



Sistemas com Realimentação por Relé - Análise e Aplicações

Gustavo Henrique Machado de Arruda

Tese de Doutorado submetida à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento da Informação

Péricles Rezende Barros, Ph.D.

Orientador

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Gustavo Henrique Machado de Arruda, Setembro de 2003



A773n Arruda, Gustavo Henrique Machado de
Sistemas com realimentação por rele : análise e
aplicações / Gustavo Henrique Machado de Arruda. - Campina
Grande, 2003.
135 f.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade
Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

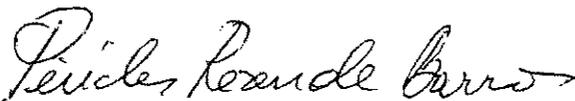
1. Método do Rele 2. Teoria de Controle 3. Controladores
PID 4. Tese I. Barros, Pericles Rezende II. Universidade
Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB) III. Título

CDU 621.318.5(043)

SISTEMAS DE REALIMENTAÇÃO POR RELÉ: ANÁLISE E APLICAÇÕES

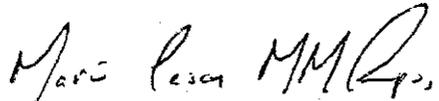
GUSTAVO HENRIQUE MACHADO DE ARRUDA

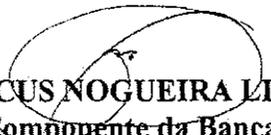
Tese Aprovada em 26.09.2003


PÉRICLES REZENDE BARROS, Ph.D., UFCG
Orientador


PEDRO LUIS DIAS PERES, Dr.Ing., UNICAMP
Componente da Banca


ALEXANDRE SANFELICE BAZANELLA, Dr., UFRGS
Componente da Banca


MARIO CÉSAR MELLO MASSA DE CAMPOS, Dr., CENPES-PETROBRAS
Componente da Banca


ANTONIO MARCUS NOGUEIRA LIMA, Dr., UFCG
Componente da Banca

CURSINO BRANDÃO JACOBINA, Dr.Ing., UFCG
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE – PB
Setembro - 2003

Dedicatória

A meus pais, Edmur e Stela, minhas irmãs, Ana Emília e Ana Catarina, e minha esposa, Anamaria.

“Os vencedores da batalha da vida são homens perseverantes que, sem se julgarem gênios, convenceram-se de que, só pela perseverança e esforço, poderiam chegar ao fim almejado.”

Ralph Valdo Emerson, crítico e poeta americano (1803-1882).

Agradecimentos

Ao Professor Péricles Rezende Barros, pela amizade cultivada desde o início, pelo apoio, orientação e incentivo constantes e diários, e pelas várias sugestões ao longo do trabalho de tese.

Aos examinadores da banca, Prof. Alexandre Bazanella, Prof. Pedro Peres, Prof. Mário Campos, Prof. Cursino Jacobina e Prof. Antônio Marcus, pelas valiosas sugestões e comentários para elaboração da versão final deste documento.

Ao Prof. Ubirajara Meira, por me acompanhar desde o início da minha jornada científica, sempre me ajudando a entender melhor o mundo que nos cerca.

Aos amigos do LIEC, Reginaldo, Valnyr, Márcia, Netto, Ademar e LEIAM, Talvanes, Alberto, Maurício, Antônio e Clayton, pela amizade e companheirismo. Em particular, ao amigo Alexandre Cunha pelo grande apoio dado no fim desta caminhada, e ao amigo Gláucio Brandão pelo grande apoio dado no início de uma nova caminhada.

Aos funcionários do DEE, em particular, Luis Carlos, Danilo, Emanuel, Eleonora, Rosilda, Socorro, Lucimar e Pedro, pelos serviços prestados. Um agradecimento especial à Secretária da COPELE, Ângela de Lourdes, pelo trabalho exemplar, pela dedicação à coordenação do curso e pela amizade cultivada ao longo de cinco anos de pós-graduação.

À CAPES, que proporcionou o suporte financeiro para viabilizar a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço especialmente à minha esposa, Anamaria Duarte, aos meus pais, Edmur Roque e Maria Stela e às minhas irmãs Ana Emília e Ana Catarina, pelo afeto constante, pelo apoio incondicional e pela compreensão infinita das minhas ausências. Obrigado por partilharem ao meu lado de todos os momentos, bons e difíceis, sempre com a certeza de que o melhor ainda está por vir.

Resumo

Neste trabalho apresenta-se a análise de um estimador de resposta em frequência baseado na utilização de relés, e suas aplicações na identificação de processos e sintonia de controladores PID. O experimento de identificação é baseado na obtenção de um ciclo limite na frequência em que a magnitude da função de transferência estudada é igual a um certo parâmetro, denominado r . Inicialmente, apresenta-se uma análise no domínio do tempo de sistemas realimentados por relé baseada em mapas de Poincaré, de onde são obtidas condições necessárias e suficientes para existência e estabilidade de ciclos limite simétricos e unimodais. Os resultados são aplicados ao experimento de identificação com relé, de modo a obter expressões para avaliação da existência e estabilidade de ciclos limite simétricos e unimodais. Mostra-se, por exemplos de simulação, que o experimento pode exibir uma variedade de fenômenos para diferentes valores do parâmetro r . Por exemplo, variando-se o parâmetro r , mesmo dentro de uma faixa segura de valores, a solução do sistema pode passar de um ciclo limite estável para um comportamento caótico.

Um novo procedimento para obter um modelo de primeira ordem com atraso de transporte usando testes com relé é apresentado na seqüência. Baseado na análise no domínio do tempo de sistemas com atraso realimentados por relé, expressões que relacionam o atraso de transporte e a constante de tempo para o ciclo limite em tais modelos são obtidas. A vantagem do procedimento é apresentar um modelo que se ajusta melhor na faixa de frequência em que a fase do processo se encontra entre -90° e -180° , quando há dinâmica não modelada. Os resultados são então aplicados na sintonia de controladores PI e PID por métodos bem conhecidos na literatura, para avaliar a qualidade dos modelos obtidos.

Finalmente, os experimentos com relé são aplicados na sintonia iterativa de controladores PID, baseada em especificações de margens de ganho e de fase. Experimentos com relé são utilizados para avaliar as margens de estabilidade em cada passo, e a operação é executada sem remover o controlador. Outra vantagem deste procedimento é o fato de que a resposta em frequência do processo não é necessária na solução das equações de projeto. Fazendo algumas hipóteses sobre a resposta em frequência do processo, mostra-se que a malha fechada permanece estável para cada controlador calculado durante as iterações. Se tais hipóteses não podem ser feitas, apresenta-se um novo experimento baseado no relé para detectar um comportamento instável da malha fechada, antes de modificar os parâmetros do controlador atual. Um exemplo de simulação é utilizado para ilustrar o procedimento, bem como avaliar suas propriedades. O procedimento é então aplicado na sintonia de um controlador PI para controle de Nitrato em uma planta simulada de tratamento de águas residuárias por lodo ativado, de um controlador PI em um experimento de caracterização de filmes finos de dióxido de vanádio, e de um controlador PID para controle de temperatura em um sistema trocador de calor em escala de laboratório. Os resultados apontam que com poucas iterações um controlador razoável é obtido, tal que as especificações de robustez são satisfeitas.

Abstract

This thesis deals with the analysis of a relay based frequency response estimator and its applications to process identification and PID controllers tuning. The identification experiment is based on obtaining a limit cycle at the frequency where the magnitude of the evaluated transfer function is equal to a parameter value, named τ . Initially, a time domain analysis of relay feedback systems based on Poincaré maps is presented, and necessary and sufficient conditions for the existence and stability of symmetrical unimodal limit cycles are obtained. The results are applied to the relay feedback experiment, in order to obtain closed form expressions for evaluating the existence and stability of symmetrical unimodal limit cycles. It is shown by simulation examples that the experiment can produce a great variety of phenomena for different settings of the parameter τ . For instance, varying the parameter τ , even in its safe range, the system can undergo from a stable limit cycle to chaotic behavior.

A new procedure for the estimation of a first order plus dead-time model using relay tests is presented in the sequel. Based on the time domain analysis of relay feedback systems with time delay, exact expressions for the limit cycle, which relates the dead-time and time constant in such models are obtained. The advantage of the procedure is that the model fits better in the frequency range where the process phase angle is between -90° and -180° , in the case of unmodelled dynamics. The results are then used for PI and PID popular tuning techniques, in order to evaluate the quality of the obtained models.

Finally, the relay experiments are applied to iterative PID controllers tuning based on gain and phase margins specifications. Relay experiments are used to evaluate the stability margins in each step, and the operation is performed in closed loop, without removing the controller. Another advantage of this procedure is the fact that the process frequency response need not be known for the design steps. With some assumptions on the process frequency response characteristics, it is shown that the closed loop remains stable for each controller calculated during the iterations. If no assumptions are made on the process model, a new relay based experiment is presented to detect closed loop instability behavior before modifying the controller parameters. A simulation example is used to illustrate the procedure, and evaluate its properties. The procedure is then applied to tune a PI controller in Nitrate control of a simulated activated sludge treatment plant, a PI controller tuning in a vanadium-dioxide thin film characterization experiment, and a PID controller in temperature control of a heat exchanger laboratory scale process. The results point out that with a few iterations a reasonable controller is obtained, such that the robustness specifications are achieved.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivo do Trabalho	1
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.3	Organização do Texto	8
2	Experimentos de Identificação com o Relé	10
2.1	Introdução	10
2.2	Notação	11
2.3	Estruturas Básicas de Realimentação	11
2.4	Solução Geral	13
2.5	Estabilidade do Experimento e Amplitude dos Sinais	15
2.6	Melhoria da Estimativa	17
2.7	Experimentos de Estimação	19
2.7.1	Estimação do Processo	19
2.7.2	Estimação da Função de Malha	20
2.7.3	Estimação da Função de Sensibilidade	24
2.8	Conclusões	29
3	Estabilidade e Existência de Ciclos Limite em Sistemas com Relé	30
3.1	Introdução	30
3.2	Mapas de Poincaré	31
3.3	Sistemas de Realimentação com Relé	32
3.3.1	Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas	33
3.3.2	Sistemas com Atraso de Transporte	34
3.4	Representação em Espaço de Estados	36
3.5	Análise de Existência e Estabilidade	39
3.5.1	Solução Periódica	39
3.5.2	Existência de Órbitas Periódicas	39
3.5.3	Estabilidade das Órbitas Periódicas	40
3.6	Exemplos e Discussão	40
3.6.1	Função de Transferência de Segunda Ordem	40

3.6.2	Função de Transferência com Pólos Complexos	42
3.7	Conclusões	44
4	Identificação de Modelos de Primeira Ordem com Atraso	46
4.1	Introdução	46
4.2	Propriedades de Sistemas de Primeira Ordem com Atraso	47
4.3	Modelagem de Sistemas de Primeira Ordem com Atraso	49
4.3.1	Aplicando um Degrau em Malha Aberta	49
4.3.2	Medindo o Pico do Sinal de Saída	50
4.3.3	Usando Mínimos Quadrados	50
4.4	Exemplos de Simulação	51
4.4.1	Processos de Segunda Ordem com Atraso	51
4.4.2	Processos de Fase Não-Mínima	52
4.4.3	Efeitos do Ruído	53
4.5	Conclusões	54
5	Sintonia de Controladores PID	57
5.1	Introdução	57
5.2	Técnicas de Sintonia do Controlador	58
5.2.1	Resposta em Frequência	58
5.2.2	Métodos de Otimização	59
5.2.3	Princípio do Modelo Interno	64
5.3	Resultados de Simulação	65
5.3.1	Processos de Segunda Ordem com Atraso	66
5.3.2	Processos de Fase Não-Mínima	70
5.3.3	Efeitos do Ruído	74
5.4	Conclusões	79
6	Sintonia Iterativa de Controladores PI e PID	80
6.1	Introdução	80
6.2	Convenções e Definições	81
6.3	Estimação Usando o Relé	81
6.3.1	Estimação da Margem de Ganho	82
6.3.2	Estimação da Margem de Fase	82
6.4	Sintonia do Controlador	83
6.4.1	Problema de Projeto	83
6.4.2	Controlador PI	83
6.4.3	Controlador PID	87
6.5	Análise de Estabilidade	91
6.6	Garantindo Estabilidade da Malha Fechada	95

6.7	Resultados de Simulação e Experimentais	104
6.7.1	Exemplo de Simulação	104
6.8	Sistema de Tratamento de Efluentes	105
6.9	Sistema de Controle de Temperatura	108
6.10	Sistema de Caracterização de VO_2	113
6.11	Conclusões	115
7	Considerações Finais e Conclusões	117
7.1	Introdução	117
7.2	Contribuições do Trabalho	117
7.3	Conclusões e Propostas de Trabalhos Futuros	120
A	Demonstrações de Teoremas	122
A.1	Teorema 3.3	122
A.2	Teorema 3.4	123
A.3	Teorema 3.6	124
A.4	Teorema 3.7	127
	Bibliografia	129

Lista de Símbolos e Abreviaturas

Funções de Transferência

$C(s)$	Função de transferência do controlador
$D(s)$	Denominador de $H(s)$
$F(s)$	Função de transferência para experimentos com relé
$G(s)$	Função de transferência do processo
$\hat{G}(s)$	Modelo do processo
$H(s)$	Função de transferência a ser estimada
$L(s)$	Função de Malha
$\hat{L}(e^{j\omega})$	Estimativa de frequência da Função de Malha
$N(s)$	Numerador de $H(s)$
$S(s)$	Função de Sensibilidade
$\hat{S}(e^{j\omega})$	Estimativa de frequência da Função de Sensibilidade
$T(s)$	Função de Sensibilidade Complementar

Sinais

e	Erro entre y_r e y (entrada do controlador)
y	Saída de $H(s)$ ou $G(s)$
y_i	Entrada da função $F(s)$, saída do relé
y_o	Saída da função $F(s)$
y_r	Referência da malha fechada
y'_r	Referência dos experimentos com relé
y_s	Entrada do relé, saída do integrador
y_{ent}	Entrada da saturação
u	Saída do controlador, entrada de $H(s)$ ou $G(s)$
\bar{u}	Entrada da representação de $H(s)$
u'	Saída do atraso de transporte
x	Variável de estado da representação de $G(s)$
\bar{x}	Variável de estado da representação de $H(s)$
x_{n+1}	Estado do integrador

Símbolos

$\ \cdot\ _\infty, \mathcal{H}_\infty$	Norma infinita de uma função de transferência
A_l	Magnitude do l -ésimo harmônico
a	Amplitude de oscilação
a_{cl}	Amplitude de oscilação em malha fechada
A_m	Especificação da margem de ganho
A, B, C, D	Matrizes da representação em espaço de estados de $G(s)$
A_h, B_h, C_h, D_h	Matrizes da representação em espaço de estados de $H(s)$
A_f, B_f, C_f, D_f	Matrizes da representação em espaço de estados de $F(s)$
d	Amplitude do relé
Δy_{\max}	Varição máxima admitida para o sinal y
$\Delta\theta$	Atraso de transporte equivalente
f	Função para determinação de ciclos limite
ϕ	Fase do ponto de frequência
ϕ_m	Especificação da margem de fase
g	Mapa de Poincaré
γ	Órbita periódica
H	Hiperplano no espaço de estados
h^*	Meio período do ciclo limite
h_1	Meio período do ciclo limite com o método do relé
h_2	Meio período do ciclo limite com o método do relé e integrador
k	Ganho proporcional
K	Ganho direto na realimentação com relé
K_p	Ganho proporcional do controlador
K_c^H	Ganho crítico de $H(j\omega)$
K_c^G	Ganho crítico de $G(j\omega)$
K_c^T	Ganho crítico de $T(j\omega)$
K_c^{-T}	Ganho crítico de $-T(j\omega)$
K_c^L	Ganho crítico de $L(j\omega)$
l, m, n	Números inteiros
N	Número de amostras
$N(a)$	Função descritiva do elemento não-linear
N_o	Período total do sinal amostrado
r	Parâmetro do experimento com relé
R^-, R^+	Regiões do espaço de estados
ρ	Magnitude do ponto de frequência

s	Variável complexa
S	Seção local do hiperplano H
\mathcal{S}	Superfície de chaveamento
t	Variável tempo
T_d	Constante de Tempo derivativo
T_i	Constante de Tempo integral
T_a	Período de amostragem
τ	Tempo de interseção com \mathcal{S}
θ	Atraso de transporte
U	Vizinhança no ponto p
U_N	Periodograma do sinal amostrado $u(nT_s)$
w	Número real
ω_{ci}	Frequência de oscilação para um ângulo de fase de -90°
ω	Variável de frequência
ω_c	Frequência crítica
ω_c^H	Frequência crítica de $H(j\omega)$
ω_g	Frequência cujo ganho é unitário
ω_o	Frequência de oscilação
W, \bar{W}, W_θ	Matriz Jacobiana do mapa de Poincaré
w, \bar{w}, w_θ	Vetor em R^n
x_o	Condição inicial
x^*, \bar{x}^*	Condição inicial da solução periódica
Y_{oN}, Y_{iN}	DFT's de N pontos dos sinais y_o e y_i
Y_1	Amplitude do primeiro harmônico do sinal $y(t)$
Y_{i1}	Amplitude do primeiro harmônico do sinal $y_i(t)$

Acrônimos

DFT	Transformada discreta de Fourier
MF	Margem de fase
MG	Margem de ganho
PI	Controlador proporcional-integral
PID	Controlador proporcional-integral-derivativo

Lista de Tabelas

4.1	Medições de período para o exemplo 4.4.1	51
4.2	Resultados de modelagem para os exemplos 4.4.1, 4.4.2 e 4.4.3	52
4.3	Medições de período para o exemplo 4.4.2	53
4.4	Medições de período para o exemplo 4.4.3	54
5.1	Parâmetros do controlador para o método da resposta em frequência de Ziegler e Nichols.	59
5.2	Resultados de projeto do controlador PI para o processo de 2ª ordem com atraso.	66
5.3	Resultados de projeto do controlador PID para o processo de 2ª ordem com atraso.	67
5.4	Resultados de projeto do controlador PI para o processo de fase não-mínima.	71
5.5	Resultados de projeto do controlador PID para o processo de fase não-mínima.	71
5.6	Resultados de projeto do controlador PI para o processo com ruído de medição.	74
5.7	Resultados de projeto do controlador PID para o processo com ruído de medição.	75
6.1	Resultados obtidos para o exemplo de simulação.	105
6.2	Resultados de simulação para diferentes especificações de margens de ganho e de fase.	108
6.3	Margens de ganho e de fase e parâmetros do controlador a cada iteração para o sistema trocador de calor.	111
6.4	Margens de ganho e de fase e parâmetros do controlador a cada iteração para o experimento de caracterização de VO_2	115

Lista de Figuras

1.1	Não linearidade estática do tipo relé.	1
1.2	Método do relé.	3
2.1	Sistema em malha fechada.	11
2.2	Sistema linear realimentado por relé.	12
2.3	Sistema linear realimentado por relé com integrador.	13
2.4	Método do relé para estimação da resposta em frequência.	14
2.5	Magnitude de $F(j\omega_o)$ em função do ângulo de fase de $H(j\omega_o)$, com $ H(j\omega_o) = r$	18
2.6	Experimento com relé para estimação da Função de Malha.	21
2.7	Realimentação com relé apresentada em Schei (1994).	22
2.8	Estabilidade do experimento de estimação da Função de Malha.	22
2.9	Experimento com relé para estimação da Função de Sensibilidade.	25
2.10	Estabilidade do experimento de estimação da Função de Sensibilidade.	26
2.11	Experimento com relé e integrador duplo.	27
3.1	Ilustração do uso do Mapa de Poincaré para determinação da estabilidade de uma órbita periódica γ	31
3.2	Sistema linear com realimentação por relé.	32
3.3	Realimentação com relé e atraso de transporte.	34
3.4	Solução para o exemplo 3.5, com $h^* > \theta$	35
3.5	Solução para o exemplo 3.5, com $h^* < \theta$	36
3.6	Representação em espaço de estados do experimento de identificação.	38
3.7	Diagrama de Bode de magnitude: $ H(j\omega) $ (-), r versus ω_o (o) e r_{DFT} versus ω_o (x).	41
3.8	Diagrama de Bode de magnitude: $ H(j\omega) $ (-), r versus ω_o (o), r_{DFT} versus ω_o (*) e ponto crítico (x).	42
3.9	Ciclo limite estável. No gráfico superior, $y(t)$ (-) e $y_s(t)$ (---).	43
3.10	Ciclo limite instável.	44
3.11	Saída do sistema para $r = 2.65$	45
3.12	Visualização do comportamento caótico para $r = 2.65$ no espaço de estados.	45

4.1	Diagrama de Bode para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (·), o pico da oscilação (—) e a estimativa mínimos-quadrados (·—).	53
4.2	Diagrama de Nyquist para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (·), o pico da oscilação (—) e a estimativa mínimos-quadrados (·—).	54
4.3	Resposta ao degrau para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (·), o pico da oscilação (—) e a estimativa mínimos-quadrados (·—).	55
4.4	Ciclo limite para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (·), o pico da oscilação (—) e a estimativa mínimos-quadrados (·—).	56
4.5	Saídas do processo para o exemplo 4.4.3.	56
5.1	Magnitude da Função de Malha dada pela Eq. (5.20).	63
5.2	Estrutura IMC.	64
5.3	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 1ª linha da Tabela 5.2: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	67
5.4	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 4ª linha da Tabela 5.2: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	68
5.5	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 9ª linha da Tabela 5.2: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	68
5.6	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 1ª linha da Tabela 5.3: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	69
5.7	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 4ª linha da Tabela 5.3: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	69
5.8	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 9ª linha da Tabela 5.3: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	70
5.9	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 3ª linha da Tabela 5.4: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	72
5.10	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 6ª linha da Tabela 5.4: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	72
5.11	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 7ª linha da Tabela 5.4: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	73
5.12	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 3ª linha da Tabela 5.5: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	73
5.13	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 6ª linha da Tabela 5.5: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (·—) Ziegler-Nichols.	75

5.14	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 1ª linha da Tabela 5.6: (-) ótimo-simétrico, (--) IMC e (-·) Ziegler-Nichols.	76
5.15	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 5ª linha da Tabela 5.6: (-) ótimo-simétrico, (--) IMC e (-·) Ziegler-Nichols.	76
5.16	Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 9ª linha da Tabela 5.6: (-) ótimo-simétrico, (--) IMC e (-·) Ziegler-Nichols.	77
5.17	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 1ª linha da Tabela 5.7: (-) ótimo-simétrico, (--) IMC e (-·) Ziegler-Nichols.	77
5.18	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 4ª linha da Tabela 5.7: (-) ótimo-simétrico, (--) IMC e (-·) Ziegler-Nichols.	78
5.19	Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 8ª linha da Tabela 5.7: (-) ótimo-simétrico, (--) IMC e (-·) Ziegler-Nichols.	78
6.1	Método do relé na malha fechada.	82
6.2	Variação da frequência crítica e da frequência do cruzamento do ganho com o α para o exemplo 6.3.	88
6.3	Margens de ganho e de fase de $L^{(0)}(s) = C^{(0)}(s)G(s)$ (--) e $L^{(1)}(s) = C^{(1)}(s)G(s)$ (-).	94
6.4	Diagrama de Nyquist de $L^{(0)}(s) = C^{(0)}(s)G(s)$ (-) e $L^{(1)}(s) = C^{(1)}(s)G(s)$ (- -).	95
6.5	Diagrama de Bode de $\Delta C(s) = C^{(1)}(s)/C^{(0)}(s)$	96
6.6	Sistema em realimentação para o Teorema do Ganho Pequeno.	96
6.7	Diagrama em blocos da atualização do controlador, $\Delta C(s) = 1/(1 - \Delta(s))$	97
6.8	Saída do processo durante o experimento da fig. 2.9, para o exemplo 6.15.	100
6.9	Saída do processo durante o experimento da fig. 2.9, para o exemplo 6.16.	101
6.10	Experimento com relé para determinação da estabilidade da malha fechada.	102
6.11	Saída do processo durante o experimento da fig. 6.10, para o exemplo 6.20, com $\phi_m = 40^\circ$	103
6.12	Saída do processo durante o experimento da fig. 6.10, para o exemplo 6.20, com $\phi_m = 45^\circ$	104
6.13	Saída da malha fechada para referência em degrau usando o controlador inicial (·), a solução exata (--) e a solução obtida na quarta iteração (-).	106
6.14	Diagramas de Bode da Função de Malha para o controlador inicial (·), para a solução exata (--) e para a solução obtida na quarta iteração (-).	107
6.15	Configuração do processo de lodo ativado.	108
6.16	Resposta ao degrau: controlador inicial (·), controlador A (--) e controlador B (-).	109
6.17	Resposta ao degrau: controlador inicial (·), controlador C (--) e controlador D (-).	109
6.18	Nível de nitrato e referência do controlador durante a 3ª iteração no caso "B".	110
6.19	Ilustração do modelo reduzido do trocador de calor.	111
6.20	Experimentos com relé nas iterações 1 e $\frac{1}{2}$ para o sistema trocador de calor.	112

6.21	Resposta ao degrau para controlador inicial no sistema trocador de calor: (superior) sinal de saída (—) e sinal de referência (\cdot), e (inferior) sinal de controle.	112
6.22	Resposta ao degrau para controlador obtido no sistema trocador de calor: (superior) sinal de saída (—) e sinal de referência (\cdot), e (inferior) sinal de controle.	113
6.23	Montagem experimental do sistema de aquisição de dados.	114
6.24	Caracterização de VO_2 : (gráfico superior) resposta ao degrau para o controlador inicial (- -) e final (-), e sinal de referência, y_r (\cdot). (gráfico inferior) sinais de controle correspondentes para o controlador inicial (- -) e final (-).	116

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo do Trabalho

O relé, considerado neste trabalho, é uma não-linearidade estática com relação entrada-saída definida pelo gráfico mostrado na fig. 1.1(a). Sua representação em um diagrama em blocos é indicada na fig. 1.1(b). Na área de sistemas de controle, a utilização do relé para obtenção de uma estimativa do ponto crítico¹ de um processo é denominada *método do relé*. O método foi introduzido em Åström e Hägglund 1984, e tem sido comumente usado como ferramenta de estimação para projeto de controladores. Na forma original, estimativas da margem de ganho² e da frequência crítica³ de um processo são extraídas sob condições de operação bem definidas.

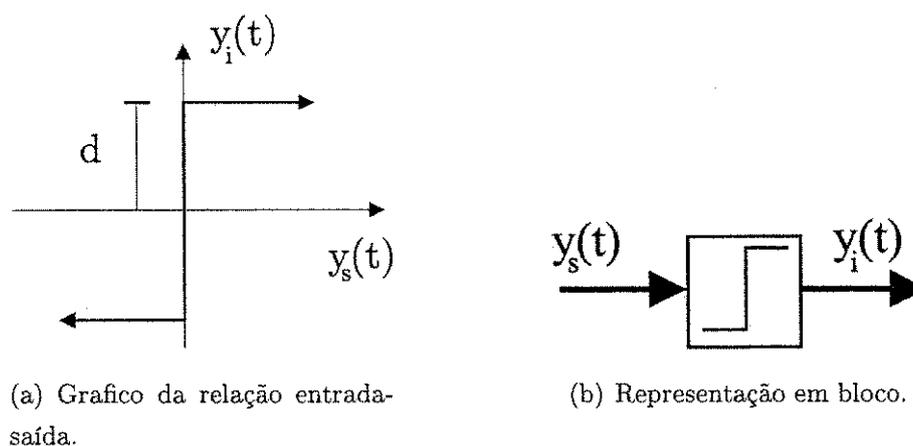


Figura 1.1: Não linearidade estática do tipo relé.

O método do relé teve papel fundamental no desenvolvimento de equipamentos de controle autoconfiguráveis. Sua principal aplicação se encontra na sintonia automática de controladores do tipo *proporcional-integral-derivativo* (PID), e na inicialização de controladores adaptativos. Tal característica se torna essencial na manutenção ou instalação de um processo industrial complexo,

¹Ponto da resposta em frequência do processo correspondente a um ângulo de fase de -180° .

²Ver definição na pág. 81.

³Frequência correspondente ao ponto crítico.

onde centenas de controladores deste tipo são empregados. Pesquisas mostram que, em mais de 90% dos laços de controle na indústria, são utilizados controladores PID, e a grande maioria utiliza apenas as partes proporcional e integral (PI) [Åström e Hägglund 1995, Yu 1999]. Apesar do constante avanço da tecnologia e do conhecimento científico na área de controle, o atual panorama ainda aponta um futuro de longevidade para tais equipamentos (ver Åström e Hägglund 2001). Tal fato pode ser constatado pelo volume de pesquisa científica dedicada ao assunto. De fato, a sintonia do controlador é tema principal em centenas de artigos, várias dissertações de mestrado e teses de doutorado, e alguns livros, como Åström e Hägglund 1995, Yu 1999 e Tan et al. 1999. Na grande maioria destas publicações, percebe-se a integração do dispositivo com um experimento para auto-sintonia geralmente baseado na utilização do relé, daí a importância do método (ver, por exemplo, Voda e Landau 1995, Åström e Hägglund 1984, Dumont, Martin-Sanchez e Zervos 1989, Gawthrop e Nomikos 1990, Hägglund e Tengvall 1995, Hang e Sin 1991, Hang, Åström e Ho 1993, Leva, Maffezzoni e Scattolini 1994, Leva 1994, Li, Eskinat e Luyben 1991, Schei 1992).

Após a concepção inicial do método do relé para sintonia automática de controladores PID, baseada na estimação do ponto crítico do processo [Åström e Hägglund 1984], inúmeras modificações foram sugeridas no sentido de aprimorar o procedimento de estimação. Neste sentido, seguiram-se várias tendências, dentre as quais destacam-se a melhoria da precisão do método, a estimação de múltiplos pontos da resposta em frequência, e a operação na malha externa de controle. Percebeu-se então no relé uma ferramenta confiável e robusta, com enorme potencial para realização de experimentos práticos em processos industriais.

Recentemente, certa atenção tem sido voltada para o estudo das soluções de um sistema linear com realimentação por relé. Resultados sobre existência de oscilações do tipo ciclo limite foram obtidos, bem como estabilidade e unicidade de tais soluções. Além disso, foram observados diferentes tipos de comportamento das soluções de tais sistemas não lineares, como modos deslizantes, chaveamentos rápidos e soluções caóticas.

Em Arruda 2000, apresentou-se uma estrutura de realimentação com relé para estimação de diferentes pontos da resposta em frequência, além do ponto crítico como no método original. O experimento apresentado naquele trabalho permite estimar a frequência na qual a magnitude de uma função de transferência possui um determinado valor. Aplicações do método na estimação de pontos da Função de Malha e da Função de Sensibilidade de um sistema de controle foram realizadas com sucesso, e a informação obtida foi usada na sintonia de controladores PID pelo método ótimo-simétrico.

Em linhas gerais, pretende-se neste trabalho:

- Revisar o experimento de identificação introduzido em Arruda 2000, apresentando novos resultados acerca da estabilidade da estrutura e amplitude dos sinais durante o experimento;
- investigar o comportamento das soluções apresentadas pelo experimento, obtendo equações que informem a existência e estabilidade de ciclos limite simétricos unimodais;

- apresentar aplicações práticas do experimento e do método do relé na estimação de resposta em frequência e estimação de modelos simples de processos;
- apresentar aplicações do experimento na sintonia de controladores PID.

1.2 Revisão Bibliográfica

A utilização do relé na sintonia automática de controladores PID teve início com o trabalho de Åström e Hägglund 1984. Para sintonizar o controlador, a ação de controle era substituída pelo relé (controle LIGA-DESLIGA), conforme ilustrado na fig. 1.2. Nesta configuração, para a maioria dos processos industriais, um ciclo limite se desenvolve na saída do processo. Usando um argumento de funções descritivas, mostra-se que a oscilação ocorre aproximadamente na frequência crítica, com amplitude inversamente proporcional à margem de ganho do processo, no ponto de operação escolhido. A partir desta informação, os parâmetros do controlador eram calculados segundo um método denominado Ziegler-Nichols modificado, que é baseado no método da resposta em frequência de Ziegler e Nichols 1942, de modo que o ponto crítico da Função de Malha⁴ obtida é deslocado para uma posição escolhida no plano complexo.

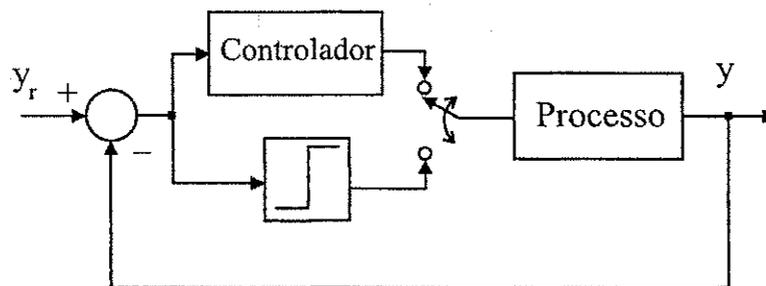


Figura 1.2: Método do relé.

A grande vantagem deste procedimento é a simplicidade na auto-sintonia do controlador. Além disso, escolhendo-se apropriadamente o valor da amplitude do relé, era possível executar a auto-sintonia sem afetar significativamente a variável de saída do processo. A grande desvantagem do método estava no erro da estimação do ponto crítico, devido à hipótese de se assumir apenas o efeito do primeiro harmônico dos sinais, na análise do método das funções descritivas [Khalil 1996]. Em alguns casos, podia-se chegar a cerca de 20% de erro na estimação (ver estudo em Li, Eskinat e Luyben 1991). Além disso, a informação de apenas um ponto da resposta em frequência do processo não era suficiente, em certos casos, para um projeto adequado do controlador [Åström e Hägglund 1995, Leva 1993]. Neste sentido, modificações do método do relé têm sido sugeridas ao longo dos últimos anos, e, com isso, novas aplicações são cada vez mais frequentes. Várias extensões têm sido propostas em relação ao método original, e as principais tendências encontradas são apresentadas em seguida.

⁴Ver definição na pág. 11.

Estimação de diferentes pontos

Uma das tendências em relação ao método original é a procura de estruturas que permitam a obtenção de ciclos limites em outros pontos, além do ponto crítico. Por exemplo, a adição de um integrador no caminho direto do sistema apresentado na fig. 1.2 leva o sistema a um ciclo limite no ponto em que a fase do processo é aproximadamente -90° (ver em Åström e Hägglund 1995). Se o relé é posicionado na malha externa de um sistema de controle e um ciclo limite se desenvolve, a frequência de oscilação é aproximadamente a frequência crítica da Função de Malha [Åström e Hägglund 1995]. De maneira similar, adicionando-se a este último um integrador na saída ou entrada do relé, mostra-se que o sistema oscila em uma frequência localizada entre a frequência crítica e a frequência do ganho unitário da Função de Malha [Schei 1992]. Em Schei 1994, é apresentada uma outra estrutura que leva o sistema em malha fechada a oscilar na frequência em que o ganho da Função de Malha é unitário. Em Arruda 2000, é apresentada uma generalização desta estrutura, tal que um ciclo limite é obtido na frequência em que a magnitude de uma determinada função de transferência é aproximadamente igual a um parâmetro especificado. Variando-se este parâmetro, é possível obter estimativas da resposta em frequência da função de transferência em diferentes pontos. O resultado é aplicado na estimação de pontos de frequência de funções de transferência importantes em um sistema de controle, como a Função de Malha e a Função de Sensibilidade. Seguindo esta filosofia, em Tan et al. 1999 são introduzidos experimentos com relé que permitem obter um ponto da resposta em frequência do processo que possui ângulo de fase arbitrário. O método envolve o ajuste iterativo de uma função de mapeamento aplicada no sinal de saída do relé, até que a oscilação ocorra na fase especificada, o que aumenta o tempo total de identificação.

Estimação de Múltiplos Pontos

Como a informação de um único ponto pode não ser suficiente para o projeto adequado do controlador, tem-se buscado obter mais informação a partir de um único experimento. Em Wang, Hang e Bi 1999, a transformada discreta de Fourier é aplicada no transitório inicial do experimento com relé, de modo a obter uma estimativa de M pontos da resposta em frequência, espaçados segundo intervalos de frequência escolhidos a partir da frequência crítica ($\omega_c = (M - 1) \Delta\omega$). Tal procedimento requer, no entanto, baixos níveis de relação sinal-ruído para apresentar resultados satisfatórios nas componentes de frequência mais elevadas. Um procedimento alternativo é apresentado em Wang, Desarmo e Cluett 1999, baseado no modelo do filtro de amostragem em frequência (*filter sampling frequency (FSF) model*). O experimento é realizado alternando a realimentação com o relé com uma realimentação com o relé e um integrador. Tal procedimento leva a um sinal com bom conteúdo harmônico na faixa de frequências em que a fase do processo varia de -90° a -180° , que é uma faixa importante para estimação e controle.

Melhoria da precisão

Tentativas de obter estimativas mais precisas do ganho crítico do processo utilizando realimentação por relé são encontradas em várias referências [Leva 1994, Sung, Lee e Lee 1995, Sung, Lee e Lee 1998, Sung, Park e Lee 1995, Tan et al. 1999, Yu 1999, Friman e Waller 1995]. Uma solução para o problema de utilização do relé na presença de perturbações de carga é apresentada em Hang, Åström e Ho 1993. O relé é sistematicamente polarizado, até que a oscilação obtida seja simétrica. O método é válido para o caso particular de pequenas perturbações em degrau. Em Tan et al. 1999, a rejeição a perturbações de carga é demonstrada para a realimentação com relé na malha externa de controle. Em Friman e Waller 1995, o relé é substituído por uma não-linearidade estática de dois parâmetros (curva de saturação). A inclinação é sistematicamente atualizada até que uma oscilação senoidal é obtida. Note que o procedimento é essencialmente o mesmo do método da resposta em frequência de Ziegler e Nichols 1942, com a vantagem de evitar sinais ilimitados, devido à presença da saturação. Uma outra forma de reduzir o erro cometido pela aproximação do método da função descritiva é reduzir o efeito dos harmônicos superiores mudando a forma de onda na saída do relé. Em Sung, Park e Lee 1995, a saída do relé é dividida em dois níveis para cada semiciclo, de modo que o efeito de harmônicos de ordem superior é reduzido, e a estimativa do ponto crítico é mais precisa.

Outras Tendências

Existem ainda vários outros usos do relé na extração de informação sobre um processo ou função de transferência. Aplicações do método do relé para o caso de sistemas MIMO (*multiple-input multiple-output*) são encontradas em Wang et al. 1997, Palmor, Halevi e Krasney 1995, Yu 1999. Vários outros artigos tratam da utilização de relés com assimetria, para obter informação também sobre o ganho direto do sistema [Yu 1999, Sung, Lee e Lee 1995, Park, Sung e Lee 1997, Shen, Wu e Yu 1996]. Com esta informação adicional, é possível obter modelos de primeira e segunda ordem com atraso, com apenas um experimento. Sistemas de aquecimento ou resfriamento apresentam geralmente um comportamento assimétrico, isto é, podem apresentar modelos diferentes, dependendo da direção - ou derivada - do sinal de controle. Em Hägglund e Tengvall 1995, o método do relé é utilizado para obtenção de dois modelos de ordem reduzida, que levam a dois conjuntos de parâmetros do controlador, usados de acordo com uma técnica de escalonamento de ganho.

Aplicações do método

O método do relé é amplamente utilizado em técnicas de sintonia automática [Voda e Landau 1995, Åström e Hägglund 1984, Dumont, Martin-Sanchez e Zervos 1989, Gawthrop e Nomikos 1990, Hägglund e Tengvall 1995, Hang e Sin 1991, Hang, Åström e Ho 1993, Leva, Maffezzoni e Scattolini 1994, Leva 1994, Li, Eskinat e Luyben 1991, Schei 1992]. No artigo onde foi introduzido, a estimativa do ponto crítico é usada no projeto de controladores PID pelo método denominado Ziegler-Nichols modificado [Åström e Hägglund 1984]. Também se encontram, no entanto, diversas aplicações do

método para outros tipos de controladores, por exemplo, em Hang, Wang e Cao, Palmor e Blau 1994. Em Lundh 1991, Lundh e Åström 1994, o método do relé é utilizado na inicialização de um controlador adaptativo. Em outro ramo de aplicações, o relé é largamente utilizado na obtenção de modelos para processos [Li, Eskinat e Luyben 1991, Chang, Shen e Yu 1992, Luyben 1987, Atherton e Majhi 1998]. Em Lee e Kim 2001, o método do relé é utilizado para obtenção de um modelo para a dinâmica de absorção em materiais porosos de duas camadas. Também se encontram aplicações do relé na modelagem do atrito viscoso e de Coulomb [Besançon-Voda e Drazdil 1997, Besançon-Voda e Blaha 2002, Tan et al. 2001], e na sintonia de controladores para sistemas de aquecimento, ventilação e ar condicionado (*HVAC - Heating, Ventilating and Air-Conditioning systems*) [Bi et al. 2000]. Recentemente, tem-se buscado identificar parâmetros de modelos simples usando informações sem aproximações da condição de oscilação do ciclo limite. Em Kaya e Atherton 2001a e Kaya e Atherton 2001b, o método *A-locus* é usado para determinar modelos de primeira e segunda ordem com atraso, estáveis ou instáveis. O método *A-locus* fornece resultados sem aproximações para a frequência e amplitude do ciclo limite, baseado em uma função complexa no domínio do tempo e da frequência. Em Atherton e Majhi 1998 e Wang, Hang e Zou 1997, expressões sem aproximações são obtidas a partir da resposta temporal de modelos de primeira e segunda ordem com atraso. A vantagem destes procedimentos é que, se o processo possui a mesma estrutura do modelo, o modelo obtido é igual ao processo, assumindo que não há erros nas medições.

Análise não linear

O estudo de sistemas lineares com realimentação por relé serve como base para análise de uma classe mais geral de sistemas não lineares, denominada *sistemas lineares por partes (piecewise linear systems)*. Tais sistemas são caracterizados por um número finito de modelos lineares, juntamente com um conjunto de regras para alternar entre os modelos, o que causa um particionamento do espaço de estados em regiões separadas. Cada partição é descrita então por equações diferenciais lineares. Sistemas lineares com realimentação por relé constituem um caso particular dos sistemas lineares por partes, onde são apresentados dois modelos lineares, e o espaço de estados é dividido portanto em duas regiões.

Um problema fundamental em sistemas lineares com relé é a existência de ciclos limite simétricos unimodais⁵. Tais soluções são interessantes para utilização da realimentação para fins de identificação. Expressões sem aproximações para o cálculo de ciclos limite simétricos e unimodais são apresentadas em Bliman e Krasnosel'skii 1997, Åstrom 1995, Tsytkin 1984, Holmberg 1991. Em Varigonda e Georgiou 2001, generaliza-se a expressão para o caso de assimetria no ciclo limite. Condições suficientes para unicidade de ciclos limite simétricos e unimodais são apresentadas em Lootsma, Shaft e Çamlıbel 1999. Em Lin e Wang 2002, a condição de suficiência é relaxada usando resultados da teoria de matrizes, de modo a tornar o resultado mais abrangente.

A estabilidade de ciclos limite em um sistema não linear pode ser avaliada usando mapas de

⁵Ver definição na pág. 32.

Poincaré [Khalil 1996]. A construção de tais mapas depende do conhecimento da solução da equação diferencial do sistema, que dificilmente é encontrada na forma analítica. No entanto, para o caso de sistemas lineares por partes, é possível obter o mapa definindo adequadamente a superfície de chaveamento, de modo que o comportamento da solução é essencialmente linear nas regiões do espaço dividido pela superfície escolhida. Deste modo, o Jacobiano do mapa indicará a estabilidade local do ciclo limite. Tal resultado é introduzido em Åstrom 1995, e em Varigonda e Georgiou 2000 é apresentada uma metodologia para determinação da estabilidade global de ciclos limite simétricos e unimodais para o caso de relés com histerese. Este último baseia-se na existência de uma matriz positiva definida que define um conjunto compacto invariante, sobre o qual o mapa de Poincaré é contrativo. A busca da matriz é simples para sistemas de duas dimensões, no entanto, para sistemas de ordem elevada, uma otimização numérica é utilizada. Em Gonçalves, Megretski e Dahleh 2001, mostra-se que uma condição suficiente para estabilidade global do ciclo limite é a existência de funções de Lyapunov quadráticas globalmente na superfície de chaveamento. A busca de tais funções é feita resolvendo-se um conjunto de desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities - LMI*). Um problema relacionado à estabilidade em sistemas com realimentação por relé é a garantia de sinais limitados em amplitude. Em Hsu 1990, são apresentadas condições para tal garantia, mesmo com a existência de um integrador no laço de realimentação.

Além de ciclos limite simétricos unimodais, sistemas com realimentação por relé podem apresentar uma diversidade de comportamentos. Para o caso de relés com histerese, para que a solução “atravesse” a superfície de chaveamento é necessário que a derivada do sinal de saída do sistema linear seja não nula no instante da intersecção. Quando esta condição não é satisfeita para um certo intervalo de tempo, a solução pode “deslizar” ao longo da superfície. Tal fenômeno é denominado modo deslizante (*sliding mode*, [Khalil 1996, Johansson 1997]). Para tais soluções, idealiza-se a existência de infinitos chaveamentos, o que na prática é limitado pelas imperfeições do relé (tempo de atuação, atrasos, etc.). Modos deslizantes em sistemas com relé são estudados em Johansson 1997, Bernardo, Johansson e Vasca 1999, Bernhardsson, Johansson e Malmberg 1999. Quando existe mais de uma seção de deslizamento em um mesmo semiperíodo, denomina-se o fenômeno por *multi-deslizamento*, que é estudado em Bernardo, Johansson e Vasca 1999. Órbitas com modos deslizantes existem apenas quando o sistema linear possui grau relativo⁶ unitário. Se o grau relativo do sistema linear é superior a um, pode haver órbitas com chaveamentos rápidos. O número de chaveamentos é limitado, de modo que a solução não caminha sobre a superfície, mas a atravessa várias vezes durante um intervalo limitado de tempo. Em Johansson 1997, Johansson, Rantzer e Åström 1999, foram apresentadas condições necessárias e suficientes para existência de tais chaveamentos. O resultado apresentado pode ser visto como uma generalização da existência de modos deslizantes de primeira ordem apresentada em Tsytkin 1984.

Finalmente, foi observada a existência de soluções caóticas em alguns sistemas de realimentação com relé [Holmberg 1991]. A análise de tais resultados ainda é escassa para tais tipos de sistema,

⁶Diferença entre os graus do denominador e do numerador de uma função de transferência.

e poucos resultados são conhecidos até o momento [Sugiki, Hatakeyama e Furuta 1999]. Recentemente, em Moreno, Peres e Bonatti 2000 e Moreno, Peres e Bonatti 2002, são apresentadas análises para sistemas de primeira, segunda e terceira ordem em realimentação com um relé com histerese, que apresentam soluções caóticas sob certas condições.

1.3 Organização do Texto

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte, composta dos capítulos 2 e 3, é feita uma análise no domínio do tempo de sistemas com realimentação por relé e do experimento de identificação apresentado em Arruda 2000, e na segunda parte são discutidas aplicações do método na identificação de sistemas simples e na sintonia de controladores PID, nos capítulos 4, 6 e 5.

O experimento de identificação baseado no relé é introduzido no capítulo 2, e novos resultados sobre amplitude dos sinais e testes de estabilidade são apresentados ao longo do texto. Os experimentos para estimação da Função de Malha e da Função de Sensibilidade são apresentados no final do capítulo, onde são discutidas a estabilidade da estrutura, a amplitude do relé e a melhoria da estimativa para cada estrutura. No capítulo 3, é apresentada a análise sobre a existência e estabilidade de ciclos limite simétricos e unimodais para sistemas lineares com realimentação por relé baseada em mapas de Poincaré. Uma extensão para o caso de sistemas lineares com atraso de transporte também é proposta no capítulo. Os resultados obtidos para o caso de sistemas lineares sem atraso de transporte são então aplicados à estrutura do experimento de identificação introduzido no capítulo 2. São obtidas então expressões que permitem avaliar a existência e estabilidade de ciclos limite simétricos e unimodais no experimento de identificação. Exemplos de simulação são apresentados no final do capítulo, para avaliação do comportamento do experimento em diferentes situações.

No capítulo 4, é apresentada uma técnica para obtenção de um modelo de primeira ordem com atraso, a partir de medições da entrada e saída do processo para o método do relé e o método do relé com integrador. O procedimento é baseado em resultados sobre existência de ciclos limite em sistemas com relé, de modo que a modelagem é livre de erros se o processo pertence à classe de modelos considerada, e se não existe erro de medição (ruído). Exemplos de simulação são usados para ilustrar as propriedades do procedimento na presença de dinâmica não modelada e ruído, no final do capítulo. Os resultados obtidos neste capítulo são então utilizados no capítulo 5, no projeto de controladores PI e PID usando técnicas populares de sintonia. São utilizadas as técnicas baseadas no método de Ziegler-Nichols da resposta em frequência, no princípio do modelo interno (IMC) e no ótimo-simétrico. Para esta última técnica, um novo enfoque na definição do parâmetro do projeto permite a utilização do modelo de primeira ordem com atraso de transporte. O objetivo é avaliar a qualidade do modelo obtido, quando usado para projetar o controlador, levando-se em conta a dinâmica não modelada existente, ou o erro de estimação devido ao ruído de medição.

No capítulo 6, apresenta-se uma nova metodologia de sintonia iterativa de controladores PID baseada em especificações de margens de ganho e de fase. A partir de tais especificações, as equações

de projeto são resolvidas iterativamente, usando experimentos com relé para estimação de pontos de frequência correspondentes às margens de ganho e de fase. As vantagens do experimento são a não necessidade de conhecer a resposta em frequência do processo, e a operação do sistema sem remover o controlador durante o processo de sintonia, de modo a não perturbar significativamente a variável do processo. Aplicações da metodologia são apresentadas no final do capítulo. Um exemplo de simulação é usado para examinar as propriedades da metodologia. Em seguida, apresentam-se resultados para a sintonia de controladores PI e PID para controle de temperatura em um trocador de calor em escala de laboratório e em um experimento de caracterização de camadas finas de filmes de Óxido de Vanádio (VO_2), e controle de Nitrato em um processo simulado de lodo ativado para tratamento de águas residuárias.

Finalmente, no capítulo 7 são discutidas as contribuições deste trabalho, bem como as considerações finais e propostas para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Experimentos de Identificação com o Relé

2.1 Introdução

O método do relé introduzido em Åström e Hägglund 1984 é normalmente utilizado para obter uma estimativa do ponto crítico de um processo. A informação obtida a partir do experimento é normalmente usada na sintonia de controladores PID baseada no método de Ziegler Nichols da resposta em frequência [Ziegler e Nichols 1942], ou variações do mesmo, conforme apresentado em Åström e Hägglund 1995. A teoria para a análise de um processo com realimentação por relé é baseada no método das funções descritivas, o que contribuiu para tornar o procedimento largamente aceito na indústria, para sintonia de controladores industriais. Existem várias modificações do experimento original, o que resulta em uma enorme variedade de técnicas para estimação da função de transferência de um processo usando o relé. As principais tendências encontradas nas modificações do experimento original são a melhoria da precisão da estimativa, a estimação de vários pontos da resposta em frequência do processo e o uso do relé na malha externa do sistema de controle.

Um problema que surge em aplicações práticas é estimar a frequência em que uma dada função de transferência possui uma determinada fase ou magnitude. A utilização de um relé para estimação apresenta algumas vantagens práticas, como a automatização do experimento. O método do relé, por exemplo, permite obter a margem de ganho medindo a amplitude da oscilação na frequência em que a função de transferência possui um atraso de fase de aproximadamente -180° . A estrutura apresentada em Schei 1994 permite determinar a margem de fase medindo o atraso de fase na frequência em que a função de transferência possui ganho unitário. Este último caso pode ser estendido para a estimação de diversas frequências em magnitudes diferentes da seguinte maneira:

Dada uma função de transferência de interesse, $H(s)$, encontrar a frequência em que a magnitude de $H(j\omega)$ possui um determinado valor de ganho, r .

Observação 2.1 Note-se que a resposta em frequência de $H(j\omega)$ pode ser estimada em diversos pontos variando o valor de r .

Este problema foi resolvido em Arruda 2000, usando uma estrutura de realimentação com relé, tal que um ciclo limite se desenvolve na frequência em que a magnitude de $H(j\omega)$ é aproximadamente

igual a r . Novos resultados sobre amplitudes de sinais e estabilidade do experimento foram obtidos recentemente, e serão introduzidos neste capítulo.

É apresentada inicialmente uma revisão de duas estruturas de identificação com relé, e, em seguida, a estrutura mais geral, que resolve o problema anterior [Arruda 2000]. A estabilidade da estrutura apresentada é então discutida, seguida de técnicas para melhoria da precisão do método. Por fim, a estrutura é aplicada na estimação da função de transferência do processo, da Função de Malha e da Função de Sensibilidade.

2.2 Notação

Considere o sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.1. A função de transferência do processo é dada por $G(s)$, e $C(s)$ é a função de transferência do controlador.

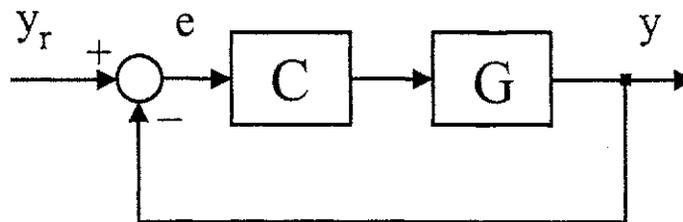


Figura 2.1: Sistema em malha fechada.

A função de transferência em malha fechada do sinal de referência $y_r(t)$ para o sinal de saída $y(t)$ é dada por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (2.1)$$

Para esta configuração, $T(s)$ também é conhecida como a Função de Sensibilidade Complementar, e $L(s) = C(s)G(s)$ é a Função de Malha. A função de transferência do sinal de referência para o erro,

$$S(s) = \frac{E(s)}{Y_r(s)} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}, \quad (2.2)$$

é a Função de Sensibilidade.

2.3 Estruturas Básicas de Realimentação

Considere uma função de transferência estável, $F(s)$. As duas estruturas de realimentação com relé apresentadas nas Figuras 2.2 e 2.3 são comumente utilizadas para estimação. No primeiro caso, mostra-se pelo método das funções descritivas [Åström e Hägglund 1995] que o ciclo limite obtido pela realimentação ocorre na frequência em que a fase de $F(j\omega)$ é aproximadamente -180° , ou seja, a frequência crítica. No segundo caso, a adição de um integrador no caminho de realimentação implica que a oscilação ocorre agora na frequência em que a fase de $F(j\omega)$ é aproximadamente -90° . Estes resultados são apresentados nas proposições seguintes.

Proposição 2.2 Considere o sistema em malha fechada com relé mostrado na Figura 2.2, onde $F(s)$ é uma função de transferência que representa um sistema linear, estável e invariante no tempo, $K = 1/F(0)$, a amplitude do relé pode assumir um dentre dois valores $\pm d$ e y_r' é um valor de referência constante. Então, se um ciclo limite de amplitude "a" desenvolve-se na saída do sistema, $y_o(t)$, a oscilação ocorre em torno de y_r' na frequência ω_c tal que

$$\angle F(j\omega_c) \approx -180^\circ.$$

Além disso, uma realimentação de $F(s)$ por um ganho proporcional k é estável para

$$0 \leq k \leq \frac{1}{|F(j\omega_c)|}$$

Demonstração. A função descritiva do relé de amplitude $\pm d$ é dada por [Åström e Hägglund 1995]

$$N(a) = \frac{4d}{\pi a}.$$

Subtraindo os sinais y_r' e y_o de y_r' , e como $K = 1/F(0)$, o novo ponto de operação é em torno de zero. A equação de balanço de harmônicos de primeira ordem leva à condição de oscilação

$$N(a) F(j\omega) \approx -1,$$

que implica em

$$F(j\omega) \approx -\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi a}{4d}.$$

Portanto, a oscilação ocorre na frequência $\omega = \omega_c$ onde

$$\angle F(j\omega_c) \approx -180^\circ.$$

Além disso, o ciclo limite se desenvolve em torno do valor de referência y_r' . O restante da proposição segue do critério de estabilidade de Nyquist. ■

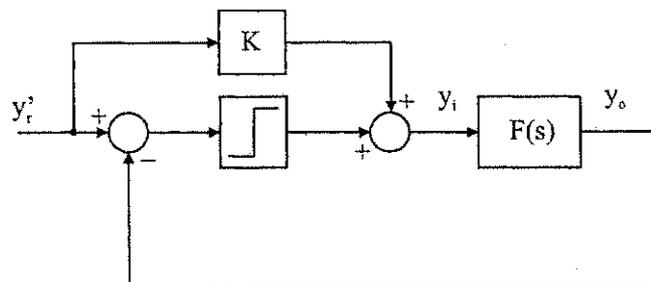


Figura 2.2: Sistema linear realimentado por relé.

Conforme mencionado anteriormente, o procedimento é conhecido por *método do relé*. Uma pequena modificação deste procedimento, que será usada na solução do problema proposto, é apresentada em seguida, e o experimento obtido é aqui denominado *método do relé com integrador*.

Proposição 2.3 Considere o sistema em malha fechada com relé mostrado na Figura 2.3, onde $F(s)$ é uma função de transferência que representa um sistema linear, estável e invariante no tempo, $K = 1/F(0)$, a amplitude do relé pode assumir um dentre dois valores $\pm d$ e y_r' é um valor de referência constante. Então, se um ciclo limite de amplitude "a" desenvolve-se na saída do sistema, $y_o(t)$, a oscilação ocorre em torno de y_r' na frequência ω_{ci} tal que

$$\angle F(j\omega_{ci}) \approx -90^\circ.$$

Demonstração. A análise é semelhante ao caso anterior, com a condição de oscilação modificada para

$$\frac{1}{j\omega} N(a) F(j\omega) \approx -1$$

o que implica em

$$F(j\omega) \approx -\frac{j\omega}{N(a)} = -\frac{j\omega\pi a}{4d}.$$

Portanto, a oscilação ocorre na frequência $\omega = \omega_{ci}$ onde

$$\angle F(j\omega_{ci}) \approx -90^\circ.$$

■

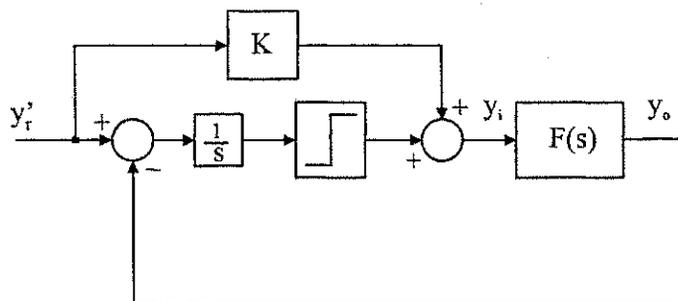


Figura 2.3: Sistema linear realimentado por relé com integrador.

A introdução do integrador permitiu a estimação de outro ponto da resposta em frequência de $F(j\omega)$. De fato, a introdução de diferentes funções de transferência (ao invés do integrador) na primeira estrutura de realimentação (fig. 2.2) permitiria a estimação de pontos da resposta em frequência para os quais $F(j\omega)$ possui diferentes ganhos e/ou fases. A limitação de tal procedimento é a necessidade de se conhecer exatamente qual função de transferência utilizar, ou tentar chegar à função de transferência desejada em uma maneira iterativa.

2.4 Solução Geral

Uma solução geral para o problema proposto na introdução deste capítulo pode ser obtida com a estrutura de realimentação da fig. 2.3, se a função de transferência $F(s)$ possui uma forma particular. Este fato é mostrado na proposição seguinte.

Proposição 2.4 Considere o sistema em malha fechada mostrado na fig. 2.3. Assuma que, para uma função de transferência estável $H(s)$ e um parâmetro real positivo r , a função de transferência $F(s)$ definida por

$$F(s) = \frac{H(s) - r}{H(s) + r}, \quad (2.3)$$

é estável. Então, se um ciclo limite desenvolve-se no sistema em malha fechada, a oscilação ocorre na frequência ω_o tal que

$$|H(j\omega_o)| \approx r.$$

Demonstração. Se um ciclo limite está presente no sistema em malha fechada, então, de acordo com a proposição 2.3, $\angle F(j\omega_o, r) \approx -90^\circ$ na frequência de oscilação. Portanto

$$F(j\omega_o, r) = \frac{H(j\omega_o) - r}{H(j\omega_o) + r} \approx -wj, \quad (2.4)$$

para algum número real $w > 0$. Reescrevendo esta expressão, obtém-se

$$H(j\omega_o) \approx r \frac{1 - wj}{1 + wj},$$

para a qual

$$|H(j\omega_o)| \approx r.$$

■

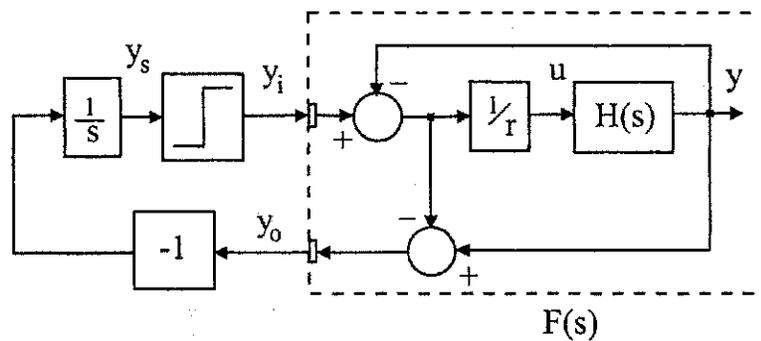


Figura 2.4: Método do relé para estimação da resposta em frequência.

A estrutura com $F(s)$ dada pela Eq. (2.3) é denominada aqui de *método do relé para estimação da resposta em frequência* e é mostrada na fig. 2.4. Uma questão que pode ser feita sobre tal estrutura é o que acontece quando não existe solução para ω tal que $|H(j\omega)| = r$. Tal circunstância será discutida em seguida.

Considere a função de transferência $H(j\omega)$ e sua norma \mathcal{H}_∞ (norma infinita), $\|H(j\omega)\|_\infty$. O procedimento de identificação consiste em obter a frequência onde $|H(j\omega)| = r$ observando a frequência do ciclo limite obtido com o experimento. Se $r > \|H(j\omega)\|_\infty$, então espera-se que não haja ciclo limite no sistema em malha fechada, pois não existe ω para o qual $|H(j\omega)|$ seja igual a r . Será mostrado em seguida que, nesta situação, a existência de um ciclo limite não é prevista pelo método das função descritivas, para a estrutura de realimentação mostrada na fig. 2.4.

Proposição 2.5 *Considere uma função de transferência estável $H(s)$ e defina $F(s)$ conforme a Eq. (2.3). Se $r > \|H(j\omega)\|_\infty$, então, pelo método das funções descritivas, não existe ciclo limite na realimentação por relé mostrada na Figura 2.4.*

Demonstração. A partir da proposição 2.3, a condição para oscilação é $\angle F(j\omega_o) = -90^\circ$, o que significa dizer que $F(j\omega_o) = -kj$ para algum real $k > 0$ e $0 < \omega_o < \infty$. Portanto, a curva de Nyquist de $F(j\omega)$ deve cruzar o eixo imaginário negativo na frequência ω_o . O objetivo da demonstração é mostrar que esta situação não ocorre para $r > \|H(j\omega)\|_\infty$. Escrevendo

$$F(j\omega) = \frac{H(j\omega) - r}{H(j\omega) + r} = \frac{\rho(\omega) e^{j\phi(\omega)} - r}{\rho(\omega) e^{j\phi(\omega)} + r},$$

onde $\rho(\omega) = |H(j\omega)|$ e $\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$, tem-se que,

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{\rho(\omega) \cos \phi(\omega) + j\rho(\omega) \sin \phi(\omega) - r}{\rho(\omega) \cos \phi(\omega) + j\rho(\omega) \sin \phi(\omega) + r} \\ &= \frac{\rho(\omega) \cos \phi(\omega) - r + j\rho(\omega) \sin \phi(\omega)}{\rho(\omega) \cos \phi(\omega) + r + j\rho(\omega) \sin \phi(\omega)} \times \frac{\rho(\omega) \cos \phi(\omega) + r - j\rho(\omega) \sin \phi(\omega)}{\rho(\omega) \cos \phi(\omega) + r - j\rho(\omega) \sin \phi(\omega)} \\ &= \frac{\rho^2(\omega) \cos^2 \phi(\omega) - r^2 + \rho^2(\omega) \sin^2 \phi(\omega) + j[\rho^2(\omega) 2 \sin \phi(\omega) \cos \phi(\omega)]}{\rho^2(\omega) \cos^2 \phi(\omega) + 2\rho(\omega) \cos \phi(\omega) r + r^2 + \rho^2(\omega) \sin^2 \phi(\omega)} \\ &= \frac{\rho^2(\omega) - r^2 + j2r\rho(\omega) \sin \phi(\omega)}{\rho^2(\omega) + 2\rho(\omega) \cos \phi(\omega) r + r^2} \end{aligned}$$

A parte real de $F(j\omega)$ é dada por

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = \frac{\rho^2(\omega) - r^2}{\rho^2(\omega) + 2\rho(\omega) \cos \phi(\omega) r + r^2},$$

que é zero apenas se

$$\rho^2(\omega) - r^2 = 0 \Rightarrow r = \rho(\omega),$$

pois $r > 0$ e $\rho(\omega) > 0$. Logo, se $r > \sup_\omega \rho(\omega) = \|H(j\omega)\|_\infty$, então não existe solução em ω , tal que $\operatorname{Re} F(j\omega) = 0$, e, conseqüentemente, pelo método das funções descritivas, não se espera a existência de ciclos limite. ■

Note que a única condição imposta em $F(s)$ até agora é sua estabilidade. Isto será discutido detalhadamente em seguida.

2.5 Estabilidade do Experimento e Amplitude dos Sinais

Considere $F(s)$ dado pela Eq. (2.3) (Figura 2.4). Todos os sinais serão limitados se $F(s)$ for estável, isto é, não possuir pólos no semi-plano direito. Isto pode ser visto a partir do sinal de entrada de $F(s)$, o qual é dado por

$$y_i(t) = \pm d,$$

que é limitado e não nulo para todo $t \geq 0$. Portanto, se $F(s)$ é estável, então o sinal de saída é limitado para todo $t \geq 0$.

A estabilidade da malha fechada é analisada em seguida. Para simplificar, assume-se que $H(s)$ é estável.

Proposição 2.6 *Assuma que a função de transferência $H(s)$ na Eq. (2.3) é estável. Então o conjunto de números reais r para os quais $F(s)$ é estável pode ser obtido diretamente do lugar de raízes de $H(s)$.*

Demonstração. Considere

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Então

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{H(s) - r}{H(s) + r} = \frac{N(s) - rD(s)}{N(s) + rD(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{r}N(s) - D(s)}{\frac{1}{r}N(s) + D(s)}, \end{aligned}$$

de modo que a equação característica de malha fechada é dada pelo lugar de raízes de $H(s)$ com ganho proporcional $k = 1/r$. ■

Apesar de ser um resultado um tanto direto, esta última proposição é de pouca utilidade na prática, uma vez que o objetivo é estimar a função de transferência desconhecida $H(s)$. Mas, sob a hipótese de que $H(s)$ é estável, a utilização do método do relé para estimar o ganho crítico de $H(s)$ permite obter uma faixa segura de valores de r para os quais $F(s)$ é estável.

Proposição 2.7 *Considere a função de transferência $F(s)$ definida na Eq. (2.3). Suponha que o cálculo do ponto crítico de $H(j\omega)$ (onde $\angle H(j\omega_c^H) = -180^\circ$) leva ao resultado*

$$|H(j\omega_c^H)| = \frac{1}{K_c^H}.$$

Então, se

$$r > \frac{1}{K_c^H},$$

a função de transferência $F(s)$ não possui pólos no semi-plano direito.

Demonstração. Segue da aplicação direta da Proposição (2.2), notando-se a realimentação negativa de $H(s)$ e $1/r$ na fig. 2.4. ■

Uma observação importante é o fato de que a amplitude da oscilação na saída da função $F(s)$ depende apenas da fase de $H(j\omega_o)$ na frequência de oscilação. Tal fato é apresentado e demonstrado em seguida.

Lema 2.8 *Considere a função de transferência $F(s)$ definida na Eq. (2.3). A magnitude de $F(j\omega_o)$, na frequência de oscilação ω_o definida por $|H(j\omega_o)| = r$, depende apenas da fase de $H(j\omega)$ em ω_o e é dada por*

$$|F(j\omega_o)| = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}},$$

com $\phi = \angle H(j\omega_o)$.

Demonstração. A condição para oscilação na frequência ω_o na qual a magnitude de $H(j\omega)$ é dada por r implica em

$$H(j\omega_o) = r \cdot e^{j\phi}.$$

Logo,

$$F(j\omega_o) = \frac{re^{j\phi} - r}{re^{j\phi} + r} = \frac{\cos \phi - 1 + j \sin \phi}{\cos \phi + 1 + j \sin \phi}$$

de modo que a magnitude de $F(j\omega_o)$ é dada por

$$\begin{aligned} |F(j\omega_o)| &= \sqrt{\frac{\cos^2 \phi - 2 \cos \phi + 1 + \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi + 2 \cos \phi + 1 + \sin^2 \phi}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}} \end{aligned}$$

que depende apenas da fase $\phi = \angle H(j\omega_o)$. ■

Note que a magnitude de F em ω_o tende a zero quando a fase de $H(j\omega_o)$ se aproxima de múltiplos de 360° , e tende a infinito quando $\angle H(j\omega_o)$ se aproxima de -180° , ou múltiplos deste ângulo em relação a 360° , i.e.,

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega_o) \rightarrow 2n\pi &\Rightarrow |F(j\omega_o)| \rightarrow 0, \\ \angle H(j\omega_o) \rightarrow (2n+1)\pi &\Rightarrow |F(j\omega_o)| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

A magnitude de $F(j\omega)$ para diferentes frequências de oscilação ω_o é mostrada na fig. 2.5. Este resultado reforça o fato de que valores de r maiores do que o ganho crítico de $H(j\omega)$ levam a oscilações em frequências onde a fase de $H(j\omega)$ é superior a -180° , o que garante que a magnitude de F nesta frequência é um valor finito.

2.6 Melhoria da Estimativa

O método das funções descritivas é um procedimento aproximado, baseado na solução da equação de balanço de harmônicos de primeira ordem [Khalil 1996]. Isto implica que os harmônicos de ordem superior são desprezados em tal análise. Se o método do relé é usado para estimar o ganho crítico, o erro devido ao método das funções descritivas é relativamente pequeno, pois o ciclo limite ocorre em uma frequência maior do que a frequência de corte do processo [Åström e Hägglund 1984], o que reduz o efeito de harmônicos de ordem elevada. Porém, nos casos em que o sinal de saída não se parece com uma forma de onda senoidal, a aproximação se torna pior à medida em que os demais harmônicos se tornam mais relevantes na sua formação.

Uma maneira de contornar este problema é utilizar a transformada discreta de Fourier (DFT) nos dados de entrada e saída obtidos com o experimento, e obter uma estimativa mais precisa do ganho e da fase do sistema na frequência de oscilação. Em outras palavras, o experimento é utilizado para levar o sistema a uma oscilação com frequência próxima à frequência onde a magnitude de

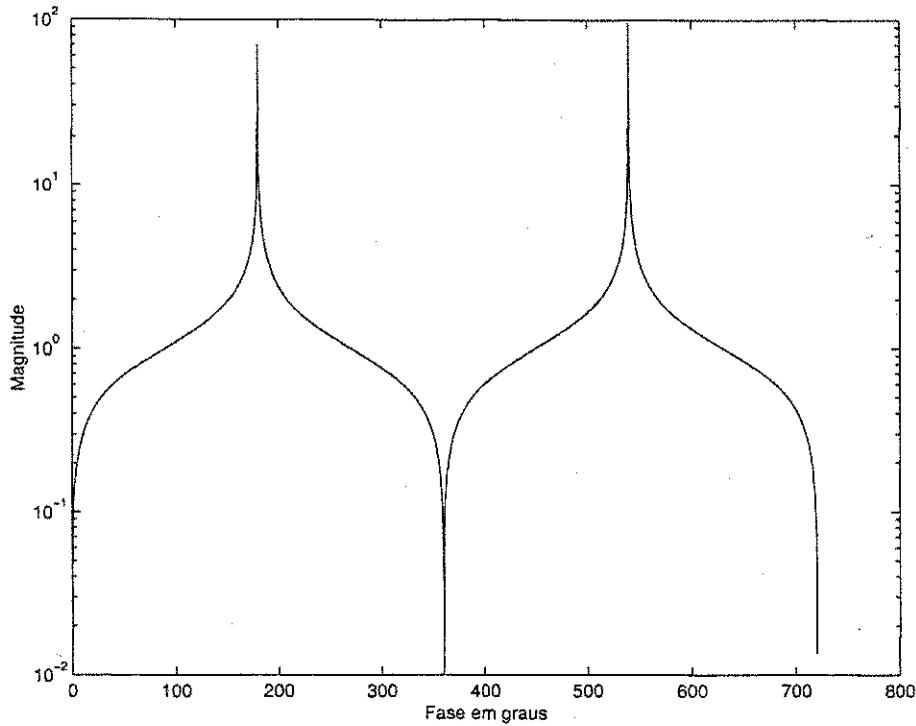


Figura 2.5: Magnitude de $F(j\omega_o)$ em função do ângulo de fase de $H(j\omega_o)$, com $|H(j\omega_o)| = r$.

$H(j\omega)$ é dada por r , e a DFT é usada para calcular o valor da função de transferência naquela frequência.

Considere um número par de amostras, N , do sinal $u(t)$. Defina $U_N(\omega)$ como sendo

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N u(nT_a) e^{-j\omega n T_a}.$$

Os valores de $U_N(\omega)$ para $\omega = 2\pi l/N$, $l = 1, \dots, N$, correspondem à transformada discreta de Fourier de $u(nT_s)$, que é abreviado aqui por $u(n)$, $1 < n < N$, com período de amostragem T_a . Se $u(n)$ é periódico, i.e., $u(n) = u(n + N_o)$, e $N = m \cdot N_o$, para algum inteiro positivo m , então

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{N_o}} \sum_{l=-N_o/2+1}^{N_o/2+1} A_l e^{j2\pi n l / N_o},$$

com

$$A_l = \frac{1}{\sqrt{N_o}} \sum_{n=1}^{N_o} u(n) e^{-j2\pi n l / N_o}$$

é a magnitude do l -ésimo harmônico do sinal discreto $u(n)$. Além disso, se $u(n)$ é amostrado durante m períodos, então

$$|U_N(\omega)|^2 = \begin{cases} m \cdot |A_l|^2, & \text{if } \omega = \frac{2\pi l}{N_o}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N_o}{2} \\ 0, & \text{if } \omega = \frac{2\pi n}{N}, n \neq l \cdot m \end{cases}$$

Estes resultados são encontrados em livros básicos de identificação de sistemas, como em Ljung 1999.

Proposição 2.9 *Suponha que y_o e y_i , mostrados na fig. 2.4, possuem o mesmo período N_o . Considere as transformadas discretas $Y_{oN}(\omega)$ e $Y_{iN}(\omega)$ calculadas com $N = m \cdot N_o$ amostras dos sinais $y_o(t)$ e $y_i(t)$, respectivamente. Então, a estimativa*

$$\hat{F}(e^{j\omega}) = \frac{Y_{oN}(\omega)}{Y_{iN}(\omega)}$$

satisfaz:

- $\hat{F}(e^{j\omega})$ é definido apenas para um número fixo de frequências tais que $Y_{iN}(\omega) \neq 0$, e
- nessas frequências, as estimativas são não tendenciosas e a variância decai segundo $1/N$.

Demonstração. Note que na fig. 2.4 o sinal na entrada de $F(s)$, $y_i(t)$, é uma onda quadrada, que pode ser considerada descorrelacionada com o ruído no sinal de saída de $F(s)$, $y_o(t)$. O restante da demonstração segue de Ljung 1999. ■

Este resultado pode ser usado para obter uma estimativa de $H(j\omega_o)$, na qual ω_o é a frequência do primeiro harmônico do sinal de saída. A partir de $\hat{F}(e^{j\omega})$, tem-se

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = r \frac{1 + \hat{F}(e^{j\omega})}{1 - \hat{F}(e^{j\omega})}. \quad (2.5)$$

Note-se que, neste caso, sabe-se previamente que ω_i é a frequência em que a magnitude de $H(j\omega_o)$ é próxima de r . Note-se também que a DFT pode ser usada para estimar a magnitude e fase de $H(j\omega_o)$ em frequências múltiplas de ω_o , além da magnitude e fase em ω_o .

2.7 Experimentos de Estimação

Nesta seção, a solução geral apresentada na seção anterior será aplicada na estimação de processos, bem como da Função de Malha e da Função de Sensibilidade em um sistema de controle. Aspectos práticos relativos à amplitude do relé, estabilidade do experimento e amplitude dos sinais serão discutidos.

2.7.1 Estimação do Processo

Considere um processo em malha aberta com função de transferência $G(s)$. O resultado apresentado anteriormente pode ser usado diretamente na estimação da resposta em frequência de $G(s)$. A estrutura apresentada na fig. 2.4, com $H(s)$ substituído por $G(s)$, é utilizada para estimar a frequência em que a magnitude de $G(j\omega)$ possui um determinado valor. A estimação do ângulo de fase entre os sinais de entrada e saída do processo completa a estimação da resposta em frequência de $G(j\omega)$ na frequência de oscilação do ciclo limite. Variando-se o parâmetro r , outros pontos da resposta em frequência podem ser estimados.

Note-se que um ciclo limite pode desenvolver-se, mesmo quando $G(s)$ é de primeira ordem, o que não é possível para outras estruturas de realimentação, a menos que histerese seja adicionada ao relé.

A aplicação direta da Proposição 2.7 implica que o experimento de estimação será estável se os valores de r forem tais que

$$r > \frac{1}{K_c^G},$$

em que K_c^G é o ganho crítico do processo $G(s)$, que pode ser estimado pelo método do relé mostrado na fig. 2.2.

A melhoria da estimativa é obtida aplicando diretamente os resultados da proposição 2.9 sobre a estrutura da fig. 2.4, conforme discutido. Uma estimativa para $G(j\omega_o)$ é então dada por (vide Eq. (2.3))

$$\hat{G}(j\omega_o) = r \frac{1 + \hat{F}(j\omega_o)}{1 - \hat{F}(j\omega_o)}.$$

2.7.2 Estimação da Função de Malha

A estimação da magnitude da Função de Malha $L(s)$ é de grande importância prática para projeto de controladores, pois existem várias técnicas baseadas na moldagem espectral da mesma. O objetivo é ter uma Função de Malha que possua certas propriedades, como rejeição a perturbações de carga e margens de estabilidade desejadas [Doyle, Francis e Tannenbaum 1995]. Apesar de várias técnicas de moldagem espectral assumirem o conhecimento da resposta em frequência do processo, existem ainda várias outras baseadas em apenas alguns pontos de frequência para o projeto, por exemplo, de controladores PID (ver em Åström e Hägglund 1995).

O procedimento básico é aplicado nesta seção na estimação da resposta em frequência da Função de Malha. Seguindo a idéia apresentada no início, a frequência (e a fase) em que a Função de Malha possui um valor de ganho pré-determinado é estimada. Deseja-se, no entanto, que o experimento seja executado sem que a malha de controle seja aberta, e sob condições de operação bem definidas.

Estrutura do Experimento

Proposição 2.10 *Considere o sistema em malha fechada mostrado na fig. 2.4. Assuma que, para uma malha fechada estável, $T(s)$, e um número real positivo, r , a função de transferência*

$$F(s) = \frac{2}{r} \frac{T(s)}{T(s) \left(\frac{1-r}{r}\right) + 1} - 1 \quad (2.6)$$

é também estável. Se um ciclo limite está presente no sistema, a oscilação ocorre na frequência ω_o tal que

$$|L(j\omega_o)| \approx r.$$

Demonstração. Como

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)},$$

então

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{2}{r} \frac{T(s)}{T(s) \left(\frac{1-r}{r}\right) + 1} - 1 = \frac{2}{r} \frac{\frac{L(s)}{1+L(s)}}{\frac{L(s)}{1+L(s)} \left(\frac{1-r}{r}\right) + 1} - 1 \\
 &= \frac{2}{r} \frac{L(s)}{L(s) \left(\frac{1-r}{r}\right) + 1 + L(s)} - 1 = \frac{2L(s)}{L(s) - rL(s) + r + rL(s)} - 1 \\
 &= \frac{2L(s)}{L(s) + r} - 1 = \frac{L(s) - r}{L(s) + r}.
 \end{aligned}$$

Segue então da Prop. 2.4 com $H(s) = L(s)$ que $|L(j\omega_o)| \approx r$. ■

A estrutura que apresenta as propriedades da proposição anterior é mostrada na fig. 2.6. Note que a nova referência, y'_r , é ponderada por $1/r$ para que seja obtido um ganho unitário entre y'_r e y , assumindo que, em geral, $T(0) = 1$.

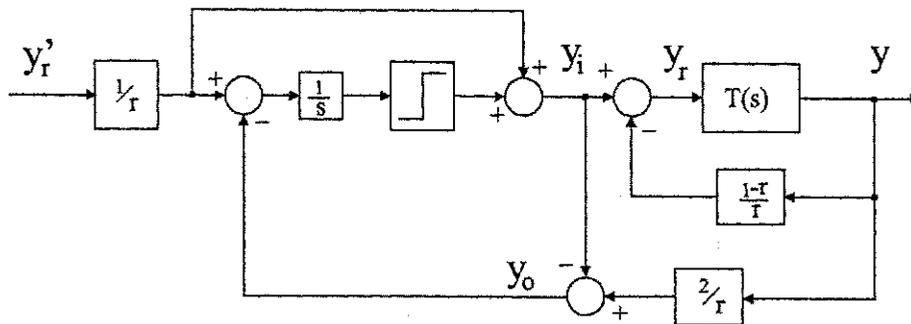


Figura 2.6: Experimento com relé para estimação da Função de Malha.

Observação 2.11 A estrutura de realimentação apresentada em Schei 1994 (fig. 2.7) pode ser vista como um caso particular da Proposição 2.4, com $r = 1$, o que resulta em $F(s) = 2T(s) - 1$. O sistema oscila na frequência ω_g tal que

$$|G(j\omega_g)C(j\omega_g)| \approx 1.$$

Para comprovar este fato, observa-se que

$$F(s) = 2T(s) - 1 = \frac{L(s) - 1}{L(s) + 1},$$

ou seja, $H(s) = L(s)$. Esta estrutura é estável por construção, uma vez que a malha fechada $T(s)$ é estável por hipótese, e conseqüentemente o numerador de $1 + L(s)$ possui suas raízes no semi-plano complexo esquerdo.

Estabilidade da Realimentação

O experimento de estimação deve ser executado sob condições de operação bem definidas: deve ser estável, a saída $y(t)$ deve ser limitada e a amplitude da oscilação deve permanecer dentro de limites desejáveis.

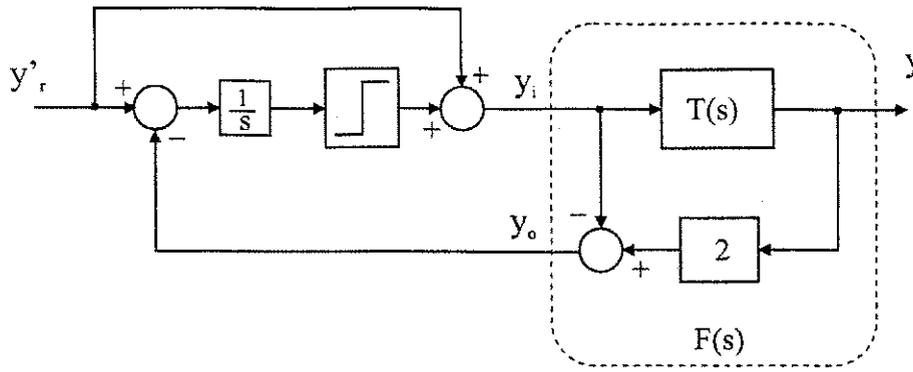


Figura 2.7: Realimentação com relé apresentada em Schei (1994).

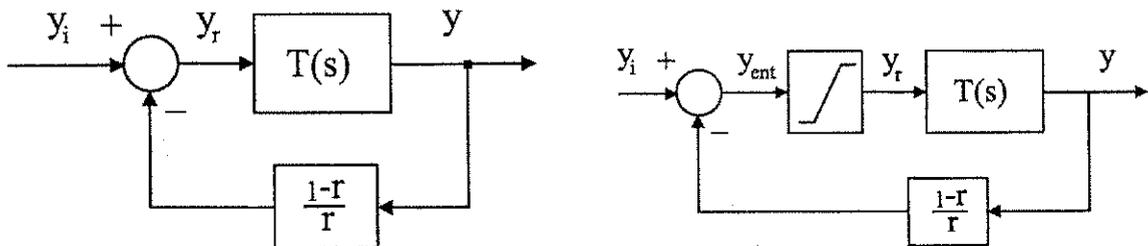
A Proposição 2.7 pode ser usada para se obter uma faixa para r tal que o experimento de estimação na fig. 2.6 seja estável. Neste caso, $H(s) = L(s)$, de modo que o ganho crítico de $L(j\omega)$ deve então ser estimado. Isto significa que o método do relé deve ser executado com a Função de Malha, abrindo-se a realimentação de controle, o que não é desejável. No entanto, isto pode ser facilmente evitado, conforme discutido em seguida.

Proposição 2.12 Considere a realimentação mostrada na fig. 2.1 com $T(s)$ estável. Execute o método do relé em $T(s)$ e calcule o ganho crítico associado a $T(s)$, K_c^T . Então, o experimento mostrado na fig. 2.6 é estável se

$$r > \frac{1}{1 + K_c^T}.$$

Demonstração. A análise da estabilidade de $F(s)$ na fig. 2.6 é equivalente à análise da estabilidade do laço de realimentação mostrado na fig. 2.8(a). O sistema em malha fechada é estável se o ganho de realimentação $(1 - r)/r$ é menor do que o ganho crítico de $T(s)$, K_c^T . Então, para estabilidade

$$\frac{1 - r}{r} < K_c^T \Rightarrow r > \frac{1}{1 + K_c^T} \tag{2.7}$$



(a) Realimentação usada para análise de estabilidade.

(b) Realimentação com saturação para proteção.

Figura 2.8: Estabilidade do experimento de estimação da Função de Malha.

Uma margem de segurança adicional pode ser incluída ao sistema realimentado na fig. 2.6. Sob as hipóteses de que $T(s)$ é estável e $T(0) = 1$, uma não linearidade do tipo saturação pode ser

incluída na malha fechada conforme mostrado na fig. 2.8(b), de modo que a saída permanece sob limites bem definidos. Assuma que $y(t)$ deve variar entre $y_r' - \Delta y_{\max}$ e $y_r' + \Delta y_{\max}$, com Δy_{\max} sendo a variação desejada da saída da malha fechada. A não linearidade é então escolhida como

$$y_r(t) = \begin{cases} y_{ent}(t) & \text{se } y_r' - \Delta y_{\max} < y_{ent}(t) < y_r' + \Delta y_{\max}, \\ y_r' - \Delta y_{\max} & \text{se } y_{ent}(t) \leq y_r' - \Delta y_{\max}, \\ y_r' + \Delta y_{\max} & \text{se } y_{ent}(t) \geq y_r' + \Delta y_{\max}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Uma vez que a região de saturação é alcançada, o experimento deve ser cancelado, pois torna-se sem sentido.

Amplitude do Relé

Considere o sistema em malha fechada mostrado na fig. 2.6. O sinal $y(t)$ pode ser calculado como a soma da contribuição de dois termos: a entrada de referência y_r' e a saída do relé (com amplitude $\pm d$). Assuma um sinal de referência constante e uma malha fechada estável $T(s)$, com $T(0) = 1$. Na ausência do relé ($d = 0$), a função de transferência de $y_i(t)$ para $y(t)$ na fig. 2.6 é dada por

$$\frac{Y(s)}{Y_i(s)} = \frac{rT(s)}{r + (1-r)T(s)}. \quad (2.9)$$

Em regime estacionário

$$y(\infty) = \frac{r}{r+1-r} y_i(\infty) = r y_i(\infty) = y_r'.$$

Se $y_r' = 0$ e o sistema apresenta uma oscilação na frequência ω_o , então Y_1 , a magnitude do primeiro harmônico de $y(t)$, é dada por

$$Y_1 = \frac{rT(j\omega_o)}{r + (1-r)T(j\omega_o)} Y_{i_1}, \quad (2.10)$$

na qual Y_{i_1} é a magnitude do primeiro harmônico do sinal de entrada $y_i(t)$. Como $y_i(t)$ é uma onda quadrada periódica e simétrica com amplitude d , então a magnitude de seu primeiro harmônico é dada por [Åström e Hägglund 1995]

$$Y_{i_1} = \frac{4d}{\pi}.$$

Usando a desigualdade triangular na Eq. (2.10),

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{|rT(j\omega_o)|}{|r - (r-1)T(j\omega_o)|} \frac{4d}{\pi} \\ &\leq \frac{|rT(j\omega_o)|}{|r| - |(r-1)T(j\omega_o)|} \frac{4d}{\pi} = \frac{r|T(j\omega_o)|}{r - |r-1||T(j\omega_o)|} \frac{4d}{\pi}. \end{aligned}$$

Se $|T(j\omega_o)| = 1$ e $r > 1$, então

$$Y_1 \leq \frac{4dr}{\pi}.$$

Este resultado pode ser usado para manter a saída entre níveis de operação desejados. Suponha que Δy_{\max} é a variação máxima admissível para a saída do processo, de modo que $y_r' - \Delta y_{\max} \leq y(t) \leq y_r' + \Delta y_{\max}$. Então,

$$Y_1 \leq \frac{4dr}{\pi} = \Delta y_{\max},$$

e

$$d = \frac{\pi \Delta y_{\max}}{4} \cdot \frac{1}{r}. \quad (2.11)$$

Ou seja, a amplitude do relé deve ser ponderada por $1/r$ para manter a oscilação na saída do processo no mesmo nível, para diferentes valores de r .

Melhoria da Estimativa

A estimativa dos pontos de frequência da malha fechada pode ser utilizada diretamente para obter o valor correspondente da Função de Malha para o sistema da fig. 2.1. Para este caso, usando a Eq. (2.5), tem-se que

$$\hat{L}(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega}) = r \frac{1 + \hat{F}(e^{j\omega})}{1 - \hat{F}(e^{j\omega})}. \quad (2.12)$$

Em particular, quando os experimentos com relé são realizados utilizando valores de r que levam a oscilações de baixa frequência, é possível obter estimativas razoáveis para outros harmônicos, além da fundamental. Note que a estimação é feita com dados de entrada e saída do experimento em malha fechada.

Uma outra vantagem em utilizar a estimativa da Eq. (2.12) é recuperar a informação de fase na frequência de oscilação. No experimento da fig. 2.6, apenas a informação da magnitude da Função de Malha é obtida, por meio do ganho r . Da Eq. (2.12), obtém-se portanto a magnitude e a fase de $L(e^{j\omega})$ em uma frequência próxima à frequência em que $|L(e^{j\omega_0})| = r$.

2.7.3 Estimação da Função de Sensibilidade

A Função de Sensibilidade fornece informações relevantes no sistema em malha fechada, como, por exemplo, os níveis de rejeição a perturbações e margens de estabilidade [Doyle, Francis e Tannenbaum 1995]. Além disso, a moldagem espectral da Função de Sensibilidade pode ser usada no projeto de controladores, conforme observado em Doyle, Francis e Tannenbaum 1995, Langer e Landau 1999, Barros e Wittenmark 1997. Portanto, avaliar experimentalmente a Função de Sensibilidade é importante para determinar se especificações de projeto estão sendo satisfeitas, bem como para reprojeter o controlador de modo que a malha fechada atenda às especificações desejadas.

O procedimento básico apresentado na seção 2.4 é aplicado agora à estimação da Função de Sensibilidade. De maneira similar à seção anterior, a frequência e a fase em que a Função de Sensibilidade possui um certo valor de ganho são estimadas. Além disso, também deseja-se executar este experimento sem que o laço de controle seja interrompido e sob condições de operação bem definidas.

Estrutura do Experimento

Proposição 2.13 Considere o sistema em malha fechada mostrado na Fig 2.4. Assuma que para uma malha fechada estável $T(s)$ e um número real positivo r , a função de transferência

$$F(s) = 2 \frac{\frac{1}{r+1}}{1 - \frac{r}{r+1}T(s)} - 1 \tag{2.13}$$

é também estável. Se um ciclo limite está presente, a oscilação ocorre na frequência ω_o tal que

$$|S(j\omega_o)| \approx \frac{1}{r}.$$

Demonstração. Novamente,

$$\begin{aligned} F(s) &= 2 \frac{\frac{1}{r+1}}{1 - \frac{r}{r+1}T(s)} - 1 = \frac{2}{r} \frac{\frac{r}{r+1}}{1 - \frac{r}{r+1} \frac{L(s)}{1+L(s)}} - 1 \\ &= \frac{2}{(r+1) - r \frac{L(s)}{1+L(s)}} - 1 = \frac{2[1+L(s)]}{(r+1)(1+L(s)) - rL(s)} - 1 \\ &= \frac{2[1+L(s)]}{r + rL(s) + 1 + L(s) - rL(s)} - 1 = \frac{2[1+L(s)]}{1+L(s) + r} - 1 \\ &= \frac{1+L(s) - r}{1+L(s) + r}. \end{aligned}$$

Segue da Prop. 2.4 com $H(s) = 1 + L(s)$ que

$$|1 + L(j\omega_o)| \approx r,$$

ou, de maneira equivalente,

$$|S(j\omega_o)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega_o)|} \approx \frac{1}{r}.$$

■

O sistema em malha fechada usado para estimar a Função de Sensibilidade é mostrado na fig. 2.9.

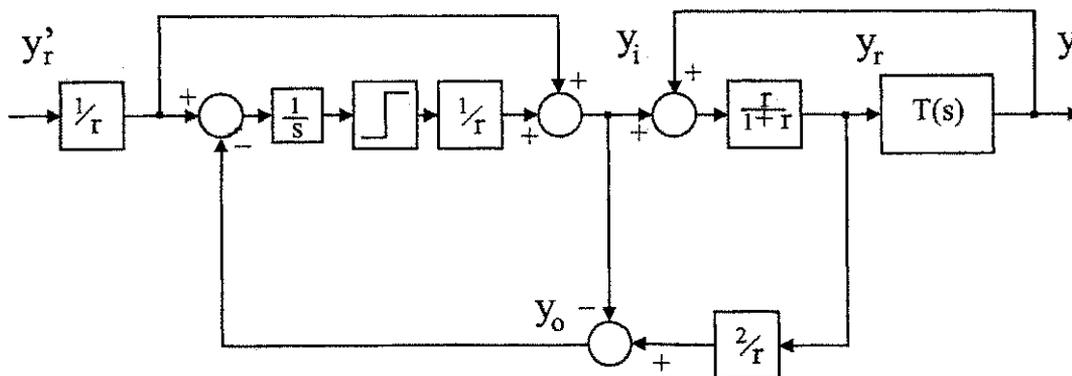


Figura 2.9: Experimento com relé para estimação da Função de Sensibilidade.

Estabilidade da Realimentação

Novamente, o experimento em malha fechada deve ser executado sob as mesmas condições de operação definidas na seção anterior.

A Proposição 2.7 pode ser usada para obter uma faixa de valores de r para os quais a estrutura mostrada na fig. 2.9 é estável. Neste caso, $H(s) = 1 + L(s)$, de modo que o ganho crítico de $1 + L(j\omega)$ deve ser estimado, o que não é uma tarefa fácil. Um procedimento alternativo para contornar esta situação é observar a malha fechada $T(s)$, conforme apresentado em seguida.

Proposição 2.14 *O experimento com relé mostrado na fig. 2.9 é estável para todo $0 \leq k < 1$, $k = r/(1+r)$, sempre que*

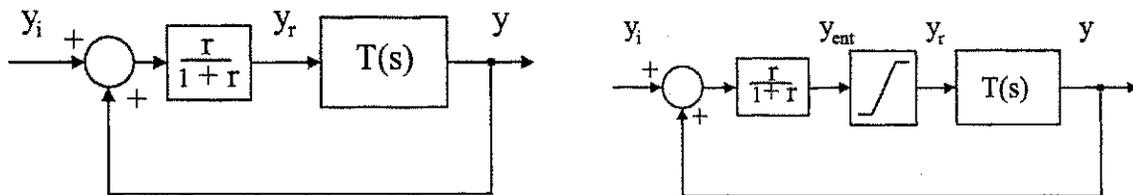
$$1 + k(-T(s)) = 0 \tag{2.14}$$

possuir raízes no semiplano complexo esquerdo.

Demonstração. A estabilidade do experimento com relé na fig. 2.9 é equivalente à estabilidade do sistema em malha fechada mostrado na fig. 2.10(a). Assim, a estabilidade é garantida se o seguinte polinômio característico possui raízes no semiplano complexo esquerdo

$$1 + \frac{r}{1+r}(-T(s)) = 0. \tag{2.15}$$

O resultado segue do fato de $T(s)$ ser estável. ■



(a) Relimentação usada para análise de estabilidade.

(b) Relimentação com saturação para proteção.

Figura 2.10: Estabilidade do experimento de estimação da Função de Sensibilidade.

A malha fechada mostrada na fig. 2.10(a) é de fato uma realimentação positiva em $T(s)$. Então, a estabilidade é garantida, se k é menor do que o ganho crítico de $-T(j\omega)$ na frequência ω_c^{-T} . Mas

$$\angle -T(j\omega_c^{-T}) = -180^\circ \Rightarrow \angle T(j\omega_c^{-T}) = 0^\circ.$$

Portanto, deve-se olhar para as frequências nas quais a fase de $T(j\omega)$ é nula.

Para a grande maioria dos sistemas em malha fechada, $\angle T(0) = 0^\circ$, de modo que a primeira possibilidade é a frequência nula. Sem perda de generalidade, assumamos $T(0) = 1$ e que não existe outra frequência $\omega \neq 0$ tal que $\angle T(j\omega) = 0^\circ$. Como $r/(1+r) < 1$, então, pelo Teorema do Ganho Pequeno¹, o sistema em malha fechada é estável.

¹Ver teorema na pág. 96.

Suponha agora que $\angle T(j\omega_c^{-T}) = 0^\circ$ para algum $\omega_c^{-T} \neq 0$. Então, se $|T(j\omega_c^{-T})| \leq 1$, e como $0 \leq r/(1+r) < 1$, o sistema em malha fechada mostrado na fig. 2.10(a) é estável, o que implica que o experimento com a Função de Sensibilidade é sempre estável para qualquer r . Caso contrário, se $|T(j\omega_c^{-T})| > 1$, a malha fechada mostrada na fig. 2.10(a) é estável se

$$\frac{r}{1+r} < \frac{1}{|T(j\omega_c^{-T})|} \Rightarrow r^{-1} > |T(j\omega_c^{-T})| - 1.$$

O problema agora é obter um método para estimar $|T(j\omega_c^{-T})|$ na frequência não nula ω_c^{-T} . Estendendo o resultado obtido com a proposição 2.3, uma realimentação com relé com integrador duplo, como mostrado na fig. 2.11, pode ser usada para obter o ponto de frequência desejado. Como o integrador duplo contribui com uma fase de -180° , o ciclo limite ocorre na frequência em que $\angle T(j\omega_c^{-T}) = 0^\circ$. No entanto, devido ao integrador duplo, mesmo funções de transferência de pouca complexidade podem apresentar sinais ilimitados na saída quando utilizadas em tal experimento.

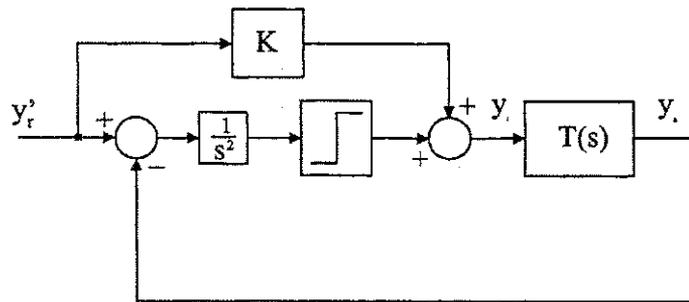


Figura 2.11: Experimento com relé e integrador duplo.

Observando mais atentamente a fig. 2.11, percebe-se que a ordem em que o relé e o integrador duplo aparecem afeta o sinal de saída. Para este caso particular, como $T(s)$ é estável e o seu sinal de entrada é limitado, a saída permanece limitada todo o tempo, mesmo com o crescimento da saída do integrador.

O procedimento para obter os valores de r para os quais o experimento com a Função de Sensibilidade é estável é apresentado em seguida.

1. Execute o experimento mostrado na fig. 2.11 com a malha fechada $T(s)$;
2. Se a saída do integrador cresce indefinidamente, então não existe $\omega \neq 0$ tal que $\angle T(j\omega) = 0^\circ$, e o experimento com a Função de Sensibilidade é estável para qualquer $r > 0$.
3. Se um ciclo limite estável é obtido, o ganho crítico de $-T(s)$ é estimado a partir de

$$K_c^{-T} = \frac{1}{|T(j\omega_c^{-T})|} = \frac{4d}{\pi a_{cl}} \frac{1}{(\omega_c^{-T})^2}$$

na qual d é a amplitude do relé e a_{cl} é a amplitude do sinal de saída.

- (a) Se $K_c^{-T} \leq 1$, então o experimento com a Função de Sensibilidade é estável para qualquer $r > 0$, caso contrário,

(b) se $K_c^{-T} > 1$, então o experimento com a Função de Sensibilidade é estável para

$$r^{-1} > K_c^{-T} - 1.$$

A margem de segurança introduzida no caso da estimação da Função de Malha pode ser estendida para o experimento com a Função de Sensibilidade. Note que a estabilidade do experimento mostrado na fig. 2.9 depende apenas do laço de realimentação mostrado na fig. 2.10(a). Sob as hipóteses de que $T(s)$ é estável e $T(0) = 1$, então uma não linearidade do tipo saturação pode ser usada para evitar sinais não limitados, conforme mostrado na fig. 2.10(b). A não linearidade é escolhida então como sendo

$$y_r(t) = \begin{cases} y_{ent}(t) & \text{se } y_r' - \Delta y_{\max} < y_{ent}(t) < y_r' + \Delta y_{\max}, \\ y_r' - \Delta y_{\max} & \text{se } y_{ent}(t) \leq y_r' - \Delta y_{\max}, \\ y_r' + \Delta y_{\max} & \text{se } y_{ent}(t) \geq y_r' + \Delta y_{\max}. \end{cases}$$

Amplitude do Relé

Considere agora o sistema em malha fechada na fig. 2.9. Então a função de transferência do sinal $y_i(t)$ para a saída do processo $y(t)$ é dada por

$$\frac{Y(s)}{Y_i(s)} = \frac{rT(s)}{1 + r - rT(s)}. \quad (2.16)$$

Seguindo os mesmos passos apresentados no caso da Função de Malha,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{|rT(j\omega_o)|}{|1 + r - rT(j\omega_o)|} \frac{4d}{\pi} \\ &\leq \frac{|rT(j\omega)|}{|1 + r| - |rT(j\omega_o)|} \frac{4d}{\pi} = \frac{r|T(j\omega_o)|}{1 + r - r|T(j\omega_o)|} \frac{4d}{\pi}. \end{aligned}$$

o qual, para $|T(j\omega_o)| = 1$, resulta em

$$Y_1 \leq \frac{4dr}{\pi}.$$

Como no caso da Função de Malha, a amplitude do relé deve ser proporcional a $1/r$, o que já está incluído no experimento mostrado na fig. 2.9.

Melhoria da Estimativa

Aplicando para este caso a Eq. (2.5), tem-se agora que

$$1 + \hat{L}(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega}) = r \frac{1 + \hat{F}(e^{j\omega})}{1 - \hat{F}(e^{j\omega})},$$

e, portanto,

$$\hat{S}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \hat{L}(e^{j\omega})} = \frac{1}{r} \frac{1 - \hat{F}(e^{j\omega})}{1 + \hat{F}(e^{j\omega})}.$$

Os mesmos comentários feitos para o caso da Função de Malha se aplicam nesta situação.

2.8 Conclusões

Um experimento para estimação da magnitude de uma função de transferência foi revisado neste capítulo. O procedimento básico consiste em, usando uma realimentação com relé, obter um ciclo limite aproximadamente na frequência em que a função de transferência analisada possui um valor de magnitude especificado. A partir da estrutura básica, foram introduzidos experimentos para estimação da função de transferência do processo, da Função de Malha e da Função de Sensibilidade de um sistema em malha fechada. Condições de estabilidade e margens de segurança para cada estrutura em particular foram apresentadas, o que torna a técnica adequada para sistemas industriais. As contribuições deste capítulo em relação ao trabalho anterior, apresentado em Arruda 2000, encontram-se resumidamente nas proposições 2.5, 2.7, 2.12 e 2.14, e no lema 2.8, bem como em vários comentários ao longo do texto.

O resultado obtido não permite, no entanto, prever o que acontece em certas situações, por exemplo, quando o valor de magnitude escolhido é satisfeito para diferentes frequências. Além disso, o método é baseado na análise por funções descritivas, de modo que tal aproximação pode não ser válida em certas circunstâncias. Para caracterizar tais comportamentos, bem como a estabilidade do ciclo limite, são necessárias ferramentas de análise de sistemas não lineares, baseadas no domínio do tempo. No próximo capítulo, são apresentados resultados sobre existência e estabilidade de ciclos limite simétricos unimodais para sistemas lineares com realimentação por relé. Os resultados serão aplicados em seguida no experimento apresentado neste capítulo.

Capítulo 3

Estabilidade e Existência de Ciclos Limite em Sistemas com Relé

3.1 Introdução

Sistemas com realimentação por relé são um caso particular de uma classe de sistemas não lineares denominada *sistemas lineares por partes*. Tais tipos de sistemas possuem certas propriedades que os tornam únicos, o que tem atraído a atenção da comunidade científica recentemente. Os sistemas lineares por partes dividem o espaço de estados em um número finito de regiões, regidas individualmente por equações diferenciais lineares distintas. As trajetórias deste sistema não linear são contínuas, e têm derivadas contínuas em todo o espaço de estados, exceto possivelmente nas superfícies que separam as regiões. Pode-se dizer que tais superfícies são responsáveis pela existência dos fenômenos diferentes e interessantes apresentados pelos sistemas lineares por partes.

Para o caso particular dos sistemas com realimentação por relé, as soluções freqüentemente tendem a um atrator periódico, ou ciclo limite. Em alguns casos, podem ocorrer outros fenômenos, como modos deslizantes, onde a solução “desliza” ao longo da superfície que separa duas regiões durante um tempo finito. Quando a ordem relativa do sistema linear é superior a um, o modo deslizante dá lugar a chaveamentos rápidos, porém finitos, e a solução atravessa a superfície várias vezes ao longo da trajetória. Finalmente, em certas configurações, foram observadas soluções que apresentam comportamento caótico.

Neste capítulo são apresentados resultados sobre existência e estabilidade de ciclos limite unimodais simétricos em sistemas com realimentação por relé. Inicialmente, são obtidas as expressões para análise da existência e estabilidade de ciclos limite em um sistema linear com realimentação por relé. Os resultados são usados para caracterizar o experimento de identificação com relé apresentado no capítulo 2. Para este caso particular, a matriz dinâmica do sistema linear, incluindo o integrador, é singular. Isso faz com que as expressões obtidas para avaliação da existência e da estabilidade dos ciclos limite apresentem singularidades, dificultando a implementação destas em rotinas numéricas. Explorando as peculiaridades da estrutura de realimentação na fig. 2.4 é pos-

sível obter expressões que não requerem a inversa da matriz dinâmica do sistema linear completo. A representação em espaço de estados do sistema é obtida para a realimentação apresentada na fig. 2.4, incluindo o integrador. Em seguida, as expressões obtidas para existência e estabilidade são simplificadas, de modo a remover a singularidade devida ao integrador. Finalmente, exemplos de simulação são apresentados, onde são observadas situações em que o experimento de identificação pode apresentar um comportamento não adequado para fins de identificação.

3.2 Mapas de Poincaré

Considere um sistema não linear

$$\dot{x} = f(x) , \tag{3.1}$$

de dimensão n , e seja γ uma órbita periódica de (3.1). Considere um ponto p pertencente a γ , e H um hiperplano de dimensão $n - 1$ ($H = x : v^T(x - p) = 0$, para algum $v \in R^n$), que seja transversal a γ em p , i.e., $v^T f(p) \neq 0$. Defina uma superfície $S \subset H$ como uma seção local tal que $p \in S$ e $v^T f(p) \neq 0$. A trajetória iniciando em p irá atingir S após T segundos, onde T é o período da trajetória periódica, conforme ilustrado na fig. 3.1. Devido à continuidade das soluções em relação às condições iniciais, qualquer trajetória começando em uma vizinhança do ponto p em S irá interceptar S na vizinhança de p após cerca de T segundos. Seja $U \subset S$ uma vizinhança de p (suficientemente pequena), tal que γ intercepta U apenas uma vez, em p . A estabilidade do ciclo limite é então avaliada a partir da estabilidade do sistema discreto

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}, \tau(x^{(k)})) , \tag{3.2}$$

em que $g : U \rightarrow S$ é o mapa de Poincaré entre o valor de $x^{(k)} \in U$ e o valor que atinge a superfície S após τ segundos, $x^{(k+1)}$. Note que p é um ponto de equilíbrio de $g(x)$, pois $p \in \gamma \Rightarrow p = g(p)$.

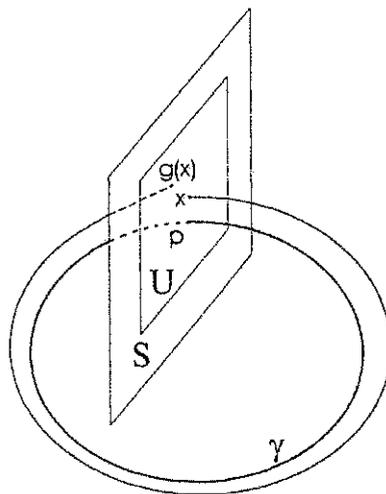


Figura 3.1: Ilustração do uso do Mapa de Poincaré para determinação da estabilidade de uma órbita periódica γ .

Essa discussão esclarece o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Seja γ uma órbita periódica de (3.1). Defina o mapa de Poincaré e o sistema discreto (3.2) como explicado anteriormente. Se p é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (3.2), então γ é assintoticamente estável.*

Observação 3.2 *Para averiguar a estabilidade do sistema (3.1), pode-se utilizar o Jacobiano do mapa de Poincaré (3.2). A órbita γ é assintoticamente estável se todos os autovalores do Jacobiano estão dentro do círculo unitário. A órbita é instável se pelo menos um autovalor do Jacobiano está fora do círculo unitário.*

3.3 Sistemas de Realimentação com Relé

Considere um sistema linear estritamente apropriado $G(s)$, com representação mínima¹ em espaço de estados dada por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

conectado em realimentação com um relé, ou seja,

$$u = \text{rel}(Cx) = \begin{cases} -1, & y > 0 \text{ e} \\ 1, & y < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

com $x \in \mathcal{R}^n$. O diagrama em blocos de tal sistema é mostrado na fig. 3.2.

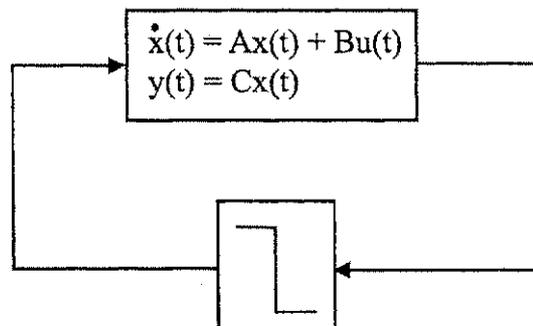


Figura 3.2: Sistema linear com realimentação por relé.

Um ciclo limite γ é o *conjunto limite* da órbita periódica não trivial [Khalil 1996], definida pela solução do sistema não linear

$$\dot{x} = Ax + B \cdot \text{rel}(Cx) = f(x), \quad (3.5)$$

¹Na representação mínima, o sistema é controlável e observável.

para uma dada condição inicial $x(0) = x_0$. O ciclo limite é dito *simétrico* se a solução periódica de (3.5) satisfaz $x(t + h^*) = -x(t)$, com $2h^*$ sendo o período da oscilação, e *unimodal* se o relé chaveia duas, e somente duas, vezes por período de oscilação. A partir da eq. (3.4), a superfície na qual ocorre o chaveamento do relé é definida como sendo

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n : Cx = 0\} .$$

Note-se que a escolha de S é bastante adequada, pois trata-se de um hiperplano que contém a origem e divide o espaço de estados em duas regiões distintas,

$$\begin{aligned} R^- &= \{x \in \mathcal{R}^n : Cx > 0\} , \\ R^+ &= \{x \in \mathcal{R}^n : Cx < 0\} , \end{aligned}$$

que são regidas respectivamente por

$$\dot{x} = Ax - B , \text{ e } \dot{x} = Ax + B .$$

3.3.1 Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas

Condições necessárias e suficientes para existência de ciclos limite no sistema de realimentação com relé da fig. 3.2, bem como condições suficientes para estabilidade assintótica ou instabilidade de tais ciclos limite são obtidas a partir dos teoremas apresentados em seguida.

Teorema 3.3 *Considere o sistema linear dado por (3.3) conectado em realimentação com o relé dado por (3.4), conforme mostrado na fig. 3.2. Existe um ciclo limite simétrico e unimodal com período $2h^*$ no sistema realimentado se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

$$(i) \quad g(h^*) \triangleq C(e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1}B = 0 , \quad (3.6)$$

$$(ii) \quad y(t) = C(e^{At}x^* - (e^{Ah^*} - I) A^{-1}B) > 0 , \quad (3.7)$$

$\forall t \in (0, h^*)$, em que

$$x^* = (e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1}B , \quad (3.8)$$

é a condição inicial $x(0) = x^* \in S$ que leva à solução periódica.

Demonstração. Ver apêndice. ■

Teorema 3.4 *O ciclo limite no Teorema 3.3 é assintoticamente estável se a matriz Jacobiana*

$$W = \left[I - \frac{wC}{Cw} \right] e^{Ah^*} , \quad (3.9)$$

com $w = e^{Ah^*} (Ax^* - B)$ possui todos os seus autovalores dentro do disco unitário aberto. Será instável se W possuir pelo menos um autovalor fora do disco unitário.

Demonstração. Ver apêndice. ■

Os resultados sobre existência e estabilidades obtidos nas formas das proposições anteriores podem ser estendidos para o caso de sistemas lineares com atraso. Tal procedimento será apresentado e discutido na seção seguinte.

3.3.2 Sistemas com Atraso de Transporte

A utilização de um sistema linear associado a um atraso de transporte (vide fig. 3.3) representa uma situação mais próxima da realidade em sistemas com realimentação por relé. O atraso de transporte pode representar tanto o tempo necessário para detecção do cruzamento com o zero, associado à sensibilidade do dispositivo (atraso na saída do sistema linear), como o atraso de atuadores localizados após o relé (atraso na entrada do sistema linear). Tais tipos de realimentação podem apresentar fenômenos interessantes, do ponto de vista de sistemas não lineares. Os resultados a seguir indicam a existência de ciclos limites simétricos unimodais com período de oscilação inferior ao atraso total do sistema, o que implica que tais oscilações só podem existir caso o sistema tenha sido levado à tal condição por meio de uma solução inicial, conforme será explicado.

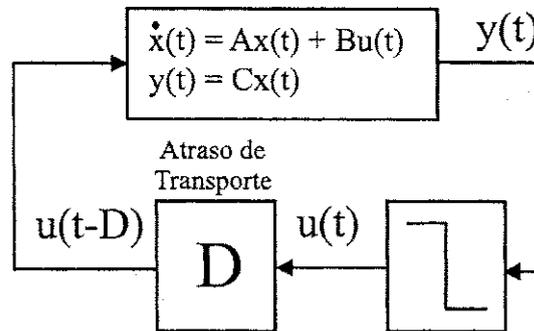


Figura 3.3: Realimentação com relé e atraso de transporte.

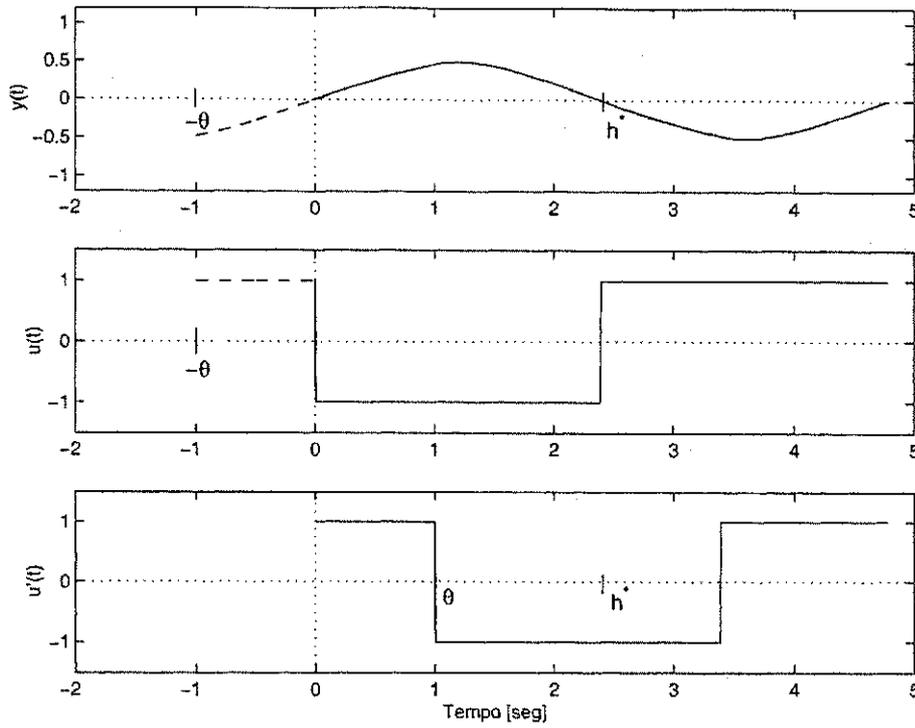
Exemplo 3.5 Para fins ilustrativos, considere um sistema de segunda ordem com atraso de transporte unitário,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-s}.$$

Uma solução periódica para este sistema é apresentada na fig. 3.4. Note que o sinal na entrada do sistema linear é uma versão atrasada da saída do relé, e o chaveamento ocorre em $t = \theta$. Deste modo, a análise de existência do ciclo limite é equivalente à análise de sistemas com relé com histerese [Varigonda e Georgiou 2001], se a superfície de chaveamento for definida como $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R}^n : Cx(\theta) = \varepsilon\}$.

Para a simulação do ciclo limite mostrado na fig. 3.4, é necessário conhecer apenas o valor de $x(0) = x^*$ no instante de intersecção com a superfície de chaveamento, e assumir a saída do subsistema do atraso de transporte como sendo unitária, até que os dados da saída do sistema linear preencham completamente o vetor de dados deste subsistema.

Um problema em utilizar um relé com histerese para análise do sistema apresentado na fig. 3.3 está no comportamento da solução apresentada na fig. 3.5. Neste caso, o atraso de transporte é superior à metade do período de oscilação, h^* , de modo que um ou mais chaveamentos ocorrem entre $-\theta \leq t < 0$ (comparar Figs. 3.4 e 3.5). Note que $h^* < \theta$, e o chaveamento na entrada do sistema linear ocorre em $t = \Delta\theta - 2h^*$, para este caso. Note também que estes tipos de solução


 Figura 3.4: Solução para o exemplo 3.5, com $h^* > \theta$.

não podem ser obtidos especificando-se apenas a condição inicial do sistema linear, é necessário especificar também uma solução inicial, $x(\tau)$, para $-\theta < \tau < 0$.

Em Åstrom 1995, apresentam-se teoremas para análise de ciclos limite em sistemas com atraso realimentados por relé. Tais resultados são reproduzidos em seguida, inclusive para os casos em que o atraso de transporte é superior à metade do período da oscilação.

Teorema 3.6 *Considere o sistema linear dado por (3.3) com atraso de transporte θ , conectado em realimentação com o relé dado por (3.4), conforme mostrado na fig. 3.2. Existe um ciclo limite simétrico e unimodal com período $2h^*$ no sistema realimentado se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

$$(i) \quad g_\theta(h^*) = C(e^{Ah^*} + I)^{-1}(e^{Ah^*}(2e^{-A\Delta\theta} - I) - I)A^{-1}B = 0, \quad (3.10)$$

$$(ii) \quad y(t) = Cx(t) > 0, \quad \forall t \in (0, h^*), \quad (3.11)$$

em que

$$x_\theta^* = (-1)^n (e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I) A^{-1} B, \quad (3.12)$$

é o ponto onde a trajetória intercepta a superfície de chaveamento $S = \{x \in \mathcal{R}^n : Cx = 0\}$, e $\Delta\theta = \theta - nh^*$, com n o maior inteiro tal que $nh^* < \theta$ (n é o número de chaveamentos que ocorrem no sinal $u(t)$ entre $-\theta \leq t < 0$). Para a solução periódica, é necessário uma solução inicial, $x(\tau)$, $-\theta \leq \tau < 0$ com $x(0) = x^*$.

Demonstração. Ver apêndice. ■

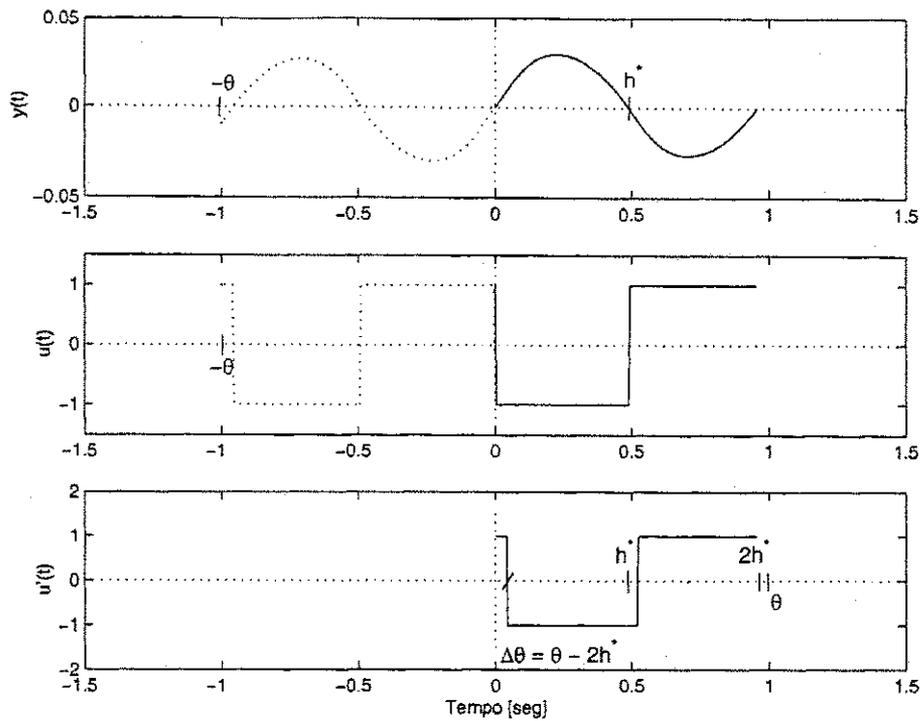


Figura 3.5: Solução para o exemplo 3.5, com $h^* < \theta$.

Note que as expressões apresentadas no Teorema 3.6 se igualam às expressões do Teorema 3.3 quando $\theta = 0$. A extensão do Teorema 3.4 para ciclos limite em sistemas com atraso é apresentada em seguida. São considerados apenas os casos em que $h^* > \theta$.

Teorema 3.7 *O ciclo limite no Teorema 3.6, com $h^* > \theta$, é assintoticamente estável se a matriz Jacobiana*

$$W_\theta = \left[I - \frac{w_\theta C}{C w_\theta} \right] e^{A h^*}, \quad (3.13)$$

com

$$w_\theta = e^{A h^*} (-A x^* - B) + 2e^{A(h^* - \theta)} B \quad (3.14)$$

possui todos os seus autovalores dentro do disco unitário aberto. Será instável se W_θ possuir pelo menos um autovalor fora do disco unitário.

Demonstração. Ver apêndice. ■

3.4 Representação em Espaço de Estados

O objetivo deste capítulo é avaliar a existência e estabilidade dos ciclos limites previstos pela proposição (2.4), para se ter um entendimento mais completo do experimento de identificação. Considere $H(s)$ uma função de transferência estável, com representação em espaço de estados dada por

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A_h \bar{x} + B_h \bar{u} \quad (3.15)$$

$$y = C_h \bar{x} + D_h \bar{u} \quad (3.16)$$

tal que

$$H(s) = C_h (sI - A_h)^{-1} B_h + D_h. \quad (3.17)$$

O procedimento para estimar a frequência na qual $H(j\omega)$ possui uma determinada magnitude foi definido no capítulo 2. Com a estrutura de realimentação mostrada na fig. 2.4, vários pontos da resposta em frequência de H podem ser determinados variando-se o parâmetro r .

Uma representação em espaço de estados para $F(s)$ (de y_i para y_o) é dada, a partir da realimentação apresentada na fig. 2.4. Tal resultado é apresentado em seguida.

Lema 3.8 Uma representação em espaço de estados para $F(s)$ (vide fig. 2.4) é dada por

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A_f \bar{x} + B_f y_i \quad (3.18)$$

$$y_o = C_f \bar{x} + D_f y_i \quad (3.19)$$

com

$$\begin{aligned} A_f &= A_h - \frac{B_h C_h}{r + D_h}, \quad B_f = \frac{B_h}{r + D_h}, \\ C_f &= 2 \left(1 - \frac{D_h}{r + D_h} \right) C_h \quad e \quad D_f = \frac{2D_h}{r + D_h} - 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

tal que

$$F(s) = C_f (sI - A_f)^{-1} B_f + D_f. \quad (3.21)$$

Demonstração. Da fig. 2.4, para o laço de realimentação mais interno, de y para y_i , tem-se que

$$\bar{u} = \frac{y_i - y}{r} = \frac{y_i - C_h \bar{x} - D_h \bar{u}}{r},$$

de modo que

$$\begin{aligned} r\bar{u} &= y_i - C_h \bar{x} - D_h \bar{u} \Rightarrow \\ \bar{u} &= \frac{y_i - C_h \bar{x}}{r + D_h}. \end{aligned}$$

Substituindo \bar{u} na representação em espaço de estados de $H(s)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x} &= A_h \bar{x} + B_h \frac{y_i - C_h \bar{x}}{r + D_h} \\ &= A_h \bar{x} + B_h \frac{y_i}{r + D_h} - \frac{B_h C_h \bar{x}}{r + D_h} \\ &= \left(A_h - \frac{B_h C_h}{r + D_h} \right) \bar{x} + \frac{B_h}{r + D_h} y_i. \end{aligned}$$

Como a saída de $F(s)$ é $y_o = y - (y_i - y) = 2y - y_i$, tem-se então

$$\begin{aligned} y_o &= 2(C_h \bar{x} + D_h \bar{u}) - y_i \\ &= 2C_h \bar{x} + 2D_h \frac{y_i - C_h \bar{x}}{r + D_h} - y_i \\ &= 2C_h \bar{x} - 2 \frac{D_h C_h}{r + D_h} \bar{x} + \frac{2D_h}{r + D_h} y_i - y_i \\ &= 2 \left(C_h - \frac{D_h C_h}{r + D_h} \right) \bar{x} + \left(\frac{2D_h}{r + D_h} - 1 \right) y_i. \end{aligned}$$

■

Para se obter uma representação completa do experimento, incluindo o integrador, escolhe-se a saída do mesmo como variável de estado, x_{n+1} , de modo que

$$\dot{x}_{n+1} = y_o = C_f \bar{x} + D_f y_i. \tag{3.22}$$

Portanto, com

$$x = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

a representação completa em espaço de estados se torna então

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_f & 0_{n \times 1} \\ C_f & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_f \\ D_f \end{bmatrix} u, \\ y_s &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x, \end{aligned} \tag{3.24}$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y_s &= Cx, \end{aligned} \tag{3.25}$$

com $y_s = x_{n+1}$ e $u = y_i$ (vide fig. 2.4). Por simplicidade, assume-se que a matriz A_f é não singular. Tal hipótese é plausível, uma vez que para existência de autovalores nulos em A_f é necessária a presença de integradores no denominador de $F(s)$. Mas para isso é necessário que o ganho direto de $H(s)$ seja cancelado pelo parâmetro r , ou seja, $H(0) = -r$ (vide Eq. 2.3). Como $r > 0$, e, em geral, $H(0) > 0$, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que A_f é não singular.

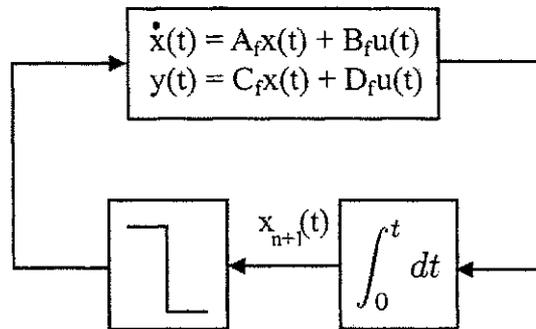


Figura 3.6: Representação em espaço de estados do experimento de identificação.

3.5 Análise de Existência e Estabilidade

3.5.1 Solução Periódica

Proposição 3.9 A solução para o sistema dado pela equação de espaço de estados (3.25) para $u(t) = -1$, $0 < t < h^*$ é dada por

$$x(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix},$$

com

$$\bar{x}(t) = e^{A_f t} \bar{x}(0) - (e^{A_f t} - I) A_f^{-1} B_f, \quad (3.26)$$

e

$$x_{n+1}(t) = C_f A_f^{-1} \{ (e^{A_f t} - I) \bar{x}(0) - [(e^{A_f t} - I) A_f^{-1} - It] B_f \} + x_{n+1}(0) - D_f t. \quad (3.27)$$

Demonstração. Se $u(t) = -1$, a solução da equação (3.25) é dada por

$$x(t) = \exp \left(\begin{bmatrix} A_f & 0_{n \times 1} \\ C_f & 0 \end{bmatrix} t \right) x(0) + \int_0^t \exp \left(\begin{bmatrix} A_f & 0_{n \times 1} \\ C_f & 0 \end{bmatrix} t \right) \bar{u}(t-s) ds B$$

Note-se que

$$\exp \left(\begin{bmatrix} A_f & 0_{n \times 1} \\ C_f & 0 \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{A_f t} & 0_{n \times 1} \\ C_f (e^{A_f t} - I) A_f^{-1} & 1 \end{bmatrix},$$

portanto,

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{A_f t} & 0_{n \times 1} \\ C_f (e^{A_f t} - I) A_f^{-1} & 1 \end{bmatrix} x(0) - \begin{bmatrix} \int_0^t e^{A_f s} ds & 0_{n \times 1} \\ \int_0^t C_f (e^{A_f s} - I) A_f^{-1} ds & \int_0^t ds \end{bmatrix} B$$

o que leva às eq. (3.26) e (3.27). ■

3.5.2 Existência de Órbitas Periódicas

Proposição 3.10 Considere o sistema de realimentação com relé na fig. 2.4 em que a representação em espaço de estados de $F(s)$ é dada por $\{A_f, B_f, C_f, D_f\}$. Então existe um ciclo limite simétrico unimodal com período $2h^*$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

$$(i) \bar{g}(h^*) \triangleq C_f A_f^{-1} [(e^{A_f h^*} + I)^{-1} (e^{A_f h^*} - I) A_f^{-1} - I \frac{h^*}{2}] B_f + D_f \frac{h^*}{2} = 0, \quad (3.28)$$

$$(ii) y(t) = C_f A_f^{-1} \{ (e^{A_f t} - I) \bar{x}^* - [(e^{A_f t} - I) A_f^{-1} - It] B_f \} - D_f t > 0, \quad \forall t \in (0; h^*), \quad (3.29)$$

com

$$x^* = \begin{bmatrix} (e^{A_f h^*} + I)^{-1} (e^{A_f h^*} - I) A_f^{-1} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

sendo a condição inicial $x(0) = x^* = \left[(\bar{x}^*)^T \quad x_{n+1}^* \right]^T$ que leva à solução periódica ($x^* \in S = \{x \in \mathcal{R}^{n+1} : Cx = 0\}$).

Demonstração. Como

$$\int_0^{h^*} e^{As} ds = \begin{bmatrix} (e^{A_f t} - I)^{-1} A_f^{-1} & 0_{n \times 1} \\ C(e^{A_f h^*} - I - A_f h^*) A_f^{-2} & h^* \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

e

$$\begin{aligned} (e^{Ah^*} + I)^{-1} &= \begin{bmatrix} e^{A_f t} + I & 0_{n \times 1} \\ C_f (e^{A_f t} - I) A_f^{-1} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (e^{A_f t} + I)^{-1} & 0_{n \times 1} \\ -C_f (e^{A_f t} + I)^{-1} (e^{A_f t} - I) A_f^{-1} / 2 & 1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Então (3.28) e (3.30) seguem da substituição de (3.31) e (3.32) em (3.6) e (3.8), e também do fato que na superfície de chaveamento $x_{n+1}^* = 0$. A eq. (3.29) segue do fato que não devem ocorrer outros chaveamentos no intervalo $0 < t < h^*$. ■

3.5.3 Estabilidade das Órbitas Periódicas

Proposição 3.11 *O ciclo limite obtido com o sistema em realimentação com relé da fig. 2.4 é assintoticamente estável se*

$$\bar{W} = e^{A_f h^*} - \frac{\bar{w} C_f A_f^{-1} (e^{A_f h^*} - I)}{C_f A_f^{-1} (\bar{w} + B_f) - D_f}, \quad (3.33)$$

com $\bar{w} = e^{A_f h^*} (A_f \bar{x}^* - B_f)$, possui todos os seus autovalores dentro do disco unitário aberto. Será instável se pelo menos um autovalor de \bar{W} estiver fora do disco unitário.

Demonstração. Do Teorema 3.4 e da equação (3.24),

$$w = \begin{bmatrix} \bar{w} \\ C A_f^{-1} (\bar{w} + B_f) - D_f \end{bmatrix},$$

e

$$W = \left[\begin{array}{c|c} \bar{W} & -\frac{\bar{w}}{C_f A_f^{-1} (\bar{w} + B_f) - D_f} \\ \hline 0_{n \times 1} & 0 \end{array} \right]$$

em que $C_f A_f^{-1} (\bar{w} + B_f) - D_f = \dot{y}_o(h^*) \neq 0$ por hipótese. Claramente W possui um autovalor nulo, que está dentro do ciclo unitário. Os autovalores restantes são obtidos da matriz \bar{W} . Portanto, de acordo com o Teorema 3.4, se \bar{W} possui todos os seus autovalores dentro do disco unitário aberto, o ciclo limite é estável. Se \bar{W} possuir algum autovalor fora do disco unitário, o ciclo limite será instável. ■

3.6 Exemplos e Discussão

3.6.1 Função de Transferência de Segunda Ordem

Considere a função de transferência de segunda ordem

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

O experimento com relé mostrado na fig. (2.4) é executado para diferentes valores do parâmetro r . A frequência do ciclo limite, ω_o , é medida e a magnitude de $H(j\omega_o)$ é calculada usando a transformada de Fourier discreta de N pontos, conforme descrito no capítulo 2, denotada aqui por r_{DFT} (ver Arruda 2000). Os resultados são mostrados na fig. 3.7 para $r = [0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9]$.

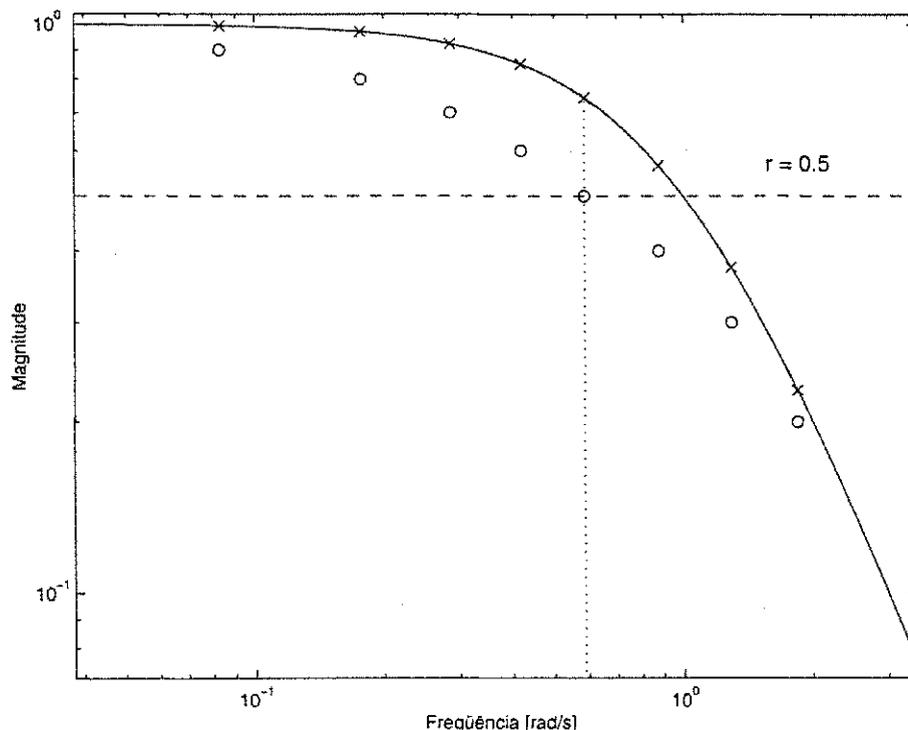


Figura 3.7: Diagrama de Bode de magnitude: $|H(j\omega)|$ (—), r versus ω_o (o) e r_{DFT} versus ω_o (x).

Considere como exemplo o caso $r = 0.5$. Então, a partir do experimento, $\omega_o = 0.5888$ e $r_{DFT} = 0.7399$ calculado com $N = 1000$ amostras tomadas sobre um período. A função de transferência $H(s)$ possui uma representação em espaço de estados dada por

$$A_h = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_h = [0 \ 1] \text{ e } D_h = 0,$$

enquanto que a representação de $F(s)$ é

$$A_f = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_f = [0 \ 2] \text{ e } D_f = -1.$$

Usando a proposição 3.10, o único ciclo limite existente possui um período de $2h^* = 10.6694$. Note-se que $\pi/h^* = 0.5889 \cong \omega_o$, e que $|H(j\frac{\pi}{h^*})| = 0.7425 \cong r_{DFT}$.

A estabilidade deste ciclo limite é confirmada pela proposição 3.11, com $\bar{w} = [0.0070 \ -0.0130]^T$

e

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 0.0127 & 0.0194 \\ -0.0235 & -0.0491 \end{bmatrix},$$

a qual possui os autovalores $\{0.0041; -0.0406\}$, que estão dentro do disco unitário aberto. Resultados similares são obtidos para os valores restantes de r . Note-se que, a partir do lugar de raízes de $H(s)$, $F(s)$ é estável para $r > 0$.

3.6.2 Função de Transferência com Pólos Complexos

Considere agora a função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s^2 + 2 \cdot 0.2s + 1)} \quad (3.34)$$

O diagrama de Bode para a magnitude de $H(j\omega)$ é mostrado na fig. 3.8. Note-se que para valores de r entre 2.3984 e 2.7138, $|H(j\omega_o)| = r$ é satisfeito para múltiplas frequências para cada r . Os resultados para alguns valores de r são mostrados na fig. 3.8, e discutidos na seqüência.

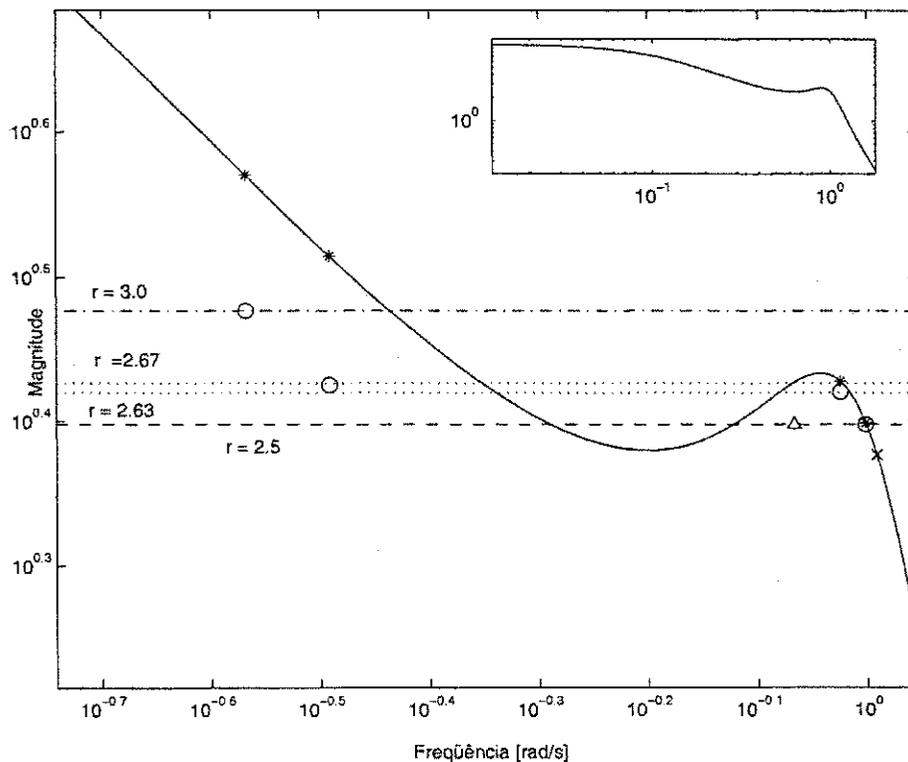


Figura 3.8: Diagrama de Bode de magnitude: $|H(j\omega)|$ (—), r versus ω_o (o), r_{DFT} versus ω_o (*) e ponto crítico (x).

Considere o caso em que $r = 2.5$, tal que a linha $r = 2.5$ intercepta $|H(j\omega)|$ em três frequências diferentes. A representação em espaço de estados para $F(s)$ é dada por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.04 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_f = [0 \ 0 \ 2] \text{ e } D_f = -1.$$

De acordo com a proposição 3.10, esta realimentação com relé possui dois ciclos limites distintos com $h^* = [3.1549 \ 3.6631]$, ao invés dos três previstos anteriormente. Em $h_1^* = 3.1549$, $\bar{w}_1 =$

$[-1.2412 \ 10.2659 \ 0.9081]^T$, e

$$\bar{W}_1 = \begin{bmatrix} -0.9815 & -0.1748 & -0.0049 \\ 1.5963 & 1.0204 & 1.6791 \\ 1.1083 & 0.1302 & 0.1673 \end{bmatrix},$$

a qual possui os autovalores $\{-0.9794; 0.9384; 0.2472\}$. Portanto, em $\omega_1^* = \pi/h_1^* = 0.9958 \text{ rad/s}$, o ciclo limite é estável. Isto corresponde ao círculo na fig. 3.8. Partindo de condições iniciais nulas, os sinais de saída após o transitório inicial são mostrados na fig. 3.9.

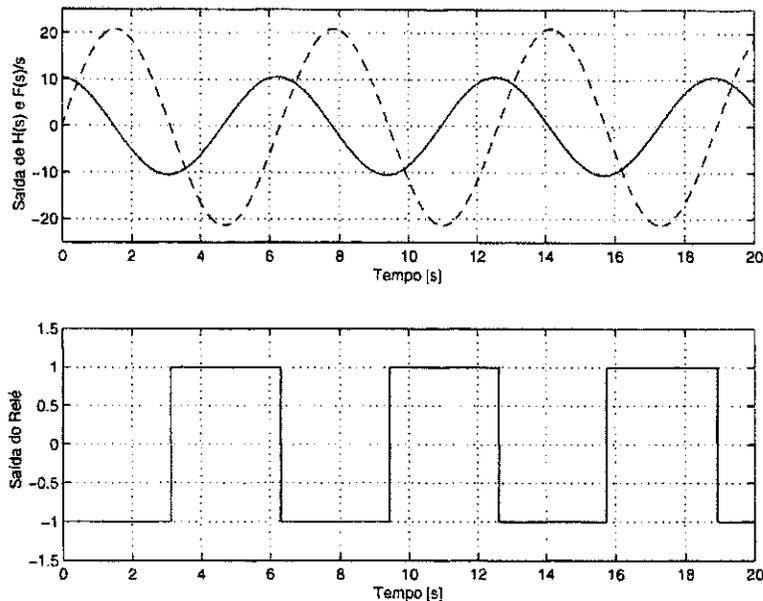


Figura 3.9: Ciclo limite estável. No gráfico superior, $y(t)$ (—) e $y_s(t)$ (---).

Para $h_2^* = 3.6631$, $\bar{w}_2 = [-0.8207 \ 0.9921 \ 0.6675]^T$, e

$$\bar{W}_2 = \begin{bmatrix} -2.3396 & -0.8728 & -1.1884 \\ 1.5167 & 0.8955 & 1.6328 \\ 2.1443 & 0.6399 & 1.0780 \end{bmatrix},$$

a qual possui os autovalores $\{-1.2376; 0.4358 \pm j0.2531\}$. Neste caso, o ciclo limite em $\omega_2^* = \pi/h_2^* = 0.8576 \text{ rad/s}$ é instável. Tal resultado corresponde ao triângulo na fig. 3.8. O comportamento instável da saída do processo nesta condição de operação é apresentado na fig. 3.10, onde o experimento é executado a partir da condição inicial x^* , obtida com a proposição 3.10.

Deve ser observado que a aplicação da proposição 3.10 para $2.63 < r < 2.67$ indica que não existem ciclos limites simétricos e unimodais no sistema realimentado da fig. 2.4. Considere por exemplo $r = 2.65$. Partindo de condições iniciais nulas, a saída do sistema realimentado após o transitório inicial é mostrada na fig. 3.11.

De fato, a oscilação não corresponde a um ciclo limite simétrico e unimodal, mesmo se observado ao longo de um período maior. Uma observação mais cuidadosa a partir dos estados da

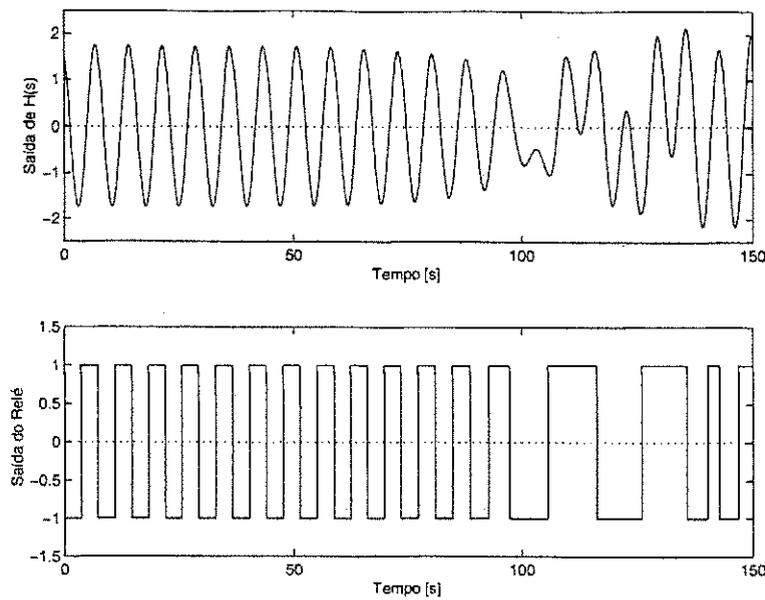


Figura 3.10: Ciclo limite instável.

representação de $F(s)$ (vide fig. 3.12) indica possivelmente a existência de um atrator caótico no sistema realimentado. No entanto, isto corresponde a uma pequena faixa de frequência comparada à resposta em frequência de $H(s)$.

3.7 Conclusões

O experimento com relé discutido em capítulos anteriores permite, de acordo com a análise por funções descritivas, obter a resposta em frequência de um processo, variando-se um parâmetro na malha de realimentação do experimento, de modo a gerar oscilações na frequência em que a magnitude da resposta em frequência do processo é aproximadamente igual a este parâmetro. A análise por funções descritivas nem sempre leva a resultados precisos, particularmente quando a magnitude da função de transferência não é pequena para a faixa de frequência acima da frequência do ciclo limite, devido ao grau de influência dos harmônicos.

Para os casos em que a resposta em frequência apresenta a mesma magnitude para mais de um ponto da curva, a análise por funções descritivas prevê mais de um ciclo limite. É importante observar todos os ciclos limites existentes para se avaliar completamente a resposta em frequência da função de transferência estudada. A aplicação das técnicas de análise no domínio do tempo na estrutura do experimento de identificação para um caso particular mostra que pode não existir um ciclo limite para cada magnitude correspondente, e alguns dos ciclos limite podem ainda ser instáveis.

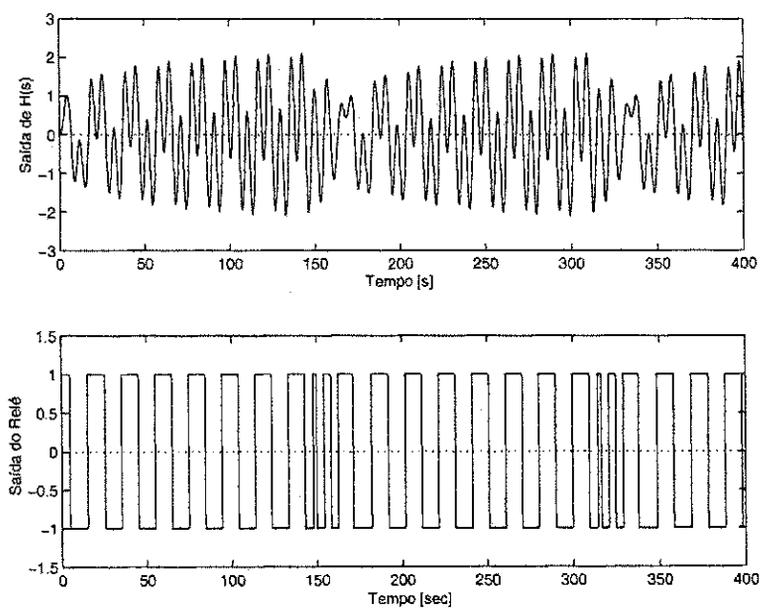


Figura 3.11: Saída do sistema para $r = 2.65$.

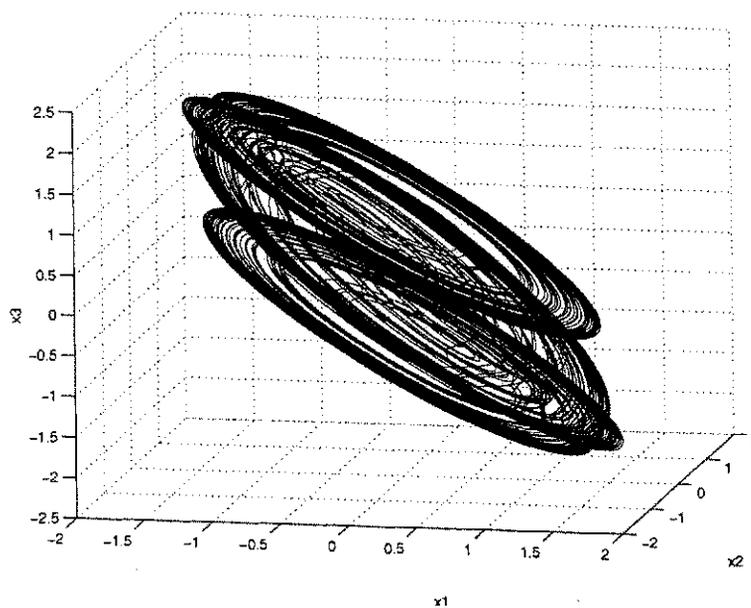


Figura 3.12: Visualização do comportamento caótico para $r = 2.65$ no espaço de estados.

Capítulo 4

Identificação de Modelos de Primeira Ordem com Atraso

4.1 Introdução

Existem muitas referências que tratam da estimação de modelos de primeira ordem com atraso, a partir de experimentos com relé (ver trabalho inicial em Luyben 1987, por exemplo). Até recentemente, na maioria dos casos, a aproximação por funções descritivas é usada para obter o modelo, o que resulta em erros, mesmo quando a estrutura do processo é a mesma do modelo. Atualmente, certo esforço tem sido dirigido no sentido de obter resultados mais precisos dos experimentos de modelagem com relé. Em Luyben 2001, a noção de fator de forma (*shape factor*) é introduzida, e o modelo é obtido levando-se em conta não só a amplitude e o período de oscilação, mas também a forma do sinal de saída. No entanto, assume-se que a frequência de oscilação é a frequência crítica, o que é apenas uma aproximação pela função descritiva, conforme visto em capítulos anteriores. Em Kaya e Atherton 2001a, parâmetros de modelos de primeira e segunda ordem com atraso, instáveis ou estáveis, são calculados sem aproximações, assumindo que o modelo possui a mesma estrutura do processo e que não há erros de medição, usando dados de um ciclo limite assimétrico gerado por realimentação com relé. O resultado é baseado no método *A-locus*, que fornece soluções exatas para a amplitude e frequência do ciclo limite. Finalmente, uma abordagem no domínio do tempo é apresentada em Wang, Hang e Zou 1997.

Neste capítulo apresenta-se um procedimento para se obter modelos de primeira ordem com atraso, baseado em dois experimentos com relé: o método do relé e o método do relé com integrador. A diferença em relação aos métodos existentes está no fato de se obter um modelo que representa bem o processo na faixa de frequências em que a fase do processo varia de -90° a -180° , além de permitir a escolha do ganho direto do modelo por três estratégias distintas.

4.2 Propriedades de Sistemas de Primeira Ordem com Atraso

O seguinte lema é obtido a partir do Teorema 3.6.

Lema 4.1 *Considere um modelo de primeira ordem com atraso,*

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\theta s}, \quad (4.1)$$

conectado em realimentação com um relé, conforme mostrado na fig. 3.3. Se o período do ciclo limite é $2h_1$, então

$$\theta = T \ln \left(\frac{e^{h_1/T} + 1}{2} \right). \quad (4.2)$$

Demonstração. Uma representação em espaço de estados do modelo é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (-1/T) x(t) + (K/T) u(t - \theta), \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Então, do Teorema 3.6, um ciclo limite existe com período $2h_1$, tal que

$$\begin{aligned} g_\theta(h_1) &= C (e^{Ah_1} + I)^{-1} \left[- \int_0^\theta e^{A(h_1-s)} ds + \int_\theta^{h_1} e^{A(h_1-s)} ds \right] B \\ &= (e^{-h_1/T} + 1)^{-1} (-e^{-(h_1-\theta)/T} + e^{-h_1/T} + 1 - e^{-(h_1-\theta)/T}) (-1/T)^{-1} \frac{K}{T} = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$K \frac{(1 + e^{-h_1/T} - 2e^{(\theta-h_1)/T})}{(e^{-h_1/T} + 1)} = 0.$$

Como $K/(e^{-h_1/T} + 1) \neq 0$, então

$$1 + e^{-h_1/T} - 2e^{(\theta-h_1)/T} = 0$$

levando à Eq. 4.2. ■

Este resultado indica que a família de modelos de primeira ordem com atraso que possuem um ciclo limite com período $2h_1$ é dada pela Eq. (4.2). Este é um resultado importante, pois a maioria dos procedimentos de estimação baseados em estimativas obtidas com o método do relé não leva a modelos capazes de reproduzir o ciclo limite na mesma frequência e amplitude de oscilação que o processo.

Observação 4.2 *Note que*

$$\lim_{T \rightarrow 0} \theta(T) = h_1 \text{ e } \lim_{T \rightarrow \infty} \theta(T) = h_1/2,$$

o que implica que, em um modelo de primeira ordem com atraso em realimentação com um relé, se o período do ciclo limite é $2h_1$, então o atraso de transporte é restrito ao intervalo $[h_1/2; h_1]$, que corresponde a 1/4 e 1/2 do período da oscilação.

Observação 4.3 A observação anterior também pode ser interpretada de uma maneira diferente. A realimentação de um relé com um processo de primeira ordem com atraso, cuja relação θ/T é grande, oscila com um período próximo a duas vezes o atraso de transporte ($2h_1 \cong 2\theta$), e a igualdade é obtida no limite, quando $T \rightarrow 0$. Este último é o caso de sistemas puramente com atraso de transporte. Quando a relação θ/T é pequena, o período de oscilação é próximo ao valor do atraso de transporte, e a igualdade ocorre no limite, quando $T \rightarrow \infty$. Este último é o caso de processos constituídos apenas por um integrador e um atraso de transporte. Portanto, apenas medindo o período de oscilação, é possível obter uma estimativa para o atraso de transporte total do processo, levando também em conta a forma do sinal de saída (ver Luyben 2001).

Considere agora o caso de um experimento com relé e integrador. Se o integrador é adicionado ao experimento, então a frequência de oscilação é próxima à frequência em que $\angle G(j\omega) = -\pi/2$. O seguinte lema também é obtido a partir do Teorema 3.6.

Lema 4.4 Considere o modelo de primeira ordem com atraso, na Eq. 4.1 conectado em realimentação com um relé e um integrador, tal que a parte linear do sistema é

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s(Ts + 1)} e^{-\theta s} \quad (4.3)$$

Se o período do ciclo limite é $2h_2$, então

$$2T(1 - 2e^{(\theta-h_2)/T} + e^{-h_2/T}) + (1 + e^{-h_2/T})(2\theta - h_2) = 0 \quad (4.4)$$

Demonstração. Uma representação em espaço de estados da parte linear é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K/T \\ 0 \end{bmatrix} u(t - \theta), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se este sistema é conectado em realimentação com um relé, conforme mostrado na fig. 3.3, então, do Teorema 3.6, um ciclo limite existe com período $2h_2$, tal que

$$\begin{aligned} g_\theta(h_2) &= C \left(\exp \left(\begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} h_2 \right) + I_{2 \times 2} \right)^{-1} \\ &\quad \left[- \int_0^\theta \exp \left(\begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (h_2 - s) \right) ds + \int_\theta^{h_2} \exp \left(\begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (h_2 - s) \right) ds B \right]. \end{aligned}$$

Como

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t/T} & 0 \\ T(1 - e^{-t/T}) & 1 \end{bmatrix},$$

e $g_\theta(h_2) = 0$, então o resultado segue após algumas manipulações apropriadas. ■

4.3 Modelagem de Sistemas de Primeira Ordem com Atraso

Nesta seção, é apresentado o procedimento para obtenção de um modelo de primeira ordem com atraso, usando o método do relé e o método do relé com integrador. Claramente, os lemas 4.1 e 4.4 podem ser combinados para fornecer uma solução para θ e T , usando apenas a informação do período do ciclo limite em ambos os experimentos. Inserindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.4) resulta em

$$0 = 2T(1 - e^{(h_1-h_2)/T}) + (1 + e^{-h_2/T})(2T \ln \left(\frac{e^{h_1/T} + 1}{2} \right) - h_2). \quad (4.5)$$

As raízes da Eq. (4.5) são calculadas usando métodos numéricos típicos, e quando uma raiz \hat{T} é encontrada, o atraso de transporte correspondente, $\hat{\theta}$, é obtido a partir da Eq. (4.2). Note que as raízes da Eq. (4.5) podem ser validadas observando o fato de que o valor correspondente de $\hat{\theta}$ deve estar no intervalo $[h_1/2; h_1]$, de acordo com o comentário 4.2. Os parâmetros calculados desta maneira fornecem uma família de modelos da forma

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} e^{-\hat{\theta}s}. \quad (4.6)$$

Observação 4.5 *Podem não haver solução para a Eq. (4.5) se a dinâmica não modelada é significativa. No entanto, esta situação pode ser prevista apenas observando os valores de h_1 e h_2 , o que será explorado em outra ocasião.*

Dos parâmetros do modelo de primeira ordem com atraso, falta agora determinar o ganho direto do modelo. Serão consideradas três alternativas para a estimação do ganho direto K :

1. aplicar um degrau em malha aberta;
2. medir o pico do sinal de saída no experimento com relé;
3. calcular uma estimativa via mínimos-quadrados, usando dados do experimento.

Essas alternativas serão discutidas em seguida, e em todas será necessária a informação da amplitude do relé, d . Note que todas as alternativas propostas darão o mesmo resultado se o processo é de primeira ordem com atraso, e o efeito do ruído é desprezível.

4.3.1 Aplicando um Degrau em Malha Aberta

Se um degrau é aplicado em malha aberta, então uma estimativa do ganho direto do processo é dada por

$$\hat{K}_1 = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)}. \quad (4.7)$$

Esta estimativa é boa em baixas frequências, porém leva a um erro de modelagem da magnitude na frequência crítica. Se a intenção é usar o modelo para obter parâmetros de controladores, como sintonia de controladores PID, erros em baixa frequência são bem tolerados. Além disso, em todos os casos o modelo é ajustado usando dois pontos da resposta em frequência, o que aumentaria a sua precisão.

4.3.2 Medindo o Pico do Sinal de Saída

A informação do valor máximo da saída do processo também pode ser usada para estimar o seu ganho direto. A saída do processo em uma realimentação com relé, de amplitude d , durante meio período, é dada por

$$y(t) = \begin{cases} Kd(1 - e^{-t/T}), & 0 < t \leq \theta \\ Kd(2e^{(\theta-t)/T} - e^{-t/T} - 1), & \theta < t \leq h_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

É possível mostrar que o máximo que $y(t)$ alcança é $\max_t y(t) = Kd(1 - e^{-\theta/T})$. Se este valor é comparado ao valor máximo do sinal de saída, então uma estimativa para o ganho direto do processo pode ser obtida a partir de

$$\hat{K}_2 = \frac{y_{peak}}{d(1 - e^{-\hat{\theta}/\hat{T}})} \quad (4.9)$$

Essa estimativa leva a um modelo que apresenta o mesmo valor de pico no sinal de saída, quando aplicado em um experimento com relé. A grande vantagem desta estimativa está no fato de não precisar armazenar nenhum dado de entrada ou saída do experimento, exceto o período de oscilação em ambos os testes, e o pico do sinal de saída durante o experimento com relé. No entanto, pode ser necessário considerar o efeito do ruído, ao medir o valor de pico do sinal de saída.

4.3.3 Usando Mínimos Quadrados

Finalmente, uma terceira estimativa pode ser obtida a partir de uma estimação mínimos quadrados, usando os dados de saída durante o experimento com um relé de amplitude d , e período de amostragem T_a . A saída do modelo na Eq. (4.1) para o método do relé pode ser escrita na forma de um regressor linear,

$$\hat{y}_1(kT_a) = \Theta \phi_1(kT_a), \quad (4.10)$$

com $\Theta = K$ e $\phi_1(kT_a)$ é a saída de um modelo de primeira ordem com atraso, cujo ganho é unitário e parâmetros dados por $\hat{\theta}$ e \hat{T} , para um sinal de entrada da forma

$$u(k) = \begin{cases} +d, & 0 < kT_a \leq \hat{\theta} \\ -d, & \hat{\theta} < kT_a \leq h_1 \end{cases}, \quad (4.11)$$

com condição inicial $\hat{y}_1(0) = 0$, de modo a levar à solução em ciclo limite. Para o caso do método do relé com integrador, a saída também pode ser escrita como

$$\hat{y}_2(kT_a) = \Theta \phi_2(kT_a), \quad (4.12)$$

com $\Theta = K$ e $\phi_2(kT_a)$ é a saída de um modelo de primeira ordem com atraso mais integrador, cujo ganho é unitário e parâmetros dados por $\hat{\theta}$ e \hat{T} , para o mesmo sinal de entrada da Eq. (4.11), com condição inicial dada conforme a Eq. (3.12). A estimativa mínimos quadrados é então dada por (ver Ljung 1999)

$$\hat{K}_3 = \Theta_N^{LS} = \left(\sum_{n=1}^N \phi^2(k) \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \phi(k) y(k), \quad (4.13)$$

onde o conjunto de dados $[\phi, y]$ pode ser $[\phi_1, y_1]$, $[\phi_2, y_2]$ ou uma combinação de ambos. Estas estimativas são melhores em certas faixas de frequência do que as anteriores. Se $[\phi_1, y_1]$ é escolhido, então uma melhor aproximação da magnitude e fase do processo é obtida em torno da frequência crítica, e se $[\phi_2, y_2]$ é escolhido, o modelo é melhor em torno da frequência em que a fase do processo é $-\pi/2$. Se os vetores são combinados, então o modelo se aproxima do processo em torno de uma frequência que se encontra entre a frequência em que a fase do processo é $-\pi/2$ e entre a frequência em que a fase é $-\pi$, que é uma faixa importante para controle.

4.4 Exemplos de Simulação

Nesta seção, são apresentados exemplos de simulação. Será discutida a eficiência do procedimento de estimação na presença de dinâmica não modelada. Como este não é o caso para processos de primeira ordem com atraso, sua análise será adiada para o final da seção, incluindo os efeitos do ruído.

4.4.1 Processos de Segunda Ordem com Atraso

Considere um processo dado por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-\theta s}, \quad \theta = 0.1; 1; 10. \quad (4.14)$$

O método do relé e o método do relé com integrador são aplicados a este conjunto de processos, e os períodos de oscilação obtidos são apresentados na tabela 4.1.

	Atraso de Transporte		
	0.1	1	10
h_1 (sec)	0.7429	2.3878	11.6783
h_2 (sec)	3.5284	5.7721	23.9999

Tabela 4.1: Medições de período para o exemplo 4.4.1

Com as medições de h_1 e h_2 , as estimativas $\hat{\theta}$ e \hat{T} são obtidas. O ganho direto do processo é então calculado usando as três abordagens apresentadas na seção anterior. Os resultados são apresentados nas três primeiras linhas da tabela 4.2. A estimação usando o método dos mínimos quadrados é executada com o vetor de regressão constituído por dados de ambos os experimentos, usando $N = 1000$ pontos por período de oscilação. O diagrama de Bode do processo e dos modelos para o caso $\theta = 0.1$ é apresentado na fig. 4.1, e os diagramas de Nyquist na fig. 4.2. Da fig. 4.1, nota-se que os três modelos possuem o mesmo ângulo de fase, uma vez que este depende apenas de $\hat{\theta}$ e \hat{T} . Note o bom casamento do modelo com o processo em ambas as frequências próximas

Processos		Estimativas				
Estrutura	Atraso	$\hat{\theta}$	\hat{T}	\hat{K}_1 (degrau)	\hat{K}_2 (pico)	\hat{K}_3 (MQ)
$\frac{1}{(s+1)^2}e^{-\theta s}$	0.1	0.3969	2.6964	1.0000	0.4875	0.5945
	1	1.6658	1.3458	1.0000	0.7024	0.7287
	10	10.9516	1.0484	1.0000	0.9998	0.9467
$\frac{(1-s)}{(s+1)^2}e^{-\theta s}$	0.1	1.4997	1.8024	1.0000	1.4005	1.4629
	1	2.4140	1.6767	1.0000	1.4368	1.3256
	10	11.2988	1.7018	1.0000	1.4279	1.0695
$\frac{1}{s+1}e^{-\theta s}$	0.1	0.101	0.9927	0.9972	1.2098	0.9997
	1	1.001	0.9991	0.9975	1.1943	0.9998
	10	9.994	1.0063	0.9974	1.2900	1.0005

Tabela 4.2: Resultados de modelagem para os exemplos 4.4.1, 4.4.2 e 4.4.3

àquelas em que a fase do processo é $-\pi/2$ e $-\pi$. Isto se deve ao procedimento empregado, onde tais pontos de frequência são usados para calcular exatamente qual a constante de tempo e o atraso de transporte são necessários para obter um modelo de primeira ordem com atraso. As saídas do processo e dos modelos durante o ensaio com o método do relé são mostradas na fig. 4.4. Note que, enquanto o modelo obtido com a resposta ao degrau leva a uma amplitude maior na frequência crítica, a saída do modelo usando a estimativa do valor de pico possui amplitude do processo nesta situação, e o modelo usando a estimativa por mínimos quadrados leva a um valor intermediário. Finalmente, respostas ao degrau em malha aberta são apresentadas na fig. 4.3.

4.4.2 Processos de Fase Não-Mínima

Considere agora a família de processos dada por

$$G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}e^{-\theta s}, \quad \theta = 0.1; 1; 10. \quad (4.15)$$

Os resultados dos experimentos com relé são mostrados na Tabela 4.3. Os modelos obtidos são mostrados nas linhas correspondentes da tabela 4.2, e a estimação usando o método dos mínimos quadrados é executada com o vetor de regressão combinando os dados de ambos os experimentos, usando $N = 1000$ pontos por período de oscilação. Note que, em cada estimativa, o atraso de transporte é bem superior ao valor real. Isto é provocado pelo comportamento de resposta inversa, típico em tais modelos, que se assemelha a um atraso no sinal de saída.

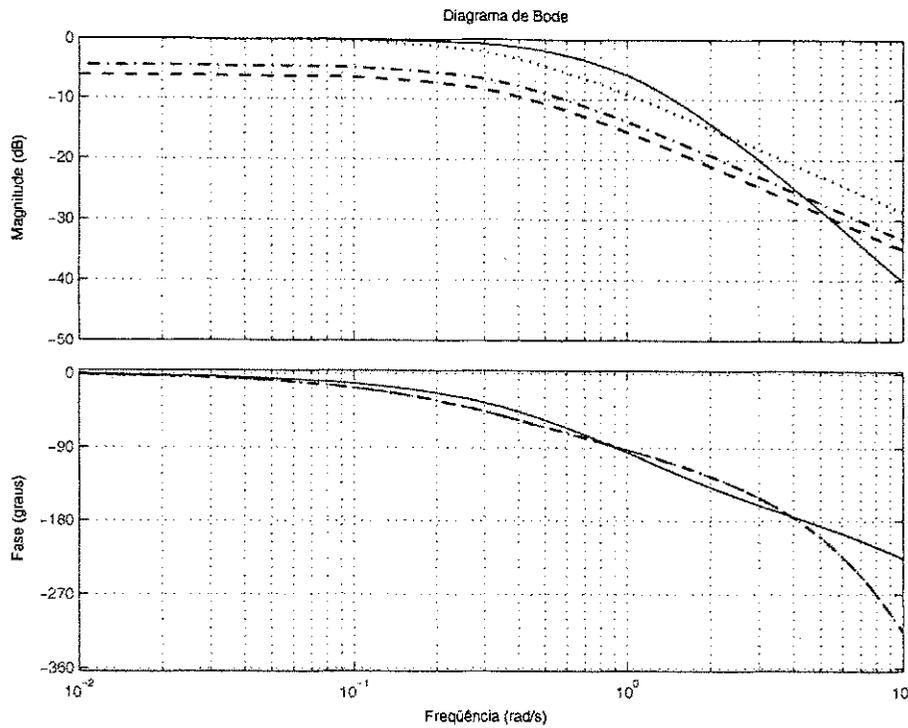


Figura 4.1: Diagrama de Bode para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (· ·), o pico da oscilação (— —) e a estimativa mínimos-quadrados (·-·).

	Atraso de Transporte		
	0.1	1	10
h_1 (sec)	2.3068	3.3648	12.4773
h_2 (sec)	6.0446	7.9343	26.0000

Tabela 4.3: Medições de período para o exemplo 4.4.2

4.4.3 Efeitos do Ruído

Considere os seguintes processos

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-\theta s}, \quad \theta = 0.1; 1; 10.$$

Os processos são agora simulados levando em conta os efeitos do ruído no sinal de saída, para verificar a precisão do procedimento proposto. O ruído é adicionado ao sinal de saída. Para que se tenha a mesma relação sinal/ruído, a amplitude do relé é ajustada de acordo com o nível de saída desejado (unitário, neste caso). A saída é observada por três períodos consecutivos, e o período é calculado como o valor médio das curvas obtidas. Os valores medidos são apresentados na Tabela 4.4. Um período do ciclo limite para cada caso é mostrado na fig. 4.5. Os resultados da estimação são apresentados na terceira linha da Tabela 4.2. As estimativas da constante de tempo e do atraso de transporte são bastante próximas do valor real, pois estas dependem apenas do período de oscilação em cada experimento. As estimativas do ganho direto foram razoáveis, exceto para a estimativa obtida pelo pico do sinal de saída, devido à sensibilidade deste valor ao ruído. Neste

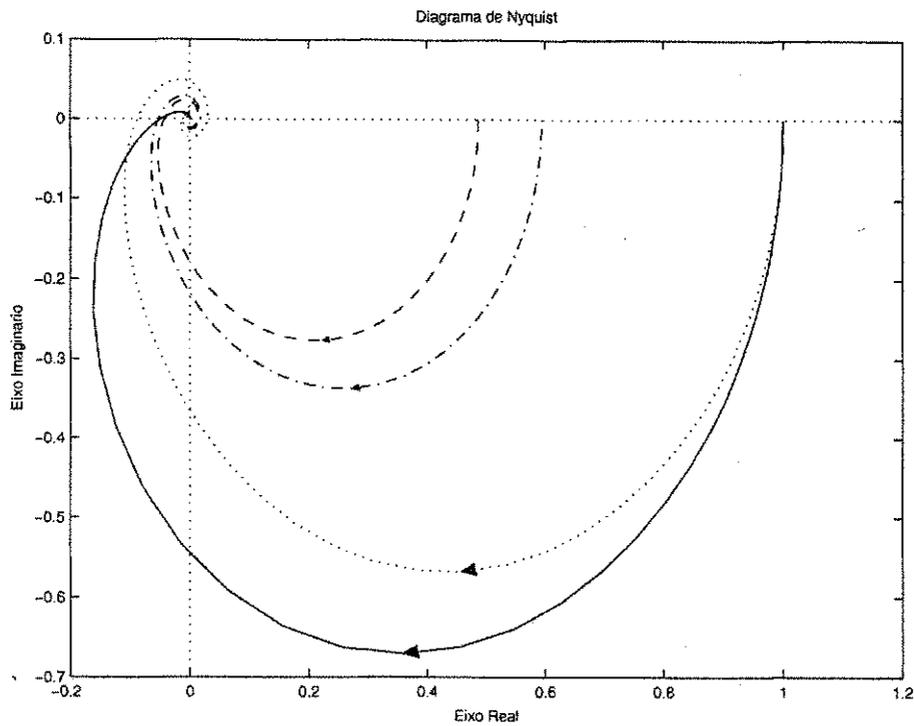


Figura 4.2: Diagrama de Nyquist para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (\cdot), o pico da oscilação (---) e a estimativa mínimos-quadrados ($\cdot-$).

caso, podem ser utilizados filtros devidamente projetados para se contornar o problema.

	Atraso de Transporte		
	0.1	1	10
h_1 (sec)	0.1918	1.4908	10.6918
h_2 (sec)	1.0750	3.7512	22.0012

Tabela 4.4: Medições de período para o exemplo 4.4.3

4.5 Conclusões

A modelagem sem aproximações de processos de primeira ordem com atraso pode ser conseguida com dados de experimentos com relé, se uma análise no domínio do tempo é utilizada. Os resultados mostram que no método do relé, o atraso de transporte e a constante de tempo possuem uma relação clara, definida pela frequência do ciclo limite, caso se deseje que o modelo reproduza tal frequência em uma simulação. Executando o método do relé com integrador é possível obter estimativas do atraso de transporte e da constante de tempo, que leva a uma família de modelos cuja fase é igual à do processo, em frequências próximas às frequências cuja fase é $-\pi/2$ e $-\pi$. O modelo

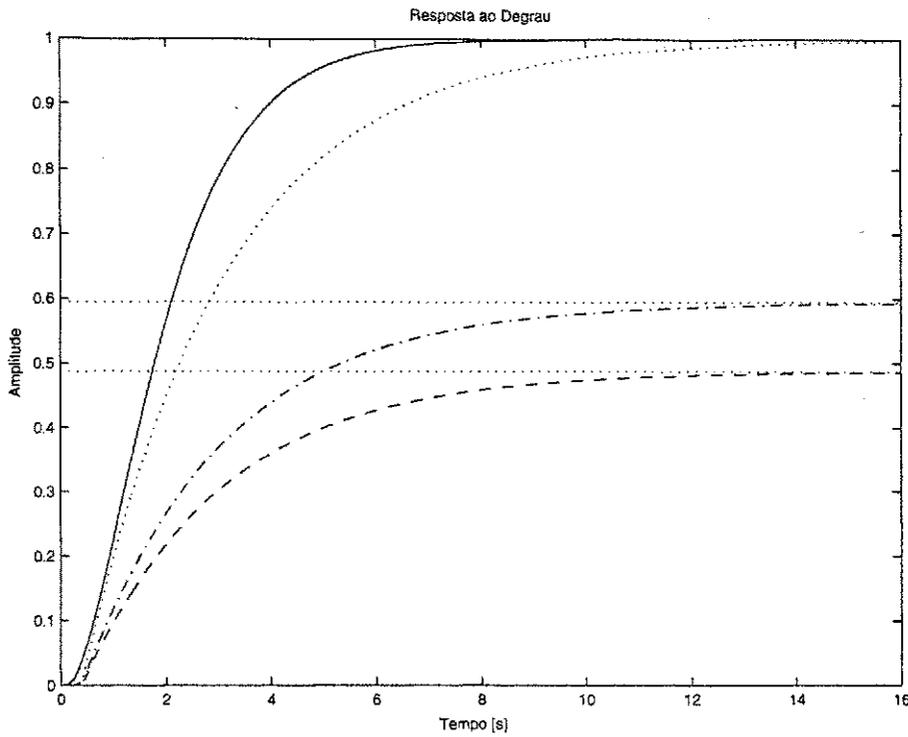


Figura 4.3: Resposta ao degrau para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (·), o pico da oscilação (---) e a estimativa mínimos-quadrados (-·-).

é finalmente obtido com uma estimativa do ganho direto do processo. Três alternativas para se obter tal estimativa foram apresentadas e discutidas, considerando a precisão e a complexidade de implementação prática. Exemplos de simulação são usados para ilustrar as propriedades do procedimento na presença de dinâmica não modelada e ruído. Os resultados mostram que uma boa modelagem é obtida em uma faixa de frequências importante para controle.

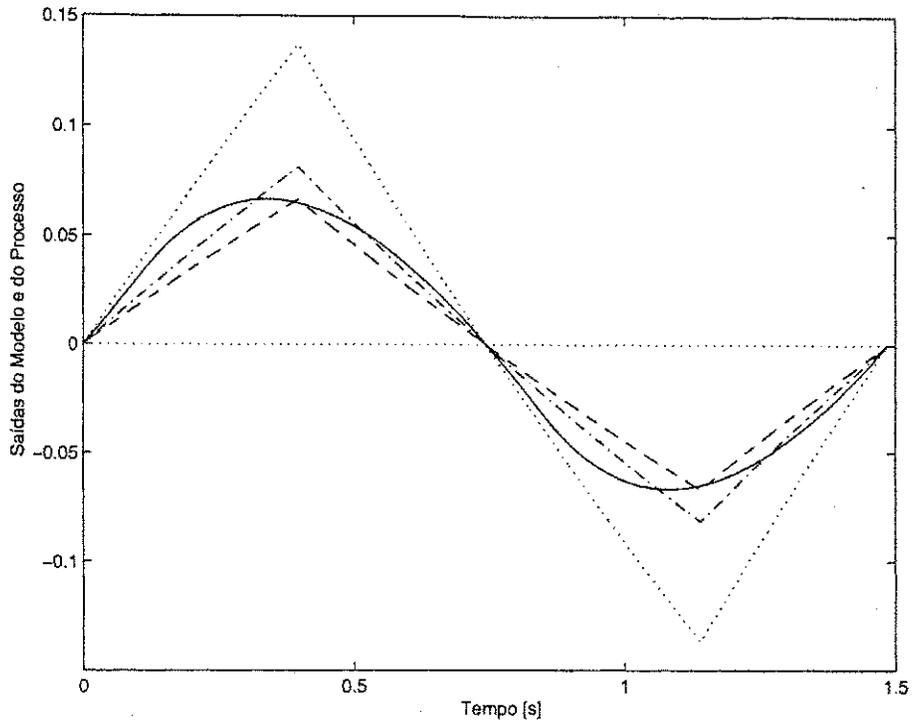


Figura 4.4: Ciclo limite para o exemplo 4.4.1 (caso $\theta/T = 0.1$): (—) processo, e modelos usando a resposta ao degrau (· ·), o pico da oscilação (— —) e a estimativa mínimos-quadrados (- · -).

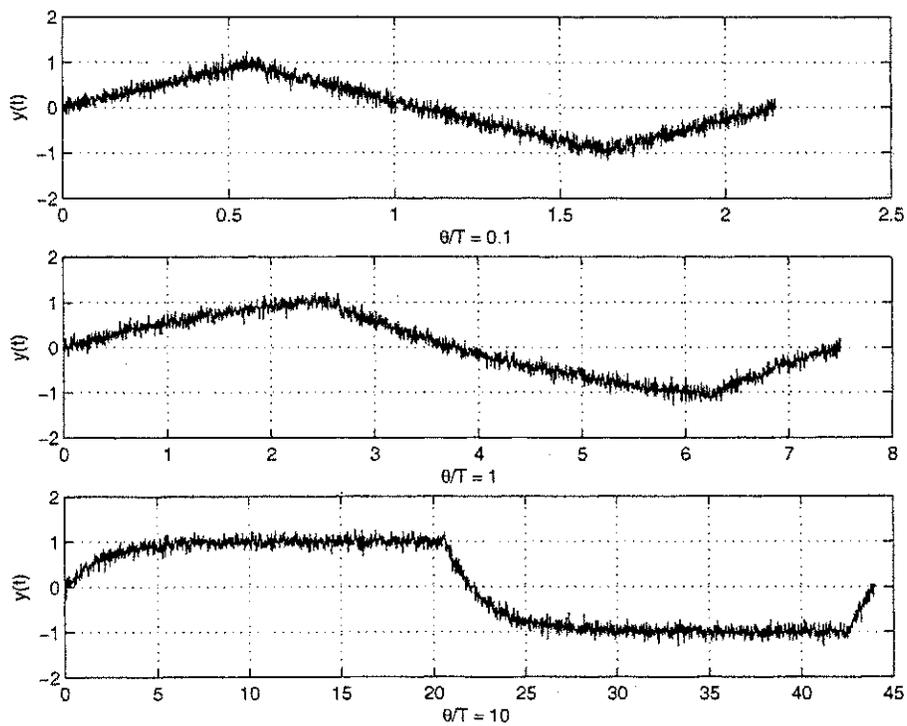


Figura 4.5: Saídas do processo para o exemplo 4.4.3.

Capítulo 5

Sintonia de Controladores PID

5.1 Introdução

O controlador *proporcional-integral-derivativo* (PID) é o tipo de controlador mais encontrado em processos industriais [Åström e Hägglund 1995]. Pesquisas mostram que, em mais de 90% dos laços de controle na indústria, são utilizados controladores PID, e a grande maioria utiliza apenas as partes proporcional e integral (PI) [Åström e Hägglund 1995, Yu 1999]. Grande parte da popularidade do controlador PID se deve à simplicidade da sua estrutura. Além disso, com algumas sofisticações a mais, o controle PID é suficiente para a maioria dos problemas de controle existentes [Yu 1999].

O projeto de um controlador PID está relacionado à escolha dos três parâmetros, ou ganhos, do controlador. O procedimento sistemático da escolha dos parâmetros do controlador, baseada em experimentos com o processo, é denominado *sintonia*. O objetivo é chegar a sistemas com desempenho satisfatório, a partir do ajuste de tais parâmetros. A sintonia do controlador é tema principal em centenas de artigos, várias dissertações de mestrado e teses de doutorado, e alguns livros, como Åström e Hägglund 1995, Yu 1999 e Tan et al. 1999. Apesar de todo esse volume de pesquisa, ainda há uma grande distância entre os resultados teóricos e sua utilização na indústria. Algumas estatísticas apresentadas em Yu 1999 ilustram este fato.

- Indústria de celulose do Canadá, (*pulp and paper industry*) em cerca de 2000 laços de controle, em 1993:
 - 20% dos laços operavam satisfatoriamente;
 - 30% tinham desempenho insatisfatório devido à má sintonia do controlador;
 - 30% tinham desempenho insatisfatório devido a problemas nas válvulas de controle;
 - 20% tinham desempenho insatisfatório devido ao projeto do processo e/ou do sistema de controle.

- Indústrias de processos e manufatura, em 1997
 - Engenheiros e gerentes citam a sintonia de controladores PID como uma tarefa difícil.

Nos últimos anos, tem-se observado uma forte tendência em agregar procedimentos de identificação aos controladores, de modo a torná-los auto-configuráveis, ou seja, com sintonia automática. Tal fato se deve não só ao crescente desenvolvimento da microeletrônica e às necessidades econômicas da indústria, mas também ao avanço da teoria de controle neste tipo de aplicação. A maioria dos equipamentos é baseada no método do relé para auto-excitar o processo em uma frequência apropriada [Lee et al. 1993, Schei 1992, Schei 1994, Ho, Hang e Zhou 1997, Voda e Landau 1995, Park, Sung e Lee 1998, Yu 1999, Li, Eskinat e Luyben 1991, Wang, Hang e Bi 1999, Wang, Desarmo e Cluett 1999, Arruda e Barros 2000]. Conforme visto anteriormente, um processo em realimentação com um relé tende a oscilar em torno da sua frequência crítica, o que fornece informações importantes para o projeto do controlador. A idéia é obter desempenho satisfatório, mesmo se tendo pouco ou nenhum conhecimento *a priori* da dinâmica do processo controlado. Além disso, são preferidos critérios de desempenho e estabilidade que possuam apelo intuitivo e sejam conhecidos por operadores do processo.

Neste capítulo, apresentam-se técnicas conhecidas de sintonia de controladores PID para processos de primeira ordem com atraso de transporte, e um novo enfoque na sintonia pelo método ótimo-simétrico. O objetivo é aplicar os resultados obtidos no capítulo anterior, e compará-los para as técnicas de sintonia apresentadas.

O controlador PID considerado aqui possui função de transferência dada por

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p \frac{s + 1/T_i + s^2 T_d}{s}, \quad (5.1)$$

e está conectado ao processo pelo laço de realimentação da fig. 2.1. A sintonia do controlador refere-se ao cálculo dos parâmetros K_p (ganho proporcional), T_i (constante de tempo integral) e T_d (constante de tempo derivativa), de modo a satisfazer alguma especificação de desejada, ou critérios de desempenho e/ou robustez. O processo é representado por um modelo de primeira ordem com atraso de transporte, estudado no capítulo anterior, dado pela Eq. (4.1).

5.2 Técnicas de Sintonia do Controlador

5.2.1 Resposta em Frequência

A referência básica sobre sintonia dos parâmetros do controlador PID é o trabalho de Ziegler e Nichols 1942. Eles utilizaram o controlador *Fulscope 100*, da empresa *Taylor*, que agregava as funções P, I e D em um único dispositivo [Pessen 1994]. Ziegler e Nichols sugerem fórmulas para os parâmetros do controlador baseadas nos métodos de identificação da curva de reação e da resposta em frequência. Ainda hoje, muitos operadores utilizam os métodos de Ziegler e Nichols como “ponto de partida” na sintonia de um controlador PID. Os parâmetros são, na maioria das vezes, reajustados iterativamente de maneira empírica, até que o desempenho obtido seja satisfatório.

Há dois procedimentos distintos para sintonia dos parâmetros apresentados por Ziegler e Nichols 1942. No método conhecido por *método da curva de reação*, o processo é submetido, em

malha aberta, a uma entrada em degrau. Consideram-se apenas processos com características não-oscilatórias, de modo que a resposta do sistema é monotonicamente crescente. A partir da curva de reação, obtém-se o ganho e o atraso de transporte de um modelo, e os parâmetros do controlador são obtidos a partir de uma tabela.

No outro método sugerido por Ziegler e Nichols, o *método da resposta em frequência*, a determinação dos parâmetros do controlador é baseada no ponto crítico do processo. No experimento original, o ganho e frequência críticos são determinados aumentando-se o ganho de malha, até que uma oscilação sustentada se verifique na saída do processo. A partir dos valores de K_u e $T_u = 2\pi/\omega_u$, os parâmetros são calculados segundo a Tabela 5.1.

Parâmetros	PI	PID
K_p	$0,4K_u$	$0,6K_u$
T_i	$0,8T_u$	$0,5T_u$
T_d	—	$0,125T_u$

Tabela 5.1: Parâmetros do controlador para o método da resposta em frequência de Ziegler e Nichols.

O critério de desempenho para este caso é obter um sistema em malha fechada com taxa de decaimento de aproximadamente 1/4. O método da resposta em frequência leva a sistemas com resposta ao degrau menos oscilatória do que aqueles obtidos com o método da curva de reação, em geral.

5.2.2 Métodos de Otimização

A abordagem pelo método ótimo-simétrico [Kessler 1958] é uma técnica de projeto por moldagem da Função de Malha (*loop shaping*) baseada em um modelo aproximado do processo, bastante popular na área de máquinas elétricas. O objetivo é encontrar um controlador que faça a função de transferência de malha fechada ter ganho unitário para baixas frequências [Åström e Hägglund 1995]. Tal técnica tem sido usada para sintonia de controladores PI e PID [Voda e Landau 1995, Åström e Hägglund 1995, Loron 1997], e apresenta vantagens em relação à robustez e às características da malha fechada desejada. Na forma original [Kessler 1958], o controlador é projetado de maneira que $T(s)$ satisfaça $T(0) = 1$ e $d^n |T(j\omega)| / d\omega^n |_{\omega=0} = 0$ para n tão grande quanto possível. Tal idéia é ilustrada por meio de um exemplo apresentado em Åström e Hägglund 1995, reproduzido aqui por conveniência.

Considere o sistema em malha fechada descrito por

$$T(s) = \frac{a_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}, \quad (5.2)$$

com $T(0) = 1$. O módulo da função complexa $T(j\omega)$ é

$$|T(j\omega)| = \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + (a_2^2 - 2a_1 a_3)\omega^2 + (a_1^2 - 2a_2)\omega^4 + \omega^6}}. \quad (5.3)$$

Note que as cinco primeiras derivadas de $|T(j\omega)|$ em relação a ω são nulas em $\omega = 0$, se os parâmetros são tais que $a_1^2 = 2a_2$ e $a_2^2 = 2a_1a_3$. A função de transferência de malha fechada se torna então,

$$T'(s) = \frac{\omega_\Sigma^3}{s^3 + 2\omega_\Sigma s^2 + 2\omega_\Sigma^2 s + \omega_\Sigma^3} = \frac{\omega_\Sigma^3}{(s + \omega_\Sigma)(s^2 + \omega_\Sigma s + \omega_\Sigma^2)}, \quad (5.4)$$

com $\omega_\Sigma^3 = a_3$. Um sistema em malha fechada com esta função de transferência tem 8,1% de sobressinal, e o tempo de ajuste para 2% do valor de regime permanente é $9,4/\omega_\Sigma$. A função de transferência da Eq. (5.4) é obtida a partir da Função de Malha

$$L'(s) = \frac{\omega_\Sigma^3}{s(s^2 + 2\omega_\Sigma s + 2\omega_\Sigma^2)}. \quad (5.5)$$

Considere agora que o modelo do processo é dado por

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2\omega_\Sigma)}, \quad (5.6)$$

e é utilizado um controlador PI com parâmetros $K_p = 2\omega_\Sigma^2/K$ e $T_i = 2/\omega_\Sigma$. A Função de Malha obtida é

$$L''(s) = \frac{\omega_\Sigma^2(2s + \omega_\Sigma)}{s^2(s + 2\omega_\Sigma)}. \quad (5.7)$$

Note que esta Função de Malha possui um zero em $-\omega_\Sigma/2$ e um pólo em $-2\omega_\Sigma$, de modo que a magnitude de L'' é simétrica em torno de 0db, daí o nome ótimo simétrico. A malha fechada resultante é então

$$T''(s) = \frac{\omega_\Sigma^2(2s + \omega_\Sigma)}{(s + \omega_\Sigma)(s^2 + \omega_\Sigma s + \omega_\Sigma^2)}. \quad (5.8)$$

Observa-se que $T'(s)$ difere de $T''(s)$ nas Eq. (5.4) e (5.8) pela presença de um zero em $-\omega_\Sigma/2$ no numerador de $T''(s)$. O sobressinal apresentado pela malha fechada da Eq. (5.8) é agora cerca de 43%, devido à presença do zero. De fato, conforme observado em Voda e Landau 1995 e Åström e Hägglund 1995, o sobressinal pode ser reduzido utilizando um pré-filtro no sinal de referência $y_r(t)$ da Fig. 2.1, ou um controlador PID com dois graus de liberdade, com ganho proporcional atuando apenas na saída.

Ótimo Simétrico Modificado

Uma nova técnica de sintonia de controladores PI e PID para obter uma Função de Malha via ótimo-simétrico é apresentada em Arruda e Barros 2000, Arruda 2000. O projeto consiste em obter controladores PI ou PID que resultem em malhas fechadas próximas, no sentido mínimos quadrados, de um projeto ótimo-simétrico, para uma determinada faixa de frequência. O resultado pode ser satisfatório, mesmo no caso em que a constante de tempo T_Σ é próxima de uma das constantes de tempo lentas do processo.

Sintonia do Controlador PI

Os parâmetros do controlador PI são obtidos a partir de um algoritmo mínimos quadrados no domínio da frequência. O objetivo é minimizar a função de custo

$$J_{PI}(C) = \sum_{i=1}^n |L''(j\omega_i) - G(j\omega_i)C(j\omega_i)|^2, \quad (5.9)$$

em que G é o modelo do processo dado pela Eq. (4.1), C é o controlador PI a ser projetado e L'' é a função de malha desejada segundo a abordagem ótimo-simétrico. A função de malha desejada, L'' , é definida em termos da constante T_Σ que será determinada a partir do modelo do processo. Admite-se aqui que esta constante de tempo determina a largura de faixa do sistema, definida como a frequência de cruzamento do ganho unitário, ω_g , isto é,

$$\omega_g = \omega_\Sigma = \frac{1}{2T_\Sigma}, \quad (5.10)$$

o que leva à Função de Malha desejada dada pela Eq. (5.7). A solução para o problema de minimização da função de custo da Eq. (5.9) pode ser obtida reescrevendo o controlador PI como

$$C(j\omega_i) = \left(K_p + \frac{K_p/T_i}{j\omega_i} \right) G(j\omega_i) = \begin{bmatrix} G(j\omega_i) & G(j\omega_i)/j\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_p/T_i \end{bmatrix} = \varphi_{PI}^T(j\omega_i) \theta_{PI} \quad (5.11)$$

e o problema de minimização da função de custo (5.9) se torna

$$\hat{\theta}_{PI} = \arg \min_{\theta_{PI}} \left\{ J(\theta_{PI}) = \sum_{i=1}^n |L''(j\omega_i) - \varphi_{PI}^T(j\omega_i) \theta_{PI}|^2 \right\} \quad (5.12)$$

A solução $\hat{\theta}_{PI}$ contém os parâmetros do controlador PI que levam a uma Função de Malha próxima à da Eq. (5.7), para uma certa faixa de valores de frequência. Como os regressores são complexos, a solução por mínimos quadrados da Eq. (5.12) é dada por

$$\hat{\theta}_{PI} = \left[\text{Re}(\Phi_{PI})^T \text{Re}(\Phi_{PI}) + \text{Im}(\Phi_{PI})^T \text{Im}(\Phi_{PI}) \right]^{-1} \times \left[\text{Re}(\Phi_{PI})^T \text{Re}(\mathcal{L}'') + \text{Im}(\Phi_{PI})^T \text{Im}(\mathcal{L}'') \right] \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_{PI} &= \begin{bmatrix} \varphi_{PI}(j\omega_1) & \varphi_{PI}(j\omega_2) & \dots & \varphi_{PI}(j\omega_n) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{L}'' &= \begin{bmatrix} L''(j\omega_1) & L''(j\omega_2) & \dots & L''(j\omega_n) \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Sintonia do Controlador PID

O procedimento para obter os parâmetros de um controlador PID é similar ao apresentado na seção anterior. Novamente, admite-se que a constante de tempo T_Σ determina a largura de faixa do sistema, e o processo é representado pelo modelo da Eq. (4.1). Escrevendo o controlador no

domínio da frequência,

$$C(j\omega_i) = \left(K_p + \frac{K_p/T_i}{j\omega_i} + j\omega_i K_p T_d \right) G(j\omega_i) \quad (5.15)$$

$$= G(j\omega_i) \begin{bmatrix} 1 & 1/j\omega_i & j\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_p/T_i \\ K_p T_d \end{bmatrix} = \varphi_{PID}^T(j\omega_i) \theta_{PID}, \quad (5.16)$$

e utilizando a Função de Malha [Voda e Landau 1995]

$$L'''(s) = \frac{\sqrt{5} \omega_\Sigma^2 (4s + \omega_\Sigma)^2}{17 s^3 (s + 2\omega_\Sigma)}, \quad (5.17)$$

conforme mostrada na fig. 5.1, a função de custo para este problema é agora,

$$J_{PID}(C) = \sum_{i=1}^n |L'''(j\omega_i) - G(j\omega_i) C(j\omega_i)|^2. \quad (5.18)$$

A solução para o problema de minimização desta função de custo leva então aos parâmetros do controlador PID, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{PID} &= \arg \min_{\theta_{PID}} \left\{ J(\theta_{PID}) = \sum_{i=1}^n |L'''(j\omega_i) - \varphi_{PID}^T(j\omega_i) \theta_{PID}|^2 \right\} \\ &= \left[\text{Re}(\Phi_{PID})^T \text{Re}(\Phi_{PID}) + \text{Im}(\Phi_{PID})^T \text{Im}(\Phi_{PID}) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[\text{Re}(\Phi_{PID})^T \text{Re}(\mathcal{L}''') + \text{Im}(\Phi_{PID})^T \text{Im}(\mathcal{L}''') \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_{PID} &= \begin{bmatrix} \varphi_{PID}(j\omega_1) & \varphi_{PID}(j\omega_2) & \dots & \varphi_{PID}(j\omega_n) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{L}''' &= \begin{bmatrix} L'''(j\omega_1) & L'''(j\omega_2) & \dots & L'''(j\omega_n) \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (5.20)$$

A grande vantagem em utilizar a solução da Eq. (5.19) é evitar a necessidade do cancelamento de pólos do processo para obter a Função de Malha da Eq. (5.7), uma vez que isso não é possível quando $G(s)$ possui um par de pólos complexos conjugados, ou é de primeira ordem com atraso de transporte, por exemplo.

Note que a solução para o problema de minimização das Eq. (5.12) e (5.19) depende fortemente da escolha do conjunto de frequências ω_i . Para garantir robustez no projeto, a Função de Malha resultante deve ser próxima da desejada na faixa entre a frequência de cruzamento do ganho, $\omega_c = \omega_\Sigma$, e a frequência crítica, ω_u , onde a constante T_Σ tem influência. Assim, uma faixa apropriada para ser utilizada é o intervalo $[\omega_\Sigma; 4\omega_\Sigma]$, $\omega_\Sigma = 1/2T_\Sigma$.

Escolha da Constante T_Σ

O parâmetro de projeto para o método ótimo-simétrico consiste em especificar a largura de faixa $\omega_\Sigma = 1/2T_\Sigma$. Se escolhida adequadamente, o projeto torna-se robusto, ao mesmo tempo em que

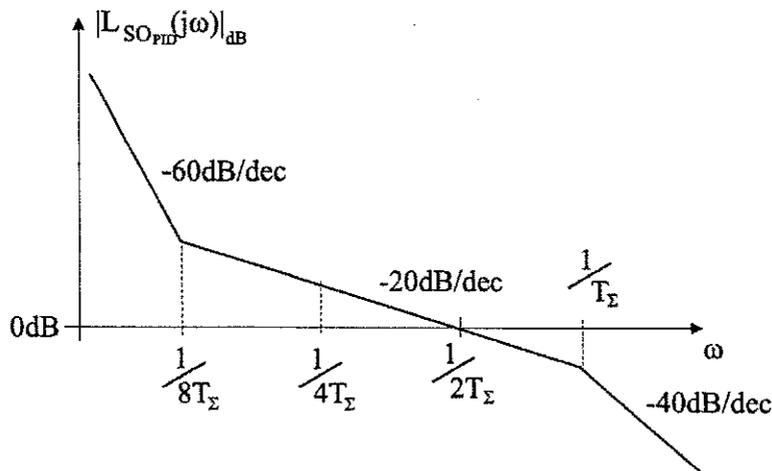


Figura 5.1: Magnitude da Função de Malha dada pela Eq. (5.20).

apresenta um desempenho ótimo. Em trabalhos anteriores [Voda e Landau 1995, Åström e Hägglund 1995, Loron 1997], eram considerados modelos de segunda ordem para sintonia de controladores PI e de terceira ordem para sintonia de controladores PID. O parâmetro T_Σ era então definido como a constante de tempo mais rápida, que seria vista como a soma de pólos rápidos e pequenos atrasos. Assim, a dinâmica não modelada era representada na forma de um pólo simples, o que pode ser pouco confiável em certas situações.

Do capítulo anterior, apresentou-se um método para se obter modelos de primeira ordem com atraso de transporte, baseado em experimentos com relé. A principal característica do método é apresentar modelos bastante próximos ao processo na faixa de frequências em que a fase do processo varia de -90° a -180° . Tais modelos podem ser utilizados aqui para sintonia pelo ótimo-simétrico, desde que o parâmetro T_Σ seja definido adequadamente. Para isso, é necessário entender que tipo de limitações são impostas por tais modelos. A discussão seguinte é adaptada de Skogestad 2003.

Considere inicialmente que o processo é representado por um atraso de transporte. Para desempenho e robustez, é desejável uma Margem de Fase¹ de 35° ou mais. Além disso, tipicamente, a inclinação de $|L(j\omega)|$ deve ser suave na região entre as frequências de cruzamento do ganho, ω_g , e da fase, ω_c , e íngreme fora desta faixa. É possível mostrar que uma inclinação de cerca de -20dB/dec faz com que a fase seja aproximadamente -90° , para uma Função de Malha polinomial. Assim, da definição da margem de fase, a contribuição em módulo devida ao atraso de transporte não deve exceder 55° . Porém, tal contribuição, cujo módulo é $\theta\omega$, na frequência $\omega = \theta$ é de $1\text{rad} \cong 57^\circ$, que é maior do que 55° . Logo, para um desempenho aceitável, $\omega_g < 1/\theta$, aproximadamente.

Levando-se em conta um compromisso entre desempenho e robustez, um valor aceitável para a largura de faixa da Função de Malha projetada é de $\omega_g = 1/2\theta$, ou seja, metade do limite obtido. Da fig. 5.1, vê-se então que

$$\frac{1}{2T_\Sigma} = \frac{1}{2\theta} \Rightarrow T_\Sigma = \theta.$$

Portanto, para um projeto robusto, com um desempenho satisfatório, a dinâmica não modelada

¹Ver definição na pág. 81.

representada por T_Σ deve ser escolhida como igual ao atraso de transporte do modelo, θ .

5.2.3 Princípio do Modelo Interno

O princípio do modelo interno (IMC) é apresentado em Morari e Zafriou 1989. A idéia geral do princípio do modelo interno é ilustrada na Fig. 5.2. O modelo do processo é considerado explicitamente no controlador, daí a origem do nome *modelo interno*.

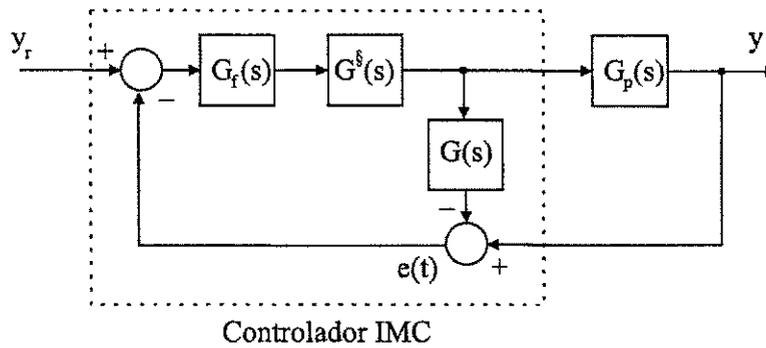


Figura 5.2: Estrutura IMC.

O controlador IMC da Fig. 5.2 pode ser representado por um controlador série normal, com função de transferência dada por

$$C(s) = \frac{G_f(s) G^s(s)}{1 - G_f(s) G^s(s) G(s)}, \quad (5.21)$$

em que $G(s)$ é o modelo do processo, $G^s(s)$ é uma aproximação da inversa de $G(s)$, e $G_f(s)$ um filtro passa-baixas, tipicamente da forma

$$G_f(s) = \frac{1}{(T_f s + 1)^n}.$$

A principal característica da abordagem IMC pode ser verificada como segue. Considere o caso em que o modelo descreve perfeitamente o processo, i.e., $G(s) = G_p(s)$, e o filtro é dado por $G_f(s) = 1$. Além disso, assuma que $G(s)$ admite uma inversa realizável, e que nenhuma perturbação está presente no sistema. Neste caso, o erro entre a variável de saída e a estimada pelo modelo é nulo, de modo que o laço de realimentação da Fig. 5.2 desaparece, e a transferência do sinal de referência para saída do processo é total, pois $G^s G_p = 1$. Considere agora que existe um erro de modelagem, i.e., $\Delta G = G_p - G$. Então a realimentação da Fig. 5.2 atua no erro entre a variável do processo e a estimada, de modo a levar a saída para o valor desejado. Além disso, note também que a malha fechada, $T(s)$, é dada por

$$T(s) = \frac{C(s) G(s)}{1 + C(s) G(s)} = G_f(s),$$

se $G^s(s) = G^{-1}(s)$.

O projeto de um controlador pelo princípio IMC está portanto diretamente relacionado à escolha do filtro $G_f(s)$. Isto representa um compromisso entre robustez e desempenho, no sentido de saber o quanto se pode confiar no modelo para aumentar a largura de faixa do sistema em malha fechada. Além disso, conforme se observa pela Eq. (5.21), o projeto pode levar a controladores de maior complexidade. No entanto, sob algumas hipóteses, é possível obter controladores PI e PID seguindo o princípio IMC [Åström e Hägglund 1995].

Assumindo o processo na forma da Eq. (4.1), a malha fechada é dada pelo filtro

$$G_f(s) = \frac{e^{-\theta s}}{T_f s + 1},$$

em que manteve-se o atraso de transporte por este ser inevitável. Da Eq. (5.21), o seguinte controlador é obtido

$$C(s) = \frac{\frac{e^{-\theta s}}{T_f s + 1} \frac{T_f s + 1}{e^{-\theta s}}}{1 - \frac{e^{-\theta s}}{T_f s + 1}} = \frac{T_f s + 1}{T_f s + 1 - e^{-\theta s}}$$

Admitindo uma aproximação para o atraso como sendo $e^{-\theta s} \approx 1 - s\theta$, o seguinte controlador é obtido,

$$C(s) = \frac{1 + s\theta}{K s (\theta + T_f)},$$

que consiste em um controlador PI com

$$K_p = \frac{\theta}{K (\theta + T_f)} \text{ e}$$

$$T_i = \theta.$$

Se o atraso de transporte é aproximado por $e^{-\theta s} \approx (1 - s\theta/2) / (1 + s\theta/2)$, então o seguinte controlador é obtido,

$$C(s) = \frac{(1 + s\theta/2)(1 + sT)}{K s (\theta + T_f + sT_f\theta/2)} \approx \frac{(1 + s\theta/2)(1 + sT)}{K s (\theta + T_f)},$$

que equivale a um controlador PID com parâmetros

$$K_p = \frac{\theta + 2T}{K (\theta + T_f)},$$

$$T_i = \frac{\theta}{2} + T \text{ e}$$

$$T_d = \frac{\theta T}{\theta + 2T}.$$

Para os propósitos deste trabalho, a constante de tempo do filtro, T_f , será definida como sendo igual ao atraso de transporte do modelo.

5.3 Resultados de Simulação

Nesta seção, são apresentados os resultados de simulação utilizando as técnicas de modelagem do capítulo anterior. Os processos e os modelos correspondentes foram apresentados resumidamente na Tab. 4.2. Em cada exemplo, o controlador é calculado com o modelo obtido, e a malha fechada é simulada com o modelo completo.

5.3.1 Processos de Segunda Ordem com Atraso

Usando os modelos obtidos para os processos de segunda ordem com atraso de transporte na Tab. 4.2, foram calculados os controladores PI e PID usando as técnicas de sintonia apresentadas. Os parâmetros calculados encontram-se na Tab. 5.2 para os controladores PI e Tab. 5.3 para os controladores PID, para cada método utilizado.

Respostas ao degrau em malha fechada para alguns controladores encontram-se nas figuras de 5.3 a 5.8. Em geral, os melhores resultados foram para os controladores usando o método IMC e Ótimo-Simétrico (vide figs. 5.4 e 5.5, por exemplo). Para este tipo de processo, observou-se que, na maioria dos casos, a saída da malha fechada obtida apresenta-se menos oscilatória, e com desempenho satisfatório, quando usa-se o modelo cuja estimativa do ganho direto é obtida a partir da resposta ao degrau. Observou-se no entanto que, quando o atraso é muito grande em relação à constante de tempo do modelo, o projeto do controlador PID via Ziegler-Nichols levou a malhas fechadas instáveis. Este foi o caso, por exemplo, para os parâmetros do controlador PID na 8ª linha da coluna do método Ziegler-Nichols na Tab. 5.3. Note, no entanto, que o atraso de transporte é bastante superior à constante de tempo do modelo, bem como do processo.

Modelos	Ótimo Simétrico			IMC		Ziegler Nichols	
	\hat{K}	K_p	T_i	K_p	T_i	K_p	T_i
$\hat{K} \frac{e^{-0.3969s}}{2.6964s+1}$	1.0000	2.3778	0.8212	0.5000	0.3969	4.5267	1.2024
	0.4875	4.8776	0.8212	1.0256	0.3969	9.2856	1.2024
	0.5945	3.9997	0.8212	0.8410	0.3969	7.6143	1.2024
$\hat{K} \frac{e^{-1.6658s}}{1.3458s+1}$	1.0000	0.0795	0.2443	0.5000	1.6658	0.7885	3.9820
	0.7024	0.1132	0.2443	0.7118	1.6658	1.1226	3.9820
	0.7287	0.1091	0.2443	0.6862	1.6658	1.0821	3.9820
$\hat{K} \frac{e^{-10.9516s}}{1.0484s+1}$	1.0000	0.3719	8.6653	0.5000	10.9516	0.4149	19.1601
	0.9998	0.3720	8.6653	0.5001	10.9516	0.4149	19.1601
	0.9467	0.3928	8.6653	0.5282	10.9516	0.4382	19.1601

Tabela 5.2: Resultados de projeto do controlador PI para o processo de 2ª ordem com atraso.

Modelos	Ótimo Simétrico				IMC			Ziegler Nichols		
	\hat{K}	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
$\hat{K} \frac{e^{-0.3969s}}{2.6964s+1}$	1.0000	2.2699	0.6850	0.1399	7.2937	2.8948	0.1848	6.7901	0.7515	0.1879
	0.4875	4.6563	0.6850	0.1399	14.9613	2.8948	0.1848	13.9283	0.7515	0.1879
	0.5945	3.8182	0.6850	0.1399	12.2685	2.8948	0.1848	11.4215	0.7515	0.1879
$\hat{K} \frac{e^{-1.6658s}}{1.3458s+1}$	1.0000	0.1373	0.4621	0.8667	1.3079	2.1787	0.5145	1.1828	2.4887	0.6222
	0.7024	0.1955	0.4621	0.8667	1.8620	2.1787	0.5145	1.6839	2.4887	0.6222
	0.7287	0.1884	0.4621	0.8667	1.7948	2.1787	0.5145	1.6231	2.4887	0.6222
$\hat{K} \frac{e^{-10.9516s}}{1.0484s+1}$	1.0000	0.4237	11.6783	0.3939	0.5957	6.5242	0.8799	0.6223	11.9751	2.9938
	0.9998	0.4238	11.6783	0.3939	0.5958	6.5242	0.8799	0.6224	11.9751	2.9938
	0.9467	0.4476	11.6783	0.3939	0.6293	6.5242	0.8799	0.6573	11.9751	2.9938

Tabela 5.3: Resultados de projeto do controlador PID para o processo de 2ª ordem com atraso.

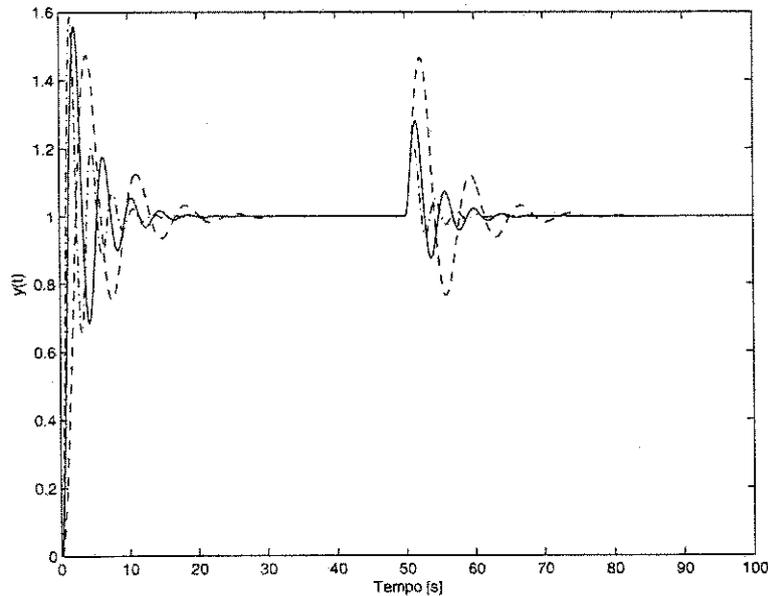


Figura 5.3: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 1ª linha da Tabela 5.2: (—) ótimo-simétrico, (—) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

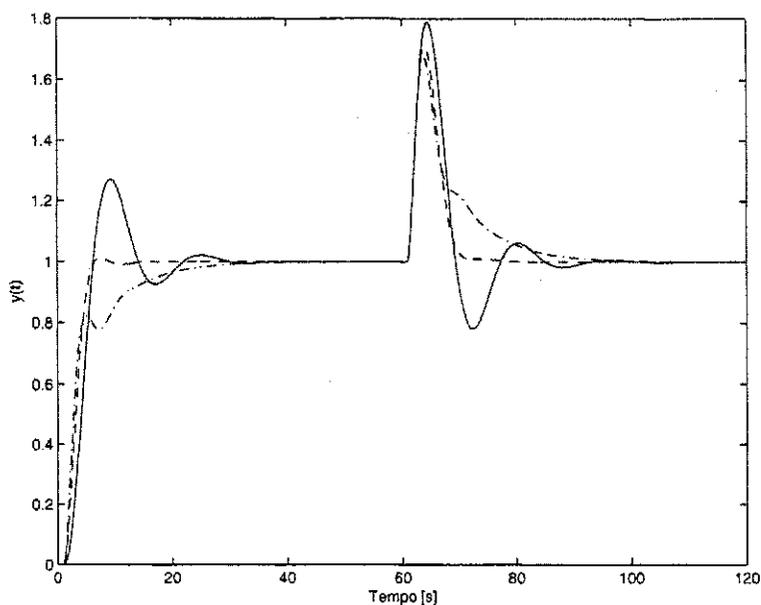


Figura 5.4: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 4ª linha da Tabela 5.2: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

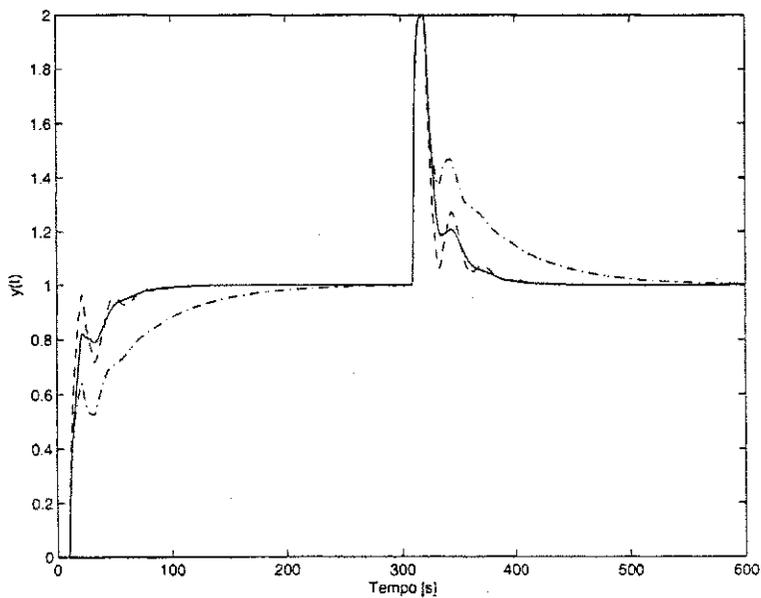


Figura 5.5: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 9ª linha da Tabela 5.2: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

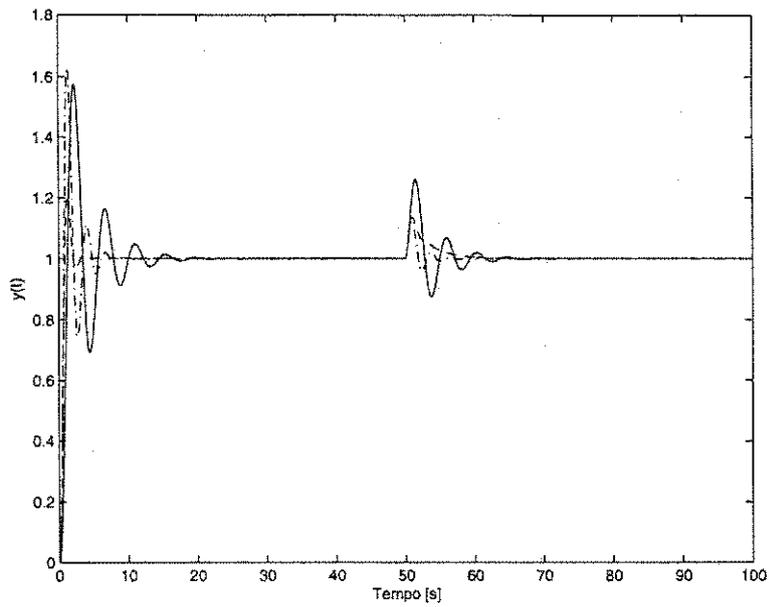


Figura 5.6: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 1ª linha da Tabela 5.3: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

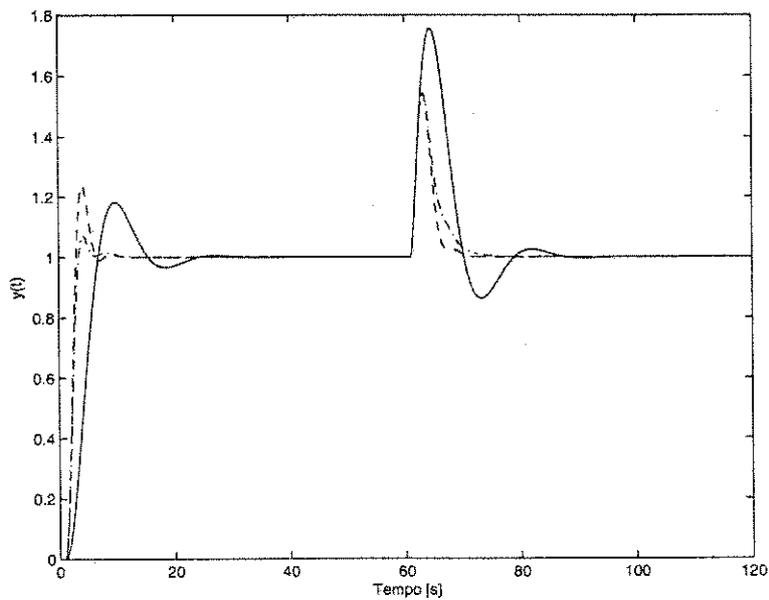


Figura 5.7: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 4ª linha da Tabela 5.3: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

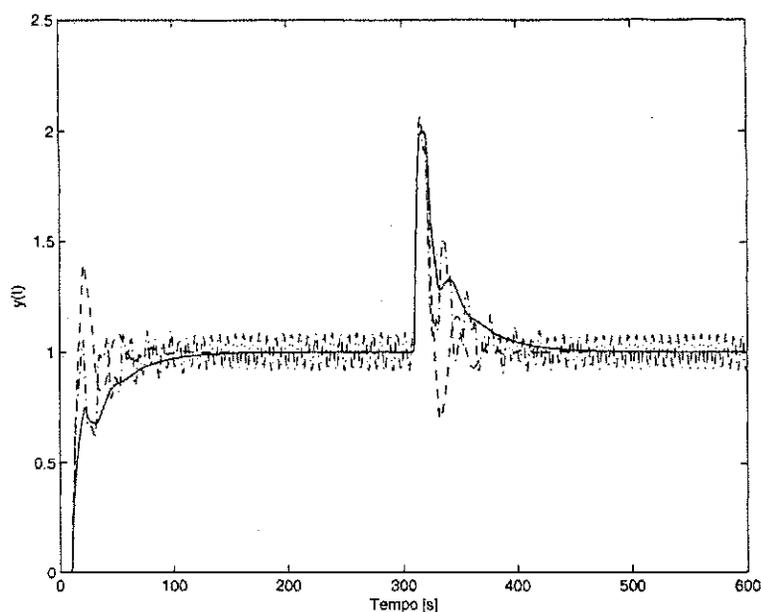


Figura 5.8: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 9ª linha da Tabela 5.3: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

5.3.2 Processos de Fase Não-Mínima

São considerados nesta seção os processos de fase não-mínima mostrados na Tab. 4.2. Usando os modelos calculados anteriormente, os parâmetros obtidos para o controlador se encontram nas Tab. 5.4 e 5.5, para os controladores PI e PID, respectivamente.

Nas Figs. de 5.9 a 5.11, usando um controlador PI, são apresentados os melhores resultados observados nas simulações, que são obtidos com o modelo cuja estimativa de ganho é obtida a partir da resposta ao degrau. Dentre estes, as melhores respostas obtidas foram com controladores projetados pelo método de Ziegler-Nichols e Ótimo-simétrico. Para o caso dos controladores PID, o método de Ziegler-Nichols também apresentou controladores que instabilizam a malha fechada. Desta vez, tal fato foi observado em todos os casos em que o atraso de transporte é bastante superior à constante de tempo do modelo.

Modelos	Ótimo Simétrico			IMC		Ziegler Nichols	
	\hat{K}	K_p	T_i	K_p	T_i	K_p	T_i
$\hat{K} \frac{e^{-1.4997s}}{1.8024s+1}$	1.0000	0.0822	0.2117	0.5000	1.4997	1.0282	3.8259
	1.4005	0.0587	0.2117	0.3570	1.4997	0.7342	3.8259
	1.4629	0.0562	0.2117	0.3418	1.4997	0.7029	3.8259
$\hat{K} \frac{e^{-2.4140s}}{1.6767s+1}$	1.0000	0.1261	0.5733	0.5000	2.4140	0.7210	5.6204
	1.4368	0.0877	0.5733	0.3480	2.4140	0.501	5.6204
	1.3256	0.0951	0.5733	0.3772	2.4140	0.5439	5.6204
$\hat{K} \frac{e^{-11.2988s}}{1.7018s+1}$	1.0000	0.3494	8.3000	0.5000	11.2988	0.4329	20.6605
	1.4279	0.2447	8.3000	0.3502	11.2988	0.4556	20.6605
	1.0695	0.3267	8.3000	0.4675	11.2988	0.4048	20.6605

Tabela 5.4: Resultados de projeto do controlador PI para o processo de fase não-mínima.

Modelos	Ótimo Simétrico				IMC			Ziegler Nichols		
	\hat{K}	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
$\hat{K} \frac{e^{-1.4997s}}{1.8024s+1}$	1.0000	0.0211	0.0577	8.4776	1.7018	2.5522	0.5295	1.5423	2.3912	0.5978
	1.4005	0.0151	0.0577	8.4776	1.2152	2.5522	0.5295	1.1013	2.3912	0.5978
	1.4629	0.0144	0.0577	8.4776	1.1633	2.5522	0.5295	1.0543	2.3912	0.5978
$\hat{K} \frac{e^{-2.4140s}}{1.6767s+1}$	1.0000	0.1829	0.9209	0.7609	1.1946	2.8837	0.7018	1.0814	3.5128	0.8782
	1.4368	0.1273	0.9209	0.7609	0.8314	2.8837	0.7018	0.7527	3.5128	0.8782
	1.3256	0.1380	0.9209	0.7609	0.9012	2.8837	0.7018	0.8158	3.5128	0.8782
$\hat{K} \frac{e^{-11.2988s}}{1.7018s+1}$	1.0000	0.4016	11.2087	0.2408	0.6506	7.3512	1.3078	0.6494	12.9128	3.2282
	1.4279	0.2813	11.2087	0.2408	0.4556	7.3512	1.3078	0.6834	12.9128	3.2282
	1.0695	0.3755	11.2087	0.2408	0.6083	7.3512	1.3078	0.6072	12.9128	3.2282

Tabela 5.5: Resultados de projeto do controlador PID para o processo de fase não-mínima.

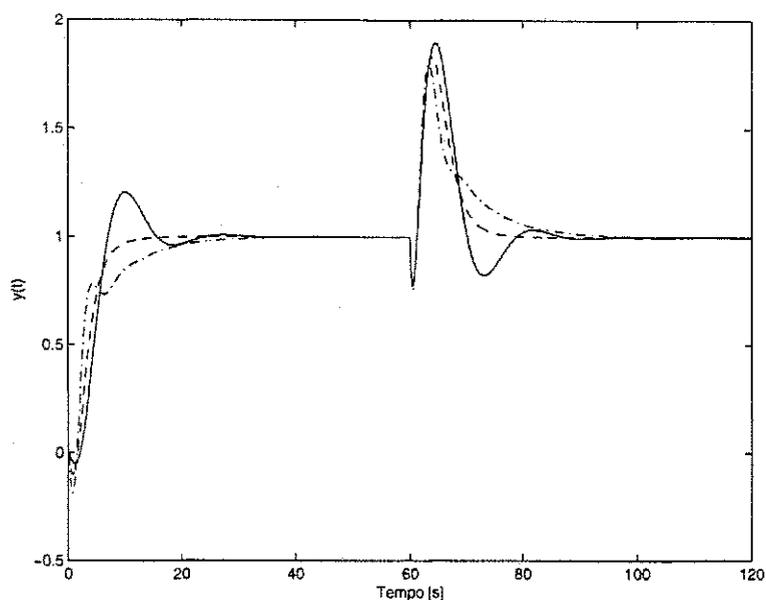


Figura 5.9: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 3ª linha da Tabela 5.4: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

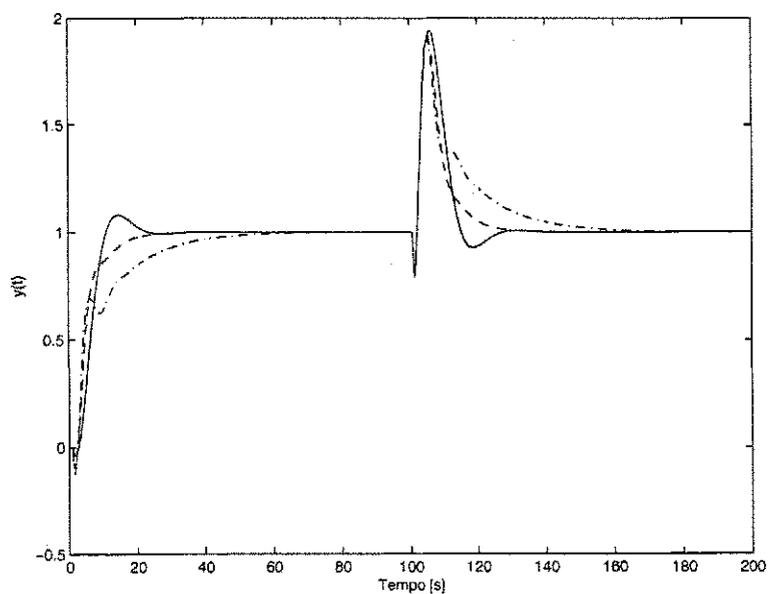


Figura 5.10: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 6ª linha da Tabela 5.4: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

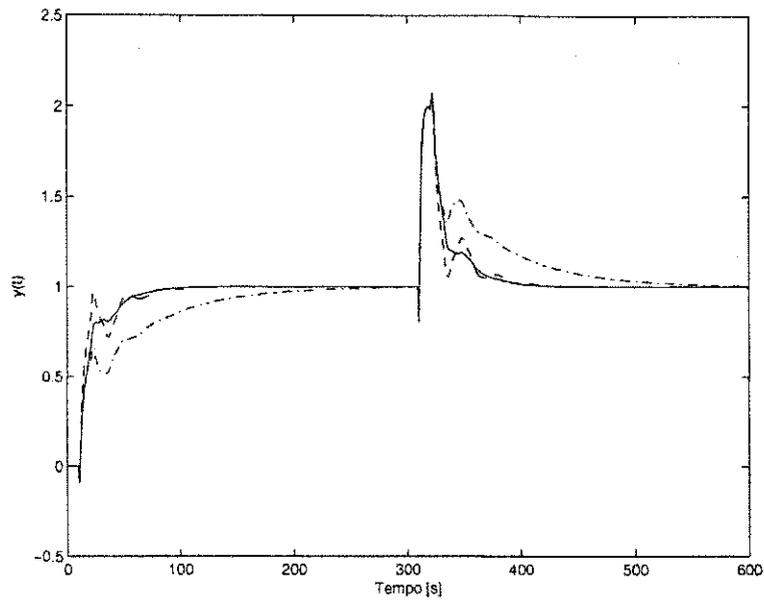


Figura 5.11: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 7ª linha da Tabela 5.4: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

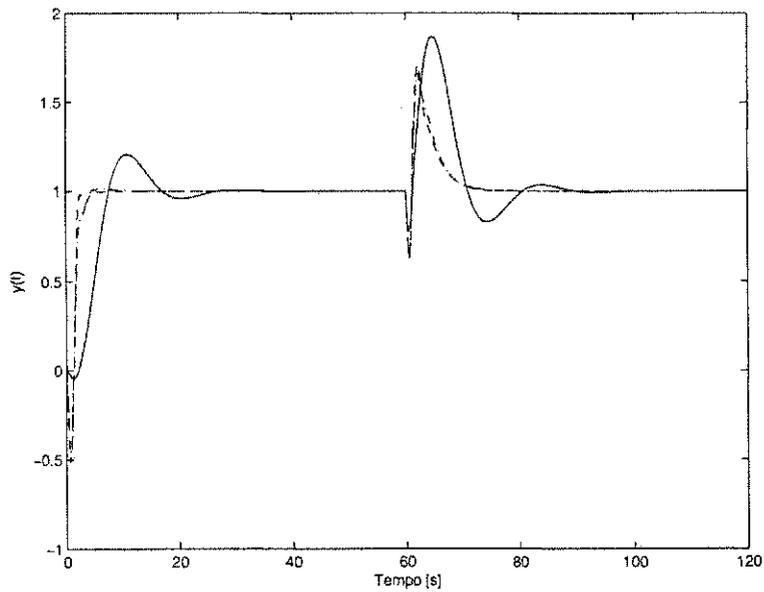


Figura 5.12: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 3ª linha da Tabela 5.5: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

5.3.3 Efeitos do Ruído

Nesta seção, são avaliados os controladores calculados para os modelos do processo obtidos levando-se em conta o efeito do ruído. Os parâmetros obtidos são apresentados nas Tab. 5.6 e 5.7, para os controladores PI e PID, respectivamente.

Para os controladores PI, os resultados praticamente não diferem entre si para cada modelo. Algumas curvas são mostradas nas fig. de 5.14 a 5.16. Em geral, o projeto via IMC se mostrou o mais adequado para os casos analisados. Para o caso do controlador PID, as respostas ao degrau da malha fechada também são parecidas em relação aos modelos utilizados, porém o método de Ziegler-Nichols levou a malhas fechadas instáveis, nos casos em que o atraso de transporte é bastante superior à constante de tempo do modelo (linhas 7, 8 e 9 da Tab. 5.7).

Modelos	Ótimo Simétrico			IMC		Ziegler Nichols	
	\hat{K}	K_p	T_i	K_p	T_i	K_p	T_i
$\hat{K} \frac{e^{-0.101s}}{0.9927s+1}$	0.9972	3.6340	0.2512	0.5014	0.1010	6.4502	0.3109
	1.2098	2.9954	0.2512	0.4133	0.1010	5.3167	0.3109
	0.9997	3.6249	0.2512	0.5002	0.1010	6.4341	0.3109
$\hat{K} \frac{e^{-1.001s}}{0.9991s+1}$	0.9975	0.0015	0.0026	0.5013	1.0010	0.9058	2.4794
	1.1943	0.0012	0.0026	0.4187	1.0010	0.7566	2.4794
	0.9998	0.0015	0.0026	0.5001	1.0010	0.9037	2.4794
$\hat{K} \frac{e^{-9.994s}}{1.0063s+1}$	0.9974	0.3708	7.8559	0.5013	9.9940	0.4174	17.5584
	1.2900	0.2867	7.8559	0.3876	9.9940	0.4123	17.5584
	1.0005	0.3697	7.8559	0.4998	9.9940	0.4161	17.5584

Tabela 5.6: Resultados de projeto do controlador PI para o processo com ruído de medição.

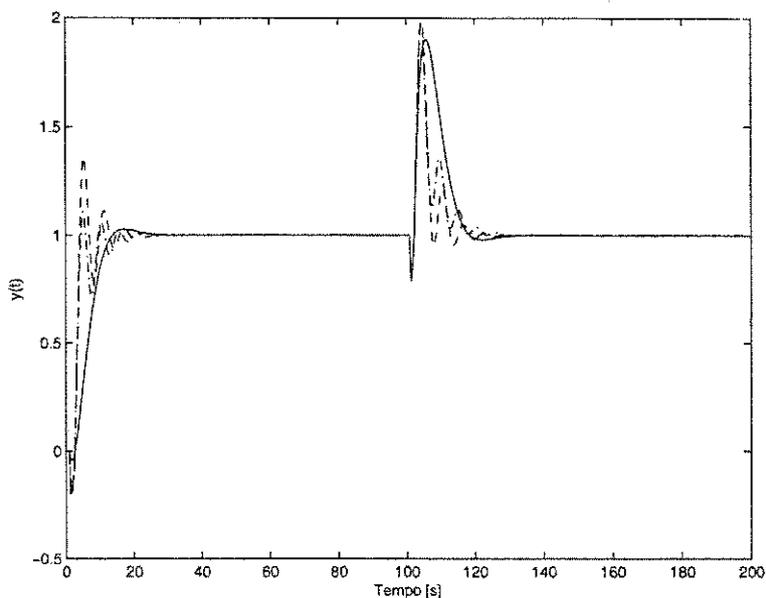


Figura 5.13: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 6ª linha da Tabela 5.5: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

Modelos	Ótimo Simétrico				IMC			Ziegler Nichols		
	\hat{K}	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
$\hat{K} \frac{e^{-0.101s}}{0.9927s+1}$	0.9972	3.5003	0.2037	0.0338	10.3577	1.0432	0.0481	9.6753	0.1943	0.0486
	1.2098	2.8852	0.2037	0.0338	8.5375	1.0432	0.0481	7.9751	0.1943	0.0486
	0.9997	3.4916	0.2037	0.0338	10.3318	1.0432	0.0481	9.6511	0.1943	0.0486
$\hat{K} \frac{e^{-1.001s}}{0.9991s+1}$	0.9975	0.0610	0.1168	1.5569	1.5019	1.4996	0.3335	1.3587	1.5496	0.3874
	1.1943	0.0509	0.1168	1.5569	1.2544	1.4996	0.3335	1.1348	1.5496	0.3874
	0.9998	0.0608	0.1168	1.5569	1.4984	1.4996	0.3335	1.3556	1.5496	0.3874
$\hat{K} \frac{e^{-9.994s}}{1.0063s+1}$	0.9974	0.4228	10.5889	0.3469	0.6023	6.0033	0.8376	0.6260	10.9740	2.7435
	1.2900	0.3269	10.5889	0.3469	0.4657	6.0033	0.8376	0.6185	10.9740	2.7435
	1.0005	0.4215	10.5889	0.3469	0.6004	6.0033	0.8376	0.6241	10.9740	2.7435

Tabela 5.7: Resultados de projeto do controlador PID para o processo com ruído de medição.

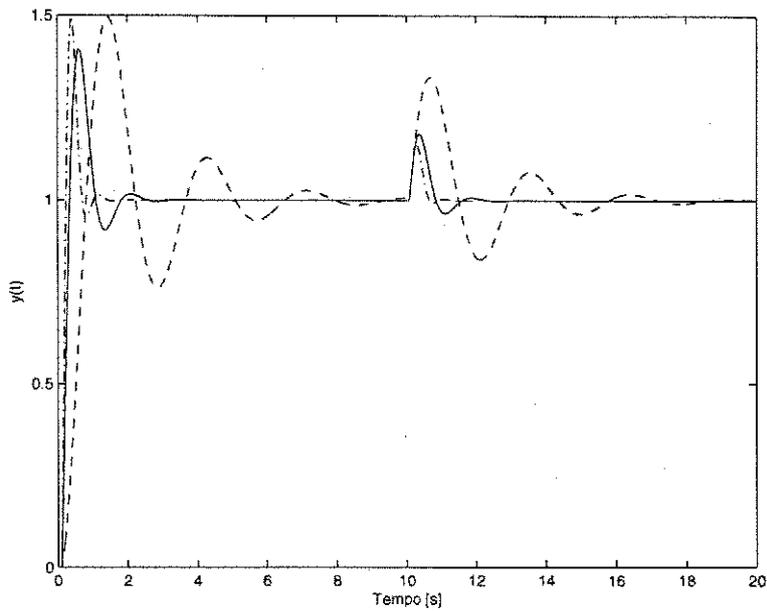


Figura 5.14: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 1ª linha da Tabela 5.6: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

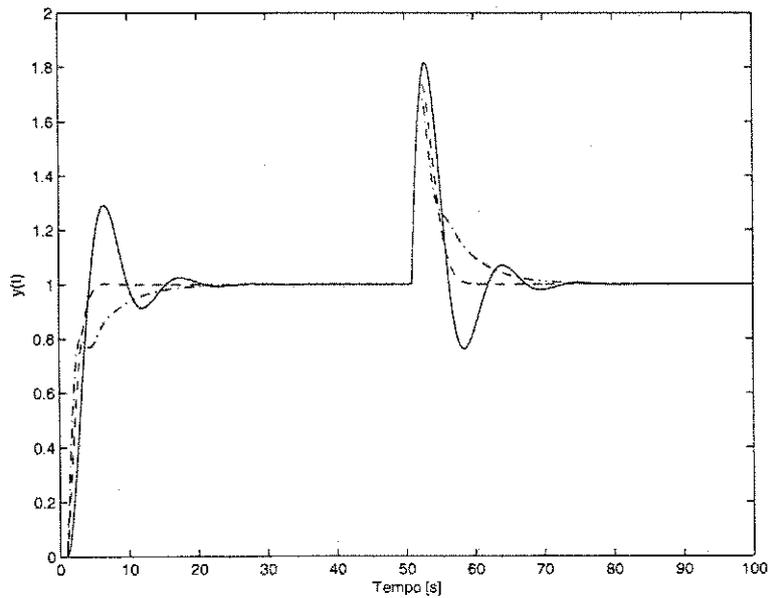


Figura 5.15: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 5ª linha da Tabela 5.6: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

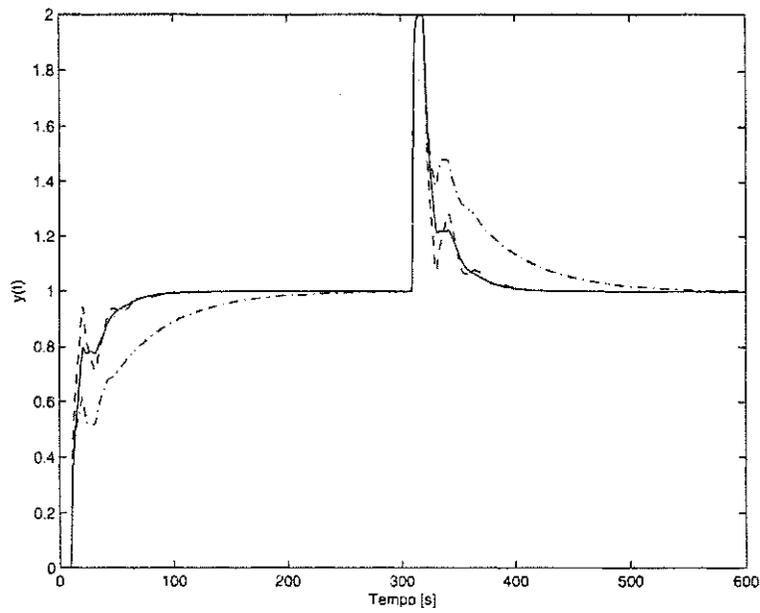


Figura 5.16: Resposta ao degrau para usando controladores PI e modelo da 9ª linha da Tabela 5.6: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

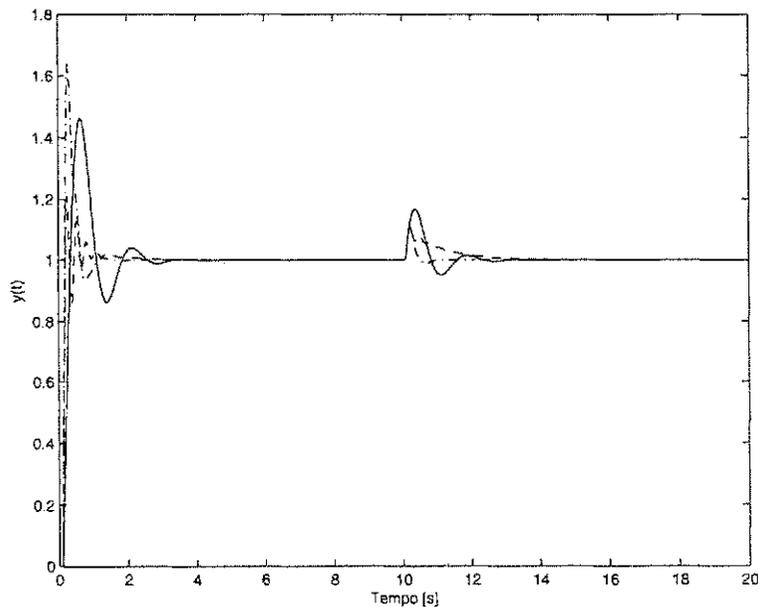


Figura 5.17: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 1ª linha da Tabela 5.7: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

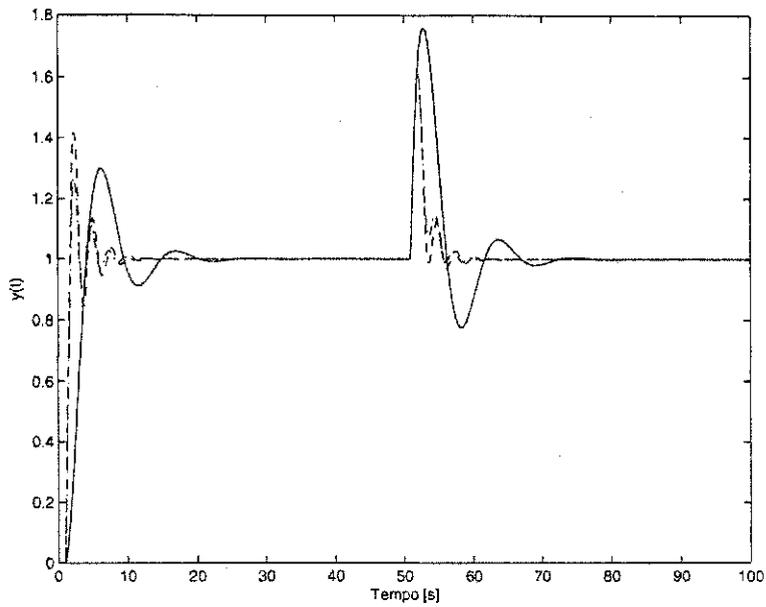


Figura 5.18: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 4ª linha da Tabela 5.7: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

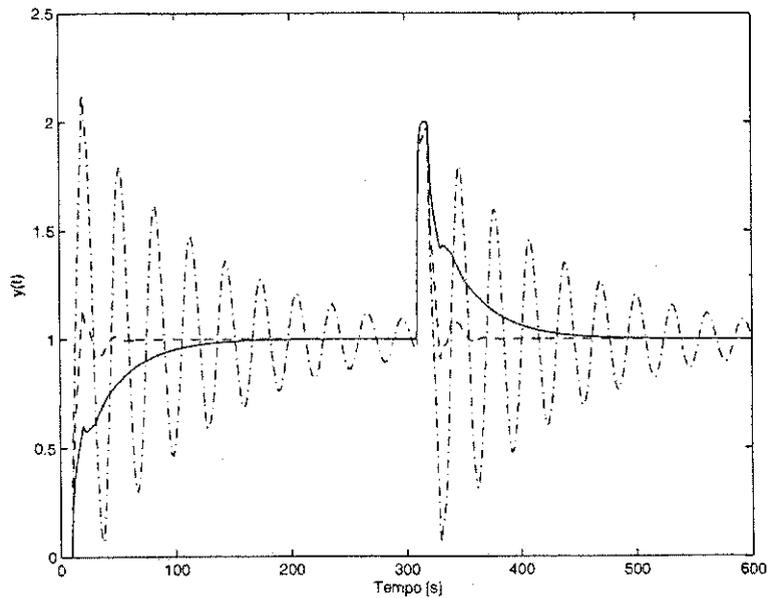


Figura 5.19: Resposta ao degrau para usando controladores PID e modelo da 8ª linha da Tabela 5.7: (—) ótimo-simétrico, (---) IMC e (-·-) Ziegler-Nichols.

5.4 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentadas aplicações dos modelos obtidos no capítulo anterior com experimentos com relé, na sintonia de controladores PI e PID. Foram utilizadas técnicas bastante conhecidas na literatura para o cálculo dos parâmetros do controlador, baseadas em modelos de primeira ordem com atraso de transporte. Para a técnica de sintonia baseada no ótimo-simétrico, um novo enfoque na escolha do parâmetro que define a largura de faixa do sistema foi apresentado e discutido.

Os resultados gerais foram satisfatórios, o que confirma as boas características da técnica de modelagem apresentada no capítulo anterior. Dependendo do modelo obtido, e da dinâmica não modelada, alguns controladores calculados levaram a malhas fechadas oscilatórias, não havendo um método que se destacasse em todos os casos. É importante ressaltar, no entanto, que o método ótimo simétrico foi o que apresentou os resultados mais regulares, para a grande maioria dos processos. Embora a resposta ao degrau em malha fechada usando o controlador projetado segundo este método seja um tanto oscilatória, há uma certa regularidade em relação ao sobresinal observado. Além disso, conforme observado ao longo do texto, esta característica pode ser melhorada usando filtros no sinal de referência, ou usando controladores com dois graus de liberdade. Por sua vez, embora os controladores projetados pelo popular método IMC tenham apresentado excelentes resultados em certos casos, em outras situações os resultados foram pouco satisfatórios. Para controladores projetados pelo método de Ziegler-Nichols, além da não regularidade dos resultados, foram observados ainda casos de instabilidade para controladores PID, quando o atraso de transporte do modelo é muito superior à sua constante de tempo. Tal fato reforça a idéia geral de que é difícil o ajuste da ação derivativa em processos com atraso dominante.

Capítulo 6

Sintonia Iterativa de Controladores PI e PID

6.1 Introdução

A sintonia de controladores PI e PID baseada em especificações nas margens de ganho e de fase tem sido recentemente estudada em Ho, Lim e Xu 1998, Ho, Hang e Zhou 1997, Ho, Hang e Cao 1995, Crowe e Johnson 2002, e nas referências neles citadas. Nestas referências, em particular, assume-se que o processo é de primeira ordem com atraso de transporte, o que pode não ser representativo para processos industriais típicos, conforme apontado por Åström e Hägglund 1995. Os parâmetros do controlador são calculados resolvendo-se um conjunto de equações não lineares, e uma solução analítica é obtida usando aproximações.

Em Åström e Hägglund 1995, mostrou-se que, com a informação de um único ponto da resposta em frequência do processo, é possível projetar um controlador PID baseado em especificações de margens de ganho e de fase. No entanto, esta não é uma solução exata, uma vez que o ponto identificado (ponto crítico, neste caso) é movido para outra posição, onde espera-se que a Função de Malha resultante possua margens de ganho e de fase próximas das desejadas. Em Tan et al. 1999, uma solução exata é obtida a partir de uma abordagem gráfica, mas é necessário conhecer com precisão a resposta em frequência do processo.

Apresenta-se neste capítulo um método iterativo para sintonia de controladores PI e PID para atender a especificações de margens de ganho e de fase em um sistema em malha fechada. O problema não-linear é resolvido de maneira iterativa usando dois testes com o relé a cada iteração. A vantagem, neste caso, é não requerer nenhuma hipótese sobre o modelo do processo, bem como o conhecimento de sua resposta em frequência, além de ser um procedimento realizado sem a remoção do controlador, evitando interrupções da ação de controle.

São apresentados resultados de simulação para um sistema de quarta ordem, para o qual são avaliados o comportamento do algoritmo durante as iterações, bem como a solução encontrada. Em seguida, o método é aplicado a um sistema de tratamento de efluentes, por meio de simulação.

Finalmente, resultados experimentais obtidos com um trocador de calor em escala de laboratório e um sistema de caracterização de sensores de óxido de vanádio (VO_2) são apresentados.

6.2 Convenções e Definições

O sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.1 é considerado neste capítulo. Para os propósitos deste trabalho, a função de transferência do processo, dada por $G(s)$, é estável por hipótese, e sua resposta em frequência não é necessariamente conhecida. O controlador PID é dado por

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p \frac{s + 1/T_i + s^2 T_d}{s}, \quad (6.1)$$

em que K_p , T_i e T_d são os parâmetros do controlador. Para um controlador PI, tem-se que $T_d = 0$.

A margem de ganho (GM) e a margem de fase (PM) são medidas da estabilidade relativa de um sistema em malha fechada, e são definidas como

$$GM = \frac{1}{|L(j\omega_c)|}, \text{ para } \omega_c \text{ tal que } \angle L(j\omega_c) = -\pi, \quad (6.2)$$

e

$$PM = \pi + \angle L(j\omega_g), \text{ para } \omega_g \text{ tal que } |L(j\omega_g)| = 1. \quad (6.3)$$

Como $L(s) = G(s)C(s)$ é estável, o sistema em malha fechada será estável se

$$GM > 1 \text{ e } PM > 0^\circ. \quad (6.4)$$

Note que GM representa a quantidade máxima de que se pode aumentar o ganho da Função de Malha, antes que o sistema em malha fechada fique instável. De maneira similar, PM representa a máxima quantidade de atraso de fase que pode ser adicionada a $L(j\omega)$ em ω_g , antes de tornar o sistema em malha fechada instável. Escolhas típicas para GM estão na faixa de 2 a 3, e, para PM, na faixa de 30° a 60° , dependendo das características da dinâmica do processo. Deve-se ressaltar ainda que existem casos em que $L(s)$ possui mais de uma frequência que satisfaz a Eq. 6.2 ou a Eq. 6.3. Assim, ocorrem múltiplos cruzamentos com o ganho unitário e/ou com o semi-eixo real negativo, na curva de Nyquist. Nessas situações, o sistema em malha fechada é estável para um intervalo de ganho e/ou fase. Tais sistemas são denominados *sistemas condicionalmente estáveis* [Ogata 1993], e sua estabilidade relativa é geralmente avaliada a partir do pior caso (frequências mais baixas) dentre as soluções das Eq. (6.2) e (6.3).

6.3 Estimação Usando o Relé

Nesta seção serão apresentadas as técnicas de estimação da margem de ganho e da margem de fase, usando experimentos com relé na malha de controle para obter as estimativas. Os valores obtidos serão utilizados no projeto iterativo do controlador.

6.3.1 Estimação da Margem de Ganho

O método do relé aplicado a um sistema em malha fechada é mostrado na Figura 6.1. Pode se mostrar (ver Schei 1994) que o ciclo limite ocorre na frequência crítica da Função de Malha, de modo que

$$L(j\omega_c) = G(j\omega_c)C(j\omega_c) \cong -\frac{K_c^T}{1 + K_c^T}, \quad (6.5)$$

com

$$K_c^T = \frac{\pi a_{cl}}{4d}, \quad (6.6)$$

e a_{cl} é a amplitude da oscilação na saída do processo em malha fechada. Daqui em diante, este método é referenciado como *Método do Relé na Malha Fechada*.

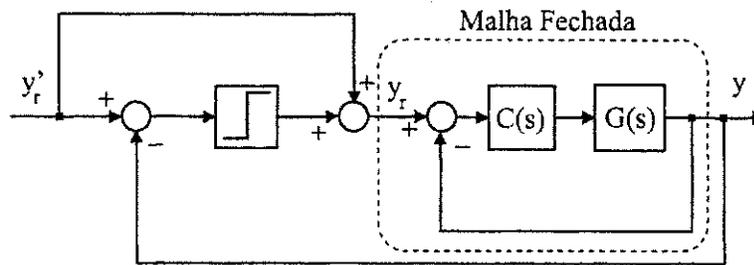


Figura 6.1: Método do relé na malha fechada.

Uma estimativa da margem de ganho do sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.1 é então obtida com o método do relé na malha fechada, e calculada como

$$GM\hat{M} = \left| \frac{1 + K_c^T}{K_c^T} \right| = \frac{4d}{\pi a_{cl}} + 1, \quad (6.7)$$

e a estimativa da frequência crítica, $\hat{\omega}_c$, é obtida a partir da frequência da oscilação na saída da malha fechada.

6.3.2 Estimação da Margem de Fase

Para estimar a margem de fase do sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.1, é necessário obter o atraso de fase de $L(j\omega)$ na frequência de cruzamento do ganho, ω_g . Isto pode ser conseguido usando o método do relé para estimação da Função de Malha, apresentado na seção 2.7.2, com $r = 1$. A partir do ciclo limite obtido, medem-se a frequência de oscilação e o ângulo de fase dos primeiros harmônicos da entrada para a saída de $L(s)$, ou estima-se o ângulo de fase usando a DFT dos sinais de entrada e saída.

A estimativa da margem de fase do sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.1 é então obtida a partir de

$$PM\hat{M} = \pi + \angle \hat{L}(e^{j\hat{\omega}_g}) \quad (6.8)$$

Para o caso de sinais com ruído, recomenda-se usar 3 ou mais períodos de oscilação para calcular a estimativa, de modo a minimizar o efeito do ruído de medição.

6.4 Sintonia do Controlador

Nesta seção, o problema de projeto de controladores PI ou PID baseado em especificações de margens de ganho e de fase é apresentado. A solução é baseada em experimentos com relé para estimação das margens de estabilidade do sistema de controle, e o procedimento é executado sem a remoção do controlador, o que é bastante apropriado para aplicações industriais.

6.4.1 Problema de Projeto

Considere o sistema em malha fechada mostrado na Figura 2.1 e as especificações de margens de ganho e de fase dadas por $A_m > 1$ e $\phi_m > 0^\circ$, respectivamente. Para atender a tais especificações, os parâmetros do controlador devem satisfazer o seguinte conjunto de equações:

$$\angle G(j\omega_c) C(j\omega_c) = -\pi, \quad (6.9)$$

$$|G(j\omega_c) C(j\omega_c)| = \frac{1}{A_m}, \quad (6.10)$$

$$|G(j\omega_g) C(j\omega_g)| = 1, \quad (6.11)$$

$$\angle G(j\omega_g) C(j\omega_g) = -\pi + \phi_m. \quad (6.12)$$

O problema de projeto é então encontrar um controlador $C(s)$ que seja solução das equações de (6.9) a (6.12), o que não é uma tarefa fácil, dada a não linearidade do problema. O procedimento apresentado em Tan et al. 1999 para calcular numericamente os parâmetros do controlador para ambos os tipos PI e PID requer a resposta em frequência do processo, $G(j\omega)$. Além disso, não existe garantia prévia de que tal solução exista, conforme observado pelos autores.

Como alternativa, apresenta-se neste capítulo um algoritmo iterativo que requer apenas a estimação das frequências ω_c e ω_g e as margens de ganho e de fase a cada iteração. Note-se que tais frequências são soluções das equações (6.9) e (6.11), e as estimativas podem ser obtidas usando os experimentos com relé apresentados anteriormente.

6.4.2 Controlador PI

Para um controlador PI ($T_d = 0$ na Eq. (6.1)), o conjunto de equações (6.9)–(6.12) deve ser resolvido para K_p , T_i , ω_c e ω_g , ou seja, um problema com quatro incógnitas e quatro equações. A solução iterativa é obtida projetando-se o controlador para satisfazer uma especificação de cada vez, ou seja:

1. Eq. (6.9): resolve-se para ω_c e calcula-se a margem de ganho atual, GM ;
2. Eq. (6.10): calcula-se $C(s)$ de modo a satisfazer A_m em ω_c ;
3. Eq. (6.11): resolve-se para ω_g e calcula-se a margem de fase atual, PM ;
4. Eq. (6.12): calcula-se $C(s)$ de modo a satisfazer ϕ_m em ω_g ;

As iterações são repetidas até que algum critério de convergência seja satisfeito. Note-se ainda que $[\omega_c, GM]$ e $[\omega_g, PM]$ podem ser obtidos a partir de estimativas usando experimentos com relé. As soluções das Eq. (6.9) e (6.11) para o caso do controlador PI, a partir de $[\omega_c, GM]$ e $[\omega_g, PM]$, são apresentadas na forma de lemas, introduzidos em seguida.

Lema 6.1 *Considere um sistema em malha fechada cuja Função de Malha é $L^{(0)}(s) = G(s)C^{(0)}(s)$, na qual $C^{(0)}(s)$ é um controlador PI dado por*

$$C^{(0)}(s) = K_p^{(0)} \frac{s + 1/T_i^{(0)}}{s}.$$

Assuma que $GM = 1/|L^{(0)}(j\omega_c)|$ com $\angle L^{(0)}(j\omega_c) = -\pi$. Então, para satisfazer a uma especificação de margem de ganho, A_m , o controlador deve ser substituído por

$$C^{(1)}(s) = K_p^{(1)} \frac{s + 1/T_i^{(0)}}{s},$$

com

$$K_p^{(1)} = K_p^{(0)} \frac{GM}{A_m}. \quad (6.13)$$

Demonstração. Devido à forma do controlador (Eq. (6.1)), é necessário e suficiente apenas modificar o ganho proporcional para solução do problema de projeto, dado pela equação (6.10). Em ω_c , tem-se que

$$|L^{(0)}(j\omega_c)| = |G(j\omega_c)| |C^{(0)}(j\omega_c)| = K_p^{(0)} |G(j\omega_c)| \left| \frac{j\omega_c + 1/T_i^{(0)}}{j\omega_c} \right| = \frac{1}{GM}.$$

Aplicando $C^{(1)}(s)$ à malha fechada, como apenas o ganho é modificado, tem-se que em ω_c

$$\begin{aligned} |L^{(1)}(j\omega_c)| &= |G(j\omega_c)| |C^{(1)}(j\omega_c)| = K_p^{(1)} |G(j\omega_c)| \left| \frac{j\omega_c + 1/T_i^{(0)}}{j\omega_c} \right| \\ &= \frac{GM}{A_m} K_p^{(0)} |G(j\omega_c)| \left| \frac{j\omega_c + 1/T_i^{(0)}}{j\omega_c} \right| = \frac{1}{A_m}. \end{aligned}$$

■

Lema 6.2 *Considere um sistema em malha fechada cuja Função de Malha é $L^{(0)}(s) = G(s)C^{(0)}(s)$, na qual $C^{(0)}(s)$ é um controlador PI dado por*

$$C^{(0)}(s) = K_p^{(0)} \frac{s + 1/T_i^{(0)}}{s}.$$

Assuma que $PM = \pi + \angle L^{(0)}(j\omega_g)$ com $|L^{(0)}(j\omega_g)| = 1$. Então, existe um controlador PI que satisfaz a uma dada especificação de margem de fase, ϕ_m , dado por

$$C^{(1)}(s) = K_p^{(1)} \frac{s + 1/T_i^{(1)}}{s},$$

com

$$T_i^{(1)} = \frac{\tan \left[\phi_m - PM + \tan^{-1} \left(\omega_g T_i^{(0)} \right) \right]}{\omega_g} \quad e \quad K_p^{(1)} = K_p^{(0)} \frac{\sqrt{\left(1/T_i^{(0)} \right)^2 + \omega_g^2}}{\sqrt{\left(1/T_i^{(1)} \right)^2 + \omega_g^2}}, \quad (6.14)$$

se e somente se

$$PM - \phi_m - \pi/2 < \angle C^{(0)}(j\omega_g) < PM - \phi_m. \quad (6.15)$$

Demonstração. Para obter os parâmetros do controlador, é necessário determinar $T_i^{(1)}$ e $K_p^{(1)}$ tais que a equação (6.12) seja satisfeita. Assim, tem-se que, em ω_g

$$\angle G(j\omega_g) C^{(0)}(j\omega_g) = -\pi + PM \Rightarrow \angle G(j\omega_g) = -\angle C^{(0)}(j\omega_g) - \pi + PM.$$

Após o projeto, deve-se ter em ω_g

$$\angle G(j\omega_g) C^{(1)}(j\omega_g) = -\pi + \phi_m \Rightarrow \angle G(j\omega_g) = -\angle C^{(1)}(j\omega_g) - \pi + \phi_m.$$

Igualhando-se as expressões anteriores,

$$\angle C^{(1)}(j\omega_g) = \angle C^{(0)}(j\omega_g) + \phi_m - PM.$$

Para um controlador PI tem-se que $\angle C(j\omega) = -\pi + \tan^{-1}(\omega T_i)$, então

$$-\pi + \tan^{-1}(\omega_g T_i^{(1)}) = -\pi + \tan^{-1}(\omega_g T_i^{(0)}) + \phi_m - PM,$$

de modo que

$$T_i^{(1)} = \frac{\tan \left[\tan^{-1}(\omega_g T_i^{(0)}) + \phi_m - PM \right]}{\omega_g}.$$

É necessário agora ajustar o ganho proporcional para que a Eq. (6.11) continue sendo satisfeita. Assim,

$$|G(j\omega_g) C^{(0)}(j\omega_g)| = |G(j\omega_g) C^{(1)}(j\omega_g)| = 1,$$

de modo que

$$|C^{(0)}(j\omega_g)| = |C^{(1)}(j\omega_g)| \Rightarrow K_p^{(0)} \frac{\sqrt{\left(1/T_i^{(0)} \right)^2 + \omega_g^2}}{\omega_g} = K_p^{(1)} \frac{\sqrt{\left(1/T_i^{(1)} \right)^2 + \omega_g^2}}{\omega_g},$$

e finalmente,

$$K_p^{(1)} = K_p^{(0)} \frac{\sqrt{\left(1/T_i^{(0)} \right)^2 + \omega_g^2}}{\sqrt{\left(1/T_i^{(1)} \right)^2 + \omega_g^2}}.$$

A validade destas expressões é limitada pelas quantidades máxima e mínima de fase que o controlador pode fornecer. Para este caso, a fase do controlador PI varia de $-\pi/2$ a 0. Assim, em ω_g deve-se ter

$$-\pi/2 < \angle C^{(1)}(j\omega_g) < 0.$$

Como

$$\angle C^{(1)}(j\omega_g) = \angle C^{(0)}(j\omega_g) + \phi_m - PM,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} -\pi/2 < \angle C^{(0)}(j\omega_g) + \phi_m - PM < 0 \Rightarrow \\ -\pi/2 + PM - \phi_m < \angle C^{(0)}(j\omega_g) < PM - \phi_m. \end{aligned}$$

■

Este último resultado indica que, dependendo da diferença entre a margem de fase atual e a desejada, pode não haver uma solução, devido ao limite de contribuição de fase do controlador. O algoritmo iterativo para o caso do controlador PI é apresentado em seguida, e um sobrescrito k denota a iteração atual.

1. **Condições Iniciais:** Inicie o procedimento com um controlador $C^{(0)}(s)$, com $K_p^{(0)}$ e $T_i^{(0)}$ (neste passo, assume-se que o sistema de controle está em operação e $k = 0$);
2. **Estimação da Margem de Ganho:** Use o método do relé na malha fechada para obter uma estimativa da frequência crítica, $\hat{\omega}_c^{(k)}$, e da margem de ganho, $G\hat{M}^{(k)}$.
3. **1o Teste de Parada:** Se $|G\hat{M}^{(k)} - A_m| \leq \varepsilon_1$ e esta não é a primeira iteração ($k \neq 0$), pare o procedimento e faça $C(s) = C^{(k)}(s)$. Caso contrário, continue o procedimento.
4. **Projeto do Controlador baseado na Margem de Ganho:** Com a estimativa da margem de ganho atual, $G\hat{M}^{(k)}$, calcule o novo ganho proporcional do controlador, $\bar{K}_p^{(k+1)}$, a partir da Eq. (6.13), e o seguinte controlador intermediário é obtido

$$\bar{C}^{(k+1)}(s) = \bar{K}_p^{(k+1)} \left(\frac{s + 1/T_i^{(k)}}{s} \right).$$

5. **Estimação da Margem de Fase:** Use o método do relé para estimação da Função de Malha com $r = 1$, e obtenha as estimativas $\hat{\omega}_g^{(k)}$ e $P\hat{M}^{(k)}$.
6. **2o Teste de Parada:** Se $|P\hat{M}^{(k)} - \phi_m| \leq \varepsilon_2$, pare o procedimento e faça $C(s) = \bar{C}^{(k+1)}(s)$. Caso contrário, continue o procedimento.
7. **Projeto do Controlador baseado na Margem de Fase:** Com a estimativa da margem de fase atual, $P\hat{M}^{(k)}$, calcule os novos parâmetros do controlador, $K_p^{(k+1)}$ e $T_i^{(k+1)}$, a partir da Eq. (6.14), obtendo o seguinte controlador,

$$C^{(k+1)}(s) = K_p^{(k+1)} \left(\frac{s + 1/T_i^{(k+1)}}{s} \right).$$

Se, de acordo com o Lema 6.2, não existir um controlador que satisfaça à especificação ϕ_m , o procedimento deve ser interrompido e o controlador inicial, ou um dos controladores obtidos em passos anteriores deve ser restaurado, pois uma solução não foi encontrada.

8. **Passo de retorno:** Incremente k e retorne ao passo 2.

Nos passos 3 e 6, considera-se que ε_1 e ε_2 são tolerâncias definidas de acordo com o grau de precisão desejado. Note que, na convergência, ambas as especificações A_m e ϕ_m serão satisfeitas, a menos que uma solução não seja encontrada no passo 7 do algoritmo, violando a Eq. (6.15).

6.4.3 Controlador PID

Para o controlador PID dado pela Eq. (6.1), o conjunto de equações deve ser resolvido para K_p , T_i , T_d , ω_c e ω_g , em um total de cinco incógnitas e quatro equações. Portanto, outra equação deve ser introduzida para que um número finito de soluções seja obtido. Conforme observado em Åström e Hägglund 1995, um procedimento típico é especificar uma relação entre os parâmetros T_i e T_d , de modo que

$$T_d = \alpha T_i. \quad (6.16)$$

Esta equação define uma relação entre os zeros do controlador PID, conforme mostrado a seguir. Considere a Eq. (6.1), reescrita na seguinte forma,

$$C(s) = K_p \frac{s + 1/T_i + s^2 T_d}{s} = K_p T_d \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \quad (6.17)$$

em que z_1 e z_2 podem ser calculados como

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4T_d/T_i}}{2T_d} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2T_d}.$$

Logo, para a escolha típica $\alpha = 0.25$ (ver Åström e Hägglund 1995, Ziegler e Nichols 1942), tem-se que $z_1 = z_2 = -1/2T_d$, ou seja, zeros reais e iguais. Se $\alpha > 0.25$, o controlador apresenta zeros complexos, e se $\alpha < 0.25$, o controlador apresenta zeros reais e distintos. Se o controlador estiver na estrutura série como na Eq. (6.17), apenas valores de α menores ou iguais a 0.25 são admissíveis. Além disso, a influência da relação T_d/T_i na solução final do projeto não é trivial. Tal fato pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 6.3 Considere o processo

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^4},$$

e o controlador PID dado pela Eq. (6.1). Assuma as especificações $A_m = 3.5$ e $\phi_m = 60^\circ$. Variando-se o valor de α de 0.05 a 5.00 para as mesmas especificações, diferentes controladores, com diferentes características, são obtidos usando o algoritmo apresentado mais adiante, levando-se em conta a relação (6.16). Na fig. 6.2, observa-se a variação da frequência crítica, ω_u , e da frequência de cruzamento com o ganho, ω_g , da Função de Malha obtida para cada controlador. Observa-se que, para α entre 0.05 e 0.10 existem duas soluções de parâmetros para as mesmas especificações. Por exemplo, com $\alpha = 0.05$, ambos os controladores PID

$$C_1(s) = 2.1177 \frac{1.5009s^2 + s + 0.0333}{s} \quad \text{e} \quad C_2(s) = 0.8054 \frac{0.1319s^2 + s + 0.3791}{s},$$

levam a Funções de Malha que apresentam as especificações desejadas, porém com frequências de cruzamento de ganho e de fase bastante distintas.

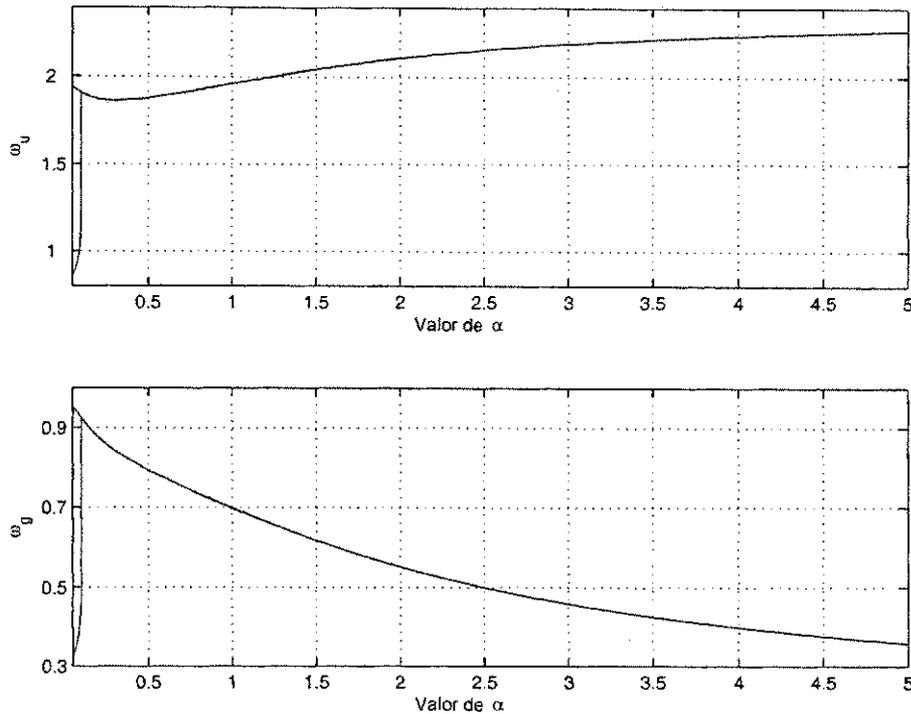


Figura 6.2: Variação da frequência crítica e da frequência do cruzamento do ganho com o α para o exemplo 6.3.

Nota-se portanto que o valor de α tem uma relação com as frequências ω_g e ω_u para as mesmas especificações A_m e ϕ_m . No entanto, a influência de α nestes valores não é trivial, podendo inclusive implicar em múltiplas soluções. Desse modo, a escolha $\alpha = 0.25$ se faz apenas por comodidade, bem como por permitir soluções para qualquer estrutura do controlador, conforme comentado anteriormente, além de permitir a obtenção de resultados sobre a estabilidade da malha fechada, o que será discutido mais adiante.

A solução iterativa é obtida do mesmo modo que para o caso do controlador PI, ou seja, projetando-se o controlador para satisfazer uma especificação de cada vez:

1. Eq. (6.9): resolve-se para ω_c e calcula-se a margem de ganho atual, GM ;
2. Eq. (6.10): calcula-se $C(s)$ de modo a satisfazer A_m em ω_c ;
3. Eq. (6.11): resolve-se para ω_g e calcula-se a margem de fase atual, PM ;
4. Eq. (6.12): calcula-se $C(s)$ de modo a satisfazer ϕ_m em ω_g ;

Similarmente, as iterações são repetidas até que algum critério de convergência seja satisfeito, e $[\omega_c, GM]$ e $[\omega_g, PM]$ podem ser obtidos a partir de estimativas com experimentos com relé. As

soluções das Eq. (6.9) e (6.11) para o caso do controlador PID, a partir de $[\omega_c, GM]$ e $[\omega_g, PM]$, são apresentadas na forma de lemas, introduzidos em seguida. Note-se que deve-se levar em conta a equação (6.16) no cálculo das constantes de tempo integral e derivativa, para que uma solução única seja obtida.

Lema 6.4 *Considere um sistema em malha fechada cuja Função de Malha é $L^{(0)}(s) = G(s)C^{(0)}(s)$, na qual $C^{(0)}(s)$ é um controlador PID dado por*

$$C^{(0)}(s) = K_p^{(0)} \frac{s + 1/T_i^{(0)} + s^2 T_d^{(0)}}{s}.$$

Assuma que $GM = 1/|L^{(0)}(j\omega_c)|$ com $\angle L^{(0)}(j\omega_c) = -\pi$. Então, para satisfazer a uma especificação de margem de ganho, A_m , o controlador deve ser substituído por

$$C^{(1)}(s) = K_p^{(1)} \frac{s + 1/T_i^{(0)} + s^2 T_d^{(0)}}{s},$$

com

$$K_p^{(1)} = K_p^{(0)} \frac{GM}{A_m}. \quad (6.18)$$

Demonstração. Similar ao Lema 6.1. ■

Lema 6.5 *Considere um sistema em malha fechada cuja Função de Malha é $L^{(0)}(s) = G(s)C^{(0)}(s)$, na qual $C^{(0)}(s)$ é um controlador PID dado por*

$$C^{(0)}(s) = K_p^{(0)} \frac{s + 1/T_i^{(0)} + s^2 T_d^{(0)}}{s}.$$

Assuma que $PM = \pi + \angle L^{(0)}(j\omega_g)$ com $|L^{(0)}(j\omega_g)| = 1$. Então, existe um controlador PID que satisfaz a uma dada especificação de margem de fase, ϕ_m , dado por

$$C^{(1)}(s) = K_p^{(1)} \frac{s + 1/T_i^{(1)} + s^2 T_d^{(1)}}{s},$$

com $T_i^{(1)}$ e $T_d^{(1)}$ obtidos a partir da única solução positiva do sistema

$$\frac{1}{T_i^{(1)}} - \omega_g^2 T_d^{(1)} = \frac{\omega_g}{\beta}, \quad (6.19)$$

$$T_d^{(1)} - \alpha T_i^{(1)} = 0, \quad (6.20)$$

com

$$\beta = \tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega_g}{1/T_i^{(0)} - \omega_g^2 T_d^{(0)}} \right) + \phi_m - PM \right], \quad (6.21)$$

e ganho $K_p^{(1)}$ dado por

$$K_p^{(1)} = K_p^{(0)} \frac{\sqrt{\left(1/T_i^{(0)} - \omega_g^2 T_d^{(0)}\right)^2 + \omega_g^2}}{\sqrt{\left(1/T_i^{(1)} - \omega_g^2 T_d^{(1)}\right)^2 + \omega_g^2}}, \quad (6.22)$$

se e somente se

$$PM - \phi_m - \pi/2 < \angle C^{(0)}(j\omega_g) < PM - \phi_m + \pi/2. \quad (6.23)$$

Demonstração. Para obter os parâmetros do controlador, é necessário determinar $T_i^{(1)}$, $T_d^{(1)}$ e $K_p^{(1)}$ tais que as equações (6.12) e (6.16) sejam satisfeitas. Assim, do mesmo modo que para o Lema 6.2, tem-se que, em ω_g

$$\angle C^{(1)}(j\omega_g) = \angle C^{(0)}(j\omega_g) + \phi_m - PM.$$

Para um controlador PID, a fase é dada por

$$\angle C(j\omega) = -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1/T_i - \omega^2 T_d}\right),$$

então

$$-\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_g}{1/T_i^{(1)} - \omega_g^2 T_d^{(1)}}\right) = -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_g}{1/T_i^{(0)} - \omega_g^2 T_d^{(0)}}\right) + \phi_m - PM,$$

de modo que

$$\frac{\omega_g}{1/T_i^{(1)} - \omega_g^2 T_d^{(1)}} = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega_g}{1/T_i^{(0)} - \omega_g^2 T_d^{(0)}}\right) + \phi_m - PM\right] = \beta,$$

de onde se verifica a Eq. (6.19). A Eq. (6.20) é obtida diretamente a partir da equação de projeto (6.16). Finalmente, ajustando-se o ganho proporcional para que

$$|G(j\omega_g) C^{(0)}(j\omega_g)| = |G(j\omega_g) C^{(1)}(j\omega_g)| = 1,$$

tem-se a Eq. (6.22). A validade destas expressões é limitada pelas quantidades máxima e mínima de fase que o controlador PID pode fornecer, variando de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Assim, em ω_g deve-se ter

$$-\pi/2 < \angle C^{(1)}(j\omega_g) < \pi/2.$$

Como

$$\angle C^{(1)}(j\omega_g) = \angle C^{(0)}(j\omega_g) + \phi_m - PM,$$

tem-se a expressão (6.23). ■

O algoritmo completo é apresentado em seguida, e um sobrescrito k denota a iteração atual.

1. **Condições Iniciais:** Inicie o procedimento com um controlador $C^{(0)}(s)$, com $K_p^{(0)}$, $T_i^{(0)}$ e $T_d^{(0)}$ (neste passo, assume-se que o sistema de controle está em operação e $k = 0$);
2. **Estimação da Margem de Ganho:** Use o método do relé na malha fechada para obter uma estimativa da frequência crítica, $\hat{\omega}_c^{(k)}$, e da margem de ganho, $G\hat{M}^{(k)}$.
3. **1o Teste de Parada:** Se $|G\hat{M}^{(k)} - A_m| \leq \varepsilon_1$ e esta não é a primeira iteração ($k \neq 0$), pare o procedimento e faça $C(s) = C^{(k)}(s)$. Caso contrário, continue o procedimento.

4. **Projeto do Controlador baseado na Margem de Ganho:** Com a estimativa da margem de ganho atual, $GM^{(k)}$, calcule o ganho proporcional do controlador, $\bar{K}_p^{(k+1)}$, a partir da Eq. (6.18), e o seguinte controlador intermediário é obtido

$$\bar{C}^{(k+1)}(s) = \bar{K}_p^{(k+1)} \left(\frac{s + 1/T_i^{(k)} + s^2 T_d^{(k)}}{s} \right).$$

5. **Estimação da Margem de Fase:** Use o método do relé para estimação da Função de Malha com $r = 1$, e obtenha as estimativas $\hat{\omega}_g^{(k)}$ e $P\hat{M}^{(k)}$.
6. **2o Teste de Parada:** Se $|P\hat{M}^{(k)} - \phi_m| \leq \varepsilon_2$, pare o procedimento e faça $C(s) = \bar{C}^{(k+1)}(s)$. Caso contrário, continue o procedimento.
7. **Projeto do Controlador baseado na Margem de Fase:** Com a estimativa da margem de fase atual, $P\hat{M}^{(k)}$, calcule os novos parâmetros do controlador, $K_p^{(k+1)}$, $T_i^{(k+1)}$ e $T_d^{(k+1)}$, resolvendo o sistema de equações de (6.19) a (6.22), obtendo o seguinte controlador,

$$C^{(k+1)}(s) = K_p^{(k+1)} \left(\frac{s + 1/T_i^{(k+1)} + s^2 T_d^{(k+1)}}{s} \right).$$

Se, de acordo com o Lema 6.5, não existir um controlador que satisfaça à especificação ϕ_m , o procedimento deve ser interrompido e o controlador inicial deve ser restaurado, pois uma solução não foi encontrada.

8. **Passo de retorno:** Incremente k e retorne ao passo 2.

Novamente, nos passos 3 e 6, considera-se que ε_1 e ε_2 são pequenas tolerâncias definidas de acordo com o grau de precisão desejado, e, na convergência, ambas as especificações A_m e ϕ_m serão satisfeitas. Isto ocorre porque ao verificar se uma das especificações satisfaz a tolerância desejada (passos 3 ou 6), uma vez que o controlador tenha sido reprojetoado para a outra especificação em um passo anterior (passos 4 ou 7), assume-se que a mesma seja satisfeita. Quando uma solução não é encontrada no passo 7 do algoritmo, violando a Eq. (6.23), então assume-se que a solução não existe.

6.5 Análise de Estabilidade

A utilização dos algoritmos propostos para sintonia de controladores industriais possui como principal atrativo a não necessidade de se conhecer a função de transferência do processo. No entanto, é desejável também garantir que o projeto dos controladores nas diversas iterações leve sempre a malhas fechadas estáveis. Uma discussão sobre a estabilidade dos controladores a cada iteração é apresentada nesta seção.

Nos algoritmos propostos, parte-se sempre de um controlador inicial tal que a malha fechada é estável por hipótese. Se um controlador que satisfaz as especificações é encontrado, este é feito

o novo controlador, caso contrário, os parâmetros iniciais são restaurados. No entanto, para se chegar ao controlador final, são necessários tantos parâmetros intermediários quantas iterações forem necessárias. Note que os parâmetros são sempre alterados nos passos 4 e 7 de ambos os algoritmos. Fazendo-se algumas hipóteses sobre o processo, é possível mostrar que o algoritmo sempre leva a malhas fechadas estáveis ao longo das iterações. Para se chegar ao resultado desejado, o reprojeto do controlador de acordo com os Lemas 6.1, 6.4, 6.2 e 6.5 será analisado inicialmente. O objetivo é mostrar que, para um mesmo conjunto de hipóteses, o reprojeto do controlador leva sempre a um novo controlador que, além de satisfazer a uma das especificações, estabiliza a malha fechada. Tal fato é apresentado nas duas proposições seguintes.

Proposição 6.6 *Considere um processo representado por $G(s)$ realimentado por um controlador PI ou PID, conforme ilustrado na Fig. 2.1, tal que a malha fechada, $T(s)$, é estável. Assuma que a função de transferência $G(s)$ satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. $G(s)$ é estável;
2. $G(j\omega)$ não possui picos ressonantes;
3. $|G(j\omega)|$ é monotonicamente decrescente para todo $0 \leq \omega < \infty$, para o caso PI, e monotonicamente decrescente com pelo menos -20dB de inclinação, para o caso PID.

Então, o reprojeto do controlador PI ou PID de acordo com os Lemas 6.1 e 6.4 leva a uma malha fechada estável. Além disso, a Função de Malha obtida permanece estável, sem picos ressonantes e com magnitude monotonicamente decrescente.

Demonstração. É suficiente mostrar que a nova função de malha satisfaz as condições de estabilidade na Eq. (6.4). Das hipóteses sobre $G(s)$ e das funções de transferência dos controladores PI e PID, tem-se que, para quaisquer parâmetros de controlador, $L(s)$ é estável, e $L(j\omega)$ não possui picos ressonantes e possui magnitude monotonicamente decrescente para todo $0 \leq \omega < \infty$. Como $T(s)$ é estável, então $L(s)$ possui margem de ganho maior do que a unidade e margem de fase positiva. De acordo com os Lemas 6.1 e 6.4, após o ajuste do controlador, $|L(j\omega_c)| = 1/A_m < 1$. Se o sistema não é condicionalmente estável, então a frequência de cruzamento do ganho é menor do que a frequência crítica, e, conseqüentemente, $\angle L(j\omega_g)$ é menor que 180° , de modo que a margem de fase é positiva, e a nova malha fechada, $L^{(1)}(s)$, é estável. Se $L(j\omega)$ é condicionalmente estável, então o pior caso é considerado, ou seja, a margem de ganho é calculada para a menor frequência crítica. Assim, garante-se que, após o reprojeto, as intersecções com o semi-eixo real negativo ocorrem para valores a partir do ponto -1 para sua direita, não havendo portanto circulações do mesmo pela curva de Nyquist de $L(j\omega)$, garantindo estabilidade da malha fechada. ■

Proposição 6.7 *Considere um processo representado por $G(s)$ realimentado por um controlador PI ou PID, conforme ilustrado na fig. 2.1, tal que a malha fechada, $T(s)$, é estável. Assuma que a função de transferência $G(s)$ satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. $G(s)$ é estável;
2. $G(j\omega)$ não possui picos ressonantes;
3. $|G(j\omega)|$ é monotonicamente decrescente para todo $0 \leq \omega < \infty$, para o caso PI, e monotonicamente decrescente com pelo menos -20dB de inclinação, para o caso PID.

Então, o reprojeto do controlador PI ou PID de acordo com os Lemas 6.2 e 6.5 leva a uma malha fechada estável. Além disso, a Função de Malha obtida permanece estável, sem picos ressonantes e com magnitude monotonicamente decrescente.

Demonstração. Do mesmo modo, é suficiente mostrar que a nova função de malha satisfaz as condições de estabilidade na Eq. (6.4). Das hipóteses sobre $G(s)$ e das funções de transferência dos controladores PI e PID, tem-se novamente que, para quaisquer parâmetros de controlador, $L(s)$ é estável, e $L(j\omega)$ não possui picos ressonantes e possui magnitude monotonicamente decrescente para todo $0 \leq \omega < \infty$, e, como $T(s)$ é estável, então $L(s)$ possui margem de ganho maior do que a unidade e margem de fase positiva. De acordo com os Lemas 6.2 e 6.5, após o ajuste do controlador, $\angle L(j\omega_g) + \pi = \phi_m > 0$. Como $|L(j\omega)|$ é decrescente e não há picos ressonantes, $\omega_g < \omega_c \Rightarrow |L(j\omega_g)| = 1 > |L(j\omega_c)|$, de modo que a nova margem de ganho é maior do que a unidade, e a malha fechada é estável. Se, devido ao reprojeto, a nova Função de Malha apresentar $\angle L(j\omega) = -\pi$ para algum $\omega < \omega_g$, o sistema torna-se condicionalmente estável, havendo interseções da curva de Nyquist de $L(j\omega)$ com o semi-eixo real negativo à esquerda do ponto -1 . No entanto, por continuidade da fase de $L(j\omega)$, a curva de Nyquist de $L(j\omega)$ não circula o ponto -1 , de modo que a malha fechada continua estável. ■

Exemplo 6.8 Considere um processo $G(s)$ dado por

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)},$$

e um controlador PI, dado pela Eq. (6.1) com $T_d = 0$. As especificações para este exemplo são $A_m = 4.857$ e $\phi_m = 60^\circ$. Admita o controlador inicial com $K_p = 0.0525$ e $T_i = 1$, ou seja,

$$C^{(0)}(s) = 0.0525 \frac{s + 1}{s}.$$

As margens de estabilidade de $L^{(0)}(s) = C^{(0)}(s)G(s)$ são dadas por

$$GM^{(0)} = 4.857 \text{ e } PM^{(0)} = 22.632^\circ,$$

indicadas na fig. 6.3, e, conseqüentemente, a malha fechada é estável. Note a presença de um pico ressonante em uma frequência superior à frequência crítica de $L^{(0)}(j\omega)$. Considere agora o algoritmo para sintonia do controlador PI. Como no passo 4, $GM^{(0)} = A_m = 4.857$, então $\bar{K}_p^{(1)} = K_p^{(0)}$, de modo que antes do passo 7 tem-se o mesmo controlador inicial, $\bar{C}^{(1)}(s) = C^{(0)}(s)$. O novo controlador é obtido no passo 7, resolvendo-se a Eq. (6.14), de modo que

$$C^{(1)}(s) = 0.1835 \frac{s + 0.1883}{s}.$$

Para a Função de Malha correspondente a este controlador, embora a margem de fase seja positiva ($PM^{(1)} = 60.000^\circ$), tem-se $GM^{(1)} = 0.9983 < 1$, conforme se observa na fig. 6.3. Logo, a malha fechada correspondente será instável. Do diagrama de Nyquist na fig. 6.4, vê-se que ocorre uma circulação do ponto $-1 + j0$ devido ao pico ressonante, e à forma de $\Delta C(s) = C^{(1)}(s)/C^{(0)}(s)$ (fig. 6.5).

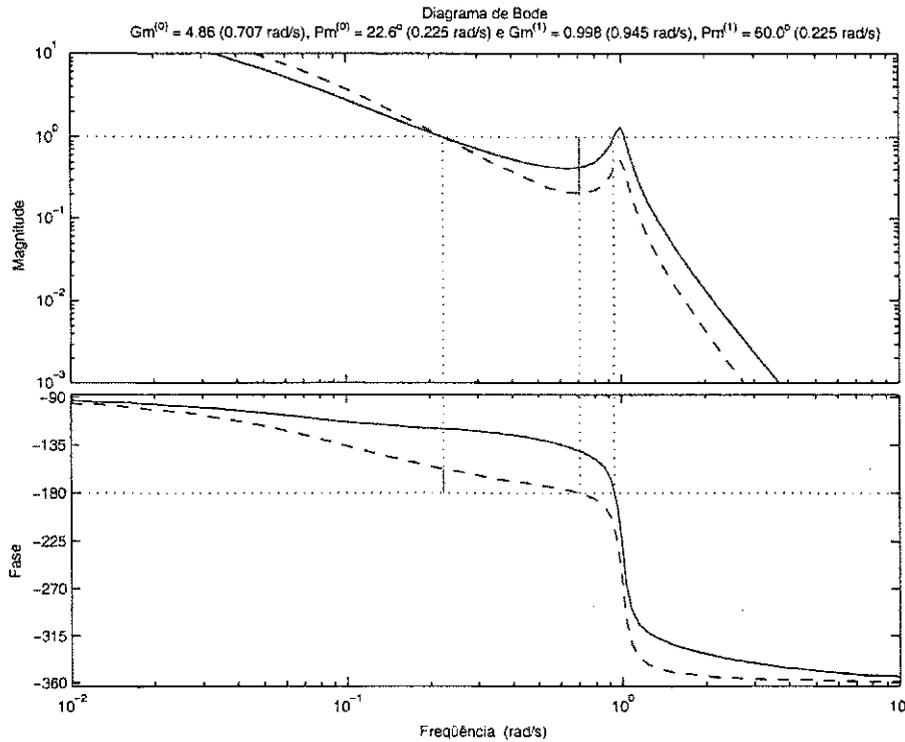


Figura 6.3: Margens de ganho e de fase de $L^{(0)}(s) = C^{(0)}(s)G(s)$ (---) e $L^{(1)}(s) = C^{(1)}(s)G(s)$ (—).

Com base nas duas proposições anteriores, é possível agora mostrar que ambos os algoritmos de sintonia levam a malhas fechadas estáveis durante as iterações. Em ambos os casos, a malha fechada permanece estável até que uma solução seja obtida, ou que seja impossível calcular uma solução, de acordo com os Lemas 6.2 ou 6.5.

Proposição 6.9 *Os algoritmos para sintonia de controladores PI e PID baseados em especificações de margens de ganho e de fase apresentam malhas fechadas estáveis durante as iterações se o processo é tal que sua função de transferência, $G(s)$, satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. $G(s)$ é estável;
2. $G(j\omega)$ não possui picos ressonantes;
3. $|G(j\omega)|$ é monotonicamente decrescente, para o caso PI, e monotonicamente decrescente com pelo menos $-20dB$ de inclinação, para o caso PID.

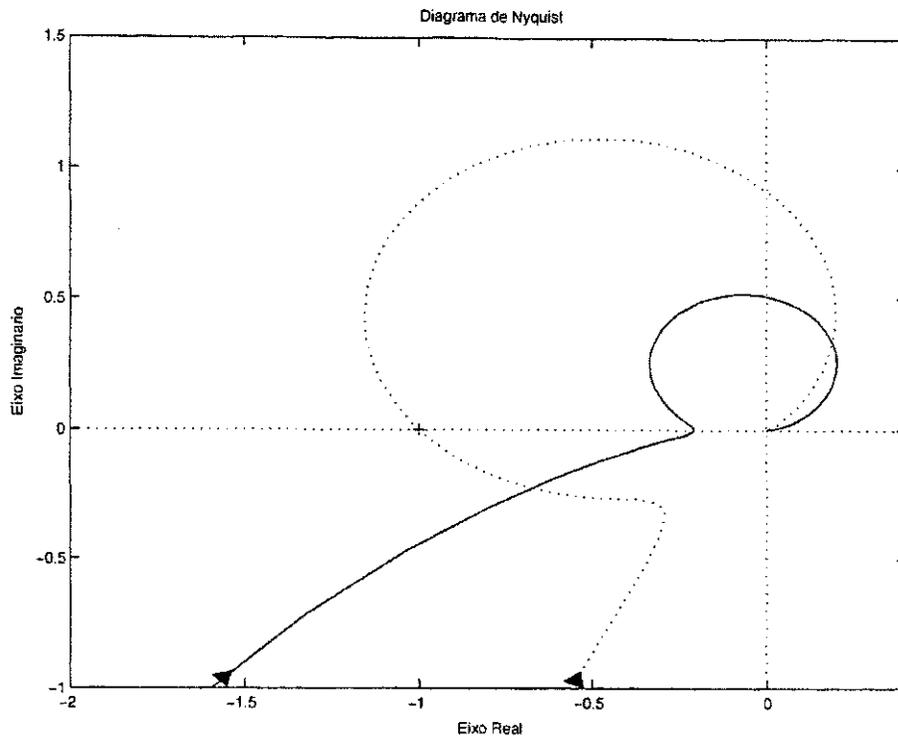


Figura 6.4: Diagrama de Nyquist de $L^{(0)}(s) = C^{(0)}(s)G(s)$ (-) e $L^{(1)}(s) = C^{(1)}(s)G(s)$ (- -).

Demonstração. De acordo com os algoritmos apresentados, o novo controlador é calculado a cada iteração para satisfazer uma das especificações de cada vez, usando os lemas 6.1, 6.4, 6.2 e 6.5. Pelas proposições 6.6 e 6.7, desde que $G(s)$ satisfaça as hipóteses 1, 2 e 3, o novo controlador leva a uma malha fechada estável. Além disso, pelas funções de transferência dos controladores PI e PID, a Função de Malha mantém as mesmas características após cada reprojeto, ou seja, $L(s)$ permanece estável, sem picos ressonantes e com magnitude monotonicamente decrescente. ■

6.6 Garantindo Estabilidade da Malha Fechada

Na seção anterior, mostrou-se que para certas classes de Funções de Malha os algoritmos propostos sempre apresentam malhas fechadas estáveis ao longo das iterações. Apesar de não ser necessário conhecer $G(j\omega)$, é necessário, no entanto, fazer algumas hipóteses sobre seu comportamento, o que requer algum conhecimento *a priori* do processo, para que se tenha garantia de estabilidade durante as iterações do método.

Tendo tal fato em mente, apresenta-se nesta seção uma maneira de se avaliar a estabilidade do sistema, de modo a garantir que, ao aplicar o novo controlador, a malha fechada seja estável. Com este resultado, é possível aplicar os algoritmos sem nenhum conhecimento *a priori* sobre o processo, tendo a segurança de saber se o novo controlador resulta em uma malha fechada estável, antes de aplicá-lo à malha fechada. Os resultados são baseados na teoria de controle robusto, que pode se encontrada em diversos livros sobre o assunto (ver, por exemplo Doyle, Francis e Tannenbaum 1995 e Zhou 1998).

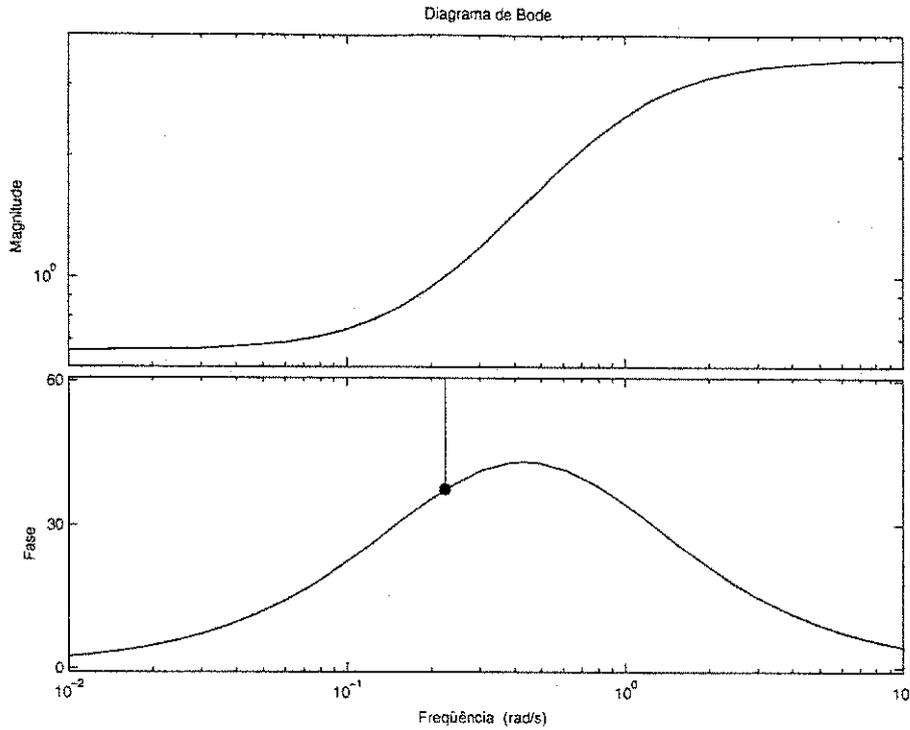


Figura 6.5: Diagrama de Bode de $\Delta C(s) = C^{(1)}(s) / C^{(0)}(s)$.

O teorema do ganho pequeno [Zhou 1998] pode ser usado para obter condições de robustez para sistemas lineares e invariantes no tempo. Tal teorema é apresentado em seguida, para análise da estabilidade do sistema em realimentação mostrado na fig. 6.6.

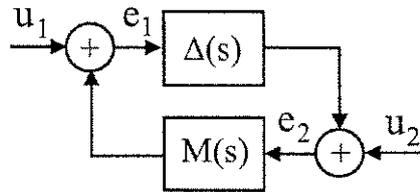


Figura 6.6: Sistema em realimentação para o Teorema do Ganho Pequeno.

Teorema 6.10 (Teorema do Ganho Pequeno) Sob as hipóteses de que $\Delta(s)$ e $M(s)$ no laço de realimentação da fig. 6.6 são estáveis, a matriz de transferência de malha fechada de (u_1, u_2) para (e_1, e_2) é estável se a seguinte condição de ganho pequeno é satisfeita:

$$\|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \|M(j\omega)\|_{\infty} < 1.$$

Demonstração. Ver em Zhou 1998. ■

Para a maioria das aplicações de controle robusto, $\Delta(s)$ é tida como uma perturbação no modelo nominal do processo, limitada em alguma norma. O objetivo aqui é considerar que $\Delta(s)$ é uma perturbação no controlador atual, e assumir que existe uma informação precisa sobre o processo real. Deste modo, é possível obter o seguinte resultado:

Proposição 6.11 Considere os algoritmos de sintonia dos controladores PI e PID. Calculando $\Delta C(s)$ como sendo

$$\Delta C(s) = \frac{C^{(k+1)}(s)}{C^{(k)}(s)},$$

então o novo controlador leva a uma malha fechada estável se

$$\|S^{(k)}(j\omega)\|_{\infty} < \frac{1}{\|\Delta(j\omega)\|_{\infty}}, \quad (6.24)$$

com

$$\Delta(s) = \frac{\Delta C(s) - 1}{\Delta C(s)}. \quad (6.25)$$

Demonstração. A aplicação do novo controlador na malha fechada pode ser visualizada pelo diagrama de blocos mostrado na fig. 6.7, onde

$$\Delta C(s) = \frac{1}{1 - \Delta(s)} \Rightarrow \Delta(s) = \frac{\Delta C(s) - 1}{\Delta C(s)}.$$

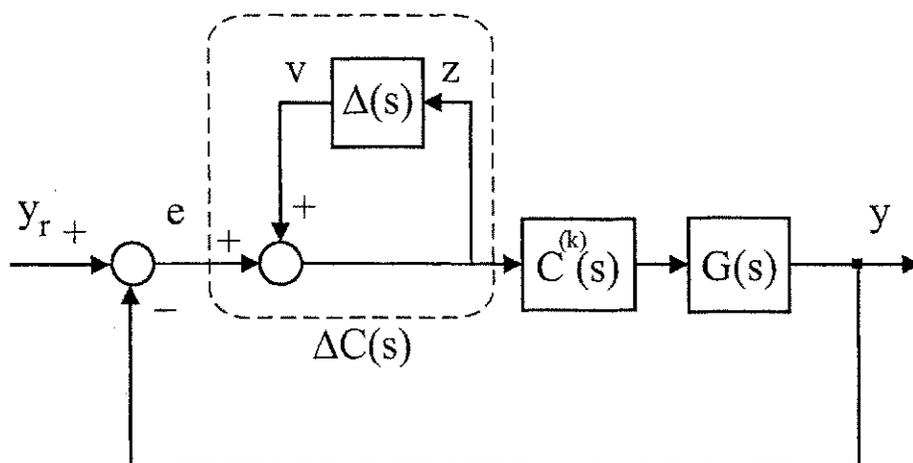


Figura 6.7: Diagrama em blocos da atualização do controlador, $\Delta C(s) = 1/(1 - \Delta(s))$.

Além disso,

$$\Delta C(s) C^{(k)}(s) = C^{(k+1)}(s),$$

de modo que a malha fechada mostrada na figura é aquela obtida com o novo controlador. Para se obter o resultado da proposição, deve-se primeiramente reduzir o laço de realimentação da fig. 6.7 para a forma apresentada na fig. 6.6. Para tanto, deve-se isolar $\Delta(s)$ e calcular a função de transferência da saída de $\Delta(s)$, $v(t)$, para sua entrada, $z(t)$. Da fig. 6.7, considerando $y_r = 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) C^{(k)}(s) Z(s), \\ Z(s) &= V(s) + [-Y(s)], \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{Z(s)}{V(s)} = \frac{1}{1 + G(s) C^{(k)}(s)} = S^{(k)}(s).$$

Logo, aplicando-se o Teorema do Ganho Pequeno com $M(s) = S^{(k)}(s)$, tem-se que

$$\|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \|S^{(k)}(j\omega)\|_{\infty} < 1,$$

que leva ao resultado desejado. ■

Exemplo 6.12 Considere o exemplo 6.8. Para este caso,

$$\Delta(s) = \frac{\Delta C(s) - 1}{\Delta C(s)} = \frac{0.1310s - 0.0179}{0.1835s + 0.03456} \Rightarrow (\|\Delta(j\omega)\|_{\infty})^{-1} = 1.3984,$$

e

$$\|S(j\omega)\|_{\infty} = 2.7648 > \frac{1}{\|\Delta(j\omega)\|_{\infty}}.$$

Logo, não se pode concluir que a nova malha fechada seja estável. Para este caso, a malha fechada obtida com o novo controlador é dada por

$$M(s) = \frac{0.18351(s + 0.1883)}{(s + 0.8931)(s^2 + 0.3071s + 0.04336)(s^2 - 0.0002s + 0.8926)},$$

que possui um par de pólos complexos instáveis, bastante próximos ao eixo imaginário.

Exemplo 6.13 Considere novamente o exemplo 6.8, agora com $\phi_m = 30^\circ$. Assim, $C^{(1)}(s)$ é dado agora por

$$C^{(1)}(s) = 0.0820 \frac{s + 0.6113}{s},$$

e $\Delta C(s)$ é dado então por

$$\Delta C(s) = \frac{0.08202s + 0.05055}{0.0525s + 0.0525}.$$

Para este caso,

$$\Delta(s) = \frac{0.0295s - 0.0019}{0.0820s + 0.0506} \Rightarrow (\|\Delta(j\omega)\|_{\infty})^{-1} = 2.7752 > \|S(j\omega)\|_{\infty},$$

de onde se conclui que a nova malha fechada é estável, conforme se observa na sua função de transferência

$$T(s) = \frac{0.082024(s + 0.6163)}{(s + 0.9814)(s^2 + 0.1384s + 0.05545)(s^2 + 0.08019s + 0.9289)}.$$

Dos resultados anteriores, conclui-se que, para se saber de antemão se a malha fechada será estável com o novo controlador, é necessário avaliar $\|S(j\omega)\|_{\infty}$. É possível, portanto, usar o experimento com a Função de Sensibilidade apresentado na seção 2.7.3, para saber se $\|S(j\omega)\|_{\infty}$ é menor do que r^{-1} , com $r = \|\Delta(j\omega)\|_{\infty}$, bastando observar a existência de um ciclo limite na saída da malha fechada atual. Tal resultado é apresentado no lema seguinte.

Lema 6.14 Considere o experimento com relé para estimação da Função de Sensibilidade apresentado na fig. 2.9, e os algoritmos de sintonia dos controladores PI e PID apresentados anteriormente. Escolhendo-se $r = \|\Delta(j\omega)\|_{\infty}$, com $\Delta(s)$ definido na Eq. (6.25), se não houver um ciclo limite na saída da malha fechada, o novo controlador leva a uma malha fechada estável.

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.13, existe um ciclo limite no experimento da fig. 2.9 se

$$|S(j\omega_o)| \cong r^{-1},$$

para algum $r > 0$. Assim, se nenhuma oscilação é observada na saída da malha fechada, é porque a condição anterior não é satisfeita para nenhum $0 < \omega < \infty$, ou seja,

$$\frac{1}{\|\Delta(j\omega)\|_\infty} = r^{-1} > \max_{\omega} |S(j\omega)| = \|S(j\omega)\|_\infty.$$

Logo, da Proposição 6.11, conclui-se que a nova malha fechada é estável. ■

Neste caso, se um ciclo limite se desenvolve no sistema em malha fechada, então podemos assumir que $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \|S^{(k)}(j\omega)\|_\infty \geq 1$, invalidando a hipótese da Proposição 6.11. Neste caso, o sistema pode ou não ser instável, pois a condição da Eq. (6.24) é apenas suficiente. Caso contrário, se a saída do sistema permanece constante, então podemos assumir que $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \|S^{(k)}(j\omega)\|_\infty < 1$, e o novo controlador levará a uma malha fechada estável.

Note que o procedimento é bastante seguro, uma vez que a malha fechada usada no experimento é estável por definição, e a atualização do controlador serve apenas de parâmetro para o experimento. Além disso, a saída da malha fechada pode ser mantida dentro de níveis desejados usando não-linearidades do tipo saturação na entrada de referência, conforme explicado nas seções 2.7.2 e 2.7.3 para os experimentos com a Função de Malha e a Função de Sensibilidade, respectivamente.

Exemplo 6.15 Considere o exemplo 6.8. Aplicando o experimento da fig. 2.9 no sistema de controle, com

$$r^{-1} = (\|\Delta(j\omega)\|_\infty)^{-1} = 1.3984,$$

observa-se um ciclo limite na saída (vide fig. 6.8), indicando que o novo controlador pode não estabilizar a malha fechada. O experimento é ativado após 150s, até que a saída do processo se estabilize.

Exemplo 6.16 Considere agora o exemplo 6.13, em que se tem $\phi_m = 30^\circ$. Aplicando o experimento da fig. 2.9 no sistema de controle, agora com

$$r^{-1} = (\|\Delta(j\omega)\|_\infty)^{-1} = 2.7752,$$

não se observa oscilações na saída (vide fig. 6.9), indicando que o novo controlador pode ser aplicado, sem que a malha fechada fique instável.

Embora o resultado apresentado na Proposição 6.11 seja importante para avaliar a estabilidade da malha fechada antes de atualizar os parâmetros do controlador, a informação obtida pode ser muito conservadora. De fato, para o exemplo 6.8, malhas fechadas estáveis são obtidas para especificações de margem de fase até 59° , embora para valores próximos de 59° , os pólos em malha fechada se aproximam bastante do eixo imaginário. Neste caso, perde-se muita informação por causa da utilização da norma infinita de ambas as funções de transferência, pois o teorema é escrito

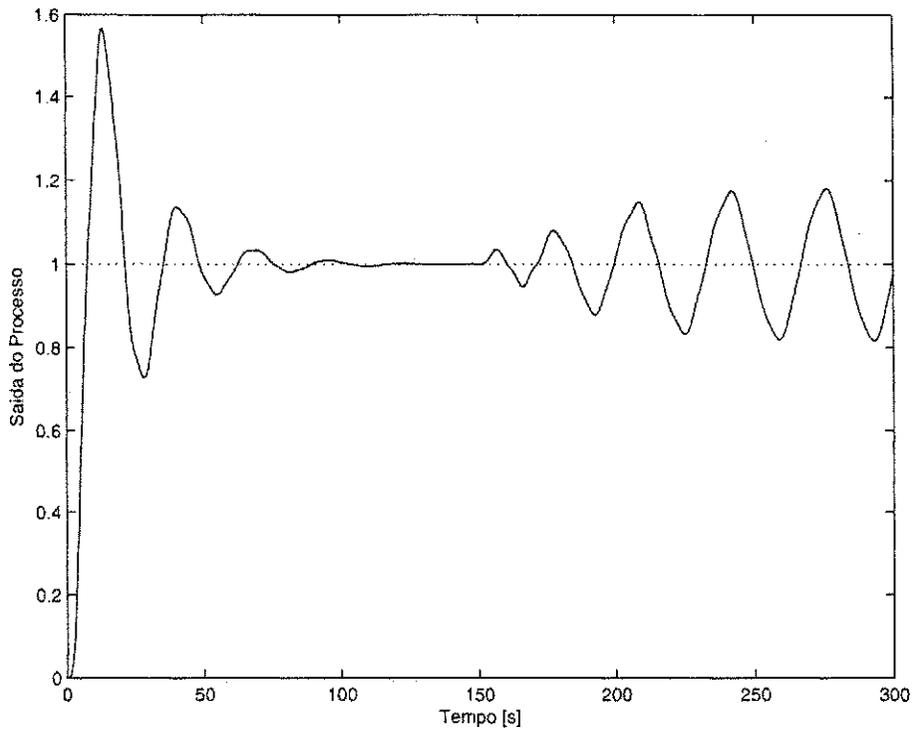


Figura 6.8: Saída do processo durante o experimento da fig. 2.9, para o exemplo 6.15.

para levar em conta sistemas MIMO. Valores menos conservadores podem ser obtidos se levarmos em conta que o procedimento apresentado aqui é destinado para sistemas SISO. Para tais sistemas, a condição de ganho pequeno da proposição 6.11 pode ser expressa como

$$|\Delta(j\omega) M(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \geq 0, \tag{6.26}$$

o que implica que a curva de Nyquist de $\Delta(j\omega) M(j\omega)$ se encontra estritamente dentro do círculo unitário centrado na origem. Isto é uma condição suficiente para estabilidade, porque ambos $\Delta(s)$ e $M(s)$ são estáveis. Neste caso, a Proposição 6.11 se torna

Proposição 6.17 *Considere os algoritmos de sintonia dos controladores PI e PID. Calculando ΔC como sendo*

$$\Delta C(s) = \frac{C^{(k+1)}(s)}{C^{(k)}(s)},$$

então o novo controlador leva a uma malha fechada estável se

$$\|S^{(k)}(j\omega) \Delta(j\omega)\|_{\infty} < 1, \tag{6.27}$$

com

$$\Delta(s) = \frac{\Delta C(s) - 1}{\Delta C(s)}.$$

Demonstração. Da fig. 6.7, uma condição suficiente para estabilidade é $|S^{(k)}(j\omega) \Delta(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \geq 0$. Isto equivale dizer que $\max_{\omega} |S^{(k)}(j\omega) \Delta(j\omega)| = \|S^{(k)}(j\omega) \Delta(j\omega)\|_{\infty} < 1$. ■

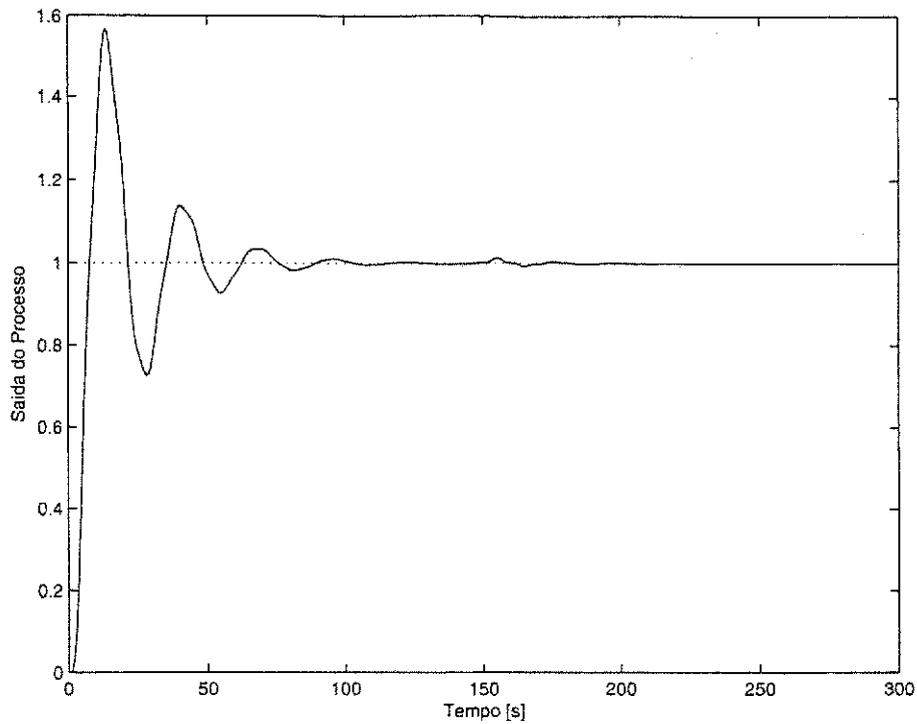


Figura 6.9: Saída do processo durante o experimento da fig. 2.9, para o exemplo 6.16.

É necessário agora obter um experimento com relé, baseado no experimento com a Função de Sensibilidade, para avaliar a expressão (6.27). Modificando a estrutura da fig. 2.9, tem-se a estrutura mostrada na fig. 6.10, que possui a seguinte propriedade.

Proposição 6.18 *Considere o sistema em malha fechada mostrado na fig. 6.10. Assuma que, para uma malha fechada estável, $T(s)$, uma função de transferência $\Delta(s)$ que possui inversa estável, e um número real positivo, r , a função de transferência*

$$F(s) = 2 \frac{\frac{1}{1+r\Delta(s)}}{1 - \frac{r\Delta(s)}{1+r\Delta(s)}T(s)} - 1 \tag{6.28}$$

é também estável. Se um ciclo limite está presente no sistema, a oscilação ocorre na frequência ω_o , tal que

$$|S(j\omega_o) \Delta(j\omega_o)| = r^{-1}$$

Demonstração. Como

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)},$$

então

$$\begin{aligned} F(s) &= 2 \frac{\frac{1}{1+r\Delta(s)}}{1 - \frac{r\Delta(s)}{1+r\Delta(s)}T(s)} - 1 = \frac{1 - r\Delta(s) + r\Delta(s)T(s)}{1 + r\Delta(s) - r\Delta(s)T(s)} \\ &= \frac{1 + L(s) - r\Delta(s) - r\Delta(s)L(s) + r\Delta(s)L(s)}{1 + L(s) + r\Delta(s) + r\Delta(s)L(s) - r\Delta(s)L(s)} = \frac{1 + L(s) - r\Delta(s)}{1 + L(s) + r\Delta(s)} \\ &= \frac{(S(s)\Delta(s))^{-1} - r}{(S(s)\Delta(s))^{-1} + r}. \end{aligned}$$

Segue então da Prop. 2.4 com $H(s) = (S(s) \Delta(s))^{-1}$ que $|S(j\omega_o) \Delta(j\omega_o)| = r^{-1}$. ■

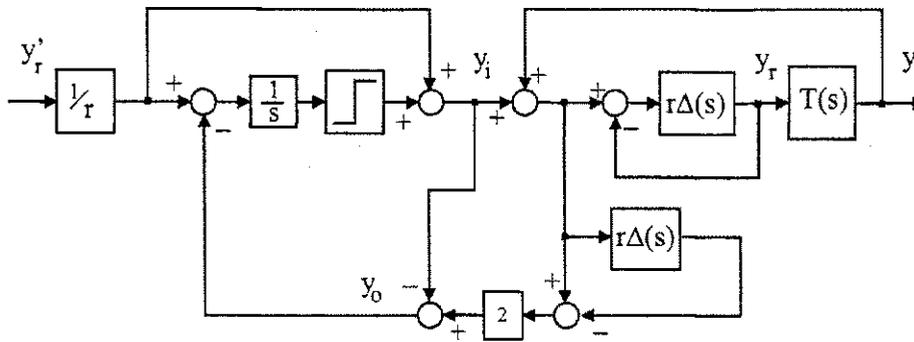


Figura 6.10: Experimento com relé para determinação da estabilidade da malha fechada.

Observação 6.19 Nos casos em que $\Delta(s)$ possui um (caso PI) ou dois (caso PID) zeros instáveis, é conveniente substituí-los no experimento por um zero estável de mesmo módulo, uma vez que apenas a magnitude de $\Delta(s)$ importa nesta situação. Assim, $\Delta(s)$ se torna $\Delta'(s)$, em que

$$\Delta'(s) = \frac{s + |z_\Delta|}{s + p_\Delta},$$

para o caso PI e

$$\Delta'(s) = \frac{(s + |z_\Delta|)^2}{(s + p_\Delta)^2},$$

para o caso PID.

Exemplo 6.20 Considere novamente o exemplo 6.8, agora com $\phi_m = 40^\circ$. Assim, $C^{(1)}(s)$ é dado agora por

$$C^{(1)}(s) = 0.1198 \frac{s + 0.3887}{s},$$

e $\Delta C(s)$ é dado então por

$$\Delta C(s) = \frac{0.1198s + 0.04658}{0.0525s + 0.0525}.$$

Para este caso,

$$\Delta(s) = \frac{0.0673s - 0.0059}{0.1198s + 0.0466} \Rightarrow (\|\Delta(j\omega)\|_\infty)^{-1} = 1.7775,$$

o que, de acordo com a Proposição 6.11, não permite conclusão nenhuma acerca da estabilidade. No entanto, a saída do processo no experimento com relé da fig. 6.10 para este caso, conforme mostrado na fig. 6.11, não apresenta ciclo limite, o que leva a concluir que a nova malha fechada é estável, pela proposição 6.17. Para este caso,

$$\|S^{(k)}(j\omega) \Delta(j\omega)\|_\infty = 0.8910,$$

e a nova função de transferência de malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{0.11984(s + 0.3887)}{(s + 0.9542)(s^2 + 0.1935s + 0.05354)(s^2 + 0.05231s + 0.9118)}$$

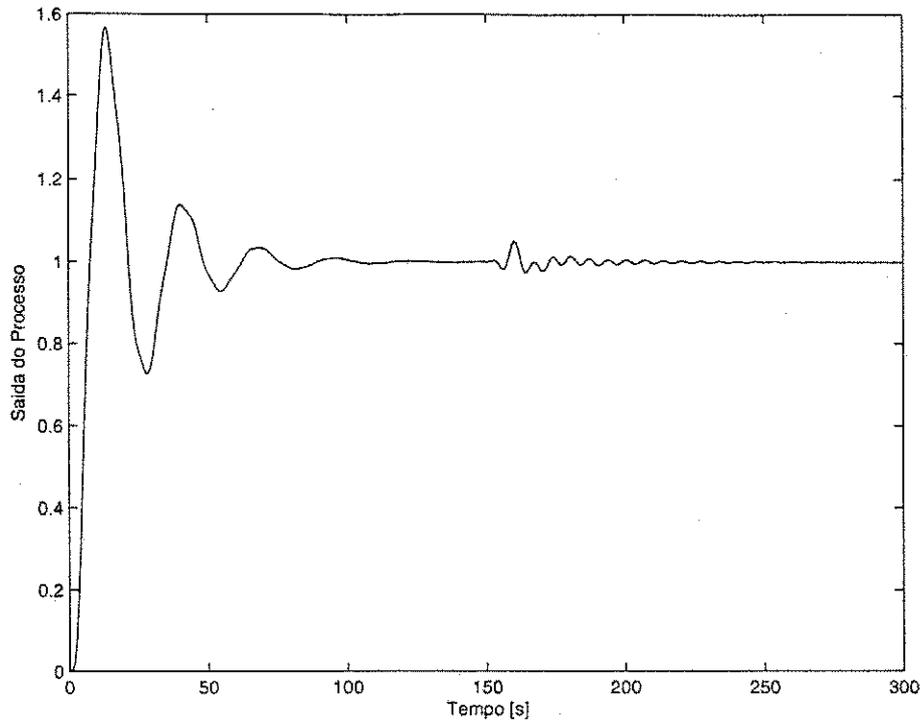


Figura 6.11: Saída do processo durante o experimento da fig. 6.10, para o exemplo 6.20, com $\phi_m = 40^\circ$.

Exemplo 6.21 Considere novamente o exemplo 6.8, agora com $\phi_m = 45^\circ$. $C^{(1)}(s)$ e $\Delta C(s)$ são dados por

$$C^{(1)}(s) = 0.1375 \frac{s + 0.3205}{s} \quad e \quad \Delta C(s) = \frac{0.1375s + 0.0441}{0.0525s + 0.0525}$$

Para este caso,

$$\Delta(s) = \frac{0.0850s - 0.0084}{0.1375s + 0.0441} \Rightarrow (\|\Delta(j\omega)\|_\infty)^{-1} = 1.6159,$$

e a saída do processo no experimento com relé, conforme mostrado na fig. 6.12, apresenta um ciclo limite, não permite conclusão nenhuma acerca da estabilidade. Neste exemplo,

$$\|S^{(k)}(j\omega) \Delta(j\omega)\|_\infty = 1.1274,$$

e a nova função de transferência de malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{0.13745(s + 0.3205)}{(s + 0.9397)(s^2 + 0.2219s + 0.0518)(s^2 + 0.03842s + 0.9051)},$$

que, no entanto, é estável.

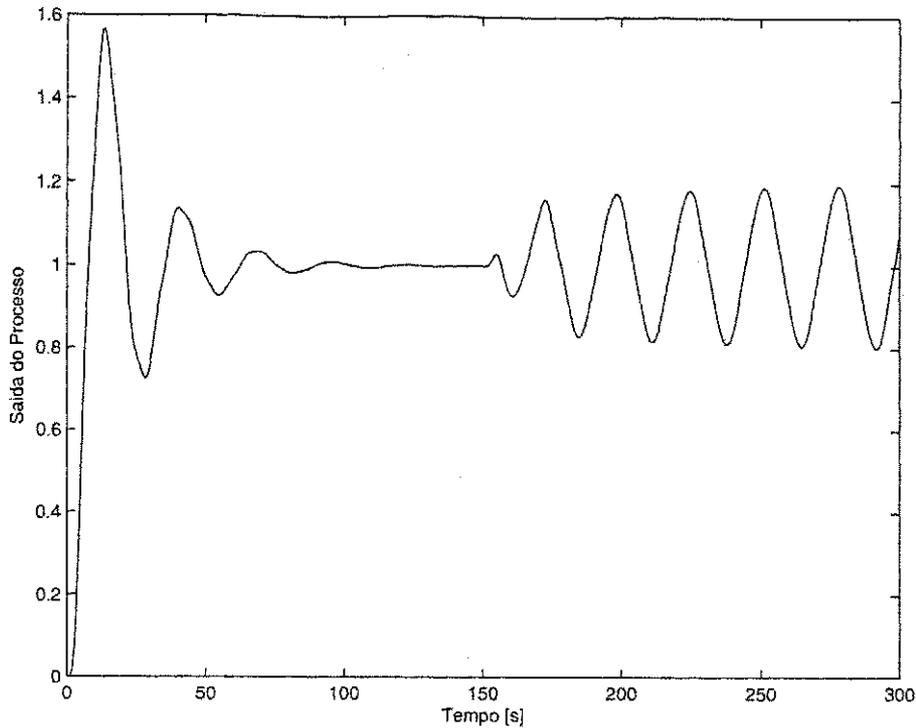


Figura 6.12: Saída do processo durante o experimento da fig. 6.10, para o exemplo 6.20, com $\phi_m = 45^\circ$.

6.7 Resultados de Simulação e Experimentais

6.7.1 Exemplo de Simulação

Para ilustrar a técnica de sintonia iterativa proposta, um exemplo de simulação é apresentado. A função de transferência do processo é de quarta ordem, dada por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4},$$

e o controlador inicial é calculado a partir da tabela de Ziegler e Nichols para o método da resposta em frequência (ver em Åström e Hägglund 1995), usando a informação obtida a partir do método do relé. O seguinte controlador é obtido,

$$K_p^{(0)} = 2.312, T_i^{(0)} = 3.1944 \text{ e } T_d^{(0)} = 0.7986,$$

e as margens de ganho e de fase obtidas usando este controlador são,

$$GM^{(0)} = 3.192 \text{ e } PM^{(0)} = 44.435^\circ.$$

Deseja-se um sistema em malha fechada que satisfaça as especificações $A_m = 3.5$ e $\phi_m = 60^\circ$. Os valores dos parâmetros que satisfazem às especificações são,

$$K_p = 2.2213, T_i = 5.3146 \text{ e } T_d = 1.3287.$$

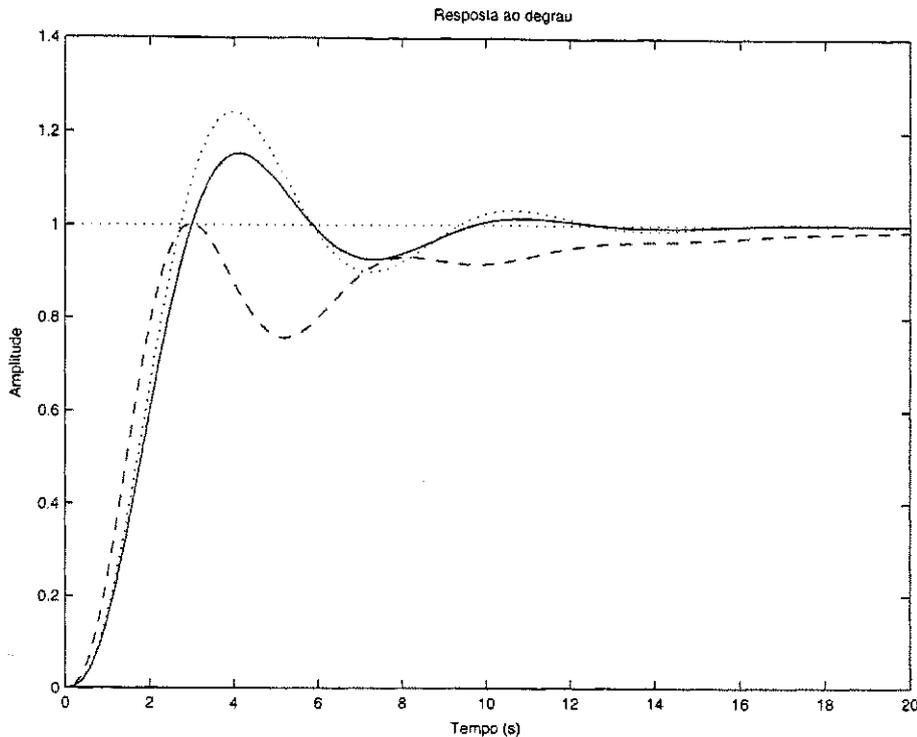


Figura 6.13: Saída da malha fechada para referência em degrau usando o controlador inicial ($\cdot\cdot$), a solução exata ($- -$) e a solução obtida na quarta iteração ($-$).

fluxo de carbono limita o processo de denitrificação, e a capacidade de remoção de nitrogênio não é completamente utilizada; 2) um grande fluxo de carbono é caro, pode causar desperdício de carbono e aumentar a produção de lodo (ver Aspegren et al. 1992). Portanto, deseja-se usar um controlador de taxa de carbono para manter níveis desejados de nitrato nas zonas anóxicas, mantendo o fluxo de carbono numa taxa razoável.

Ao invés de usar controladores complexos, bons resultados podem ser obtidos com controladores PI ou PID, sintonizados com especificações em margens de ganho e de fase. O efluente em um processo de tratamento passa normalmente pelos seguintes tipos de tratamento antes de ser liberado para o meio ambiente: mecânico, biológico, químico e lodo. No tratamento biológico, o então chamado Processo de Lodo Ativado, o esgoto bruto é submetido à ação de microorganismos (a biomassa) que realizam processos de renovação biológica na matéria biodegradável (o substrato).

A configuração do processo de lodo ativado é mostrada na fig. 6.15. O sistema é composto de três zonas anóxicas, duas aeróbicas e um sedimentador. O oxigênio dissolvido nas zonas aeróbicas é controlado por controladores PI (não mostrados na figura). O nível de nitrato é medido na última zona anóxica (zona 3), enquanto que o carbono é adicionado à primeira zona (zona 1). O sistema em malha fechada é implementado conforme mostrado na fig. 6.15. Existem três modos de operação, que são ativados selecionando a origem da entrada de referência do controlador PI. A referência do controlador portanto pode ser escolhida entre o valor fixo de referência (nível de nitrato desejado na zona 3), o método do relé na malha fechada, ou o método do relé para estimação da resposta em frequência, com $r = 1$. Note que nos dois últimos casos, a referência deve ser um sinal oscilatório,

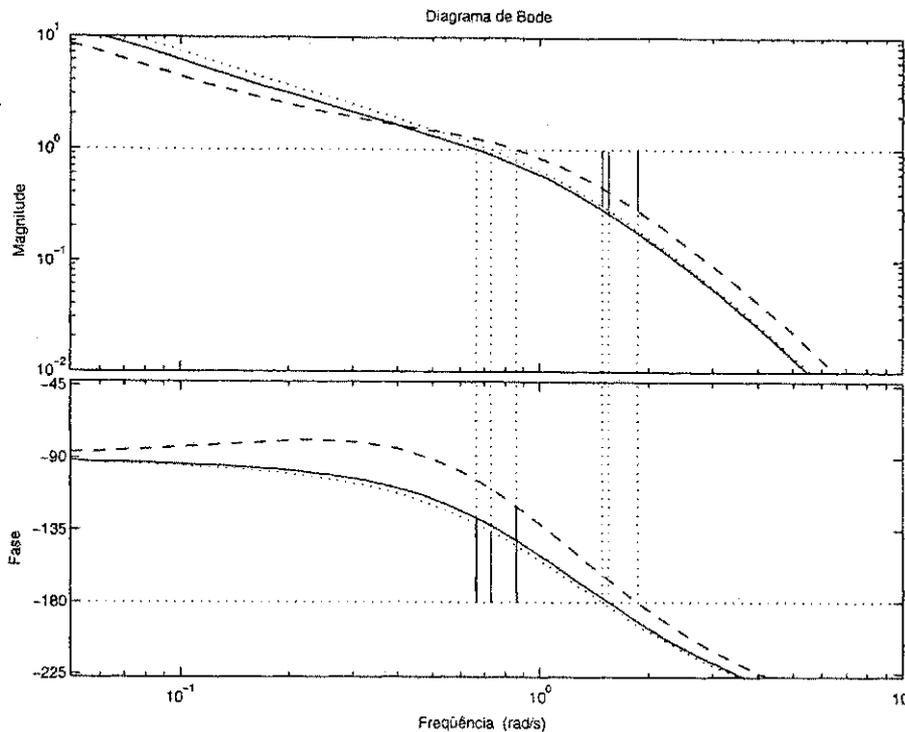


Figura 6.14: Diagramas de Bode da Função de Malha para o controlador inicial (\cdot), para a solução exata ($-$) e para a solução obtida na quarta iteração ($-$).

em torno do nível de nitrato desejado, dentro de limites especificados. Neste trabalho, o valor fixo de referência é escolhido como sendo 2.0 mg/l .

Para se manter o nível de nitrato na zona 3 dentro de pelo menos 10% do valor fixo, a amplitude do relé escolhida é $d = \pi/20$ (ver Arruda e Barros 2000). Os parâmetros do controlador são atualizados de acordo com o algoritmo apresentado no capítulo anterior. Note que o controlador é atualizado sem perturbar o tratamento de água para propósitos de sintonia, o que é uma propriedade interessante da metodologia apresentada.

Cada zona, anóxica ou anaeróbica, é simulada com o modelo 1 da IAWQ, usando valores padrões citados em Henze 1987. O controlador inicial é obtido a partir do método da resposta em frequência de Ziegler-Nichols [Åström e Hägglund 1995], usando estimativas do ponto crítico obtidas com o método do relé. Este controlador será usado no início de cada esquema de iteração.

Os resultados para diferentes combinações de especificações de margens de ganho e de fase são mostrados na Tabela 6.2. Se o controlador final é obtido no passo 6 do algoritmo, apenas meia iteração é considerada. Note que na maioria dos casos, um pequeno número de iterações é necessário.

Da tabela, a maior largura de faixa ($\hat{\omega}_g$) é obtida com o controlador "B". Respostas a uma mudança em degrau no valor de referência de 1.8 mg/l para 2.2 mg/l são mostradas nas fig. 6.16 e fig. 6.17 para cada controlador, incluindo o controlador inicial.

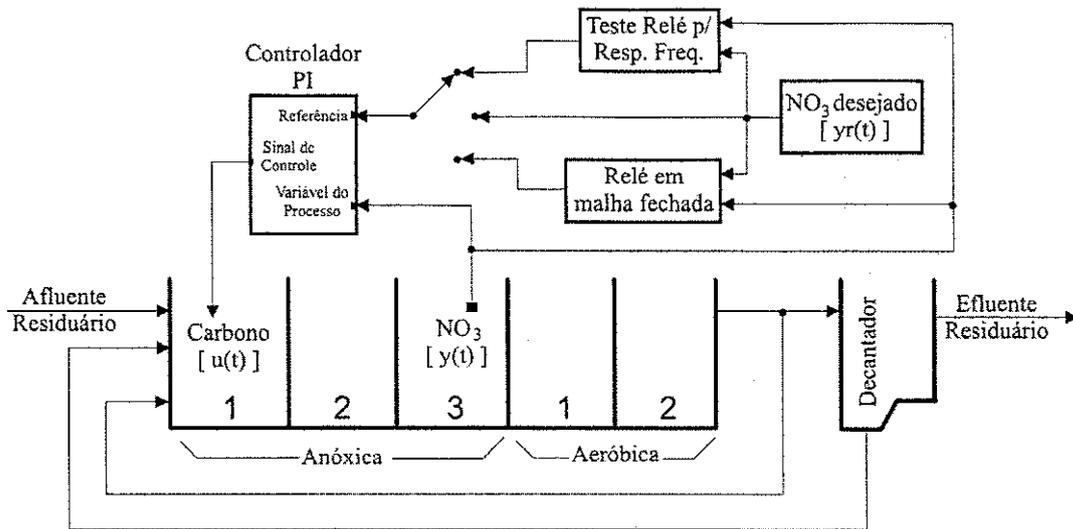


Figura 6.15: Configuração do processo de lodo ativado.

Contr.	A_m	ϕ_m	K_p	T_i	Iter.	\hat{GM}	\hat{PM}	$\hat{\omega}_g$ (rad/h)	$\hat{\omega}_c$ (rad/h)
A	2.0	45°	88.5921	1.1652	3½	—	44.61°	0.9989	2.7437
B	2.0	60°	155.8490	7.1839	6	1.956	—	1.5250	3.1105
C	2.5	45°	94.3993	1.1623	1	2.475	—	1.0631	2.7437
D	2.5	60°	112.6838	2.1416	3	2.507	—	0.9322	2.9920

Tabela 6.2: Resultados de simulação para diferentes especificações de margens de ganho e de fase.

O nível de nitrato e a referência do controlador durante a terceira iteração para o caso “B” são mostrados na fig. 6.18. Note que a saída permanece dentro dos limites especificados durante a simulação.

6.9 Sistema de Controle de Temperatura

Nesta seção, são apresentados resultados experimentais obtidos com um trocador de calor em escala de laboratório. Uma ilustração do sistema é mostrada na Figura 6.19.

O processo consiste de dois tubos conectados a um reservatório. Pequenos ventiladores são usados para forçar o ar do exterior para o reservatório, e depois de volta para o exterior. O fluxo de ar no tubo 1 é aquecido por uma resistência elétrica. A tensão na resistência é controlada por um retificador a tiristor com ângulo de disparo determinado pelo sinal de controle, que é um sinal elétrico de 0-2.5V. O segundo tubo é utilizado para introduzir perturbações no sistema.

A saída do sistema, $y(t)$, é a temperatura no reservatório, que é medida a partir de um sinal elétrico de 0-2.5V, proveniente do sensor térmico S1 mais circuito de condicionamento. O controlador PID é implementado em um microcomputador com sistema de aquisição de dados integrado (conversores A/D e D/A), não mostrados na figura. O objetivo é controlar a temperatura no reservatório em níveis desejados.

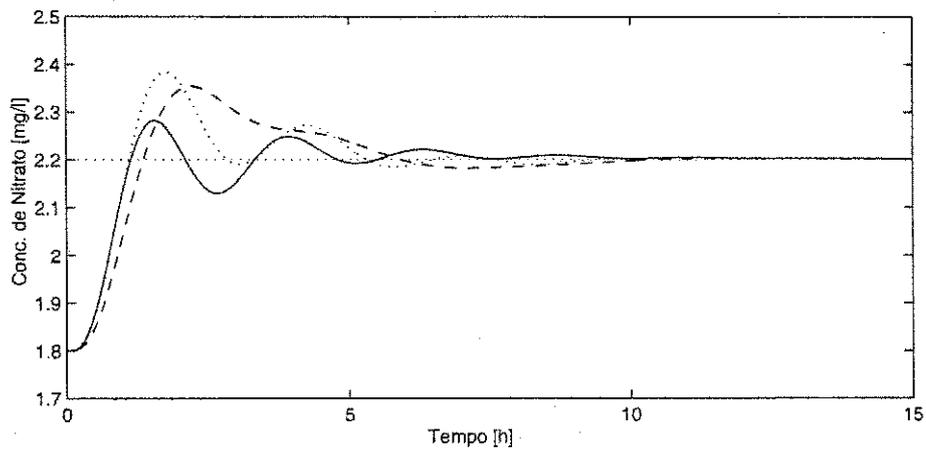


Figura 6.16: Resposta ao degrau: controlador inicial (\cdot), controlador A ($---$) e controlador B ($-$).

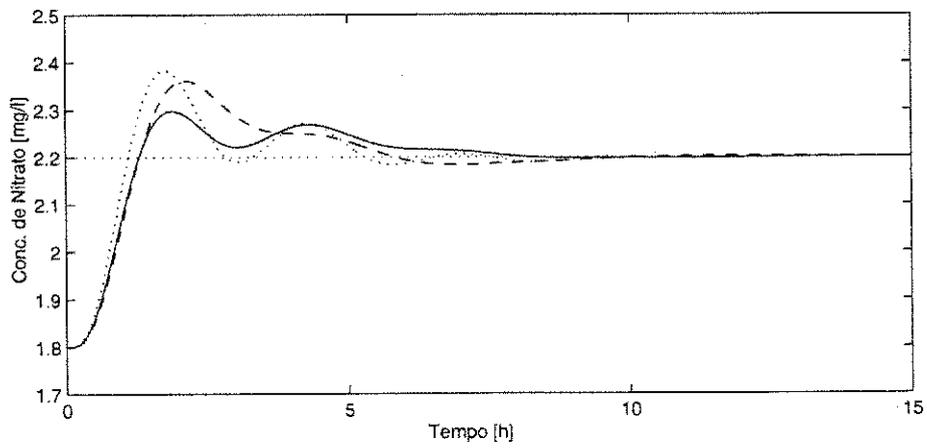


Figura 6.17: Resposta ao degrau: controlador inicial (\cdot), controlador C ($---$) e controlador D ($-$).

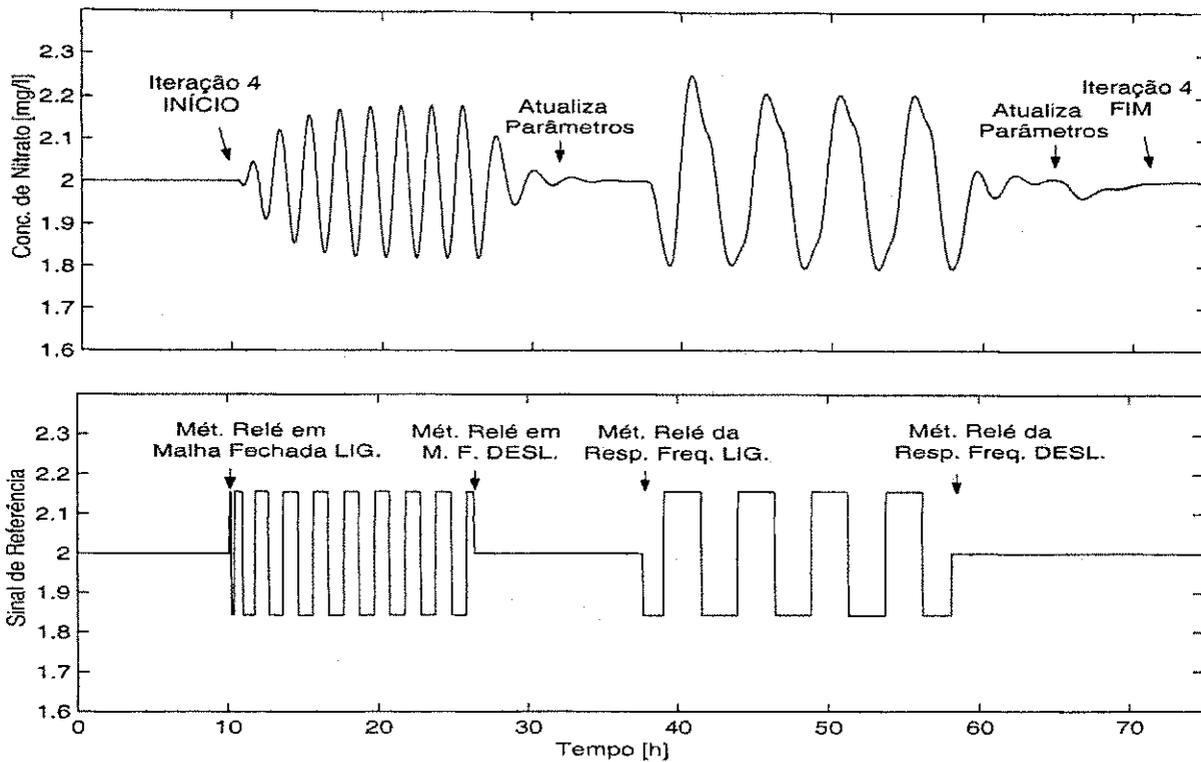


Figura 6.18: Nível de nitrato e referência do controlador durante a 3a iteração no caso “B”.

O ponto de operação escolhido para o sistema é de $y_r = 1.7V$. O controlador inicial é obtido a partir da tabela de Ziegler e Nichols para o método da resposta em frequência (ver em Åström e Hägglund 1995). O ganho crítico e a frequência crítica do processo estimados usando o método do relé são

$$\hat{K}_c^G = 8.9885 \text{ e } \hat{\omega}_c = 2\pi/7.8,$$

e os seguintes parâmetros do controlador são então obtidos,

$$K_p^{(0)} = 5.3931, \quad T_i^{(0)} = 3.9000 \text{ e } T_d^{(0)} = 0.9750.$$

O método do relé na malha fechada e o método do relé para estimação da resposta em frequência com $r = 1$ aplicados ao sistema de controle levam às seguintes estimativas,

$$GM^{(0)} = 1.8214 \text{ e } PM^{(0)} = 49.07^\circ.$$

O algoritmo iterativo é iniciado com $C^{(0)}(s)$ sendo o controlador obtido com os parâmetros calculados anteriormente. Deseja-se uma malha fechada que satisfaça às especificações $A_m = 3$ e $\phi_m = 60^\circ$. As tolerâncias para os critérios de parada são $\varepsilon_1 = 0.1$ e $\varepsilon_2 = 0.5^\circ$. Após 1 iteração completa, o seguinte controlador é obtido,

$$C^{(1)}(s) = 2.3302 \frac{(s + 0.2290 + 1.0918s^2)}{s}.$$

As margens de estabilidade estimadas a cada iteração são mostradas na Tabela 6.3, juntamente com os parâmetros do controlador.

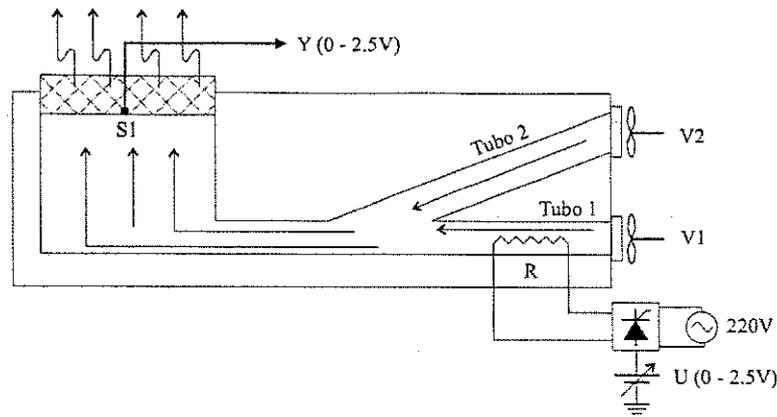


Figura 6.19: Ilustração do modelo reduzido do trocador de calor.

Iter.	\hat{GM}	\hat{PM}	K_p	T_i	T_d
0	1.8214	—	3.2743	3.9000	0.9750
$\frac{1}{2}$	—	54.72°	3.4961	4.3672	1.0918
1	1.9995	—	2.3302	4.3672	1.0918
$1 + \frac{1}{2}$	—	60.29°	—	—	—

Tabela 6.3: Margens de ganho e de fase e parâmetros do controlador a cada iteração para o sistema trocador de calor.

Para ilustrar os experimentos com o relé, as saídas do processo para ambos os métodos durante a iteração $\frac{1}{2}$ e 1 são mostradas na Figura 6.20. Note que a saída sempre se mantém em torno do ponto de operação escolhido, o que garante a operação normal do sistema.

Na fig. 6.20, tem-se na curva superior, o método do relé para estimação da resposta em frequência com $r = 1$, e, na curva inferior, o método do relé na malha fechada. Em ambos os gráficos, o sinal de saída é representado pela linha contínua e o sinal de referência pela linha pontilhada.

A resposta a um degrau de referência do sistema em malha fechada usando o controlador inicial é mostrada na Figura 6.21, e usando o controlador obtido na última iteração é mostrada na Figura 6.22. Note a melhora nas margens de estabilidade da malha fechada observando o sinal de controle. Note também que o processo apresenta respostas diferentes, para diferentes direções na variação da referência, o que ressalta o comportamento não linear deste processo em particular.

Uma estimativa da largura de faixa da malha fechada final (definida como a frequência de cruzamento ω_g , em que a magnitude de $L(j\omega_g)$ é unitária) é dada por,

$$\hat{\omega}_g^{(2)} = 0.21 \text{ rad/s} ,$$

que é menor do que a largura de faixa obtida com $C^{(0)}(s)$, $\hat{\omega}_g^{(0)} = 0.285 \text{ rad/s}$.

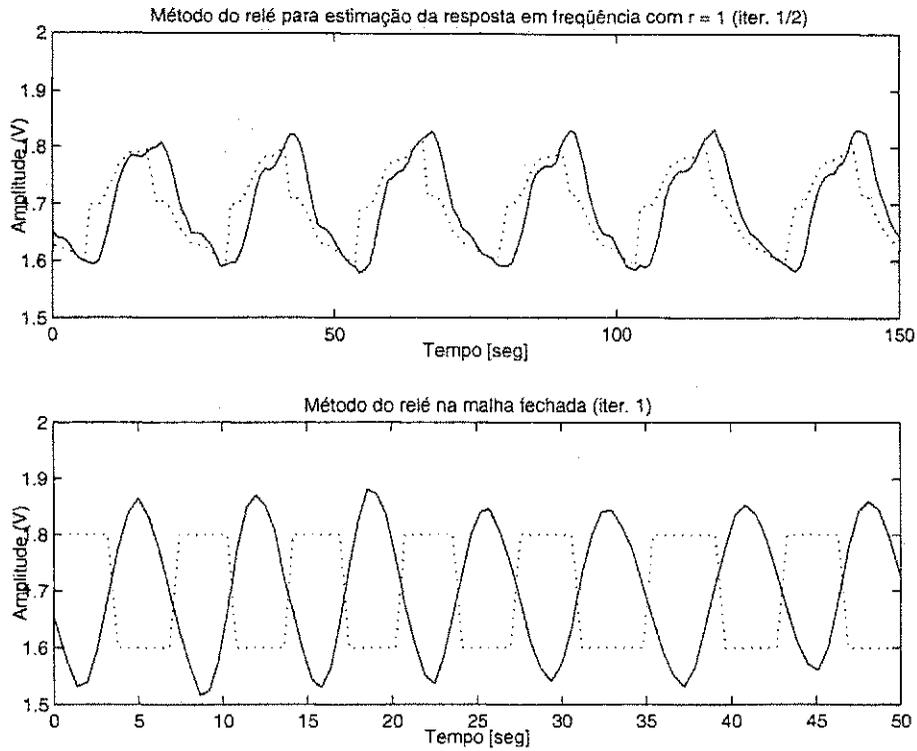


Figura 6.20: Experimentos com relé nas iterações 1 e $\frac{1}{2}$ para o sistema trocador de calor.

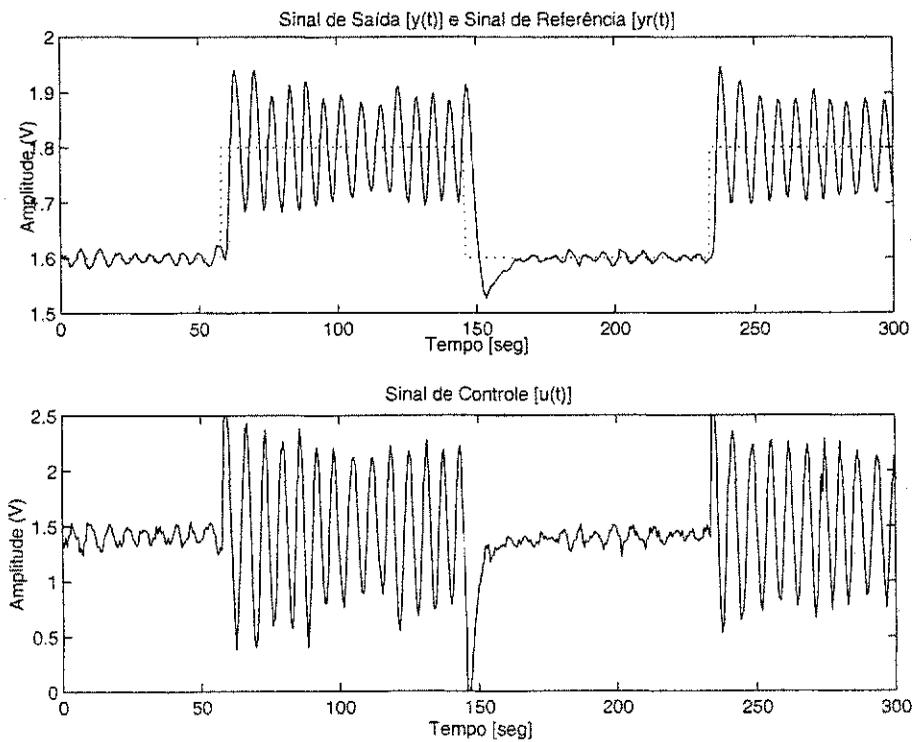


Figura 6.21: Resposta ao degrau para controlador inicial no sistema trocador de calor: (superior) sinal de saída (—) e sinal de referência (·), e (inferior) sinal de controle.

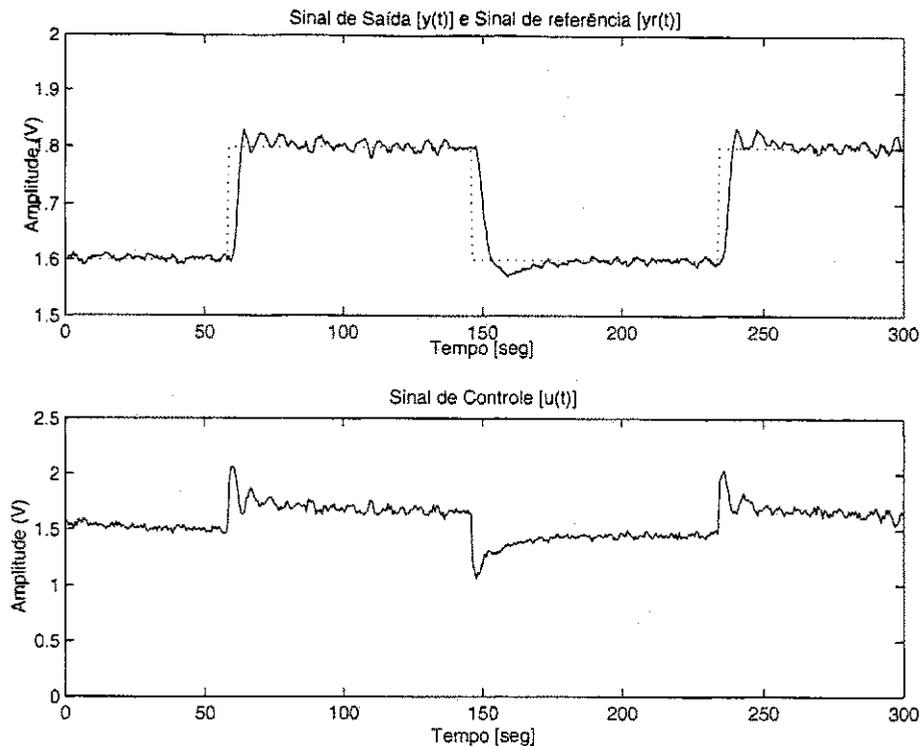


Figura 6.22: Resposta ao degrau para controlador obtido no sistema trocador de calor: (superior) sinal de saída (—) e sinal de referência (·), e (inferior) sinal de controle.

6.10 Sistema de Caracterização de VO_2

Controladores PID são freqüentemente encontrados em sistemas de medição e instrumentação, onde certas condições de operação devem ser mantidas. Por exemplo, para caracterizar adequadamente o comportamento termodinâmico de camadas finas de filme de dióxido de vanádio (VO_2) [Almeida et al. 2000], um controlador PI é usado para regular a temperatura do filme, usando um módulo termoelétrico, ou módulo Peltier, como atuador (ver [Lima et al. 2001]). Em tais situações, um controlador bem sintonizado pode reduzir o tempo de duração do experimento, e aumentar a confiabilidade dos dados.

A montagem experimental empregada na caracterização de camadas finas de filme de VO_2 é mostrada na fig. 6.23. Esta montagem foi usada em [Almeida et al. 2000] e [Lima et al. 2001] para determinar a curva característica de Resistência \times Temperatura do filme de VO_2 . Conforme indicado na figura, todos os instrumentos, inclusive o microcomputador, são compatíveis com a interface GPIB\IEEE-488. A plataforma é constituída de um dispositivo Peltier, um dissipador de calor e um termistor. O módulo termoelétrico, ou módulo Peltier, é um dispositivo semiconductor que opera como uma bomba de calor controlada por corrente elétrica. Se uma corrente elétrica é aplicada ao módulo Peltier, o calor é conduzido pelo módulo de uma de suas faces para outra. Deste modo, uma face será resfriada e a outra aquecida, simultaneamente. Mudando a polaridade da corrente elétrica através do módulo, o calor é conduzido no sentido oposto. Os módulos Peltier são usados para resfriar dispositivos eletrônicos. Normalmente, a temperatura do lado mais frio deve

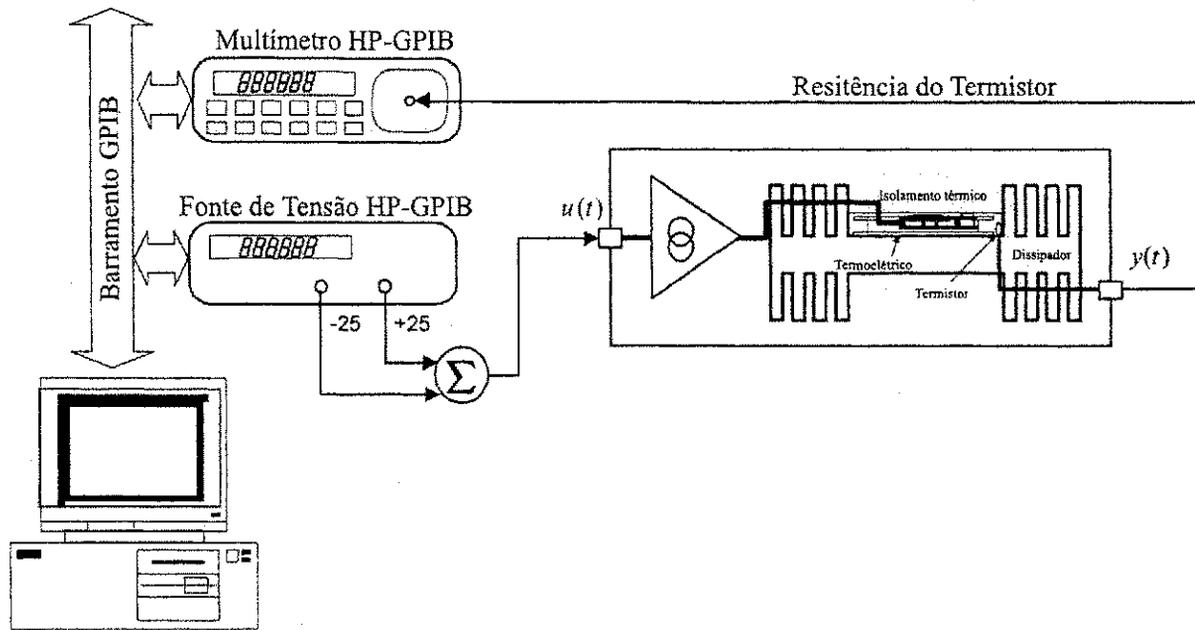


Figura 6.23: Montagem experimental do sistema de aquisição de dados.

ser mantida constante e estável em um valor especificado, mesmo que a temperatura do lado mais quente, bem como a temperatura ambiente, variem substancialmente. O comportamento dinâmico do módulo Peltier pode ser estudado usando um modelo constituído por duas equações diferenciais parciais. No entanto, este tipo de modelo não é adequado para o projeto de controladores PI, o que qualifica o método de sintonia apresentado neste capítulo, uma vez que o conhecimento do modelo do processo não é necessário.

O filme de VO_2 deve ser mantido em uma temperatura constante, para que a caracterização do material seja adequada. O ponto de operação é escolhido como sendo a temperatura ambiente (25°), e critérios de desempenho e estabilidade da malha fechada devem ser estabelecidos em torno desta condição de operação.

O controlador inicial é obtido a partir da tabela de Ziegler e Nichols para o método da resposta em frequência (ver em Åström e Hägglund 1995). O ganho crítico e a frequência crítica do processo estimados usando o método do relé são

$$\hat{K}_u = 1183.5 \text{ V/mC}^\circ \quad \text{e} \quad \hat{T}_u = 7.50 \text{ s},$$

e os seguintes parâmetros do controlador são então obtidos,

$$K_p^{(0)} = 473.3923 \quad \text{e} \quad T_i^{(0)} = 6.0000.$$

O método do relé na malha fechada e o método do relé para estimação da resposta em frequência com $r = 1$ aplicados ao sistema de controle levam às seguintes estimativas,

$$GM^{(0)} = 1.6506 \quad \text{e} \quad PM^{(0)} = 36.57^\circ.$$

o que são indicativos de um sistema fracamente estável (valores típicos se encontram na faixa de $2 - 3$ para a margem de ganho e $30^\circ - 60^\circ$ para a margem de fase [Åström e Hägglund 1995]).

O algoritmo iterativo é iniciado com $C^{(0)}(s)$ sendo o controlador obtido com os parâmetros calculados anteriormente. Deseja-se uma malha fechada que satisfaça às especificações $A_m = 3$ e $\phi_m = 60^\circ$. As tolerâncias para os critérios de parada são $\varepsilon_1 = 0.1$ e $\varepsilon_2 = 2^\circ$. Após 2 iterações completas, o seguinte controlador é obtido,

$$K_p^{(4)} = 210.3053 \quad \text{e} \quad T_i^{(4)} = 8.8747.$$

As margens de estabilidade estimadas a cada iteração são mostradas na Tabela 6.4, juntamente com os parâmetros do controlador.

Iter.	\hat{GM}	\hat{PM}	K_p	T_i
$\frac{1}{2}$	1.65	—	260.4542	6.0000
1	—	49.03°	306.1164	8.8747
$1 + \frac{1}{2}$	2.06	—	210.3053	8.8747
2	—	61.95°	—	—

Tabela 6.4: Margens de ganho e de fase e parâmetros do controlador a cada iteração para o experimento de caracterização de VO_2 .

As respostas a um degrau de referência do sistema em malha fechada usando o controlador inicial e o controlador final são mostradas na 6.24. A largura de faixa para o controlador inicial e o controlador final são estimadas como sendo

$$\hat{\omega}_g^{(0)} = 0.20 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_g^{(2)} = 0.16 \text{ rad/s}.$$

Pode-se notar que, ao aumentar as margens de estabilidade da malha fechada, houve uma redução na largura de faixa, o que resultou em um sistema mais lento, porém menos oscilatório para respostas a degraus de referência.

6.11 Conclusões

Um procedimento iterativo para sintonia de controladores PID baseado em especificações em margens de ganho e de fase foi apresentado neste capítulo. O procedimento é baseado na utilização de dois experimentos com relé, usados para estimar o ponto crítico e o ponto de cruzamento do ganho da Função de Malha de um sistema em malha fechada. Esta informação é então utilizada em um conjunto de equações não lineares para obter os parâmetros do controlador que atendem às especificações desejadas. A vantagem deste procedimento está no fato de não ser necessária nenhuma hipótese na estrutura do modelo do processo, nem o conhecimento da sua resposta em frequência.

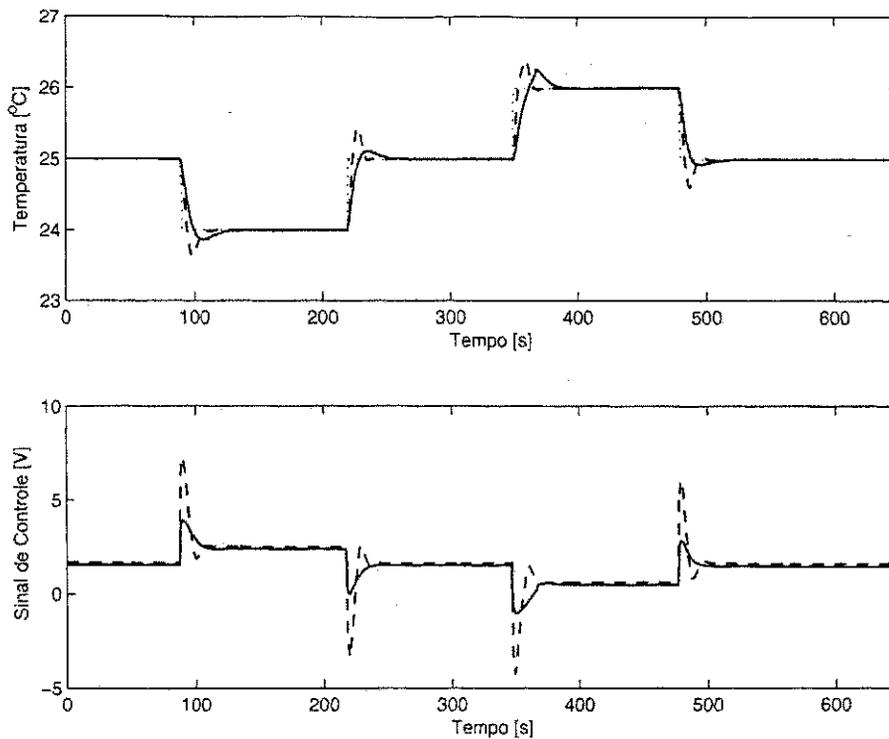


Figura 6.24: Caracterização de VO_2 : (gráfico superior) resposta ao degrau para o controlador inicial (- -) e final (-), e sinal de referência, y_r (·). (gráfico inferior) sinais de controle correspondentes para o controlador inicial (- -) e final (-).

Uma análise acerca da estabilidade da malha fechada durante as iterações é apresentada. O algoritmo sempre apresenta uma solução que estabiliza a malha fechada, se algumas hipóteses sobre a resposta em frequência do processo forem satisfeitas. Caso não seja possível avaliar se tais hipóteses são satisfeitas, são apresentados dois procedimentos para avaliação da estabilidade da nova malha fechada. A vantagem neste caso é poder saber se o novo controlador resulta em uma malha fechada estável, antes de aplicá-lo à malha fechada. Um exemplo de projeto ilustra a utilização dos procedimentos apresentados.

Um exemplo de simulação foi realizado para ilustrar o procedimento apresentado, e avaliar o comportamento das soluções ao longo das iterações. Resultados de simulação para um sistema de tratamento de águas residuárias são apresentados. Também são apresentados resultados experimentais usando um trocador de calor em escala de laboratório e um sistema de caracterização de camadas finas de filme de VO_2 . Em todos os casos, um controlador razoável é obtido com poucas iterações, o que qualifica o método para aplicações industriais.

Capítulo 7

Considerações Finais e Conclusões

7.1 Introdução

Neste capítulo, são discutidas as contribuições apresentadas nesta tese, bem como propostas de continuidade para serem desenvolvidas em trabalhos futuros. Na primeira seção, são destacadas as contribuições apresentadas neste documento, e na seção seguinte, os temas para pesquisa futura.

7.2 Contribuições do Trabalho

As contribuições apresentadas neste trabalho podem ser classificadas em diferentes seções, correspondentes às etapas desenvolvidas ao longo do doutoramento. Em seguida, serão discutidas as contribuições apresentadas por capítulo, ou grupo de capítulos.

Resultados práticos sobre o experimento de identificação

A estrutura geral apresentada no capítulo 2 foi desenvolvida inicialmente em Arruda 2000, e constitui uma ferramenta para estimação da resposta em frequência de um processo, da Função de Malha ou da Função de Sensibilidade em um sistema de controle. Existe, no entanto, a possibilidade de haver instabilidade na realimentação sugerida, o que foi contornado com a introdução de elementos saturadores na entrada de referência do sistema de controle, para o caso da Função de Malha e da Função de Sensibilidade. Para se obter a faixa de valores do parâmetro r do experimento, é necessário construir o lugar de raízes da função de transferência a ser identificada, o que constitui um paradoxo, pois a mesma não é conhecida, a priori. Neste sentido, foram exploradas no capítulo 2 alternativas para se identificar uma faixa de valores, para os quais o experimento em malha fechada seria estável. Mostrou-se que a instabilidade do experimento está associada à instabilidade da realimentação da função de transferência estudada. Deste modo, com experimentos baseados no método do relé original, é possível obter estimativas do ponto crítico de tais realimentações, e assim determinar uma faixa segura de operação para o parâmetro r . Além disso, foi demonstrado que, na estrutura de realimentação da fig. 2.4, a magnitude da função de transferência $F(s)$ (vide

figura) na frequência de oscilação depende apenas da fase da função de transferência estudada, $H(s)$, na mesma frequência. Tal fato pode conduzir pesquisa futura acerca da amplitude dos sinais na estrutura de realimentação. Estes últimos resultados constituem avanços em relação ao trabalho original apresentado em Arruda 2000, e foram publicados em Arruda e Barros 2003, Arruda e Barros 2001.

Análise do experimento de identificação

Os resultados sobre existência e estabilidade de ciclos limite simétricos unimodais apresentados no capítulo 3 para o caso de sistemas lineares sem atraso são bastante conhecidos na literatura. No entanto, a aplicação das expressões para avaliação da existência e estabilidade dos ciclos limite simétricos unimodais no experimento apresentado na fig. 2.4 não é trivial, devido à existência de um integrador no laço de realimentação. Embora a não singularidade da matriz do sistema linear não seja condição necessária na obtenção das expressões analíticas, a existência de autovalores nulos requer a elaboração de rotinas numéricas para o cálculo das expressões. A principal contribuição do capítulo 3 é a obtenção de expressões analíticas para a avaliação da existência e estabilidade dos ciclos limite simétricos unimodais no experimento apresentado na fig. 2.4, levando em conta a existência do integrador no laço de realimentação. Explorando a estrutura de realimentação, é possível remover o autovalor nulo devido ao integrador, de modo a garantir a não singularidade da matriz do sistema. Além disso, $F(s)$ não possui integradores, o que garante a não singularidade da matriz da representação em espaço de estados de $F(s)$. As expressões obtidas foram então aplicadas em exemplos de simulação. Em um deles, onde $|H(j\omega)| = r$ é satisfeito para diferentes frequências, constatou-se a existência de múltiplos ciclos limites, sendo alguns deles instáveis. Mais ainda, foram observados atratores caóticos surgidos a partir de bifurcações no parâmetro r . Estes resultados foram publicados recentemente em Arruda, Barros e Bazanella 2002.

Identificação de modelos de pouca complexidade

A modelagem de processos apresentada no capítulo 4 é um resultado novo, e reflete uma tendência recente na literatura em se buscar informação sem aproximações sobre as condições do ciclo limite, na obtenção de um modelo do processo. Nos métodos aproximados, baseados em resultados por funções descritivas, o modelo obtido não é capaz de reproduzir o ciclo limite desenvolvido com o relé, mesmo quando o processo pertence à classe do modelo e não há ruído de medição. Além disso, em relação a outros métodos, ditos exatos, encontrados na literatura, a vantagem do procedimento apresentado é a simplicidade – apenas medições do período de oscilação são necessárias para obter a constante de tempo e o atraso de transporte – e a utilização de experimentos com relé que levam a oscilações nas frequências nas quais a fase do processo é de aproximadamente -90° e -180° . Assim, o modelo obtido representa razoavelmente bem o processo em uma faixa de frequências importante para o projeto de controladores. Estes resultados foram publicados recentemente em Arruda e Barros 2003. No capítulo seguinte, os modelos obtidos para os exemplos de simulação

são então utilizados na sintonia de controladores PI e PID, usando técnicas bem conhecidas na literatura. O objetivo é avaliar a qualidade dos modelos obtidos, quando usados para projetar o controlador, levando-se em conta a dinâmica não modelada existente, ou o erro de estimação devido ao ruído de medição. Dentre os métodos utilizados, pode-se destacar o método baseado no ótimo-simétrico, que apesar de apresentar uma resposta ao degrau com sobresinal um pouco elevado, manteve a regularidade dos resultados em todos os modelos. Assim, o método é bastante confiável, e o sobresinal apresentado pode ser reduzido usando-se filtros no sinal de referência, ou usando controladores com dois graus de liberdade.

Sintonia iterativa de controladores

A utilização de experimentos com relé para sintonia de controladores PI e PID com base em especificações em margens de estabilidade foi apresentada no capítulo 6. A abordagem de utilizar experimentos sequenciais de identificação usando o relé é inédita, e permite a sintonia do controlador sem a necessidade de um modelo para o processo. A solução consiste em resolver o conjunto de equações de projeto seqüencialmente, usando a informação obtida a partir de experimentos com relé. Estes resultados foram apresentados em Arruda e Barros 2001, para o caso de controladores PID, e as características do algoritmo foram discutidas com exemplos de simulação.

Os resultados da aplicação da metodologia para exemplos de simulação e experimentos em escala reduzida são apresentados no final do capítulo 6. Em Arruda e Barros 2001, a metodologia é aplicada na sintonia de controladores PI para controle de Nitrato em um processo de lodo ativado para tratamento de efluentes, e os resultados são avaliados por meio de simulações. Para a sintonia de controladores PI no controle de temperatura de um trocador de calor em escala de laboratório, os resultados foram publicados em Arruda e Barros 2001, e, para o caso de controladores PID, em Arruda e Barros 2001. Recentemente, em Arruda e Barros 2003, o procedimento foi aplicado na sintonia de controladores PI em um experimento de caracterização de camadas finas de filme de Óxido de Vanádio (VO_2), para controle de temperatura.

Ainda no capítulo 6, foi incluída uma análise de estabilidade para os algoritmos. Mostrou-se que se o processo satisfaz certas hipóteses, os algoritmos sempre produzem controladores que estabilizam a malha fechada, a cada iteração. No entanto, as hipóteses necessárias são, em geral, muito restritivas, e mesmo processos com modelos simples, como primeira ordem com atraso, não as satisfazem. Neste sentido, foram propostos dois experimentos para avaliação da estabilidade antes de aplicar o novo controlador. Um experimento é o da estimação da Função de Sensibilidade, apresentado no capítulo 2, com um valor específico para o parâmetro τ , e o outro, baseado neste experimento, é obtido substituindo o parâmetro τ por uma função de transferência específica, que depende da atualização do controlador. Este é um resultado importante, porque não se limita ao método de sintonia apresentado aqui, e pode ser aplicado sempre que for necessária uma modificação do controlador, para saber se os novos parâmetros resultam em uma malha fechada estável.

7.3 Conclusões e Propostas de Trabalhos Futuros

Análise de sistemas de realimentação com relé

Os resultados apresentados no capítulo 3 valem apenas para o caso de ciclos limite simétricos unimodais. Conforme dito anteriormente, sistemas com realimentação por relé podem apresentar diversos comportamentos diferentes. Em particular, no caso do experimento de identificação do capítulo 2, estes comportamentos surgem na forma de bifurcações com o parâmetro r . Em simulações, foi observada a existência de chaveamentos rápidos na identificação da Função de Sensibilidade, quando o valor da magnitude se encontrava em torno da norma infinita ($\|\cdot\|_\infty$) da mesma. Para o caso da Função de Malha, quando o parâmetro se torna inferior ao ganho crítico, o ciclo limite se torna instável. Além disso, em certas situações a solução do sistema pode apresentar comportamento caótico.

Assim, como proposta inicial, os resultados existentes para análise de modos deslizantes e chaveamentos rápidos podem ser obtidos para o experimento da fig. 2.4. Tal análise deve permitir a verificação do comportamento do experimento, quando utilizado em um procedimento de identificação. Também podem ser investigadas metodologias para análise da existência de atratores caóticos em sistemas de realimentação com relé. Alguma dificuldade poderá ser encontrada neste caso devido à escassez de resultados sobre atratores caóticos para tais classes de sistema. Exemplos de simulação, para visualização das bifurcações do parâmetro r em diferentes situações, podem permitir uma avaliação mais completa do experimento.

Modelagem de processos

A modelagem de processos apresentada no capítulo 4 foi baseada nos experimentos com relé para estimação do ponto crítico e usando um integrador. Por se tratar de um método que não envolve aproximações, pode não existir um modelo de primeira ordem com atraso de transporte que represente o processo, dependendo da significância da dinâmica não modelada. Um estudo inicial deve ser feito no sentido de determinar limites para os períodos de oscilação observados durante o experimento. Caso um destes limites seja violado, o modelo de primeira ordem com atraso pode não ser representativo para o processo. Uma outra investigação que deve ser conduzida é sobre a utilização do experimento com relé introduzido no capítulo 2, usando as expressões deduzidas no capítulo 3, para obter modelos de ordem qualquer, sem atraso de transporte.

Sintonia de controladores PID

A sintonia de controladores PID com base em especificações em margens de ganho e de fase, usando experimentos com relé, foi resolvida com sucesso e apresentada no capítulo 6. É possível resolver o conjunto de equações de projeto iterativamente, usando experimentos com o relé para identificação das margens de estabilidade a cada iteração. Duas vantagens do procedimento, conforme ressaltado, são a garantia de estabilidade e a não necessidade de um modelo para o processo.

Como propostas para pesquisa futura, para o caso de controladores PID, introduziu-se a equação de projeto $T_d = \alpha T_i$ para que a solução seja única. Outras possibilidades podem ser exploradas para esta restrição, por exemplo, para aumento da largura de faixa do sistema em malha fechada. Neste sentido, essa equação pode ser substituída por alguma expressão que esteja relacionada diretamente à largura de faixa, permitindo maior controle dos resultados do procedimento. Também pode ser verificada a possibilidade de incluir o efeito da constante de tempo da parte derivativa, necessária para garantir a causalidade do termo derivativo, nas equações de projeto do controlador.

Em todas as simulações executadas, observou-se que o passo 7 de ambos os algoritmos retorna valores inválidos, indicando um excesso ou ausência de fase no processo, quando não existe solução para o problema de projeto. Existe, portanto, a possibilidade de detectar a não existência de solução observando o comportamento das margens de estabilidade, bem como das larguras de faixa e frequência de cruzamento do ganho a cada iteração. Se tal hipótese for plausível, será possível projetar o experimento para automaticamente procurar a melhor solução de margens de estabilidade iterativamente.

Apêndice A

Demonstrações de Teoremas

A.1 Teorema 3.3

Considere o sistema linear dado por (3.3) conectado em realimentação com o relé dado por (3.4), conforme mostrado na fig. 3.2. Existe um ciclo limite simétrico e unimodal com período $2h^*$ no sistema realimentado se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

$$(i) \quad g(h^*) \triangleq C(e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1} B = 0, \quad (A.1)$$

$$(ii) \quad y(t) = C(e^{At}x^* - (e^{Ah^*} - I) A^{-1} B) > 0, \quad (A.2)$$

$\forall t \in (0, h^*)$, onde

$$x^* = (e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1} B, \quad (A.3)$$

é a condição inicial $x(0) = x^* \in S$ que leva à solução periódica.

Demonstração. É dividida em duas partes:

Necessidade: A solução do sistema linear para $x \in R^-$ é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{As}u(t-s)dsB \\ &= e^{At}x(0) - \int_0^t e^{As}dsB \\ &= e^{At}x(0) - (e^{At} - I) A^{-1}B. \end{aligned}$$

Note que $(e^{At} - I) A^{-1}$ é apenas uma notação simplificada para $\int_0^t e^{As}ds$, que existe, mesmo que A não possua inversa. Assuma que existe um ciclo limite simétrico unimodal, de período $2h^*$. Suponha que no instante $t = 0$ a trajetória está atravessando a superfície de chaveamento no ponto x^* , no sentido de $y < 0$ para $y > 0$, de modo que o relé chaveia de 1 para -1 . Deste modo, por simetria, após h^* segundos, a trajetória atinge novamente a superfície de chaveamento em $-x^*$, e como $x(t) \in R^-$, $0 < t < h^*$, tem-se que

$$\begin{aligned} -x^* &= e^{At}x^* - (e^{At} - I) A^{-1}B \Rightarrow \\ x^* &= (e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} - I) A^{-1}B, \end{aligned}$$

o que garante a necessidade da condição (A.3). Como $x^* \in \mathcal{S}$, $Cx^* = 0$, o que garante a necessidade da condição (A.1). Finalmente, para que o ciclo limite seja unimodal, é necessário que não haja outros chaveamentos em $0 < t < h^*$, ou seja, $y(t) = Cx(t) > 0 \forall t \in (0; h^*)$, o que leva à condição (A.2).

Suficiência: Assuma que $g(h^*) = 0$ e $y(t) > 0$ para $t \in (0; h^*)$. A primeira equação implica $x^* \in \mathcal{S}$, e a segunda equação implica $u(t) = -1$, $t \in (0; h^*)$. Logo, a trajetória a partir de x^* não atingirá \mathcal{S} novamente antes de h^* . É possível mostrar que $x(t)$ atinge \mathcal{S} após h^* segundos em $-x^*$, o que faz $u(t)$ chavear para 1. Com um argumento similar, mostra-se que $x(t)$ retorna a \mathcal{S} após h^* em x^* , de modo que existe portanto uma órbita periódica passando por x^* . ■

A.2 Teorema 3.4

O ciclo limite no Teorema 3.3 é assintoticamente estável se a matriz jacobiana

$$W = \left[I - \frac{wC}{Cw} \right] e^{Ah^*},$$

com $w = e^{Ah^*}(Ax^* - B)$ possui todos os seus autovalores dentro do disco unitário aberto. Será instável se W possuir pelo menos um autovalor fora do disco unitário.

Demonstração. Com base na observação (3.2), é necessário apenas obter o Jacobiano do mapa de Poincaré. Considere uma perturbação pequena no estado inicial dado pela Eq. (3.8), $x(0) = x^* + \delta x$. Pela simetria do ciclo limite, a trajetória atinge \mathcal{S} novamente após aproximadamente meio período, em $x(h^* + \delta t)$. Portanto,

$$\begin{aligned} x(h^* + \delta t) &= e^{A(h^* + \delta t)}x(0) - A^{-1}(e^{A(h^* + \delta t)} - I)B \\ &= e^{Ah^*}(I + A\delta t)(x^* + \delta x) - [e^{Ah^*}(I + A\delta t) - I]A^{-1}B + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ &= e^{Ah^*}(I + A\delta t)x^* + e^{Ah^*}(I + A\delta t)\delta x - (e^{Ah^*} + Ae^{Ah^*}\delta t - I)A^{-1}B \\ &\quad + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ &= e^{Ah^*}x^* + (e^{Ah^*} - I)A^{-1}B + Ae^{Ah^*}x^*\delta t + (e^{Ah^*} + Ae^{Ah^*}\delta t)\delta x \\ &\quad - e^{Ah^*}B\delta t + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ &= -x^* + e^{Ah^*}\delta x + (Ae^{Ah^*}x^* - e^{Ah^*}B)\delta t + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) \\ &= -x^* + e^{Ah^*}\delta x + w\delta t + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) \end{aligned}$$

em que $\mathcal{O}(\xi^2)$ representa o agrupamento dos termos da série de ordem maior ou igual a 2. Como $x(h^* + \delta t) \in \mathcal{S}$, tem-se que

$$\begin{aligned} Cx(h^* + \delta t) &= -Cx^* + Ce^{Ah^*}\delta x + Cw\delta t + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) \\ &= Ce^{Ah^*}\delta x + Cw\delta t + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) = 0 \end{aligned}$$

que implica

$$\delta t = -\frac{C}{Cw}e^{Ah^*}\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t).$$

Como a perturbação se encontra no lado oposto de \mathcal{S} em relação à origem, $x(h^* + \delta t) = -x^* + \delta_1 x$, logo

$$\begin{aligned} -x^* + \delta_1 x &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + w\delta t + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) \Rightarrow \\ \delta_1 x &= e^{Ah^*} \delta x - \frac{wC}{Cw} e^{Ah^*} \delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) \\ &= \left[I - \frac{wC}{Cw} \right] e^{Ah^*} \delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) + \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta x\delta t) \end{aligned}$$

Finalmente, a linearização da expressão acima leva ao Jacobiano do mapa de Poincaré,

$$W = \left[I - \frac{wC}{Cw} \right] e^{Ah^*}.$$

O restante da demonstração segue da observação 3.2. ■

A.3 Teorema 3.6

Considere o sistema linear dado por (3.3) com atraso de transporte θ , conectado em realimentação com o relé dado por (3.4), conforme mostrado na fig. 3.2. Existe um ciclo limite simétrico e unimodal com período $2h^*$ no sistema realimentado se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

$$(i) \quad g_\theta(h^*) = C(e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I) A^{-1} B = 0, \quad (A.4)$$

$$(ii) \quad y(t) = Cx(t) > 0, \quad \forall t \in (0, h^*), \quad (A.5)$$

com

$$x_\theta^* = (-1)^n (e^{Ah^*} + I)^{-1} (e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I) A^{-1} B, \quad (A.6)$$

sendo o ponto onde a trajetória intercepta a superfície de chaveamento $S = \{x \in \mathcal{R}^n : Cx = 0\}$, e $\Delta\theta = \theta - nh^*$, com n o maior inteiro tal que $nh^* < \theta$ (n é o número de chaveamentos que ocorrem no sinal $u(t)$ entre $-\theta \leq t < 0$). Para a solução periódica, é necessário uma solução inicial, $x(\tau)$, $-\theta \leq \tau < 0$ com $x(0) = x^*$.

Demonstração. É dividida em duas partes:

Necessidade: Considere o caso em que $h^* > \theta$, de modo que $n = 0$ e $\Delta\theta = \theta$. O sinal na entrada do sistema linear, $u'(t)$, é uma versão atrasada do sinal na saída do relé, $u(t)$, tal que

$$u'(t) = u(t - \theta).$$

Assuma que existe um ciclo limite no sistema da Fig. 3.3. Então, com base no exemplo mostrado

na Fig. 3.4,

$$\begin{aligned}
 x(h^*) &= e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^*-s)} B u(s-\theta) ds \\
 &= e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{h^*} e^{A(h^*-s)} B u'(s) ds \\
 &= e^{Ah^*} x(0) + \int_0^\theta e^{A(h^*-s)} B ds - \int_\theta^{h^*} e^{A(h^*-s)} B ds \\
 &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} e^{A(h^*-s)|_0^\theta} B + A^{-1} e^{A(h^*-s)|_\theta^{h^*}} B \\
 &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left(e^{A(h^*-s)|_0^\theta} - e^{A(h^*-s)|_\theta^{h^*}} \right) B \\
 &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left(e^{A(h^*-\theta)} - e^{Ah^*} - e^{A(h^*-h^*)} + e^{A(h^*-\theta)} \right) B \\
 &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left(2e^{A(h^*-\theta)} - e^{Ah^*} - I \right) B \\
 &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left[e^{Ah^*} (2e^{-A\theta} - I) - I \right] B
 \end{aligned}$$

Assuma $x(0) = x^* \in \mathcal{S}$ o ponto em que a órbita intercepta \mathcal{S} . Por simetria, em $t = h^*$ o estado do sistema é

$$x(h^*) = -x^* .$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 -x^* &= e^{Ah^*} x^* - A^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\theta} - I) - I \right) B \Rightarrow \\
 x^* &= \left(e^{Ah^*} + I \right)^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\theta} - I) - I \right) A^{-1} B \\
 &= \left(e^{Ah^*} + I \right)^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\theta} - I) - I \right) A^{-1} B .
 \end{aligned}$$

Defina

$$g_\theta(h) \triangleq C \left(e^{Ah} + I \right)^{-1} \left(e^{Ah} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) A^{-1} B ,$$

e, uma vez que $\theta = \Delta\theta$, então em h^*

$$g_\theta(h^*) = Cx^* = 0$$

pois $x^* \in \mathcal{S}$. Finalmente, para garantir que não existe nenhum outro chaveamento em $0 < t < h^*$, a entrada do relé deve satisfazer $y(t) = Cx(t) > 0$, para $0 < t < h^*$. Para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq \theta$, a evolução do estado do sistema linear é dada por

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At} x^* + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s-\theta) ds \\
 &= e^{At} x^* + \int_0^t e^{A(t-s)} B u'(s) ds \\
 &= e^{At} x^* + \int_0^t e^{A(t-s)} B ds \\
 &= e^{At} x^* - A^{-1} \left(I - e^{At} \right) B
 \end{aligned}$$

e para $\theta \leq t \leq h^*$,

$$x(t) = e^{At} x^* - A^{-1} \left(e^{At} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) B ,$$

Então, para o ciclo limite possuir período $2h^*$, calculado como raiz de $g_\theta(h) = 0$, é necessário que

$$y(t) = Cx(t) > 0 \quad \forall t \in (0, h^*),$$

com $x(t)$ calculado conforme ilustrado.

Considere agora o caso $h^* < \theta$. Neste caso, o sinal na entrada do sistema linear dependerá no número de chaveamentos anteriores, n , com $\Delta\theta = \theta - nh^*$ (vide Fig. 3.5). Para n par, tem-se que

$$\begin{aligned} x(h^*) &= e^{Ah^*} x(0) + \int_0^{\Delta\theta} e^{A(h^*-s)} B ds - \int_{\Delta\theta}^{h^*} e^{A(t-s)} B ds \\ &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} e^{A(h^*-s)_0^{\Delta\theta}} B + A^{-1} e^{A(h^*-s)_{\Delta\theta}^{h^*}} B \\ &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left(e^{A(h^*-s)_0^{\Delta\theta}} - e^{A(h^*-s)_{\Delta\theta}^{h^*}} \right) B \\ &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left(e^{A(h^*-\theta)} - e^{Ah^*} - e^{A(h^*-h^*)} + e^{A(h^*-\theta)} \right) B \\ &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left(2e^{A(h^*-\theta)} - e^{Ah^*} - I \right) B \\ &= e^{Ah^*} x(0) - A^{-1} \left[e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right] B. \end{aligned}$$

Se n é ímpar, então

$$\begin{aligned} x(h^*) &= e^{Ah^*} x(0) - \int_0^{\Delta\theta} e^{A(h^*-s)} B ds + \int_{\Delta\theta}^{h^*} e^{A(t-s)} B ds \\ &= e^{Ah^*} x(0) + A^{-1} \left[e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right] B. \end{aligned}$$

Novamente, por simetria, em $t = h^*$ o estado do sistema é

$$x(h^*) = -x^*.$$

Portanto, para n par,

$$\begin{aligned} -x^* &= e^{Ah^*} x^* - A^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) B \Rightarrow \\ x^* &= \left(e^{Ah^*} + I \right)^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) A^{-1} B, \end{aligned}$$

e similarmente, para n ímpar,

$$x^* = - \left(e^{Ah^*} + I \right)^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) A^{-1} B,$$

Defina

$$g_\theta(h) \triangleq (-1)^n C \left(e^{Ah} + I \right)^{-1} \left(e^{Ah^*} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) A^{-1} B.$$

Então, em h^*

$$g_\theta(h^*) = Cx^* = 0$$

pois $x^* \in \mathcal{S}$. Novamente, para garantir que não existe nenhum outro chaveamento em $0 < t < h^*$, a entrada do relé deve satisfazer $y(t) = Cx(t) > 0$, para $0 < t < h^*$. Para $t > \Delta\theta$, a evolução do estado do sistema linear é dada por

$$x(t) = e^{At} x(0) - (-1)^n A^{-1} \left(e^{At} (2e^{-A\Delta\theta} - I) - I \right) B,$$

e para $t < \Delta\theta$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + (-1)^n \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s - \Delta\theta) ds \\ &= e^{At}x(0) + (-1)^n \int_0^t e^{A(t-s)}Bu'(s) ds \\ &= e^{At}x(0) + (-1)^n \int_0^t e^{A(t-s)}Bds \\ &= e^{At}x(0) - (-1)^n A^{-1} (I - e^{At}) B \end{aligned}$$

Então, para o ciclo limite possuir período $2h^*$, calculado como raiz de $g_\theta(h) = 0$, é necessário que

$$y(t) = Cx(t) > 0 \forall t \in (0, h^*) ,$$

com $x(t)$ calculado conforme ilustrado.

Necessidade: A demonstração da necessidade das condições (A.4–A.6) segue a mesma linha de raciocínio apresentada na demonstração da proposição 3.3.

Note que a escolha do atraso de transporte na entrada do sistema linear não afeta os resultados anteriores. Da maneira apresentada, no instante de chaveamento do relé, $Cx(t) = 0$. Ao assumir o atraso de transporte na saída do sistema linear, então no instante de chaveamento, $Cx(t) \neq 0$. No entanto, $Cx(t - \theta) = 0$, de modo que a análise permanece essencialmente a mesma. ■

A.4 Teorema 3.7

O ciclo limite no Teorema 3.6, com $h^* > \theta$, é assintoticamente estável se a matriz jacobiana

$$W_\theta = \left[I - \frac{w_\theta C}{Cw_\theta} \right] e^{Ah^*} , \quad (\text{A.7})$$

com

$$w_\theta = e^{Ah^*} (-Ax^* - B) + 2e^{A(h^* - \theta)} B \quad (\text{A.8})$$

possui todos os seus autovalores dentro do disco unitário aberto. Será instável se W_θ possuir pelo menos um autovalor fora do disco unitário.

Demonstração. Seguindo o mesmo raciocínio empregado na demonstração da proposição 3.4, considere $x(0) = x^* + \delta x$, com δx pequeno suficiente, tal que quando $x(h^* + \delta t)$ atingir \mathcal{S} novamente, $\delta t \ll \theta$. Neste caso, a entrada do sistema linear só será afetada na segunda metade do período de oscilação, devido ao atraso (vide fig. 3.4). Para analisar o efeito da perturbação inicial no sinal de saída é necessário portanto considerar o intervalo em que o sinal na entrada do sistema linear é afetado por tal perturbação, ou seja, a segunda metade do período de oscilação. Será mostrado em seguida que uma perturbação $\delta x_{h^* + \delta t}$ em $h^* + \delta t$ define unicamente uma perturbação equivalente δx aplicada na origem. Considere a trajetória a partir da interseção com \mathcal{S} sendo regida por R^- . Neste caso, como o sistema é essencialmente linear até a trajetória interceptar \mathcal{S} novamente, pode-se

escrever a equação para a trajetória somente devida à perturbação, i.e.,

$$\begin{aligned}
 \delta x_{h^*+\delta t} &= e^{A(h^*+\delta t)} \delta x + \int_0^{h^*+\delta t} e^{A(h^*+\delta t-s)} B u(s-\theta) ds \\
 &= e^{A(h^*+\delta t)} \delta x + \int_0^{h^*+\delta t} e^{A(h^*+\delta t-s)} B u'(s) ds \\
 &= e^{A(h^*+\delta t)} \delta x + \int_0^\theta e^{A(h^*+\delta t-s)} B ds - \int_\theta^{h^*+\delta t} e^{A(h^*+\delta t-s)} B ds \\
 &= e^{A(h^*+\delta t)} \delta x - [e^{A(h^*+\delta t)} (2e^{-A\theta} - I) - I] A^{-1} B
 \end{aligned}$$

Portanto, se o estado é perturbado em $t = 0$, então uma perturbação equivalente em $t = h^* + \delta t$ é unicamente definida pela equação anterior, ou seja, dados quaisquer $(\delta t; \delta x_{h^*+\delta t})$, pode-se sempre obter um δx equivalente aplicado em $t = 0$. A análise pode então ser feita considerando a nova origem em $h^* + \delta t$, com $x(0) = x^* + \delta x$. Com a nova base de tempo, segue então que

$$\begin{aligned}
 x(h^* + \delta t) &= e^{A(h^*+\delta t)} x(0) + \int_0^{h^*+\delta t} e^{A(h^*+\delta t-s)} B u(s-\theta) ds \\
 &= e^{A(h^*+\delta t)} x(0) + \int_0^{h^*+\delta t} e^{A(h^*+\delta t-s)} B u'(s) ds \\
 &= e^{A(h^*+\delta t)} (x^* + \delta x) + \int_0^\theta e^{A(h^*+\delta t-s)} B ds - \int_\theta^{h^*+\delta t} e^{A(h^*+\delta t-s)} B ds \\
 &= e^{A(h^*+\delta t)} (x^* + \delta x) - A^{-1} [2e^{A(h^*+\delta t-\theta)} - e^{A(h^*+\delta t)} - I] B \\
 &= e^{Ah^*} (I + A\delta t) (x^* + \delta x) - A^{-1} [2e^{A(h^*-\theta)} (I + A\delta t) - e^{Ah^*} (I + A\delta t) - I] B + O(\delta^2) \\
 &= e^{Ah^*} (x^* + \delta x + Ax^*\delta t) - A^{-1} [2e^{A(h^*-\theta)} + 2e^{A(h^*-\theta)} A\delta t - e^{Ah^*} - e^{Ah^*} A\delta t - I] B + O(\delta^2) \\
 &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + [e^{Ah^*} (Ax^* + B) - 2e^{A(h^*-\theta)} B] \delta t + O(\delta^2) \\
 &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + w_\theta \delta t + O(\delta^2)
 \end{aligned}$$

Desde que $x(h^* + \delta t) \in \mathcal{S}$ e pela simetria do ciclo limite, $x(h^*) = -x^*$,

$$\begin{aligned}
 Cx(h^* + \delta t) &= -Cx^* + Ce^{Ah^*} \delta x + Cw_\theta \delta t + O(\delta^2) \\
 &= Ce^{Ah^*} \delta x + Cw_\theta \delta t + O(\delta^2) = 0 \Rightarrow \\
 \delta t &= -\frac{Ce^{Ah^*}}{Cw_\theta} \delta x + O(\delta^2)
 \end{aligned}$$

Como $x(h^* + \delta t) = -x^* + \delta_1 x$, tem-se então

$$\begin{aligned}
 -x^* + \delta_1 x &= -x^* + e^{Ah^*} \delta x + w_\theta \delta t + O(\delta^2) \Rightarrow \\
 \delta_1 x &= e^{Ah^*} \delta x - \frac{w_\theta Ce^{Ah^*}}{Cw_\theta} \delta x + O(\delta^2) \\
 &= \left[I - \frac{w_\theta C}{Cw_\theta} \right] e^{Ah^*} \delta x + O(\delta^2)
 \end{aligned}$$

Finalmente, a linearização da expressão acima leva ao Jacobiano,

$$W_\theta = \left[I - \frac{w_\theta C}{Cw_\theta} \right] e^{Ah^*}$$

O restante da demonstração segue da observação (3.2). ■

Bibliografia

ALMEIDA, L. A. L. de; DEEP, G. S.; LIMA, A. M. N.; NEFF, H. Thermodynamics of thin VO₂ films within the hysteretic transition: Evidence for chaos near the percolation threshold. *Applied Physics Letter*, v. 77, n. 26, p. 4365–4367, 2000.

ARRUDA, G. H. M. de. *Identificação e Sintonia Usando O Relé Na Malha Fechada*. Dissertação (Mestrado) — Univ. Federal da Paraíba, Dept. de Eng. Elétrica, 2000.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. PI controller tuning based on closed loop relay feedback. In: CONTROL 2000 IEE CONFERENCE. Cambridge, UK, 2000.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Relay based closed loop transfer function estimation. In: 2000 AMERICAN CONTROL CONFERENCE. Chicago, USA, 2000. v. 3, p. 1812–1816.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Gain and phase margins tuning for a PI nitrate controller in an activated sludge process. In: *ICA2001, 1st IWA Conference on Instrumentation, Control and Automation*. Malmö, Sweden: [s.n.], 2001.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. On a relay experiment for frequency response estimation. In: *ECC 2001, European Control Conference*. Porto, Portugal: [s.n.], 2001. p. 669–674.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Projeto iterativo de controladores PID com especificações em margens de ganho e de fase. In: *II Seminário Nacional de Controle e Automação*. Centro de Convenções da Bahia: [s.n.], 2001.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Projeto ótimo simétrico de controladores PID usando experimentos com o relé em malha fechada. In: *ISA SHOW 2001*. São Paulo - SP: [s.n.], 2001.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Relay based gain and phase margins iterative PID controller design. In: *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*. Cernobbio-Como, Italy: [s.n.], 2001. p. 213–218.

ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Relay based gain and phase margins PI controller design. In: *IMTC2001, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Budapest, Hungary: [s.n.], 2001. v. 2, p. 1189–1194.

- ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Estimação da função de sensibilidade baseada em experimento com relé em malha fechada. *Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, p. to appear, 2003.
- ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Identification of simple continuous-time models from relay feedback. In: *SYSID 2003, 13th IFAC Symposium on System Identification*. Rotterdam, Holanda: [s.n.], 2003. p. to appear.
- ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Relay based gain and phase margins PI controller design. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, p. to appear, October 2003.
- ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R. Transfer function relay based frequency points estimation. *Automatica*, v. 39, n. 2, p. 309–315, 2003.
- ARRUDA, G. H. M. de; BARROS, P. R.; BAZANELLA, A. S. Dynamics of a relay based frequency response estimator. In: *15TH IFAC WORLD CONGRESS ON AUTOMATIC CONTROL*. Barcelona, Spain, 2002.
- ASPEGREN, H. et al. Model and sensor based optimization of nitrogen removal at the klagshamm plant. *Water Science Technology*, v. 26, n. 5-6, p. 1315–1323, 1992.
- ÅSTROM, K. J. Oscillations in systems with relay feedback. In: *IMA Vol. Math. Appl.: Adapt. Control, Filtering, Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 1–25.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, v. 20, n. 5, p. 645–651, 1984.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2nd. ed. Research Triangle Park, North Carolina: Instrument Society of America, 1995.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. The future of PID control. *Control Engineering Practice*, v. 9, p. 1163–1175, 2001.
- ATHERTON, D. P.; MAJHI, S. Plant parameter identification under relay control. In: *37th IEEE Conf. On Decision and Control*. Tampa, Flórida USA: [s.n.], 1998. p. 1272–1277.
- BARROS, P. R.; WITTENMARK, B. Frequency domain sensitivity shaping using overparametrized controllers. In: *34rd IEEE CDC - Conference on Decision and Control*. San Diego - CA, USA: [s.n.], 1997. p. 2716–2721.
- BERNARDO, M. D.; JOHANSSON, K. H.; VASCA, F. Sliding orbits and their bifurcations in relay feedback systems. In: *38th Conf. On Decision and Control*. Phoenix, Arizona USA: [s.n.], 1999. p. 708–713.

- BERNHARDSSON, B.; JOHANSSON, K. H.; MALMBORG, J. Some properties of switched systems. In: *IFAC World Congress*. Beijing, China: [s.n.], 1999.
- BESANÇON-VODA, A.; BLAHA, P. Describing function approximation of a two-relay system configuration with application to coulomb friction identification. *Control Engineering Practice*, v. 10, p. 655–668, 2002.
- BESANÇON-VODA, A.; DRAZDIL, P. Analysis of oscillations in systems with relay and friction. In: *COC*. St. Petersburg, Russia: [s.n.], 1997. p. 271–274.
- BI, Q. et al. Advanced controller auto-tuning and its application in HVAC systems. *Control Engineering Practice*, v. 8, p. 633–644, 2000.
- BLIMAN, P.-A.; KRASNOSEL'SKII, A. M. Periodic solutions of linear systems coupled with relay. *Nonlinear Analysis, Theory, Methodology and Applications*, v. 30, n. 2, p. 687–696, 1997.
- CHANG, R.-C.; SHEN, S.-H.; YU, C.-C. Derivation of transfer function from relay feedback systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 31, n. 3, p. 855–860, 1992.
- CROWE, J.; JOHNSON, M. A. Towards autonomous PI control satisfying classical robustness specifications. *IEE Proceedings*, v. 149, n. 1, p. 26–31, 2002.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. *Feedback Control Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Macmillan Publishing Company, Inc., 1995.
- DUMONT, G. A.; MARTIN-SANCHEZ, J. M.; ZERVOS, C. C. Comparison of an auto-tuned PID regulator and an adaptive predictive control system on an industrial bleach plant. *Automatica*, v. 25, n. 1, p. 33–40, 1989.
- FRIMAN, M.; WALLER, K. V. Closed-loop identification by use of single-valued nonlinearities. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 34, p. 3052–3058, 1995.
- GAWTHROP, P. J.; NOMIKOS, P. E. Automatic tuning of commercial PID controllers for single-loop and multiloop applications. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 10, n. 1, p. 34–42, 1990.
- GONÇALVES, J. M.; MEGRETSKI, A.; DAHLEH, M. A. Global stability of relay feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 550–562, 2001.
- HÄGGLUND, T.; TENGVALL, A. An automatic tuning procedure for unsymmetrical processes. In: 3RD EUROPEAN CONTROL CONFERENCE. Rome, Italy, 1995. p. 2450–2455.
- HANG, C. C.; ÅSTRÖM, K. J.; HO, W. K. Relay auto-tuning in the presence of static load disturbance. *Automatica*, v. 29, n. 2, p. 563–564, 1993.

- HANG, C. C.; SIN, K. K. A comparative performance study of PID auto-tuners. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 11, n. 5, p. 41–47, 1991.
- HANG, C. C.; WANG, Q. G.; CAO, L. S. Self-tuning smith predictors for processes with long dead-time. *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing*.
- HENZE, M. *Activated Sludge Model: Relatório técnico*. London, IAWQ Scientific and Technical Report, 1987.
- HO, W. K.; HANG, C. C.; CAO, L. S. Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications. *Automatica*, v. 31, n. 3, p. 497–502, 1995.
- HO, W. K.; HANG, C. C.; ZHOU, J. Self-tuning PID control of a plant with under-damped response with specifications on gain and phase margins. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 5, n. 4, p. 446–452, 1997.
- HO, W. K.; LIM, K. W.; XU, W. Optimal gain and phase margin tuning for PID controllers. *Automatica*, v. 34, n. 8, p. 1009–1014, 1998.
- HOLMBERG, U. *Relay Feedback of Simple Systems*. Tese (Doutorado) — Lund Institute of Technology, Dept. of Automatic Control, 1991.
- HSU, L. Boundedness of oscillations in relay feedback systems. *International Journal of Control*, v. 52, n. 5, p. 1273–1276, 1990.
- JOHANSSON, K. H. *Relay Feedback and Multivariable Control*. Tese (Doutorado) — Dep. of Automatic Control, Lund Inst. of Technology, 1997.
- JOHANSSON, K. H.; RANTZER, A.; ÅSTRÖM, K. J. Fast switches in relay feedback systems. *Automatica*, v. 35, n. 4, 1999.
- KAYA, I.; ATHERTON, D. P. Exact parameter estimation from relay autotuning under static load disturbances. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. Arlington, VA, 2001a. p. 3274–3279.
- KAYA, I.; ATHERTON, D. P. Parameter estimation from relay autotuning with asymmetric limit cycle data. *Journal of Process Control*, v. 11, p. 429–439, 2001b.
- KESSLER, C. Das symmetrisch optimum. *Regelungstechnik*, v. 6, p. 395–400 and 432–436, 1958.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 2nd. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- LANGER, J.; LANDAU, I. D. Combined pole placement/sensitivity function shaping method using convex optimization criteria. *Automatica*, v. 35, n. 6, p. 1111–1120, 1999.
- LEE, J.; KIM, D. H. Relay oscillation method for estimation of sorption kinetics in the biporous adsorption. *Chemical Engineering Science*, v. 56, p. 6711–6718, 2001.

- LEE, T. H. et al. Implementation of a knowledge based PID auto-tuner. *Automatica*, v. 29, n. 4, p. 1107–1113, 1993.
- LEVA, A. PID autotuning algorithm based on relay feedback. *IEE Proceedings*, v. 140, n. 5, p. 328–338, 1993.
- LEVA, A. Employing relay-based identification for improving model-based PI-PID autotuning. In: . [S.l.: s.n.], 1994.
- LEVA, A.; MAFFEZZONI, C.; SCATTOLINI, R. Self-tuning PI-PID regulators for stable systems with varying delay. *Automatica*, v. 30, n. 7, p. 1171–1183, 1994.
- LI, W.; ESKINAT, E.; LUYBEN, W. L. An improved autotune identification method. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 30, n. 7, p. 1530–1541, 1991.
- LIMA, A. M. N. et al. A gain-scheduling PID-like controller for peltier-based thermal hysteresis characterization platform. In: PROC. OF THE 18TH IEEE INST. AND MEAS. TECH. CONF. - IMTC/2001. Budapest, Hungary, 2001.
- LIN, C.; WANG, Q.-G. On uniqueness of solutions to relay feedback systems. *Automatica*, v. 38, p. 177–180, 2002.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- LOOTSMA, Y. J.; SHAFT, A. J. V. der; ÇAMLIBEL, M. K. Uniqueness of solutions of linear relay systems. *Automatica*, v. 35, p. 467–478, 1999.
- LORON, L. Tuning of PID controllers by the non-symmetrical optimum method. *Automatica*, v. 33, n. 1, p. 103–107, 1997.
- LUNDH, M. *Robust Adaptive Control*. Tese (Doutorado) — Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1991.
- LUNDH, M.; ÅSTRÖM, K. J. Automatic initialization of a robust self-tuning controller. *Automatica*, v. 30, n. 11, p. 1649–1662, 1994.
- LUYBEN, W. L. Derivation of transfer functions for highly nonlinear distillation columns. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 26, p. 2490–2495, 1987.
- LUYBEN, W. L. Getting more information from relay-feedback tests. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 40, p. 4391–4402, 2001.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. *Robust Process Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Int., Inc., 1989.

- MORENO, U. F.; PERES, P. L. D.; BONATTI, I. S. Contribuições para a análise de sistemas de segunda ordem com oscilações caóticas. In: XIII CBA, CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Florianópolis, PR, 2000. p. 1444-1449.
- MORENO, U. F.; PERES, P. L. D.; BONATTI, I. S. Análise de osciladores em sistemas lineares por partes com histerese. In: XIV CBA, CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Natal, RN, 2002. p. 2078-2083.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 2a. ed. Rio de Janeiro, RJ: Prentice Hall do Brasil, 1993.
- PALMOR, Z. J.; BLAU, M. An auto-tuner for smith dead-time compensators. *International Journal of Control*, v. 60, n. 1, p. 117-135, 1994.
- PALMOR, Z. J.; HALEVI, Y.; KRASNEY, N. Automatic tuning of decentralized PID controllers for TITO processes. *Automatica*, v. 31, n. 7, p. 1001-1010, 1995.
- PARK, J. H.; SUNG, S. W.; LEE, I. Improved relay auto-tuning with static load disturbance. *Automatica*, v. 33, p. 711-715, 1997.
- PARK, J. H.; SUNG, S. W.; LEE, I.-B. An enhanced PID control strategy for unstable processes. *Automatica*, v. 34, n. 6, p. 751-756, 1998.
- PESSON, D. W. A new look at PID-controller tuning. *Transactions of the ASME*, v. 116, n. 3, p. 553-557, 1994.
- SCHEI, T. S. A method for closed loop automatic tuning of PID controllers. *Automatica*, v. 28, n. 3, p. 587-591, 1992.
- SCHEI, T. S. Automatic tuning of PID controllers based on transfer function estimation. *Automatica*, v. 30, n. 12, p. 1983-1989, 1994.
- SHEN, S.-H.; WU, J.-S.; YU, C.-C. Use of biased-relay feedback for system identification. *AIChE Journal*, v. 42, n. 4, p. 1174-1180, 1996.
- SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, v. 13, p. 291-309, 2003.
- SUGIKI, A.; HATAKEYAMA, S.; FURUTA, K. A chaos model via relay feedback. In: *1999 IEEE Int. Conf. On Control Applications*. Kohala Coast-Island of Hawai'i, Hawai'i, USA: [s.n.], 1999. p. 1389-1393.
- SUNG, S. W.; LEE, I.-B.; LEE, J. New process identification method for automatic design of PID controllers. *Automatica*, v. 34, n. 4, p. 513-520, 1998.

- SUNG, S. W.; LEE in B.; LEE, J. Modified proportional-integral derivative (PID) controller and a new tuning method for the PID controller. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 34, p. 4127–4132, 1995.
- SUNG, S. W.; PARK, J. H.; LEE, I.-B. Modified relay feedback method. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 34, n. 11, p. 4133–4135, 1995.
- TAN, K. K. et al. Friction modeling and adaptive compensation using a relay feedback approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 48, n. 1, p. 169–176, 2001.
- TAN, K. K. et al. *Advances in PID Control*. London: Springer-Verlag, 1999.
- TSYPKIN, Y. Z. *Relay Control Systems*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984.
- VARIGONDA, S.; GEORGIU, T. T. Global stability of periodic orbits in relay feedback systems. In: *39th IEEE Conf. On Decision and Control*. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. p. 3843–3847.
- VARIGONDA, S.; GEORGIU, T. T. Dynamics of relay relaxation oscillators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 1, p. 65–77, 2001.
- VODA, A. A.; LANDAU, I. D. A method for the auto-calibration of PID controllers. *Automatica*, v. 31, n. 1, p. 41–53, jan. 1995.
- WANG, L.; DESARMO, M. L.; CLUETT, W. R. Real-time estimation of process frequency response and step response from relay feedback experiments. *Automatica*, v. 35, n. 8, p. 1427–1436, 1999.
- WANG, Q.-G.; HANG, C.-C.; BI, Q. A technique for frequency response identification from relay feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 7, n. 1, p. 122–128, jan. 1999.
- WANG, Q.-G.; HANG, C.-C.; ZOU, B. Low-order modeling from relay feedback. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 36, p. 375–381, 1997.
- WANG, Q.-G. et al. Auto-tuning of multivariable PID controllers from decentralized relay feedback. *Automatica*, v. 33, n. 3, p. 319–330, 1997.
- YU, C.-C. *Autotuning of PID Controllers: Relay Feedback Approach*. London: Springer-Verlag, 1999.
- ZHOU, K. *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1998.
- ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, v. 42, p. 759–768, 1942.