

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
NÍVEL MESTRADO

**Aprimoramento da Estimativa de Parâmetros que Caracterizam
Linhas de Transmissão Aéreas**

Luciano Sales Barros

Campina Grande – Paraíba – Brasil
Agosto de 2002

©Luciano Sales Barros, 2002



B277a
2002

Barros, Luciano Sales

Aprimoramento da estimativa de parâmetros que caracterizam linhas de transmissão aéreas/Luciano Sales Barros. - Campina Grande: UFCEG, 2002.

65 p.: il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - UFCEG/CCT/DEE
Inclui Bibliografia

1. Modelagem de Linhas de Transmissão 2. Transitórios Eletromagnéticos 3. Síntese de Funções Racionais 4. Modelos no Domínio de Fases I.Título

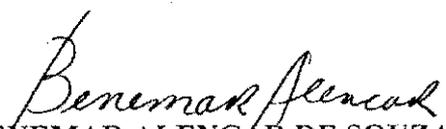
CDU: 621.372.2

APRIMORAMENTO DA ESTIMATIVA DE PARÂMETROS QUE CARACTERIZAM
LINHAS DE TRANSMISSÃO AÉREAS

LUCIANO SALES BARROS

Dissertação Aprovada em 14.08.2002


PROF. WASHINGTON LUIZ ARAUJO NEVES, Ph.D., UFCG
Orientador


PROF. BENEMAR ALENCAR DE SOUZA, D.Sc., UFCG
Componente da Banca


PROF. DAGOBERTO LOURENÇO RIBEIRO, D.Sc., UFCG
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
Agosto - 2002

Aprimoramento da Estimativa de Parâmetros que Caracterizam Linhas de Transmissão Aéreas

Dissertação submetida ao colegiado dos cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande, em cumprimento às exigências para obtenção do Grau de Mestre em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Energia

Luciano Sales Barros
Orientando

Washington Neves, Ph.D.
Orientador

Campina Grande – Paraíba – Brasil
Agosto de 2002

©Luciano Sales Barros, 2002

Agradecimentos

Meus agradecimentos:

A Deus, pela minha saúde e força para trabalhar;

Ao CNPq e à CAPES, pelo apoio financeiro;

À COPELE, pela oportunidade;

Ao Professor Washington Neves, pela orientação;

Aos Professores Benemar Alencar, Wellington Mota e Edson Guedes;

Aos amigos Helvio, Damásio, Núbia, Alecio, Eduardo Vidal, Fabiano Fragoso, Diana e Franklin Pamplona;

Aos funcionários da COPELE: Ângela, Marcos, Pedro e Eleonôra;

Aos funcionários do Laboratório de Alta Tensão: Francisco, Eduardo, Dona Lourdes, Della-Bianca, Adalberto e Selma;

À minha mãe Tereza, minha irmã Adriana, minha sobrinha Laryssa, todos os meus tios, em especial a Joca, todas as minhas tias, primos e primas;

Aos meus amigos de sempre, principalmente Heber e Helder, pelo estímulo.

Resumo

Muitos modelos computacionais foram propostos visando representar de forma precisa e eficiente o fenômeno de propagação de ondas em linhas de transmissão. Tais modelos devem considerar a natureza distribuída e a dependência da frequência dos parâmetros das linhas. Nos modelos disponíveis em softwares EMTP (Eletronic Magnetic Transients Program), a linha é completamente caracterizada por uma função fator de propagação $A(\omega)$ e uma impedância $Z_c(\omega)$ ou admitância $Y_c(\omega)$. Estes parâmetros são aproximados por funções racionais de modo que $a(t)$ e $z_c(t)$ ou $y_c(t)$ sejam determinados sem a necessidade do uso de transformadas. Neste trabalho apresenta-se uma revisão dos modelos de linhas de transmissão. Propõe-se algumas alternativas visando aproximar os parâmetros $A(\omega)$ e $Z_c(\omega)$ de forma precisa e eficiente. Mostra-se que o método de ajuste obtido pode ser utilizado para aproximar funções complexas e não apresenta problemas numéricos, mas é dependente da estimativa inicial e pode precisar de muitas iterações para alcançar a convergência. Além disso, é analisada a aplicação de um modelo de linhas de transmissão, ainda não disponível em softwares EMTP, para estudos de transitórios.

Abstract

Accurate transmission line models must take the phenomenon of propagation of waves into account including the effects of the distributed nature and the frequency - dependence of the line parameters. In the available EMTP (Electromagnetic Transients Program) models, the line is completely represented by a propagation function $A(\omega)$ and an impedance $Z_c(\omega)$ or admittance $Y_c(\omega)$. These parameters are approximated by rational functions so that $a(t)$ and $z_c(t)$ or $y_c(t)$ are easily obtained. In this work, a brief review of transmission lines models is presented and some alternatives to approximate the parameters $A(\omega)$ and $Z_c(\omega)$ in a accurate and efficient way are proposed. It is shown that the used method is suitable to fit rational functions with real or complex poles and zeroes. Time domain simulations are carried out using data from the fitted functions in connection with a recently developed transmission line model proposed in the literature and not yet available in EMTP type programs.

Sumário

| | |
|--|-------------|
| Resumo | iv |
| Abstract | v |
| Lista de Figuras | viii |
| Lista de Tabelas | xi |
| Capítulo 1 – Introdução | 01 |
| 1.1 – Motivação | 01 |
| 1.2 – Delimitação do tema | 03 |
| 1.3 – Objetivos | 04 |
| 1.4 – Organização da dissertação | 04 |
| Capítulo 2 – Fundamentação Teórica | 05 |
| 2.1 – Propagação de ondas em linhas de transmissão | 05 |
| 2.2 – Linha de transmissão monofásica sem perdas | 08 |
| 2.3 – Linha de transmissão monofásica com perdas | 08 |
| 2.4 – Linha de transmissão polifásica | 09 |
| 2.5 – Linha de transmissão polifásica a parâmetros dependentes da frequência | 10 |
| Capítulo 3 – Modelos Computacionais de Linhas de Transmissão | 13 |
| 3.1 – Modelos no domínio modal | 13 |
| 3.1.1 – Modelo de Dommel | 13 |
| 3.1.2 – Modelo de Meyer e Dommel | 14 |
| 3.1.3 – Modelo de Martí | 15 |
| 3.2 – Modelos no domínio de fases | 18 |

| | |
|--|-----------|
| 3.2.1 – Considerações gerais..... | 18 |
| 3.2.2 – Modelo IARMA..... | 21 |
| 3.2.3 – Modelo proposto por Morched et al..... | 22 |
| 3.2.4 – Modelo proposto por Fernandes..... | 22 |
| 3.2.5 – Modelo Z-line..... | 23 |
| Capítulo 4 – Síntese de Funções Racionais..... | 25 |
| 4.1 – Método de Newton..... | 25 |
| 4.2 – Método de Levenberg-Marquardt..... | 27 |
| 4.3 – Método de ajuste implementado..... | 28 |
| Capítulo 5 – Análise de Resultados..... | 30 |
| 5.1 – Análise do método de ajuste implementado..... | 30 |
| 5.1.1 – Resultados do ajuste..... | 30 |
| 5.1.2 – Convergência do método implementado..... | 35 |
| 5.1.3 – Oportunidade de melhorias no método de ajuste..... | 36 |
| 5.1.4 – Simulação no domínio do tempo..... | 38 |
| 5.2 – Análise do modelo Z-line..... | 41 |
| 5.2.1 – Aplicação do modelo Z-line..... | 41 |
| 5.2.2 – Simulação utilizando o modelo Z-line..... | 42 |
| Capítulo 6 – Conclusões..... | 49 |
| Referências Bibliográficas..... | 51 |
| Apêndice A – Convolução Recursiva..... | 54 |
| Apêndice B – Método de Ajuste Não-linear..... | 56 |
| Apêndice C – Ajuste Vetorial..... | 64 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 – Linha de transmissão monofásica com retorno pela terra..... | 05 |
| Figura 2.2 – Circuito equivalente de um elemento infinitesimal de uma linha monofásica com retorno pela terra..... | 06 |
| Figura 3.1 – Circuito equivalente para uma linha sem perdas..... | 13 |
| Figura 3.2 – Linha de transmissão com perdas concentradas nas extremidades..... | 14 |
| Figura 3.3 – Circuito equivalente proposto por Meyer e Dommel para uma linha dependente da frequência..... | 14 |
| Figura 3.4 – Equivalente RC para simular $Z_c(\omega)$ no domínio do tempo..... | 15 |
| Figura 3.5 – Circuito equivalente para uma linha com parâmetros dependentes da frequência..... | 16 |
| Figura 3.6 – Linha de transmissão simétrica..... | 18 |
| Figura 3.7 – Tensão na fase c do terminal receptor da linha simétrica..... | 18 |
| Figura 3.8 – Linha de transmissão assimétrica..... | 19 |
| Figura 3.9a - Tensão no terminal receptor da linha assimétrica – Modelagem no Domínio Modal..... | 19 |
| Figura 3.9b - Tensão no terminal receptor da linha assimétrica – Modelagem no Domínio de Fases..... | 20 |
| Figura 3.10 – Modelo Z-line para linhas dependentes da frequência..... | 24 |
| Figura 5.1 – Circuito RLC com oito pólos..... | 30 |
| Figura 5.2a – Ajuste para a parte real da resposta em frequência do circuito RLC..... | 31 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.2b - Ajuste para a parte imaginária da resposta em frequência do circuito RLC. | 32 |
| Figura 5.3 – Linha de transmissão monofásica com retorno pela terra. | 32 |
| Figura 5.4a – Ajuste para a parte real da admitância característica da linha. | 33 |
| Figura 5.4b - Ajuste para a parte imaginária da admitância característica da linha. | 33 |
| Figura 5.5a – Ajuste para a parte real do fator de propagação da linha. | 34 |
| Figura 5.5b – Ajuste para a parte imaginária do fator de propagação da linha. | 34 |
| Figura 5.6 – Minimização da Função Erro para o ajuste da resposta em frequência do circuito RLC da Figura 5.1. | 35 |
| Figura 5.7 – Minimização da Função Erro para o ajuste da admitância característica da linha. | 35 |
| Figura 5.8 – Minimização da Função Erro para o ajuste do fator de propagação da linha. | 36 |
| Figura 5.9 – Energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto. | 38 |
| Figura 5.10 – Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto. | 39 |
| Figura 5.11 – Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado. | 39 |
| Figura 5.12 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto. | 42 |
| Figura 5.13 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line com 4 seções: energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto. | 43 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.14 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor em aberto..... | 44 |
| Figura 5.15 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line com 4 seções: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor em aberto..... | 44 |
| Figura 5.16 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor aterrado..... | 45 |
| Figura 5.17 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto..... | 45 |
| Figura 5.18 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor em aberto..... | 46 |
| Figura 5.19 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor aterrado..... | 46 |
| Figura 5.20 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um degrau de tensão unitário com o terminal receptor em aberto..... | 47 |
| Figura 5.21 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor em aberto..... | 47 |
| Figura 5.22 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de 1,2/50 μ s com o terminal receptor aterrado..... | 48 |
| Figura B1 - Diagrama de blocos do Método de Ajuste Não-Linear..... | 63 |

Lista de Tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 5.1 – Eficiência do método de ajuste implementado..... | 34 |
| Tabela 5.2a – Redução do esforço computacional para o caso de energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto..... | 40 |
| Tabela 5.2b – Redução do esforço computacional para o caso de energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto..... | 40 |
| Tabela 5.2c – Redução do esforço computacional para o caso de energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado..... | 40 |

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A análise de transitórios eletromagnéticos é essencial para o funcionamento, projeto e planejamento de sistemas elétricos. Embora operem em regime permanente em grande parte do tempo, os sistemas de potência devem ser projetados para suportar solicitações extremas, denominadas sobretensões. Sobretensão é toda tensão acima do valor nominal que possa pôr em perigo a integridade de equipamentos e o funcionamento de um sistema elétrico. As sobretensões podem ser de origem externa, resultante de descargas atmosféricas ou de origem interna, resultantes de manobras ou falhas no sistema.

A simulação digital é hoje a ferramenta mais utilizada para realização da análise de transitórios. Entretanto, uma das dificuldades na simulação consiste em representar os diversos componentes de um sistema, dentre os quais estão as linhas de transmissão, que se diferenciam dos demais por dois aspectos: seus parâmetros estão distribuídos ao longo de sua extensão e são fortemente dependentes da frequência.

Devido a estas peculiaridades, as linhas de transmissão podem ser modeladas de diferentes formas, dependendo da precisão e eficiência necessárias ao caso em estudo:

- Modelos a parâmetros concentrados – a linha de transmissão é representada por elementos concentrados, usualmente por uma conexão cascata de seções π , calculados para uma determinada frequência;
- Modelos a parâmetros distribuídos – nestes modelos, a natureza distribuída dos parâmetros da linha é levada em consideração.

Quanto à dependência da frequência de seus parâmetros, existem duas classes de modelos de linhas de transmissão:

- Modelos a parâmetros constantes – a dependência da frequência dos parâmetros da linha é desprezada. Os parâmetros da linha são calculados em uma única frequência e estes valores se mantêm fixos para todas as componentes de frequência que se propagam na linha;
- Modelos a parâmetros dependentes da frequência – levam em consideração a variação dos parâmetros da linha com a frequência.

Modelos que consideram a natureza distribuída e a dependência da frequência dos parâmetros da linha representam com maior precisão o fenômeno de propagação de ondas em linhas de transmissão. Por outro lado, estes modelos quase sempre demandam um esforço computacional significativo.

Desenvolver metodologias computacionais que representem de forma precisa e eficiente linhas de transmissão tem sido o objetivo de diversos estudos, dos quais resultaram muitos modelos.

Os programas desenvolvidos para o cálculo de transitórios eletromagnéticos dividem-se em dois grandes grupos de acordo com a técnica de solução utilizada: no domínio da frequência (FDTP – Frequency Domain Transients Program) e no domínio do tempo (EMTP – Eletromagnetic Transients Program).

No domínio da frequência a resposta transitória do sistema em análise é calculada inicialmente no domínio da frequência. A solução no domínio do tempo é determinada em seguida fazendo-se uso de transformações inversas. A simulação de mudanças súbitas na configuração do sistema ao longo da análise e a representação de elementos não-lineares, constituem-se nas maiores limitações destes programas.

No domínio do tempo a solução é determinada para cada passo de tempo Δt , em geral prefixado. Partindo-se das condições iniciais em $t=0$, as tensões em cada nó do sistema em análise são determinadas em $t=\Delta t, 2. \Delta t, 3. \Delta t, \dots, t_{máx}$. No processo de cálculo das tensões e correntes em cada terminal, se faz necessário conhecer as tensões e correntes em tempos anteriores. Elementos não-lineares e mudanças súbitas na configuração do sistema podem ser facilmente simulados em programas desta classe.

Para estudos de transitórios eletromagnéticos os programas EMTP são os mais difundidos. Programas como ATP (Alternative Transients Program – Leuven EMTP Center, 1987), MICROTRAN[®] (Microtran Power Systems Analysis Corporation, 1992) e EMTDC (PSCAD/EMTDC – Manitoba HVDC Research Centre, 2000), têm modelos computacionais para diversos componentes de sistemas elétricos, inclusive linhas de transmissão.

1.2 Delimitação do tema

Os modelos de linhas de transmissão polifásicas a parâmetros dependentes da frequência fazem uso da técnica da transformação modal [Wedepohl, 1963]. Através da determinação de uma matriz de transformação modal, “ n ” fases de uma linha polifásica podem ser transformadas em “ n ” linhas monofásicas independentes. A grande limitação dos modelos no domínio modal já implementados é a consideração da matriz de transformação como real e constante, o que só se verifica para o caso de linhas simétricas.

Com a necessidade de obter modelos precisos para linhas assimétricas e cabos subterrâneos surgiram os modelos no domínio de fases. Nestes modelos, o comportamento dinâmico da linha é determinado diretamente no domínio de fases, evitando a transformação modal na simulação no domínio do tempo. Alguns modelos no domínio de

fases já estão disponíveis em softwares EMTP, como o modelo proposto por Morched et al [1999], no PSCAD/EMTDC; e o modelo proposto por Noda et al [1996,1997], no ATP.

1.3 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

1. Desenvolver um método de síntese de funções racionais que otimize a modelagem de linhas de transmissão, inclusive no domínio de fases, e avaliar modelos de linhas já existentes, visando a implementação de uma metodologia precisa e eficiente para o cálculo de transitórios eletromagnéticos;
2. Realizar um estudo de casos empregando os métodos implementados, avaliando a sua precisão e eficiência. A avaliação será feita através da comparação com a precisão e eficiência de softwares EMTP já consolidados.

1.4. Organização da Dissertação

A dissertação está organizada conforme a seguinte estrutura:

- No capítulo 2 são fundamentados teoria e equacionamento de linhas de transmissão;
- No capítulo 3 é dada uma idéia geral do estado da arte apresentando os trabalhos mais relevantes sobre linhas de transmissão, enfatizando seus aspectos positivos e negativos;
- O capítulo 4 é o de trabalho proposto, onde são apresentadas os métodos implementadas durante o trabalho;
- No capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos e é feita a análise de resultados para validação do método proposto. A validação é feita mediante comparações com resultados fornecidos por softwares EMTP já consolidados;
- As principais conclusões e sugestões tiradas deste trabalho são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados uma revisão dos conceitos básicos e o equacionamento da teoria de propagação de ondas em linhas de transmissão aéreas.

2.1. Propagação de ondas em linhas de transmissão

Consideremos a linha de transmissão monofásica com retorno pela terra da Figura

2.1.

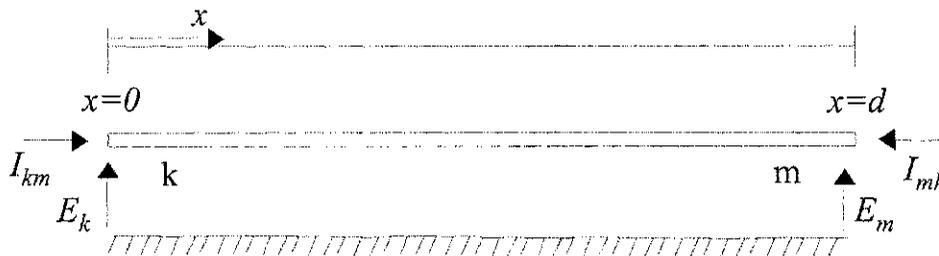


Figura 2.1 – Linha de transmissão monofásica com retorno pela terra.

Tomemos o circuito equivalente de um elemento infinitesimal da linha para determinar as equações que descrevem o seu comportamento, Figura 2.2.

Sendo:

r – Resistência em Ω/km ;

g – Condutância de dispersão em Ω^{-1}/km ;

l – Indutância em H/km ;

c – Capacitância em F/km .

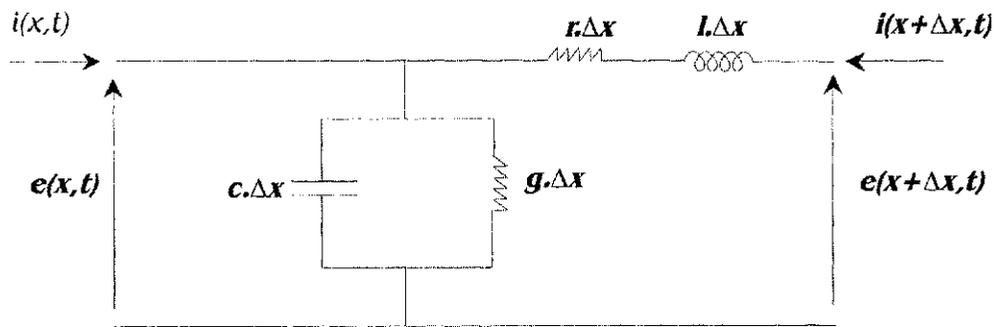


Figura 2.2 – Circuito equivalente de um elemento infinitesimal de uma linha monofásica.

A corrente da linha no domínio do tempo, pode ser obtida por:

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - g \cdot \Delta x \cdot e(x, t) - c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial e(x, t)}{\partial t}, \text{ ou}$$

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -g \cdot e(x, t) - c \cdot \frac{\partial e(x, t)}{\partial t}$$

$$\text{Quando } \Delta x \rightarrow 0, \text{ temos: } -\frac{\partial i}{\partial x} = g \cdot e + c \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.1a)$$

De forma análoga, a queda de tensão na linha pode ser dada por:

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = r \cdot i + l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.1b)$$

Sendo $\mathfrak{F}\{f(x)\}$ a transformada de Fourier de $f(x)$, temos:

$$E(\omega) = \mathfrak{F}\{e(t)\}, \quad I(\omega) = \mathfrak{F}\{i(t)\}$$

E sendo

$Z = r + j \cdot \omega \cdot l$, a impedância série da linha por unidade de comprimento e

$Y = g + j \cdot \omega \cdot c$, a admitância shunt da linha por unidade de comprimento.

Temos a relação entre tensão e corrente da linha, no domínio da frequência:

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = ZI \quad (2.2a)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = YE \quad (2.2b)$$

Diferenciando as equações (2.2) e substituindo-as entre si:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= ZYE \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= YZI\end{aligned}\quad (2.3)$$

Definindo,

$\gamma = \sqrt{ZY} = (\alpha + j\omega\beta)$, como a constante de propagação da linha e

$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$, como a impedância característica da linha

Em que,

α é a constante de atenuação e

β é a constante de distorção da linha.

As soluções de (2.3) no domínio do tempo são:

$$\begin{aligned}e(t) &= f(t - \beta.x).e^{-\alpha.x} + b(t + \beta.x).e^{\alpha.x} \\ i(t) &= \frac{1}{Z_c} [f(t - \beta.x).e^{-\alpha.x} - b(t + \beta.x).e^{\alpha.x}]\end{aligned}\quad (2.4)$$

Portanto, a tensão e a corrente em uma linha de transmissão são dadas pela composição de duas ondas que viajam em direções opostas denominadas onda progressiva e onda regressiva.

Temos as seguintes condições de contorno para a linha da Figura 2.1:

$$\begin{aligned}e(t)\Big|_{x=0} &= e_k(t) = f(t) + b(t); \\ i(t)\Big|_{x=0} &= i_{kn}(t) = \frac{1}{Z_c} [f(t) - b(t)]; \\ e(t)\Big|_{x=d} &= e_m(t) = f(t - \beta.d).e^{-\alpha.d} + b(t + \beta.d).e^{\alpha.d}; \\ i(t)\Big|_{x=d} &= i_{mk}(t) = \frac{1}{Z_c} [f(t - \beta.d).e^{-\alpha.d} - b(t + \beta.d).e^{\alpha.d}].\end{aligned}$$

Definindo $\tau = \beta \cdot d$ como o tempo de propagação da onda na linha, temos as equações que descrevem o fenômeno de propagação de ondas em linhas de transmissão:

$$\begin{aligned} e_k(t) - Z_c \cdot i_{km}(t) &= b_k(t-\tau) \\ e_m(t) - Z_c \cdot i_{mk}(t) &= b_m(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que:

$$\begin{aligned} b_k(t-\tau) &= [e_m(t-\tau) - Z_c \cdot i_{mk}(t-\tau)] \cdot e^{-\alpha \cdot d} \\ b_m(t-\tau) &= [e_k(t-\tau) - Z_c \cdot i_{km}(t-\tau)] \cdot e^{-\alpha \cdot d} \end{aligned}$$

levam em consideração a história do sistema.

2.2. Linha de transmissão monofásica sem perdas

Para uma linha de transmissão monofásica sem perdas, temos $r=0$ e $g=0$. Assim:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

Temos então as equações que regem uma linha monofásica sem perdas:

$$\begin{aligned} e_k(t) - Z_c \cdot i_{km}(t) &= [e_m(t-\tau) - Z_c \cdot i_{mk}(t-\tau)] \\ e_m(t) - Z_c \cdot i_{mk}(t) &= [e_k(t-\tau) - Z_c \cdot i_{km}(t-\tau)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

A tensão e a corrente em um terminal no instante t , são iguais a tensão e a corrente no outro terminal no instante $t-\tau$.

2.3. Linha de transmissão monofásica com perdas

Para uma linha de transmissão monofásica com perdas, temos $r \neq 0$ e $g \neq 0$. Assim:

$$\alpha \neq 0$$

$$\beta \neq 0$$

Temos então as equações que regem uma linha monofásica com perdas:

$$e_k(t) - Z_c \cdot i_{km}(t) = [e_m(t-\tau) - Z_c \cdot i_{mk}(t-\tau)] \cdot e^{-\alpha \cdot d}$$

$$e_m(t) - Z_c \cdot i_{mk}(t) = [e_k(t-\tau) - Z_c \cdot i_{km}(t-\tau)] \cdot e^{-\alpha \cdot d} \quad (2.7)$$

A tensão e a corrente são atenuadas ao longo da sua propagação pela linha de acordo com a constante α .

2.4. Linha de transmissão polifásica

No caso de linhas polifásicas, sendo Z e Y as matrizes impedância série e admitância shunt, respectivamente, de (2.3) temos:

$$\frac{\partial^2 [E]}{\partial x^2} = [Z][Y][E]$$

$$\frac{\partial^2 [I]}{\partial x^2} = [Y][Z][I] \quad (2.8)$$

A principal dificuldade em se resolver as equações (2.8) está no fato de que, devido ao acoplamento mútuo entre fases, as matrizes Z e Y são cheias. Visando contornar este problema, faz-se uso de transformações matemáticas que diagonalizem $[Z].[Y]$ e $[Y].[Z]$. Após tais transformações, uma linha de transmissão com n fases pode ser tratada como n linhas monofásicas independentes.

Uma transformação muito usada é a transformação modal [Wedepohl, 1963]. Utilizando a teoria de autovetores pode-se determinar matrizes que diagonalizem os produtos $[Z].[Y]$ e $[Y].[Z]$:

$[T_v]$ = matriz transformação cujas colunas são os autovetores de $[Z].[Y]$;

$[T_i]$ = matriz transformação cujas colunas são os autovetores de $[Y].[Z]$.

As matrizes de transformação modal se relacionam pela seguinte expressão:

$$[T_v]^{-1} = [T_i]^t$$

Sendo T_v e T_i as matrizes de transformação modal, temos:

$$[E] = [T_v].[V];$$

$$[I] = [T_i].[J] \quad (2.9)$$

Sendo V e J os vetores tensões e correntes modais, respectivamente, temos as equações (2.8) no domínio modal:

$$\frac{\partial^2 [V]}{\partial x^2} = [\gamma^2][V]$$

$$\frac{\partial^2 [J]}{\partial x^2} = [\gamma^2][J] \quad (2.10)$$

Os elementos da matriz diagonal $[\gamma^2]$, são os autovalores de $[Z].[Y]$.

Analogamente às equações (2.3) do caso monofásico, determina-se $v(t)$ e $j(t)$ para cada modo i da linha, em que, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, para uma linha com n fases. Para retornar ao domínio de fases, determinando $e(t)$ e $i(t)$, faz-se uso da transformação modal de (2.9).

2.5. Linha de transmissão polifásica com parâmetros dependentes da frequência

Nos modelos anteriores, os parâmetros da linha são considerados como distribuídos ao longo de sua extensão, mas não é levada em consideração a sua dependência da frequência.

No entanto a resistência da linha de transmissão $R(\omega)$, é resultado da resistência intrínseca dos condutores mais a contribuição do retorno pelo solo, ambas dependentes da frequência. A indutância da linha de transmissão $L(\omega)$ é dependente da frequência, sendo resultado da contribuição da indutância própria dos condutores, do retorno pelo solo e da indutância mútua entre fases. Portanto Z (impedância série), varia com a frequência.

Os elementos da matriz admitância $Y(\omega)$ podem ser calculados a partir da geometria da linha, das configurações das torres e dos condutores, assumindo-se as hipóteses:

1. O ar tem perdas desprezíveis e a terra está no potencial zero;
2. Os raios dos condutores são significativamente menores que as distâncias entre os mesmos.

Ambas as hipóteses são aceitáveis para linhas aéreas. Portanto a matriz capacitância da linha, C , é função unicamente da geometria da linha; e a matriz condutância da linha, G , é desprezada.

Sendo assim, temos:

$[Z(\omega)] = [R(\omega)] + j.\omega.[L(\omega)]$, a impedância série dependente da frequência e

$[Y(\omega)] = j.\omega.[C]$, a admitância shunt dependente da frequência.

Assim, as matrizes de transformação modal T_v e T_i são também dependentes da frequência¹, e as equações (2.10) tornam-se:

$$\frac{\partial^2 [V(\omega)]}{\partial x^2} = [\gamma(\omega)^2][V(\omega)]$$

$$\frac{\partial^2 [J(\omega)]}{\partial x^2} = [\gamma(\omega)^2][J(\omega)] \quad (2.11)$$

Sendo $A(\omega) = e^{-\gamma(\omega).d}$ o fator de propagação da linha temos analogamente a (2.5), as equações que descrevem o comportamento dinâmico para cada modo da linha:

$$V_k(\omega) - Z_c(\omega).J_{km}(\omega) = [V_m(\omega) - Z_c(\omega).J_{mk}(\omega)].A(\omega)$$

$$V_m(\omega) - Z_c(\omega).J_{mk}(\omega) = [V_k(\omega) - Z_c(\omega).J_{km}(\omega)].A(\omega) \quad (2.12)$$

¹ No caso de uma linha monofásica com retorno pela terra, no caso de uma linha bifásica em que os condutores são idênticos e se encontram à mesma altura, e no caso de uma linha trifásica perfeitamente transposta, as matrizes T_v e T_i são reais e constantes.

No domínio do tempo temos:

$$\begin{aligned}v_k(t) - [z_c(t) * j_{km}(t)] &= \{v_m(t) - [z_c(t) * j_{mk}(t)]\} * a(t) \\v_m(t) - [z_c(t) * j_{mk}(t)] &= \{v_k(t) - [z_c(t) * j_{km}(t)]\} * a(t)\end{aligned}\quad (2.13)$$

Em que, *, denota uma integral de convolução.

Ao determinar-se $v(t)$ e $j(t)$, deve-se retornar ao domínio de fases determinando $e(t)$ e $i(t)$. Com as matrizes de transformação modais dependentes da frequência, temos:

$$\begin{aligned}[e(t)] &= [T_v(t)] * [v(t)] \\[i(t)] &= [T_i(t)] * [j(t)]\end{aligned}\quad (2.14)$$

Como pode ser observado em (2.13) e (2.14), a consideração dos efeitos da frequência sobre os parâmetros da linha, aumenta consideravelmente a complexidade na análise de seu comportamento dinâmico. As maiores dificuldades são a resolução das integrais de convolução a cada passo de tempo Δt , e a determinação de $z_c(t)$ e $a(t)$. Por outro lado, para se aproximar da realidade, o modelo deve considerar a natureza distribuída dos parâmetros da linha e sua dependência da frequência.

Capítulo 3

MODELOS COMPUTACIONAIS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Muitos modelos computacionais foram propostos visando representar de forma precisa e eficiente linhas de transmissão para o estudo de transitórios eletromagnéticos. Neste capítulo será apresentada uma revisão dos modelos de linhas enfatizando as diferenças existentes entre modelos no domínio modal e modelos no domínio de fases.

3.1. Modelos no domínio modal

3.1.1. Modelo de Dommel

Dommel [1969] a partir das equações (2.6), propôs o circuito equivalente da Figura 3.1, para cada modo de uma linha de transmissão sem perdas.

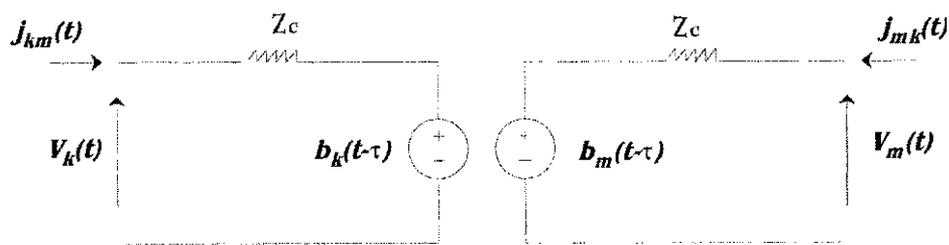


Figura 3.1 – Circuito equivalente para uma linha sem perdas.

Em que:

$$b_k(t-\tau) = e_m(t-\tau) - Z_c \cdot i_{mk}(t-\tau) \text{ e}$$

$$b_m(t-\tau) = e_k(t-\tau) - Z_c \cdot i_{km}(t-\tau)$$

são fontes de tensão fictícias que consideram a história do sistema.

Para linhas com perdas, Dommel [1969] representa o efeito das perdas através de resistores colocados nas duas extremidades da linha. Para melhorar a aproximação de considerar as perdas como concentradas, a linha é dividida em duas seções, de acordo com a Figura 3.2.



Figura 3.2 – Linha de transmissão com perdas concentradas nas extremidades

3.1.2. Modelo de Meyer e Dommel

Budner [1970] e Snelson [1972] propuseram os primeiros modelos considerando a dependência da frequência dos parâmetros da linha. Baseado neles, Meyer e Dommel [1974] propuseram um outro que resultava no circuito equivalente da Figura 3.3:

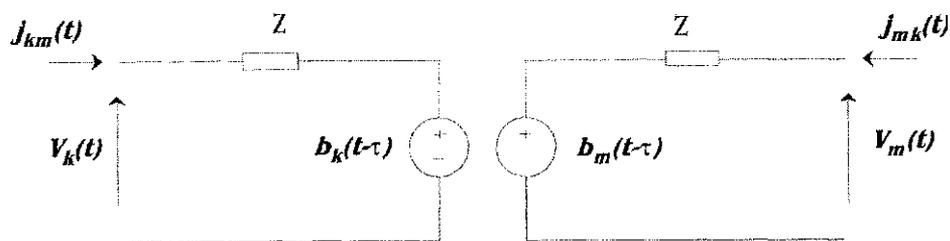


Figura 3.3 – Circuito equivalente proposto por Meyer e Dommel para uma linha dependente da frequência.

O parâmetro Z da Figura 3.3 é denominado de impedância de surto da linha e definido como:

$$Z = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_c = \sqrt{\frac{L_\infty}{C}}$$

3.1.3. Modelo de Martí

Todos os modelos de linhas de transmissão com parâmetros dependentes da frequência tinham uma limitação: necessitavam do uso de transformações inversas e do cálculo de convoluções no tempo.

Martí [1982], propôs a substituição de Z por Z_c no circuito da Figura 3.3, mas a sua grande contribuição foi a forma alternativa de realizar a transição frequência-tempo sem recorrer às transformações inversas para calcular $z_c(t)$ e $a(t)$ nas equações (2.13).

A forma de realizar a transição consiste em expressar $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$ como funções racionais aproximadas da forma:

$$P(s) = G \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot (s + z_3) \dots (s + z_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \dots (s + p_m)} \quad (3.1)$$

Que pode ser expandida em frações parciais:

$$P(s) = k_\infty + \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \dots + \frac{k_m}{(s + p_m)}, \text{ com } n = m, \text{ ou}$$

$$P(s) = \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \dots + \frac{k_m}{(s + p_m)}, \text{ com } n < m \quad (3.2)$$

Como $Z_c(\omega)$ é a resposta de um sistema físico passivo que tende a um valor constante quando $\omega \rightarrow \infty$, o número de zeros deve ser igual ao número de pólos, $n = m$, na equação (3.1). Assim, cada modo de $Z_c(\omega)$ pode ser aproximado por uma conexão série-paralela de blocos RC, como o circuito da Figura 3.4:

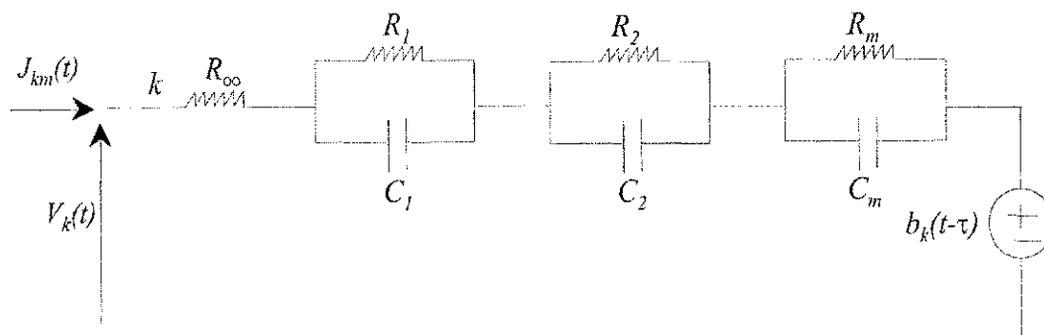


Figura 3.4 – Equivalente RC para simular $Z_c(\omega)$ no domínio do tempo.

A impedância característica aproximada, no plano s , é dada por:

$$Z_{aprox} = R_{\infty} + \frac{1/C_1}{\left(s + \frac{1}{R_1} \cdot C_1\right)} + \frac{1/C_2}{\left(s + \frac{1}{R_2} \cdot C_2\right)} + \dots + \frac{1/C_m}{\left(s + \frac{1}{R_m} \cdot C_m\right)} \quad (3.3)$$

Aplicando um método de integração numérica aos parâmetros da equação (3.3) cada modo da linha resulta em uma resistência constante em série com uma fonte de tensão, Figura 3.5, equivalentemente à linha sem perdas da Figura 3.1.

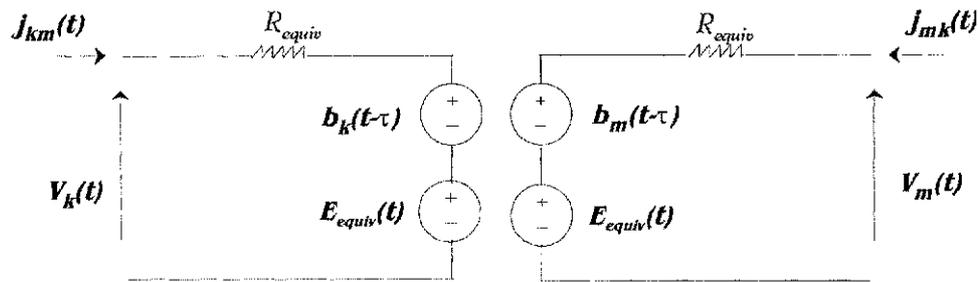


Figura 3.5 – Circuito equivalente para uma linha com parâmetros dependentes da frequência.

A aproximação traz de (2.13):

$$\begin{aligned} v_k(t) - R_{equiv} \cdot j_{km}(t) - e_{equiv}(t) &= [v_m(t) - R_{equiv} \cdot j_{mk}(t) - e_{equiv}(t)] * a(t) \\ v_m(t) - R_{equiv} \cdot j_{mk}(t) - e_{equiv}(t) &= [v_k(t) - R_{equiv} \cdot j_{km}(t) - e_{equiv}(t)] * a(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Das equações (3.4), temos:

$$b_k(t) = f_m(t) * a(t) \quad (3.5)$$

Em que:

$$f_m(t) = v_m(t) - R_{equiv} \cdot j_{mk}(t) - e_{equiv}(t)$$

Logo, para se determinar $b_k(t)$, deve-se calcular $a(t)$. A função racional que aproxima $A(\omega)$ tem a forma:

$$A_{aprox}(s) = P(s) \cdot e^{-s \cdot \tau_{min}}$$

Sendo, τ_{min} , o tempo de propagação da componente de frequência mais elevada.

$A(\omega)$ tende a zero quando $\omega \rightarrow \infty$. Portanto, o número de zeros deve ser menor que o número de pólos, $n < m$ na equação (3.1).

Assim,

$$A_{\text{aprox}}(s) = \left\{ \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \dots + \frac{k_m}{(s + p_m)} \right\} \cdot e^{-s \cdot \tau_{\text{min}}} \quad (3.6)$$

No domínio do tempo, temos:

$$a_{\text{aprox}}(t) = \{k_1 \cdot e^{-p_1(t - \tau_{\text{min}})} + k_2 \cdot e^{-p_2(t - \tau_{\text{min}})} + \dots + k_m \cdot e^{-p_m(t - \tau_{\text{min}})}\} \cdot \mathcal{U}(t - \tau_{\text{min}}) \quad (3.7)$$

E as convoluções da equação (3.5), entre $f(t)$ e $a_{\text{aprox}}(t)$, são então calculadas. Semlyen observou que na resolução de integrais de convolução com $a(t)$ tendo a forma da equação (3.7), o processo pode ser acelerado significativamente através da técnica da convolução recursiva (Apêndice A).

O modelo de Martí tem sido tomado como base para vários modelos de linhas de transmissão até os dias atuais.

O sucesso da modelagem de linhas de transmissão com parâmetros dependentes da frequência depende da precisão das aproximações para $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$. No modelo de Martí, o método usado para fazer o ajuste é o procedimento assintótico de Bode, que tem como desvantagem a grande quantidade de pólos com que $A(\omega)$ é aproximada, sendo assim pouco eficiente.

Visando uma maior eficiência computacional na representação de linhas de transmissão, Fernandes [1996] propôs o uso de um método de ajuste não-linear de baixa ordem baseado no processo de otimização de Levenberg-Marquardt (Apêndice B). O método apresentou, além de maior eficiência, um aumento na precisão do modelo em relação ao ajuste assintótico.

3.2. Modelos no domínio de fases

3.2.1. Considerações gerais

Os modelos no domínio de fases não fazem uso da transformação modal na simulação no domínio do tempo, mas apenas na fase de cálculo de $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$.

Considerando a linha de transmissão simétrica, trifásica e perfeitamente transposta da Figura 3.6.

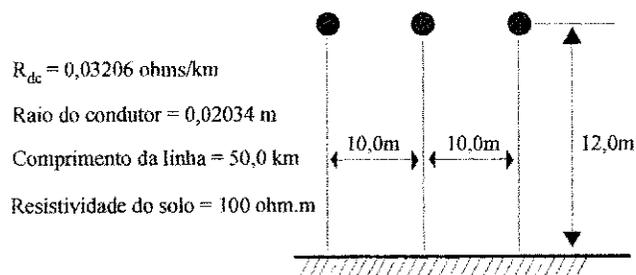


Figura 3.6 – Linha de transmissão simétrica

Simulou-se com o programa PSCAD/EMTDC, a energização por uma fonte senoidal trifásica com o terminal receptor da linha em aberto usando a modelagem no domínio de fases e no domínio modal. A Figura 3.7 mostra a tensão no terminal receptor da linha.

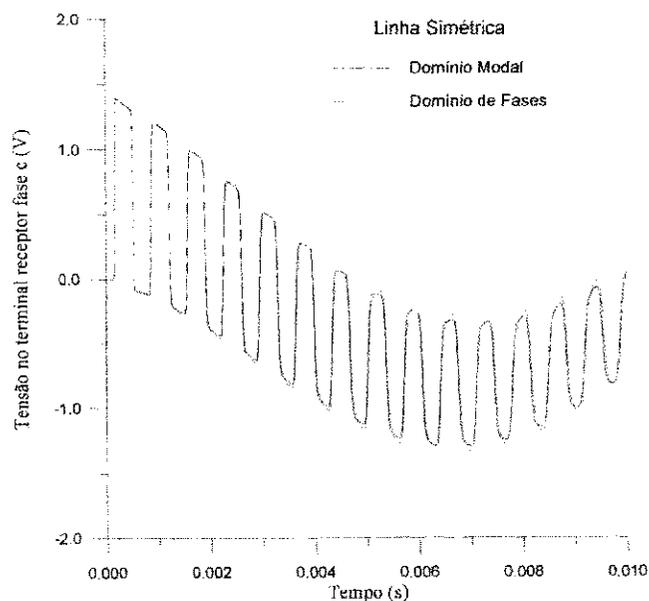


Figura 3.7 – Tensão na fase *c* do terminal receptor da linha simétrica

Verifica-se que para linhas simétricas, os modelos no domínio modal e domínio de fases apresentam resultados equivalentes.

Considerando uma linha de transmissão trifásica próxima a uma linha bifásica-DC, Figura 3.8, temos uma configuração assimétrica.

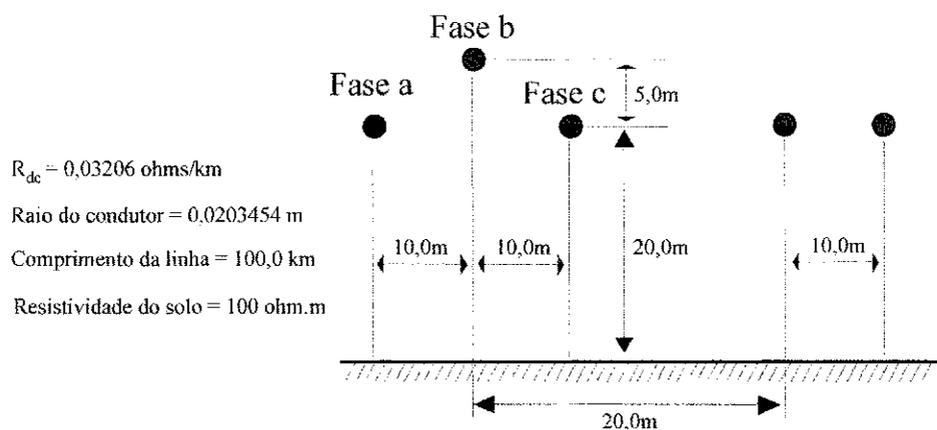


Figura 3.8 – Linha de transmissão assimétrica.

A energização da linha bifásica DC com o terminal receptor em aberto e com os dois terminais da linha trifásica em aberto, foi simulada usando a modelagem no domínio de fases e no domínio modal com o programa PSCAD/EMTDC. A Figura 3.9 mostra a tensão induzida no terminal receptor da linha trifásica.

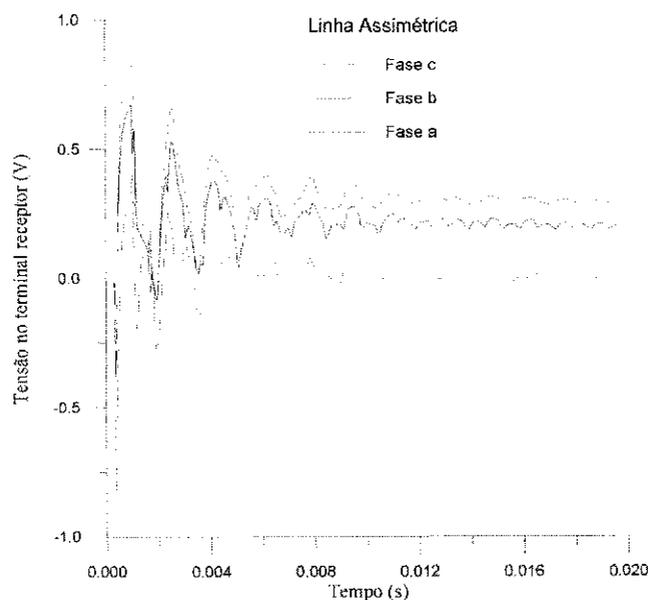


Figura 3.9a - Tensão no terminal receptor da linha assimétrica - Modelagem no Domínio Modal.

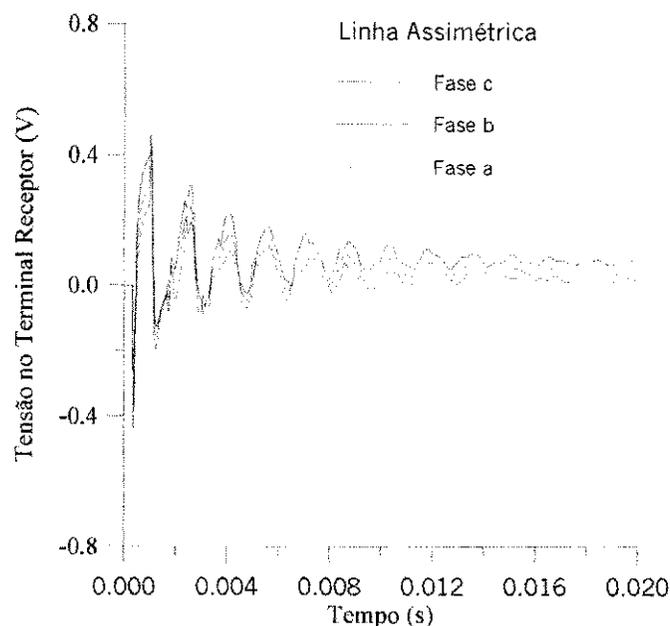


Figura 3.9b - Tensão no terminal receptor da linha assimétrica – Modelagem no Domínio de Fases.

Verifica-se na Figura 3.9 que para linhas assimétricas os modelos no domínio de fases apresentam resultados mais coerentes, podendo-se afirmar que a consideração da matriz de transformação modal como real e constante, torna os modelos no domínio modal imprecisos.

A maioria dos modelos no domínio de fases seguem a metodologia do modelo de Martí, exceto que a transformação modal é usada apenas na fase de cálculos de $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$. Portanto as equações (3.4) no domínio do tempo, se tornam:

$$\begin{aligned}
 [e_k(t)] - [R_{equiv}].[i_{km}(t)] - [e_{equiv}(t)] &= [a(t)] * \{ [e_m(t)] - [R_{equiv}].[i_{mk}(t)] - [e_{equiv}(t)] \} \\
 [e_m(t)] - [R_{equiv}].[i_{mk}(t)] - [e_{equiv}(t)] &= [a(t)] * \{ [e_k(t)] - [R_{equiv}].[i_{km}(t)] - [e_{equiv}(t)] \} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Tem-se $a(t)$ uma matriz e $f(t)$ um vetor, portanto convoluções entre matriz e vetor. Além disso, os tempos de propagação para cada uma das fases são a combinação linear dos tempos de propagação modais. Estes fatores tornam os modelos no domínio de fases computacionalmente ineficientes devido à grande quantidade de integrais de convolução resolvidas a cada passo de tempo.

Sendo n o número de fases da linha e m o número de pólos de cada elemento da matriz $a_{aprox}(t)$ a cada passo de tempo tem-se nm convoluções para modelos no domínio modal ou n^3m convoluções quando a modelagem é feita no domínio de fases.

Gustavsen e Semlyen [1999] propõem um método de ajuste no domínio de fases denominado *vector fitting* (ajuste vetorial). O método realiza o ajuste de funções vetoriais compartilhando o mesmo conjunto de pólos para todos os elementos do vetor. O compartilhamento de pólos possibilita a diminuição do esforço computacional, sendo necessárias n^2m convoluções a cada passo de tempo para modelos no domínio de fases (Apêndice C).

O ajuste vetorial tem se mostrado eficiente na modelagem no domínio de fases, mas o método apresenta problemas como a alocação de pólos instáveis.

Outra desvantagem do ajuste vetorial é que, por ser um método linear, no ajuste de $A(\omega)$ não é possível considerar os tempos de propagação como variáveis do modelo.

3.2.2. Modelo IARMA

O modelo IARMA (*Interpolated Auto-Regressive Moving Average*), proposto por Noda et al [1996; 1997], está disponível no programa ATP. Como é um modelo no domínio de fases, calcula diretamente em coordenadas de fases as tensões e as correntes nos terminais de uma linha de transmissão. Como particularidade deste modelo destaca-se a síntese por funções racionais aproximadas no plano z para a admitância característica e o fator de propagação no domínio de fases [Carvalho Filho, 2000].

Fernandes [2001] constata imprecisões e alocação indevida de pólos na fase de ajuste do modelo IARMA, o que acarreta problemas de estabilidade e oscilações numéricas na simulação no domínio do tempo.

Fernandes [2001] realiza um estudo de casos e observa que há problemas numéricos para todas as aplicações em que foi utilizado o modelo IARMA para extensas faixas de frequência.

3.2.3. Modelo proposto por Morched et al

O modelo proposto por Morched et al [1999] está disponível no programa PSCAD/EMTDC.

O modelo utiliza uma matriz de transformação modal constante para o cálculo de $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$, o que pode ocasionar imprecisões na simulação no domínio do tempo para o caso de linhas assimétricas. A síntese de funções para a impedância característica e para o fator de propagação no domínio de fases é realizada no plano s e utiliza o método de ajuste vetorial [Gustavsen e Semlyen, 1999].

3.2.4. Modelo proposto por Fernandes

Fernandes [2001], propõe um modelo que traz as seguintes contribuições:

- consideração da matriz de transformação modal como complexa e dependente da frequência, o que pode garantir precisão na modelagem de qualquer configuração de linhas de transmissão;
- agrupamento dos tempos de propagação em um tempo de propagação único para o fator de propagação, possibilitando uma redução significativa no número de convoluções no tempo a serem calculadas numericamente.

O modelo utiliza o método de ajuste vetorial [Gustavsen e Semlyen, 1999] para realizar a síntese por funções racionais no plano s para a admitância característica e o fator de propagação.

3.2.5. Modelo Z-line

O modelo Z-line proposto por Castellanos [1997], não segue a metodologia do modelo de Martí e pode ser utilizado para o estudo de efeito corona.

Seguindo a metodologia proposta por Dommel [1969], o modelo considera o fenômeno de propagação de ondas em uma linha ideal com parâmetros constantes, e em separado o efeito das perdas concentrado nas extremidades da linha. Esta consideração o torna totalmente independente da transformação modal e do cálculo de convoluções.

A impedância série tem elementos da forma:

$$Z_{ij} = R_{ij} + j\omega(L_{ij}^{ext} + \Delta L_{ij})$$

em que:

- R_{ij} é a matriz resistência, que contém a resistência interna dos condutores e a resistência relativa ao retorno pelo solo, ambas dependentes da frequência;
- L_{ij}^{ext} é a indutância externa correspondente ao campo magnético fora dos condutores e da terra, ou seja, dependente da geometria da linha e portanto constante;
- ΔL_{ij} é a indutância relativa ao fluxo interno dos condutores e ao retorno pelo solo, sendo assim dependente da frequência.

Portanto,

$$[Z] = [Z^{loss}] + j\omega[L^{ext}]$$

em que:

- $Z_{ij}^{loss} = R_{ij} + j\omega\Delta L_{ij}$, é a parte referente às perdas, dependente da frequência e
- $Z^{ideal} = j\omega L^{ext}$, é a parte referente à propagação de ondas em uma linha ideal, sem perdas e com parâmetros constantes.

Partindo das equações que descrevem o comportamento de linhas de transmissão:

$$\frac{d^2[E]}{dx^2} = [Z].[Y].[E]$$

$$\frac{d^2[I]}{dx^2} = [Y].[Z].[I]$$

Tem-se:

$$[Z].[Y] = \{[Z^{loss}] + j\omega[L^{ext}]\}.j\omega[C] \quad (3.9)$$

E a linha é modelada pelo circuito da Figura 3.10:

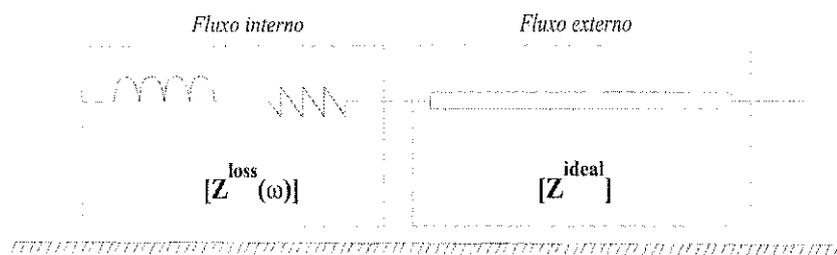


Figura 3.10 – Modelo Z-line para linhas dependentes da frequência.

O desempenho do modelo Z-line na análise de transitórios foi testado. Esta etapa do trabalho será detalhada no capítulo de análise de resultados (Capítulo 5).

Capítulo 4

SÍNTESE DE FUNÇÕES RACIONAIS

Distinguem-se três etapas no desenvolvimento de um modelo computacional de linhas de transmissão com parâmetros dependentes da frequência:

- Cálculo de parâmetros – é a fase em que a impedância característica e o fator de propagação são calculados;
- Síntese por funções racionais – é a fase em que os parâmetros calculados são aproximados por funções racionais;
- Resposta no domínio do tempo – é a fase em que as grandezas tensão e corrente são calculadas a cada passo de tempo Δt .

Fernandes [1996] e Carvalho Filho [2000] implementaram rotinas computacionais do método de ajuste não-linear para a síntese por funções racionais dos parâmetros da linha. Neste capítulo serão apresentadas propostas de melhorias para o método de ajuste não-linear, desenvolvidas durante o trabalho.

4.1. Método de Newton

Considere a expansão em série de Taylor da função $F(a)$ em torno do ponto a_k com incremento p :

$$F(a_k + p) = F(a_k) + p \cdot \frac{\partial F(a_k)}{\partial a_k} + \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \frac{\partial^2 F(a_k)}{\partial a_k^2} + \dots \quad (4.1)$$

Despreza-se os termos de ordem superior a 2.

Para minimizar a função em relação ao incremento p , toma-se a sua derivada em relação a p e iguala-se a expressão resultante a zero. Assim:

$$\frac{\partial^2 F(a_k)}{\partial a_k^2} \cdot p = -\frac{\partial F(a_k)}{\partial a_k} \quad (4.2)$$

Portanto, p é o incremento de a_k (iteração k) na direção de a que minimiza a função, e a expressão abaixo define o algoritmo do método de Newton:

$$a_{k+1} = a_k + p = a_k - \left(\frac{\partial F(a_k)}{\partial a_k} / \frac{\partial^2 F(a_k)}{\partial a_k^2} \right)$$

Se a função é de várias variáveis, definida pelo vetor $\mathbf{a}_k = [a_1, a_2, \dots, a_M]$, tem-se:

$$a_{k+1} = a_k + p = a_k - [G(a_k)]^{-1} \cdot [g(a_k)] \quad (4.3)$$

em que:

$$g(a_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_M} \end{bmatrix}, \text{ é o vetor gradiente da função } F \text{ e}$$

$$G(a_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_M \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial a_M^2} \end{bmatrix}, \text{ é a matriz hessiana da função } F.$$

Da teoria do cálculo, existe um mínimo da função, se e somente se,

$$\frac{\partial^2 F(a_k)}{\partial a_k^2} > 0 \quad (4.4)$$

Portanto, a condição necessária para que a função tenha um mínimo é que a matriz hessiana seja positiva definida.

A convergência do método de Newton não é assegurada uma vez que a matriz hessiana da função objetivo pode ser singular e, mesmo que $G(a)^{-1}$ exista, o processo depende das estimativas iniciais do vetor \mathbf{a}_k para convergir.

4.2. Método de Levenberg-Marquardt

Considere o ajuste de uma função, que depende não-linearmente dos parâmetros a_k , a um conjunto de pontos. Define-se uma função $\chi^2(a)$ que mede a concordância entre a função e o conjunto de pontos, dada por:

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i; a)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (4.5)$$

Ajustar a função aos pontos consiste em minimizar $\chi^2(a)$.

De acordo com o método de Newton, a função $\chi^2(a)$ é expressa como uma série de Taylor desprezando-se os termos de ordem superiores a 2. Em cada iteração precisa-se do vetor gradiente e da matriz hessiana de $\chi^2(a)$. No entanto, o método diverge se a matriz hessiana não for positivo definida. O método de Levenberg-Marquardt é uma modificação do método de Newton para quando o processo iterativo não está na direção do mínimo. O algoritmo funciona da seguinte forma:

se $\chi^2(a_k) < \chi^2(a_{k-1})$, o vetor a_{k+1} é determinado pela equação (4.3), tal qual o método de Newton;

se o processo está divergindo, ou seja, se $\chi^2(a_k) > \chi^2(a_{k-1})$, o vetor a_{k+1} é determinado por

$$a_{k+1} = a_k - c \cdot g(a_k). \quad (4.6)$$

A constante c é função de uma constante adimensional λ definida pelo usuário.

Uma nova matriz a partir da matriz hessiana é definida:

$\alpha'_{jj} = \alpha_{jj} \cdot (1 + \lambda)$, α_{jj} são os elementos da diagonal da matriz hessiana;

$$\alpha'_{jk} = \alpha_{jk}, \quad (j \neq k). \quad (4.7)$$

Aumentando os valores de λ , a nova matriz torna-se diagonal dominante evitando problemas com singularidades. Estas modificações aumentam as chances de convergência do método proposto por Levenberg-Marquardt.

4.3. Método de ajuste implementado

Foram implementadas algumas rotinas para ajuste de funções racionais buscando:

- convergência rápida;
- pouca sensibilidade à estimativa inicial;
- ausência de problemas numéricos;
- ajuste de funções complexas com pólos complexos, e
- ajuste de funções vetoriais com compartilhamento de pólos.

O algoritmo implementado é descrito a seguir.

1. Os n dados de frequência, módulo e fase são alocados da seguinte forma:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}]^T; \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}]^T$$

Em que:

$x_1 \dots x_n \rightarrow n$ dados de frequência;

$x_{n+1} \dots x_{2n} \rightarrow n$ dados de frequência repetidos;

$y_1 \dots y_n \rightarrow n$ dados de módulo e

$y_{n+1} \dots y_{2n} \rightarrow n$ dados de fase.

Este procedimento faz com que a matriz hessiana seja real, apesar do processo de ajuste ser para funções complexas.

2. Divide-se a faixa de frequência, em escala logarítmica, em intervalos de frequência $\Delta\omega$. O número de intervalos é definido pela ordem da função aproximada;
3. Tendo por base a divisão da faixa de frequência, estimam-se os valores iniciais para os parâmetros a_i da função aproximada e calcula-se $\chi^2(a)$, o vetor gradiente e a matriz hessiana da função aproximada;

Escreve-se a função aproximada da seguinte forma:

$$Y_{approx} = \text{Log}[a_1] + \text{Log}[a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s + 1] - \text{Log}[a_4 \cdot s^2 + a_5 \cdot s + 1] + \dots + \text{Log}[a_{2n-2} \cdot s^2 + a_{2n-1} \cdot s + 1] - \text{Log}[a_{2n} \cdot s^2 + a_{2n+1} \cdot s + 1]$$

Em que, $s = j\omega$.

A função escrita desta forma evita a ocorrência de problemas numéricos como *overflow* durante o processo, e permite o ajuste com pólos complexos. Além disso, todos os parâmetros a_i são forçados a serem positivos, garantindo a alocação de pólos estáveis.

4. O sistema de equações de (4.2) é resolvido através do método SVD (*Singular Value Decomposition*) Press et al [1992], e os parâmetros a_i são atualizados em (4.3);
5. Para os novos parâmetros são calculados $\chi^2(a)$, o vetor gradiente e a matriz hessiana. Se $\chi^2(a)$ diminua em relação ao valor anterior, retorna-se para o item 3, prosseguindo normalmente com o processo. Senão, é realizada uma intervenção na matriz hessiana de modo a torná-la positiva definida, retomando-se depois o processo.
6. O processo segue até que se verifique o critério de parada, definido pelo número de iterações e pela tolerância, ambos estabelecidos pelo usuário.

Este método foi implementado e a análise de alguns resultados é apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 5

ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos ao longo da realização do trabalho. Primeiramente são analisados os resultados fornecidos pelo método de ajuste implementado, apresentado no Capítulo 4. Depois, são apresentados os resultados obtidos com o uso do modelo Z-line para simulação de transitórios eletromagnéticos.

5.1. Análise do método de ajuste implementado

O método implementado apresenta como aspectos positivos a sua capacidade de ajustar funções de altas ordens sem apresentar problemas numéricos, e a possibilidade do ajuste com pólos complexos para módulo e fase de uma função.

5.1.1. Resultados do ajuste

CASO 1 – Circuito RLC;

Foi ajustada a resposta em frequência do circuito RLC da Figura 5.1.

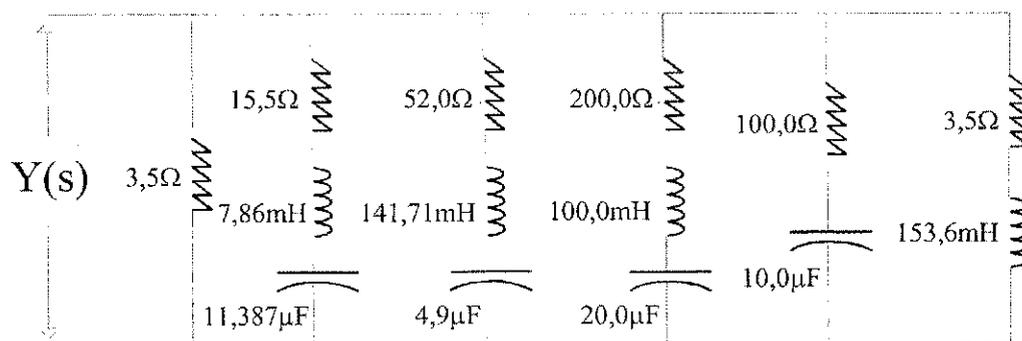


Figura 5.1 – Circuito RLC com oito pólos.

Com os valores acima, tem-se os seguintes pólos para a função de transferência do circuito da Figura 5.1:

$$\begin{aligned} p_1 &= -986,0051 + j3193,8615 & p_5 &= -292,8932 \\ p_2 &= -986,0051 - j3193,8615 & p_6 &= -1707,1068 \\ p_3 &= -183,4733 + j1185,9483 & p_7 &= -1000,0 \\ p_4 &= -183,4733 - j1185,9483 & p_8 &= -22,7865 \end{aligned}$$

Como estimativa inicial do processo de ajuste, os pólos do circuito foram alocados com os valores abaixo:

$$\begin{aligned} p_1 &= -0,5 + j2,5 & p_5 &= -0,5 + j250,0 \\ p_2 &= -0,5 - j2,5 & p_6 &= -0,5 - j250,0 \\ p_3 &= -0,5 + j25,0 & p_7 &= -0,5 + j2500,0 \\ p_4 &= -0,5 - j25,0 & p_8 &= -0,5 - j2500,0 \end{aligned}$$

A Figura 5.2 mostra os resultados do ajuste com as curvas superpostas às geradas analiticamente.

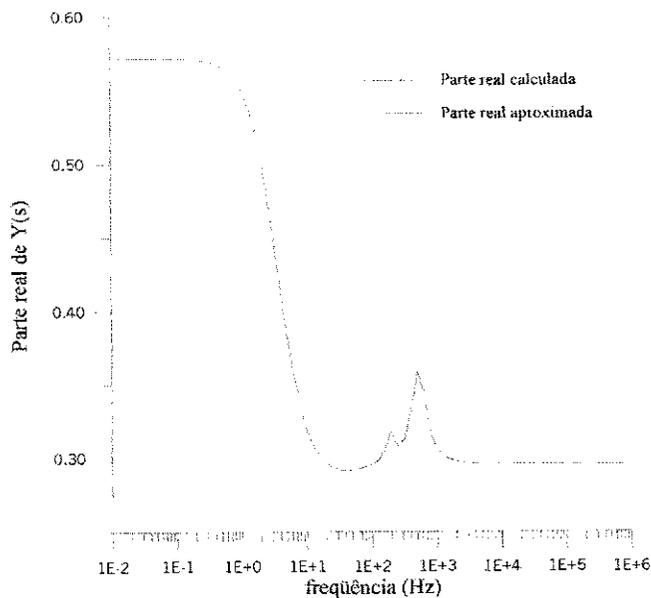


Figura 5.2a – Ajuste para a parte real da resposta em frequência do circuito RLC.

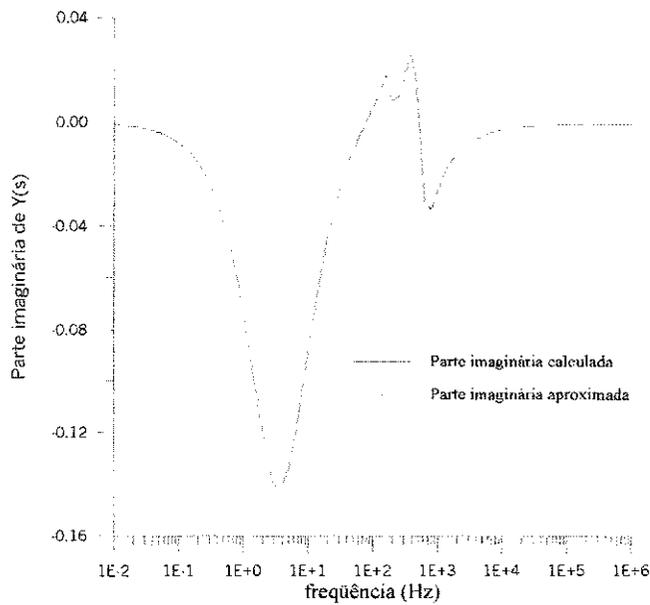


Figura 5.2b - Ajuste para a parte imaginária da resposta em frequência do circuito RLC.

Como aspecto relevante do processo de ajuste, deve-se destacar a obtenção dos mesmos pólos da função de transferência na sua forma analítica.

CASO 2 – Linha de transmissão monofásica com retorno pela terra;

Foram ajustados os parâmetros da linha da Figura 5.3.

- $R_{dc} = 1.5077$ ohms/km
- Raio do condutor = 5,892 mm
- Comprimento da linha = 100,0 km
- Resistividade do solo = 100 ohm.m

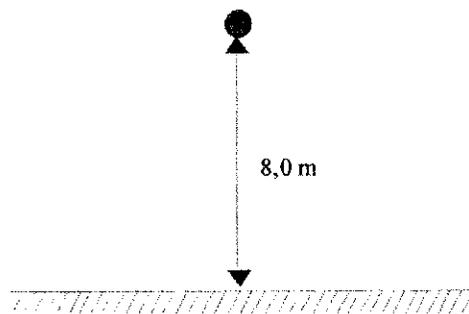


Figura 5.3 – Linha de transmissão monofásica com retorno pela terra.

A Figuras 5.4 e 5.5 mostram os resultados do ajuste para os parâmetros da linha.

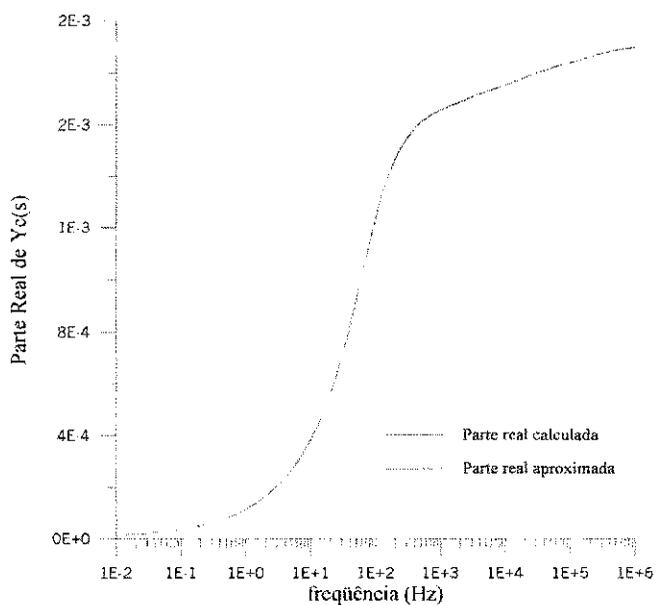


Figura 5.4a – Ajuste para a parte real da admitância característica da linha.

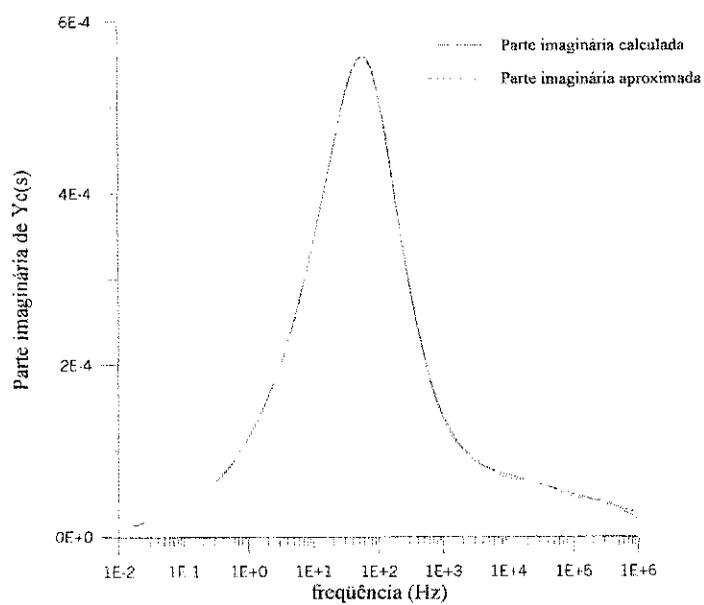


Figura 5.4b - Ajuste para a parte imaginária da admitância característica da linha.

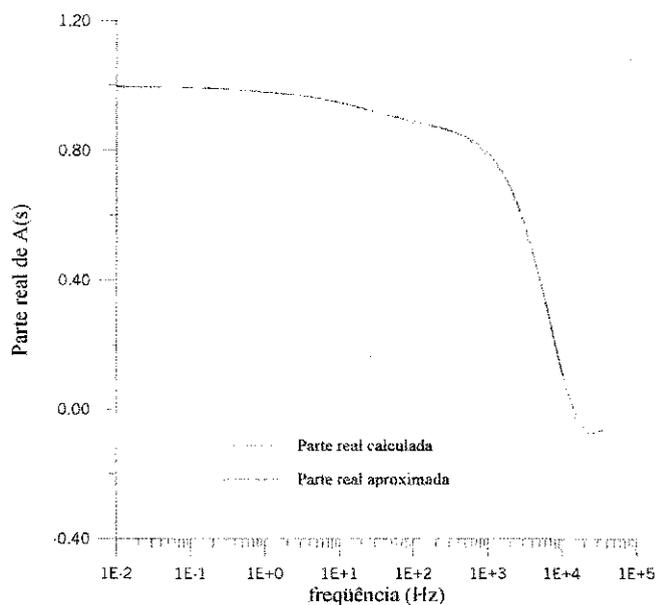


Figura 5.5a – Ajuste para a parte real do fator de propagação da linha.

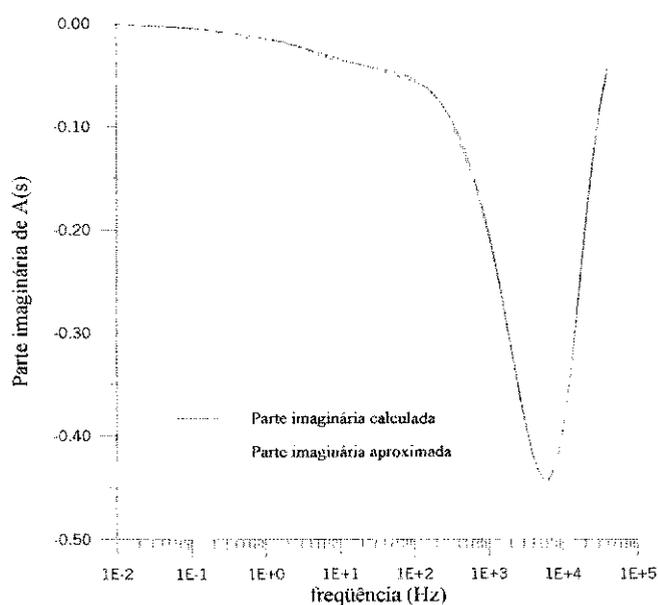


Figura 5.5b – Ajuste para a parte imaginária do fator de propagação da linha.

A Tabela 5.1 compara o método implementado com o ajuste assintótico.

Tabela 5.1 – Eficiência do método de ajuste implementado.

| | Ajuste de $Y_c(s)$ | Ajuste de $A(s)$ |
|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| Ajuste Assintótico | 22 pólos e 22 zeros | 17 pólos e 15 zeros |
| Método implementado | 11 pólos e 11 zeros | 7 pólos e 5 zeros |

5.1.2. Convergência do método implementado

A seguir analisam-se os processos de convergência para os ajustes apresentados no item anterior. A convergência do método de ajuste se dá através da minimização da Função Qui-quadrado (Erro) a cada iteração, como mostram as figuras abaixo:

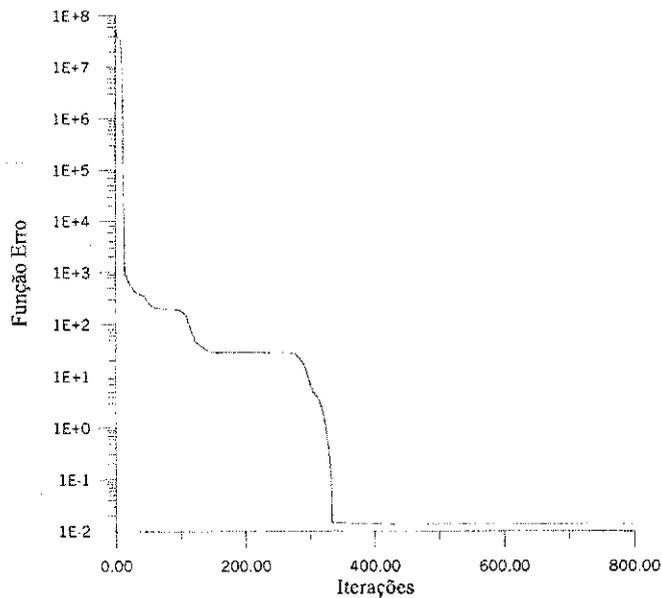


Figura 5.6 – Minimização da Função Erro para o ajuste da resposta em frequência do circuito RLC da

Figura 5.1.

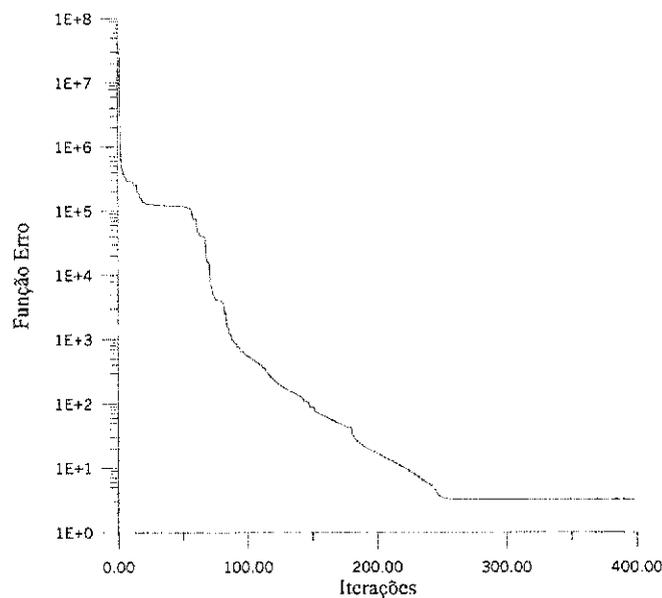


Figura 5.7 – Minimização da Função Erro para o ajuste da admitância característica da linha.

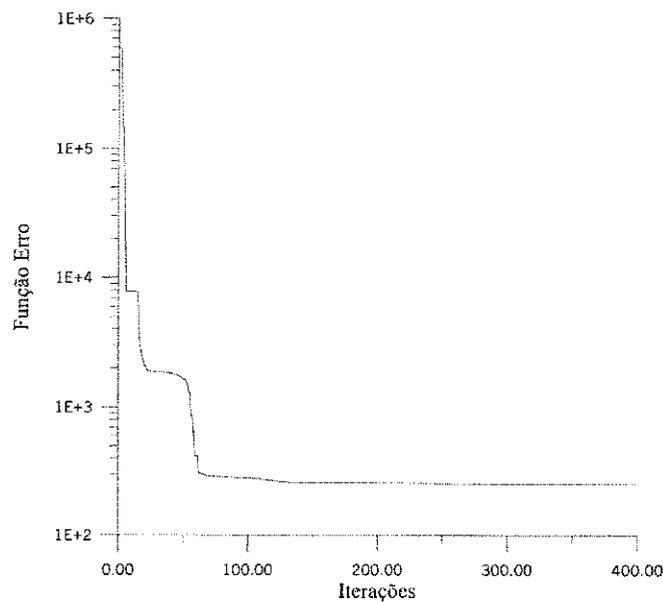


Figura 5.8 – Minimização da Função Erro para o ajuste do fator de propagação da linha.

Pode-se perceber que o método requer muitas iterações para convergir, no entanto apresentou a vantagem de a convergência ter sido alcançada para todos os casos estudados.

5.1.3. Oportunidade de melhorias no método de ajuste

A intervenção no item 4.3 para tornar a matriz hessiana em uma matriz positivo definida, é realizada no processo de ajuste de Levenberg-Marquardt de acordo com as equações (4.6) e (4.7). Neste trabalho propõe-se utilizar o método SVD para decompor a matriz hessiana da seguinte forma:

$$[A] = [U][W][V]^T \quad (5.1)$$

De acordo com o método SVD $[W]$ é uma matriz diagonal dos valores singulares, sendo os valores singulares o módulo da raiz quadrada dos autovalores de $[A]^T \cdot [A]$, e $[U]$ é a matriz de autovetores de $[A]^T \cdot [A]$.

Da definição da matriz hessiana, pode-se observar que esta é simétrica, logo:

$$[A] = [A]^T \text{ e portanto, } [A].[A]^T = [A]^T.[A] = [A]^2$$

Logo $[U]$ é matriz de autovetores de $[A]^2$.

Admita-se que a matriz $[A]$ tem $[\Lambda]$ como matriz de autovalores e $[B]$ como matriz de autovetores

$$[A] = [B][\Lambda][B]^{-1}, \text{ assim:}$$

$$[A]^2 = [B][\Lambda][B]^{-1}.[B][\Lambda][B]^{-1}$$

$$[A]^2 = [B][\Lambda][\Lambda][B]^{-1}$$

$$[A]^2 = [B][\Lambda^2][B]^{-1}$$

Assim a matriz de autovetores de $[A]^2$ é matriz de autovetores de $[A]$, e a matriz de autovalores de $[A]^2$ é o quadrado da matriz de autovalores de $[A]$.

Então $[U]$ é matriz de autovetores de $[A]$ e portanto:

- Se a matriz $[A]$ é positivo definida tem-se que $[W]$ é a matriz de autovalores de $[A]$;
- Se a matriz $[A]$ não é positivo definida, é determinada uma matriz $[A]_{\text{modificada}}$,

$$[A]_{\text{modificada}} = [U][W][U]^{-1} \quad (5.2)$$

Os valores singulares que compõem a matriz $[W]$ são positivos, pois são o módulo da raiz quadrada dos autovalores de $[A]^2$. Como a matriz $[A]_{\text{modificada}}$ adota tais valores singulares como seus autovalores, equação (5.2), é portanto uma matriz positivo definida. Esta intervenção garante que a condição da equação (4.4) seja satisfeita. Por adotar $[W]$ como matriz de autovalores, a matriz $[A]_{\text{modificada}}$ é real e simétrica.

5.1.4. Simulação no domínio do tempo

Para a linha mostrada na Figura 5.3, foram simuladas três situações:

1. Energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto, Figura 5.9;
2. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50 \mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto, Figura 5.10;
3. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado, Figura 5.11.

Cada um dos três casos foi simulado da seguinte forma:

- utilizando a plataforma do MICROTRAN[®] com os pólos e resíduos fornecidos pelo método de ajuste implementado, Figuras 5.4 e 5.5, e
- utilizando o MICROTRAN[®], para a simulação de transitórios em linhas de transmissão a parâmetros dependentes da frequência.

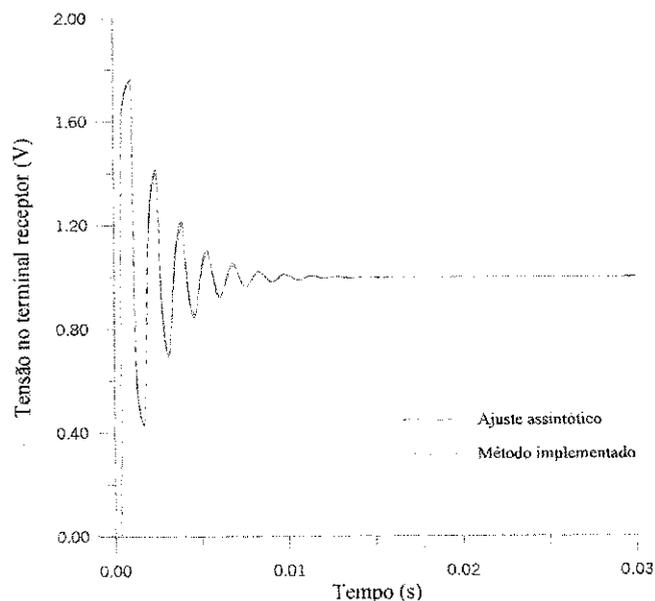


Figura 5.9 – Energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto.

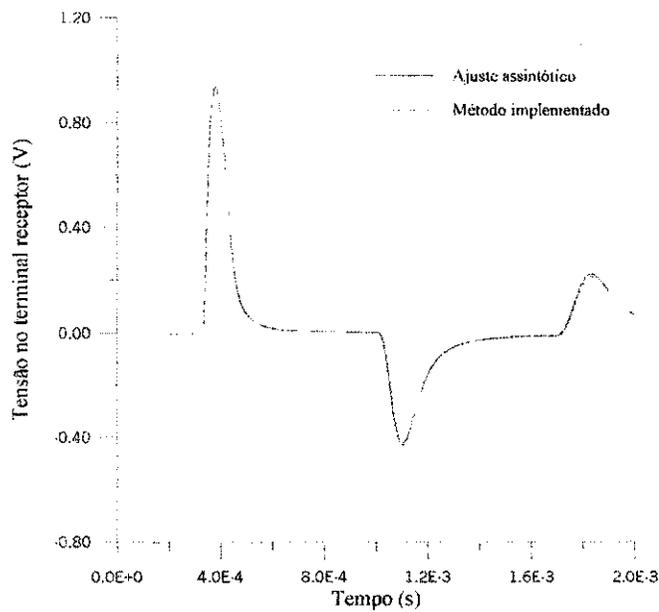


Figura 5.10 – Energização por um impulso de tensão de 1,2/50µs com o terminal receptor em aberto.

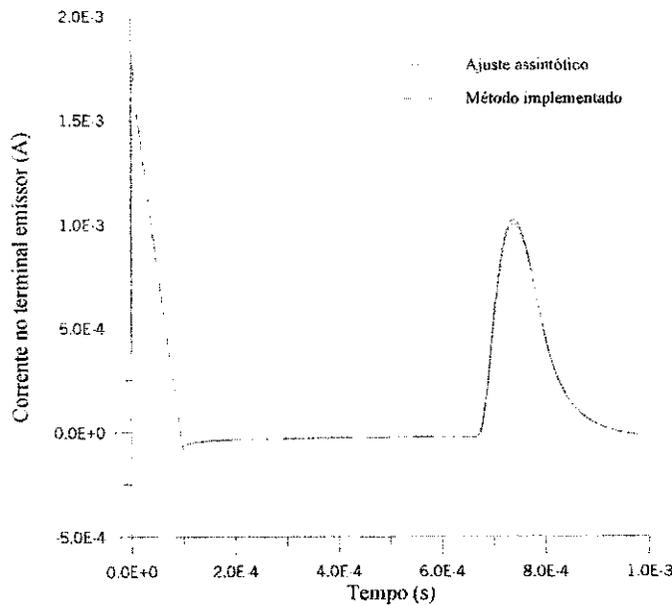


Figura 5.11 – Energização por um impulso de tensão de 1,2/50µs com o terminal receptor aterrado.

Verifica-se nas figuras, que o método de ajuste implementado produz resultados precisos na simulação no domínio do tempo.

A Tabela 5.2 mostra a eficiência da metodologia implementada na simulação no domínio do tempo, em relação à metodologia utilizada pelo MICROTRAN[®].

Tabela 5.2a – Redução do esforço computacional para o caso de energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto.

| | Tempo de processamento para Δt | Tempo total de processamento |
|--|--|------------------------------|
| Ajuste Assintótico (utilizado pelo MICROTRAN) | $1,60 \cdot 10^{-3}$ s | 1,60 s |
| Método implementado | $1,50 \cdot 10^{-3}$ s | 1,50 s |

Tabela 5.2b – Redução do esforço computacional para o caso de energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto.

| | Tempo de processamento para Δt | Tempo total de processamento |
|--|--|------------------------------|
| Ajuste Assintótico (utilizado pelo MICROTRAN) | $9,05 \cdot 10^{-4}$ s | 1,81 s |
| Método implementado | $8,55 \cdot 10^{-4}$ s | 1,71 s |

Tabela 5.2c – Redução do esforço computacional para o caso de energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado.

| | Tempo de processamento para Δt | Tempo total de processamento |
|--|--|------------------------------|
| Ajuste Assintótico (utilizado pelo MICROTRAN) | $1,70 \cdot 10^{-3}$ s | 1,70 s |
| Método implementado | $1,60 \cdot 10^{-3}$ s | 1,60 s |

Para os casos analisados, pode ser observado na Tabela 5.2 que a redução do esforço computacional oscila em torno de 6%, no entanto deve-se considerar:

- a simplicidade da configuração da linha analisada e
- a redução do esforço computacional aumenta à medida que aumenta a complexidade da configuração da linha.

5.2. Análise do modelo Z-line

Em estudos de coordenação de isolamento, muitas vezes se faz necessário representar vãos de linhas próximos a subestações, tais vãos de linhas têm pequenos comprimentos (500 metros para um vão típico de linhas de 230kV). A utilização do modelo Z-line pode simplificar a modelagem de pequenas seções de linhas devido à sua independência da transformação modal e do cálculo de integrais de convolução.

Nesta parte do trabalho faz-se uma análise do desempenho do modelo Z-line quando utilizado na simulação de transitórios eletromagnéticos. A análise será feita a partir de um estudo de casos, mediante comparações com os resultados fornecidos pelo modelo de Martí [1982], utilizado pelo MICROTRAN[®].

5.2.1. Aplicação do Modelo Z-line

Partindo da equação (3.9), que descreve a metodologia utilizada pelo modelo Z-line, foram realizadas as seguintes etapas:

1. A partir da geometria da linha, da configuração das torres e dos condutores, foram calculados para uma faixa de frequência r , l e c , respectivamente resistência, indutância e capacitância da linha;
2. Foram separados os parâmetros Z_{loss} e Z_{ideal} ;
3. O parâmetro Z_{loss} , que representa as perdas, foi ajustado por uma função racional através do método implementado na primeira parte do trabalho;
4. A função racional foi representada por um circuito a parâmetros constantes, e
5. A linha foi representada no MICROTRAN[®], pela conexão série do circuito que representa o efeito das perdas, com a linha ideal sem perdas, que representa o fenômeno de propagação de ondas em linhas de transmissão;

5.2.2. Simulação utilizando o modelo Z-line

Foram simulados três casos de linhas de transmissão:

1. Linha da Figura 5.3 com 300m de comprimento;
2. Linha da Figura 5.3 com 1km de comprimento, e
3. Linha da Figura 5.3.

Para cada caso foram simuladas três ocorrências:

1. Energização por degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto;
2. Energização por impulso de tensão de 1,2/50 μs com o terminal receptor em aberto, e
3. Energização por impulso de tensão de 1,2/50 μs com o terminal receptor aterrado.

As figuras a seguir mostram as simulações, T_s é o tempo de processamento.

1. Linha de 300m de comprimento;

- 1.1 Energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto;

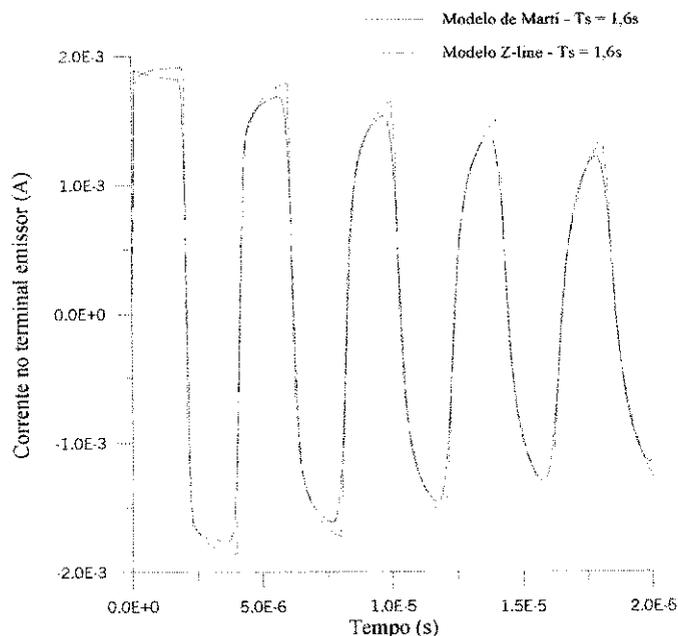


Figura 5.12 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto.

Devido à consideração das perdas como concentradas existem pequenas diferenças nos resultados fornecidos pelo modelo Z-line, Figura 5.12. Para contornar tais diferenças faz-se discretizações no espaço, ou seja, divide-se a linha em seções menores. Se as seções são pequenas o suficiente para que as perdas possam ser consideradas como concentradas, a precisão do modelo deve aumentar, no entanto, o esforço computacional deve aumentar com o número de seções.

A Figura 5.13 mostra o resultado do aumento do número de seções da linha em relação à simulação apresentada na Figura 5.12. Pode ser observado através dos tempos de processamento, o aumento do esforço computacional.

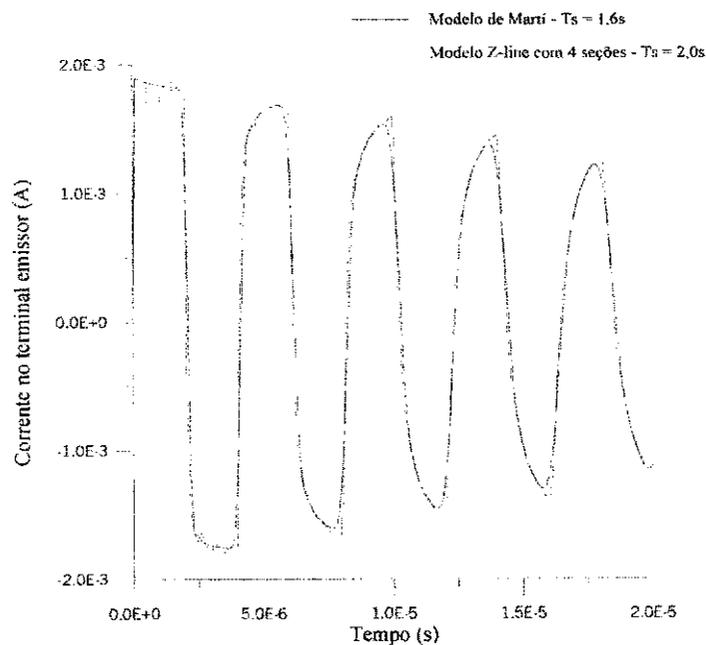


Figura 5.13 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line com 4 seções: energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto.

1.2. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto;

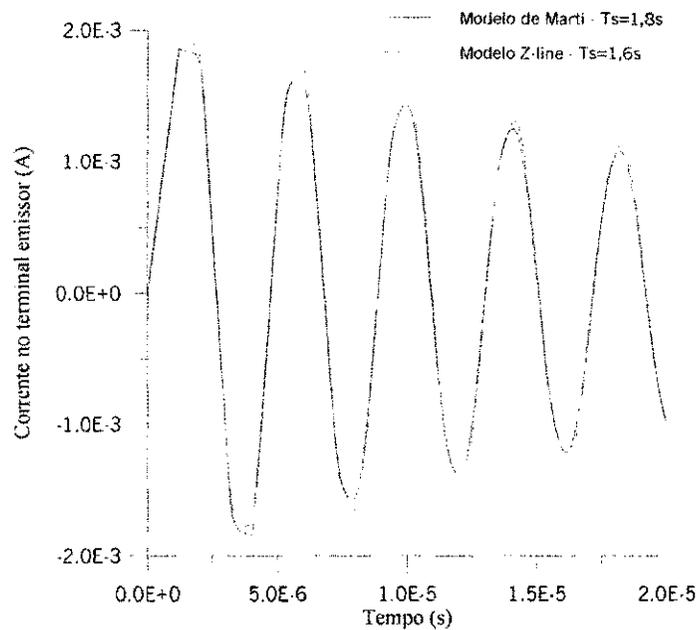


Figura 5.14 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto.

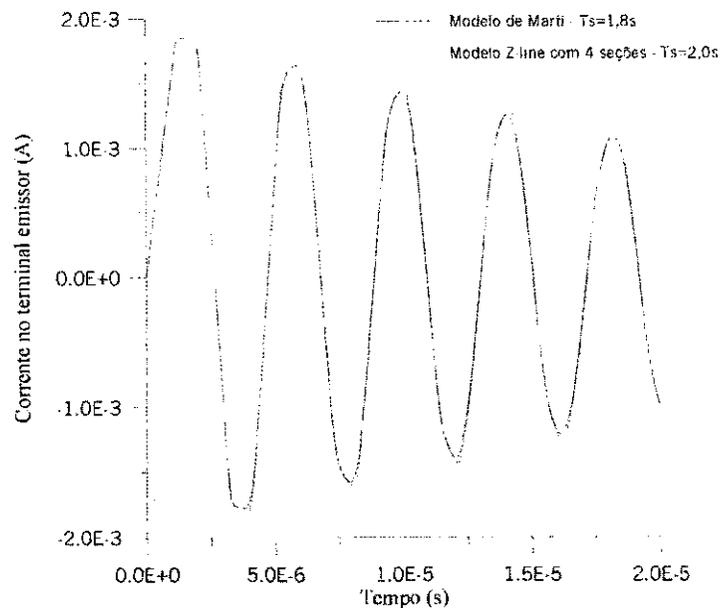


Figura 5.15 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line com 4 seções: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto.

1.3. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado;

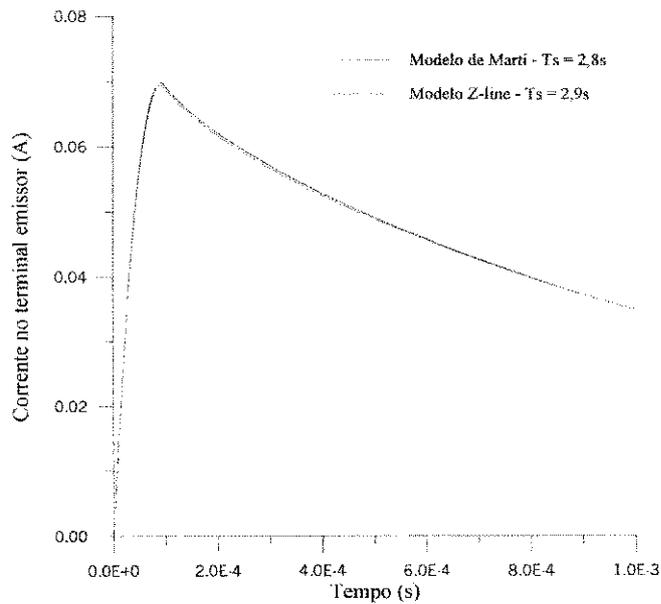


Figura 5.16 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado.

2. Linha de 1km de comprimento;

2.1. Energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto;

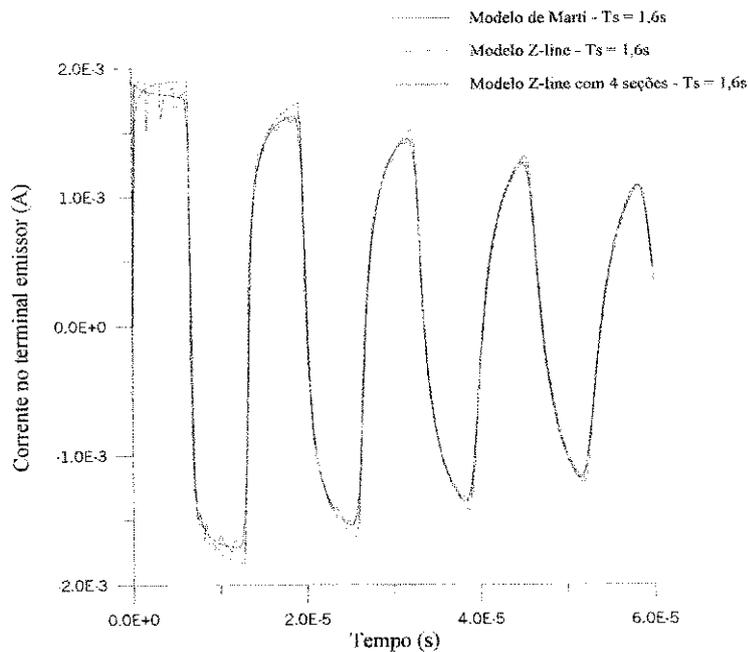


Figura 5.17 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um degrau unitário de tensão com o terminal receptor em aberto.

2.2. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto;

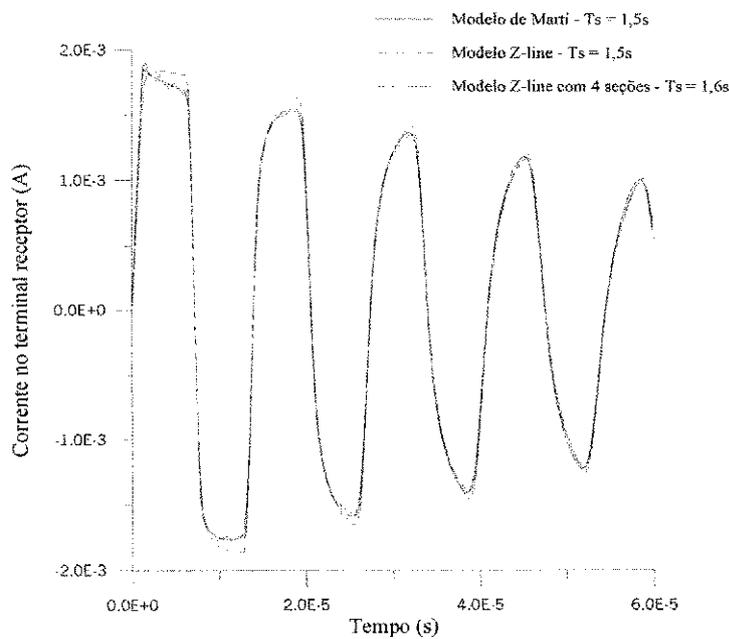


Figura 5.18 - Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto.

2.3. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado;

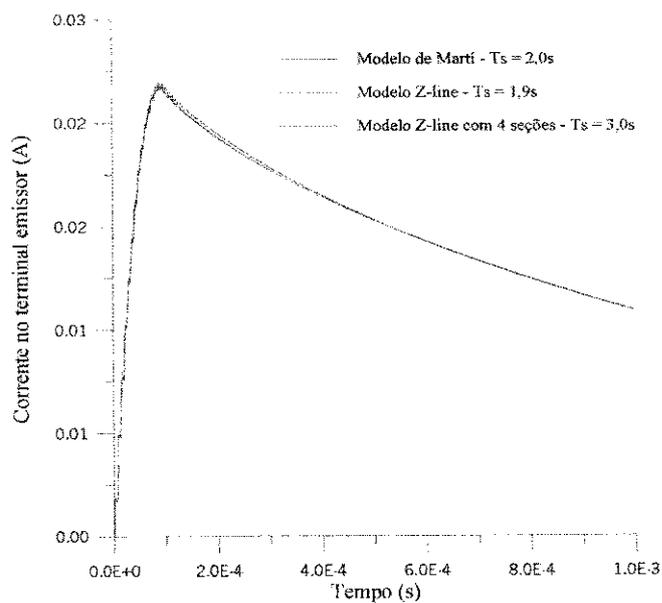


Figura 5.19 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado.

3. Linha de 100km de comprimento;

3.1. Energização por um degrau de tensão unitário com o terminal receptor em aberto;

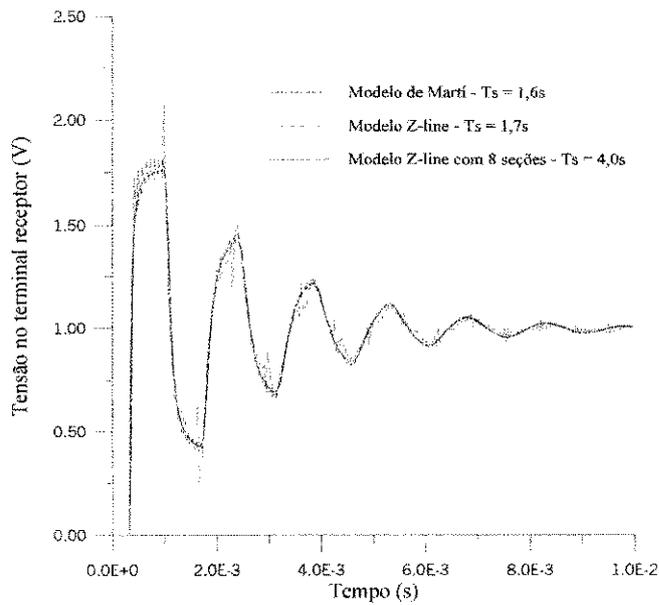


Figura 5.20 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um degrau de tensão unitário com o terminal receptor em aberto.

3.2. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu s$ com o terminal receptor em aberto;

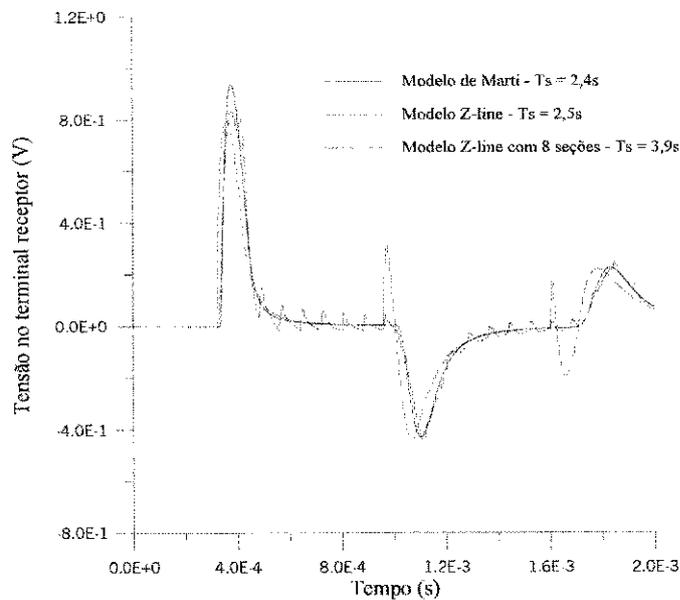


Figura 5.21 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu s$ com o terminal receptor em aberto.

3.3. Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado;

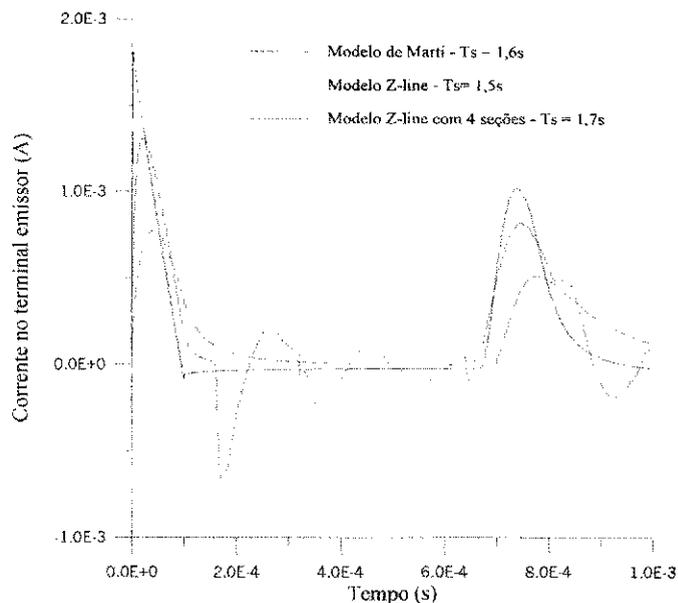


Figura 5.22 – Modelo de Martí vs. Modelo Z-line: energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado.

De acordo com os resultados apresentados nas Figuras pode-se fazer as seguintes afirmações:

- para os casos de linhas longas, o modelo *Z-line* é preciso se a linha for discretizada em um número elevado de seções, o que o torna computacionalmente ineficiente. Ver Figuras 5.20 a 5.22;
- para os casos onde o comprimento da linha é da ordem de 1km ou inferior, poucas seções são necessárias para o modelo obter resultados precisos, assim linhas mais complexas podem ter sua representação simplificada pela aplicação do modelo *Z-line*, sem comprometer a precisão dos resultados.

Estes resultados indicam uma possibilidade da aplicação do modelo *Z-line* para o estudo de coordenação de isolamento, onde pequenas seções das linhas devem ser consideradas.

Capítulo 6

CONCLUSÕES

Neste trabalho, fez-se uma revisão bibliográfica da modelagem de linhas de transmissão para simulação de transitórios eletromagnéticos. Foram implementadas algumas mudanças no método de ajuste não-linear, visando acelerar o processo de convergência quando da aplicação do método à modelagem de linhas. Por último, foi testado o uso do modelo Z-line na análise de transitórios em linhas de transmissão.

As mudanças no método não-linear proporcionaram o ajuste de funções complexas de altas ordens, com pólos complexos. No entanto, a convergência do método para o caso particular de linhas de transmissão, ainda necessita de muitas iterações.

O método foi aplicado a dois casos: um circuito RLC de oito pólos, e uma linha de transmissão monofásica com retorno pela terra. Para o caso do circuito RLC, o método retornou uma função aproximada com os mesmos pólos da função de transferência do circuito. No caso da linha, o ajuste obteve uma eficiência maior do que o ajuste assintótico com erros muito baixos tanto para a admitância característica como para o fator de propagação da linha.

Simulações digitais foram realizadas para três tipos de ocorrências na linha:

- Energização por um degrau de tensão unitário com o terminal receptor em aberto;
- Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor em aberto, e

- Energização por um impulso de tensão de $1,2/50\mu\text{s}$ com o terminal receptor aterrado.

Foi verificado que a representação da linha através do ajuste implementado, forneceu resultados idênticos à metodologia utilizada pelo MICROTRAN[®], mas com redução do esforço computacional.

A outra parte do trabalho foi dedicada ao teste do modelo Z-line para simulação de transitórios em linhas de transmissão.

O modelo foi testado em três linhas: linha monofásica de 300m de comprimento, linha monofásica de 1km de comprimento e linha monofásica de 100km de comprimento. Foram realizadas simulações digitais para as três ocorrências citadas acima.

Para linhas com até 1km de comprimento, o modelo pode simplificar a representação de linhas para estudos de transitórios eletromagnéticos.

Como sugestões para trabalhos futuros, o método de ajuste não-linear ainda pode ser modificado para tornar mais rápido o seu processo de convergência, e ser aplicado à modelagem de linhas polifásicas diretamente no domínio de fases: dividir a faixa de frequência e fazer o ajuste em separado para cada subdivisão, utilizar os resultados como estimativas iniciais do ajuste feito na forma implementada; modificar a matriz hessiana, quando esta não for positivo definida, de modo a obter uma nova matriz positivo definida o mais próximo possível da matriz hessiana original; ajustar funções vetoriais com compartilhamento de pólos incorporando restrições à alocação de pólos e zeros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUDNER, A. *Introduction of Frequency-Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program*, Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 88-97, January, 1970. *Apud* FERNANDES, A. B. *Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 1996.
- CARVALHO FILHO, D. M. *Síntese de Funções Racionais para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos Envolvendo Linhas de Transmissão*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.
- CASTELLANOS, F. *Full Frequency-Dependent Phase-Domain Modelling of Transmission Lines and Corona Phenomena*, Ph.D. Thesis, The University of British Columbia, 1997.
- DOMMEL, H. W. *Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multi-Phase Networks*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, pp. 388-399, April, 1969.
- FERNANDES, A. B. *Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 1996.
- FERNANDES, A. B. *Linhas de Transmissão: Um Modelo no Domínio de Fases Preciso e Eficiente*, Tese de Doutorado, UFPB, Outubro de 2001.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A. *Combined Phase and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 2, April 1998.

- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A. *Simulation of Transmission Lines Using Vector Fitting and Modal Decomposition*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 2, April 1998.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A. *Calculation of Transmission Line Transients Using Polar Decomposition*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 3, July 1998.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A. *Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No. 3, July 1999.
- GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A. *Enforcing Passivity for Admittance Matrices Approximated by Rational Functions*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 16, february 2001.
- MANITOBA HVDC RESEARCH CENTER. *PSCAD/EMTDC Simulation Program – V3.0 Personal Edition*. Winnipeg, Canada, 2000.
- MARTÍ, J. R. *Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulations*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101 No. 1, pp. 147-157, January, 1982.
- MEYER, W. S., DOMMEL, H. W. *Numerical Modelling of Frequency-Dependent Transmission-Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, pp. 1401-1409, September/October, 1974.
- MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION. *Transients Analysis Program Reference Manual*. Vancouver, 1992.

- MORCHED, A., GUSTAVSEN, B., TARTIBI, M. *A Universal Model for Accurate Calculation of Eletromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No. 3, July 1999.
- NODA, T., NAGAOKA, N., AMETANI, A. *Phase Domain Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines by means of ARMA Model*. IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. PWRD-11, No. 1, pp. 401-411, January 1996. *Apud* FERNANDES, A. B. *Linhas de Transmissão: Um Modelo no Domínio de Fases Preciso e Eficiente*, Tese de Doutorado, UFPB, Outubro de 2001.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. and FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing*. Second Edition. New York: Cambridge University Press, 1992.
- SNELSON, J. K., *Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines – Frequency Dependent Parameters*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 85-91, January/February, 1972. *Apud* FERNANDES, A. B. *Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 1996.
- WEDEPOHL, L. M. *Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems*. Proc. IEE, Vol. 110, no. 12, pp. 2200-2212, December, 1963.

Apêndice A

Convolução Recursiva.

Considere a seguinte integral de convolução,

$$s(t) = \int_T^{\infty} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du \quad (A1)$$

a ser calculada para o tempo “ t ”, com $s(t-\Delta t)$ já conhecido do passo de tempo anterior.

Este valor conhecido pode ser expresso como:

$$s(t-\Delta t) = e^{p \cdot \Delta t} \cdot \int_{T+\Delta t}^{\infty} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du \quad (A2)$$

pela simples substituição de uma nova variável $u_{novo} = u + \Delta t$, na equação (A1). Ao mesmo tempo, a integração de (A1) pode ser feita em duas partes.

Os elementos de $[Z] \cdot [Y]$ são calculados a partir da geometria da linha. Se $r \ll h$, ou seja, o raio do condutor é muito menor que sua distância ao solo, tem-se:

$$s(t) = \int_T^{T+\Delta t} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du + \int_{T+\Delta t}^{\infty} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du \quad (A3)$$

Que se torna:

$$s(t) = \int_T^{T+\Delta t} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du + e^{-p \cdot \Delta t} \cdot s(t-\Delta t) \quad (\text{A4})$$

Desta forma, $s(t)$ é determinado recursivamente a partir de $s(t-\Delta t)$ com uma simples integração sobre um simples passo de tempo Δt . Se assumirmos que “ f ” varia linearmente entre $(t-T-\Delta t)$ e $(t-T)$, então

$$s(t) = c_1 \cdot s(t-\Delta t) + c_2 \cdot f(t-T) + c_3 \cdot f(t-T-\Delta t) \quad (\text{A5})$$

Onde:

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-p \cdot \Delta t} \\ c_2 &= \frac{1}{p} - \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \cdot (1 - e^{-p \cdot \Delta t}) \\ c_3 &= -\frac{1}{p} \cdot e^{-p \cdot \Delta t} + \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \cdot (1 - e^{-p \cdot \Delta t}) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Apêndice B

Método de Ajuste Não-Linear.

Suponha que estejamos ajustando um modelo que possui M parâmetros ajustáveis $a_j, j=1, 2, \dots, M$, a N pontos $(x_i; y_i), i=1, \dots, N$. O modelo prediz um relacionamento funcional entre os dados independentes e suas variáveis, na forma,

$$y(x) = y(x; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M)$$

Consideremos um modelo que depende não-linearmente do conjunto de M parâmetros incógnitas a_j .

O problema consiste em determinar a melhor aproximação, dada pelo vetor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_M]$, de forma a minimizar uma dada função erro χ^2 . No entanto, com a dependência não-linear dos a_j , a minimização deve se dar iterativamente.

O modelo a ser ajustado é:

$$y = y(x; \mathbf{a}) \tag{B1}$$

A função erro (PRESS et al, 1992) por sua vez, é dada por:

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i; \mathbf{a})}{\sigma_i} \right]^2 \tag{B2}$$

1 Conceitos Fundamentais

A palavra otimização denota tanto uma minimização como uma maximização de uma dada função.

Um processo de otimização pode ser restringido por algumas condições predeterminadas, como:

$$\text{Minimizar } \{y(\mathbf{a})\}, \text{ sujeito a: } \begin{cases} h_i(\mathbf{a}) = 0, & i = 1, \dots, p \\ g_j(\mathbf{a}) \geq 0, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{B3})$$

Onde, $y(\mathbf{a})$ é a função objetiva que se deseja otimizar, \mathbf{a} é um vetor de ordem n em um espaço linear E_n . A equação (B3) é a expressão matemática de um problema de otimização restrita. Em (B3) se algumas das restrições ou a função objetiva é não-linear, tem-se um problema de otimização não-linear.

Se a função objetiva não se limita por nenhuma condição restritiva, o problema é dito ser de otimização irrestrita.

Para uma função de uma única variável, $y=f(a)$, as condições necessárias e suficientes para que um valor a^* seja um mínimo local, são:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(a^*)}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(a^*)}{\partial a^2} &> 0 \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Para uma função de várias variáveis $F(\mathbf{a})$, expandindo $F(\mathbf{a})$ em série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) &= F(\mathbf{a}) + \delta a_1 \cdot \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial a_1} + \delta a_2 \cdot \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial a_2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \delta a_1^2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_1^2} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \delta a_1 \cdot \delta a_2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_1 \partial a_2} + \frac{1}{2} \cdot \delta a_1 \cdot \delta a_2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_1 \partial a_2} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \delta a_2^2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_2^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Desprezando os termos de ordem superior de (B5), obtemos,

$$F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}) + \delta\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \cdot \delta\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a} \quad (\text{B6})$$

No método de Newton, $\delta\mathbf{a}$ é calculado em cada iteração para que:

$[F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) - F(\mathbf{a})]$ seja mínimo.

Ou seja, $\nabla_{\delta\mathbf{a}} [F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) - F(\mathbf{a})] = 0$. Logo, $G(\mathbf{a}) \delta\mathbf{a} = -g(\mathbf{a})$.

Onde:

$$g(\mathbf{a}) = \nabla F(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_n} \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{a}) = \nabla g(\mathbf{a}) = \nabla^2 F(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_n \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial a_n^2} \end{bmatrix}$$

Os elementos de $g(\mathbf{a})$ são as derivadas de primeira e os elementos de $G(\mathbf{a})$ as derivadas de segunda ordem da função objetiva. A matriz $G(\mathbf{a})$ é denominada de matriz Hessiana da função objetiva.

De (B6), se \mathbf{a}^* é um mínimo local, devemos ter:

$$g(\mathbf{a}^*) = 0 \quad e \quad F(\mathbf{a}^* + \delta\mathbf{a}^*) \geq F(\mathbf{a}^*)$$

Em outras palavras, as condições necessárias e suficientes para minimizar uma função de várias variáveis, são:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}^*) &= 0 \\ \delta\mathbf{a}^T \cdot G(\mathbf{a}^*) \cdot \delta\mathbf{a}^T &\geq 0 \end{aligned} \tag{B7}$$

Desta forma, resolver um problema de otimização irrestrita equivale a determinar a solução de um conjunto de equações não-lineares:

$$\nabla F(\mathbf{a}^*) = 0 \tag{B8}$$

Fazendo uso da condição: $\delta\mathbf{a}^T \cdot G \cdot \delta\mathbf{a}^T \geq 0$ (B9)

A solução de (B8) é um problema de minimização.

Os métodos para resolução de problemas de minimização irrestrita, para uma função de multivariáveis, são classificados em dois grupos: métodos analíticos e métodos diretos. Os métodos analíticos baseiam-se no conhecimento das derivadas da função objetiva. Os métodos diretos baseiam-se apenas na função objetiva, sendo portanto métodos de comparação de funções.

Em um método analítico iterativo, no início da iteração k , as variáveis são denotadas por \mathbf{a}_k . O incremento $\delta\mathbf{a}_k$ e o passo ótimo \mathbf{p}_k , são utilizados para estimar o novo ponto:

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{p}_k \delta\mathbf{a}_k \quad (\text{B10})$$

Diferentes considerações na escolha de $\delta\mathbf{a}_k$, diferenciam os métodos analíticos de otimização (ZHOU, 1993).

2 Método dos Mínimos Quadrados Não-Linear

Se a função a qual se deseja obter uma solução aproximada, tem a forma:

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m f_i^2(\mathbf{a}) = \|f(\mathbf{a})\|^2 = f^T(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) \quad (\text{B11})$$

o gradiente e a matriz Hessiana, da função tem uma estrutura especial,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}) &= \nabla F(\mathbf{a}) = 2 \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) \\ G(\mathbf{a}) &= \nabla g(\mathbf{a}) = 2 \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) + 2 \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

Onde:
$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial a_1} & \frac{\partial f_m}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial a_n} \end{bmatrix}, \text{ é a matriz Jacobiana de ordem}$$

$m \times n$.

$$\mathbf{Q}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{a}) \cdot K_i(\mathbf{a})$$

$$K_i(\mathbf{a}) = \nabla^2 f_i(\mathbf{a})$$

Como $F(\mathbf{a})$ está sendo minimizado no contexto dos mínimos quadrados, as componentes de $\nabla^2 f_i$ são desprezíveis e $G(\mathbf{a})$ pode ser aproximado por:

$$G(\mathbf{a}) \cong 2 \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \quad (\text{B13})$$

Gauss observou que se $f_i(\mathbf{a})$ são funções lineares de \mathbf{a} e $F(\mathbf{a})$ é quadrática, então a matriz Jacobiana é constante ($\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}$). Desta forma, sugeriu aproximar o gradiente no ponto $(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$ da seguinte forma:

$$\nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \cong 2 \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \quad (\text{B14})$$

A forma aproximada de $f(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$ é obtida dos termos lineares da expansão de Taylor,

$$f(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \cong f(\mathbf{a}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a} \quad (\text{B15})$$

Combinando as equações (B14) e (B15), obtemos uma estimativa do gradiente de $F(\mathbf{a})$ em $(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$,

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) &\cong 2 \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot [f(\mathbf{a}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a}] \\ \nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) &\cong 2 \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a}] \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

Uma vez que temos assumido que as m linhas de $\mathbf{J}(\mathbf{a})$ são linearmente independentes, a matriz $\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})$ é não-singular e a matriz inversa $[\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})]^{-1}$ existe. Então, fazendo $\nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) = 0$ em (B16), temos:

$$\delta\mathbf{a} = -[\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})]^{-1} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) \quad (\text{B17})$$

Comparando (B17) com (B10), para $p_k = l$, ao final da iteração k , temos:

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \delta\mathbf{a}_k$$

No método de Newton: $G_k(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a}_k = -g_k(\mathbf{a})$

$$\text{Portanto, de (B12): } [\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + Q(\mathbf{a})] \cdot \delta\mathbf{a}_k = -\mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k \cdot f_k(\mathbf{a}) \quad (\text{B18})$$

Se $\|f_k(\mathbf{a})\|$ tende para zero a medida que \mathbf{a} se aproxima da solução, a matriz \mathbf{Q} também tende para zero. Conseqüentemente, o método dos mínimos quadrados é aplicável quando o termo de primeira ordem $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ de (B18) domina comparado ao termo de segunda ordem $\mathbf{Q}(\mathbf{a})$. Isto não se verifica quando os resíduos da solução são muito altos. Este caso, se constitui em uma restrição ao método. Uma modificação do método de Gauss-Newton, visando superar tal restrição, é o método de Levenberg-Marquardt, descrito a seguir.

2.1 O Método de Levenberg- Marquardt.

No método de Levenberg-Marquardt, a equação (B18) é reescrita da seguinte forma:

$$\left[\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + \lambda_k \cdot \mathbf{I} \right] \cdot \Delta \mathbf{a}_k = - \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k \cdot f_k(\mathbf{a}) \quad (\text{B19})$$

Onde, $\lambda_k \geq 0$ é um escalar e \mathbf{I} a matriz identidade de ordem n .

Para um valor suficientemente alto de λ_k , a matriz $\left[\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + \lambda_k \cdot \mathbf{I} \right]$ é positiva definida e assim $\Delta \mathbf{a}_k$ está na direção descendente. Quando $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^*$, e $\lambda_k \rightarrow 0$, o método produz uma convergência assintótica da mesma forma que o método de Gauss-Newton.

O método de Levenberg-Marquardt, apresenta um ótimo desempenho, em casos práticos, na determinação de modelos não-lineares, fato que o tem tornado um padrão em rotinas de mínimos quadrados [PRESS et al, 1992].

Dado um conjunto de valores iniciais para os parâmetros do ajuste, vetor \mathbf{a} , segue-se o algoritmo descrito abaixo [PRESS et al, 1992]:

- 1) Determina-se $\chi^2(\mathbf{a})$ na equação (E2) e assume-se inicialmente $\lambda = 0,001$;

2) Determina-se a matriz $[\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + \lambda_k \cdot \mathbf{I}]$ e o vetor $[-\mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{a})]$ e resolve-se o sistema sobredeterminado de equações lineares da equação (B19), determinando-se $\delta\mathbf{a}$ para o valor inicial de λ .

3) Calcula-se $\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$, para os valores iniciais dos parâmetros a_j (vetor \mathbf{a}).

4) Se $\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \geq \chi^2(\mathbf{a})$, faz-se $\lambda = 10 \cdot \lambda$ na equação (B19).

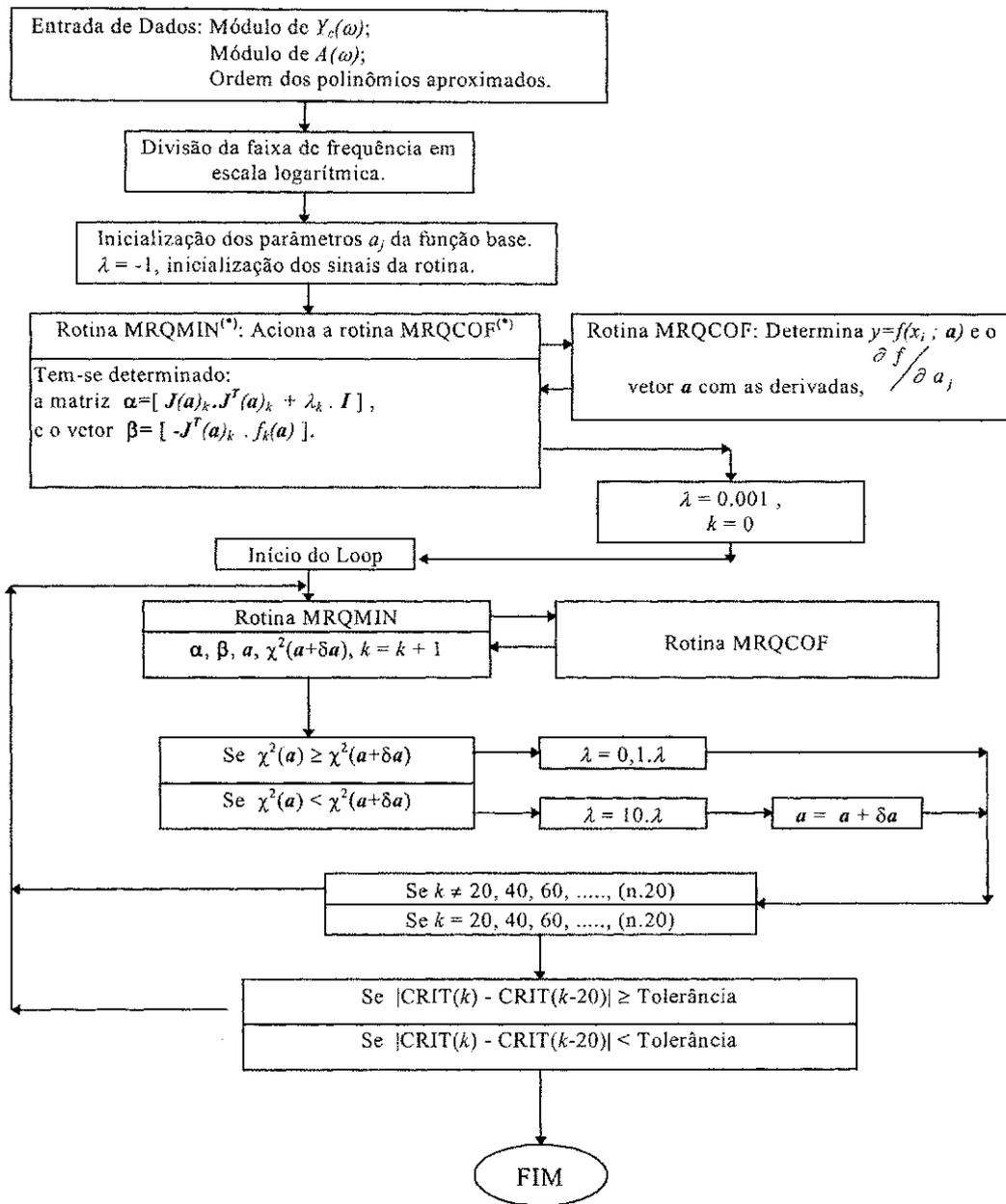
5) Se $\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) < \chi^2(\mathbf{a})$, faz-se $\lambda = 0,1 \cdot \lambda$ na equação (B19), e atualiza-se a solução, $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \delta\mathbf{a}$.

Em qualquer das situações 4 e 5, armazena-se o valor de $\chi^2(\mathbf{a})$ em um vetor $CRIT(k)$, onde k é o número da iteração.

6) A cada 20 iterações, se $|CRIT(k) - CRIT(k-20)| \geq (\text{Tolerância})$, (que corresponde a $|\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) - \chi^2(\mathbf{a})| \geq (\text{Tolerância})$ para $\delta\mathbf{a}$ após 20 iterações), retorna-se ao item 3;

7) Caso $|CRIT(k) - CRIT(k-20)| \geq (\text{Tolerância})$, finaliza-se o processo de ajuste.

O algoritmo implementado é melhor detalhado, na forma de diagrama de blocos, na Figura B1.



(*) As rotinas MRQMIN e MRQCOF foram obtidas da referência PRESS et al, 1992.

Figura B1 - Diagrama de blocos do Método de Ajuste Não-Linear.

Apêndice C

Ajuste Vetorial.

O método de ajuste vetorial aproxima funções escalares ou vetoriais a um conjunto de dados, e no caso de funções vetoriais o ajuste é feito compartilhando o mesmo conjunto de pólos para todos os elementos do vetor.

Escrevendo a função objetivo na forma:

$$f(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - p_k} + d + s.h \quad (C1)$$

Em que os resíduos c_k e os pólos p_k podem ser reais ou pares conjugados complexos, e d e h são reais.

Nota-se que na determinação dos pólos p_k , o problema é não-linear. O método resolve o problema como um problema linear em dois estágios:

1. Estimativas iniciais \tilde{p}_k para os pólos são fornecidas e uma função escalonamento é definida por:

$$\sigma(s) = G \cdot \left(\frac{\prod_{k=1}^{n+1} (s - \tilde{z}_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \tilde{p}_k)} \right) \quad (C2)$$

Escalonando a função objetivo na multiplicação $\sigma(s).f(s)$, temos:

$$\sigma(s).f(s) = G \cdot \left(\frac{\prod_{k=1}^{n+1} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \tilde{p}_k)} \right) \quad (C3)$$

As variáveis G , z_k e \tilde{z}_k , são determinadas através da resolução de um sistema de equações. Assim, pode-se determinar $f(s)$ aproximada de:

$$f(s) = \left(\frac{\sigma(s) \cdot f(s)}{\sigma(s)} \right) = \left(\frac{\prod_{k=1}^{n+1} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \tilde{z}_k)} \right) \quad (C4)$$

Nota-se que os pólos de $f(s)$ são os zeros de $\sigma(s)$, e os pólos estimados inicialmente são cancelados.

2. Com as novas estimativas para os pólos sendo os zeros de $\sigma(s)$ calculados no 1° estágio, são determinadas as variáveis G , z_k e \tilde{z}_k .

Para a obtenção de melhores resultados, os 2 estágios do método podem ser refeitos usando como estimativas iniciais os resultados do estágio anterior, quantas vezes se fizer necessário. Como as novas estimativas para os pólos são os zeros de $\sigma(s)$, calculados sem qualquer restrição, os pólos poderão estar em qualquer parte do plano complexo, podendo portanto serem pólos instáveis.

As grandes vantagens do ajuste vetorial são a menor sensibilidade ao chute inicial devido ao cancelamento dos pólos estimados inicialmente; e o compartilhamento de pólos para todos os elementos do vetor.