - Histórico de temperatura para resultados numéricos e experimentais para polpa de limão.



Neste caso, o modelo não foi satisfatório para prever os tempos na fase de têmpera, igualmente como ocorreu no presente trabalho. Verifica-se que, mesmo o autor tendo variado o coeficiente convectivo no intuito da curva numérica se aproximar da experimental, não houve bons resultados. Isso então leva a crer possíveis problemas na formulação proposta por Limeira (2003) para certos tipos de frutas, onde a curva de resfriamento no período de têmpera não tem uma queda acentuada (forma côncava) e sim um decaimento de temperatura mais suave (forma convexa). Assim, é possível concluir que, apesar da validação parcial (resfriamento), a modelagem aqui proposta pode ser aplicada ao congelamento de frutas com formato esferoidal prolato, em todo o processo. Isso só é válido caso a curva de congelamento possua o perfil previsto pela metodologia pois percebe-se que a discrepância entre as temperaturas experimentais e numéricas, no caso do presente trabalho, se deve a aplicação do método de

Limeira (2003) para descrever a fase de cristalização, onde ele se mostrou aplicável para algumas situações e não em outras.

Os valores obtidos para a condutividade térmica e para o coeficiente convectivo, a partir dos dados presentes na Figura 4.1, são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores para condutividade térmica e coeficiente convectivo obtidos através de dados numéricos.

Variável	Período de processo	Valor
Condutividade térmica (W/(m °C))	Resfriamento	0,509
	Pós-congelamento	2,22
Coeficiente convectivo (W/ (m ² °C))	Resfriamento	6,44
	Pós-congelamento	5,24

O valor da condutividade térmica no período de pré-congelamento foi bom quando comparados a literatura: Sweat (1974 apud LIMA, A., 1999) encontrou valor de 0,481 W/(m °C) enquanto Marin et al. (1985 apud LIMA, A., 1999) obteve 0,509 W/(m °C). Os valores dos coeficientes convectivos foram comparados aos resultados obtidos pelo método analítico (INCROPERA et al., 2008). Nele, foram obtidos os valores de 5,34 W/(m² °C), quando calculado para convecção forçada a uma velocidade de 0,1 m/s², tão baixa a ponto de se considerar como um ar estagnado, e de 7,34 W/(m² °C) para convecção natural. Destaca-se que a quantidade obtida considerando uma convecção forçada torna-se incoerente quando comparado a convecção natural, pois o seu valor deveria ter sido maior. Assim, a utilização de velocidades muito baixas para o ar afim de aproximar para uma convecção natural pode acarretar em erros nos resultados do coeficiente convectivo. O ERQM obtido para todo o processo foi de 238,396°C², com uma variância de 3,222°C², um valor alto e que indica grande variação entre os dados numéricos e experimentais. Porém, é perceptível que tal discrepância se dá pelas temperaturas apresentadas no período de têmpera. A título de comparação, verificou-se o valor do ERQM somente para o período de resfriamento e o resultado foi próximo de 1°C² com variância de 0,048°C², onde é um dado excelente e mostra como as temperaturas experimentais e numéricas nessa região possuem valores semelhantes. Também indica que o ajuste realizado para h e k, nessa região, foram muito bons.

A discrepância nos resultados na fase de têmpera pode ter diversas explica es. O modelo utilizado no presente trabalho para tratar a fase de congelamento, considera que toda a água contida no material   convertida em gelo, uma considera o falsa pois parte da água no processo de congelamento fica tão concentrada a ponto de não ser possível a sua cristaliza o. Outro possível motivo   a utiliza o do método da temperatura em vez da entalpia, onde nesse último não ocorrem varia es bruscas das propriedades nas regiões de início e fim do congelamento.

Além do conhecimento do histórico de temperatura no processo de congelamento de uma fruta, têm também   importante ter em mãos os perfis de temperatura delas. Isso possibilita a verifica o das regiões de maiores gradientes de temperatura bem como em quais momentos e locais tem-se a presença de água, água-gelo e gelo. As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam esses perfis para quatro diferentes instantes de tempo.

Figura 4.4 – Perfil de temperatura ( C) da banana durante o processo de congelamento. (A) $t = 240$ s; (B) $t = 3600$.

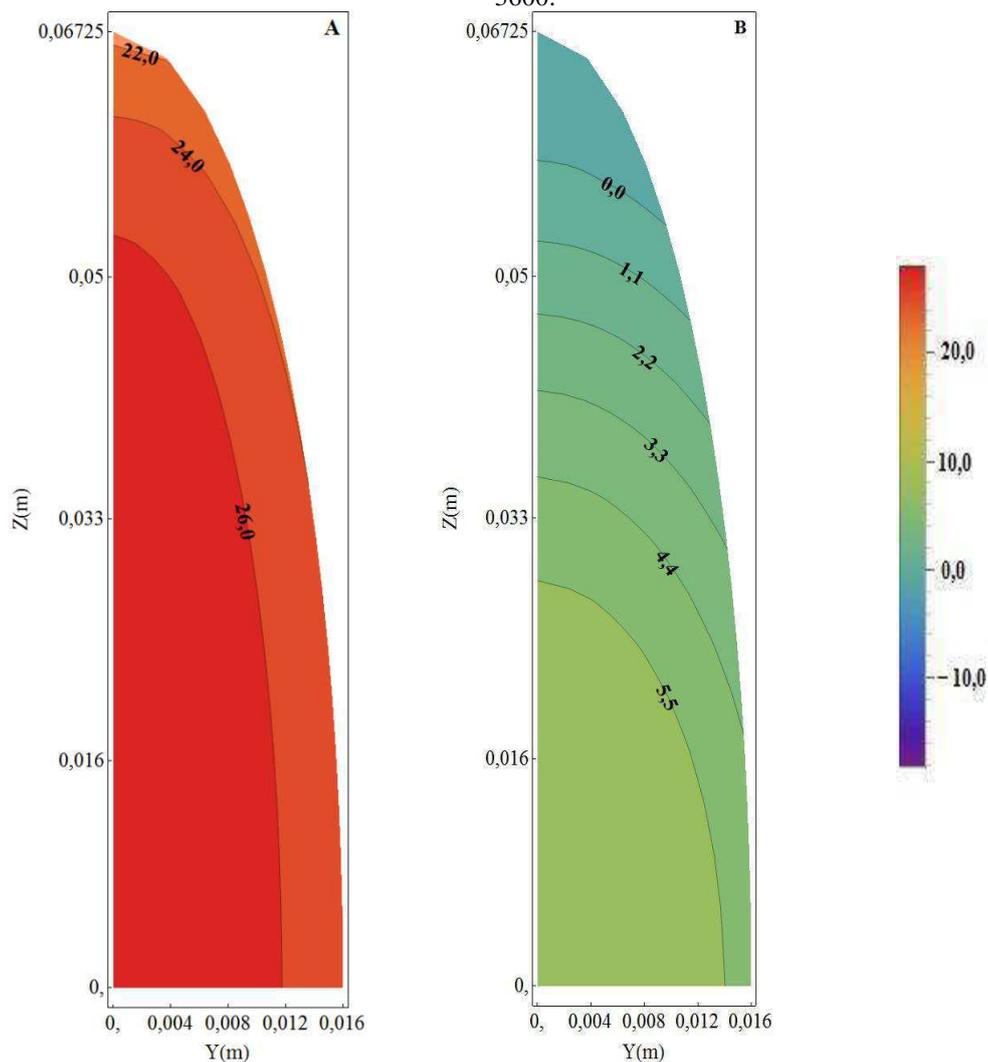
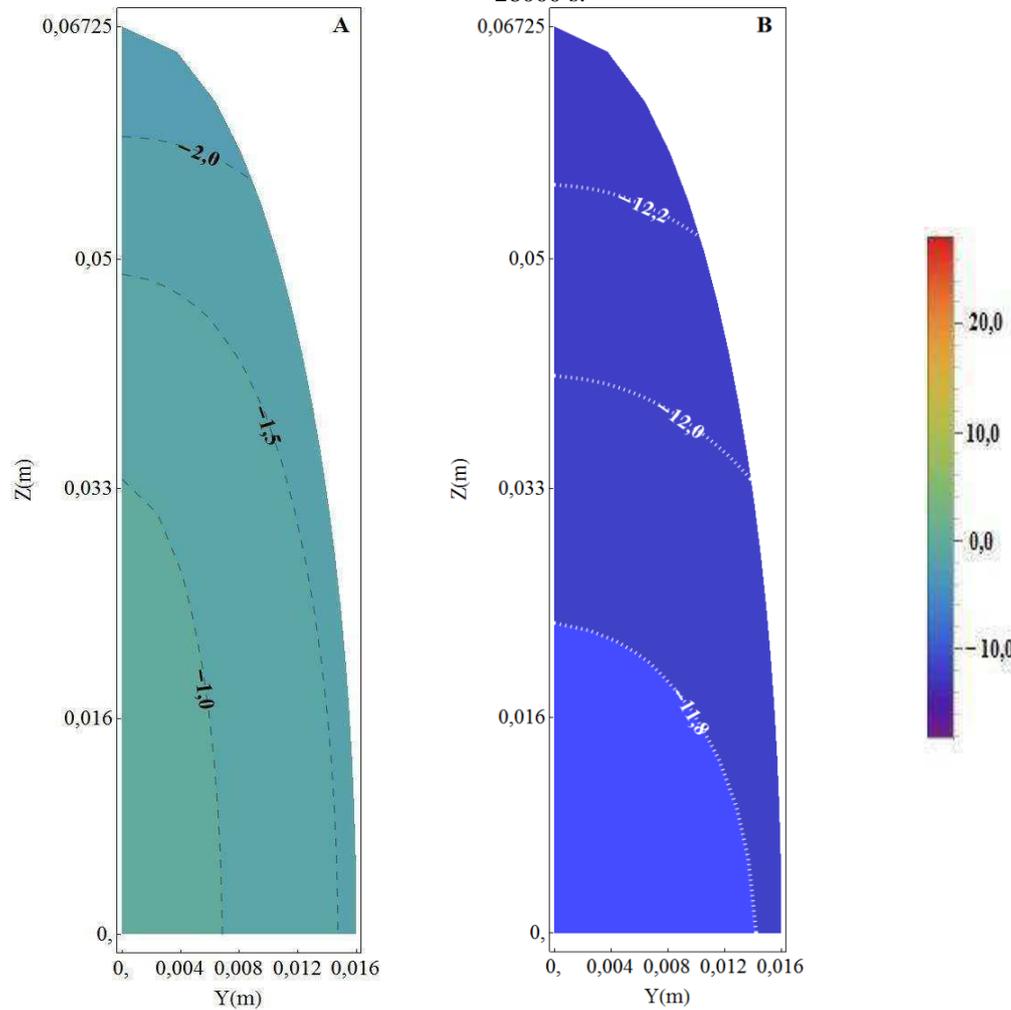


Figura 4.5 – Perfil de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) da banana durante o processo de congelamento. (A) $t = 13500$ s; (B) $t = 28000$ s.



A aplicação da modelagem proposta possibilita obter dados importantes sobre a cinética de congelamento, sendo eles: os tempos de processos, o histórico de temperatura e os perfis de temperatura onde se identifica facilmente as frentes de congelamento e as regiões onde elas aparecem primeiro.

Analisando as Figuras 4.4 e 4.5, onde as linhas cheias representam isothermas onde há água em estado líquido, as linhas tracejadas indicam a existência de água-gelo e as linhas pontilhadas mostram somente a ocorrência de gelo, é possível averiguar a presença dos maiores gradientes de temperatura percorrendo a direção Z . Com esses perfis também fica fácil observar em quais tempos tem-se as fases de água e gelo: na Figura 4.4.A, existe apenas água devido as temperaturas estarem acima do ponto de congelamento ($-0,71$ $^{\circ}\text{C}$); na Figura 4.4.B, inicia-se o processo de cristalização a partir da ponta do produto; na Figura 4.5.A, tem-se a presença de duas fases: água-gelo (temperaturas entre $-0,7$ e $-2,2^{\circ}\text{C}$) e somente gelo (temperaturas abaixo

de $-2,2^{\circ}\text{C}$), essa última na região próxima a ponta. Por fim, na Figura 4.5.B, todo o produto já se encontra totalmente congelado. Através desses perfis, percebe-se também a não ocorrência de uma cristalização uniforme em toda a superfície da banana. A ponta é o local onde primeiro ocorre a mudança de fase e ainda: haverá gelo em uma região no interior da fruta sem que toda a sua superfície esteja congelada. Tal fato é facilmente observado através da Figura 4.4.B, onde a extremidade da banana (até z aproximadamente $0,06\text{ m}$) já se encontra em uma temperatura abaixo do início de cristalização enquanto que em y igual a $0,015\text{ m}$, ainda encontra-se em uma temperatura acima do ponto de congelamento. Sendo assim, pode-se dizer que o tamanho dos cristais de gelo aumentam de cima para baixo (direção z) e da direita para esquerda (direção y), devido a maior velocidade de resfriamento/congelamento (taxa de resfriamento), acarretando em uma melhor qualidade da textura da banana a partir de sua ponta e diminuindo em direção ao centro. Esse fato é explicado devido a influência do tamanho do gelo e das taxas de resfriamento na qualidade da fruta, os quais já foram objetos de estudo nos trabalhos de Bomben et al. (1983), Fonseca et al. (2009) e Fonseca et al. (2010). Fato curioso: se o consumidor, por algum motivo, começar a comer a fruta onde y vale $0,015\text{ m}$ em vez de iniciar pela sua ponta, ele perceberá, nessa região, uma textura de mais baixa qualidade. Sendo assim, caso o processo deseje uma banana com um congelamento uniforme em toda sua superfície, seria necessário uma condição de contorno diferente na região $y = 0,015\text{ m}$.

4.2 Casos simulados

Com a modelagem validada, foi possível então realizar testes para verificar como e o quanto influenciava na cinética de congelamento, as dimensões do produto. Procurou-se também investigar a influência do aspecto de forma tanto na curva de resfriamento quanto nas frentes de congelamento presentes na banana. Utilizou-se todos os dados contidos na Tabela 3.3, exceto os valores de L_1 e L_2 . Os coeficientes de transferência de calor convectivo e condutividade térmica foram os mesmos encontrados na validação da modelagem matemática: $6,44\text{ W}/(\text{m}^2\text{ }^{\circ}\text{C})$ para h e $0,509\text{ W}/(\text{m }^{\circ}\text{C})$ para k_{des} no resfriamento, $5,24\text{ W}/(\text{m}^2\text{ }^{\circ}\text{C})$ para h e $\text{W}/(\text{m }^{\circ}\text{C})$ para k_{cong} no pós-congelamento.

4.2.1 Simulação para várias dimensões

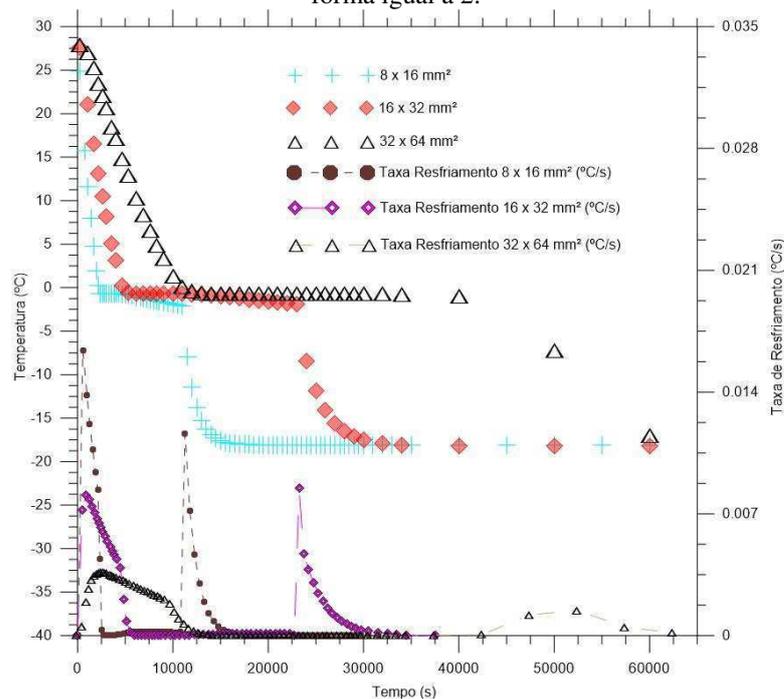
Com o objetivo de verificar o quanto as dimensões do produto podem influenciar nos tempos de congelamento, realizou-se simulações as quais foram modificados os valores dos

eixos maior e menor do objeto mantendo fixo o aspecto de forma (valor 2). A Figura 4.6 mostra o comportamento do histórico e taxas de resfriamento para as dadas condições. A Tabela 4.2 apresenta os tempos aproximados gastos para se alcançar o congelamento, o fim da cristalização e o período decorrido entre esses dois pontos.

Tabela 4.2 – Relação área/volume e tempos de processo para diferentes dimensões.

Tamanho Característico (mm ²)	Início congelamento, t_L (segundos)	Fim congelamento, t_S (segundos)	Processo de mudança de fase (segundos)	Relação (área)/(volume) (m ² / m ³)
8 x 16	2600	11000	8400	320,48
16 x 32	5700	23000	17300	160,24
32 x 64	14000	45000	31000	80,12

Figura 4.6 – Histórico de temperatura e taxas de resfriamento da banana com dimensões diversas e aspecto de forma igual a 2.



Observando a Figura 4.6 e a Tabela 4.2, é possível verificar que quanto maior a relação área/volume, mais rápido se dá o processo de resfriamento e congelamento. Isso possibilita uma troca de calor mais ágil permitindo uma maior transferência de energia. Esse fato é importante pois mostra como é possível influenciar a região crítica em relação a qualidade da fruta, devido ao tamanho dos cristais de gelo que surgirão, apenas variando as dimensões da mesma. Normalmente as frutas são colocadas para congelar após serem fatiadas. Esse processo

então fraciona a fruta original em pequenos pedaços, diminuindo sua dimensão e agilizando assim o processo de resfriamento/congelamento como provado pelos gráficos e tabela apresentados.

O gráfico das taxas de resfriamento auxilia na verificação das regiões de pré, pós e congelamento. As dimensões 8 x 16 e 16 x 32 mm² apresentam comportamento (Figura 4.6) semelhante porém, para 32 x 64 mm², a curva é completamente diferente. Nesse caso é mais difícil identificar o final do período de cristalização pois o mesmo não possui um pico na taxa de resfriamento e sim um novo aumento desse valor após um período em que permaneceu em zero. Assim, verifica-se forte influência das dimensões na taxa de resfriamento.

Observa-se também que a relação área/volume é inversamente proporcional ao aumento de tamanho da fruta: quando dobra-se as dimensões L_1 e L_2 , a relação diminui pela metade. Apesar dessa proporcionalidade, o gráfico e a tabela mostram que os tempos de início e fim de congelamento não seguem a mesma lógica. A diferença na fase de resfriamento mostrada na Figura 4.6 para a dimensão de 32 x 64 mm² comparado a 16 x 32 mm² não é igual a de 16 x 32 mm² para 8 x 16 mm². O mesmo ocorre quando se verifica a região de cristalização e de pós congelamento. Ou seja, mesmo com o aumento e ou diminuição proporcional da relação área/volume, o comportamento das curvas de resfriamento não se apresentam da mesma forma. As Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 apresentam os perfis de temperatura para cada dimensão da fruta nos tempos de 240 s (4 min), 5000 s (1,39 h), 15.000 s (4,16 h) e 28.500 s (7,92 h).

Figura 4.7 – Perfis de temperatura (°C) para dimensões de 8 x 16 mm². (A) $t = 240$ s; (B) $t = 5000$ s; (C) $t = 15000$ s. Início congelamento: $-0,71$ °C. Final congelamento: $-2,21$ °C.

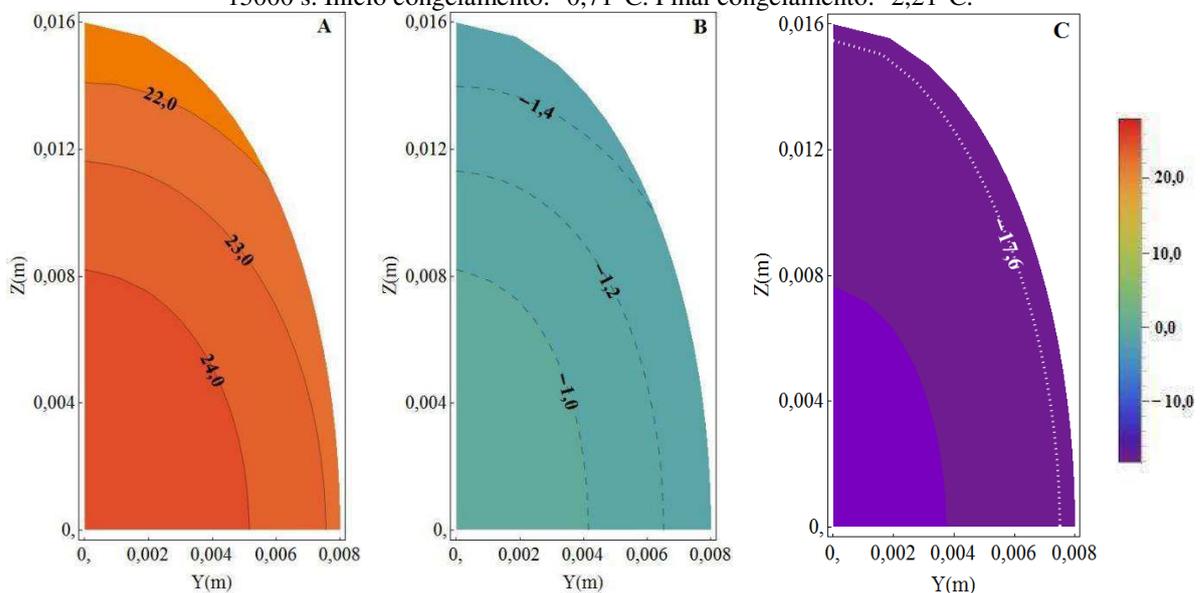


Figura 4.8 – Perfis de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para dimensões de $16 \times 32 \text{ mm}^2$. (A) $t = 240 \text{ s}$; (B) $t = 5000 \text{ s}$; (C) $t = 15000 \text{ s}$; (D) $t = 28500 \text{ s}$. Início congelamento: $-0,71^{\circ}\text{C}$. Final congelamento: $-2,21^{\circ}\text{C}$.

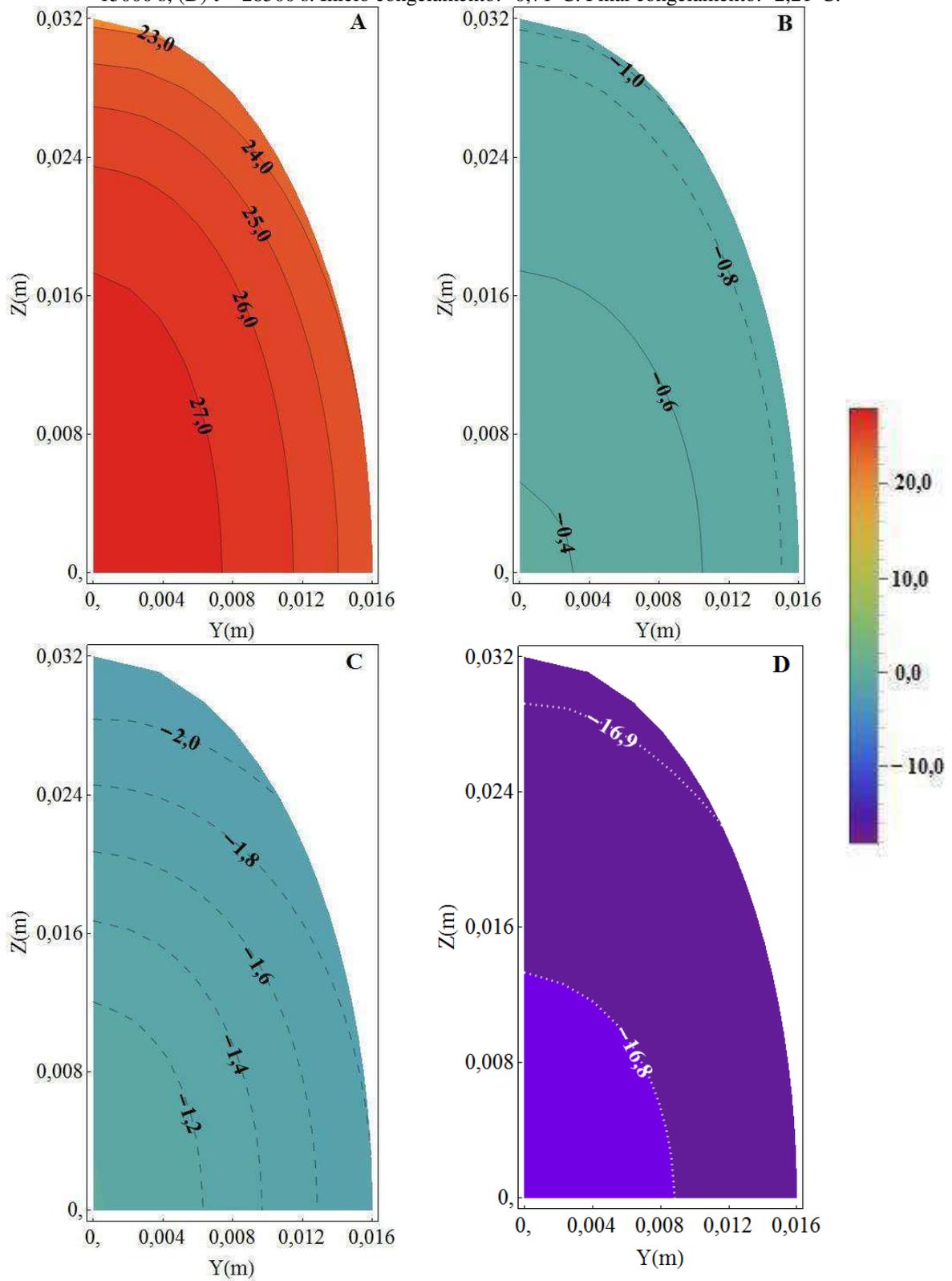
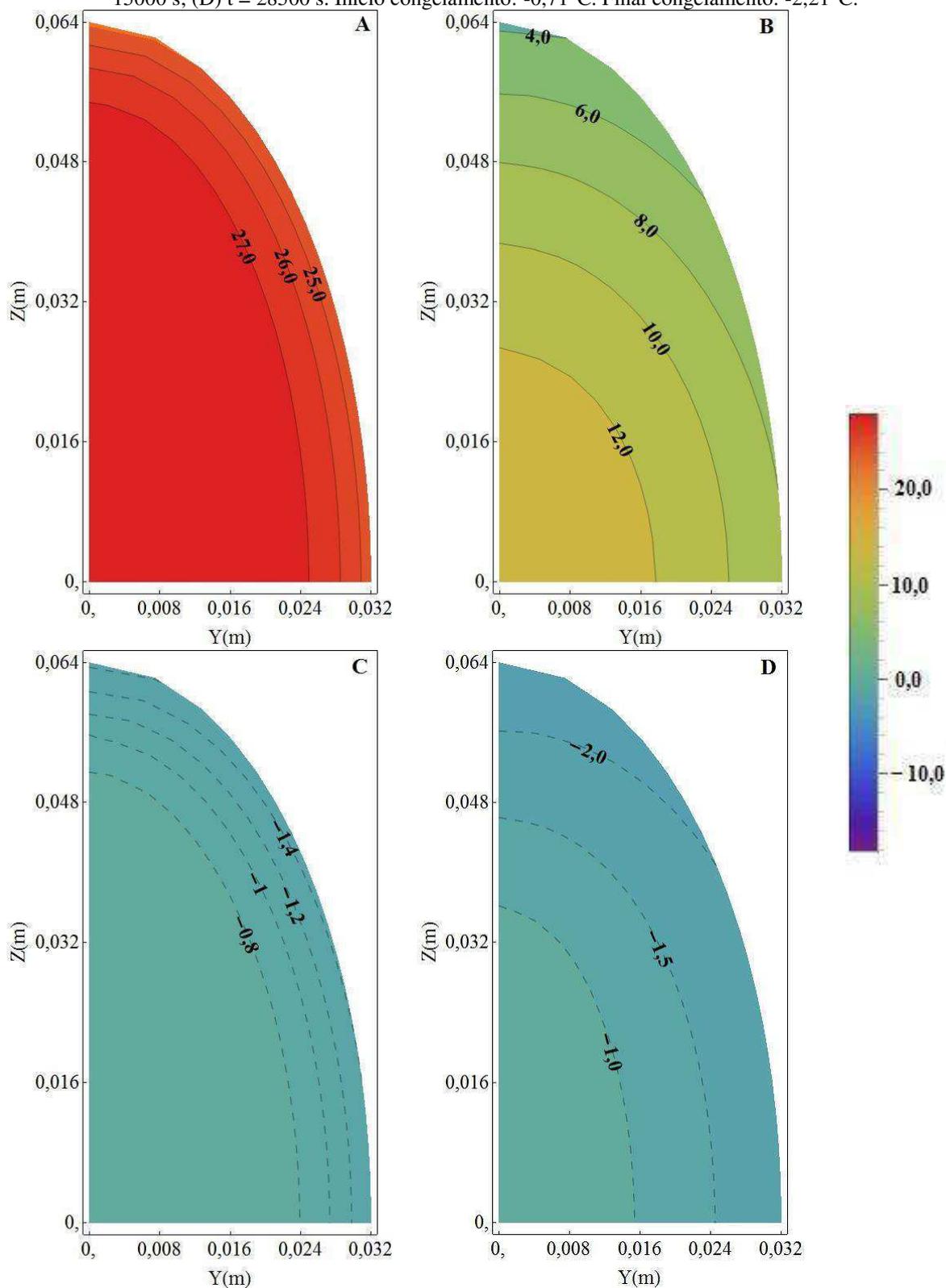


Figura 4.9 – Perfis de temperatura (°C) para dimensões de 32 x 64 mm². (A) t = 240 s; (B) t = 5000 s; (C) t = 15000 s; (D) t = 28500 s. Início congelamento: -0,71°C. Final congelamento: -2,21°C.



No início do processo (Figuras 4.7.A, 4.8.A e 4.9.A), verifica-se uma distribuição de temperatura uniforme, quando comparadas as diferentes dimensões, no interior do sólido. As linhas cheias representam isothermas onde há água em estado líquido. As linhas tracejadas

indicam a existência de água-gelo nas isotermas. Já as linhas pontilhadas mostram somente a ocorrência de gelo. Quando se alcança o tempo de 1,39 h (Figuras 4.7.B, 4.8.B e 4.9.B) os perfis de temperatura para cada dimensão possuem grandes diferenças: em 8 x 16 mm² já ocorre a cristalização (representada pelas linhas pontilhadas), tendo presente somente cristais de gelo pois a maior temperatura registrada é de -0,9°C, abaixo da temperatura de início de congelamento de -0,71°C. No caso da dimensão 16 x 32 mm², parte da região próxima ao núcleo ainda encontra-se em estado líquido e o restante do produto apresenta-se congelado. Já para a dimensão 32 x 64 mm², a banana sequer entrou na fase de congelamento, fato esse que só ocorrerá próximo de 4,16 h de processo. Assim, os perfis de temperatura no interior do produto auxiliam a identificar a presença de água líquida, sólida ou ambas, em certas regiões para cada tempo analisado. Eles também ajudam na observação do comportamento das frentes de congelamento, essencial para certos tipos de modelagem matemática.

Esses resultados mostram a versatilidade do programa em relação a resultados para diferentes características dimensionais do produto, onde é possível apresentar as diversas curvas de resfriamento referentes ao histórico de temperatura bem como localizar e entender melhor como se comportam as frentes de congelamento em diferentes tamanhos da fruta.

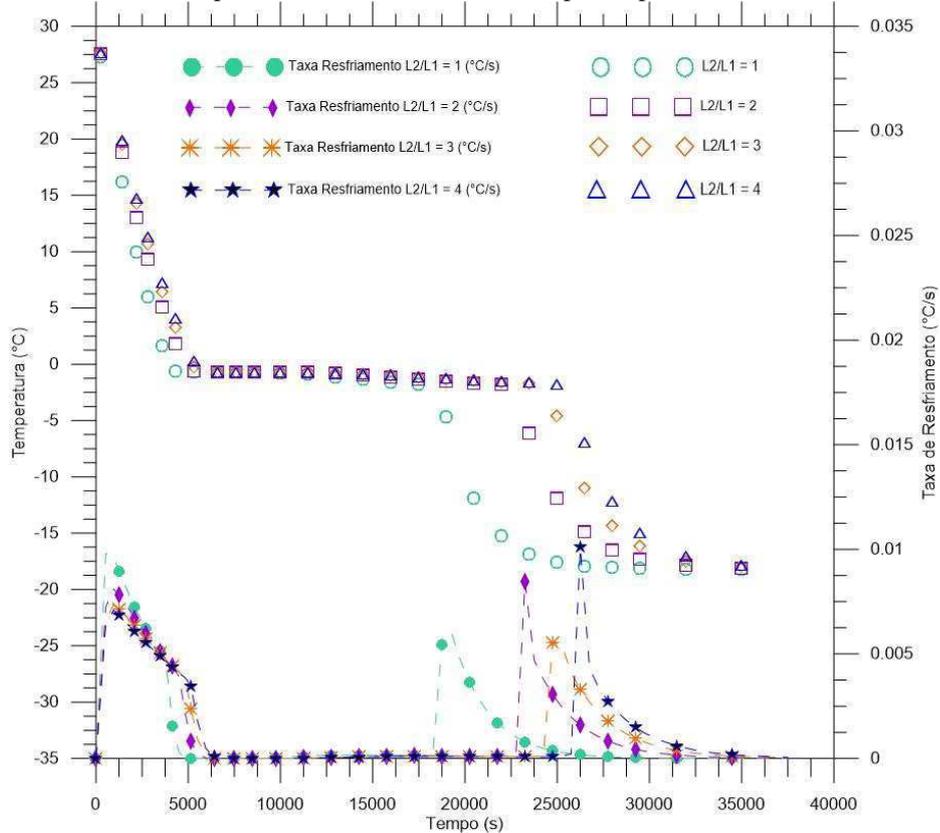
4.2.2 Simulação para vários aspectos de forma

Como percebeu-se a influência da dimensão do produto nas frentes de congelamento, realizou-se simulações para verificar então se o aspecto de forma também gera alguma perturbação na cinética de congelamento. A Figura 4.10 apresenta o histórico de temperatura e as taxas de resfriamento. A Tabela 4.3 mostra os tempos aproximados gastos para se alcançar o congelamento, o fim da cristalização e o período decorrido entre esses dois pontos.

Tabela 4.3 – Relação área/volume e tempos de processo para diferentes aspectos de forma utilizados na pesquisa.

Tamanho Característico (mm²)	Início congelamento, t_L (segundos)	Fim congelamento, t_S (segundos)	Processo de mudança de fase (segundos)	Aspecto de forma	Relação (área)/(volume) (m² / m³)
16x16	5000	18500	13500	1	187,46
16x32	5700	23000	17300	2	160,24
16x48	6200	24500	18300	3	153,65
16x64	6200	26000	19800	4	151,06

Figura 4.10 - Histórico de temperatura e taxas de resfriamento para aspectos de forma utilizados na pesquisa.



Como esperado, a variação do aspecto de forma, o qual consequentemente varia as dimensões do produto, gera influência na cinética de resfriamento. Mais uma vez mostrando que, quanto menor a banana, maior a relação área/volume e mais rápido o processo de congelamento. Verifica-se que quanto maior o aspecto de forma menor é a diferença entre a relação área/volume, ou seja, mudando de aspecto de 1 para 2, tem-se uma diferença de área/volume por volta de 27,22 enquanto de 3 para 4, a diferença é menor que 3. Disso, leva-se a crer que a um certo aspecto de forma, a mudança da relação área/volume será muito pequena, quase inexistente. Isso faria com que o aumento de tamanho não mais influenciasse a cinética de resfriamento. Percebe-se também que a mudança do aspecto de forma gera menores impactos na cinética de resfriamento comparado a variação das dimensões a um aspecto de forma fixo (valor 2). Verifica-se melhor esse comportamento quando confrontadas as Figuras 4.6 e 4.10, onde para essa última figura, os gráficos da taxa de resfriamento possuem formas semelhantes entre eles.

Mais importante do que a mudança nas curvas de resfriamento para cada valor de aspecto de forma, é a verificação de como isso influencia nas frentes de congelamento. As Figuras 4.8,

4.11, 4.12 e 4.13 apresentam as isothermas para cada situação em determinados instantes de tempo.

O aspecto de forma igual a 1 representa a forma de uma esfera. Os perfis mostram como as frentes de congelamento são uniformes para esse caso. Já quando verificado as outras formas, observa-se uma frente mais desigual, onde a ponta apresenta temperaturas menores do que o resto da superfície. Ainda, quanto maior o aspecto de forma, maiores gradientes de temperatura serão presenciados na direção Z e menor será as temperaturas próximas da ponta da banana. Isso significa uma cristalização heterogênea, fazendo com que porções da fruta estejam com melhor qualidade em relação a outras.

Como observado, o programa além de propiciar o estudo da variação das dimensões (e consequentemente do aspecto de forma) na cinética de resfriamento, ele também é capaz de trabalhar com frutas em forma de esferas sem a necessidade de utilizar tal coordenada.

Figura 4.11 – Perfis de temperatura (°C) para aspecto de forma igual a 1. (A) $t = 270$ s; (B) $t = 5000$ s; (C) $t = 15000$ s; (D) $t = 28500$ s. Início congelamento: $-0,71^{\circ}\text{C}$. Final congelamento: $-2,21^{\circ}\text{C}$.

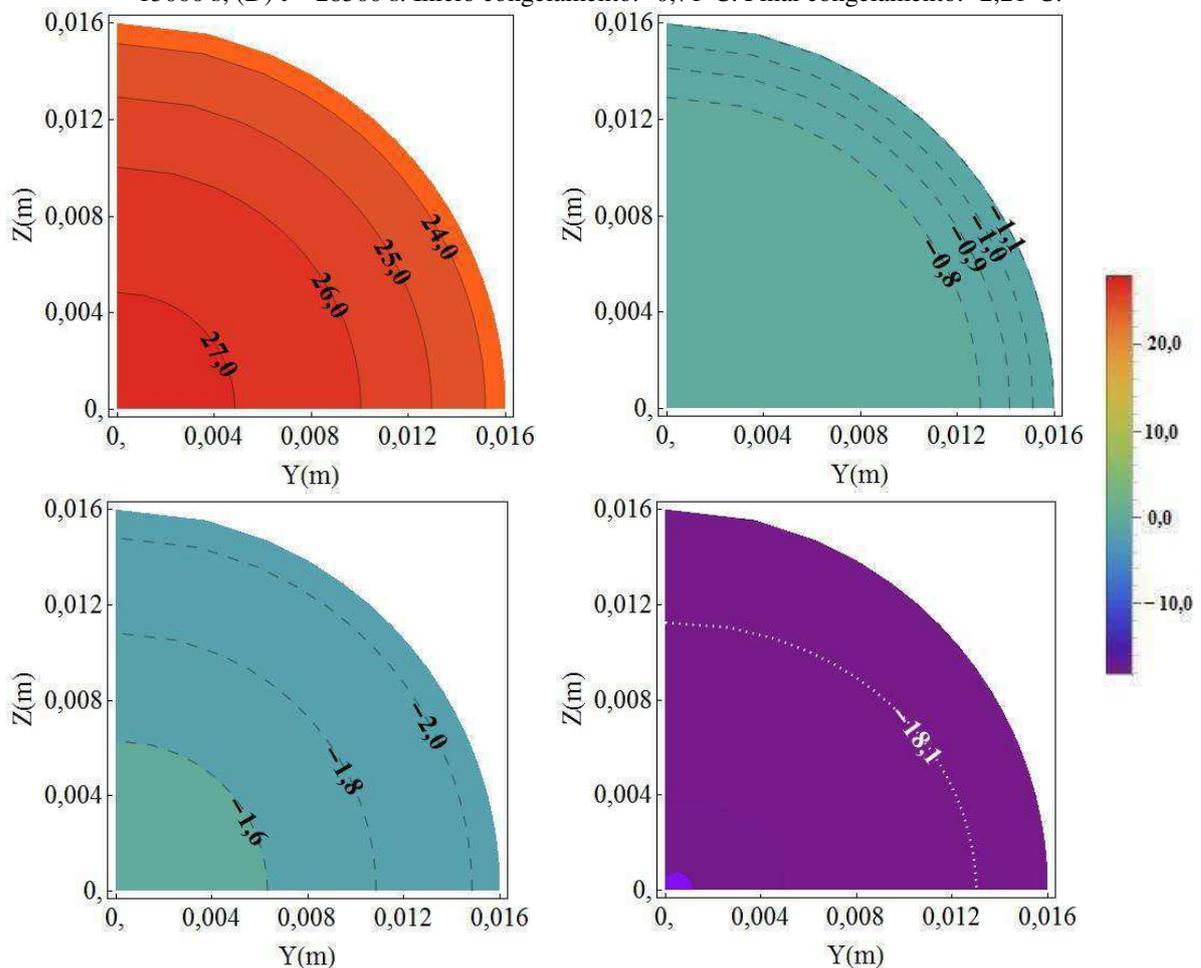


Figura 4.12 – Perfis de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para aspecto de forma igual a 3. (A) $t = 270$ s; (B) $t = 5000$ s; (C) $t = 15000$ s; (D) $t = 28500$ s. Início congelamento: $-0,71^{\circ}\text{C}$. Final congelamento: $-2,21^{\circ}\text{C}$.

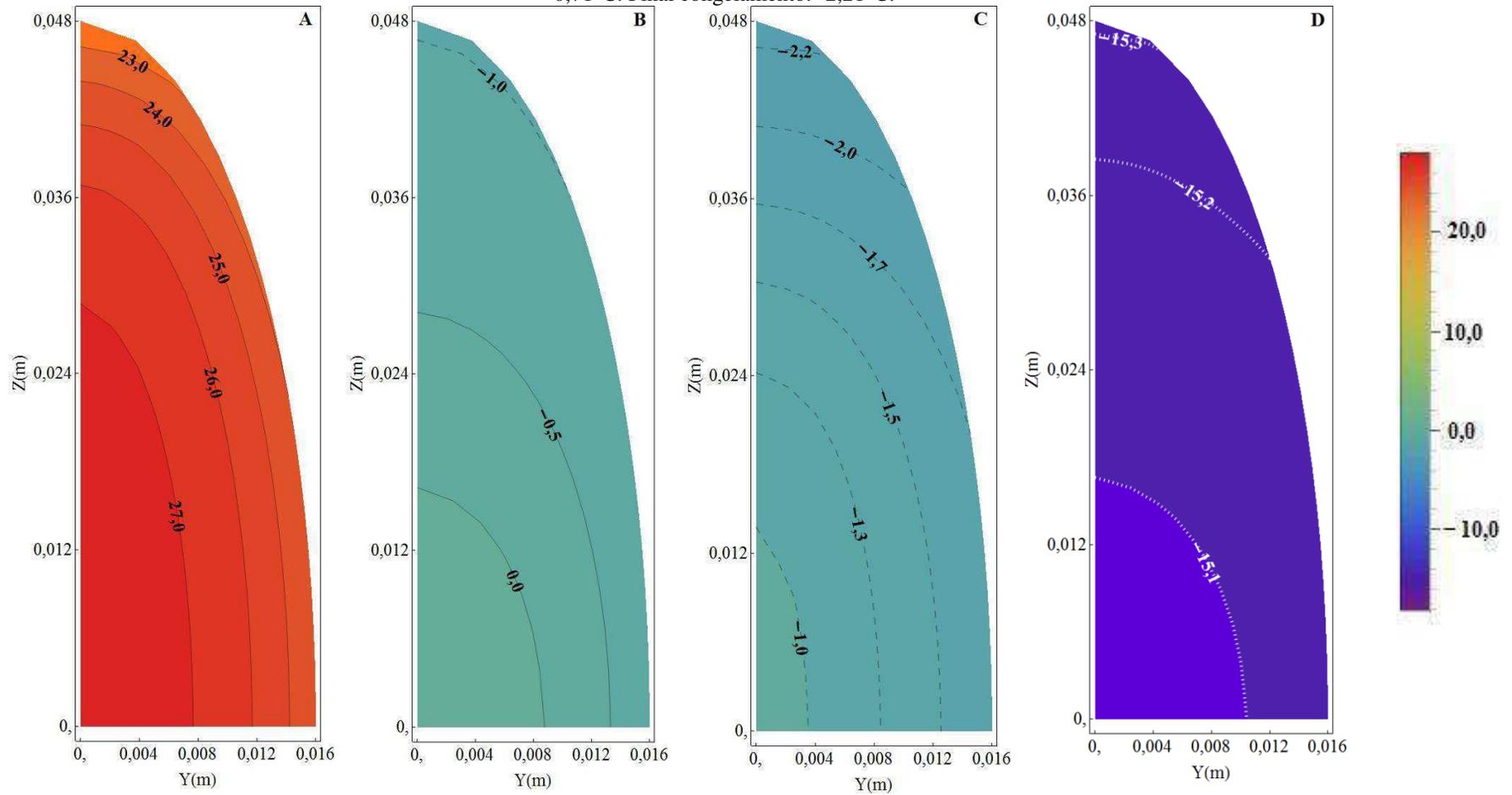
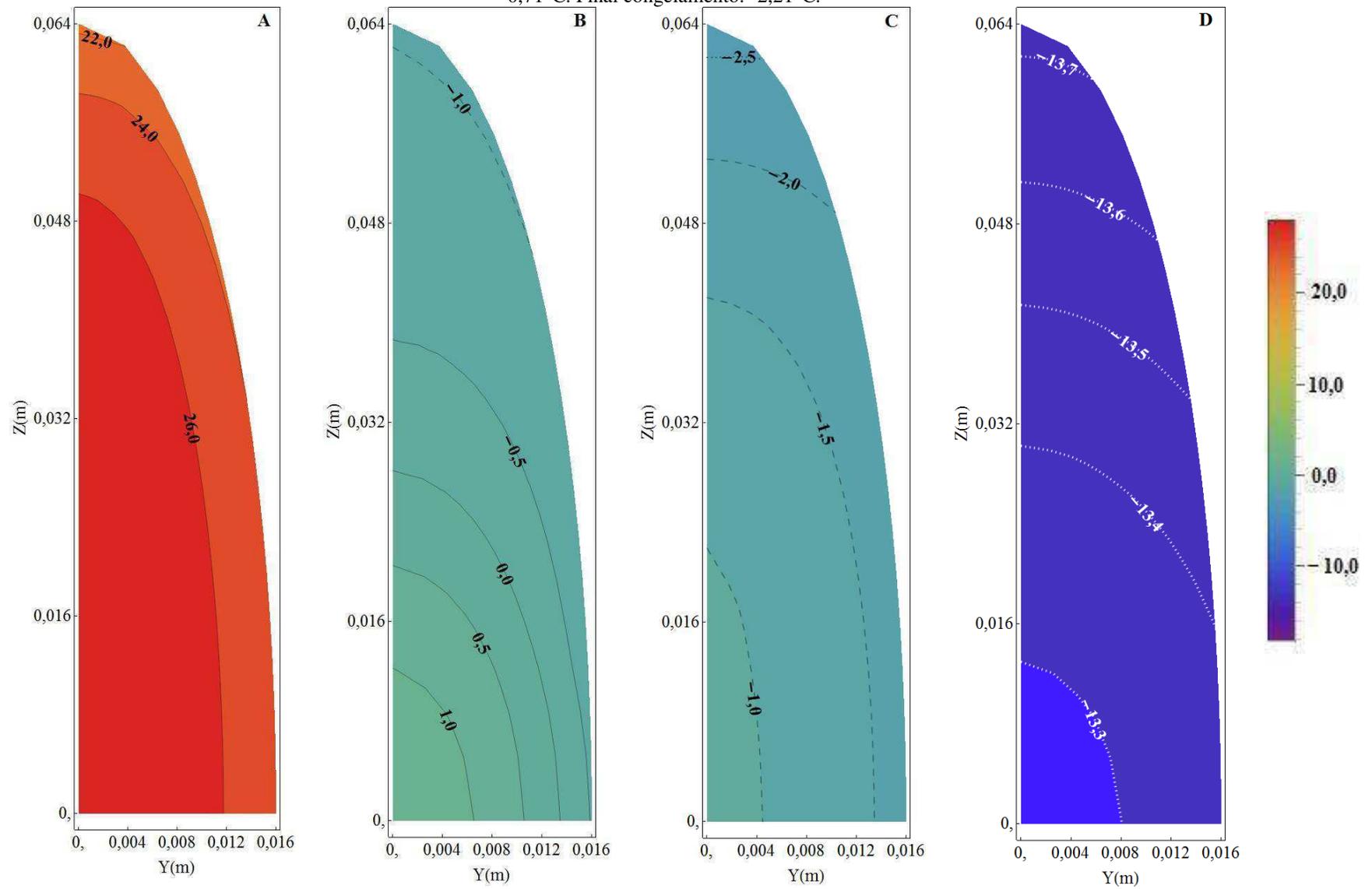


Figura 4.13 – Perfis de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para aspecto de forma igual a 4. (A) $t = 270$ s; (B) $t = 5000$ s; (C) $t = 15000$ s; (D) $t = 28500$ s. Início congelamento: $-0,71^{\circ}\text{C}$. Final congelamento: $-2,21^{\circ}\text{C}$.



CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Como última seção deste trabalho, serão apresentadas as conclusões possíveis de serem feitas diante dos resultados obtidos e dos estudos apresentados durante a revisão da literatura. Por fim, algumas sugestões serão dadas para basear futuros trabalhos no campo do congelamento de frutas.

5.1 Conclusões

Diante do problema da transferência de calor durante o congelamento com mudança de fase, desenvolvida a modelagem matemática e a solução numérica das equações que o compõem pelo método dos volumes finitos utilizando-se coordenadas esferoidais prolatas, e avaliado os resultados apresentados para os históricos e perfis de temperatura da banana, em diferentes condições operacionais (dimensões e forma) da banana, conclui-se que:

- (a) a modelagem matemática proposta pôde ser validada de forma direta somente para o período de resfriamento e de forma indireta para todo o processo;
- (b) os coeficientes de transporte para a banana com casca obtido foram: condutividade térmica (k) igual a $0,509 \text{ W / (m } ^\circ\text{C)}$ no período de pré congelamento e de $2,22 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$ no período de pós congelamento. Coeficiente de transferência de calor

convectivo (h) igual a $6,44 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C})$ no período de pré congelamento e $5,24 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C})$ no pós congelamento;

- (c) quanto menor for o tamanho da fruta, conseqüentemente maior a relação área/volume e mais rápido se dará o processo de congelamento;
- (d) quanto maior for o aspecto de forma, mais não-uniforme serão as frentes de congelamento, e elevados gradientes de temperatura são encontrados;
- (e) a mudança nas dimensões para um aspecto de forma fixo gera maior variação no formato do gráfico das taxas de congelamento do que somente a mudança do aspecto de forma;
- (f) ocorrerá formação de gelo em parte do interior da fruta mesmo não tendo ocorrido a cristalização em toda a superfície, dependendo da forma do corpo;
- (g) a ponta da fruta congela mais rapidamente do que toda sua superfície em qualquer condição operacional devido ao efeito de ponta. Isso não ocorre em corpos esféricos;
- (h) a modelagem apesar de usar coordenada esferoidal prolata também pode ser utilizada para objetos esféricos, mostrando a versatilidade do modelo.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para futuras pesquisas, pode-se citar:

- (a) estudar as diferentes curvas de resfriamento apresentadas para as frutas e procurar identificar qual o motivo para certas frutas terem curvas tão similares e outras terem curvas tão diferentes;
- (b) buscar um modelo que prediz de forma mais fiel o histórico de temperatura para a banana com casca, procurando implementar melhorias no simulador, tais como: levar em conta a transferência de massa, a variação do volume, a variação das propriedades durante todo o processo, utilização do método da entalpia, modelos aplicados a fase de cristalização que consideram que nem toda a água é congelada, etc.;
- (c) aplicar a modelagem proposta para solidificação de ligas metálicas afim de verificar se a solução numérica pode ser estendida a essa área.

REFERÊNCIAS

AGNELLI, M. E.; MASCHERONI, R. H. **Cryomechanical freezing. A model for the heat transfer process.** Journal of Food Engineering, v. 47, n. 4, p. 263-270, 2001.

ANCOS, B. de; SÁNCHEZ-MORENO, C.; PASCUAL-TERESA, S. de; CANO, M. P. Fruit Freezing Principles. In: HUI, Y. H. **Handbook of Fruits and Fruit Processing.** 1. ed. Oxford: Blackwell Publishing, 2006. cap. 4.

ANZALDÚA-MORALES, A; ANDERSON, J. A.; BRUSEWITZ, G. H. **Pecan Texture as Affected by Freezing Rates, Storage Temperature, and Thawing Rates.** Journal of Food Science, v. 64, n. 2, p. 332-335, 1999.

ASHRAE Refrigeration Handbook. **Thermal properties of foods.** American Society of Heating, Refrigeration and air-Conditioning Engineers, Inc., Atlanta, 1998a.

ASHARE Refrigeration Handbook. **Cooling and freezing time of foods.** American Society of Heating, Refrigeration and air-Conditioning Engineers, Inc., Atlanta, 1998b.

BAIL, A. Le; CHEVALIER, D.; GHOUL, M. **Freezing and ice crystal formed in a cylindrical food model: part I. Freezing at atmospheric pressure.** Journal of Food Engineering, v. 46, n. 4, p. 277-285, 2000.

BECKER, B. R.; FRICKE, B. A. **Freezing Times of regularly shaped food items.** International Communications in Heat and Mass Transfer, v. 26, n. 5, p. 617-626, 1999.

BERRY, M.; FLETCHER, J.; MCCLURE, P.; WILKINSON, J. Effects of Freezing on Nutritional and Microbiological Properties of Foods. In: HUI, Y. H. **Handbook of Fruits and Fruit Processing.** 1. ed. Oxford: Blackwell Publishing, 2006. cap. 2.

BOMBEN, J. L.; KING, C. J.; HAYES, T. L. **Cold-stage scanning electron microscope measurement of ice morphology in apple tissues as function of freezing rate.** Cryobiology, v. 20, n. 5, p. 574-586, 1983.

BUDIMANA, H.; TALIBB, J. **Prolate Spheroidal Coordinate: An Approximation To Modeling Of Ellipsoidal Drops In Rotating Disc Contractor Column.** Journal of Science and Technology, v. 3, p. 87-95, 2011.

CAMPAÑONE, L. A.; SALVADORI, V. O.; MASCHERONI, R. H. **Food freezing with simultaneous surface dehydration: approximate prediction of freezing time.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 48, n. 6, p. 1205-1213, 2005.

CLELAND, A. C.; EARLE, R. L. **Freezing time prediction for foods – a simplified procedure.** International Journal of Refrigeration, v. 5, n. 3, p. 134-140, 1982.

DELGADO, A. E.; SUN, D. **Heat and mass transfer models for predicting freezing processes – a review.** Journal of Food Engineering, v. 47, n. 3, p. 157-174, 2001.

ERDOGDU, F. **A review on simultaneous determination of thermal diffusivity and heat transfer coefficient.** Journal of Food Engineering, v. 86, n. 3, p. 453-459, 2008.

FAOSTAT, FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATION OF THE UNITED NATIONS, 2016. Disponível em: <<http://faostat3.fao.org/browse/Q/QC/E>>. Acesso em: 25 de maio de 2016.

FONSECA, F.; CHASSAGNE-BERCES, S.; POIRIER, C.; DEVAUX, M.; PIGORINI, G.; GIRAULT, C.; MARIN, M.; GUILLON, F. **Changes in texture, cellular structure and cell wall composition in apple tissue as a result of freezing.** Food Research International, v. 42, n. 7, p. 788-797, 2009.

FONSECA, F.; CHASSAGNE-BERCES, S.; CITEAU, M.; MARIN, M. **Freezing protocol effect on quality properties of fruit tissue according to the fruit, the variety and the stage of maturity.** Food Science and Technology, v. 43, n. 9, p. 1441-1449, 2010.

FRICKE, B. A.; BECKER, B. R. **Evaluation of thermophysical property models for foods.** HVAC&R Research, v. 7, n. 4, p. 311-330, 2001.

GÓRAL, D.; KLUZA, F. **Cutting test application to general assessment of vegetable texture changes caused by freezing.** Journal of Food Engineering, v. 95, n. 2, p. 346-351, 2009.

GUANGMING, C.; HAIYING, W.; SHAOZHI, Z. **Experimental study on the freezing characteristics of four kind of vegetables.** LWT Food Science and Technology, v. 40, n. 6, p. 1112-1116, 2007.

GULATI, T.; DATTA, A. K. **Enabling computer-aided food process engineering: property estimation equations for transport phenomena-based models.** Journal of Food Engineering, v. 116, n. 2, p. 483-504, 2013.

HOUSSAIN, Md. M.; CLELAND, D. J.; CLELAND, A. C. **Prediction of freezing and thawing times for foods of regular multi-dimensional shape by using an analytically derived geometric factor.** International Journal of Refrigeration, v. 15, n. 4, p. 227-234, 1991a.

HOUSSAIN, Md. M.; CLELAND, D. J.; CLELAND, A. C. **Prediction of freezing and thawing times for foods of two-dimensional irregular shape by using a semi-analytical geometric factor.** International Journal of Refrigeration, v. 15, n. 4, p. 235-240, 1991b.

HOUSSAIN, Md. M.; CLELAND, D. J.; CLELAND, A. C. **Prediction of freezing and thawing times for foods of three-dimensional irregular shape by using a semi-analytical geometric factor.** International Journal of Refrigeration, v. 15, n. 4, p. 241-246, 1991c.

HUANG, H.; JIAN, Q.; JIANG, Y.; DUAN, X.; QU, H. **Enhanced chilling tolerance of banana fruit treated with malic acid prior to low-temperature storage.** Postharvest Biology and Technology, v. 111, p. 209-213, 2016.

ILLICALI, C.; ICIER, F. **Freezing time prediction for partially dried papaya puree with infinite cylinder geometry.** Journal of Food Engineering, v. 100, n. 4, p. 696-704, 2010.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 979p.

LEBLANC, D.I.; KOK, R.; TIMBERS, G.E. **Freezing of a parallelepiped food product. Part 2. Comparison of experimental and calculated results**. International Journal of Refrigeration, v.13, n.6, p.379-392, 1990.

LIMA, A.G.B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: Secagem de banana**. 239p. Tese, UNICAMP, Campinas, 1999.

LIMA, W. C. P. de. **Transferência de calor no resfriamento / congelamento e pós-congelamento. Líquidos: modelagem e simulação**. 22p. Trabalho de conclusão de curso, UFCG, Campina Grande, 2012.

LIMEIRA, R. DA R. **Solidificação de ligas metálicas via método dos volumes finitos**. 51p. Trabalho conclusão de curso, UFCG, Campina Grande, 2003.

LÓPEZ-LEIVA, M.; HALLSTROM, B. **The original Plank equation and its use in the development of food freezing rate predictions**. Journal of Food Engineering, v. 58, n. 3, p. 267-275, 2003.

LUO, Z.; LI, D.; DU, R.; MOU, W. **Hydrogen sulfide alleviates chilling injury of banana fruit by enhanced antioxidant system and proline content**. Scientia Horticulturae, v. 183, p. 144-151, 2015.

MALISKA, C.R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: Fundamentos e coordenadas generalizadas**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora S.A., 2004. 453p.

MAZUR, P. **Freezing of living cells: mechanisms and implications**. American Journal Physiol, v. 247, n. 3, p. C125-C142, 1984.

NESVADBA, P. Thermal Properties and Ice Crystal Development in Frozen Foods. In: EVANS, J. A. **Frozen Food Science and Technology**. 1. ed. Oxford: Blackwell Publishing, 2008. cap 1.

NI, Y.; ZHAO, J.; LIU, F.; WEN, X.; XIAO, H. **State diagram for freeze-dried mango: Freezing curve, glass transition line and maximal-freeze-concentration condition.** Journal of Food Engineering, v. 157, p. 49-56, 2015.

PEREIRA, A.; MARASCHIN, M. **Banana (*Musa spp*) from peel to pulp: Ethnopharmacology, source of bioactive compounds and its relevance for human health.** Journal of Ethnopharmacology, v. 160, p. 149–163, 2015.

PERUSELLO, C. A.; MARIANI, V. C.; AMARANTE, A. C. do. **Combined modeling of thermal properties and freezing process by convection applied to green beans.** Applied Thermal Engineering, v. 31, n. 14-15, p. 2894-2901, 2011.

PETZOLD, G.; AGUILERA, J. M. **Ice Morphology: Fundamentals and Technological Applications in Foods.** Food Biophysics, v. 4, n. 4, p. 378-396, 2009.

PHAM, Q. T. **Extension to Planck's equation for predicting freezing times of foodstuffs of simple shapes.** International Journal of Refrigeration, v. 7, n. 6, p. 377-383, 1984.

PHAM, Q. T. **Analytical method for predicting freezing times of rectangular blocks of foodstuffs.** International Journal of Refrigeration, v. 8, n. 1, p. 43-47, 1985.

PHAM, Q. T. **Prediction of Calorimetric Properties and Freezing Time of Foods from Composition Data.** Journal of Food Engineering, v. 30, n. 1-2, p. 95-107, 1996.

PHAM, Q. T. Modelling of Freezing Processes. In: EVANS, Judith A. **Frozen Food Science and Technology.** 1. ed. Oxford: Blackwell Publishing, 2008. cap. 3.

PHAM, Q. T. **Freezing Time formulas for foods with low moisture content, low freezing point and for cryogenic freezing.** Journal of Food Engineering, v. 127, p. 85-92, 2014.

PHAM, Q. T.; BAIL, A.; TREMEAC, B. **Analysis of stresses during the freezing of solid spherical foods.** International Journal of Refrigeration, v. 29, n. 1, p. 125-133, 2006.

POWER, H.; STEVENS, D.; ROCCA, A.; ROCCA, V. **Estimating the temperature evolution of foodstuffs during freezing with a 3D meshless numerical method.** Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 53, p. 46-55, 2015.

RAHMAN, M. S.; GUIZANI, N.; AL-KHASEIBI, M.; AL-HINAI, S. A.; AL-MASKRI, S. S.; AL-HAMHAMI, K. **Analysis of cooling curve to determine the end point of freezing.** Food Hydrocolloids, v. 16, n. 6, p. 653-659, 2002.

SALVADORI, V. O.; MASCHERONI, R. H. **Prediction of freezing and thawing times of foods by means of a simplified analytical method.** Journal of Food Engineering, v. 13, n. 1, p. 67-78, 1991.

SALVADORI, V. O.; MASCHERONI, R. H.; MICHELIS, A. **Freezing of strawberry pulp in large containers: experimental determination and prediction of freezing times.** International Journal of Refrigeration, v. 19, n. 2, p. 87-94, 1996.

SANZ, P. D.; RAMOS, M.; MASCHERONI, R. H. **Using Equivalent Volumetric Enthalpy Variation to Determine the Freezing Time in Foods.** Journal of Food Engineering, v. 27, n. 2, p. 177-190, 1996.

SEO, S.; NA, C.; YOUN, D.; YOO, S.; PARK, S.; SON, H. **Effectiveness of banana additions for completion of stuck and sluggish fermentation of blueberry wine.** Food Science and Technology, v. 64, n. 2, p. 1143-1148, 2015.

SILVA, W. P. da. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional II.** 2015. Acesso em: <<http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/TCMFC.htm>>. Acesso em: 15 maio 2015.

SILVA, W. P. da; SILVA, C. M. D. P. S. e; GAMA, F. J. A. **A improved technique for determining transport parameters in cooling processes.** Journal of Food Engineering, v. 111, n. 2, p. 394-402, 2012.

SILVA, M. M. da. **Modelagem e simulação da transferência de calor em alimentos com forma paralelepipedal. Estudo de caso: resfriamento e congelamento de batatas.** 64p. Dissertação, UFCG, Campina Grade, 2005.

SINGH, B.; SINGH, J. P.; KAUR, A.; SINGH, N. **Bioactive compounds in banana and their associated health benefits – A review.** Food Chemistry, v. 206, p. 1-11, 2016.

TOCCI, A. M.; MASCHERONI, R. H. **Freezing times of meat balls in belt freezers: experimental determination and prediction by different methods.** International Journal of Refrigeration, v. 17, n. 7, p. 445-452, 1994.

VAN BUGGENHOUT, S.; LILLE, M.; MESSAGIE, I.; VAN LOEY, A.; AUTIO, K.; HENDRICKX, M. **Impact of pretreatment and freezing conditions on the microstructure of frozen carrots: Quantification and relation to texture loss.** European Food Research and Technology, v. 222, n. 5, p. 543-553, 2006.

WANG, Y.; LUO, Z.; KHAN, Z. U.; MAO, L.; YING, T. **Effect of nitric oxide on energy metabolism in postharvest banana fruit in response to chilling stress.** Postharvest Biology and Technology, v. 108, p. 21-27, 2015.

WANG, Z.; WU, H.; ZHAO, G.; LIAO, X.; CHEN, F.; WU, J.; HU, X. **One-dimensional finite-difference modeling on temperature history and freezing time of individual food.** Journal of Food Engineering, v. 79, n. 2, p. 502-510, 2007.

WEISSTEIN, E. W. **Prolate Spheroidal Coordinates.** 2016. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/ProlateSpheroidalCoordinates.html>>. Acesso em: 8 maio 2016.

WEISSTEIN, E. W. **Prolate Spheroid.** 2016. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/ProlateSpheroid.html>>. Acesso em: 8 maio 2016.

YANG, C.; WENG, H. **Electronic Quantum Motions in Hydrogen Molecule Ion.** International Journal of Quantum Chemistry, v. 111, n. 12, p. 2980-2999, 2011.