Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Problemas Críticos via Categoria de Lusternik-Schnirelman

por

Jéssyca Lange Ferreira Melo [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Problemas Críticos via Categoria de Lusternik-Schnirelman

por

Jéssyca Lange Ferreira Melo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro (UNICAMP)

____

Prof. Dr. Ângelo Roncalli Furtado de Holanda (UFCG)

____

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves (UFCG)
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2010

Resumo

Neste trabalho estudamos a multiplicidade de soluções não triviais para o seguinte problema crítico:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P}$$

nos casos em que $q = 2$ e $2 < q < 2^*$. Seguindo Alves & Ding [2], Lazzo [14], Rey [19], e Willem [21], mostraremos a existência de, pelo menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais para o problema (P).

Palavras-chaves: Categoria de Lusternik-Schnirelman, Crescimento crítico, Constante de Sobolev.

Abstract

In this work we studied the multiplicity of nontrivial solutions for the follow critical problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P}$$

in the cases $q = 2$ and $2 < q < 2^*$. Following Alves & Ding [2], Lazzo [14], Rey [19], e Willem [21], we show the existence of, at least, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ nontrivial solutions for the problem (P).

Keywords: Lusternik-Schnirelman category, Critical growth, Best Sobolev constant.

Agradecimentos

A Deus, por me dar forças e consolo para chegar até aqui.

Aos meus pais, Adeilto e Conceição, que me deram todo apoio e carinho para a concretização de mais essa etapa da minha vida. Amo vocês!

Ao professor Claudianor, por toda atenção e paciência durante a orientação no mestrado e no projeto de iniciação científica, ainda na graduação. Pelo esforço para que eu terminasse minha graduação a tempo de não perder a vaga para o mestrado. Por acreditar na minha capacidade e pela formação que o senhor meu deu, o meu muito obrigada!

Ao professor Alciônio, pela grande orientação dada no projeto de iniciação científica.

Aos professores Marcelo Montenegro e Ângelo Roncalli pela disponibilidade em me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

A todos os professores de graduação deste departamento, que ajudaram na minha formação e sempre me incentivaram para que eu fizesse esse mestrado.

A todos os professores da pós-graduação, que contribuiram para a formação do meu conhecimento e diretamente para a concretização deste trabalho.

A todos os funcionários da UAME.

Aos meus colegas de graduação, tanto do curso de Matemática quanto de outros cursos pelos momentos de estudo e/ou diversão.

Aos meus colegas da pós-graduação. Agradeço as experiências compartilhadas com vocês e espero que todos tenham um futuro brilhante e uma carreira promissora.

Aos meus familiares: meus avós, tios, tias, primos, primas,... por todo apoio, carinho e pela torcida que sempre tiveram por mim.

Ao Rodrigo, mais que um namorado, um amigo e "professor particular"que me ajudou bastante neste trabalho e me apoiou em todos os momentos de dificuldade. Te amo muito!

Ao projeto Casadinho e ao INCT-Matemática.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, muito obrigada!

Dedicatória

Aos meus pais, Adeilto e Mª da Conceição.

Conteúdo

Notações

$B(x,r)$	Bola aberta de centro em x e raio r;
B_r	Bola aberta de centro em 0 e raio r;
$\mathrm{cat}_X(A)$	categoria de A em X;
$\mathrm{cat}_{X,Y}(A)$	categoria de A em X relativa a Y;
$\Vert.\Vert_r$	norma no espaço L^r;
$\Vert.\Vert_\infty$	norma no espaço L^∞;
$\Vert.\Vert$	norma no espaço H_0^1;
$o_n(1)$	ordem pequena;
$O_n(\varepsilon)$	ordem grande;
$\vert\Omega\vert$	medida do conjunto Ω;
X'	dual do espaço X;
$2^* = \frac{2N}{N-2}$	expoente crítico de Sobolev, para $N \geq 3$;
S	constante de Sobolev, dada por $S = \inf\limits_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\Vert\nabla u\Vert_2^2}{\Vert u\Vert_{2^*}^2}$;
$\lambda_1(\Omega)$	constante de Poincaré, dada por $\lambda_1(\Omega) = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\Vert\nabla u\Vert_2^2}{\Vert u\Vert_2^2}$, se $\vert\Omega\vert < \infty$;

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega); \mathrm{supp} u \subset\subset \Omega\}$.

Introdução

Em nosso trabalho estudamos a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para os seguintes problemas elípticos críticos:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P_λ}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P_μ}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, $\lambda_1(\Omega)$ a constante de Poincaré, $\mu > 0$ e $2 < q < 2^*$.

A grande dificuldade em mostrar a existência de solução não trivial para um problema crítico deve-se à falta de compacidade da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$, e com isso, em geral, o funcional energia associado a tal problema elíptico não satisfaz a condição de Palais-Smale (ou condição PS). Neste trabalho, associaremos a multiplicidade de soluções dos problemas (P_λ) e (P_μ) à geometria do domínio Ω, mais precisamente, usando a categoria de Lusternik-Schnirelman $\operatorname{cat}_\Omega(\Omega)$.

O **Capítulo 1** foi dedicado ao estudo da constante de Sobolev

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \|\nabla u\|_2^2 > 0,$$

que será utilizada ao longo dos próximos capítulos da dissertação. Para isso, enunciamos e demonstramos um Lema de Concentração e Compacidade (Lema 1.1), que caracteriza a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. O nosso objetivo foi mostrar que a constante S é atingida, isto é, que existe $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u\|_{2^*} = 1 \ \text{ e } \ \|\nabla u\|_2^2 = S,$$

e ao verificar que o problema de mostrar que S é atingido é invariante por translações e dilatações, um resultado devido à P. L. Lions (Teorema 1.3) garante a existência de um minimizante para S.

No **Capítulo 2**, estudamos a existência de soluções para o problema (P_λ). Trabalhamos com o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \lambda \frac{u^2}{2} - \frac{(u^+)^{2^*}}{2^*} \right] dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

e com a norma $\|u\|_\lambda = \sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}$ em $H_0^1(\Omega)$, onde $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$. Mostramos que o funcional φ satisfaz a condição $(\text{PS})_d$, para todo $d < c^* = S^{N/2}/N$ (Lema 2.2), e que φ satisfaz a geometria do passo da montanha com nível minimax $0 < c < c^*$ (Teorema 2.4), ou seja, c é um valor crítico para φ, mostrando a existência de solução não trivial para o problema (P_λ). Por fim, a Proposição 2.6 afirma que se o problema (P_λ) admite solução não trivial, então $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$; mais ainda, se Ω é um domínio limitado suave estrelado, então $\lambda < 0$.

No **Capítulo 3**, estudamos a multiplicidade de soluções para o problema (P_λ). Na Seção 3.1, definimos categoria, segundo Lusternik-Schnirelman. Na Seção 3.2, demonstramos algumas propriedades elementares de categoria, que foram úteis no decorrer do nosso trabalho. Na Seção 3.3, demonstramos teoremas do tipo minimax, que foram utilizados na Seção 3.4, onde foi enunciado o resultado principal deste capítulo, que segue devido a Lazzo [14], quando $N = 4$, e devido a Rey [19], quando $N \geq 5$:

Teorema 0.1 *Se Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, então existe $-\lambda_1(\Omega) < \lambda^* < 0$ tal que, para $\lambda \in (\lambda^*, 0)$, o problema (P_λ) tem, no mínimo, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

Com isso, concluímos que a multiplicidade de soluções do problema (P_λ) está ligada à geometria do domínio Ω.

No **Capítulo 4**, estudamos a multiplicidade de soluções para o problema (P_μ). Para isso, trabalhamos com o funcional

$$I_\mu(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

e com a variedade de Nehari associada ao funcional I_μ,

$$\mathcal{M}_\mu = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}; I'_\mu(u).u = 0\}.$$

Segundo Alves & Ding [2], temos o resultado principal deste capítulo:

Teorema 0.2 *Se Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $2 < q < 2^*$, então existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema (P_μ) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

Para a demonstração desse teorema, usamos alguns lemas técnicos demonstrados na Seção 4.2 e 4.3, e procedemos de maneira semelhante à demonstração do Teorema 0.1.

No **Apêndice A**, enunciamos uma definição e um teorema da teoria da medida, que foram úteis para o enunciado e a demonstração do Lema de Concentração e Compacidade (Lema 1.1) e para o enunciado do Lema 1.2.

No **Apêndice B**, demonstramos o Lema de Deformação (Lema B.7), útil nas demonstrações da Seção 3.3. Dois resultados importantes que também foram utilizados ao longo da dissertação e que estão neste apêndice são o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema B.3) e o Princípio Variacional de Ekeland (Teorema B.8).

Por fim, no **Apêndice C**, enunciamos resultados diversos que foram utilizados ao longo do nosso trabalho.

Capítulo 1

Resultados envolvendo a constante de Sobolev S

Este capítulo é dedicado ao estudo da constante de Sobolev

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \|\nabla u\|_2^2 > 0. \tag{1.1}$$

Nosso objetivo principal é mostrar que S é atingido, isto é, que existe $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u\|_{2^*} = 1 \;\; \text{e} \;\; \|\nabla u\|_2^2 = S.$$

Para isso, usamos alguns resultados da Teoria da Medida (Apêndice A) e, seguindo [4], [5], [16] e [17], estudamos a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.1 (Concentração e Compacidade) *Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.2}$$

$$|\nabla(u_n - u)|^2 \rightharpoonup \mu \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \tag{1.3}$$

$$|u_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \tag{1.4}$$

$$u_n \to u \quad q.t.p. \quad em \quad \mathbb{R}^N. \tag{1.5}$$

Defina

$$\mu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2 dx,$$

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} dx.$$

Então,

$$\|\nu\|^{2/2^*} \leq S^{-1}\|\mu\|, \tag{1.6}$$

$$\nu_\infty^{2/2^*} \leq S^{-1}\mu_\infty, \tag{1.7}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\nabla u_n\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\| + \mu_\infty, \tag{1.8}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty. \tag{1.9}$$

Mais ainda, se $u = 0$ e $\|\nu\|^{2/2^*} = S^{-1}\|\mu\|$, então μ e ν são medidas singulares e estão concentradas em um único ponto.

Demonstração:

Suponha inicialmente $u = 0$. Escolhendo $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos da desigualdade de Sobolev (C.1)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |hu_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq S^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(hu_n)|^2 dx. \tag{1.10}$$

Usando (1.2) e (1.3), obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*}|u_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \to \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{2/2^*}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^2|\nabla u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu.$$

De $\nabla(hu_n) = h\nabla u_n + u_n\nabla h$, temos

$$|\|\nabla(hu_n)\|_2 - \|h\nabla u_n\|_2| \leq \|u_n\nabla h\|_2,$$

e como $u_n \to 0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, tem-se também

$$\|u_n\nabla h\|_2^2 = \int_{B_R} |\nabla h|^2|u_n|^2 dx \leq c\int_{B_R} |u_n|^2 dx \to 0,$$

pois $\text{supp} h \subset B_R$ para algum $R > 0$. Assim,

$$|\|\nabla(hu_n)\|_2 - \|h\nabla u_n\|_2| \to 0$$

implicando no limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(hu_n)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h^2|\nabla u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu$$

e na desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{2/2^*} \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\mu. \tag{1.11}$$

Considerando a sequência $(h_n) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\begin{array}{rcl} h_n : \mathbb{R}^N & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_n \\ 0, & x \in B_{n+1}^c \\ 0 \leq h_n \leq 1, & \end{cases} \end{array}$$

segue do Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^{2^*} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} |h_n|^{2^*} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\nu = \|\nu\|,$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |h_n|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} |h_n|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\mu = \|\mu\|.$$

Portanto, de (1.11) segue que

$$\|\nu\|^{2/2^*} \leq S^{-1}\|\mu\|,$$

valendo então (1.6).

Fixe $R > 0$ e $\psi_R \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$\begin{cases} \psi_R(x) = 1, & |x| \geq R+1, \\ \psi_R(x) = 0, & |x| < R, \\ 0 \leq \psi_R(x) \leq 1 & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.12}$$

Da desigualdade de Sobolev,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R u_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\psi_R u_n)|^2 dx,$$

obtemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R u_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq S^{-1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\psi_R u_n)|^2 dx. \tag{1.13}$$

Observando que

$$|\nabla(\psi_R u_n)|^2 = |u_n\nabla\psi_R + \psi_R\nabla u_n|^2 = u_n^2|\nabla\psi_R|^2 + 2u_n\psi_R\langle\nabla\psi_R, \nabla u_n\rangle + \psi_R^2|\nabla u_n|^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n\psi_R\langle\nabla\psi_R, \nabla u_n\rangle dx = \int_{|x|\leq R+1} u_n\psi_R\langle\nabla\psi_R, \nabla u_n\rangle dx,$$

temos, usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\int_{|x|\leq R+1} u_n\psi_R\langle\nabla\psi_R,\nabla u_n\rangle dx\right| &\leq \int_{|x|\leq R+1}|u_n||\psi_R||\nabla\psi_R||\nabla u_n|dx\\ &\leq c_R\int_{|x|\leq R+1}|u_n||\nabla u_n|dx\\ &\leq c_R\|u_n\|_{2,B_{R+1}}\|\nabla u_n\|_{2,B_{R+1}}\to 0,\end{aligned}$$

pois $u_n \to 0$ em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e $\|\nabla u_n\|_{2,B_{R+1}}$ é limitada (aqui, $c_R = \max\limits_{B_{R+1}}|\psi_R||\nabla\psi_R|$); também,

$$0\leq\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla\psi_R|^2dx = \int_{|x|\leq R+1} u_n^2|\nabla\psi_R|^2dx \leq \widetilde{c}_R\int_{|x|\leq R+1} u_n^2dx = \widetilde{c}_R\|u_n\|_{2,B_{R+1}}\to 0,$$

onde $\widetilde{c}_R = \max\limits_{B_{R+1}}|\nabla\psi_R|^2$. Logo,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\psi_R u_n)|^2dx &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^2|\nabla\psi_R|^2+2u_n\psi_R\langle\nabla\psi_R,\nabla u_n\rangle+\psi_R^2|\nabla u_n|^2)dx\\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R^2|\nabla u_n|^2dx,\end{aligned}$$

e de (1.13) segue que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R u_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\leq S^{-1}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_R^2|\nabla u_n|^2dx. \tag{1.14}$$

Por outro lado,

$$\int_{|x|\geq R+1}|\nabla u_n|^2dx = \int_{|x|\geq R+1}|\nabla u_n|^2\psi_R^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\psi_R^2dx =$$

$$\int_{|x|\geq R}|\nabla u_n|^2\psi_R^2dx \leq \int_{|x|\geq R}|\nabla u_n|^2dx$$

e

$$\int_{|x|\geq R+1}|u_n|^{2^*}dx = \int_{|x|\geq R+1}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx =$$

$$\int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}\psi_R^{2^*}dx \leq \int_{|x|\geq R}|u_n|^{2^*}dx.$$

Logo, do Teorema do Sanduíche e de (1.14)

$$\nu_\infty^{2/2^*} = \lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_R|^{2^*}|u_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}\leq S^{-1}\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\psi_R^2dx = S^{-1}\mu_\infty,$$

donde segue (1.7).

Suponha agora que $\|\nu\|^{2/2^*} = S^{-1}\|\mu\|$. Dada $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{1/2^*} \leq S^{-1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu\right)^{1/2}; \tag{1.15}$$

e da desigualdade de Hölder ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} 1 h^2 d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} 1^{N/2} d\mu\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h^2|^{\frac{N}{N-2}} d\mu\right)^{\frac{N-2}{N}} = \|\mu\|^{\frac{2}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu\right)^{\frac{N-2}{N}},$$

ou seja,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} h^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mu\|^{\frac{1}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Usando a desigualdade anterior e (1.15) segue que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{1/2^*} \leq S^{-1/2}\|\mu\|^{\frac{1}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu\right)^{\frac{1}{2^*}},$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu \leq S^{-2^*/2}\|\mu\|^{\frac{2^*}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\mu, \quad \forall h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

o que implica

$$\nu(\Omega) \leq S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\Omega), \quad \forall \text{ conjunto } \Omega \text{ mensurável.}$$

Mostremos que $\nu(\Omega) = S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\Omega)$, para todo conjunto Ω mensurável. De fato, suponha que existe $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ mensurável tal que $\nu(\Omega_0) < S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\Omega_0)$. Por hipótese,

$$\|\nu\|^{2/2^*} = S^{-1}\|\mu\| \Rightarrow \|\nu\| = S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \|\mu\|,$$

ou seja,

$$\nu(\mathbb{R}^N) = S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\mathbb{R}^N). \tag{1.16}$$

Note que

$$\begin{aligned} \nu(\mathbb{R}^N) &= \nu(\Omega_0) + \nu(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_0) \\ &< S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\Omega_0) + S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_0) \\ &= S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} [\mu(\Omega_0) + \mu(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_0)] \\ &= S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

o que contradiz (1.16). Logo,

$$\nu = S^{-\frac{2^*}{2}} \|\mu\|^{\frac{2}{N-2}} \mu. \tag{1.17}$$

Segue então de (1.11) que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{2^*} d\nu\right)^{1/2^*} \|\nu\|^{1/N} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^2 d\nu\right)^{1/2}, \quad \forall h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e então para cada aberto Ω,

$$\nu(\Omega)^{1/2^*} \nu(\mathbb{R}^N)^{1/N} \leq \nu(\Omega)^{1/2}.$$

Fixado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto tal que $\nu(\Omega) > 0$, ficamos com

$$\nu(\mathbb{R}^N)^{1/N} \leq \nu(\Omega)^{1/2} \nu(\Omega)^{-1/2^*} = \nu(\Omega)^{1/N}$$

donde $\nu(\mathbb{R}^N) \leq \nu(\Omega)$ e, consequentemente, $\nu(\Omega) = \nu(\mathbb{R}^N)$. Escrevendo $\nu = \nu_1 + \nu_2$, onde ν_1 é a parte não singular de ν e ν_2 é a parte singular, então ν_1 também satisfaz $\nu_1(\Omega) = \nu_1(\mathbb{R}^N)$, para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto tal que $\nu_1(\Omega) > 0$, e pela continuidade da função $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(R) = \nu_1(B_R)$, segue que $\nu_1 = 0$. Logo, $\nu = \nu_2$, ou seja, ν é uma medida singular. Agora, se fosse ν concentrada em dois pontos distintos de $\mathbb{R}^N$, digamos, p_1 e p_2, tomando $B_{r_1}(p_1)$ e $B_{r_2}(p_2)$ de modo que $B_{r_1}(p_1) \cap B_{r_2}(p_2) = \varnothing$, teríamos

$$\nu(\mathbb{R}^N) \geq \nu(B_{r_1}(p_1) \cup B_{r_2}(p_2)) = \nu(B_{r_1}(p_1)) + \nu(B_{r_2}(p_2)) = \nu(\mathbb{R}^N) + \nu(\mathbb{R}^N) = 2\nu(\mathbb{R}^N),$$

um absurdo. Portanto ν é concentrada em um único, e de (1.17) segue que μ também o é.

Considere agora o caso geral ($u \neq 0$). Escreva $v_n = u_n - u$. Como $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $|\nabla v_n|^2 \rightharpoonup \mu$ e $|v_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, e $v_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, então, do caso estudado anteriormente, segue (1.6).

Observe que

$$|\nabla u_n|^2 = |\nabla v_n + \nabla u|^2 = |\nabla v_n|^2 + 2\langle \nabla v_n, \nabla u\rangle + |\nabla u|^2;$$

logo para $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |\nabla v_n|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \langle \nabla v_n, \nabla u\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |\nabla u|^2 dx,$$

e como $|\nabla v_n|^2 \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi |\nabla u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |\nabla u|^2 dx,$$

ou seja,

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu + |\nabla u|^2 \ \text{ em } \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \tag{1.18}$$

Pelo Lema de Brezis-Lieb (Lema C.6), para toda $h \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{2^*}dx = \lim_{n\to\infty}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} h|u_n|^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} h|v_n|^{2^*}dx\bigg).$$

Dada agora $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, existe $(f_s) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ tal que $f_s \to g$ em $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^N)$. Note que

$$\begin{aligned}
A_n &= \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} g|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, g\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{2^*}dx\bigg| \\
&= \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} (g-f_s)|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, g-f_s\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(g-f_s)|u|^{2^*}dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} f_s|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, f_s\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f_s|u|^{2^*}dx\bigg| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g-f_s||u_n|^{2^*}dx + \|\nu\|\|g-f_s\| + \int_{\mathbb{R}^N}|g-f_s||u|^{2^*}dx + \\
&\quad + \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} f_s|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, f_s\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f_s|u|^{2^*}dx\bigg| \\
&\leq \|\nu_n\|\|g-f_s\| + \|\nu\|\|g-f_s\| + \|\widetilde{\nu_n}\|\|g-f_s\| + \\
&\quad + \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} f_s|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, f_s\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f_s|u|^{2^*}dx\bigg|,
\end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{N}$, onde $\nu_n = |u_n|^{2^*}$ e $\widetilde{\nu} = |u|^{2^*}$. Fazendo $M = \sup\{\|\nu_n\|, \|\nu\|, \|\widetilde{\nu}\|\}$, e dado $\varepsilon > 0$, fixe s_0 suficientemente grande de modo que

$$\|g - f_{s_0}\| < \frac{\varepsilon}{4M};$$

daí

$$\begin{aligned}
A_n < \|\nu_n\|\frac{\varepsilon}{4M} + \|\nu\|\frac{\varepsilon}{4M} + \|\widetilde{\nu}\|\frac{\varepsilon}{4M} + \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} f_{s_0}|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, f_{s_0}\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f_{s_0}|u|^{2^*}dx\bigg| \leq \\
\leq \frac{3}{4}\varepsilon + \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} f_{s_0}|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, f_{s_0}\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f_{s_0}|u|^{2^*}dx\bigg|,
\end{aligned}$$

e agora, fixando n suficientemente grande de modo que

$$\bigg|\int_{\mathbb{R}^N} f_{s_0}|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, f_{s_0}\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f_{s_0}|u|^{2^*}dx\bigg| < \frac{\varepsilon}{4}$$

teremos

$$A_n = \bigg|\int_{\mathbb{R}^N} g|u_n|^{2^*}dx - \langle \nu, g\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{2^*}dx\bigg| < \varepsilon,$$

donde concluímos que para todo $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{n\to\infty}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} g|u_n|^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} g d\nu\bigg) = \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{2^*},$$

ou seja,

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu + |u|^{2^*} \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \tag{1.19}$$

Como $v_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2 dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla v_n|^2 dx + \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla u|^2 dx + \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} 2\langle \nabla v_n, \nabla u \rangle dx$$

e portanto

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2 dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{|x|\geq R} |\nabla u|^2 dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2 dx &= \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{|x|\geq R} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{|x|\geq R} |\nabla u|^2 dx \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |\nabla v_n|^2 dx \end{aligned}$$

Pelo Lema de Brezis-Lieb (Lema C.6), temos

$$\int_{|x|\geq R} |u|^{2^*} dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} dx - \int_{|x|\geq R} |v_n|^{2^*} dx \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} dx &= \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{|x|\geq R} |v_n|^{2^*} dx + \int_{|x|\geq R} |u|^{2^*} dx \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |v_n|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Portanto, pelo estudo feito anteriormente, segue (1.7).

Fixando novamente $R > 0$ e ψ_R como em (1.12), de (1.18) temos

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\nabla u_n\|_2^2 &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u_n|^2 dx \right) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R) |\nabla u_n|^2 dx \right] \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R) d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R) |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $R \to \infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx &= \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u_n|^2 dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R) d\mu + \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1-\psi_R)|\nabla u|^2 dx \\
&= \mu_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx
\end{aligned}$$

e portanto

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\nabla u_n\|_2^2 = \mu_\infty + \|\mu\| + \|\nabla u\|_2^2.$$

Usando agora (1.19), a demonstração de (1.9) segue de forma análoga.

■

A demonstração do próximo resultado pode ser vista em [16] e [17].

Lema 1.2 *Seja* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *tal que*

i) $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H_0^1(\Omega)$;

ii) $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \lambda$ *em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$;

iii) $|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu$ *em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

Então, para um conjunto de índices J*, no máximo enumerável, temos*

$$\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j > 0,$$

$$\lambda \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j\in J} \lambda_j \delta_{x_j}, \quad \lambda_j > 0,$$

$$\nu_j^{2/2^*} \geq S^{-1}\lambda_j, \quad \forall j \in J,$$

onde $x_j \in \overline{\Omega}$*,* δ_{x_j} *é a massa de Dirac em* x_j *e* S *é a constante de Sobolev (1.1).*

Para o próximo resultado, precisamos da seguinte notação. Dados $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, definimos

$$v^{y,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{N-2}{2}} v(\lambda x + y).$$

Observe que $v^{y,\lambda}$ satisfaz

$$\|\nabla v^{y,\lambda}\|_2 = \|\nabla v\|_2$$

e

$$\|v^{y,\lambda}\|_{2^*} = \|v\|_{2^*}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\nabla v^{y,\lambda}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\lambda^{\frac{N-2}{2}} v(\lambda x + y))|^2 dx \\
&= \lambda^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(\lambda x + y)|^2 dx \\
&= \lambda^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda \nabla v(\lambda x + y)|^2 dx
\end{aligned}$$

e usando mudança de variáveis,

$$\begin{aligned}
\|\nabla v^{y,\lambda}\|_2^2 &= \lambda^N . \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla v)(z)|^2 dz \\
&= \|\nabla v\|_2^2;
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|v^{y,\lambda}\|_{2^*}^{2^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^{\frac{N-2}{2}} v(\lambda x + y)|^{2^*} dx \\
&= \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |v(\lambda x + y)|^{2^*} dx \\
&= \lambda^N . \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |v(z)|^{2^*} dz \\
&= \|v\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}$$

Portanto, o problema de mostrar que S é atingido é invariante por translações e dilatações.

Teorema 1.3 (P.L. Lions, 1985) *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência satisfazendo*

$$\|u_n\|_{2^*} = 1, \|\nabla u_n\|_2^2 \to S.$$

Então, existe uma sequência $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ *tal que* $(u_n^{y_n,\lambda_n})$ *admite uma subsequência convergente em* $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$*. Em particular, existe um minimizante para* S*.*

Demonstração:

Defina as funções de concentração de Lévy,

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,\lambda)} |u_n|^{2^*} dx, \quad \lambda > 0.$$

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} Q_n(\lambda) = 0$$

e

$$\lim_{\lambda \to \infty} Q_n(\lambda) = 1.$$

Sendo Q_n contínua, existe $\lambda_n > 0$ tal que $Q_n(\lambda_n) = 1/2$. Mais ainda, existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$Q_n(\lambda_n) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,\lambda_n)} |u_n|^{2^*} dx = \int_{B(y_n,\lambda_n)} |u_n|^{2^*} dx = \frac{1}{2},$$

já que

$$\lim_{|y| \to \infty} \int_{B(y,\lambda_n)} |u_n|^{2^*} dx = 0.$$

Definindo $v_n = u_n^{y_n,\lambda_n}$, temos

$$\|v_n\|_{2^*} = \|u_n^{y_n,\lambda_n}\|_{2^*} = \|u_n\|_{2^*} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_2^2 = \|\nabla u_n^{y_n,\lambda_n}\|_2^2 = \|\nabla u_n\|_2^2 \to S,$$

e

$$\frac{1}{2} = \int_{B(y_n,\lambda_n)} |u_n|^{2^*} dx = \int_{B(0,1)} |u_n^{y_n,\lambda_n}|^{2^*} dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{2^*} dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^{2^*} dx. \tag{1.20}$$

Como (v_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ podemos supor, passando a uma subsequência, se necessário, que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\nabla(v_n - v)|^2 \rightharpoonup \mu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

$$|v_n - v|^{2^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

$$v_n \to v \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 1.1 temos

$$S = \lim \|\nabla v_n\|_2^2 = \overline{\lim} \|\nabla v_n\|_2^2 = \|\nabla v\|_2^2 + \|\mu\| + \mu_\infty \tag{1.21}$$

e

$$1 = \lim \|v_n\|_{2^*}^{2^*} = \overline{\lim} \|v_n\|_{2^*}^{2^*} = \|v\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty, \tag{1.22}$$

onde

$$\mu_\infty = \lim_{R \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{|x| \geq R} |\nabla v_n|^2 dx,$$

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|x|\geq R} |v_n|^{2^*} dx.$$

De (1.21), de (1.6), de (1.7) e da desigualdade de Sobolev (C.1), deduzimos que

$$S \geq S[(\|v\|_{2^*}^{2^*})^{2/2^*} + \|\nu\|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*}].$$

Segue então de (1.22) que $\|v\|_{2^*}^{2^*}$, $\|\nu\|$ e ν_∞ devem ser iguais a 0 ou 1. De fato,

$$S \geq S[(\|v\|_{2^*}^{2^*})^{2/2^*} + \|\nu\|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*}] \Rightarrow 0 \leq (\|v\|_{2^*}^{2^*})^{2/2^*} + \|\nu\|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*} \leq 1;$$

supondo que, $0 < \|v_n\|_{2^*}^{2^*} < 1$, como $2/2^* < 1$ temos

$$(\|v\|_{2^*}^{2^*})^{2/2^*} > \|v\|_{2^*}^{2^*}, \|\nu\|^{2/2^*} \geq \|\nu\|, \nu_\infty^{2/2^*} \geq \nu_\infty$$

implicando

$$\|v\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty < (\|v\|_{2^*}^{2^*})^{2/2^*} + \|\nu\|^{2/2^*} + \nu_\infty^{2/2^*} \leq 1,$$

o que contradiz (1.22).

Da igualdade (1.20) segue que $\nu_\infty \leq 1/2$. Com efeito, por Brezis-Lieb (Lema C.6) temos

$$\int_{B(0,1)} |v|^{2^*} dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{2^*} dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{2^*} dx + o_n(1);$$

tome $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, x \in B(0,1) \\ 0, x \in B(0,2)^c \\ 0 \leq \phi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Então,

$$\int_{B(0,1)} |v|^{2^*} \phi dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{2^*} \phi dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{2^*} dx + o_n(1)$$

e como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{2^*} \phi dx \geq \int_{B(0,1)} |v|^{2^*} \phi dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{2^*} \phi dx$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{2^*} \phi dx \geq \int_{B(0,1)} |v_n|^{2^*} dx + o_n(1) = \frac{1}{2} + o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \phi dx + \langle \nu, \phi \rangle \geq \frac{1}{2};$$

como $\|\phi\|_\infty = 1$ temos $\langle \nu, \phi \rangle \leq \|\nu\|$ e como $0 \leq \phi \leq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx + \|\nu\| \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \phi dx + \langle \nu, \phi \rangle \geq \frac{1}{2}$$

o que implica

$$\|v\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| \geq \frac{1}{2}.$$

Logo, de (1.22),

$$1 \geq \frac{1}{2} + \nu_\infty \Rightarrow \nu_\infty \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto, pelo estudo feito anteriormente, concluímos que $\nu_\infty = 0$. Se fosse $\|\nu\| = 1$, teríamos $v = 0$ e $\|\nu\|^{2/2^*} \geq S^{-1}\|\mu\|$, pois

$$S = \|\mu\| + \mu_\infty \geq \|\mu\| \Rightarrow S^{-1}\|\mu\| \leq 1 = \|\nu\|^{2/2^*}.$$

Logo, temos $v = 0$ e $\|\nu\|^{2/2^*} = S^{-1}\|\mu\|$ e do Lema 1.1, a medida ν está concentrada em um único ponto z. Note que, considerando $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, |x - z| \leq 1/2 \\ 0, |x - z| \geq 1 \\ 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

temos

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} dx \geq \int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \varphi dx \to \langle \nu, \varphi \rangle = \|\nu\|\varphi(z) = \|\nu\|; \quad (1.23)$$

considerando agora $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, |x - z| \leq 1 \\ 0, |x - z| \geq 2 \\ 0 \leq \psi(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

temos

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} dx = \int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} \psi dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \psi dx \to \langle \nu, \psi \rangle = \|\nu\|\psi(z) = \|\nu\|. \quad (1.24)$$

Logo, como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \varphi dx \leq \int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \psi dx$$

concluímos de (1.23) e (1.24) que

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} dx \to \|\nu\|.$$

Portanto, de (1.20), obtemos

$$\frac{1}{2} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^{2^*} dx \geq \int_{B(z,1)} |v_n|^{2^*} dx \to \|\nu\| = 1,$$

um absurdo. Dessa forma, concluímos finalmente que

$$\|v\|_{2^*}^{2^*} = 1$$

e assim $S \leq \|\nabla v\|_2^2$, e de (1.21) obtemos

$$S = \lim \|\nabla v_n\|_2^2 = \underline{\lim} \|\nabla v_n\|_2^2 \geq \|\nabla v\|_2^2,$$

pois $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$S = \|\nabla v\|_2^2 = \lim \|\nabla v_n\|_2^2.$$

■

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [21].

Teorema 1.4 (Aubin, Talenti, 1976) *A função*

$$U(x) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{[1+|x|^2]^{\frac{N-2}{2}}} = C_N[1+|x|^2]^{\frac{2-N}{2}} \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.25}$$

onde $C_N = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$, *é um minimizante para* S, *isto é,* $\|U\|_{2^*} = 1$ *e* $\|\nabla U\|_2^2 = S$.

Proposição 1.5 *Para todo subconjunto aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^N$,

$$S(\Omega) = \inf_{\substack{u\,\in\,\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)\\ \|u\|_{2^*}\,=\,1}} \|\nabla u\|_2^2 = S = \inf_{\substack{u\,\in\,\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\\ \|u\|_{2^*}\,=\,1}} \|\nabla u\|_2^2,$$

e $S(\Omega)$ *nunca é atingido, exceto quanto* $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Demonstração:

Uma vez que $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos $S \leq S(\Omega)$. Dada $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e dado Ω aberto de $\mathbb{R}^N$, mostraremos que existem $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$ tais que $u^{y,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, ou seja, mostraremos que $\operatorname{supp} u^{y,\lambda} \subset \Omega$. Suponha inicialmente que $0 \in \Omega$. Escolhendo $y = 0$ teremos

$$u^{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{N-2}{2}} u(\lambda x),$$

onde $\lambda > 0$ será determinado. Note que se $x \in \text{supp}u^{0,\lambda}$ então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_n \to x$ e $u^{0,\lambda}(x_n) = u(\lambda x_n) \neq 0$, ou seja, $\lambda x_n \in \text{supp}u$ donde $\lambda x \in \text{supp}u$ e consequentemente $x \in (1/\lambda)\text{supp}u$; portanto

$$\text{supp}u^{0,\lambda} \subset \frac{1}{\lambda}\text{supp}u.$$

Reciprocamente, se $x \in (1/\lambda)\text{supp}u$, isto é, se $\lambda x \in \text{supp}u$, então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $x_n \to \lambda x$ e $u(x_n) \neq 0$, ou seja, $x_n/\lambda \to x$ e $u^{0,\lambda}(x_n/\lambda) \neq 0$ o que implica $x_n/\lambda \in \text{supp}u^{0,\lambda}$ e consequentemente $x \in \text{supp}u^{0,\lambda}$; assim

$$\frac{1}{\lambda}\text{supp}u \subset \text{supp}u^{0,\lambda}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\lambda}\text{supp}u = \text{supp}u^{0,\lambda}$$

e para λ suficientemente grande podemos concluir que

$$\text{supp}u^{0,\lambda} = \frac{1}{\lambda}\text{supp}u \subset \Omega$$

donde $u^{0,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Se $0 \notin \Omega$, fixe $y_0 \in \Omega$ arbitrário e considere a translação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto T(x) = x - y_0. \end{aligned}$$

Observe que, sendo T um difeomorfismo, temos $T(\Omega)$ um aberto com $0 \in T(\Omega)$. Pelo estudo anterior, existe λ suficientemente grande tal que

$$\text{supp}u^{0,\lambda} = \frac{1}{\lambda}\text{supp}u \subset T(\Omega).$$

Note então que se $x \in \text{supp}u^{-\lambda y_0,\lambda}$ então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_n \to x$ e $u^{-\lambda y_0,\lambda}(x_n) = u(\lambda x_n - \lambda y_0) \neq 0$, ou seja, $\lambda x_n - \lambda y_0 \in \text{supp}u$ donde $x - y_0 \in (1/\lambda)\text{supp} \subset T(\Omega)$ e consequentemente $x = T^{-1}(x - y_0) \in \Omega$. Portanto

$$\text{supp}u^{-\lambda y_0,\lambda} \subset \Omega.$$

Fazendo $y = -\lambda y_0$, temos

$$\text{supp}u^{y,\lambda} \subset \Omega$$

donde $u^{y,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Após o estudo feito, seja $(u_n) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para S. Escolhendo $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tal que $v_n = u_n^{y_n,\lambda_n} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ temos $\|v_n\|_{2^*} = 1$ e $S(\Omega) \leq \|\nabla v_n\|_2^2$, donde

$$S(\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_2^2 = S.$$

Portanto $S(\Omega) = S$.

Suponha agora que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ e que $u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ seja um minimizante para $S(\Omega)$. Então u é também um minimizante para S. Assumindo que $u \geq 0$ (o que é possível, pois $\|u\|_{2^*} = \||u|\|_{2^*}$ e $\|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla |u|\|_2^2$), pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema B.3) u é solução fraca de

$$-\Delta u = S u^{2^*-1}; \ \mathbb{R}^N.$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema C.11), $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$, o que é um absurdo, pois $u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$, o que implica que $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Logo $S(\Omega)$ não é atingido quando $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. ■

Capítulo 2

Existência de solução para um problema crítico via passo da montanha

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev e $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

sendo dado por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \,\in\, H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_2 \,=\, 1}} \|\nabla u\|_2^2 > 0.$$

Defina

$$f(u) = (u^+)^{2^*-1} \ \text{ e } \ F(u) = \frac{(u^+)^{2^*}}{2^*}.$$

Então o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \lambda \frac{u^2}{2} - F(u) \right) dx \tag{2.1}$$

é de classe $\mathcal{C}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Sendo $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, $\|u\|_\lambda = \sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2}$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$.

Observação 2.1 (Importante) *O funcional (2.1) é, na realidade, o funcional energia associado ao seguinte problema crítico:*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = (u^+)^{2^*-1}, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.2}$$

pois, se u é solução de (2.2), então

$$\varphi'(u)v = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + \lambda uv)dx + \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

fazendo $v = u^-$, obtemos

$$0 = \varphi'(u)u^- = \int_\Omega (\nabla u.\nabla u^- + \lambda uu^-)dx + \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} u^- dx = \int_\Omega [|\nabla u^-|^2 + \lambda (u^-)^2]dx,$$

ou seja, $\|u^-\|_\lambda^2 = 0$, mostrando que $u \geq 0$ e, portanto, u também é solução de (P_λ).

O nosso objetivo neste capítulo é determinar condições para que o problema (P_λ) admita solução não trivial.

Lema 2.2 *Toda sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$d = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(u_n) < c^* = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}, \quad \varphi'(u_n) \to 0$$

admite uma subsequência convergente, ou seja, φ satisfaz a condição $(PS)_d$.

Demonstração:

Primeiramente, mostremos que a sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\varphi(u_n) \leq d$. Note também que

$$-\frac{1}{2^*}\varphi'(u_n)u_n \leq \left| -\frac{1}{2^*}\varphi'(u_n)u_n \right| \leq \frac{1}{2^*}\|\varphi'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda.$$

Como $\varphi'(u_n) \to 0$, então para n suficientemente grande temos $(2^*)^{-1}\|\varphi'(u_n)\| \ll 1$, donde $\|u_n\|_\lambda \geq -(2^*)^{-1}\varphi'(u_n)u_n$. Logo, para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} d + \|u_n\|_\lambda &\geq \varphi(u_n) - \frac{1}{2^*}\varphi'(u_n)u_n \\ &= \frac{\|u_n\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{2^*}}{2^*}dx - \frac{1}{2^*}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}u_n dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}\left(\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx - \int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx\right) \end{aligned}$$

o que implica

$$d + \|u_n\|_\lambda \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n\|_\lambda^2,$$

mostrando que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to u \;\text{ em }\; L^2(\Omega),$$

$$u_n \to u \;\text{ q.t.p em }\; \Omega,$$

para algum $u \in H_0^1(\Omega)$. Como (u_n) é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$, $(f(u_n))$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$, portanto, pelo Lema C.5, segue que

$$f(u_n) \rightharpoonup f(u) \;\text{ em }\; L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega f(u_n)\phi dx \to \int_\Omega f(u)\phi dx, \quad \forall \phi \in L^{2^*}(\Omega),$$

e em particular

$$\int_\Omega f(u_n)\phi dx \to \int_\Omega f(u)\phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Como $\varphi'(u_n) \to 0$, para $\phi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\varphi'(u_n)\phi = o_n(1) \Rightarrow \langle u_n, \phi\rangle_\lambda = \int_\Omega (\nabla u_n.\nabla\phi + \lambda u_n \phi)dx = \int_\Omega f(u_n)\phi dx + o_n(1),$$

onde $\langle .,.\rangle_\lambda$ denota o produto interno que gera a norma $\|.\|_\lambda$. Logo,

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \Rightarrow \langle u_n, \phi\rangle_\lambda \to \langle u, \phi\rangle_\lambda, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4), fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla\phi + \lambda u\phi)dx = \int_\Omega f(u)\phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.5}$$

ou seja, u é solução do problema

$$-\Delta u + \lambda u = f(u).$$

Fazendo $\phi = u$ em (2.5) obtemos $\|u\|_\lambda^2 = \|u^+\|_{2^*}^{2^*}$, donde

$$\varphi(u) = \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(u)dx = \frac{\|u^+\|_{2^*}^{2^*}}{2} - \frac{\|u^+\|_{2^*}^{2^*}}{2^*} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u^+\|_{2^*}^{2^*} \geq 0. \tag{2.6}$$

Definindo $v_n = u_n - u$, segue do Lema C.6 que

$$\int_\Omega F(u_n)dx = \int_\Omega F(u)dx + \int_\Omega F(v_n)dx + o_n(1).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\varphi(u_n) &= \frac{\|u_n\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(u_n)dx \\
&= \frac{\|v_n + u\|_\lambda^2}{2} - \left[\int_\Omega F(u)dx + \int_\Omega F(v_n)dx\right] + o_n(1) \\
&= \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 + \langle v_n, u\rangle_\lambda + \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega F(v_n)dx + o_n(1) \\
&= \varphi(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 - \int_\Omega F(v_n)dx + \langle v_n, u\rangle_\lambda + o_n(1);
\end{aligned}$$

sendo (u_n) limitada em $H_0^1(\Omega)$ podemos supor que $\varphi(u_n) \to c \leq d$ e daí

$$\varphi(u) + \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 - \int_\Omega F(v_n)dx \to c. \tag{2.7}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\varphi'(u_n)u_n &= \|u_n\|_\lambda^2 - 2^* \int_\Omega F(u_n)dx \\
&= \|v_n\|_\lambda^2 + 2\langle v_n, u\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2 - 2^*\left[\int_\Omega F(u)dx + \int_\Omega F(v_n)dx\right] + o_n(1)
\end{aligned}$$

e $\varphi'(u_n)u_n \to 0$, obtemos

$$\|v_n\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2 - 2^*\int_\Omega F(u)dx - 2^*\int_\Omega F(v_n)dx = o_n(1)$$

donde

$$\begin{aligned}
\|v_n\|_\lambda^2 - 2^*\int_\Omega F(v_n)dx &\to 2^*\int_\Omega F(u)dx - \|u\|_\lambda^2 \\
&= -\varphi'(u)u \\
&= \|u\|_\lambda^2 - \|u^+\|_{2^*}^{2^*} = 0.
\end{aligned}$$

Suponha então que

$$\|v_n\|_\lambda^2 \to b \ \text{ e } \ 2^*\int_\Omega F(v_n)dx = \|v_n^+\|_{2^*}^{2^*} \to b.$$

Como $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$ segue que $\|\nabla v_n\|_2^2 \to b$, e da desigualdade de Sobolev

$$\|\nabla v_n\|_2^2 \geq S\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \geq S\|v_n^+\|_{2^*}^{2^*}$$

obtemos $b \geq Sb^{2/2^*}$, ou seja, $b = 0$ ou $b \geq S^{N/2} > 0$. Note que, de (2.7),

$$\varphi(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)b = c,$$

e de (2.6) segue que

$$c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)b.$$

Portanto, se $b \geq S^{N/2}$, tem-se

$$c^* = \frac{S^{N/2}}{N} = S^{N/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \leq b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \leq c \leq d < c^*,$$

o que é um absurdo. Logo, $b = 0$ e a prova está completa, pois

$$\|v_n\|_\lambda^2 = \|u_n - u\|_\lambda^2 \to 0 \Rightarrow u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

$\blacksquare$

Lema 2.3 *Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$ e $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$. Então existe uma função não negativa $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que*

$$\frac{\|v\|_\lambda^2}{\|v\|_{2^*}^2} < S.$$

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$. Dado $r > 0$, seja $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função não negativa tal que supp$\psi \subset B_r$ e $\psi = 1$ em $B_{r/2}$. Para $\varepsilon > 0$, defina

$$U_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U(x/\varepsilon),$$

$$u_\varepsilon(x) = \psi(x) U_\varepsilon(x),$$

onde U é dado por (1.25). Temos então as seguintes estimativas (ver [1]):

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}),$$

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx = S^{N/2} + O(\varepsilon^N),$$

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx \geq \begin{cases} d\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2), & \text{se } N = 4, \\ d\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), & \text{se } N \geq 5, \end{cases}$$

onde d é uma constante positiva. Se $N=4$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} &= \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2+\lambda\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2}\\
&\le \frac{S^2+\lambda d\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+O(\varepsilon^2)}{(S^2+O(\varepsilon^2))^{1/2}}\\
&= \frac{S^2\left(1+\lambda\frac{d}{S^2}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+\frac{O(\varepsilon^2)}{S^2}\right)}{\left(S^2\left(1+\frac{O(\varepsilon^4)}{S^2}\right)\right)^{1/2}}\\
&= \frac{S^2(1+\lambda\widetilde{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+O(\varepsilon^2))}{S(1+O(\varepsilon^4))^{1/2}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} \le S\left[\frac{1}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}+\frac{\lambda\widetilde{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}+\frac{O(\varepsilon^2)}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}\right], \tag{2.8}$$

onde $\widetilde{d}=d/S^2$. Observe agora que:

i) $\frac{O(\varepsilon^2)}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}=O(\varepsilon^2)$, pois

$$\frac{\frac{O(\varepsilon^2)}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}}{\varepsilon^2}=\frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}$$

é limitado, para ε suficientemente pequeno;

ii) $\frac{1}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}\to 1$ quando $\varepsilon\to 0$, ou seja, para ε suficientemente pequeno temos

$$\frac{1}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\lambda\widetilde{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}\le\frac{\lambda\widetilde{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|}{2}=\lambda\widehat{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|,$$

onde $\widehat{d}=\widetilde{d}/2$;

iii) fazendo $f(t)=1/\sqrt{1+t}$, pelo Teorema do Valor Médio obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}=1-\frac{1}{2}(1+\theta)^{-\frac{3}{2}}O(\varepsilon^4)=1-O(\varepsilon^4),\quad \theta\in(0,O(\varepsilon^4)).$$

Portanto, de (2.8) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} &\le S\left[\frac{1}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}+\frac{\lambda\widetilde{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}+\frac{O(\varepsilon^2)}{\sqrt{1+O(\varepsilon^4)}}\right]\\
&\le S[1-O(\varepsilon^4)+\lambda\widehat{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+O(\varepsilon^2)],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} \leq S[1 + \lambda\widehat{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2)]. \tag{2.9}$$

Assim, para ε suficientemente pequeno

$$\lambda\widehat{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2\left[\lambda\widehat{d}|\ln\varepsilon| + \frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\right] < 0,$$

pois $\frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}$ é limitado e $\lambda\widehat{d}|\ln\varepsilon| \to -\infty$, e de (2.9) concluímos finalmente que, para ε suficientemente pequeno,

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} \leq S[1 + \lambda\widehat{d}\varepsilon^2|\ln\varepsilon| + O(\varepsilon^2)] < S.$$

A demonstração para o caso $N \geq 5$ segue de forma análoga.

$\blacksquare$

Teorema 2.4 (Brezis-Niremberg, 1983) *Sob as hipóteses do Lema 2.3, o problema* (P_λ) *possui uma solução não trivial.*

Demonstração:

Mostremos que φ satisfaz a geometria do passo da montanha com nível $c < c^*$. Pelo Lema 2.3, existe $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ não negativa tal que

$$0 < \frac{\|v\|_\lambda^2}{\|v\|_{2^*}^2} < S.$$

Note que

$$0 < \max_{t\geq 0}\varphi(tv) = \max_{t\geq 0}\left(\frac{\|tv\|_\lambda^2}{2} - \int_\Omega F(tv)dx\right) = \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega v^{2^*}dx\right).$$

Usando o fato de que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*}\right) = t\|v\|_\lambda^2 - t^{2^*-1}\|v\|_{2^*}^{2^*} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\|v\|_\lambda^{\frac{2}{2^*-2}}}{\|v\|_{2^*}^{\frac{2^*}{2^*-2}}},$$

obtemos

$$0 < \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*}\right) = \left(\frac{\|v\|_\lambda^{\frac{2}{2^*-2}}}{\|v\|_{2^*}^{\frac{2^*}{2^*-2}}}\right)^2\frac{\|v\|_\lambda^2}{2} - \left(\frac{\|v\|_\lambda^{\frac{2}{2^*-2}}}{\|v\|_{2^*}^{\frac{2^*}{2^*-2}}}\right)^{2^*}\frac{\|v\|_{2^*}^{2^*}}{2^*}$$

ou

$$0 < \max_{t\geq 0}\varphi(tv) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\left(\frac{\|v\|_\lambda^2}{\|v\|_{2^*}^2}\right)^{N/2} < \frac{S^{N/2}}{N} = c^*. \tag{2.10}$$

De

$$\varphi(u) = \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{\|u^+\|_{2^*}^{2^*}}{2^*} \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{\|u\|_{2^*}^{2^*}}{2^*},$$

e da desigualdade de Sobolev temos

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} \leq S^{-2^*/2}\|\nabla u\|_2^{2^*},$$

então

$$\varphi(u) \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{\|u\|_{2^*}^{2^*}}{2^*} \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - \frac{1}{2^* S^{2^*/2}}\|\nabla u\|_2^{2^*}.$$

Logo, existe $r > 0$ tal que

$$b = \inf_{\|u\|_\lambda = r} \varphi(u) > 0.$$

De fato, sendo $\lambda < 0$, temos $\|u\|_\lambda \leq \|\nabla u\|_2$. Por outro lado, como existe $\widetilde{c} > 0$ tal que

$$\|u\|_2^2 \leq \widetilde{c}\|\nabla u\|_2^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

obtemos

$$\|u\|_\lambda^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2 \geq \|\nabla u\|_2^2 + \lambda\widetilde{c}\|\nabla u\|_2^2,$$

ou seja, $\|\nabla u\|_2 \leq c\|u\|_\lambda$, onde $c = (1 + \lambda\widetilde{c})^{-1/2}$. Com isso,

$$\varphi(u) \geq \|u\|_\lambda^2 - \frac{c^{2^*}}{2^* S^{2^*/2}}\|u\|_\lambda^{2^*}.$$

Tome $r_1 > 0$ (a ser determinado) e considere $\|u\|_\lambda = r_1$. Daí,

$$\varphi(u) \geq \frac{r_1^2}{2} - Mr_1^{2^*} = r_1^2\left(\frac{1}{2} - Mr_1^{2^*-2}\right), \quad \text{onde} \quad M = \frac{c^{2^*}}{2^* S^{2^*/2}}.$$

e note que escolhendo $0 < r_1 < (1/2M)^{1/(2^*-2)}$ ficamos com

$$\varphi(u) \geq \frac{r_1^2}{4}, \quad \text{se} \quad \|u\|_\lambda = r_1,$$

e assim,

$$b = \inf_{\|u\|_\lambda = r_1} \varphi(u) \geq \frac{r_1^2}{4} > 0.$$

Observe agora que $\varphi(0) = 0$ e

$$\varphi(u) \geq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - M\|u\|_\lambda^{2^*},$$

e que

$$\frac{\|u\|_\lambda^2}{2} - M\|u\|_\lambda^{2^*} \geq 0 \Leftrightarrow \|u\|_\lambda^{2^*} \leq \frac{\|u\|_\lambda^2}{2M} \Leftrightarrow \|u\|_\lambda^{2^*-2} \leq \frac{1}{2M},$$

ou seja, $\varphi(u) \geq 0$ se $u \in B_{r_2}$, $r_2 \approx 0$. Logo, se $r = \min\{r_1, r_2\}$ temos

$$b = \inf_{\|u\|_\lambda = r} \varphi(u) > 0, \quad \varphi|_{B_r} \geq 0.$$

Como

$$\varphi(tv) = \frac{t^2}{2}\|v\|_\lambda^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*} \to -\infty, \quad t \to \infty,$$

para t_0 suficientemente grande, temos $\varphi(t_0 v) < 0$. Dessa forma, tomando $\gamma_0(t) = tt_0 v$, temos

$$\gamma_0(0) = 0 \text{ e } \varphi(\gamma_0(1)) = \varphi(t_0 v) < 0,$$

donde

$$\gamma_0 \in \Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, \varphi(\gamma(1)) < 0\},$$

e portanto, de (2.10),

$$\begin{aligned} c &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)) \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma_0(t)) \\ &\leq \max_{t \geq 0} \varphi(\gamma_0(t)) \\ &= \max_{t \geq 0} \varphi(tt_0 v) \\ &= \max_{t \geq 0} \varphi(tv) < \frac{S^{N/2}}{N} = c^*. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema C.7, φ satisfaz a geometria do passo da montanha como nível minimax $c < S^{N/2}/N$, e pelo Corolário C.8, existe $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Pelo Lema 2.2, sendo $c < c^*$, (u_n) admite uma subsequência convergente, ou seja, φ satisfaz a condição $(PS)_c$. Assim, c é um valor crítico de φ, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\varphi(u) = c, \quad \varphi'(u) = 0.$$

Como $c \geq b > 0$, concluímos que $u \neq 0$. Com isso, acabamos de mostrar a existência de uma solução não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = (u^+)^{2^*-1}, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

e pela Observação 2.1, segue então a existência de solução não trivial para o problema (P_λ). ■

Definição 2.5 (Domínio Estrelado) *Um domínio suave Ω de $\mathbb{R}^N$ é dito estrelado em relação a um ponto $x_0 \in \Omega$ se dado $x \in \partial\Omega$ temos*

$$\langle x - x_0, \nu_x \rangle > 0,$$

onde ν_x denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em x.

Proposição 2.6 *Suponha que o problema (P_λ) tem uma solução não trivial. Então $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$. Mais ainda, se Ω é um domínio suave estrelado limitado, então $\lambda < 0$.*

Demonstração:

Suponha que u seja uma solução não trivial de (P_λ). Seja $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ correspondente ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ com $e_1 > 0$ (toda autofunção associada ao primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ possui sinal definido - ver [20]). Sendo u solução de (P_λ), então u satisfaz $\lambda u = u^{2^*-1} + \Delta u$, ou seja

$$\lambda u e_1 = (u^{2^*-1} + \Delta u)e_1$$

donde

$$\lambda \int_\Omega u e_1 dx = \int_\Omega (u^{2^*-1} + \Delta u)e_1 dx = \int_\Omega u^{2^*-1} e_1 dx + \int_\Omega \Delta u e_1 dx > \int_\Omega \Delta u e_1 dx. \quad (2.11)$$

Observe que e_1 satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla e_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u e_1 dx; \quad (2.12)$$

da identidade de Green,

$$\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

como $e_1 = 0$ em $\partial\Omega$, obtemos de (2.12)

$$\int_\Omega \Delta u e_1 dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla e_1 dx = -\lambda_1 \int_\Omega u e_1 dx$$

e de (2.11) segue que

$$\lambda \int_\Omega u e_1 dx > \int_\Omega \Delta u e_1 dx = -\lambda_1 \int_\Omega u e_1 dx \Rightarrow$$

$$\lambda > -\lambda_1 = -\lambda_1(\Omega).$$

Agora, como

$$-\Delta u = au,$$

onde $a = u^{2^*-2} - \lambda \in L^{N/2}(\Omega)$, o Teorema de Brezis-Kato (Teorema C.10) implica que $u \in L^p(\Omega)$. Dessa maneira, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Pela teoria da regularidade elíptica segue então que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. A identidade de Pohozaev (Teorema C.9) nos dá

$$-\lambda \int_\Omega u^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} \sigma.\nu d\sigma, \tag{2.13}$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Se Ω é um domínio estrelado com relação a origem, então $\langle \sigma, \nu \rangle > 0$ em $\partial\Omega$. Logo, de (2.13) segue que $\lambda \leq 0$. Se fosse $\lambda = 0$, então $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$; da identidade de Green obteríamos

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \int_{\partial\Omega} \nabla u.\eta ds = 0,$$

e de (P_λ) seguiria que

$$0 = -\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Omega u^{2^*-1} dx,$$

implicando $u = 0$, uma contradição. Logo, $\lambda < 0$. ■

Capítulo 3

Multiplicidade de soluções para o problema (P_λ)

Iniciamos este capítulo apresentando as definições e os resultados referentes a categoria, ferramenta principal do nosso trabalho.

3.1 Definições

Definição 3.1 *Um subconjunto fechado A é contrátil em um espaço topológico X se existem uma aplicação $h : [0, 1] \times A \to X$ contínua e $w \in X$ tais que*

$$h(0, u) = u, \quad h(1, u) = w, \quad \forall u \in A.$$

Definição 3.2 *Sejam A, B e Y subconjuntos fechados de um espaço topológico X. Dizemos que A é deformado em B preservando Y, e denotamos por $A \prec_Y B$ em X, se $Y \subset A \cap B$ e se existe $h : [0, 1] \times A \to X$ contínua tal que*

a) $h(0, u) = u, \quad h(1, u) \in B, \quad \forall u \in A$;

b) $h(t, Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0, 1]$.

Definição 3.3 *Sejam $Y \subset A$ subconjuntos fechados de um espaço topológico X. A categoria de A em X relativa a Y é o menor inteiro n tal que existem $n+1$ subconjuntos fechados $A_0, A_1, ..., A_n$ em X satisfazendo:*

a) $A = \bigcup_{j=0}^{n} A_j$;

b) $A_1, ..., A_n$ *são contráteis em* X;

c) $A_0 \prec_Y Y$ *em* X.

A categoria de A em X relativa a Y é denotada por $cat_{X,Y}(A)$.

Definição 3.4 *Seja A um subconjunto fechado de um espaço topológico X. A categoria de A em X é o menor inteiro n tal que existem n subconjuntos fechados $A_1, ..., A_n$ fechados e contráteis em X tal que $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Usamos a notação $cat_X(A)$.*

Observação 3.5 *Note que*

$$cat_X(A) = cat_{X,\varnothing}(A)$$

.

Observação 3.6 *Essa definição de categoria foi dada por Lusternik-Schnirelman (ver [18]).*

Exemplo 3.7 *a) Sendo B uma bola em $\mathbb{R}^N$ então $cat_B(B) = cat_{\mathbb{R}^N}(B) = 1$.*

b) Sendo A um anel em $\mathbb{R}^2$, então $cat_A(A) = 2$.

c) Sendo $\mathbb{T}^2$ o toro em $\mathbb{R}^3$, então $cat_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{T}^2) = 4$.

3.2 Propriedades de categoria

Nesta seção iremos demonstrar algumas propriedades elementares da categoria relativa.

Lema 3.8 *Sejam A, B, C e Y subconjuntos fechados de X tais que $Y \subset A \cap B \cap C$. Se $A \prec_Y B$ e $B \prec_Y C$ em X, então $A \prec_Y C$ em X.*

Demonstração:

Seja $h : [0,1] \times A \to X$ contínua tal que

$$h(0,u) = u, \quad h(1,u) \in B, \quad \forall u \in A,$$

$$h(t,Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0,1],$$

e seja $g : [0,1] \times B \to X$ contínua tal que

$$g(0,u) = u, \quad g(1,u) \in C, \quad \forall u \in B,$$

$$g(t,Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0,1].$$

Considere agora a deformação $f : [0,1] \times A \to X$ dada por

$$f(t,u) = \begin{cases} h(2t,u), 0 \le t \le 1/2, u \in A, \\ g(2t-1, h(1,u)), 1/2 < t \le 1, u \in A \end{cases}.$$

Observe que f é contínua e que

$$f(0,u) = h(0,u) = u, \quad \forall u \in A;$$

$$f(1,u) = g(2.1-1, h(1,u)) = g(1, h(1,u)) \in C, \quad \forall u \in A, \quad \text{pois} \quad h(1,u) \in B.$$

Para $0 \leq t \leq 1/2$ e $u \in Y$ temos

$$f(t,u) = h(2t,u) \in Y,$$

e para $1/2 < t \leq 1$ e $u \in Y$,

$$f(t,u) = g(2t-1, h(1,u)) \in Y,$$

ou seja, $f(t,Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0,1]$. Com isso, fica provado que $A \prec_Y C$ em X.

■

Proposição 3.9 *Sejam A, B e Y subconjuntos fechados de X tais que $Y \subset A$. A categoria relativa satisfaz as seguintes propriedades:*

a) Normalização: $cat_{X,Y}(Y) = 0$;

b) Subaditividade: $cat_{X,Y}(A \cup B) \leq cat_{X,Y}(A) + cat_X(B)$;

c) Monotonicidade: $A \prec_Y B \Rightarrow cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$.

Demonstração:

a) Considerando $A_0 = Y$, temos $A_0 \prec_Y Y$ em X, pois $Y \subset A_0 \cap Y$ e

$$\begin{aligned} h : [0,1] \times A_0 &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto h(t,u) = u \end{aligned}$$

é contínua e satisfaz

$$h(0,u) = u, h(1,u) \in Y, \quad \forall u \in A_0; \quad \text{e} \quad h(t,Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0,1].$$

Logo, $\mathrm{cat}_{X,Y}(Y) = 0$.

b) Suponha $\text{cat}_{X,Y}(A) = n$ e $\text{cat}_X(B) = m$, ou seja, existem $A_0, A_1, ..., A_n$ fechados em X tais que

$$A = \bigcup_{j=0}^{n} A_j, \quad A_1, ..., A_n \ \text{ são contráteis em } \ X, \quad \text{e} \quad A_0 \prec_Y Y \ \text{ em } \ X,$$

e existem também $B_1, ..., B_m$ fechados em X tais que

$$B = \bigcup_{k=1}^{m} B_k \ \text{ e } \ B_1, ..., B_m \ \text{ são contráteis em } \ X.$$

Dessa forma,

$$A \cup B = A_0 \cup [A_1 \cup ... \cup A_n \cup B_1 \cup ... \cup B_m],$$

onde a união entre colchetes contém, no máximo, $n+m$ conjuntos contráteis em X, e $A_0 \prec_Y Y$. Logo, $\text{cat}_{X,Y}(A \cup B) \leq n + m = \text{cat}_{X,Y}(A) + \text{cat}_X(B)$.

c) Suponha $A \prec_Y B$ pela deformação h, i.e., $Y \subset A \cap B$ e $h : [0,1] \times A \to X$ é contínua e satisfaz

$$h(0,u) = u, h(1,u) \in B, \quad \forall u \in A \ \text{ e } \ h(t,Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0,1].$$

Se $\text{cat}_{X,Y}(B) = \infty$, o resultado é imediato. Supondo então $\text{cat}_{X,Y}(B) = n$, seja $(B_0, B_1, ..., B_n)$ a cobertura fechada de B correspondente. Defina

$$A_j = \{u \in A; h(1,u) \in B_j\}, \quad j = 0, 1, ..., n.$$

Observe que

i) $A = \bigcup\limits_{j=0}^{n} A_j$;

ii) $A_0 \prec_Y B_0$. De fato, $(B_0, B_1, ..., B_n)$ satisfaz

$$B = \bigcup_{j=0}^{n} B_j, \quad B_1, ..., B_n \ \text{ são contráteis em } \ X, \quad \text{e} \quad B_0 \prec_Y Y \ \text{ em } \ X.$$

Então, como $Y \subset B_0$, segue que $Y \subset A_0$, pois

$$u \in Y \Rightarrow h(1,u) \in Y \subset B_0 \Rightarrow u \in A_0.$$

Com isso, temos $Y \subset A_0 \cap B_0$ e definindo

$$\begin{aligned} h_0 : [0,1] \times A_0 &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto h_0(t,u) = h(t,u) \end{aligned}$$

é fácil verificar que $A_0 \prec_Y B_0$. Logo, como $B_0 \prec_Y Y$, segue do Lema 3.8 que $A_0 \prec_Y Y$.

iii) $A_j \prec_{\varnothing} B_j, \quad j = 1, ..., n$. Com efeito, basta considerar

$$\begin{aligned} h_j : [0,1] \times A_j &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto h_j(t,u) = h(t,u). \end{aligned}$$

Sendo B_j contrátil, considere $g_j : [0,1] \times B_j \to X$ a respectiva deformação e defina $f_j : [0,1] \times A_j \to X$ por

$$f_j(t,u) = \begin{cases} h_j(2t,u), 0 \leq t \leq 1/2, u \in A_j, \\ g_j(2t-1, h_j(1,u)), 1/2 < t \leq 1, u \in A_j. \end{cases}$$

Essas funções implicam que os conjuntos A_j são contráteis em X. Por fim, observe que a função

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto f(u) = h(1,u) \end{aligned}$$

é contínua e que $A_j = f^{-1}(B_j)$, donde cada A_j é fechado em X. Portanto, de (i)-(iii), concluímos que

$$\text{cat}_{X,Y}(A) \leq n = \text{cat}_{X,Y}(B).$$

■

Antes do próximo resultado, vejamos as seguintes definições.

Definição 3.10 *Um espaço métrico X é um extensor absoluto de vizinhança, abreviadamente, EAV, se para todo espaço métrico E, para todo subconjunto fechado F de E e toda aplicação contínua $f : F \to X$, existe uma extensão contínua de f definida em uma vizinhança de F em E.*

Definição 3.11 *Um espaço topológico X é normal se para todo par de conjuntos disjuntos fechados A e B de X existe $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.*

Observação 3.12 *Todo espaço métrico X é normal: dados A e B fechados e disjuntos em X basta considerar a função de Urysohn $f : X \to [0,1]$ dada por*

$$f(x) = \frac{dist(x,A)}{dist(x,A) + dist(x,B)}.$$

Proposição 3.13 *Seja A um subconjunto fechado de um EAV X. Então, existe uma vizinhança fechada B de A em X tal que $cat_X(B) = cat_X(A)$.*

Demonstração:

Suponha inicialmente que $\mathrm{cat}_X(A) = 1$, ou seja, que A é contrátil, e considere $h : [0,1] \times A \to X$ a respectiva homotopia. O conjunto $N = ([0,1] \times A) \cup (\{0,1\} \times X)$ é fechado em $M = [0,1] \times X$. A aplicação $f : N \to X$ dada por

$$f(t,u) = \begin{cases} h(t,u), & t \in [0,1], u \in A, \\ u, t = 0, & u \in X, \\ h(1,u_0), & t = 1, u \in X, \end{cases}$$

onde $u_0 \in A$ é fixo, é contínua. Por hipótese, sendo X um EAV, existe uma extensão contínua g de f definida em uma vizinhança U de N em M. Com M é um espaço métrico, segue da Observação 3.12 que o mesmo é normal, logo podemos supor U fechado. Com efeito, sendo N e U^c fechados disjuntos de M, existe $f : M \to [0,1]$ contínua tal que $f(N) = \{0\}$ e $f(U^c) = \{1\}$; considerando então $\widetilde{U} = \{x \in M; f(x) \leq 1/2\}$, temos $\widetilde{U}$ fechado com $N \subset \widetilde{U} \subset U$. Como $[0,1] \times A \subset N \subset U$, temos $([0,1] \times A) \cap \partial U = \varnothing$. Considerando a projeção

$$\begin{array}{rcl} \Pi_2 : [0,1] \times X & \longrightarrow & X \\ (t,u) & \longmapsto & \Pi_2(t,u) = u, \end{array}$$

temos $\Pi_2(\partial U) \cap A = \varnothing$; logo, fazendo $B = \Pi_2(U) \setminus \mathrm{int}(\Pi_2(\partial U))$ temos B fechado, $A \subset B$ e $[0,1] \times B \subset U$. Mas então B é contrátil em X. De fato, temos $g : U \to X$ contínua e $[0,1] \times B \subset U$; escreva então

$$p = g|_{[0,1] \times B} : [0,1] \times B \to X,$$

que é contínua e observe que se $u \in B$ então $u \in A$ ou $u \in B \setminus A$; se $u \in A$, então $(0,u), (1,u) \in N$ e daí

$$p(0,u) = g(0,u) = f(0,u) = h(0,u) = u,$$

e

$$p(1,u) = g(1,u) = f(1,u) = h(1,u_0),$$

e se $u \in B \setminus A$, então $u \in X$ de modo que $(0,u), (1,u) \in N$ e assim

$$p(0,u) = g(0,u) = f(0,u) = u$$

e

$$p(1,u) = g(1,u) = f(1,u) = h(1,u) = h(1,u_0).$$

Portanto,

$$p(0,u) = u, \quad p(1,u) = h(1,u_0), \quad \forall u \in B$$

e assim, $\mathrm{cat}_X(B) = 1 = \mathrm{cat}_X(A)$.

Se $\mathrm{cat}_X(A) = n$, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, onde cada A_i é contrátil, i.e., $\mathrm{cat}_X(A_i) = 1, \; i = 1, ..., n$. Pelo estudo feito, existe B_i vizinhança fechada de A_i tal que $\mathrm{cat}_X(B_i) = \mathrm{cat}_X(A_i) = 1$. Tomando $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, temos B vizinhança fechada de A e cada B_i é contrátil, donde

$$\mathrm{cat}_X(B) \leq n = \mathrm{cat}_X(A). \tag{3.1}$$

Por outro lado, $A \subset B$ implica $A \prec_{\varnothing} B$: basta tomar

$$\begin{aligned} q : [0,1] \times A &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto q(t,u) = u. \end{aligned}$$

Da propriedade (c) da Proposição 3.9 segue que

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_{X,\varnothing}(A) \leq \mathrm{cat}_{X,\varnothing}(B) = \mathrm{cat}_X(B). \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) segue que

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(B).$$

■

3.3 Teoremas Minimax

Nesta seção, suponha que X é um espaço de Banach, $\psi \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$ e $\psi'(v) \neq 0$, para todo $v \in V = \{u \in X; \psi(u) = 1\}$. Usaremos aqui os resultados do Apêndice B. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e Y um subconjunto fechado de $\varphi^d = \{v \in V; \varphi(v) \leq d\}$, onde $d \in \mathbb{R}$ é fixo. Para $j \geq 1$ defina

$$\mathcal{A}_j = \{A \subset \varphi^d; A \;\text{ é fechado}, \;\; A \supset Y, \mathrm{cat}_{\varphi^d,Y}(A) \geq j\},$$

$$c_j = \inf_{A \in \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} \varphi(u).$$

Teorema 3.14 *Se*

$$a = \sup_Y \varphi < c = c_k = ... = c_{k+m} \leq d, \tag{3.3}$$

então para todos $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ *e* $B \subset \varphi^d$ *fechado tais que*

$$\sup_A \varphi \leq c + \varepsilon, \quad cat_{\varphi^d}(B) \leq m,$$

existe $u \in V$ *tal que*

a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

b) $dist(u, A \setminus intB) \leq 2\delta$;

c) $\|\varphi'(u)\|_* \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que existem $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \in \varphi^d$ fechado tais que

$$\sup_A \varphi \leq c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{\varphi^d}(B) \leq m,$$

tais que, para todo $u \in V$ com $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$ e $\mathrm{dist}(u, A \setminus \mathrm{int}B) \leq 2\delta$, temos $\|\varphi'(u)\|_* > 8\varepsilon/\delta$; fazendo $S = A \setminus \mathrm{int}B$, podemos escrever:

$$\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \quad \text{temos} \quad \|\varphi'(u)\|_* \geq 8\varepsilon/\delta.$$

Temos $S \subset V$, pois

$$u \in S \Rightarrow u \in A \ \text{ e } \ A \in \mathcal{A}_{k+m} \Rightarrow A \subset \varphi^d \subset V \Rightarrow u \in V.$$

Logo, pelo Lema B.7, existe $\eta : [0,1] \times V \to V$ contínua tal que

- $\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;
- $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$.

Observe que:

(i) $Y \subset \varphi^{c-\varepsilon}$:

$$u \in Y \Rightarrow \varphi(u) \leq c - 2\varepsilon, \quad \text{pois} \quad \sup_Y \varphi = a < c - 2\varepsilon \Rightarrow \varphi(u) \leq c - \varepsilon \Rightarrow u \in \varphi^{c-\varepsilon}.$$

(ii) $Y \subset S = A \setminus \mathrm{int}B$:

$Y \subset A$, pois $A \in \mathcal{A}_{k+m}$. Trocando, se necessário, B por $B \setminus \text{int}Y$, que é fechado e está contido em φ^d, temos

$$B \setminus \text{int}Y \subset B \Rightarrow \text{cat}_{\varphi^d}(B \setminus \text{int}Y) \leq \text{cat}_{\varphi^d}(B) \leq m,$$

e também $Y \not\subseteq \text{int}(B \setminus \text{int}Y)$, pois

$$u \in Y \Rightarrow u \in \text{int}Y \Rightarrow u \notin B \setminus \text{int}Y \Rightarrow u \notin \text{int}(B \setminus \text{int}Y),$$

ou

$$u \in Y \Rightarrow u \in \partial Y \Rightarrow u \in \partial(B \setminus \text{int}Y) \Rightarrow u \notin \text{int}(B \setminus \text{int}Y).$$

De (i) e (ii) concluímos que $Y \subset S \cap \varphi^{c-\varepsilon}$.

(iii) $\varphi^{c+\varepsilon} \cap S = S$:

se $u \in S$, então $u \in A$, daí $\varphi(u) \leq c + \varepsilon$, pois $\sup\limits_A \varphi \leq c + \varepsilon$. Logo, $u \in \varphi^{c+\varepsilon}$, ou seja, $S \subset \varphi^{c+\varepsilon}$, e assim, $S = S \cap \varphi^{c+\varepsilon}$.

(iv) $\eta(0, u) = u, \quad \forall u \in V$, em particular, $\eta(0, u) = u, \quad \forall u \in S$.

(v) $u \in S = \varphi^{c+\varepsilon} \cap S \Rightarrow \eta(1, u) \in \varphi^{c-\varepsilon}$.

(vi) $\eta(t, Y) \subset Y, \quad \forall t \in [0, 1]$:

de fato, se $u \in Y$, então $\varphi(u) < c - 2\varepsilon$, daí $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$ o que implica $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, e daí $\eta(t, u) = u, \quad \forall t \in [0, 1]$ e portanto

$$\eta(t, Y) = Y, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Logo, considerando $\widetilde{\eta} = \eta|_{[0,1]\times S} : [0, 1] \times S \to V$, concluímos que $S = A \setminus \text{int}B \prec_Y \varphi^{c-\varepsilon}$. Assim,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_{k+m} \Rightarrow k + m &\leq \text{cat}_{\varphi^d,Y}(A) \\ &\leq \text{cat}_{\varphi^d,Y}(A \setminus \text{int}B) + \text{cat}_{\varphi^d}(A \cap B) \\ &\leq \text{cat}_{\varphi^d,Y}(A \setminus \text{int}B) + \text{cat}_{\varphi^d}(B) \\ &\leq \text{cat}_{\varphi^d,Y}(\varphi^{c-\varepsilon}) + m, \end{aligned}$$

implicando que $\text{cat}_{\varphi^d,Y}(\varphi^{c-\varepsilon}) \geq k$. Uma vez que $Y \subset \varphi^{c-\varepsilon} \subset \varphi^d$ e $\varphi^{c-\varepsilon}$ é fechado, então $\varphi^{c-\varepsilon} \in \mathcal{A}_k$, e assim

$$c = c_k = \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in A} \varphi(u) \leq \sup_{u \in \varphi^{c-\varepsilon}} \varphi(u) \leq c - \varepsilon,$$

chegando a um absurdo e finalizando a demonstração do teorema.

■

Definição 3.15 *A função $\varphi|_V$ satisfaz a condição (PS)$_c$ se toda sequência $(u_n) \subset V$ tal que*

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \|\varphi'(u_n)\|_* \to 0$$

admite uma subsequência convergente em V.

Teorema 3.16 *Sob a hipótese* (3.3)*, se $\varphi|_V$ satisfaz a condição (PS)$_c$, então $\mathrm{cat}_{\varphi^d}(K_c) \geq m+1$, onde $K_c = \{u \in V; \varphi(u) = c \ \text{ e } \ \|\varphi'(u)\|_* = 0\}$.*

Demonstração:

Suponha que $\mathrm{cat}_{\varphi^d}(K_c) \leq m$. Pela Proposição 3.13, existe uma vizinhança fechada B de K_c em φ^d tal que $\mathrm{cat}_{\varphi^d}(K_c) = \mathrm{cat}_{\varphi^d}(B) \leq m$. Pelo teorema anterior, existe $(u_n) \subset V$ tal que

$$\varphi(u_n) \to c,$$

$$\mathrm{dist}(u_n, A_n \setminus \mathrm{int}B) \to 0,$$

e

$$\|\varphi'(u_n)\|_* \to 0,$$

onde $A_n \in \mathcal{A}_{k+m}$, $\forall n$. Por hipótese, existe $u \in V$ tal que, a menos de subsequência

$$u_n \to u \ \text{ em } \ V.$$

Como $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, então

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \ \text{ e } \ \|\varphi'(u_n)\|_* \to \|\varphi'(u)\|_*;$$

da unicidade do limite, segue que $\varphi(u) = c$ e $\|\varphi'(u)\|_* = 0$, ou seja, $u \in K_c$. Também

$$A_n \subset \varphi^d \Rightarrow A_n \setminus \mathrm{int}B \subset \varphi^d \setminus \mathrm{int}B;$$

daí

$$\mathrm{dist}(u_n, A_n \setminus \mathrm{int}B) \to 0 \Rightarrow \mathrm{dist}(u_n, \varphi^d \setminus \mathrm{int}B) \to 0 \Rightarrow \mathrm{dist}(u, \varphi^d \setminus \mathrm{int}B) = 0,$$

e sendo $\varphi^d \setminus \mathrm{int}B$ fechado, segue que $u \in \varphi^d \setminus \mathrm{int}B$. Portanto

$$u \in K_c \cap (\varphi^d \setminus \mathrm{int}B) \Rightarrow u \in K_c \ \text{ e } \ u \in \varphi^d \setminus \mathrm{int}B \Rightarrow u \in K_c \ \text{ e } \ u \notin \mathrm{int}B,$$

absurdo, pois $K_c \subset \text{int}B$.

■

Teorema 3.17 *Se* $\sup\limits_{Y} \varphi < c_1$ *e* $\varphi|_V$ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c \in [c_1, d]$, *então* $\varphi^{-1}([c_1, d])$ *contém, pelo menos,* $cat_{\varphi^d, Y}(\varphi^d)$ *pontos críticos de* $\varphi|_V$.

Demonstração:

Se $\text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^d) = n$, obtemos

$$\sup_{Y} \varphi < c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n \leq d.$$

Pelo teorema anterior, $\text{cat}_{\varphi^d}(K_c) \geq m + 1 = n - 1 + 1 = n$. Se $c \in [c_1, d]$, então $K_c \subset \varphi^{-1}([c_1, d])$; daí

$$\text{cat}_{\varphi^d}(\varphi^{-1}([c_1, d])) \geq \text{cat}_{\varphi^d}(K_c) \geq n = \text{cat}_{\varphi^d, Y}(\varphi^d).$$

Se K_c é infinito, então $\varphi^{-1}([c_1, d])$ contém infinitos pontos críticos. Se K_c é finito, e $\text{cat}_{\varphi^d}(K_c) \geq n$, então K_c possui, pelo menos n pontos. Logo, como $K_c \subset \varphi^{-1}([c_1, d])$, segue que $\varphi^{-1}([c_1, d])$ contém, no mínimo, n pontos críticos de $\varphi|_V$.

■

Teorema 3.18 *Se* $\varphi|_V$ *é limitada inferiormente e satisfaz a condição* $(PS)_c$, *para todo* $c \in [\inf\limits_{V} \varphi, d]$, *então* $\varphi|_V$ *tem um mínimo e* φ^d *possui, no mínimo,* $cat_{\varphi^d}(\varphi^d)$ *pontos críticos de* $\varphi|_V$.

Demonstração:

Primeiramente, mostremos que $c_1 = \inf\limits_{V} \varphi$. Fazendo $Y = \varnothing$, observe que

$$\mathcal{A}_1 = \{A \subset \varphi^d; A \text{ fechado e não vazio}\}.$$

Escreva então $\alpha = \inf\limits_{\varphi^d} \varphi$. Note que, dado $u \in \varphi^d$, $\varphi(u) \geq c_1$, pois fazendo $A = \{u\}$ temos $\varnothing \neq A \subset \varphi^d$, A fechado, donde

$$c_1 = \inf_{A \in \mathcal{A}_1} \sup_{u \in A} \varphi(u) \leq \sup_{v \in \{u\}} \varphi(v) = \varphi(u).$$

Logo,

$$\alpha = \inf_{\varphi^d} \varphi \geq c_1.$$

Por outro lado, tome $(u_n) \subset \varphi^d$ tal que $\varphi(u_n) \to c_1$. Então

$$c_1 \geq \inf_{u \in \{u_n\}} \varphi(u) \geq \inf_{\varphi^d} \varphi = \alpha.$$

Portanto, $c_1 = \alpha$. Escreva agora $\beta = \inf_V \varphi$. Como $\varphi^d \subset V$, então $\alpha \geq \beta$. Também, $d \geq c_1 = \alpha \geq \beta$ implica $\beta \leq d$. Se $\beta = d$ então

$$\alpha = \inf_{\varphi^d} \varphi \leq \sup_{\varphi^d} \varphi \leq d = \beta.$$

Se $\beta < d$, seja $(u_n) \subset V$ tal que $\varphi(u_n) \to \beta$; para n suficientemente grande, $\varphi(u_n) \leq d$, ou seja, $(u_n) \subset \varphi^d$. Logo, para n suficientemente grande,

$$\beta = \inf_{u \in \{u_n\}} \varphi(u) \geq \inf_{\varphi^d} \varphi = \alpha.$$

Em qualquer caso, temos $\beta \geq \alpha$, e segue então que $\alpha = \beta$. Com isso, concluímos que

$$c_1 = \alpha = \beta = \inf_V \varphi.$$

Logo, pelo teorema anterior, como $\varphi|_V$ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$ para todo $c \in [\inf_V \varphi, d] = [c_1, d]$, segue que $\varphi^{-1}([c_1, d]) = \varphi^{-1}((\infty, d]) = \varphi^d$ contém, pelo menos, $\mathrm{cat}_{\varphi^d, \varnothing}(\varphi^d) = \mathrm{cat}_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos de $\varphi|_V$. Pelo Teorema 3.16, como $\varphi|_V$ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_{c_1}$, temos $\mathrm{cat}_{\varphi^d}(K_{c_1}) \geq 1$, ou seja, existe $u \in K_{c_1}$ tal que $\varphi(u) = c_1 = \inf_V \varphi$ e $\|\varphi'(u)\|_* = 0$, donde u é ponto de mínimo de $\varphi|_V$.

■

3.4 Multiplicidade de soluções

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$ e $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$. O Teorema 2.4 afirma que se $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$, o problema (P_λ) admite uma solução não trivial. Nesta seção, provaremos a existência de $\lambda^* \in (-\lambda_1(\Omega), 0)$ tal que, para $\lambda^* < \lambda < 0$, o problema (P_λ) tem, pelo menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais. Este resultado está formalizado no seguinte

Teorema 3.19 *Se Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, então existe $-\lambda_1(\Omega) < \lambda^* < 0$ tal que, para $\lambda^* < \lambda < 0$, o problema (P_λ) tem, no mínimo, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

O teorema anterior é devido a [14], quando $N = 4$, e devido a [19], quando $N \geq 5$.

Para o nosso estudo considere o funcional

$$\psi(u) = \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx;$$

temos $\psi \in \mathcal{C}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Definimos agora o funcional

$$\varphi_\lambda(u) = \int_\Omega [|\nabla u|^2 + \lambda u^2] dx$$

sobre a variedade

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega); \psi(u) = 1\}.$$

Em $H_0^1(\Omega)$, usaremos a norma usual $\|u\| = \|\nabla u\|_2$.

Vejamos alguns lemas que ajudarão a provar o Teorema 3.19.

Lema 3.20 *Toda sequência $(u_n) \in V$ tal que*

$$\varphi_\lambda(u_n) \to c < S, \quad \|\varphi'_\lambda(u_n)\|_* \to 0$$

admite uma subsequência convergente, ou seja, φ_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Demonstração:

Mostremos primeiramente que existe $(\mu_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta u_n + \lambda u_n - \mu_n (u_n^+)^{2^*-1} \to 0 \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Pela Proposição B.3 temos

$$\|\varphi'_\lambda(u_n)\|_* = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \|\varphi'_\lambda(u_n) - \gamma \psi'(u_n)\|;$$

logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\gamma_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\varphi'_\lambda(u_n)\|_* = \|\varphi'_\lambda(u_n) - \gamma_n \psi'(u_n)\|$$

implicando

$$\varphi'_\lambda(u_n) - \gamma_n \psi'(u_n) \to 0 \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega);$$

como

$$\varphi_\lambda'(u)v = 2\int_\Omega (\nabla u.\nabla v + \lambda uv)dx, \quad \psi'(u)v = 2^*\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}vdx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

temos

$$2\int_\Omega (\nabla u_n.\nabla v + \lambda u_n v)dx - 2^*\gamma_n \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}vdx \to 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\| = 1.$$

Fazendo a identificação $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ por

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \langle -\Delta u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx, \end{array}$$

obtemos

$$2\int_\Omega (-\Delta u_n v + \lambda u_n v)dx - 2^*\gamma_n \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}vdx \to 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\| = 1 \Rightarrow$$

$$\int_\Omega (-\Delta u_n v + \lambda u_n v)dx - \frac{2^*\gamma_n}{2}\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}vdx \to 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\| = 1;$$

fazendo $\mu_n = 2^*\gamma_n/2$ obtemos

$$-\Delta u_n + \lambda u_n - \mu_n (u_n^+)^{2^*-1} \to 0 \;\text{ em }\; H^{-1}(\Omega). \tag{3.4}$$

Observe agora que a sequência (u_n) é limitada: como $\varphi_\lambda(u) = \|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2$, e $\lambda > -\lambda_1$, $\|u\|_\lambda^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente à norma usual, como visto no Capítulo 2; do limite $\varphi_\lambda(u_n) = \|u_n\|_\lambda^2 \to c$, segue que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Com isso, de (3.4) segue que

$$-\int_\Omega (\Delta u_n u_n + \lambda u_n u_n - \mu_n (u_n^+)^{2^*-1}u_n)dx \to 0$$

ou seja,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + \lambda u_n^2 - \mu_n (u_n^+)^{2^*})dx \to 0$$

e assim

$$\varphi_\lambda(u_n) - \mu_n \to 0,$$

pois $(u_n) \subset V$. Logo, $\mu_n \to c$. Como $\varphi_\lambda(u) = \|u\|_\lambda^2 \geq 0$ e $\varphi_\lambda(u_n) \to c$ então $c \geq 0$; se $c = 0$, teríamos $\varphi_\lambda(u_n) = \|u_n\|_\lambda^2 \to 0$, donde (u_n) converge forte em $H_0^1(\Omega)$, logo supondo $c > 0$, como $\mu_n \to c$, temos $\mu_n > 0$ para n suficientemente grande. Definindo $v_n = \mu_n^{\frac{N-2}{4}} u_n$, obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \lambda\frac{v_n^2}{2} - \frac{(v_n^+)^{2^*}}{2^*}\right]dx = \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{2}}}{2}\varphi_\lambda(u_n) - \frac{\mu_n^{\frac{N}{2}}}{2^*} \to \frac{c^{\frac{N}{2}}}{N}$$

e

$$-\Delta v_n + \lambda v_n - \mu_n (v_n^+)^{2^*-1} = \mu_n^{\frac{N-2}{4}} [-\Delta u_n + \lambda u_n - \mu_n (u_n^+)^{2^*-1}] \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Portanto, pelo Lema 2.2, sendo $c < S$ (ou seja, $c^{N/2}/N < S^{N/2}/N = c^*$), segue que (v_n) admite uma subsequência convergente; mas então (u_n) admite uma subsequência convergente.

■

Lema 3.21 *Se $N \geq 4$ e $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$, então*

$$m(\lambda, \Omega) = \inf_{u \in V} \varphi_\lambda(u) < S,$$

e existe $u \in V$ tal que $\varphi_\lambda(u) = m(\lambda, \Omega)$.

Demonstração:

Pelo Lema 2.3 existe $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ não negativa tal que

$$\frac{\|\nabla v\|_2^2 + \lambda \|v\|_2^2}{\|v\|_{2^*}^2} < S.$$

Definindo $w = v/\|v\|_{2^*}^2$, temos w não negativa, $\|w\|_{2^*}^2 = \|w^+\|_{2^*}^2 = 1$ (ou seja, $w \in V$) e

$$\varphi_\lambda(w) = \|\nabla w\|_2^2 + \lambda \|w\|_2^2 = \frac{\|\nabla v\|_2^2 + \lambda \|v\|_2^2}{\|v\|_{2^*}^2} < S.$$

Logo,

$$m(\lambda, \Omega) = \inf_{u \in V} \varphi_\lambda(u) \leq \varphi_\lambda(w) < S.$$

Pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema B.8 e Corolário B.9), φ_λ admite uma sequência $(\mathrm{PS})_c$ com $c = \inf_{u \in V} \varphi_\lambda(u)$, e pelo Lema 3.20, φ_λ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$, com $c = \inf_{u \in V} \varphi_\lambda(u) = m(\lambda, \Omega)$. Logo, pelo Teorema 3.18, φ_λ assume mínimo, i.e., existe $u \in V$ tal que

$$\varphi_\lambda(u) = m(\lambda, \Omega) = \min_{u \in V} \varphi_\lambda(u).$$

■

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : V &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ u &\longmapsto \beta(u) = \textstyle\int_\Omega (u^+)^{2^*} x dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lema 3.22 *Se* $(u_n) \subset V$ *é tal que* $\|u_n\|^2 \to S$, *então dist*$(\beta(u_n), \Omega) \to 0$.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que $\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) \nrightarrow 0$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$\text{dist}(\beta(u_n), \Omega) > r > 0,$$

$$u_n^+ \rightharpoonup u \;\text{ em }\; \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\nabla(u_n^+ - u)|^2 \rightharpoonup \mu \;\text{ em }\; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

$$|u_n^+ - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu \;\text{ em }\; \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n^+ \to u \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega.$$

Como Ω é limitado, pelo Lema 1.1 temos

$$S = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\|,$$

$$1 = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\|,$$

$$\|\nu\|^{2/2^*} \leq S^{-1}\|\mu\|,$$

e da desigualdade de Sobolev,

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq S^{-1}\|\nabla u\|_2^2.$$

Com isso, segue que $\|u\|_{2^*}^{2^*}$ e $\|\nu\|$ são iguais a 0 ou 1. Com efeito, de

$$S\|\nu\|^{2/2^*} \leq \|\mu\|, \quad S\|u\|_{2^*}^2 \leq \|\nabla u\|_2^2$$

temos

$$S = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\| \geq S(\|u\|_{2^*}^2 + \|\nu\|^{2/2^*}),$$

ou seja, $0 \leq \|u\|_{2^*}^2 + \|\nu\|^{2/2^*} \leq 1$; supondo $0 < \|u\|_{2^*}^{2^*}, \|\nu\| < 1$ então

$$2 < 2^* \Rightarrow 2/2^* < 1 \Rightarrow (\|u\|_{2^*}^{2^*})^{2/2^*} > \|u\|_{2^*}^{2^*} \;\text{ e }\; \|\nu\|^{2/2^*} > \|\nu\|,$$

donde

$$1 = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| < \|u\|_{2^*}^2 + \|\nu\|^{2/2^*} \leq 1,$$

o que é um absurdo. Portanto, por Ω ser limitado, segue da Proposição 1.5 que $u = 0$. Logo, $\|\nu\| = 1$, o que implica que

$$\|\nu\|^{2/2^*} = S^{-1}\|\mu\|.$$

Assim, pelo Lema 1.1, segue que ν é singular e está concentrada em um único ponto $y \in \overline{\Omega}$. Logo,

$$\beta(u_n) = \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} x dx \to \int_\Omega x d\nu = y \in \overline{\Omega},$$

o que é uma contradição. Portanto, o lema é válido. ■

Sem perda de generalidade, podemos supor $0 \in \Omega$. Com isso, escolha $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $\overline{B_r} \subset \Omega$, e de modo que os conjuntos

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N; \mathrm{dist}(x, \Omega) \leq r\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}.$$

sejam homotopicamente equivalentes a Ω. Defina também

$$m(\lambda) = m(\lambda, B_r) < S.$$

Lema 3.23 *Existe $-\lambda_1(\Omega) < \lambda^* < 0$ tal que para $\lambda^* < \lambda < 0$,*

$$u \in \varphi_\lambda^{m(\lambda)} \Rightarrow \beta(u) \in \Omega_r^+.$$

Demonstração:

Para todo $u \in V$, segue da desigualdade de Hölder que

$$\|u^+\|_2^2 = \int_\Omega (u^+)^2 dx = \int_\Omega (u^+)^2.1 dx \leq \|1\|_{N/2}\|(u^+)^2\|_{N/(N-2)} = |\Omega|^{2/N}\|u^+\|_{2^*}^2 = |\Omega|^{2/N}.$$

Se $u \in V$ e $\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 \leq S + \varepsilon$, então $\|u^-\|^2 \leq \varepsilon$, pois $\|u^+\|^2 \geq S$, já que $\|u^+\|_{2^*} = 1$. Também,

$$\|u^-\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u^-\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1}.$$

Pelo Lema 3.22, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$u \in V, \|u\|^2 \leq S + \varepsilon \Rightarrow \beta(u) \in \Omega_r^+. \tag{3.6}$$

Fixe então $\lambda^* = -\frac{\varepsilon}{|\Omega|^{2/N}+\varepsilon/\lambda_1}$, para $\varepsilon > 0$ de modo que $\lambda^* > -\lambda_1(\Omega)$. Se $\lambda^* < \lambda < 0$ e $u \in \varphi_\lambda^{m(\lambda)}$ temos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \|\nabla u\|_2^2 + \lambda\|u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \\
&= \varphi_\lambda(u) - \lambda\|u\|_2^2 \\
&\leq m(\lambda) - \lambda\|u^+\|_2^2 - \lambda\|u^-\|_2^2 \\
&\leq S - \lambda^*\|u^+\|_2^2 - \lambda^*\|u^-\|_2^2 \\
&\leq S - \lambda^*|\Omega|^{2/N} - \lambda^*\frac{\varepsilon}{\lambda_1} \\
&\leq S - \lambda^*\left(|\Omega|^{2/N} + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right) \\
&= S + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.6), segue que $\beta(u) \in \Omega_r^+$.

■

Lema 3.24 *Se $N \geq 4$ e $\lambda^* < \lambda < 0$, então $cat_{\varphi_\lambda^{m(\lambda)}}(\varphi_\lambda^{m(\lambda)}) \geq cat_\Omega(\Omega)$.*

Demonstração:

Defina $\gamma : \Omega_r^- \to \varphi_\lambda^{m(\lambda)}$ por

$$\begin{aligned}
\gamma(y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \gamma(y)(x) = \begin{cases} v(x-y), & x \in B(y,r) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
\end{aligned}$$

onde $v \in H_0^1(B_r)$ é tal que $v \geq 0$, $\|v\|_{2^*} = 1$ e

$$m(\lambda) = \varphi_\lambda(v) = \int_{B_r} [|\nabla v|^2 + \lambda v^2]dx.$$

(A existência de v é dada pelo Lema 3.21, e temos $v \geq 0$ pois sendo v mínimo de φ_λ em V, segue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\lambda'(v)\|_* = 0 &\Rightarrow \exists\gamma \in \mathbb{R}; \varphi_\lambda'(v) - \gamma\psi'(v) = 0 \text{ em } H^{-1}(B_r) \\
&\Rightarrow 2\int_{B_r} (\nabla v.\nabla u + \lambda vu)dx - 2^*\gamma\int_{B_r} (v^+)^{2^*-1}udx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(B_r);
\end{aligned}$$

fazendo $u = v^-$,

$$2\int_{B_r} [|\nabla v^-|^2 + \lambda(v^-)^2]dx = \|\nabla v^-\|_2^2 + \lambda\|v^-\|_2^2 = 0 \Rightarrow v^- = 0.)$$

Como v é uma função radial (ver [12]), usando a aplicação β dada em (3.5) temos

$$\begin{aligned}(\beta\circ\gamma)(y) &= \int_\Omega [(\gamma(y)(x))^+]^{2^*} x dx\\ &= \int_{B(y,r)} [v(x-y)]^{2^*} x dx\\ &= \int_{B_r} v(z)^{2^*}(z+y)dz\\ &= \int_{B_r} v(z)^{2^*} z dz + y\int_{B_r} v(z)^{2^*}dz\\ &= y.\end{aligned}$$

A aplicação γ é contínua: se $y_n \to y$ em Ω_r^-, então

$$\begin{aligned}\|\gamma(y_n)-\gamma(y)\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(\gamma(y_n)-\gamma(y))|^2 dx\\ &= \int_\Omega |\nabla(v(x-y_n)-v(x-y))|^2 dx\\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N [\partial_i(v(x-y_n)-v(x-y))]^2 dx\\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega [\partial_i(v(x-y_n)-v(x-y))]^2 dx\\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega [\partial_i v(x-y_n)-\partial_i v(x-y)]^2 dx\\ &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega |T_{y_n}(\partial_i v)-T_y(\partial_i v)|^2 dx \to 0,\end{aligned}$$

pois a aplicação $T_y : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\begin{aligned}T_y f : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto T_y f(x) = f(x-y)\end{aligned}$$

é contínua. Logo, $\gamma(y_n) \to \gamma(y)$ em $H_0^1(\Omega)$, mostrando a continuidade de γ.

Também β é uma aplicação contínua: como

$$\beta(u) = \left(\int_\Omega (u^+)^{2^*} x_i dx\right)_{i=1}^N = (\beta_i(u))_{i=1}^N,$$

para cada $i = 1, ..., N$, temos

$$\begin{aligned}
|\beta_i(u) - \beta_i(v)| &= \left| \int_\Omega (u^+)^{2^*} x_i dx - \int_\Omega (v^+)^{2^*} x_i dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega [(u^+)^{2^*} - (v^+)^{2^*}] x_i dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |(u^+)^{2^*} - (v^+)^{2^*}||x_i| dx \\
&\leq \operatorname{diam}(\Omega) \int_\Omega |(u^+)^{2^*} - (v^+)^{2^*}| dx \to 0,
\end{aligned}$$

quando $u \to v$, pois $\psi(u) = \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx$ é contínua. Logo, β_i é contínua, para todo $i = 1, ..., N$, donde β é contínua. Se $\operatorname{cat}_{\varphi_\lambda^{m(\lambda)}}(\varphi_\lambda^{m(\lambda)}) = \infty$, o resultado é imediato. Suponha então que $\operatorname{cat}_{\varphi_\lambda^{m(\lambda)}}(\varphi_\lambda^{m(\lambda)}) = n$, i.e.,

$$\varphi_\lambda^{m(\lambda)} = A_1 \cup ... \cup A_n,$$

onde A_j, $j = 1, ..., n$ são fechados e contráteis em $\varphi_\lambda^{m(\lambda)}$, ou seja, existem $h_j : [0,1] \times A_j \to \varphi_\lambda^{m(\lambda)}$ contínuas tais que para todo $u \in A_j$,

$$h_j(0, u) = u, \quad h_j(1, u) = w_j,$$

onde, para cada $j = 1, ..., n$, $w_j \in \varphi_\lambda^{m(\lambda)}$ é fixo. Considere $B_j = \gamma^{-1}(A_j), \quad j = 1, ..., n$. Sendo γ contínua, os conjuntos B_j são fechados e

$$\Omega_r^- = \gamma^{-1}(\varphi_\lambda^{m(\lambda)}) = \gamma^{-1}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \gamma^{-1}(A_1) \cup ... \cup \gamma^{-1}(A_n) = B_1 \cup ... \cup B_n.$$

Defina agora a aplicação

$$\begin{aligned}
g_j : [0,1] \times B_j &\longrightarrow \Omega_r^+ \\
(t, x) &\longmapsto g_j(t, x) = \beta(h_j(t, \gamma(x))).
\end{aligned}$$

Observe que:

i) g_j está bem definido:

$$t \in [0,1], x \in B_j = \gamma^{-1}(A_j) \Rightarrow \gamma(x) \in A_j \Rightarrow h_j(t, \gamma(x)) \text{ está bem definido;}$$

e pelo Lema 3.23, se $\lambda^* < \lambda < 0$, então

$$h_j(t, \gamma(x)) \in \varphi_\lambda^{m(\lambda)} \Rightarrow \beta(h_j(t, \gamma(x))) \in \Omega_r^+.$$

ii) g_j é contínua, pois β, h_j, γ o são.

iii) $g_j(0,x) = \beta(h_j(0,\gamma(x))) = \beta(\gamma(x)) = x, \quad \forall x \in B_j$, e

$$g_j(1,x) = \beta(h_j(1,\gamma(x))) = \beta(w_j), \quad \forall x \in B_j.$$

Portanto, B_j é contrátil em Ω_r^+, para todo $j = 1, ...n$, donde

$$\mathrm{cat}_\Omega(\Omega) = \mathrm{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \mathrm{cat}_{\varphi_\lambda^{m(\lambda)}}(\varphi_\lambda^{m(\lambda)}).$$

■

Demonstração do Teorema 3.19:

Pelos Lemas 3.20 e 3.21, para

$$c \leq m(\lambda,\Omega) \leq m(\lambda) < S$$

φ_λ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$. Do Teorema 3.18 segue que $\varphi_\lambda^{m(\lambda)}$ contém, no mínimo, $\mathrm{cat}_{\varphi_\lambda^{m(\lambda)}}(\varphi_\lambda^{m(\lambda)})$ pontos críticos de φ_λ, donde, pelo Lema 3.24, para $\lambda^* < \lambda < 0$, $\varphi_\lambda^{m(\lambda)}$ contém, pelo menos, $n = \mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos de φ_λ, digamos, $u_1, ..., u_n$. Como visto na demonstração do Lema 3.20, para cada $j = 1, ..., n$ existe $\mu_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta u_j + \lambda u_j - \mu_j (u_j^+)^{2^*-1} = 0. \tag{3.7}$$

Multiplicando a equação (3.7) por u_j^- obtemos

$$-\Delta u_j u_j^- + \lambda (u_j^-)^2 = 0;$$

integrando sobre Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega [\nabla u_j . \nabla u_j^- + \lambda (u_j^-)^2] dx = 0 \Rightarrow \int_\Omega [|\nabla u_j^-|^2 + \lambda (u_j^-)^2] dx &= \\ \|\nabla u_j^-\|_2^2 + \lambda \|u_j^-\|_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

donde $u_j^- = 0$. Logo, $u_j = u_j^+$ e podemos escrever

$$-\Delta u_j + \lambda u_j - \mu_j u_j^{2^*-1} = 0. \tag{3.8}$$

Como $u_j \in \varphi_\lambda^{m(\lambda)} \subset V, \quad j = 1, ..., n$, então $u_j \neq 0$ (pois $\|u_j\|_{2^*} = 1$), e observe que, multiplicando (3.8) por u_j e integrando sobre Ω obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega [|\nabla u_j|^2 + \lambda (u_j)^2] dx = \mu_j \int_\Omega u_j^{2^*} dx \quad &\Rightarrow \\ \varphi_\lambda(u_j) = \mu_j \quad &\Rightarrow \\ \mu_j \neq 0, \quad \forall j = 1, ..., n, & \end{aligned}$$

e então $v_j = \mu_j^{\frac{N-2}{4}} u_j$ é uma solução não trivial de (P_λ), pois dado $w \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla v_j . \nabla w + \lambda v_j w) dx &= \int_\Omega (\mu_j^{\frac{N-2}{4}} \nabla u_j . \nabla w + \lambda \mu_j^{\frac{N-2}{4}} u_j w) dx \\ &= \mu_j^{\frac{N-2}{4}} \int_\Omega \mu_j u_j^{2^*-1} w dx \\ &= \int_\Omega \mu_j^{\frac{N+2}{4}} u_j^{2^*-1} w dx \\ &= \int_\Omega v_j^{2^*-1} w dx. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos a existência de, pelo menos, $n = \text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais para o problema (P_λ). ■

Capítulo 4

Multiplicidade de soluções para o problema (P_μ)

Neste capítulo, seguindo [2] estudaremos a multiplicidade de soluções para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{P_μ}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $2 < q < 2^*$ e $\mu > 0$. Em $H_0^1(\Omega)$, usaremos a norma usual $\|u\| = \|\nabla u\|_2$.

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguinte

Teorema 4.1 *Se $N \geq 4$ e $2 < q < 2^*$, então existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema (P_μ) possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

4.1 Preliminares

Considere o funcional

$$I_\mu(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx. \tag{4.1}$$

O funcional I_μ é de classe $\mathcal{C}^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Considere agora a variedade de Nehari associada a I_μ:

$$\mathcal{M}_\mu = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}; I'_\mu(u)u = 0\}.$$

Proposição 4.2 *O número*

$$c_\mu = \inf\{I_\mu(u); u \in \mathcal{M}_\mu\} \tag{4.2}$$

está bem definido.

Demonstração:

Mostremos que I_μ é limitado inferiormente na variedade $\mathcal{M}_\mu$. Dado $u \in \mathcal{M}_\mu$, temos $u \neq 0$ e

$$I'_\mu(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \mu \int_\Omega (u^+)^q dx - \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx = 0,$$

ou seja,

$$\|u\|^2 = \mu \int_\Omega (u^+)^q dx + \int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx \\ &= \frac{\mu}{2}\int_\Omega (u^+)^q dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx - \frac{\mu}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx \\ &= \mu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega (u^+)^q dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx \geq 0, \end{aligned}$$

donde 0 é cota inferior para o conjunto $\{I_\mu(u); u \in \mathcal{M}_\mu\}$ e assim fica bem definido o número dado em (4.2).

■

Proposição 4.3 *O funcional I_μ satisfaz a geometria do passo da montanha.*

Demonstração:

Observe primeiramente que $I_\mu(0) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{q}\|u^+\|_q^q - \frac{1}{2^*}\|u^+\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{q}\|u\|_q^q - \frac{1}{2^*}\|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu c_1}{q}\|u\|^q - \frac{c_2}{2^*}\|u\|^{2^*}, \end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 > 0$ aparecem da imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e $L^{2^*}(\Omega)$; escolhendo então $r_1 > 0$ (a ser fixado) e considerando $\|u\| = r_1$ temos

$$I_\mu(u) \geq \frac{r_1^2}{2} - \frac{\mu c_1}{q} r_1^q - \frac{c_2}{2^*} r_1^{2^*}$$

e para $r_1 \approx 0$ temos

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{4} r_1^2, \quad \text{se} \quad \|u\| = r_1.$$

Logo

$$b = \inf_{\|u\|=r_1} I_\mu(u) \geq \frac{1}{4} r_1^2 > 0.$$

Também, como

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu c_1}{q}\|u\|^q - \frac{c_2}{2^*}\|u\|^{2^*}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu c_1}{q}\|u\|^q - \frac{c_2}{2^*}\|u\|^{2^*} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\|u\|^2 \geq \frac{\mu c_1}{q}\|u\|^q + \frac{c_2}{2^*}\|u\|^{2^*} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\mu c_1}{q}\|u\|^{q-2} + \frac{c_2}{2^*}\|u\|^{2^*-2} \leq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \|u\| \approx 0,
\end{aligned}$$

temos $I_\mu(u) \geq 0$ se $u \in B_{r_2}$, $r_2 \approx 0$. Portanto, fazendo $r = \min\{r_1, r_2\}$, estamos nas hipóteses do Teorema do Passo da Montanha (Teorema C.7).

∎

Denotemos por $\widetilde{c}_\mu$ o nível do passo da montanha do funcional I_μ, dado por

$$\widetilde{c}_\mu = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tv) > 0.$$

Lema 4.4 *Seja $N \geq 4$. Então I_μ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/2}/N)$. Mais ainda, $\widetilde{c}_\mu \in (0, S^{N/2}/N)$ para $\mu > 0$ e $2 < q < 2^*$.*

Demonstração:

Suponha $c \in (0, S^{N/2}/N)$ e que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é tal que

$$I_\mu(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'_\mu(u_n) \to 0.$$

Observe então que a sequência (u_n) é limitada, pois

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\| &= I_\mu(u_n) - \frac{1}{q} I'_\mu(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\mu}{q}\|u_n^+\|_q^q - \frac{1}{2^*}\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} - \frac{1}{q}\|u_n\|^2 + \frac{\mu}{q}\|u_n^+\|_q^q + \frac{1}{q}\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^2,
\end{aligned}$$

donde (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$I'_\mu(u_n)u_n^- = \|u_n^-\|^2 \to 0.$$

Do Lema 1.2 e do Teorema A.2, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega),$$

$$u_n \to u \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega,$$

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \lambda \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{x_j},$$

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Considere $x_k \in \overline{\Omega}$, para algum $k \in J$, e dado $\varepsilon > 0$ considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi \equiv 1 \ \text{ em } \ B(x_k, \varepsilon),$$

$$\varphi \equiv 0 \ \text{ em } \ B(x_k, 2\varepsilon)^c,$$

e

$$|\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\varepsilon}.$$

A sequência (φu_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, donde

$$I'_\mu(u_n)(\varphi u_n) = \int_\Omega \nabla u_n . \nabla(\varphi u_n) dx - \mu \int_\Omega (u_n)^{q-1}(\varphi u_n) dx - \int_\Omega (u_n)^{2^*-1}(\varphi u_n) dx \to 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_\Omega \varphi |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega u_n (\nabla u_n . \nabla \varphi) dx - \mu \int_\Omega \varphi (u_n)^q dx - \int_\Omega \varphi (u_n)^{2^*} dx \right] = 0$$

e assim obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n (\nabla u_n . \nabla \varphi) dx = \int_\Omega \varphi d\nu + \mu \int_\Omega u^q \varphi dx - \int_\Omega \varphi d\lambda. \tag{4.3}$$

Daí, como

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega u_n (\nabla u_n . \nabla \varphi) dx \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{B(x_k, 2\varepsilon)} u_n (\nabla u_n . \nabla \varphi) dx \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\varepsilon} \int_{B(x_k,2\varepsilon)} |u_n| |\nabla u_n| dx,$$

usando a desigualdade de Hölder

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\varepsilon} \|u_n\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)} \|\nabla u_n\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\varepsilon} M \|u_n\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)} = \frac{2}{\varepsilon} M \|u\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)},$$

onde $M \geq \|\nabla u_n\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)} = \|u_n\|$, já que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Note agora que, usando novamente a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)} = \left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)} (1.u)^2 dx\right)^{1/2} &= \left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)} 1^N dx\right)^{1/N}\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2^*}\\
&\leq [(2\varepsilon)^N w_N]^{1/N}\|u\|_{2^*,B(x_k,2\varepsilon)},
\end{aligned}$$

onde w_N denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Logo

$$\frac{2}{\varepsilon}M\|u\|_{2,B(x_k,2\varepsilon)} \leq \frac{2}{\varepsilon}M(2\varepsilon)w_N^{1/N}\|u\|_{2^*,B(x_k,2\varepsilon)} = C\|u\|_{2^*,B(x_k,2\varepsilon)}, \quad \text{onde} \quad C = 4Mw_N^{1/N},$$

e assim,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n(\nabla u_n.\nabla\varphi)dx\right| \leq C\|u\|_{2^*,B(x_k,2\varepsilon)} = C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |u|^{2^*} dx\right)^{1/2^*} \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) segue que

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{B(x_k,2\varepsilon)} \varphi d\nu + \mu\int_{B(x_k,2\varepsilon)} u^q\varphi dx - \int_{B(x_k,2\varepsilon)} \varphi d\lambda\right] \leq \nu_k - \lambda_k$$

e assim $\nu_k \geq \lambda_k$. Pelo Lema 1.2, temos $\nu_k^{2/2^*} \leq S^{-1}\lambda_k$, donde $\nu_k \geq S\nu_k^{2/2^*}$; i.e., $\nu_k = 0$ ou $\nu_k \geq S^{N/2}$. Suponha que existe k_0 com $\nu_{k_0} \neq 0$, i.e., $\nu_{k_0} \geq S^{N/2}$, então

$$\begin{aligned}
c = \lim_{n\to\infty} I_\mu(u_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(I_\mu(u_n) - \frac{1}{2}I'_\mu(u_n)u_n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega (u_n)^q dx + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega (u_n)^{2^*} dx\right]\\
&= \mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega u^q dx + \frac{1}{N}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n)^{2^*} dx;
\end{aligned}$$

fixando agora $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $\overline{\Omega}$ e $\psi \equiv 0$ fora de uma vizinhança de $\overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n)^{2^*} dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n)^{2^*}\psi dx\\
&= \int_\Omega u^{2^*}\psi dx + \int_\Omega\left(\sum_{k\in J}\nu_k\delta_{x_k}\right)\psi dx\\
&= \int_\Omega u^{2^*} dx + \sum_{k\in J}\nu_k.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
c = \lim_{n\to\infty} I_\mu(u_n) &= \mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega u^q dx + \frac{1}{N}\int_\Omega u^{2^*} dx + \frac{1}{N}\sum\nu_k\\
&\geq \mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega u^q dx + \frac{1}{N}\int_\Omega u^{2^*} dx + \frac{1}{N}S^{N/2}\\
&\geq \frac{1}{N}S^{N/2},
\end{aligned}$$

pois $\nu_{k_0} \geq S^{N/2}$. Mas isso contradiz o fato de que $c \in (0, S^{N/2}/N)$. Logo, $\nu_k = 0$, para todo $k \in J$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n)^{2^*} dx = \int_\Omega u^{2^*} dx.$$

Uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(\Omega)$ (pois $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$) e $\|u_n\|_{2^*} \to \|u\|_{2^*}$, temos $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\Omega)$ (Teorema C.4). Enfim, mostremos agora que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Observe que

$$\|u_n - u\|^2 = \langle u_n - u, u_n - u\rangle = \|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle - \langle u, u_n - u\rangle;$$

note agora que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= I'_\mu(u_n)u_n + \mu\|u_n\|_q^q + \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \\ &= o_n(1) + \mu\|u_n\|_q^q + \|u_n\|_{2^*}^{2^*}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\langle u_n, u\rangle &= -I'_\mu(u_n)u - \mu\int_\Omega (u_n)^{q-1}u dx - \int_\Omega (u_n)^{2^*-1}u dx \\ &= o_n(1) - \mu\int_\Omega (u_n)^{q-1}u dx - \int_\Omega (u_n)^{2^*-1}u dx; \end{aligned}$$

e $-\langle u, u_n - u\rangle = o_n(1)$, pois $u_n - u \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$\|u_n - u\|^2 = o_n(1) + \mu\|u_n\|_q^q + \|u_n\|_{2^*}^{2^*} - \mu\int_\Omega (u_n)^{q-1}u dx - \int_\Omega (u_n)^{2^*-1}u dx \to 0,$$

pois $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ e em $L^{2^*}(\Omega)$.

Mostremos agora que o nível do passo da montanha $\widetilde{c}_\mu$ pertence ao intervalo $(0, S^{N/2}/N)$. Considere, para $\varepsilon > 0$, a função

$$U_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = C_N(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{2-N}{2}},$$

onde U é dado em (1.25). Fazendo $C = C_N^{\frac{2-N}{2}}$ e $\varepsilon = (\delta/C)^{1/2}$ obtemos

$$U_\delta(x) = (\delta + C|x|^2)^{\frac{2-N}{2}}.$$

Voltando ao parâmetro ε, considere então as funções

$$U_\varepsilon(x) = (\varepsilon + C|x|^2)^{\frac{2-N}{2}},$$

$\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e supp$\phi \subset \Omega$,

$$u_\varepsilon = \phi(x)U_\varepsilon(x)$$

e

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}}.$$

Temos então as seguintes estimativas (ver [8] e [10]):

$$\|v_\varepsilon\|^2 = S + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}), \tag{4.5}$$

$$c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}(N-\frac{q(N-2)}{2})} \leq \|v_\varepsilon\|_q^q \leq c_2\varepsilon^{\frac{1}{2}(N-\frac{q(N-2)}{2})}, \tag{4.6}$$

e

$$\|v_\varepsilon\|_q^q \to 0, \varepsilon \to 0. \tag{4.7}$$

O nosso objetivo é mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/2}}{N}$$

(neste caso, temos $\widetilde{c}_\mu = \inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max\limits_{t\geq 0} I_\mu(tv) \leq \max\limits_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/2}}{N}$). Considere as funções

$$\begin{aligned} g(t) = I_\mu(tv_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \mu\frac{t^q}{q}\int_\Omega v_\varepsilon^q dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega v_\varepsilon^{2^*} dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \mu\frac{t^q}{q}\int_\Omega v_\varepsilon^q dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \end{aligned}$$

e

$$\overline{g}(t) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}.$$

Observe que $\max\limits_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon)$ é atingido para algum $t_\varepsilon > 0$, e dessa maneira

$$\begin{aligned} 0 = g'(t_\varepsilon) &= t_\varepsilon\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - \mu t_\varepsilon^{q-1}\int_\Omega v_\varepsilon^q dx - t_\varepsilon^{2^*-1} \\ &= t_\varepsilon\left[\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - t_\varepsilon^{2^*-2} - \mu t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega v_\varepsilon^q dx\right]. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx - t_\varepsilon^{2^*-2} - \mu t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega v_\varepsilon^q dx = 0$$

donde

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx = t_\varepsilon^{2^*-2} + \mu t_\varepsilon^{q-2}\int_\Omega v_\varepsilon^q dx > t_\varepsilon^{2^*-2},$$

ou seja,

$$t_\varepsilon \leq \left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2^*-2}}. \tag{4.8}$$

Esta desigualdade implica que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx &= t_\varepsilon^{2^*-2} + \mu t_\varepsilon^{q-2} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx \\
&\leq t_\varepsilon^{2^*-2} + \mu \Big(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{q-2}{2^*-2}} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx \\
&= t_\varepsilon^{2^*-2} + \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{2(q-2)}{2^*-2}} \|v_\varepsilon\|_q^q,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon^{2^*-2} &\geq \|v_\varepsilon\|^2 - \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{2(q-2)}{2^*-2}} \|v_\varepsilon\|_q^q \\
&= \|v_\varepsilon\|^2 [1 - \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{2(q-2)}{2^*-2}-2} \|v_\varepsilon\|_q^q],
\end{aligned}$$

e usando (4.5) e (4.7) podemos escolher ε suficientemente pequeno de modo que

$$t_\varepsilon^{2^*-2} \geq \frac{S}{2}. \tag{4.9}$$

(Isto significa que podemos limitar inferiormente t_ε, sem depender de ε.) Observe que $\overline{g}$ atinge máximo, e daí $\overline{g}'(t) = 0$ implica

$$t = \Big(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2^*-2}}$$

e que $\overline{g}$ é crescente no intervalo $[0, (\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx)^{\frac{1}{2^*-2}}]$. Então, usando (4.5),(4.8) e (4.9),

$$\begin{aligned}
g(t_\varepsilon) &= \overline{g}(t_\varepsilon) - \mu \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx \\
&\leq \overline{g}\bigg(\Big(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2^*-2}} \bigg) - \mu \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx
\end{aligned}$$

e note que, usando (4.5),

$$\begin{aligned}
\overline{g}\bigg(\Big(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2^*-2}} \bigg) &= \frac{1}{2} \bigg(\Big(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2^*-2}} \bigg)^2 \|v_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2^*} \bigg(\Big(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2^*-2}} \bigg)^{2^*} \\
&= \frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|^{N-2} \|v_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2^*} \|v_\varepsilon\|^N \\
&= \frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|^N - \frac{1}{2^*} \|v_\varepsilon\|^N = \frac{1}{N} \|v_\varepsilon\|^N \\
&= \frac{1}{N} (\|v_\varepsilon\|^2)^{N/2} = \frac{1}{N} [S + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})]^{N/2} \\
&= \frac{1}{N} S^{N/2} [1 + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})]^{N/2},
\end{aligned}$$

e assim, de (4.9),

$$g(t_\varepsilon) \leq \frac{1}{N} S^{N/2}[1 + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})]^{N/2} - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{2^*-2}} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx;$$

escrevendo $f(t) = (1+t)^{N/2}$, do Teorema do Valor Médio obtemos

$$[1 + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})]^{N/2} = \frac{N}{2}(1+\theta)^{\frac{N}{2}-1} O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) + 1 = O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) + 1, \quad \theta \in (0, O(\varepsilon^N)),$$

donde

$$\begin{aligned} g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N} S^{N/2} + O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{2^*-2}} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx \\ &\leq \frac{1}{N} S^{N/2} + c_3 \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{2^*-2}} \int_\Omega v_\varepsilon^q dx. \end{aligned}$$

De (4.6) obtemos

$$\begin{aligned} g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N} S^{N/2} + c_3 \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{2^*-2}} c_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}(N - q(\frac{N-2}{2}))} \\ &\leq \frac{1}{N} S^{N/2} + c_3 \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} - \mu \widehat{c}_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}(N - q(\frac{N-2}{2}))}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{N-2}{2} > \frac{1}{2}\left(N - \frac{q(N-2)}{2}\right),$$

pois $N \geq 4$, então, para $\varepsilon \approx 0$ temos

$$c_3 \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} - \mu \widehat{c}_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}(N - q(\frac{N-2}{2}))} < 0,$$

e daí

$$g(t_\varepsilon) = \max_{t \geq 0} g(t) = \max_{t \geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/2}}{N},$$

como queríamos demonstrar.

■

Lema 4.5 *Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ existe único $t_u \in (0, +\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{M}_\mu$ e*

$$\max_{t \geq 0} I_\mu(tu) = I_\mu(t_u u).$$

Demonstração:

Dado $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, defina

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = I_\mu(tu) = \tfrac{t^2}{2}\|u\|^2 - \tfrac{\mu t^q}{q}\|u^+\|_q^q - \tfrac{t^{2^*}}{2^*}\|u^+\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

A função g admite um ponto de máximo, ou seja, existe $t_u \in (0, \infty)$ tal que

$$\max_{t \geq 0} I_\mu(tu) = I_\mu(t_u u).$$

Note que $t_u u \in \mathcal{M}_\mu$, pois $t_u u \neq 0$ e

$$\frac{d}{dt} I_\mu(tu)\bigg|_{t=t_u} = 0 \Leftrightarrow I'_\mu(t_u u)u = 0 \Leftrightarrow I'_\mu(t_u u)(t_u u) = 0.$$

Agora observe que

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \|u\|^2 = \frac{\mu t^{q-1}}{t}\|u^+\|_q^q + \frac{t^{2^*-1}}{t}\|u^+\|_{2^*}^{2^*} \Leftrightarrow \|u\|^2 = \mu t^{q-2}\|u^+\|_q^q + t^{2^*-2}\|u^+\|_{2^*}^{2^*};$$

se existissem t_1 e t_2 com $t_1 < t_2$ tais que $g'(t_1) = g'(t_2) = 0$, teríamos

$$\|u\|^2 = \mu t_1^{q-2}\|u^+\|_q^q + t_1^{2^*-2}\|u^+\|_{2^*}^{2^*}$$

e

$$\|u\|^2 = \mu t_2^{q-2}\|u^+\|_q^q + t_2^{2^*-2}\|u^+\|_{2^*}^{2^*},$$

o que é um absurdo. Logo, g possui um único ponto de máximo, donde t_u é único. ■

Corolário 4.6 *Se $u \in \mathcal{M}_\mu$ então*

$$I_\mu(u) = \max_{t \geq 0} I_\mu(tu).$$

Lema 4.7 *Se $N \geq 4$ e $2 < q < 2^*$ então $c_\mu = \widetilde{c}_\mu$ para $\mu > 0$.*

Demonstração:

Pelo Lema 4.4 e pelo Teorema do Passo da Montanha C.7, para cada $\mu > 0$ existe $u_\mu \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_\mu) = \widetilde{c}_\mu \quad \text{e} \quad I'_\mu(u_\mu) = 0.$$

Logo, dado $v \in \mathcal{M}_\mu$, temos $v \neq 0$ e, pelo Corolário 4.6,

$$I_\mu(v) = \max_{t \geq 0} I_\mu(tv) \geq \widetilde{c}_\mu = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tu),$$

donde

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{M}_\mu} I_\mu(u) \geq \widetilde{c}_\mu. \tag{4.10}$$

Por outro lado, como $u_\mu \in \mathcal{M}_\mu$ e $I_\mu(u_\mu) = \widetilde{c}_\mu$, temos

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{M}_\mu} I_\mu(u) \leq I_\mu(u_\mu) = \widetilde{c}_\mu. \tag{4.11}$$

Portando, de (4.10) e (4.11) segue que

$$c_\mu = \widetilde{c}_\mu.$$

■

Lema 4.8 *Se $\mu_1 \geq \mu_2$ então $c_{\mu_1} \leq c_{\mu_2}$, ou seja, c_μ é não crescente em μ.*

Demonstração:

Se $\mu_2 \leq \mu_1$ então $I_{\mu_2} \geq I_{\mu_1}$; logo, dado $t \in [0, \infty)$ e $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ temos

$$I_{\mu_2}(tu) \geq I_{\mu_1}(tu)$$

donde

$$\max_{t\geq 0} I_{\mu_2}(tu) \geq \max_{t\geq 0} I_{\mu_1}(tu) \geq \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_{\mu_1}(tu) = \widetilde{c}_{\mu_1},$$

e usando o Lema 4.7 segue que

$$c_{\mu_2} = \widetilde{c}_{\mu_2} = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_{\mu_2}(tu) \geq \widetilde{c}_{\mu_1} = c_{\mu_1}.$$

■

Denotemos agora por $c_0 > 0$ o nível do passo da montanha associado ao funcional

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx, \tag{4.12}$$

e observe que $c_\mu \leq c_0$, para todo $\mu > 0$.

Dado agora $r > 0$, seja $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função radial não negativa tal que $\mathrm{supp}\psi \subset B_r$ e $\psi \equiv 1$ em $B_{r/2}$. Para $\varepsilon > 0$, defina

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C_N \psi(x) \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde $C_N = N(N-2)^{\frac{N-2}{4}}$ (u_ε é basicamente a mesma função usada na demonstração do Lema 2.3). Segundo [1], temos as seguintes estimativas:

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2})$$

e

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx = S^{N/2} + O(\varepsilon^N).$$

Escreva

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}}. \tag{4.13}$$

Então v_ε é radial, não negativa e satisfaz

$$\|v_\varepsilon\|^2 = S + O(\varepsilon^{N-2}). \tag{4.14}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|^2 = \frac{\|u_\varepsilon\|^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} &= \frac{S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2})}{[S^{N/2} + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} \\
&= \frac{S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2})}{\left[S^{N/2}\left(1 + \frac{O(\varepsilon^N)}{S^{N/2}}\right)\right]^{2/2^*}} \\
&= \frac{S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2})}{S^{\frac{N-2}{2}}[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} \\
&= \frac{S^{N/2}}{S^{\frac{N-2}{2}}[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} + \frac{O(\varepsilon^{N-2})}{S^{\frac{N-2}{2}}[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|v_\varepsilon\|^2 = \frac{S}{[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} + \frac{O(\varepsilon^{N-2})}{[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} = \frac{S + O(\varepsilon^{N-2})}{[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}};$$

fazendo $f(t) = 1/(1+t)^{2/2^*} = (1+t)^{-2/2^*}$, pelo Teorema do Valor Médio obtemos

$$\frac{1}{[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} = 1 - \frac{2}{2^*}(1+\theta)^{\frac{2}{2^*}-1} O(\varepsilon^N) = 1 - O(\varepsilon^N), \quad \theta \in (0, O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})),$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|^2 &= \frac{S + O(\varepsilon^{N-2})}{[1 + O(\varepsilon^N)]^{2/2^*}} \\
&= [S + O(\varepsilon^{N-2})][1 - O(\varepsilon^N)] \\
&= S - O(\varepsilon^N) + O(\varepsilon^{N-2}) - O(\varepsilon^{N-2})O(\varepsilon^N) \\
&= S + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$

Lema 4.9 $c_0 = S^{N/2}/N$.

Demonstração:

Seja v_ε a função definida em (4.13). Como $\|v_\varepsilon\|_{2^*} = 1$, temos $S \leq \|v_\varepsilon\|^2$ e de (4.14) temos

$$\|v_\varepsilon\|^2 \to S, \varepsilon \to 0.$$

Escrevendo

$$g(t) = I_0(tv_\varepsilon) = \frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\|v_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*},$$

observe que g assume máximo, donde existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}I_0(t_\varepsilon v_\varepsilon) = 0,$$

e a forma de I_0 implica

$$t_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*-2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_0(tu) \\ &\leq \max_{t\geq 0} I_0(tv_\varepsilon) \\ &= I_0(t_\varepsilon v_\varepsilon) \\ &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 - \frac{t_\varepsilon^{2^*}}{2^*}\|v_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{1}{N}t_\varepsilon^{2^*}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_0 \leq \frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^{\frac{2}{2^*-2}})^{2^*} = \frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^2)^{\frac{2^*}{2^*-2}} \to \frac{S^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{N}$$

e portanto

$$c_0 \leq \frac{S^{N/2}}{N}. \tag{4.15}$$

Por outro lado, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I_0(u_n) \to c_0, \quad I_0'(u_n) \to 0.$$

A sequência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, para n suficientemente grande temos

$$I_0(u_n) \leq c_0 + 1;$$

como

$$-\frac{1}{2^*}I_0'(u_n)u_n \leq \left| -\frac{1}{2^*}I_0'(u_n)u_n \right| \leq \frac{1}{2^*}\|I_0'(u_n)\|\|u_n\|$$

e $\|I_0'(u_n)\| \to 0$, para n suficientemente grande temos $(1/2^*)\|I_0'(u_n)\| \ll 1$, donde

$$-\frac{1}{2^*}I_0'(u_n)u_n \leq \|u_n\|.$$

Logo, para n suficientemente grande temos,

$$
\begin{aligned}
c_0 + 1 + \|u_n\| &\geq I_0(u_n) - \frac{1}{2^*} I_0'(u_n) u_n \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} - \frac{1}{2^*}\|u_n\|^2 + \frac{1}{2^*}\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\|u_n\|^2,
\end{aligned}
$$

mostrando que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, temos $\|u_n\|^2 \to l$, para algum $l \in (0, \infty)$. Observe que

$$
I_0'(u_n) u_n^- = \|u_n^-\|^2 \to 0,
$$

e com isso, sem perda de generalidade, podemos supor $u_n \geq 0$, e daí de

$$
I_0'(u_n) u_n = \|u_n\|^2 - \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \to 0
$$

temos

$$
\|u_n\|^2 \to l \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \to l, \quad l > 0. \tag{4.16}
$$

Fazendo $v_n = u_n / \|u_n\|_{2^*}$, temos $\|v_n\|_{2^*} = 1$ e

$$
S \leq \|v_n\|^2 = \frac{\|u_n\|^2}{\|u_n\|_{2^*}^2} \to \frac{l}{l^{2/2^*}}
$$

implica

$$
S \leq l^{2/N}. \tag{4.17}
$$

Note que

$$
I_0(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2^*}\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \to c_0,
$$

e de (4.16), concluímos que $l = c_0 N$; de (4.17) segue que

$$
S \leq (c_o N)^{2/N},
$$

ou seja,

$$
c_0 \geq \frac{S^{N/2}}{N}. \tag{4.18}
$$

De (4.15) e (4.18) concluímos que

$$
c_0 = \frac{S^{N/2}}{N}.
$$

■

Observação 4.10 *a) Se G é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, o nível do passo da montanha referente ao funcional*

$$I_{0,G} = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_G (u^+)^{2^*} dx$$

é $S^{N/2}/N$, i.e., o nível do passo da montanha de $I_{0,G}$ independe do domínio G (ver Proposição 1.5).

b) Podemos assumir que toda sequência $(PS)_c$ de I_μ é não negativa.

Lema 4.11 *Se $\mu_n \to 0$ então $c_{\mu_n} \to c_0$.*

Demonstração:

Sabemos que

$$c_{\mu_n} \leq c_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para n suficientemente grande, $c_{\mu_n} < c_0$ (do contrário, o resultado seguiria). Pelos Lemas 4.4 e 4.9, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, $u_n \geq 0$ tal que

$$I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n}, \quad I'_{\mu_n}(u_n) = 0,$$

e seja $(t_n) \subset (0, \infty)$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{M}_0 = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}; I_0'(u)u = 0\}$ (a existência (t_n) segue adaptando a demonstração do Lema 4.5). Note que

$$\begin{aligned} c_0 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) &\leq \max_{t\geq 0} I_0(tu_n) \\ &= I_0(t_n u_n) \\ &= I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n}{q}\int_\Omega [(t_n u_n)^+]^q dx \\ &= I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n t_n^q}{q}\int_\Omega [(u_n)^+]^q dx \\ &= I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n t_n^q}{q}\|u_n\|_q^q; \end{aligned}$$

como $u_n \in \mathcal{M}_{\mu_n}$, então

$$I_{\mu_n}(t_n u_n) \leq \max_{t \geq 0} I_{\mu_n}(tu_n) = I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n},$$

e daí,

$$c_0 \leq c_{\mu_n} + \frac{\mu_n t_n^q}{q}\|u_n\|_q^q. \tag{4.19}$$

Mostremos agora que a sequência (t_n) é limitada. Suponha, por contradição, que, a menos de subsequência, $t_n \to \infty$. Como $c_{\mu_n} \leq c_0$, mostra-se facilmente que a sequência

(u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De $t_n u_n \in \mathcal{M}_0$ segue que $\max_{t\geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n)$, ou seja $\frac{d}{dt} I_0(tu_n)\Big|_{t=t_n} = 0$, e com isso obtemos

$$\|u_n\|^2 = t_n^{2^*-2}\|u_n\|_{2^*}^{2^*}.$$

Assim devemos ter $\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \to 0$. Logo, por interpolação, segue que $\|u_n\|_q^q \to 0$. Como $I'_{\mu_n}(u_n)u_n = 0$ temos

$$\|u_n\|^2 = \mu_n\|u_n\|_q^q + \|u_n\|_{2^*}^{2^*},$$

e daí $\|u_n\|^2 \to 0$, e de

$$c_{\mu_n} = I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\mu_n}{q}\|u_n\|_q^q - \frac{1}{2^*}\|u_n\|_{2^*}^{2^*},$$

segue que $c_{\mu_n} \to 0$, o que é um absurdo pois

$$0 < c_{\mu_1} \leq c_{\mu_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_{\mu_n} \geq c_{\mu_1} > 0.$$

Portanto, (t_n) é limitada, e de (4.19) segue que

$$c_0 \leq \liminf_{n\to\infty}\left(c_{\mu_n} + \frac{\mu_n t_n^q}{q}\|u_n\|_q^q\right) = \liminf_{n\to\infty} c_{\mu_n} \leq \limsup_{n\to\infty} c_{\mu_n} \leq c_0,$$

e concluímos enfim que $\lim_{n\to\infty} c_{\mu_n} = c_0$.

■

4.2 Lemas técnicos

Os lemas demonstrados nesta seção terão fundamental importância para demonstração do resultado principal deste capítulo, enunciado no início do mesmo.

Lema 4.12 *Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência de funções não negativas tal que $\|u_n\|_{2^*} = 1$ e $\|u_n\|^2 \to S$. Então existe uma sequência $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tal que*

$$v_n(x) = \lambda_n^{\frac{N-2}{2}} u_n(\lambda_n x + y_n)$$

admite uma subsequência convergente em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda,

$$\lambda_n \to 0 \quad e \quad y_n \to y \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração:

Como $H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, a demonstração da primeira parte desse lema segue de forma idêntica à demonstração do Lema 1.3. Mostremos então as convergências. Suponha que $\lambda_n \to \infty$. Escrevendo $\Omega_{\lambda_n} = (\Omega - y_n)/\lambda_n$, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\lambda_n}} |v_n|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda_n^{\frac{N-2}{2}} u_n(\lambda_n x + y_n)|^2 dx \\
&= \lambda_n^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(\lambda_n x + y_n)|^2 dx,
\end{aligned}$$

usando mudança de variáveis,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx &= \frac{\lambda_n^{N-2}}{\lambda_n^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(z)|^2 dz \\
&= \frac{1}{\lambda_n^2} \|u_n\|_2^2 \\
&\leq \frac{M}{\lambda_n^2} \to 0,
\end{aligned}$$

pois (u_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. A menos de subsequência, $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, e do Lema de Fatou obtemos

$$0 = \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \geq 0$$

o que implica $v = 0$, o que é um absurdo, pois $\|v_n\|_{2^*} = 1$ e

$$v_n \to v \ \text{ em } \ \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \|v_n\|_{2^*} \to \|v\|_{2^*}.$$

Logo, $\lambda_n \to \lambda_0 \geq 0$. Se $|y_n| \to \infty$ então

$$|\lambda_n x + y_n| \geq |y_n| - \lambda_n |x| \to \infty, \forall x \in \Omega,$$

donde, para n suficientemente grande, $u_n(\lambda_n x + y_n) = 0$ implicando $\|u_n\|_{2^*} = 0$, absurdo. Logo, $y_n \to y \in \mathbb{R}^N$. Suponha agora que $\lambda_n \to \lambda_0 > 0$. Então

$$\Omega_{\lambda_n} = \frac{\Omega - y_n}{\lambda_n} \to \frac{\Omega - y}{\lambda_0} = \widetilde{\Omega} \neq \mathbb{R}^N,$$

e com isso teríamos $\|v\|_{2^*,\widetilde{\Omega}} = 1$ e $\|v\|^2 = S$, ou seja, v assumiria a melhor constante de Sobolev em $\widetilde{\Omega}$, o que não é possível (Proposição 1.5). Logo, $\lambda_n \to 0$. E supondo que $y \notin \overline{\Omega}$, como

$$\lambda_n x + y_n \to y, \quad \forall x \in \Omega,$$

para n suficientemente grande $\lambda_n x + y_n \notin \overline{\Omega}$, donde $u_n(\lambda_n x + y_n) = 0$ implicando $\|u_n\|_{2^*} = 0$, o que é um absurdo. Portanto $y \in \overline{\Omega}$.

■

Como feito no Capítulo 3, supondo $0 \in \Omega$, escolha $r > 0$ suficientemente pequeno tal que $\overline{B_r} \subset \Omega$, e de modo que os conjuntos

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N; \mathrm{dist}(x, \Omega) \leq r\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a Ω.

Defina agora

$$H^1_{0,\mathrm{rad}}(B_r) = \{u \in H^1_0(B_r); u \ \text{ é radial}\},$$

e escreva

$$I_{\mu,B_r}(u) = \frac{1}{2}\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu}{q}\int_{B_r} (u^+)^q dx - \frac{1}{2^*}\int_{B_r} (u^+)^{2^*} dx, \quad u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B_r),$$

$$\mathcal{M}_{\mu,B_r} = \{u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B_r) \setminus \{0\}; I'_{\mu,B_r}(u)u = 0\}$$

e

$$m(\mu) = \inf\{I_{\mu,B_r}(u); u \in \mathcal{M}_{\mu,B_r}\}$$

(como na Proposição 4.2, o número $m(\mu)$ está bem definido). Denote por $\widetilde{m}(\mu)$ o nível do passo da montanha do funcional I_{μ,B_r} em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(B_r)$.

Lema 4.13 *Suponha $N \geq 4$ e $2 < q < 2^*$. Temos*

a) I_{μ,B_r} satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/2}/N)$ em $H^1_{0,rad}(B_r)$ e, mais ainda, $\widetilde{m}(\mu) \in (0, S^{N/2}/N)$ para $\mu > 0$;

b) $m(\mu) = \widetilde{m}(\mu)$;

c) $m(\mu) \to S^{N/2}/N$ quando $\mu \to 0$.

Demonstração:

Segue de forma análoga às demonstrações dos Lemas 4.4, 4.7 e 4.11.

■

Defina agora a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathcal{M}_\mu & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ u & \longmapsto & \beta(u) = \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega (u^+)^{2^*} x dx, \end{array} \tag{4.20}$$

e o conjunto

$$I_\mu^{m(\mu)} = \{u \in H_0^1(\Omega); I_\mu(u) \le m(\mu)\}.$$

Lema 4.14 *Existe $\mu^* > 0$ tal que, se $\mu \in (0, \mu^*)$ e $u \in \mathcal{M}_\mu \cap I_\mu^{m(\mu)}$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$.*

Demonstração:

Suponha, por contradição, que existem $\mu_n \to 0$ e $u_n \in \mathcal{M}_{\mu_n} \cap I_{\mu_n}^{m(\mu_n)}$ tais que $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$. Note que

$$\begin{array}{rcl} c_{\mu_n} = \inf\limits_{u \in \mathcal{M}_{\mu_n}} I_{\mu_n}(u) & \le & I_{\mu_n}(u_n) \\ & = & \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \dfrac{\mu_n}{q} \int_\Omega (u_n^+)^q dx - \dfrac{1}{2^*} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx \\ & \le & m(\mu_n), \end{array}$$

e

$$0 = I'_{\mu_n}(u_n) u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \mu_n \int_\Omega (u_n^+)^q dx - \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx.$$

Sendo (u_n) limitada em $H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$c_{\mu_n} + o_n(1) \le \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx \le m(\mu_n) + o_n(1) \tag{4.21}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx = o_n(1). \tag{4.22}$$

De $c_0 = S^{N/2}/N$ (Lema 4.9), $c_{\mu_n} \to c_0$ quando $\mu_n \to 0$ (Lema 4.11) e $m(\mu) \to S^{N/2}/N$ quando $\mu \to 0$ (Lema 4.13, (c)), temos

$$c_{\mu_n} \to \frac{S^{N/2}}{N} \ \text{ e } \ m(\mu_n) \to \frac{S^{N/2}}{N},$$

portanto, de (4.21) e (4.22), a sequência $w_n = u_n / \|u_n^+\|_{2^*}$ verifica

$$\|w_n^+\|_{2^*} = 1 \ \text{ e } \ \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx \to S.$$

De fato, de (4.22) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} dx = l$$

e de (4.21), passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\frac{S^{N/2}}{N} \leq \frac{1}{2}l - \frac{1}{2^*}l \leq \frac{S^{N/2}}{N}$$

e daí $l = S^{N/2}$. Logo,

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx = \|w_n\|^2 = \frac{\|u_n\|^2}{\|u_n^+\|_{2^*}^2} = \frac{\|u_n\|^2}{(\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} \to \frac{S^{N/2}}{(S^{N/2})^{\frac{2}{2^*}}} = S.$$

Dessa maneira, a sequência $\widetilde{w}_n = w_n^+$ satisfaz

$$\|\widetilde{w}_n\|_{2^*} = 1 \quad \text{e} \quad \|\widetilde{w}_n\|^2 = \int_\Omega |\nabla \widetilde{w}_n|^2 dx \to S,$$

já que

$$S \leq \|\widetilde{w}_n\|^2 = \|w_n^+\|^2 \leq \|w_n\|^2 \to S.$$

Portanto, pelo Lema 4.12, existe $(\lambda_n, y_n) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ tal que a sequência $v_n(x) = \lambda_n^{\frac{N-2}{2}} \widetilde{w}_n(\lambda_n x + y_n)$ admite uma subsequência que converge forte para v em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\beta(u_n) = \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega (u_n^+)^{2^*} x dx = \frac{\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}}{S^{N/2}} \int_\Omega \widetilde{w}_n^{2^*}(x) x dx.$$

Fixando $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\varphi(x) = x, \forall x \in \overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned}
\beta(u_n) &= \frac{\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}}{S^{N/2}} \int_\Omega \widetilde{w}_n^{2^*}(z) z dz \\
&= \frac{\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}}{S^{N/2}} \int_\Omega \widetilde{w}_n^{2^*}(z) \varphi(z) dz \\
&= \frac{\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}}{S^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{w}_n^{2^*}(z) \varphi(z) dz \\
&= \frac{\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}}{S^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{w}_n^{2^*}(\lambda_n x + y_n) \varphi(\lambda_n x + y_n) \lambda_n^N dx \\
&= \frac{\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}}{S^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{2^*}(x) \varphi(\lambda_n x + y_n) dx,
\end{aligned}$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\beta(u_n) \to \frac{S^{N/2}}{S^{N/2}} y = y \in \overline{\Omega},$$

ou seja, para n suficientemente grande temos $\beta(u_n) \in \overline{\Omega} \subset \Omega_r^+$, o que é uma contradição. O lema fica então demonstrado.

∎

Pelo Lema 4.13, existe $v_\mu \in \mathcal{M}_{\mu,B_r}$ tal que

$$I_{\mu,B_r}(v_\mu) = \widetilde{m}(\mu) = m(\mu),$$

e v_μ é não negativa, pois

$$I'_{\mu,B_r}(v_\mu) = 0 \Rightarrow I'_{\mu,B_r}(v_\mu)v_\mu^- = \|v_\mu^-\|^2 = 0.$$

Defina então a aplicação $\gamma : \Omega_r^- \to I_\mu^{m(\mu)}$ por

$$\begin{array}{rcl} \gamma(y) : B_r & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \gamma(y)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} v_\mu(x-y), & x \in B(y,r) \\ 0, & \text{c.c.} \end{array} \right. . \end{array} \tag{4.23}$$

Note que, para cada $y \in \Omega_r^-$, temos

$$\begin{aligned} (\beta \circ \gamma)(y) &= \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega x v_\mu(x-y)^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega (z+y) v_\mu(z)^{2^*} dz \\ &= \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega z v_\mu(z)^{2^*} dz + \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega y v_\mu(z)^{2^*} dz, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\beta \circ \gamma)(y) = \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega y v_\mu(z)^{2^*} dz = \alpha(\mu) y$$

(pois v_μ é radial), onde

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{S^{N/2}} \int_\Omega v_\mu(z)^{2^*} dz.$$

Lema 4.15 *Se $\mu \to 0$ então $\alpha(\mu) \to 1$.*

Demonstração:

Note que

$$m(\mu) = I_{\mu,B_r}(v_\mu) = \frac{1}{2} \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{B_r} v_\mu^{2^*} dx \le \frac{S^{N/2}}{N} \tag{4.24}$$

e

$$I'_{\mu,B_r}(v_\mu) v_\mu = \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^2 dx - \mu \int_{B_r} v_\mu^q dx - \int_{B_r} v_\mu^{2^*} dx = 0$$

implica

$$\frac{1}{q} \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^2 dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu^q dx - \frac{1}{q} \int_{B_r} v_\mu^{2^*} dx = 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{B_r}|\nabla v_\mu|^2dx &\leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{B_r}|\nabla v_\mu|^2dx+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{B_r}v_\mu^{2^*}dx\\ &= I_{\mu,B_r}(v_\mu)-\frac{1}{q}I'_{\mu,B_r}(v_\mu)v_\mu\end{aligned}$$

donde

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{B_r}|\nabla v_\mu|^2dx \leq \frac{S^{N/2}}{N},$$

mostrando que a sequência (v_μ) é limitada. Supondo, $\|v_\mu\|^2 \to l$ temos, de

$$\|v_\mu\|^2-\mu\|v_\mu\|_q^q-\|v_\mu\|_{2^*}^{2^*}=0,$$

$\|v_\mu\|_{2^*}^{2^*} \to l$. De (4.24) e do Lema 4.13,(c), segue que $l=S^{N/2}$, ou seja, $\|v_\mu\|_{2^*}^{2^*} \to S^{N/2}$, e consequentemente,

$$\alpha(\mu)=\frac{1}{S^{N/2}}\int_\Omega v_\mu^{2^*}dx=\frac{1}{S^{N/2}}\|v_\mu\|_{2^*}^{2^*} \to \frac{S^{N/2}}{S^{N/2}}=1,$$

quando $\mu \to 0$.

■

Pelo Lema 4.15, para $\mu \approx 0$, fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} H_\mu:[0,1]\times(\mathcal{M}_\mu\cap I_\mu^{m(\mu)}) &\longrightarrow \mathbb{R}^N\\ (t,u) &\longmapsto H_\mu(t,u)=\left(t+\tfrac{1-t}{\alpha(\mu)}\right)\beta(u).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Lema 4.16 *Existe $\mu^*>0$ tal que se $\mu\in(0,\mu^*)$ então*

$$H_\mu([0,1]\times(\mathcal{M}_\mu\cap I_\mu^{m(\mu)}))\subset\Omega_r^+.$$

Demonstração:

Suponha, por contradição, que existem $t_n\in[0,1]$, $\mu_n\to 0$ e $u_n\in\mathcal{M}_{\mu_n}\cap I_{\mu_n}^{m(\mu_n)}$ tais que $H_{\mu_n}(t_n,u_n)\notin\Omega_r^+$. Sem perda de generalidade, podemos supor $t_n\to t_0\in[0,1]$. Pelo Lema 4.15 e como visto na demonstração do Lema 4.14, temos

$$\alpha(\mu_n)\to 1 \ \text{ e } \ \beta(u_n)\to y\in\overline{\Omega}.$$

Dessa forma

$$H_{\mu_n}(t_n,u_n)=\left(t_n+\frac{1-t_n}{\alpha(\mu_n)}\right)\beta(u_n)\to y\in\overline{\Omega},$$

donde, para $n\approx\infty$, $H_{\mu_n}(t_n,u_n)\in\overline{\Omega}\subset\Omega_r^+$, o que é um contradição. Logo, o lema é válido.

■

4.3 Demonstração do Teorema 4.1

Vejamos antes alguns lemas.

Lema 4.17 *Se u_μ é um ponto crítico de I_μ em $\mathcal{M}_\mu$, então o mesmo é um ponto crítico de I_μ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração:

Se $u_\mu \in \mathcal{M}_\mu$ então $I'_\mu(u_\mu)u_\mu = 0$. Fazendo

$$J_\mu(u) = \|u\|^2 - \mu\|u^+\|_q^q - \|u^+\|_{2^*}^{2^*},$$

pelo Teorema B.3, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\mu(u_\mu) = \theta J'_\mu(u_\mu). \tag{4.26}$$

Observe que

$$J'_\mu(u_\mu)u_\mu = 2\|u_\mu\|^2 - \mu q\|u_\mu^+\|_q^q - 2^*\|u_\mu^+\|_{2^*}^{2^*}$$

e como

$$0 = I'_\mu(u_\mu)u_\mu = J_\mu(u_\mu) = \|u_\mu\|^2 - \mu\|u_\mu^+\|_q^q - \|u_\mu^+\|_{2^*}^{2^*}$$

implica

$$\|u_\mu\|^2 = \mu\|u_\mu^+\|_q^q + \|u_\mu^+\|_{2^*}^{2^*},$$

temos

$$\begin{aligned} J'_\mu(u_\mu)u_\mu &= 2(\mu\|u_\mu^+\|_q^q + \|u_\mu^+\|_{2^*}^{2^*}) - \mu q\|u_\mu^+\|_q^q - 2^*\|u_\mu^+\|_{2^*}^{2^*} \\ &= \mu(2-q)\|u_\mu^+\|_q^q + (2-2^*)\|u_\mu^+\|_{2^*}^{2^*} < 0, \end{aligned}$$

donde, de 4.26,

$$0 = I'_\mu(u_\mu)u_\mu = \theta J'_\mu(u_\mu)u_\mu$$

implicando que $\theta = 0$, ou seja, $I'_\mu(u_\mu) = 0$ e u_μ é ponto crítico de I_μ em $H_0^1(\Omega)$.

$\blacksquare$

A seguir, denotamos por $I_{\mathcal{M}_\mu}$ a restrição de I_μ em $\mathcal{M}_\mu$.

Lema 4.18 *Toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}_\mu$ tal que $I_\mu(u_n) \to c < S^{N/2}/N$ e $I'_{\mathcal{M}_\mu}(u_n) \to 0$ admite uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$, para $\mu > 0$ e $2 < q < 2^*$.*

Demonstração:

Fazendo J_μ como na demonstração do Lema 4.17, então, pela Proposição B.3, dado $u \in \mathcal{M}_\mu$, temos

$$\|I'_{\mathcal{M}_\mu}(u)\|_* = \min_{\theta \in \mathbb{R}} \|I'_\mu(u) - \theta J'_\mu(u)\|.$$

Logo, por hipótese, existe $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\|I'_{\mathcal{M}_\mu}(u_n)\|_* = \|I'_\mu(u_n) - \theta_n J'_\mu(u_n)\| \to 0,$$

ou seja,

$$I'_\mu(u_n) = \theta_n J'_\mu(u_n) + o_n(1). \tag{4.27}$$

Na demonstração do Lema 4.17, vimos que $J'_\mu(u)u < 0$, para todo $u \in \mathcal{M}_\mu$. Como (u_n) é limitada, supondo que $J'_\mu(u_n)u_n \to 0$ segue de

$$\|u_n\|^2 = \mu\|u_n^+\|_q^q + \|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}$$

(pois $I'_\mu(u_n)u_n = 0$) e

$$\begin{aligned} J'_\mu(u_n)u_n &= 2\|u_n\|^2 - q\mu\|u_n^+\|_q^q - 2^*\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} \\ &= \mu(2-q)\|u_n^+\|_q^q + (2-2^*)\|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} \to 0 \end{aligned}$$

que

$$\|u_n^+\|_q^q \to 0 \quad \text{e} \quad \|u_n^+\|_{2^*}^{2^*} \to 0,$$

donde $\|u_n\|^2 \to 0$ e, consequentemente, $\|u_n\| \to 0$. Por outro lado, como $(u_n) \subset \mathcal{M}_\mu$, vimos que $\|u_n\|^2 = \mu\|u_n^+\|_q^q + \|u_n^+\|_{2^*}^{2^*}$, e das imersões contínuas, temos

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &\leq \mu\|u_n\|_q^q + \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \\ &\leq \mu c_1\|u_n\|^q + c_2\|u_n\|^{2^*} \\ &\leq \widetilde{c}(\mu\|u_n\|^q + \|u_n\|^{2^*}), \quad \text{onde} \quad \widetilde{c} = \max\{c_1, c_2\}, \end{aligned}$$

e assim

$$1 \leq \widetilde{c}(\mu\|u_n\|^{q-2} + \|u_n\|^{2^*-2}) \to 0,$$

o que é um absurdo. Dessa forma, podemos assumir que $J'_\mu(u_n)u_n \to l < 0$. De (4.27), temos

$$0 = I'_\mu(u_n)u_n = \theta_n J'_\mu(u_n)u_n + o_n(1),$$

donde $\theta_n \to 0$, e, consequentemente, $I_\mu(u_n) \to 0$. Logo,

$$I_\mu(u_n) \to c < S^{N/2}/N \quad \text{e} \quad I_\mu(u_n) \to 0,$$

e a conclusão segue do Lema 4.4.

■

Lema 4.19 *Se $N \geq 4$ e $\mu \in (0, \mu^*)$ então $cat_{I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}}(I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}) \geq cat_\Omega(\Omega)$.*

Demonstração:

Se $\mathrm{cat}_{I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}}(I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}) = \infty$, nada a demonstrar. Suponha que $\mathrm{cat}_{I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}}(I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}) = n$, i.e,

$$I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu} = A_1 \cup ... \cup A_n,$$

onde A_j, $j = 1, ..., n$ são fechados e contráteis em $I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}$, ou seja, existem $h_j : [0,1] \times A_j \to I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}$ contínuas tais que

$$h_j(0, u) = u, \quad h_j(1, u) = w_j, \quad \forall u \in A_j,$$

onde $w_j \in I^{m(\mu)}_{\mathcal{M}_\mu}$ é fixo, para cada $j = 1, ..., n$. Considere $B_j = \gamma^{-1}(A_j)$, $j = 1, ..., n$, onde γ é dada em (4.23). Como visto na demonstração do Lema 3.24, γ é contínua, donde os conjuntos B_j são fechados, e satisfazem

$$\Omega_r^- = B_1 \cup ... \cup B_n.$$

Defina agora a deformação

$$\begin{array}{rcl} g_j : [0,1] \times B_j & \longrightarrow & \Omega_r^+ \\ (t, y) & \longmapsto & g_j(t, y) = H_\mu(t, h_j(t, \gamma(y))), \end{array}$$

onde H_μ é a aplicação dada em (4.25), para $\mu \in (0, \mu^*)$. Como visto na demonstração do Lema 3.24, a aplicação β dada em (4.20) é contínua, donde a aplicação H_μ é contínua e, consequentemente, g_j é contínua, para todo $j = 1, ..., n$. Agora, note que

$$\begin{aligned} g_j(0, y) &= H_\mu(0, h_j(0, \gamma(y))) \\ &= H_\mu(0, \gamma(y)) \\ &= \left(0 + \frac{1-0}{\alpha(\mu)}\right)\beta(\gamma(y)) \\ &= \frac{\beta(\gamma(y))}{\alpha(\mu)} = \frac{\alpha(\mu) y}{\alpha(\mu)} = y, \quad \forall y \in B_j, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_j(1,y) &= H_\mu(1, h_j(1,\gamma(y))) \\ &= H_\mu(1,w) \\ &= \left(1 + \frac{1-1}{\alpha(\mu)}\right)\beta(w) \\ &= \beta(w) \in \Omega_r^+, \quad \forall y \in B_j, \end{aligned}$$

pois $\mu \in (0, \mu^*)$ (ver Lema 4.14). Dessa forma, os conjuntos B_j são contráteis em Ω_r^+, donde

$$\text{cat}_\Omega(\Omega) = \text{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \text{cat}_{I_{\mathcal{M}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{M}_\mu}^{m(\mu)}).$$

■

Demonstração do Teorema 4.1:

Pelos Lemas 4.4 e 4.13, sabemos que

$$c_\mu, m(\mu) < \frac{S^{N/2}}{N},$$

para $\mu > 0$ se $2 < q < 2^*$. Além disso, pelo Lema 4.18, $I_{\mathcal{M}_\mu}$ satisfaz a condição $(\text{PS})_c$, para todo $c \in (0, S^{N/2}/N)$. Usando os argumentos da Seção 3.3, concluímos que $I_{\mathcal{M}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_{I_{\mathcal{M}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{M}_\mu}^{m(\mu)})$ pontos críticos de $I_{\mathcal{M}_\mu}$, ou seja, pelo Lema 4.19, $I_{\mathcal{M}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos da restrição de I_μ em $\mathcal{M}_\mu$. Agora, pelo Lema 4.17, como todo ponto crítico de $I_{\mathcal{M}_\mu}$ é ponto crítico de I_μ, concluímos enfim que I_μ contém, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos. Como tais pontos críticos estão em $\mathcal{M}_\mu$, os mesmo são não nulos, e são soluções do problema (P_μ). Logo, fica mostrada a existência de, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais do problema (P_μ).

■

Apêndice A

Resultados da teoria de medida

Neste apêndice enunciamos uma definição e um teorema que foram úteis para o enunciado e a demonstração do Lema de Concentração e Compacidade 1.1, e para o enunciado do Lema 1.2.

Definição A.1 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e defina*

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega); supp \subset\subset \Omega\}$$

e

$$\mathcal{BC}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}(\Omega); \|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

O espaço $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$ com respeito a norma uniforme. Uma medida finita em Ω é um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(\Omega)$. A norma de uma medida finita μ é dada por

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{u \in \mathcal{C}_0(\Omega) \\ \|u\|_\infty = 1}} |\langle \mu, u \rangle|.$$

Denotemos por $\mathcal{M}(\Omega)$ (respectivamente, $\mathcal{M}^+(\Omega)$) o espaço de medidas finitas (respectivamente, espaço de medidas finitas positivas, i.e., as medidas μ tais que $\langle \mu, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega) \quad com \quad u \geq 0$) em Ω. Uma sequência (μ_n) converge fraco para μ em $\mathcal{M}(\Omega)$, e escrevemos

$$\mu_n \rightharpoonup \mu,$$

se

$$\langle \mu_n, u \rangle \to \langle \mu, u \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega),$$

i.e.,

$$\int_\Omega u d\mu_n \to \int_\Omega u d\mu, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

A demonstração do teorema a seguir por ser vista em [20].

Teorema A.2 *a) Toda sequência limitada de medidas finitas em Ω admite uma subsequência fracamente convergente.*

b) Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ então (μ_n) é limitada e

$$\|\mu\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|\mu_n\|.$$

c) Se $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, então

$$\|\mu\| = \langle \mu, 1\rangle = \sup_{\substack{u \,\in\, \mathcal{BC}(\Omega) \\ \|u\|_\infty \,=\, 1}} \langle \mu, u\rangle.$$

Apêndice B

Lema de Deformação

Neste apêndice, apresentaremos resultados importantes que foram utilizados no Capítulo 3 do nosso trabalho.

Consideramos a seguinte situação: X é um espaço de Banach, $\psi \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$, $V = \{v \in X; \psi(v) = 1\}$, para todo $v \in V$, $\psi'(v) \neq 0$.

Iniciemos com algumas definições.

Definição B.1 *a) O espaço tangente de V no ponto v é dado por*

$$T_v V = \{y \in X; \langle \psi'(v), y \rangle = 0\}.$$

b) Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $v \in V$. A norma da derivada da restrição de φ a V em v é definida por

$$\|\varphi'(v)\|_* = \sup_{\substack{y \,\in\, T_v V \\ \|y\| \,=\, 1}} \langle \varphi'(v), y \rangle.$$

c) O ponto v é um ponto crítico da restrição de φ a V se a restrição de $\varphi'(v)$ a $T_v V$ é igual a zero, i.e., se $\|\varphi'(v)\|_* = 0$.

Lema B.2 *Se $f, g \in X'$, então*

$$\sup_{\substack{y \,\in\, \ker g \\ \|y\| \,=\, 1}} \langle f, y \rangle = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Demonstração:

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\| = 1}} \langle f, y\rangle &= \sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\| = 1}} \langle f - \lambda g, y\rangle \\ &\leq \sup_{\|y\|=1} \langle f - \lambda g, y\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\| = 1}} \langle f, y\rangle \leq \|f - \lambda g\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\| = 1}} \langle f, y\rangle$ é uma cota inferior para o conjunto

$$\{\|f - \lambda g\|, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema C.3), existe um funcional linear contínuo $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ coincidindo com $f_0 = f|_{\ker g} : \ker g \to \mathbb{R}$ em $\ker g$ e verificando

$$\|\widetilde{f}\| = \sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\| = 1}} \langle f_0, y\rangle = \|f_0\|.$$

Como $\ker g \subset \ker(f - \widetilde{f})$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f - \widetilde{f} = \lambda g$. Portanto,

$$\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\| = 1}} \langle f, y\rangle = \|\widetilde{f}\| = \|f - \lambda g\|.$$

■

Teorema B.3 (Multiplicadores de Lagrange) *Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $u \in V$, então*

$$\|\varphi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\|.$$

Em particular, u é ponto crítico de $\varphi|_V$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi'(u) = \lambda \psi'(u).$$

Demonstração:

Do Lema B.2 segue que

$$\begin{aligned}\|\varphi'(u)\|_* &= \sup_{\substack{y \in T_u V \\ \|y\| = 1}} \langle \varphi'(u), u\rangle \\ &= \sup_{\substack{y \in \ker \psi'(u) \\ \|y\| = 1}} \langle \varphi'(u), u\rangle \\ &= \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\|.\end{aligned}$$

A segunda parte do teorema segue de forma imediata.

■

Definição B.4 *Seja $\varphi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$. Um vetor pseudogradiente tangente para φ em $u \in M = \{u \in V; \|\varphi'(u)\|_* \neq 0\}$ é um vetor $v \in T_uV$ tal que*

$$\|v\| \leq 2\|\varphi'(u)\|_*$$

e

$$\langle \varphi'(u), v\rangle \geq \|\varphi'(u)\|_*^2.$$

Um campo vetorial pseudogradiente tangente para φ em M é um campo vetorial $g : M \to X$ localmente lipschitiziano tal que, para todo $u \in M$, $g(u)$ é um vetor pseudogradiente tangente para φ em u.

Observação B.5 *Qualquer combinação convexa de vetores pseudogradientes tangentes para φ em u é também um vetor pseudogradiente tangente para φ em u.*

Proposição B.6 *Seja $\varphi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$. Existe então um campo pseudogradiente tangente para φ em M.*

Demonstração:

Para cada $v \in M$, existe $x \in T_vV$ tal que $\|x\| = 1$ e

$$\langle \varphi'(v), x\rangle > \frac{2}{3}\|\varphi'(v)\|_*.$$

Existe também $z \in X$ tal que $\langle \psi'(v), z\rangle = 1$. Defina $y = \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|_* x$ e para cada $u \in V$ tal que $\langle \psi'(u), z\rangle \neq 0$, defina

$$g_v(u) = y - \frac{\langle \psi'(u), y\rangle}{\langle \psi'(u), z\rangle} z.$$

Como $g_v(v) = y$ (pois $x \in T_vV$), obtemos

$$\|g_v(v)\| = \|y\| = \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|_*\|x\| = \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|_* < 2\|\varphi'(v)\|_*$$

e

$$\langle \varphi'(v), g_v(v)\rangle = \langle \varphi'(v), y\rangle = \langle \varphi'(v), \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|_* x\rangle = \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|_*\langle \varphi'(v), x\rangle >$$
$$> \frac{3}{2}\|\varphi'(v)\|_*\frac{2}{3}\|\varphi'(v)\|_* = \|\varphi'(v)\|_*^2.$$

Como φ' e g_v são contínuas, existe uma vizinhança N_v de v tal que

$$\|g_v(u)\| \leq 2\|\varphi'(u)\|_*$$

e

$$\langle \varphi'(u), g_v(u) \rangle \geq \|\varphi'(u)\|_*^2, \quad \forall u \in N_v.$$

A família $\mathcal{N} = \{N_v; v \in M\}$ é uma cobertura aberta de M. Como M é espaço métrico, o mesmo é paracompacto (ver [15]), logo, $\mathcal{N}$ pode ser refinada por uma cobertura aberta localmente finita $\mathcal{M} = \{M_i; i \in I\}$ (i.e., para todo $i \in I$ existe $v_i \in M$ tal que $M_i \subset N_{v_i}$, e todo ponto de M possui uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de conjuntos M_i). Defina, para $u \in M$,

$$g_i(u) = \begin{cases} g_{v_i}(u), u \in N_{v_i} \\ 0, u \notin N_{v_i}, \end{cases}$$

$$\rho_i(u) = \text{dist}(u, M_i^c),$$

e

$$g(u) = \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u) g_i(u)}{\sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)}.$$

Mostremos que g é um campo pseudogradiente para φ em M.

i) $g_i(u)$ é um vetor pseudogradiente tangente para φ em $u \in M$. De fato, $g_i(u) \in T_uV$, pois

$$\langle \psi'(u), g_i(u) \rangle = 0.$$

E dado $u \in M$, $u \in N_{v_i}$, para algum $i \in I$, donde

$$g_i(u) = g_{v_i}(u),$$

e assim

$$\|g_i(u)\| = \|g_{v_i}(u)\| \leq 2\|\varphi'(u)\|_*$$

e

$$\langle \varphi'(u), g_i(u) \rangle = \langle \varphi'(u), g_{v_i}(u) \rangle \geq \|\varphi'(u)\|_*^2.$$

ii) Por $\mathcal{M}$ ser localmente finita, a soma

$$\sum_{j \in I} \rho_j(u) = \sum_{j \in I} \text{dist}(u, M_j^c)$$

é finita; observe também que $\beta_i(u) = \rho_i(u) / \sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)$ é tal que $\sum\limits_{i \in I} \beta_i(u) = 1$. Logo, $g(u)$ é uma combinação convexa de vetores pseudogradientes tangente para φ em u, e da Observação B.5, segue que $g(u)$ é um vetor pseudogradiente tangente para φ em u.

■

Lema B.7 (Lema de Deformação) *Sejam* $\varphi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset V$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ *tais que*

$$\forall u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \quad \textit{temos} \ \ \|\varphi'(u)\|_* \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}, \tag{B.1}$$

onde

$$S_{2\delta} = \{u \in X; dist(u,S) \leq 2\delta\}.$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times V, V)$ *tal que*

(*i*) $\eta(t,u) = u$, *se* $t = 0$ *ou* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

(*ii*) $\varphi(\eta(.,u))$ *é não crescente,* $\forall u \in V$;

(*iii*) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$.

Demonstração:

Pelo Lema B.6, existe um campo pseudogradiente g para φ em $M = \{u \in V; \|\varphi'(u)\|_* \neq 0\}$. Defina

$$A = \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{\delta},$$

e

$$\phi(u) = \frac{\mathrm{dist}(u, A^c)}{\mathrm{dist}(u, A^c) + \mathrm{dist}(u, B)}, \forall u \in V.$$

A função ϕ é localmente lipschitiziana (ver [9]). Defina agora $f : V \longrightarrow X$ por

$$f(u) = \begin{cases} -\dfrac{\phi(u)g(u)}{\|g(u)\|^2}, & u \in A, \\ 0, u \in V \setminus A; \end{cases}$$

note que f é localmente lipschitiziana e que $f(u) \in T_uV$, para todo $u \in V$. Da Definição B.4 e de (B.1) segue que

$$u \in V \backslash A \Rightarrow \|f(u)\| = 0 \leq \frac{\delta}{8\varepsilon}$$

e

$$u \in A \Rightarrow \|f(u)\| = \left\| \frac{-\phi(u)g(u)}{\|g(u)\|^2} \right\| = \frac{\phi(u)g(u)}{\|g(u)\|^2} \leq \frac{1}{\|g(u)\|} \leq \frac{1}{\|\varphi'(u)\|_*} \leq \frac{\delta}{8\varepsilon},$$

ou seja

$$\|f(u)\| \leq \frac{\delta}{8\varepsilon}, \forall u \in V.$$

Logo, sendo f localmente lipschitiziana, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) = u \end{cases}$$

admite uma única solução $\sigma(.,u)$ e sendo f limitada, tal solução está definida em toda reta. Também, segue da dependência contínua dos dados iniciais que σ é contínua em $\mathbb{R} \times V$. Defina então

$$\begin{array}{rcl} \eta : [0,1] \times V & \longrightarrow & V \\ (t,u) & \longmapsto & \eta(t,u) = \sigma(8\varepsilon t, u); \end{array}$$

para $t \geq 0$, temos

$$\|\sigma(t,u)-u\| = \|\sigma(t,u)-\sigma(0,u)\| = \left\| \int_0^t f(\sigma(\tau,u))d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(\sigma(\tau,u))\|d\tau \leq \int_0^t \frac{\delta}{8\varepsilon}d\tau$$

donde

$$\|\sigma(t,u) - u\| \leq \frac{\delta t}{8\varepsilon}, \tag{B.2}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \langle \varphi'(\sigma(t,u)), \sigma'(t,u) \rangle \\ &= \langle \varphi'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u)) \rangle \\ &= -\frac{\phi(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2} \langle \varphi'(\sigma(t,u)), g(\sigma(t,u)) \rangle \\ &\leq -\frac{\phi(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2} \|\varphi'(\sigma(t,u))\|_*^2 \end{aligned}$$

implicando

$$\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) \leq -\frac{1}{4}\phi(\sigma(t,u)). \tag{B.3}$$

Com isso em mãos, demonstremos a tese do nosso lema.

(i)Se $t = 0$, então

$$\eta(0,u) = \sigma(0,u) = u.$$

Se $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ (i.e., se $u \in A^c$), note que $\omega(t) = u$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) = u \end{cases}$$

pois

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\omega(t) = 0 = f(u) = f(\omega(t)), \\ \omega(0) = u. \end{cases}$$

Logo

$$\sigma(t,u) = u, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in A^c \Rightarrow \sigma(8\varepsilon t, u) = u, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in A^c,$$

donde

$$\eta(t,u) = u, \quad \forall t \in [0,1], \forall u \in A^c.$$

(ii) Fixando $u \in V$, considere

$$\gamma(t) = \varphi(\eta(t,u)), \quad \forall t \in [0,1].$$

De (B.3) segue que

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\varphi(\eta(t,u)) = \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(8\varepsilon t,u)) = \langle \varphi'(\sigma(8\varepsilon t,u)), \sigma'(8\varepsilon t,u)8\varepsilon\rangle =$$

$$= 8\varepsilon\langle \varphi'(\sigma(8\varepsilon t,u)), f(\sigma(8\varepsilon t,u))\rangle \leq -2\varepsilon\phi(\sigma(t,u)) \leq 0,$$

donde γ é não crescente, para todo $u \in V$.

(iii) Seja $u \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$. Se existe $t_0 \in [0, 8\varepsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t_0,u)) < c - \varepsilon$, então, pelo item (ii) segue que

$$\varphi(\sigma(8\varepsilon,u)) \leq \varphi(\sigma(t_0,u)) < c-\varepsilon \Rightarrow \varphi(\eta(1,u)) < c-\varepsilon \Rightarrow \eta(1,u) \in \varphi^{c-\varepsilon}.$$

Suponha agora que

$$\varphi(\sigma(t,u)) \geq c-\varepsilon, \quad \forall t \in [0,8\varepsilon];$$

note então que

$$\varphi(\sigma(t,u)) \leq \varphi(\sigma(0,u)) = \varphi(u) \leq c+\varepsilon, \quad \forall t \in [0,8\varepsilon]$$

donde

$$\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]), \quad \forall t \in [0,8\varepsilon].$$

De (B.2), se $t \geq 0$, temos

$$\|\eta(t,u) - u\| = \|\sigma(8\varepsilon t,u) - u\| \leq \frac{\delta(8\varepsilon t)}{8\varepsilon} = \delta t \leq \delta, \quad \forall t \in [0,1];$$

logo,

$$\eta(t,u) \in S_\delta, \quad \forall u \in S, t \in [0,1]$$

implicando que

$$\sigma(t,u) \in S_\delta, \quad \forall u \in S, t \in [0, 8\varepsilon].$$

Assim, $\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_\delta = B$, para todo $t \in [0, 8\varepsilon]$, e como

$$\varphi(\sigma(8\varepsilon, u)) - \varphi(\sigma(0,u)) = \int_0^{8\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt$$

segue de (B.3) que

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma(8\varepsilon, u)) &= \varphi(u) + \int_0^{8\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt \\
&\leq \varphi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\varepsilon} \phi(\sigma(t,u))dt \\
&= c + \varepsilon - \frac{8\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

ou seja, $\varphi(\eta(1,u)) \leq c - \varepsilon$, e como $u \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$ foi arbitrário, concluímos enfim que $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$.

■

Teorema B.8 (Princípio Variacional de Ekeland) *Sejam X um espaço de Banach e $G \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $v \in V = \{v \in X; G(v) = 1\}$, temos $G'(v) \neq 0$. Sejam $v \in V$ e $\varepsilon, \delta > 0$ com*

$$F(v) \leq \inf_V F + \varepsilon;$$

então existe $u \in V$ tal que

a) $F(u) \leq \inf_V F + 2\varepsilon$;

b) $\|u - v\| \leq 2\delta$;

c) $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u) - \lambda G'(u)\| \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que para todo $u \in V$ tal que

$$F(u) \leq \inf_V F + 2\varepsilon, \quad \|u - v\| \leq 2\delta,$$

tenhamos

$$\|F'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u) - \lambda G'(u)\| > 8\varepsilon/\delta,$$

i.e.,

$$\forall u \in F^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon)] \cap S_{2\delta} = F^{-1}([c, c + 2\varepsilon)] \cap S_{2\delta}, \quad \text{temos} \quad ||F'(u)||_* \geq \frac{8\varepsilon}{\delta},$$

onde $S = \{v\}$ e $c = \inf\limits_V F$. Pelo Lema B.7, existe $\eta : [0,1] \times V \to V$ contínua tal que $\eta(1, F^{c+\varepsilon} \cap S) \subset F^{c-\varepsilon}$. Observe que

$$F(v) \leq c + \varepsilon \Rightarrow v \in F^{c+\varepsilon} \Rightarrow F^{c+\varepsilon} \cap S = \{v\},$$

o que implica que $\eta(1, v) \in F^{c-\varepsilon}$, ou seja, $F(\eta(1, v)) \leq c - \varepsilon < c$, absurdo, pois $c = \inf\limits_V F \leq F(v)$, para todo $v \in V$.

■

Corolário B.9 *Sob as hipóteses do Teorema B.8, seja* $(v_n) \subset V$ *uma sequência tal que*

$$F(v_n) \to \inf_V F.$$

Então, existe uma sequência $(u_n) \subset V$ *tal que*

a) $F(u_n) \to \inf\limits_V F$;

b) $\|u_n - v_n\| \to 0$;

c) $\|F'(u_n)\|_* \to 0$;

ou seja, existe uma sequência $(PS)_c$ *para* F*, com nível* $c = \inf\limits_V F$.

Apêndice C

Resultados utilizados na dissertação

Neste apêndice enunciaremos alguns resultados que utilizamos no decorrer do nosso trabalho. Os mesmos serão apresentados sem demonstração, apenas será citado onde a prova pode ser encontrada.

Sejam $N \geq 3$ e $2^* = 2N/(N-2)$ o expoente crítico de Sobolev. O espaço

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

com o produto interno

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u . \nabla v dx$$

e a norma correspondente

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert. O espaço $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Se $|\Omega| < \infty$, então $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. O número

$$S = \inf_{\substack{u \,\in\, \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{2^*} \,=\, 1}} \|\nabla u\|_2^2$$

é positivo. A constante de Sobolev também é dada por

$$S = \inf_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}$$

e com isso obtemos a *desigualdade de Sobolev*:

$$\|u\|_{2^*}^2 \leq S^{-1} \|\nabla u\|_2^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{C.1}$$

E se $|\Omega| < \infty$, então a *constante de Poincaré*

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_2 = 1}} \|\nabla u\|_2^2 > 0$$

é atingida (ver [6] ou [20]).

Para os Teoremas C.1 e C.2, ver [6] ou [20].

Teorema C.1 (Teorema de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} &H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \le p < \infty, N = 1, 2, \\ &H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \le p \le 2^*, N \ge 3, \\ &\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \quad N \ge 3. \end{aligned}$$

Teorema C.2 (Teorema de Rellich) *Se $|\Omega| < \infty$ então as seguintes imersões são compactas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \le p < 2^*.$$

A demonstração dos dois próximos teoremas pode ser encontrada em [6].

Teorema C.3 (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço vetorial, $G \subset E$ um subespaço e $g : G \to \mathbb{R}$ uma transformação linear contínua de norma*

$$\|g\| = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| = 1}} g(x).$$

Então, existe uma transformação linear contínua $f : E \to \mathbb{R}$ que prolonga g, i.e.,

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G,$$

e tal que

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} f(x) = \|g\|.$$

Teorema C.4 *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $(x_n) \subset E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em E e $\limsup \|x_n\| \le \|x\|$. Então $x_n \to x$ em E.*

As seguintes versões dos lemas de Brezis-Lieb podem ser encontradas em [20] e [21], respectivamente.

Lema C.5 (Brezis-Lieb, 1ª versão) *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Se*

a) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

b) $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω. *Então*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad L^p(\Omega).$$

Lema C.6 (Brezis-Lieb, 2ª versão) *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. *Se*

a) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

b) $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω. *Então*

$$\lim_{n\to\infty}(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

Os resultados C.7 à C.9 podem ser encontrados em [21].

Teorema C.7 (Teorema do Passo da Montanha) *Sejam* H *um espaço de Hilbert,* $\varphi \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$ *tal que* $\varphi(0) = 0$ *e existe* $r > 0$ *com*

$$\varphi|_{B_r} \geq 0 \quad e \quad b = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > 0.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $u \in H$ *tal que*

i) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

ii) $\|\varphi'(u)\| \leq 2\varepsilon$,

onde

$$b \leq c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H); \gamma(0) = 0 \quad e \quad \varphi(\gamma(1)) < 0\}.$$

Corolário C.8 *Sob as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha,* φ *admite uma sequência* $(PS)_c$, *i.e., existe* $(u_n) \subset H$ *tal que*

$$\varphi(u_n) \to c \quad e \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Teorema C.9 (Identidade de Pohozaev) *Seja* $u \in H^2_{loc}(\overline{\Omega})$ *uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

onde $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *e* Ω *é um domínio limitado e suave de* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. *Defina*

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds.$$

Se $F(u) \in L^1(\Omega)$, *então* u *satisfaz*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \sigma.\nu d\sigma = N\int_\Omega F(u)dx - \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{C.2}$$

onde ν *denota o vetor normal unitário exterior a* $\partial\Omega$.

O próximo teorema pode ser visto em [7].

Teorema C.10 (Brezis-Kato) *Sejam* Ω *um domínio de* $\mathbb{R}^N$ *e* $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory tal que para quase todo* $x \in \Omega$ *vale*

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1+|u|),$$

onde $a \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. *Seja também* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *uma solução fraca de*

$$-\Delta u = g(.,u) \quad em \quad \Omega.$$

Então $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ *para qualquer* $p < \infty$. *Se* $u \in H^1_0(\Omega)$ *e* $a \in L^{N/2}(\Omega)$ *então* $u \in L^p(\Omega)$ *para qualquer* $p < \infty$.

O teorema a seguir encontra-se em [13].

Teorema C.11 (Princípio do Máximo) *Se* u *é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

com $f \geq 0$, *então* $u \geq 0$; *e se* u *atinge mínimo, então* $u \equiv 0$.

Bibliografia

[1] Alves, C. O., *Existência de Solução Positiva de Equações Elípticas Não-Lineares Variacionais em* $\mathbb{R}^N$, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 1996.

[2] Alves, C. O., & Ding, Y. H., *Multiplicity of Positive Solutions to a p-Laplacian Equation Involving Critical Nonlinearity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 279 (2003), 508-521.

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, 1995.

[4] Ben-Naoum, A. K., Troestler, C. & Willem, M., *Extrema Problems With Critical Sobolev Exponents on Unbouded Domains*, Nonlinear Analysis, TMA 26 (1996), 823-833.

[5] Bianchi, G., Chabrowski, J. & Szulkin, A., *On Symmetric Solutions of an Elliptic Equation With a Nonlinearity Involving Critical Sobolev Exponent*, Nonlinear Analysis, TMA 25 (1995), 41-59.

[6] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Dunod, Paris, 2005.

[7] Brezis, H. & Kato, T., *Remarks on the Schrödinger Operator with Regular Complex Potentials*, J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 137-151.

[8] Brezis, H. & Nirenberg, L., *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[9] Cavalcante, L. P. de L., *Existência de Soluções Positivas Para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não Limitados*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, 2004.

[10] Garcia Azorero, J., & Peral Alonzo, I., *Existence and Non-uniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear Eigenvalues*, Coom. Partial Differential Equations 12 (1987), 1389-1430.

[11] Garcia Azorero, J., & Peral Alonzo, I., *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent with a Nonsymmetric Term*, Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1991), 877-895.

[12] Gidas, B., Ni, Wei-Ming & Nirenberg, L., *Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in* $\mathbb{R}^N$, Mathematical Analysis and Applications Part A, Vol. 7A (1981), 369-402.

[13] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer, Heidelberg, 19993.

[14] Lazzo, M., *Solutions Positives Multiples pour une Équation Elliptique non Linéaire avec l'exposant Critique de Sobolev*, C. R. Acad. Sci., Paris, 314 (1992), I61-I64.

[15] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA (2005).

[16] Lions, P.-L., *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variatons. The Limit Case, Part 1*, Revista Matemática Iberoamericana Vol. 1, nº 1 (1985), 45-121.

[17] Lions, P.-L., *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variatons. The Limit Case, Part 2*, Revista Matemática Iberoamericana Vol. 1, nº 1 (1985), 145-201.

[18] Lusternik, L. & Schnirelman, L., *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[19] Rey, O., *A Multiplicity Result for a Variational Problem With Lack of Compactness*, Nonlinear Analysis, TMA 13 (1989), 1241-1249.

[20] Willem, M., *Analyse Harmonique Réelle*, Hermann, Paris, 1995.

[21] Willem, M., *Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhäuser, 1996.