

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
ÁREA DE RECURSOS HÍDRICOS**

**OTIMIZAÇÃO DE REDES MALHADAS ABASTECIDAS COM
MÚLTIPLOS RESERVATÓRIOS, BOMBAS E BOOSTERS
ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
DIMITRI PINTO DE MELO**

**CAMPINA GRANDE – PARAÍBA
2000**

DIMITRI PINTO DE MELO

**OTIMIZAÇÃO DE REDES MALHADAS ABASTECIDAS COM
MÚLTIPLOS RESERVATÓRIOS, BOMBAS E BOOSTERS
ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR**

Dissertação apresentada ao Curso de
Mestrado em Engenharia Civil da
Universidade Federal da Paraíba, em
cumprimento às exigências para
obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: HÉBER PIMENTEL GOMES

**CAMPINA GRANDE – PARAÍBA
2000**



M528o

Melo, Dimitri Pinto de.

Otimização de redes malhadas abastecidas com múltiplos reservatórios, bombas e boosters através da programação não linear / Dimitri Pinto de Melo. - Campina Grande, 2000.
158 f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) -
Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2000.

"Orientação : Prof. Héber Pimentel Gomes".
Referências.

1. Redes de Distribuição de Água - Otimização. 2. Redes de Distribuição de Água - Otimização - Algoritmos GRG2. 3. Dissertação - Engenharia Civil. I. Gomes, Héber Pimentel. II. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 626.824(043)

**OTIMIZAÇÃO DE REDES MALHADAS ABASTECIDAS POR
MÚLTIPLOS RESERVATÓRIOS, BOMBAS E BOOSTERS
ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR**

DIMITRI PINTO DE MELO



HÉBER PIMENTEL GOMES
Orientador



CARLOS DE OLIVEIRA GALVÃO
Componente da Banca



MANOEL LUCAS FILHO
Componente da Banca

Aos meus adorados pais, à minha amada
esposa e ao meu querido filho,

OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

Ao Ser superior e ao Seu filho, razão da nossa existência e fonte suprema de amor, que nos encoraja nos momentos de tristeza e solidão e ajudam-nos a superar nossas dores.

Aos meus pais, José Reynolds Cardoso de Melo e Luíza Marilac Pinto de Melo pela doação das próprias vidas em favor de minhas realizações. Prova maior de amor!

À minha querida e amada esposa Fabíola Castor de Melo que desde os meus áureos anos da adolescência acompanha todos os meus passos, alegrando-se com minhas alegrias, entristecendo-se com minhas tristezas e estendendo a mão para que eu sempre levante do chão das decepções sofridas.

Ao meu querido filho Filipe Castor de Melo que mesmo sem saber me forneceu e fornece uma força extraordinária e tornou-se, conjuntamente com minha esposa, a razão de ser da minha existência.

Aos meus familiares, em especial minha irmã Alessandra, meu primo e cunhado Hamilton, meu querido sobrinho Humberto, minha sogra Teresa Guerra Castor e meu sogro Fábio Castor pelo apoio dado durante esta fase de minha vida.

Ao meu orientador Professor Héber Pimentel Gomes pelo ensinamento, dedicação e experiência de vida passados para minha pessoa no decorrer do trabalho e que muito me ajudaram a superar os problemas surgidos neste período.

Ao CNPq, pelo essencial apoio financeiro concedido para que fosse possível a conclusão deste curso de mestrado.

Ao curso de Pós Graduação em Engenharia Civil e aos professores da Área de Engenharia de Recursos Hídricos, pelo conhecimento e experiência transmitidos, apoio e compreensão com minha pessoa nos problemas surgidos durante o curso.

Ao amigo Klebber Teodomiro Formiga que muito me ajudou nesta caminhada, passando suas experiências e conhecimentos adquiridos no seu trabalho, no que foram bastante úteis na realização desta pesquisa.

Aos colegas de curso Eunice Porto Câmara, Jorge Luiz Rabelo, Maria Betânia Almeida de Oliveira, Ricardo de Aragão, Silvestre Lopes da Nóbrega, Alessandra Ramos, Paula Freire, Glauber Cunha, Márcia Maria, Marcos Tibério de Siqueira, Paulo Serrano, Dayze Luna, e todos os que contribuíram de algum modo para a realização deste trabalho.

Aos funcionários do Laboratório de Recursos Hídricos, representados pelas pessoas de Alrezinha Dantas Veiga e Vera Lúcia Alves Rodrigues.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO 15

CAPÍTULO II

OS SISTEMAS DE ABASTECIMENTO DE ÁGUA 17

2.1 – INTRODUÇÃO 17

2.2 – ESTUDO DA CONCEPÇÃO DOS SISTEMAS DE ABASTECIMENTO
DE ÁGUA 21

2.3 – VARIAÇÕES NAS DEMANDAS DE ÁGUA COM O TEMPO 23

2.4 – ALTERNATIVAS DE CONCEPÇÃO 26

CAPÍTULO III

REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA 27

3.1 – INTRODUÇÃO 27

3.2 – CONCEITOS BÁSICOS 27

3.3 – TRAÇADO DOS CONDUTOS 29

3.4 – REDE ÚNICA E DUPLA 31

3.5 – REDES EM NÍVEIS DIFERENTES 32

3.6 – ETAPAS NECESSÁRIAS A ELABORAÇÃO DE UM PROJETO DE REDES
DE DISTRIBUIÇÃO 32

3.7 – COMPONENTES DA REDE DE DISTRIBUIÇÃO 35

3.8 – DIMENSIONAMENTO TRADICIONAL DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO
DE ÁGUA 36

CAPÍTULO IV

| | |
|--|-----------|
| OTIMIZAÇÃO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO | 42 |
| 4.1 – INTRODUÇÃO | 42 |
| 4.2 – TÉCNICAS DE ENUMERAÇÃO EXAUSTIVA | 45 |
| 4.3 – PROGRAMAÇÃO LINEAR | 45 |
| 4.4 – PROGRAMAÇÃO DINÂMICA | 46 |
| 4.5 – PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR | 46 |

CAPÍTULO V

| | |
|--|-----------|
| A PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR | 49 |
| 5.1 – INTRODUÇÃO | 48 |
| 5.2 – CONCEITOS E TEOREMAS | 49 |
| 5.2.1 – MÍNIMO E MÁXIMO LOCAL E GLOBAL | 49 |
| 5.2.2 – CONVEXIDADE E CONCAVIDADE | 51 |
| 5.2.3 – MATRIZ HESSIANA | 53 |
| 5.2.4 – VETOR GRADIENTE | 55 |
| 5.2.5 – ALGORITMOS ITERATIVOS | 56 |
| 5.3 – MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR | 57 |
| 5.3.1 – TÉCNICAS ANALÍTICAS | 57 |
| 5.3.1.1 – MULTIPLICADORES DE LAGRANGE | 57 |
| 5.3.2 – TÉCNICAS DE BUSCA NUMÉRICA | 59 |
| 5.3.2.1 – MÉTODOS DE BUSCA UNIDIRECIONAL | 60 |
| 5.3.2.2 – MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA | 62 |
| 5.3.2.3 – MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES | 66 |

CAPÍTULO VI

| | |
|--|-----------|
| METODOLOGIA DE DIMENSIONAMENTO | 78 |
| 6.1 – INTRODUÇÃO | 79 |
| 6.2 – A METODOLOGIA | 80 |
| 6.2.1 – FUNÇÃO OBJETIVO PARA A PRIMEIRA ETAPA | 84 |
| 6.2.2 – RESTRIÇÕES PARA A SITUAÇÃO DE DEMANDA MÁXIMA | 87 |

| | |
|---|-----|
| 6.2.3 – RESTRIÇÕES PARA A SITUAÇÃO DE DEMANDA MÍNIMA | 92 |
| 6.2.4 – FUNÇÃO OBJETIVO PARA A SEGUNDA ETAPA | 95 |
| 6.2.5 – RESTRIÇÕES PARA A SITUAÇÃO DE DEMANDA MÁXIMA | 97 |
| 6.2.6 – RESTRIÇÕES PARA A SITUAÇÃO DE DEMANDA MÍNIMA | 100 |
| | |
| CAPÍTULO VII | |
| RESULTADOS E DISCUSSÕES | 103 |
| | |
| 7.1 – EXEMPLO DE APLICAÇÃO | 103 |
| 7.2 – PRIMEIRA ETAPA | 113 |
| 7.2.1 – FUNÇÃO OBJETIVO | 113 |
| 7.2.2 – RESTRIÇÕES PARA SITUAÇÃO DE DEMANDA MÁXIMA | 114 |
| 7.2.3 – RESTRIÇÕES PARA SITUAÇÃO DE DEMANDA MÍNIMA | 122 |
| 7.3 – SEGUNDA ETAPA | 128 |
| 7.3.1 – FUNÇÃO OBJETIVO | 128 |
| 7.3.2 – RESTRIÇÕES PARA SITUAÇÃO DE DEMANDA MÁXIMA | 129 |
| 7.3.3 – RESTRIÇÕES PARA SITUAÇÃO DE DEMANDA MÍNIMA | 134 |
| 7.3.4 – RESOLUÇÃO DA SEGUNDA ETAPA DA OTIMIZAÇÃO | 137 |
| 7.4 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O SEGUNDO CONJUNTO DE VALORES INICIAIS DE ENTRADA | 140 |
| 7.5 – TABELAS COMPARATIVAS DOS CUSTOS ENCONTRADOS PARA CADA CONJUNTO DE DIÂMETROS INICIAIS DO PROBLEMA | 145 |
| 7.6 – DISCUSSÕES | 146 |
| 7.6.1 – DISCUSSÕES DOS RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DO PRIMEIRO CONJUNTO DE DADOS INICIAIS DE ENTRADA | 146 |
| 7.6.2 – DISCUSSÕES DOS RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DO SEGUNDO CONJUNTO DE DADOS INICIAIS DE ENTRADA | 148 |
| | |
| CAPÍTULO VIII | |
| CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES | 151 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 154 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 3.1 – Relação entre diâmetros e velocidades máximas Admissíveis | 38 |
| Tabela 7.1 – Coeficientes da equação de Hazen-Williams utilizados por diferentes autores para diâmetros em metros e vazões em m ³ /s | 106 |
| Tabela 7.2 – Comprimentos dos trechos da rede | 107 |
| Tabela 7.3 – Cotas do terreno para os nós da rede | 107 |
| Tabela 7.4 – Demandas máximas e mínimas nos nós da rede | 108 |
| Tabela 7.5 – Preços unitários das tubulações de diversos diâmetros | 108 |
| Tabela 7.6 – Valores iniciais de diâmetros escolhidos aleatoriamente | 109 |
| Tabela 7.7 – Valores iniciais de diâmetros de acordo com a velocidade de 1 m/s | 109 |
| Tabela 7.8 – Velocidades máximas de acordo com Clément-Galante Granados | 119 |
| Tabela 7.9 – Resultados da primeira etapa de otimização para a situação de máxima demanda de acordo com os diâmetros escolhidos aleatoriamente | 126 |

Tabela 7.18 – Resultados dos custos obtidos para cada conjunto de valores iniciais de diâmetros escolhidos arbitrariamente 145

Tabela 7.19 – Resultados dos custos obtidos para cada conjunto de valores iniciais de diâmetros escolhidos com o critério de velocidades máximas admissíveis 145

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| Figura 2.1 – Esquema de um sistema típico de abastecimento de água | 20 |
| Figura 3.1 – Esquema de uma rede ramificada | 30 |
| Figura 3.2 – Esquema de uma rede malhada | 30 |
| Figura 5.1 – Tipos de máximos e mínimos de uma função | 50 |
| Figura 5.2 – Comportamento das funções côncavas e convexas | 52 |
| Figura 7.1 – Esquema da rede utilizada no exemplo de aplicação | 103 |
| Figura 7.2 – Curva de ajuste encontrada da relação custo unitário do Tubo x Diâmetro do exemplo de aplicação | 110 |

RESUMO

Este trabalho é o resultado de mais uma pesquisa na área de otimização de redes de distribuição de água, em que se realiza a aplicação com adaptações necessárias ao caso estudado, de metodologia que utiliza técnicas de programação não linear, desenvolvida para o dimensionamento de redes malhadas abastecidas por um reservatório. As adaptações à metodologia são realizadas tendo em vista ser esta pesquisa realizada em uma rede malhada abastecida por múltiplas fontes, ou seja, múltiplos reservatórios, bombas e boosters, o que não foi considerado na metodologia inicial. Para realizar a otimização, aplicou-se o algoritmo GRG2, baseado na técnica dos Gradientes Reduzidos Generalizados. Os resultados encontrados alcançaram o objetivo de dimensionar a rede, obedecidas as restrições hidráulicas impostas, com a obtenção do custo mínimo, sem se obter a transformação da rede malhada em uma rede ramificada.

ABSTRACT

This work is the result of more a research, in the place of optimization in mailed nets of water distribution in that to do the application and necessary adaptations to the studied case, of methodology that uses programming techniques no linear, devolved for the design of mailed nets supplied by a reservoir. The adaptations to the methodology are accomplished tends in view to be this research accomplished in a supplied net by multiple sources, in other words, multiple reservoirs, bombs and boosters, what was not considered in the initial methodology. To accomplish the optimization, the algorithm GRG2 was applied, based on the technique of the Widespread Gradients. The found results reached the design objective the net, obeyed the imposed hydraulic restrictions, with the obtaining of the minimum cost, without obtaining the transformation of the mailed net in a ramified net.

Capítulo I

Introdução

As cidades crescem cada vez mais devido a um conjunto de fatores sociais, econômicos e políticos. Isto acarreta à necessidade de se aumentar continuamente a disponibilidade de água com qualidade e em quantidade suficiente para o atendimento das necessidades básicas desta população crescente. A partir da observação deste problema, houve um crescimento das pesquisas com relação a todo o sistema de abastecimento público de água, tendo em vista o melhor aproveitamento da água e, conseqüentemente, a redução dos custos do serviço.

Um grande aumento no número destas pesquisas ocorreu nas chamadas técnicas de otimização de sistemas de distribuição de água, principalmente com os avanços dos sistemas computacionais, em que se possibilita trabalhar com um número grande de variáveis que influem no dimensionamento econômico de redes.

Este trabalho é o resultado de mais uma destas pesquisas, realizada na área de redes malhadas de distribuição de água, tendo como objetivo a obtenção de uma metodologia de dimensionamento otimizado (economicamente) de redes malhadas, abastecidas por múltiplas fontes, tais como reservatórios e estações de bombeamento, além de ser considerada também uma fonte de energia interna, ou seja, uma estação de bombeamento tipo booster (reforço), inserida para fornecer a energia necessária ao sistema para que se possa atender a determinados pontos da rede localizados em cotas mais elevadas que os demais pontos da mesma.

O segundo capítulo desta dissertação “Sistema de Abastecimento de Água” discorre sobre os conceitos básicos dos sistemas de abastecimento público de água e, em seguida, sobre o estudo dos arranjos alternativos das diferentes unidades dos componentes de um sistema, para a escolha da uma melhor solução técnica e econômica.

O terceiro capítulo trata de Redes de Distribuição de Água, descrevendo-se seus componentes, disposição, funcionamento e as técnicas usuais de dimensionamento denominadas de Seccionamentos Fictícios e a de Hardy-Cross.

O quarto capítulo realiza um breve histórico das pesquisas desenvolvidas em otimização de redes de distribuição de água e aborda as principais técnicas de otimização utilizadas no referido tema, indicando qual destas técnicas será a utilizada nesta dissertação.

O quinto capítulo coloca os fundamentos teóricos empregados na formulação da programação não linear e dois algoritmos que serviram de base para a construção do algoritmo que está contido na ferramenta de trabalho que esta pesquisa utiliza.

O sexto capítulo desenvolve a metodologia utilizada neste trabalho, realizando as adaptações necessárias ao caso estudado. Neste desenvolvimento, descrevem-se as funções objetivo e as respectivas restrições, que serão aplicadas no sétimo capítulo.

O sétimo capítulo aplica a metodologia desenvolvida e adaptada no capítulo anterior a uma rede malhada, que possui em seu interior uma estação de bombeamento (tipo booster) e é abastecida por dois reservatórios e por uma estação de bombeamento. Esta rede abastece também uma indústria que necessita de determinada vazão durante às vinte e quatro horas do dia. A rede é abastecida pelos dois reservatórios e pela estação de bombeamento, que retira água de um lençol subterrâneo, conjuntamente, durante o período do dia considerado de demanda máxima. No outro período, de demanda mínima, a estação de bombeamento abastece os dois reservatórios e a rede.

Também no sétimo capítulo desenvolvem-se as discussões necessárias aos resultados do exemplo, colocando-se as devidas observações, tendo em vista os resultados obtidos no exemplo de aplicação.

O oitavo capítulo encerra o trabalho com as conclusões pertinentes ao mesmo, sugerindo-se a elaboração de trabalhos complementares ao tema.

Capítulo II

Os Sistemas de Abastecimento de Água

2.1 - Introdução

Como mencionado no capítulo anterior, o sistema de abastecimento de água contém as seguintes unidades:

2.1.1 - Manancial / Captação;

2.1.2 - Tratamento;

2.1.3 - Elevatória;

2.1.4 - Adução;

2.1.5 - Reservação;

2.1.6 – Distribuição;

2.1.7 - Ligações Prediais.

Comentar-se-á agora um pouco de cada uma delas, pois como já mencionado, uma abordagem mais detalhada será realizada no que diz respeito a unidade de distribuição, no capítulo IV.

2.1.1 – Manancial / Captação - segundo Dacach (1979), as diversas porções em que a água se apresenta em estado líquido constituem os mananciais de água. Portanto, os mananciais constituem a fonte produtora de água bruta, podendo ser as chuvas, os lençóis de água subterrânea, as coleções de água superficiais e, separadamente, os oceanos e mares.

A captação é a unidade do sistema que retira a água do manancial, em quantidade necessária e suficiente para atender ao consumo de uma maneira geral. Para cada tipo de manancial há diversos modos possíveis de captação, como por exemplo para mananciais de superfície tem-se a captação direta, a barragem de nível, o canal de regularização, o reservatório de regularização com tomada de água, dentre outros.

2.1.2 – Tratamento - caso o manancial não possua água potável, faz-se necessário o tratamento da mesma antes do consumo final.

Através do tratamento, procede-se a eliminação de impurezas e/ou a redução de algumas substâncias que tornam a água inadequada para o uso humano, tais como bactérias patogênicas, turbidez, cor, odor, sabor, dureza, corrosividade, ferro, manganês e sais minerais. Portanto, o tratamento serve, basicamente, para proteger a saúde pública (BABBITT et al., 1967).

Cada uma destas impurezas ou características têm uma forma específica de tratamento, como, por exemplo, tem-se a desinfecção, para eliminar as bactérias patogênicas, a filtração lenta e a filtração para reduzir a turbidez, a aeração para eliminar os odores e os sabores, o emprego da cal ou do carbonato de sódio para eliminar a ação corrosiva da água, entre outros.

Segundo Garcez (1974) a finalidade do tratamento pode ser: Higiênica, Econômica ou Estética.

As características da água disponível e os padrões a que deve atender constituem os pontos básicos para a definição de tratamento. Com isso, faz-se o enquadramento da água nos padrões de potabilidade instituídos no Brasil pelo Ministério da Saúde.

2.1.3 – Elevatória - os sistemas de transporte de água podem funcionar por gravidade ou por recalque. Os sistemas que funcionam integralmente por gravidade são cada dia mais raros, apesar de possuírem claras vantagens em relação ao sistema por recalque. Dentre essas vantagens, pode-se citar a não inclusão do custo de energia, o sistema não será atingido quando houver falhas no fornecimento da mesma, a facilidade da operação e sua manutenção, entre outras.

Mesmo levando em consideração estas vantagens, acontece que a localização de muitas cidades se dá em cotas mais elevadas que os mananciais que irão abastecê-las ou devido a grande distância dos mesmos, necessitando assim do uso de estações elevatórias que irão suprir estas dificuldades.

De acordo com estes fatos, normalmente faz-se o uso de estações elevatórias para o transporte de água até as cidades.

A localização e o projeto da elevatória são determinados pela Norma Brasileira de Projetos de Sistema de Bombeamento de Água para Abastecimento Público (NBR-12214, 1992).

2.1.4 – Adução - o transporte de água entre o manancial, o tratamento e os reservatórios é realizado através das linhas adutoras, que podem funcionar por gravidade ou por recalque, dependendo das cotas do manancial, da estação de tratamento e do reservatório. São responsáveis pelo transporte da água bruta/tratada até os reservatórios de distribuição localizados nas cidades ou suas periferias.

Dependendo da qualidade da água do manancial, torna-se dispensável o tratamento (realiza-se apenas a desinfecção preventiva), originando-se um sistema em que a adução até a cidade se faz através de uma única adutora, ligando o manancial diretamente à cidade, sem a intermediação do tratamento.

2.1.5 – Reservação - as funções dos Reservatórios de Distribuição são as de regularizar as diferenças entre o abastecimento e o consumo que se verificam em um dia (reserva de equilíbrio), promover condições de abastecimento contínuo durante períodos curtos de paralisação do abastecimento (reserva de emergência), armazenar água para dar combate ao fogo (reserva de incêndio) e condicionar as pressões disponíveis nas redes de distribuição.

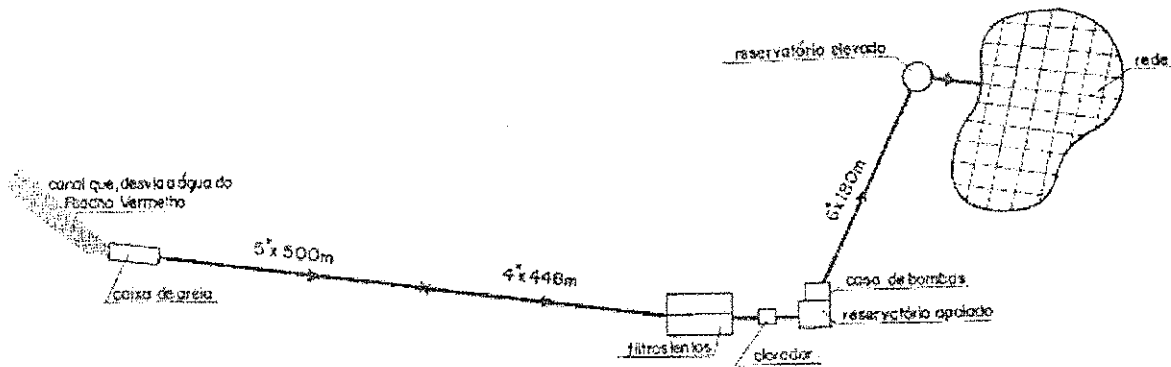
2.1.6 – Distribuição - é o conjunto de tubulações destinado a conduzir água aos diversos pontos de consumo da comunidade, representado pelos prédios e hidrantes, chafarizes, banheiros públicos, entres outros pontos consumidores, ou seja, o objetivo é prover água potável para uso doméstico, industrial e público em quantidade e pressão

suficientes ao atendimento da população (HAMMER, 1977). Como redes de distribuição é o tema básico deste trabalho, no capítulo IV tratar-se-á do mesmo mais detalhadamente.

2.1.7 – Ligações Prediais - As ligações prediais são responsáveis pelo abastecimento dos pontos de consumo, como residências, estabelecimentos públicos, comerciais e industriais. Elas fazem a ligação da tubulação da rede de distribuição às instalações internas dos pontos de consumo.

O esquema da Figura 2.1 ilustra a composição de um sistema típico de abastecimento de água.

Figura 2.1 – Exemplo de Sistema de Abastecimento de Água



As unidades descritas anteriormente e ilustradas na Figura 2.1, podem, entretanto, estar arrançadas de forma diversa da anterior ou existirem em quantidade também variável, devido ao número e a natureza dos mananciais explorados, que em geral se multiplicam ao longo do tempo, na medida em que as cidades crescem, requerendo a inclusão de novas fontes de água para suprimento de suas demandas crescentes.

2.2 – Estudo da Concepção dos Sistemas de Abastecimento de Água

Esta parte do trabalho estuda os arranjos, sob os pontos de vista qualitativo e quantitativo, das diferentes partes de um sistema, organizadas de modo a formarem um todo integrado, para a escolha da melhor solução sob os pontos de vista técnico, econômico, financeiro e social.

Para o início do estudo da concepção de sistemas públicos de abastecimento de água, faz-se necessário a introdução de alguns conceitos básicos.

De acordo com a Norma Brasileira de Estudos de Concepção de sistemas públicos de abastecimento de água (NBR 12211, 1992), tem-se os seguintes conceitos básicos:

a - População Residente: é aquela formada pelas pessoas que têm o domicílio como residência habitual;

b- População Flutuante: aquela que, proveniente de outras comunidades, se transfere ocasionalmente para a área considerada, impondo ao sistema de abastecimento de água consumo unitário análogo ao da população residente.

c - População Temporária: aquela que, proveniente de outras comunidades ou de outras áreas da comunidade em estudo, se transfere para a área abastecível, impondo ao sistema um consumo unitário inferior ao atribuído à população, enquanto presente na área, e em função das atividades que aí exerce;

d - População Total em uma área da comunidade: é a soma das populações residente, flutuante e temporária;

e - População Abastecida: é aquela atendida pelo sistema de distribuição existente;

f - População Abastecível: parcela da população total, em uma área da comunidade, a ser abastecida pelo sistema de distribuição;

g - Alcance do Plano: data prevista para o sistema planejado passar a operar com utilização plena de sua capacidade;

h - Data de Início do Plano: data de início das obras constituintes do sistema, previamente fixada pelo contratante.

Um sistema de abastecimento quando instalado, deve ter condições de fornecer água em quantidade superior ao consumo. Todavia, depois de certo número de anos, a demanda passa a corresponder à capacidade máxima de adução e, então, diz-se que o sistema atingiu o seu limite de eficiência.

Normalmente, planeja-se um sistema para funcionar durante um certo período de anos. Isto impõe o conhecimento da população total que deverá ser beneficiada n anos depois da elaboração do projeto (DACACH, 1979).

Os consumidores a serem considerados compreendem os estabelecimentos residenciais, industriais e públicos.

A população a ser abastecida deve ser constituída, no alcance do plano, de:

- pelo menos 80% da população residente, quando este percentual não é fixado pelo contratante;
- parcelas das populações flutuante e temporária, cujos abastecimentos apresentem interesse econômico ou social, a juízo do contratante.

Devem também ser abastecidos os estabelecimentos comerciais e públicos que:

- se situem no interior da área abastecível;
- se situem fora da área abastecível, mas que, a juízo do contratante, sejam considerados consumidores especiais.

Podem ser abastecidos os estabelecimentos industriais que se situem no interior da área abastecida e não utilizem água do sistema público em seus processamentos e, aquelas que se situem fora da área abastecida, mas que sejam consideradas consumidores especiais, ou seja, aquele que deve ser atendido, independentemente de aspectos econômicos relacionados ao seu atendimento, quer utilizem ou não água nos seus processamentos.

A população residente deve ser avaliada segundo um dos critérios seguintes:

- mediante a extrapolação de tendências de crescimento, definidas por dados estatísticos suficientes para constituir uma série histórica;

- mediante a aplicação à última população conhecida da comunidade em estudo das mesmas tendências verificadas em comunidades com características análogas às da comunidade em estudo, quando inexistirem dados característicos suficientes para constituírem uma série histórica;

As populações flutuante e temporária devem ser avaliadas mediante critérios particulares, estabelecidos de comum acordo com o contratante do projeto.

A população que condiciona o dimensionamento do sistema de abastecimento deve ser a população prevista até o alcance do plano.

Em complementação à estimativa de população, faz-se necessária a previsão de como esta população ficará distribuída na cidade, o que será de maior importância, sobretudo para o dimensionamento da rede de distribuição.

Segundo DACACH (1979), costuma-se definir o número de habitantes por hectare, utilizando-se este critério na maioria dos casos de dimensionamento de redes malhadas e, por metro de canalização, critério este utilizado no cálculo das redes ramificadas ou nas redes malhadas dimensionadas pelo processo de dimensionamento fictício.

Um outro fator importantíssimo a ser determinado na concepção do projeto de sistemas de distribuição de água é a demanda de água. Ela é realizada considerando em sua determinação o consumo das ligações medidas e não medidas e o volume de perdas no sistema, observando que os volumes faturados não servem de base para o cálculo da demanda de água.

Para uma mesma cidade, tem-se diversas variações nas demandas de água com o tempo, como as variações anuais, mensais, diárias, horárias e instantâneas do consumo de água. Comentar-se-ão a seguir estas variações.

2.3 - Variações nas demandas de água com o tempo

2.3.1 - Variação Anual: o consumo anual de água tende a crescer com o decorrer do tempo, não somente devido ao incremento populacional como ao próprio consumo per capita.

2.3.2 - Variação Mensal: há meses durante o ano nos quais o consumo supera o valor médio e há outros em que isto não ocorre. Nas regiões de estações definidas, o mês de consumo máximo ocorre no verão e o de consumo mínimo no inverno.

2.3.3 - Variação Diária no Ano: o consumo diário de água em uma cidade varia ao longo do ano, ocorrendo os maiores consumos, com certeza no período do ano em que o verão se faz presente. O estabelecimento do dia de maior consumo anual é de extrema importância, pois ele faz parte do cálculo para a obtenção do coeficiente de variação anual de consumo, denominado K_1 , a ser comentado posteriormente. Este coeficiente participa do dimensionamento das unidades do sistema de abastecimento de água.

2.3.4 - Variação Horária: o consumo horário de uma cidade varia de acordo com o período do dia em que a população solicita o abastecimento com maior intensidade ou não. Esta variação faz-se sentir com maior intensidade nas pequenas cidades e desprovidas de indústrias, nas quais pela madrugada, o consumo é bem reduzido, pelo fato da maioria da população encontrar-se dormindo. É este período que o subsistema redes de distribuição, o qual possui reservatórios a jusante, utiliza para encher os reservatórios, devido à diminuição de demanda e, conseqüente aumento de pressão, fazendo com que a água provinda da adutora ou de outra fonte, consiga vencer as perdas ao longo da rede e abasteça o referido reservatório.

O maior consumo ocorre no período diurno, geralmente entre 7 e 9 horas ou entre 18 e 21 horas.

De modo análogo ao comentado na variação diária de consumo, o estabelecimento da hora de maior consumo diário é de extrema importância, pois ela faz parte do cálculo para a obtenção do coeficiente de variação horário de consumo, denominado K_2 a ser comentado posteriormente. Este coeficiente também participa do dimensionamento das unidades do sistema de abastecimento de água.

2.3.5 - Variação instantânea: as variações instantâneas processam-se nos extremos das redes, quando atendem a prédios desprovidos de reservatório domiciliar.

Tornam-se intensivas por ocasião da abertura ou fechamento simultâneo torneiras e aparelhos sanitários. Estas variações também devem ser consideradas no cálculo de ligações domiciliares e na escolha do hidrômetro (DACACH, 1979).

No caso dos dados disponíveis serem confiáveis, seguem-se os critérios abaixo relacionados:

- consumo médio é igual à média dos volumes diários, consumidos no período mínimo de um ano;
- coeficiente do dia de maior consumo, denominado de K_1 , deve ser obtido da relação entre o maior consumo diário, verificado no período de um ano e o consumo médio diário neste mesmo período, considerando-se sempre as mesmas ligações. A NBR 12211 (1992) recomenda que sejam considerados no mínimo, cinco anos consecutivos de observações, adotando-se a média dos coeficientes determinados.
- coeficiente da hora de maior consumo, denominado K_2 , é a relação entre a máxima vazão horária e vazão média do dia de maior consumo.

A NBR 12211 (1992) recomenda, na determinação dos coeficientes K_1 e K_2 , que devem ser excluídos os consumos dos dias em que ocorram acidentes no sistema, ou fatos excepcionais responsáveis por alteração do consumo.

Os estabelecimentos residenciais, comerciais e públicos devem ter seus consumos avaliados com base no histórico das economias medidas e através de uma estimativa de consumo para as economias não medidas, cujos critérios devem ser fixados de comum acordo com as entidades intervenientes.

Para a previsão dos consumos de indústrias, tem-se que observar dois possíveis casos, quais sejam:

- quando os estabelecimentos industriais são total ou parcialmente servidos pelo sistema público de abastecimento. Neste caso, a NBR 12211 (1992) recomenda que os mesmos devem ter os seus consumos avaliados com base no histórico de seus consumos medidos, bem como em inquéritos para averiguação de eventuais ampliações;
- quando os estabelecimentos industriais estiverem em fase de implantação e com instalação projetada, os consumos devem ser estabelecidos de acordo com os respectivos projetos. É o que recomenda a NBR 12211 (1992).

Caso não existam meios para se determinar os consumos descritos acima, a NBR 12211 (1992) recomenda que as demandas sejam definidas com base em dados de outras comunidades com características análogas à comunidade em estudo.

Não se deve esquecer, quando do estudo da concepção, de se prever meios adequados para se determinar o controle do sistema, tendo em vista a manter a demanda dentro dos limites previstos, sem que ocorra a distribuição intermitente.

2.4 – Alternativas de Concepção

Determinadas as vazões de dimensionamento, elaboram-se as alternativas de concepção do sistema, de acordo com as disponibilidades de mananciais, topografia, facilidades dos locais de capacitação (geologia, acesso, energia), desenvolvimento das adutoras, tipos de tratamento, localização de elevatórias, reservatórios, redes, entre outros.

As diversas alternativas são pré-dimensionadas, orçadas e submetidas a estudos sociais (nível de renda), situação sócio-econômico da comunidade, capacidade e disponibilidade de pagamento, estudos econômicos como custos de investimento, custos operacionais e de manutenção, determinação de tarifas, receitas, entre outros estudos e estudos ambientais.

Finalmente, aquela alternativa que melhor se apresentar, como por exemplo com menores impactos ambientais, é escolhida como a mais viável, sendo então elaborados os projetos básicos e executivos de todas as unidades componentes do sistema em todos os seus detalhes, concluindo-se assim o projeto.

Capítulo III

Redes de Distribuição

3.1 - Introdução

Antes de dar-se início ao estudo de redes de distribuição propriamente dito, é necessário colocar alguns conceitos básicos que serão de muita valia no decorrer da leitura deste trabalho. De acordo com as Normas Brasileiras de Projetos Hidráulicos de Redes de Distribuição de Água Potável (NB 594, 1977 e NBR 12218, 1994), tem-se

3.2 – Conceitos básicos

- a** - *Vazão de Distribuição*: é o consumo acrescido das perdas que poderão ocorrer na rede de distribuição;
- b** - *Categoria de Consumidor*: é a qualificação do consumidor, de acordo com o uso que ele faz da água e com a quantidade de água consumida na unidade de tempo;
- c** - *Área Específica da Rede de Distribuição*: é uma área cuja característica de ocupação a torna distinta das áreas vizinhas, em termos de concentração demográfica e de categoria de consumidores presentes;
- d** - *Área Abastecível*: é a área da cidade para a qual se prevê, em projeto, a implantação da rede de distribuição;
- e** - *Vazão Específica de Distribuição*: é a vazão de distribuição média que ocorre em uma área específica, ou que a ela é atribuída e expressa em vazão por unidade de área, ou vazão por unidade de comprimento da tubulação distribuidora instalada ou prevista na área;
- f** - *Pressão Estática Disponível*: é a pressão que seria verificada nesse ponto na condição de ocorrência de consumo nulo em toda rede. Essa

pressão é referida ao nível do eixo da via pública onde a rede está implantada.

g - Pressão Dinâmica Disponível: é a pressão que se verifica na rede de distribuição, sob certa condição de consumo não nulo;

h - Zona de Pressão da Rede de Distribuição: é uma das partes em que a rede é subdividida, visando impedir que as pressões mínima dinâmica e máxima estática, ultrapassem limites pré-fixados.

De início é importante fazer a distinção entre Sistemas de Distribuição e Redes de Distribuição, pois estes dois conceitos geram distorções de opinião entre as pessoas.

De acordo com a Norma Brasileira de Projeto de Rede de Distribuição de Água para Abastecimento Público (NBR 12218, 1994), *Rede de Distribuição* é parte do sistema de abastecimento formada de tubulações e órgãos acessórios, destinada a colocar água potável à disposição dos consumidores, de forma contínua e em quantidade e pressões recomendadas e *Sistema de Distribuição* é o conjunto formado pela rede de distribuição, reservatórios de distribuição, subadutoras e estações elevatórias que recebem água dos reservatórios de distribuição.

Vários conceitos de Redes de Distribuição são expressos pelos estudiosos do assunto, entre estes encontram-se os seguintes:

Os sistemas de distribuição para os abastecimentos públicos de água são redes de tubos dentro das redes urbanas das cidades. As plantas das cidades, a topografia das mesmas, a localização das obras de abastecimento, junto com o armazenamento determinam o tipo de sistema de distribuição e o fluxo através do mesmo (FAIR, GEYER, OKUN, 1980).

Redes de Distribuição são tubulações que atendem aos diversos pontos de consumo de uma cidade (DACACH, 79).

São um conjunto de condutos assentes nas vias públicas, com a função de conduzir água para os prédios e pontos de consumo público (CETESB, 1976).

As redes de abastecimento, como dito anteriormente, dependem da forma da cidade, da topografia, entre outros fatores, podendo se apresentar como *redes ramificadas*, *redes malhadas* e *mistas*, dependendo das áreas a serem atendidas e disposições do arruamento, com reservatório a montante, a jusante ou com vários reservatórios intercalados dependendo das características próprias de pressão, localização, etc..

Assim sendo, pode ser mais econômico a construção de um reservatório para cada área, independentemente da localização de outros reservatórios em outras áreas da rede. Por isso, o projetista deve sempre fazer um estudo prévio da região onde será implantada a rede, observando suas características populacionais, geográficas, econômicas, entre outras, para que se conceba um projeto o mais adequado possível à região, com o menor custo.

O projetista face a um projeto de uma rede de distribuição ou a um projeto de uma complementação da rede existente, tem que selecionar a dimensão de seus componentes e definir a operação dos componentes, bombas e válvulas, que irão ser usados para garantir as demandas requeridas com pressões adequadas (ALPEROVITS, SHAMIR, 1977).

3.3 – Traçado dos Conduitos

As redes de distribuição de água podem conter, de acordo com o tamanho e características da cidade, tubulações principais e secundárias.

As tubulações principais são também denominadas de tubulações mestres ou tronco, sendo os condutos de maior diâmetro e responsáveis pela alimentação das tubulações secundárias. Já as tubulações secundárias são aquelas de menores diâmetros e servem para alimentar diretamente os prédios. As tubulações principais abastecem extensas áreas da cidade e as secundárias se restringem a áreas menores.

De acordo com o sentido de escoamento de água, as Redes de Distribuição classificam-se em:

3.3.1 – Redes Ramificadas (Figura 3.1);

3.3.2 – Redes Malhadas (Figura 3.2).

Figura 3.1 – Rede Ramificada

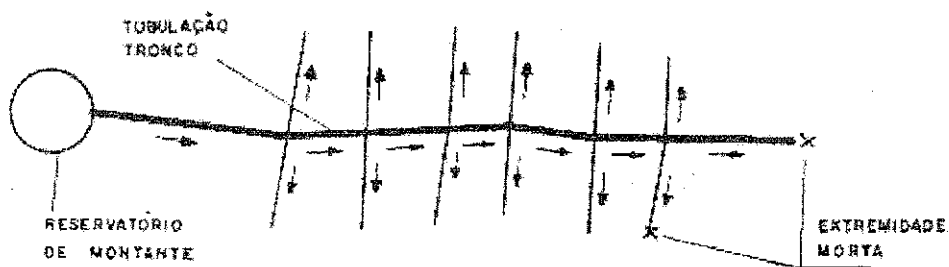
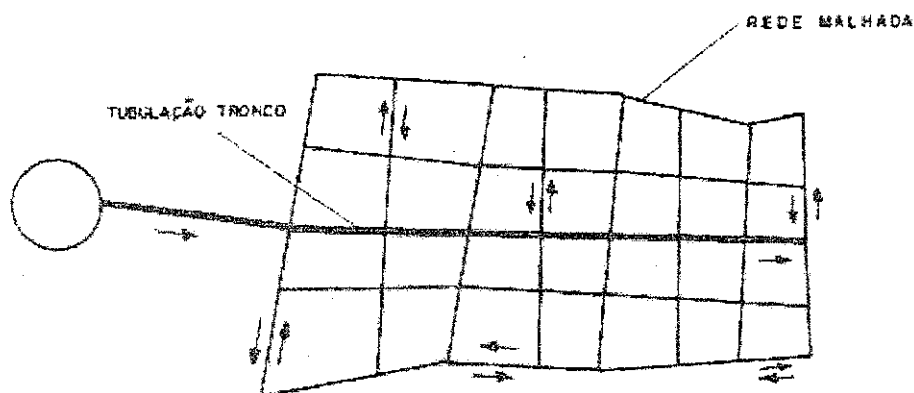


Figura 3.2 – Rede Malhada



3.3.1 – Redes Ramificadas

O seu uso é feito nas pequenas cidades que possuem um traçado praticamente linear. São também denominadas espinha de peixe, devido a disposição de suas tubulações, sendo formadas por uma tubulação principal (artéria), da qual partem tubulações transversais (secundárias). As mesmas têm como característica principal o único sentido do fluxo de água dentro dela, ou seja, do reservatório para a extremidade morta.

3.3.2 – Redes Malhadas

Em cidades maiores ou com distribuição geométrica pouco linear, faz-se o uso de redes malhadas, ou seja, aquelas cujos condutos formam verdadeiras malhas, onde a água dentro deles segue em qualquer sentido, em função da solicitação de consumo. Segundo FAIR e GEYER (1964) esta é a principal vantagem deste tipo de rede, pois segundo os mesmos, as redes malhadas têm a vantagem de conduzir água para qualquer ponto dentro da rede por diversos caminhos. Devido a essa possibilidade de abastecimento de determinado ponto por mais de um caminho, pode-se realizar um reparo ou manutenção em determinado trecho da rede, sem haver o prejuízo de abastecimento de um maior número de prédios, pois os prédios a jusante da manutenção serão abastecidos por outro caminho a ser seguido pela água.

Diferentemente das redes ramificadas, que possuem uma única tubulação tronco, as redes malhadas geralmente constituem-se de vários condutos principais, sendo que na maioria dos casos, estas tubulações principais formam um anel ou vários anéis, dependendo do tamanho da cidade.

3.4 – Rede Única e Dupla

As redes de distribuição de água podem distribuir apenas água potável em rede única ou em conjunto com água imprópria para beber em rede dupla (DACACH, 1979).

Para as cidades que possuem uma grande população e escassez de água potável, uma alternativa para as mesmas é a instituição de redes duplas, com o intuito de diminuir o uso de água de boa qualidade para outras finalidades que não necessariamente necessitariam deste tipo de água.

Nestes casos, tem-se uma tubulação responsável pelo transporte de água potável e outra tubulação transportando água destinada a uso que não requeira potabilidade da mesma, como para lavagem de calçadas, ruas, irrigação de hortas e jardins públicos, combate a incêndio, etc..

A não frequência do uso desta solução nas cidades, deve-se ao perigo de interconexões entre os tubos condutores de água potável com os condutores de água não potável. Este perigo torna-se maior quando os prédios são abastecidos pelas duas redes, ou seja, uma responsável pela água própria para consumo humano e culinário e outra para consumos diversos.

3.5 – Redes em Níveis Diferentes

Estes casos ocorrem, principalmente, em cidades em que o desnível topográfico entre suas localidades é bastante acentuado, fazendo com que em determinados trechos, de baixa cota, a pressão localizada nestes trechos seja altíssima, necessitando então da instalação de peças para diminuir esta pressão ou o reforço das tubulações ali instaladas.

Devido ao custo necessário para se conter estas altas pressões, podem-se utilizar redes diferentes, uma em cada zona de pressão, cada qual com seu reservatório, ou então, uma única rede abastecida com vários reservatórios interligados, utilizando-se, quando necessário, o uso de uma estação elevatória para ajudar a vencer o desnível do terreno e conseguir colocar água nos pontos mais desfavoráveis da rede com pressão suficiente para o abastecimento.

3.6 – Etapas da Elaboração de um Projeto de Redes de Distribuição

Para se fazer um projeto de redes de distribuição de água, é necessário atentar-se para diversos pressupostos básicos. Entre eles, é recomendado que seja feito um estudo de concepção do sistema de abastecimento como um todo, de acordo com a NBR 12211 (1992), que se defina as etapas de implantação e realize-se um levantamento planialtimétrico da área do projeto com detalhes do arruamento, tipo de pavimento, obras especiais, interferências e que se estude o plano de urbanização e legislação relativa ao uso e ocupação do solo.

Faz-se necessário também a realização de atividades iniciais referentes ao projeto, como a definição das etapas de execução da rede e das correspondentes vazões de distribuição para o dimensionamento, a delimitação do perímetro da área total a ser abastecida, dos contornos das áreas de mesma densidade demográfica e de mesma vazão específica, a delimitação das zonas de pressão, a fixação dos volumes dos reservatórios e a análise das instalações de distribuição existentes, objetivando o seu aproveitamento.

Com estas etapas realizadas traçam-se os condutos principais e secundários, dimensionam-se os mesmos, fazem-se os projetos dos setores de medição da rede e localizam-se e dimensionam-se os equipamentos acessórios da rede, com vistas ao planejamento dos setores de manobra.

3.6.1 – Delimitação do Perímetro da Área Abastecível

Inicialmente, para a determinação do respectivo perímetro devem-se definir os contornos das diferentes áreas específicas mediante amarração a logradouros, estradas, ou outros pontos de localização.

A área abastecível deve conter as diferentes áreas específicas do perímetro urbano atual e de expansão, de acordo com o plano diretor e, na falta deste, devem ser consideradas como áreas em expansão aquelas que apresentam possibilidade de desenvolvimento promissor.

3.6.2 – Demandas Máximas e Mínimas

Se não houvesse variações horárias no consumo, as redes de distribuição de água seriam dimensionadas para a demanda média do dia de consumo máximo. Como na realidade observam-se flutuações no decorrer do dia, forçosamente em certos períodos a demanda horária supera o seu valor médio ou é por este ultrapassada (DACACH, 1979).

As redes de distribuição levam água, basicamente, para os reservatórios dos prédios, que, por sua vez, abastecem o mesmo e, para os pontos de consumo público. Nestas condições, a vazão será aquela referente a uma particular situação desfavorável, que corresponde à hora de maior consumo do dia de maior consumo, ou seja:

$$Q = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot q \cdot P}{86400} \quad (3.1)$$

onde

P é a população prevista para a área a abastecer no fim do plano;

Q é a vazão em litros por segundo (l/s);

q é a cota *per capita*;

k_1 é o coeficiente do dia de maior consumo;

k_2 é o coeficiente da hora de maior consumo.

A vazão específica, ou seja, a vazão a partir da qual serão determinadas as vazões de dimensionamento para atender a uma área específica, pode referir-se a extensão dos condutos da rede ou a área da cidade.

No caso de adotar-se a vazão específica referente à extensão dos condutos na rede, tem-se a denominada vazão em marcha:

$$Q_{\text{marcha}} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot q \cdot P}{86400 \cdot Lt} \quad (3.2)$$

sendo

Lt o comprimento total da rede em metro (m).

Caso seja adotada a vazão de distribuição referida à unidade de área, tem-se:

$$Q_{\text{área}} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot q \cdot P}{86400 \cdot A} \quad (3.3)$$

sendo

A a área abrangida pela rede a ser dimensionada.

Faz-se necessário conhecer também as demandas mínimas horárias, principalmente quando se trabalha com reservatório de jusante ou com vários reservatórios abastecendo a rede ao mesmo tempo no período de demanda máxima e, sendo abastecidos, no período de demanda mínima.

No caso de reservatório a jusante, a justificativa de se conhecer a demanda mínima é semelhante ao caso de dois ou mais reservatórios abastecendo a rede concomitantemente e abastecidos pela estação elevatória. A diferença é que no caso de reservatório a jusante só existe um reservatório que abastece a cidade. Porém a sua localização é tal que a adutora que transporta água para o mesmo atravessa a cidade para atingir o seu fim. Neste trajeto, ela abastece a rede, no período de demanda máxima, e no período de demanda mínima abastece o reservatório conjuntamente com a rede.

Pode-se também ter reservatório de jusante sendo abastecido por outro reservatório de montante, o qual no período de demanda máxima abastece a rede de distribuição, conjuntamente com o reservatório de jusante, e no período de demanda mínima abastece também o reservatório de jusante.

Um outro fator que leva à necessidade da determinação da demanda mínima é o fato de que quando é feito o dimensionamento de uma rede de distribuição de água através do processo de otimização, tem-se como resultado uma diminuição dos valores

dos diâmetros à medida que se distanciam da fonte de abastecimento, chegando no ponto de maior distância da fonte com os mais baixos valores possíveis. Sendo assim, se apenas fosse realizado o dimensionamento levando-se em consideração a máxima demanda horária, poder-se-ia chegar a um diâmetro tal, que quando estivesse no período de demanda mínima em que outro reservatório, localizado nas proximidades do ponto de maior distância da fonte, tivesse que ser abastecido, poder-se-ia encontrar perdas de carga altíssimas em que não seria possível superá-las, devido aos baixos valores de diâmetros encontrados no dimensionamento com demanda máxima, fazendo com que não se conseguisse abastecer o reservatório em questão, prejudicando assim o funcionamento da rede, que conta no período de demanda máxima com todas as fontes abastecendo-a ao mesmo tempo.

Com o exposto acima, torna-se evidente que o cálculo das pressões, na hora de consumo máximo, definirá para o reservatório uma cota diferente da que ele deveria ter na hora de consumo mínimo. Como a cota do reservatório só pode ser uma, na realidade o que ocorre é a variação do nível da água em seu interior. Quando essa variação por si só não é suficiente para vencer a diferença entre as duas cotas calculadas, o funcionamento dos conjuntos elevatórios será alterado, o que não deve ocorrer. Isto é evitado com o uso de chaminés de equilíbrio com altura suficiente para permitir a variação de pressão dinâmica na rede.

3.7 – Componentes da Rede de Distribuição

Os típicos componentes de uma rede segundo WALSKI (1990) incluem:

a – Tubulações: são os componentes mais conhecidos de uma rede de distribuição de água. Dependendo da dimensão e de fatores como distância do fabricante, custo disponível, etc. os tubos podem ser dos mais variáveis tipos de materiais, como o PVC, o PP , concreto, entre outros.

b – Reservatórios: sobre este item ver comentário no capítulo II.

c – Bombas: as bombas são dispostas na estação elevatória, tendo como função mais comum, o abastecimento dos reservatórios localizados na rede de distribuição. Só que, em alguns casos, as bombas contribuem diretamente para o abastecimento da rede de distribuição de água, como, por exemplo, quando se trata de reservatório de jusante.

Em locais onde há carência de mananciais de superfície livre ou com pouca disponibilidade de água, faz-se uso de mananciais subterrâneos, os quais são utilizados para complementar o abastecimento deficiente, fazendo com que a(s) bomba(s) utilizada(s) para a sucção da água do mesmo lance(m), a água retirada, diretamente na rede de distribuição, suprindo, assim, a deficiência no abastecimento.

d – Válvulas: as válvulas servem para controlar o fluxo de água no interior das tubulações da rede de distribuição, ou reduzir as pressões na mesma, sendo que umas garantem a segurança da instalação e outras permitem desmontagens para reparos ou substituições de elementos da instalação. Válvulas que requerem uma atenção considerável são as válvulas de controle e as válvulas de redução de pressão (em alguns sistemas, o principal componente de redução de pressão do mesmo é esta válvula), apesar de ser conhecido um número bem maiores de válvulas.

e – Nós: o nó não é uma peça da rede, mas um local que serve para indicar algumas características da mesma. Os nós podem estar localizados em qualquer ponto da mesma. Porém, para não dificultar os cálculos computacionais, principalmente quando se está otimizando, costuma-se colocá-los nas interseções dos tubos, nas mudanças de diâmetros, onde estejam localizados consumidores especiais, no final de redes ou nos chamados pontos mortos, onde se queira medir a carga, e nos reservatórios. Os nós são conectados por segmentos de tubos, mas também podem ser válvulas reguladoras de pressão ou bombas (WALSKI, 1990).

3.8 – Dimensionamento Tradicional de Redes de Distribuição de Água

Existem vários métodos de dimensionamento de redes de distribuição de água, entre eles os seguintes:

3.8.1 – Seccionamento Fictício – como o próprio nome sugere, este método consiste em uma transformação de uma rede malhada em outras ramificadas. Isto ocorre através de pontos de seccionamento os quais dão origem às extremidades livres, que na realidade não existem, ou seja, são fictícias. A escolha do ponto de seccionamento ocorre levando-se em consideração o percurso da água dentro da rede, ou seja, tomando-se por base o menor percurso da água até eles, a partir do ponto de

alimentação. Este dimensionamento ocorre seguindo-se determinadas regras, quais sejam:

a) Traçam-se na cópia da planta das cidades, as tubulações da rede, devendo as mesmas coincidir com o eixo das ruas, a não ser que se tenham construções em um só lado da rua, que a mesma seja muito larga, a ponto de tornar mais econômico o uso de duas tubulações, ao invés de uma.

b) Determinam-se os comprimentos de todos os trechos da rede, sendo os mesmos limitados pelos nós da mesma.

c) Calculam-se, com base nas curvas de nível de metro em metro, as cotas topográficas dos cruzamentos e das extremidades livres.

d) Transforma-se a rede malhada em rede ramificada, tendo em vista que, a partir da cota de cabeceira, faz-se com que todos os pontos de cruzamento e extremidades livres da rede sejam atingidos pelo menor percurso possível da água, desenhando-se uma seta indicando o sentido da água, bem como um pequeno traço cortando a extremidade de jusante no trecho que for seccionado para indicar que essa extremidade funciona como se fosse livre;

e) Numeram-se todos os trechos de acordo com o sentido crescente das vazões;

f) Elabora-se uma planilha que conste os dados, para cada trecho, de comprimento e cotas topográficas;

g) Calcula-se, na planilha, a vazão de montante, somando-se a vazão de jusante com a da distribuição na tubulação (em marcha), sendo iniciado nas extremidades livres, pois nestes locais a vazão de jusante é nula. A vazão de distribuição em marcha é obtida multiplicando-se o comprimento do trecho pela vazão unitária de distribuição, expressa em litros por segundo por metro.

h) Calcula-se a vazão fictícia de dimensionamento para cada trecho, como sendo a semi-soma da vazão de jusante e de montante;

i) Em função da vazão fictícia e de uma velocidade admissível, tem-se para cada trecho, o diâmetro correspondente, de acordo com a Tabela 3.1:

Tabela 3.1 – Relação entre velocidades máximas e diâmetros admissíveis

| Diâmetro (mm) | Velocidade Máxima (m/s) | Vazão Máxima (l/s) |
|------------------|-------------------------------|--------------------------|
| 50 | 0,60 | 1,20 |
| 75 | 0,70 | 3,20 |
| 100 | 0,75 | 6,10 |
| 125 | 0,80 | 10,40 |
| 150 | 0,80 | 14,60 |
| 200 | 0,90 | 29,20 |
| 250 | 1,00 | 50,70 |
| 300 | 1,00 | 72,82 |
| 350 | 1,10 | 109,18 |

j) Encontrada a vazão fictícia em cada trecho e com o comprimento dos mesmos, determina-se a perda de carga nos trechos.

k) Limita-se a pressão em cada nó da rede de acordo com a Norma de Redes de Distribuição de Água (NBR-12218, 1992).

l) A partir da cota piezométrica do ponto mais desfavorável, calculam-se as cotas piezométricas de montante e de jusante de cada trecho, com base nas perdas de carga pré-definidas. As pressões dinâmicas em cada trecho são a diferença entre a cota piezométrica e a cota do terreno. No final da operação, ficará definido o nível médio de água do reservatório, que corresponde à cota piezométrica de montante do trecho de número mais elevado.

m) Verificam-se, para cada nó, onde houve seccionamento de um ou mais trechos, as diferentes pressões resultantes de percursos diversos da água e determina-se a média, da qual nenhuma pressão deve se afastar além de 10 %.

n) Altera-se o traçado da rede, o seu seccionamento ou o diâmetro de algumas tubulações, se o afastamento considerado na formulação acima, superar os 10 %, bem como se as pressões máximas e mínimas preestabelecidas forem superadas, ou se for impraticável a localização do reservatório numa cota definida pelo cálculo.

o) - Anotam-se no esboço da rede o diâmetro e a vazão fictícia de dimensionamento dos trechos.

3.8.2 – O método de Hardy Cross – Hardy Cross introduziu um método de tentativa e erros, com aproximação satisfatória, que permite definir as vazões nos diversos trechos.

Para o correto entendimento do método faz-se necessário a compreensão dos seguintes fundamentos hidráulicos:

I – Em um nó qualquer da rede, a soma algébrica das vazões que nele afluem e efluem é nula, ou seja, a soma das vazões que entram no nó é igual a soma das vazões que dele saem, sendo consideradas positivas as vazões que entram e negativas as vazões que saem do nó;

II – Em um anel qualquer da rede, a soma algébrica das perdas de carga é nula, considerando-se positivas as perdas de carga que coincidirem e negativas as perdas de carga que não coincidirem com um prefixado sentido de caminhamento no anel.

Para uma dada rede com diâmetros conhecidos, as teorias acima explicadas, exprimem as condições necessárias e suficientes para que a distribuição de vazões e perdas de carga, previstas no cálculo, coincidam com a distribuição de vazão e perdas de carga que realmente se verificará quando a mesma for posta em funcionamento.

Para efeito de projeto, pode-se admitir que a distribuição de água em marcha, seja substituída por tomadas localizadas em pontos fictícios isolados, adequadamente situados na tubulação, como explicado no item 4.6.5. Nestas condições, considerar-se-á uma vazão uniforme escoando em cada trecho da tubulação.

Denomina-se **Ponto Morto** o ponto em cuja direção a água se dirige por dois caminhos opostos e no qual a velocidade é nula. Em um ponto morto a pressão é uma só, não importando de onde provenha a água.

O método de Hardy Cross consiste em uma seqüência de passos a ser seguida:

a) Encontra-se a vazão específica de distribuição, advindo da divisão da vazão máxima horária pela área a ser abastecida, ou seja, $q = \frac{Q_{\text{máx.horária}}}{A}$ (3.4)

onde

q é a vazão específica de distribuição (l/s.ha);

$Q_{\text{máx.horária}}$ é a vazão máxima horária (l/s);

A é a área abastecível (ha).

b) Realiza-se o lançamento da rede definindo-se os anéis, os nós, adotando-se o sentido de escoamento para o fluxo de água nestes anéis, a partir dos reservatórios ou bombas, e um sentido como positivo a ser considerado no cálculo. As vazões de carregamento nos nós serão responsáveis pelo abastecimento das áreas respectivas;

c) Determinam-se as sub áreas a serem abastecidas pelos nós respectivos;

d) Calculam-se as vazões de carregamento dos nós multiplicando-se a vazão específica de distribuição (q) pela área correspondente ao nó n , definem-se os diversos consumos que devem ser atendidos pela vazão global de alimentação;

e) Escolhe-se criteriosamente a posição do ponto morto;

f) Determinam-se as vazões em cada trecho a partir do ponto morto, respeitando o primeiro princípio de dimensionamento, ou seja, equação da continuidade, adotando o sinal algébrico para cada vazão nos trechos, em função do sentido adotado;

g) Definem-se os diâmetros dos diversos trechos com base nos limites de velocidade ou na limitação das cargas disponíveis;

h) Calcula-se a perda de carga para cada trecho, considerando-a com o mesmo sinal adotado para a vazão;

i) Somam-se as perdas de carga calculadas para todos os trechos do anel. Se a distribuição inicial de vazões no anel corresponder a definitiva, a soma das perdas de carga é nula, indicando a dispensa de qualquer correção das vazões. Se a soma das perdas de carga no anel resultar em um valor diferente de zero, como normalmente ocorre na primeira tentativa, deve-se introduzir uma correção (Δ) nos valores preestabelecidos para as vazões, com a finalidade de corrigi-las e, assim, obter-se o resultado nulo da soma das perdas de carga. Para a fórmula de Hazen-Williams tem-se que

$$\Delta = \frac{-\sum h}{\sum \left(\frac{1,85 \cdot h}{Q_0} \right)} \quad (3.5)$$

j) Determinados os valores finais de Q e D , calculam-se os demais elementos como a velocidade, a cota piezométrica e as pressões disponíveis, do mesmo modo que realizado para o método do seccionamento fictício.

Existem outros métodos de dimensionamento de redes de distribuição de água, como o método dos tubos equivalentes, da analogia elétrica, dentre outros. Porém, os mais utilizados de forma convencional são os expostos anteriormente.

Capítulo IV

Otimização de Redes de Distribuição de Água

4.1 – Introdução

Otimizar significa encontrar, dentre várias soluções possíveis de determinado sistema, a melhor delas, tendo em vista o objetivo desejado, ou seja, o objetivo da otimização é encontrar a melhor solução entre todas as soluções de um determinado problema.

Problemas que procuram maximizar ou minimizar uma função numérica de uma ou mais variáveis (ou funções), onde as variáveis (funções) estão sujeitas a determinadas restrições, podem ser denominados de problemas de otimização (FRITZCHE, 1978).

Os problemas de otimização normalmente encarregam-se de alocar recursos escassos (mão de obra, matéria prima, etc.) na produção, tal que os produtos obedeçam a determinadas especificações técnicas (conteúdo de matérias primas, utilização de certos equipamentos, etc.), observem certas restrições como a disponibilidade de tempo de máquina e a capacidade de aceitação do mercado consumidor, e tentam maximizar ou minimizar uma função que representa o objetivo almejado como o lucro ou o custo. Esta função é denominada Função Objetivo.

Portanto, um problema de otimização consiste em, inicialmente representar o sistema estudado como um conjunto de funções (equações e inequações) matemáticas que, após formuladas, serão otimizadas. Com isso, tem-se que o problema maximiza ou minimiza uma função representativa do objetivo desejado, obedecendo a um conjunto de restrições impostas a essa função. Essas restrições delimitam um espaço que deve conter todas as possíveis soluções do problema. Este espaço delimitador denomina-se região

factível ou viável. A solução viável que otimiza a função objetivo denomina-se Solução Ótima.

Segundo Mateus e Luna (1986) até os anos 40 muito pouco era conhecido sobre métodos para a otimização numérica de funções de muitas variáveis. Com a evolução da informática ocorreu o desenvolvimento de métodos de otimização, desenvolvidos inicialmente para fins de logística militar.

Assim, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos computadores, várias pesquisas na área de otimização econômica, em particular, em sistemas de abastecimento de água, têm sido desenvolvidas. Este trabalho é o resultado de mais uma destas pesquisas, em que se aplica uma metodologia desenvolvida para o dimensionamento de redes de distribuição de água abastecidas com um ou múltiplos reservatórios (FORMIGA, 1999), modificando a mesma para uma condição de funcionamento em que a rede é abastecida, simultaneamente, por múltiplos reservatórios, bombas e boosters.

Sabe-se que o dimensionamento de redes de distribuição de água consiste, basicamente, na determinação de diâmetros e vazões das tubulações que satisfaçam determinadas condições físicas do escoamento. Com o advento e maior acessibilidade do computador, torna-se possível a introdução de outros critérios no dimensionamento de redes de distribuição de água, como a introdução do custo mínimo de investimento e de operação da rede.

Devido ao aumento na urbanização das cidades, começou-se a pensar em dimensionamento econômicos de redes de distribuição de água (HAMBERG e SHAMIR, 1988).

Nos anos mais recentes, um grande número de pesquisas tem-se realizado na área de otimização de dimensionamento e operação de redes de distribuição de água, ou seja, realizando-se seleções de tubos, bombas e válvulas da rede, com o objetivo de, satisfazendo todas as restrições impostas ao problema, obter-se o dimensionamento com o menor custo possível da mesma.

Segundo MORGAN (1985) a pesquisa para metodologias para otimização de redes de distribuição de água, tem recebido considerável atenção há aproximadamente 30 anos, com os primeiros trabalhos realizados por KARMELLI et al.(1968), , WATENADA (1973), , ALPEROVITS e SHAMIR (1977), entre outros.

Uma extensa descrição de trabalhos na área de otimização foi descrita pelo comitê de trabalho em risco e reabilitação de sistemas de distribuição de água da ASCE (MAYS, 1989).

Os primeiros estudos foram, em particular, aqueles realizados com redes ramificadas, em que era assumido um dado layout para a rede e, então, projetavam-se os componentes da rede com base no layout assumido (MORGAN, 1985).

Alperovits e Shamir (1977) analisaram redes de distribuição de água dispostas em anéis, desenvolvendo um método que dimensionava os componentes da rede e impunha as decisões da operação para as bombas e válvulas sobre condições de carga. O método não podia detalhar a seqüência de operação do sistema diariamente.

Morgan e Goulter (1982) desenvolveram um modelo utilizando duas ligações de programas lineares para resolver o layout de menor custo e projetar o sistema de anéis. Segundo este modelo, um programa linear resolve o layout, enquanto o outro determina o menor custo do tamanho dos componentes.

Gessler e Walski (1985) desenvolveram um método de enumeração heurística o qual é unido com um modelo de simulação hidráulica.

Granados (1990) desenvolveu um algoritmo iterativo que fornece o menor custo de uma rede ramificada de distribuição de água através da redução dos excessos de pressão existentes na rede. Granados desenvolveu este método baseado na programação dinâmica.

Afora os métodos de dimensionamento que utilizam técnicas de otimização, não se pode deixar de ser lembrado os métodos de dimensionamentos de redes de distribuição tradicionais, que levam em conta o balanceamento hidráulico da rede, de forma a atender às condições impostas pelas equações da conservação de massa nos nós e a conservação de energia nos anéis, os quais foram e são muito úteis no desenvolvimento de novas tecnologias para a obtenção de um melhor dimensionamento possível.

Até o presente momento, a metodologia utilizada na realização deste trabalho, só foi testada em redes malhadas com um ou múltiplos reservatórios (FORMIGA, 1999), sem ser levado em conta a aplicação de energia de bombeamento dentro da rede e para o interior da mesma.

Assim, quando na análise do sistema existe o interesse em otimizar o processo decisório de acordo com uma valoração estabelecida pela função objetivo, devem ser

aplicadas técnicas de otimização. Dentre as mais diversas técnicas existentes comentar-se-á, a seguir, brevemente as mais utilizadas.

4.2 – Técnicas de Enumeração Exaustiva

Consiste na utilização de um modelo de simulação para enumerar exaustivamente as alternativas decisórias, por exemplo, diâmetros das tubulações, de modo a ser possível identificar-se o ótimo.

A desvantagem deste método reside na quantidade de cálculos envolvidos na obtenção do custo ótimo.

Gessler (1990) propôs diretrizes a serem seguidas para fazer reduzir a quantidade de cálculos envolvida na obtenção do custo ótimo. São elas:

- I - limitar trechos com diâmetros constantes;
- II - eliminar as combinações mais caras;
- III - eliminar as soluções que resultem em violação das restrições das pressões e, conseqüentemente, aquele conjunto de soluções que utilizem diâmetros inferiores àqueles que resultaram violação das restrições das pressões.

Apesar destas diretrizes, Simpson et al (1994) mostraram que a técnica ainda tomava muito tempo e não se podia afirmar que entre as alternativas descartadas a solução ótima não se encontrava inserida nela.

4.3 – Programação Linear

Segundo Barbosa (1997) a programação linear é a técnica mais conhecida e usada na solução de problemas de otimização.

Esta técnica surgiu aproximadamente em 1947, para resolver problemas de logística militar.

Dentre as diversas técnicas de programação linear para a otimização de sistemas de distribuição de água, o Gradiente de Programação Linear é considerada a técnica de maior

avanço. Esta técnica foi proposta inicialmente por Alperovits e Shamir (1977), consistindo em um dimensionamento de redes de distribuição de água onde se considera algumas variáveis como constantes e outras como variáveis de decisão a serem dimensionadas através da programação linear.

A principal desvantagem da programação linear é que as equações que representam o sistema e serão otimizadas têm que ser lineares, o que normalmente não ocorre na prática.

4.4 – Programação Dinâmica

É uma técnica de otimização aplicada a problemas com decisões seqüenciais, ou seja, problemas que podem ser vistos como processos de decisão seqüencial em vários estágios, sendo estágios, pontos do processo no qual deve ser feita uma decisão.

Na resolução da programação dinâmica, divide-se o problema em estágios. Determina-se o ótimo em cada estágio, relacionando o ótimo de um estágio a outro, através de uma função recursiva e percorrendo todos os estágios para assim determinar o ótimo global.

A principal desvantagem da programação dinâmica é a denominada “praga da dimensionalidade” (Belman, 1957), ou seja, são aquelas situações em que a discretização das variáveis de estado é muito elevada, dificultando assim, a busca do ótimo, dado ao grande número de possibilidades que devam ser analisadas em cada estágio.

Exemplos deste método podem ser encontrados nos estudos de Mombaliu et al. (1990), Leal e Gomes (1997), entre outros.

4.5 – Programação Não Linear

Devido a não linearidade encontrada nos modelos matemáticos que representam os processos físicos envolvidos, foi e estão sendo desenvolvidas várias técnicas de programação não linear.

Existem vários pacotes de otimização, dentre eles, tem-se o GINO (Liebman et al., 1986), GAMS (Brooke et al., 1988), MINOS (Murtagh, 1987), etc. sendo todos usuários da

técnica do gradiente reduzido generalizado (Abadie e Carpentier, 1969) para a configuração ótima do problema. A partir destes pacotes vários pesquisadores desenvolveram aplicações da otimização não linear para a resolução de problemas relativos a redes de abastecimento de água, entre eles, El-Baharawy and Smith (1985, 1987), Su et al (1987), Duan et al. (1990), Lansey et al. (1989), Silva (1997), Cirilo (1997).

Por não se desejar nenhuma simplificação no problema, como ocorre na programação linear, optou-se neste trabalho pelo uso da programação não linear, com o uso do algoritmo GRG-2, baseado no algoritmo GRG, inserido na planilha eletrônica do EXCEL[®], ao invés de outros pacotes, pois a planilha eletrônica é mais fácil de manusear quando comparada com os outros pacotes operacionais.

Sobre a programação não linear o capítulo V será destinado unicamente para descrevê-la.

CAPÍTULO V

A Programação Não Linear

5.1 – Introdução

O presente capítulo aborda o caso em que se deseja otimizar problemas formulados por expressões matemáticas não lineares através de programação não linear.

Cirilo (1997) caracteriza um problema de programação não linear da seguinte forma:

Minimizar (maximizar) $f(\mathbf{X})$

sujeito a

$$g_i(\mathbf{X}) < 0 \text{ (ou } > 0) \quad i = 1, 2, \dots, s_1 \quad (5.1)$$

$$h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, s_2 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{X}^{\min} < \mathbf{X} < \mathbf{X}^{\max} \quad (5.3)$$

onde

$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_r]^T$ é um vetor contendo n variáveis, denominadas variáveis de decisão cujos valores ótimos se busca determinar;

$F(\mathbf{X})$ é denominada função objetivo, cujo valor se pretende maximizar ou minimizar;

$g_i(\mathbf{X})$ são restrições de desigualdades e de igualdades a serem atendidas;

\mathbf{X}^{\min} e \mathbf{X}^{\max} são valores mínimos e máximos que podem ser assumidos pelas variáveis de decisão.

A programação não linear representada acima, ou seja, com restrições à função objetiva, é denominada de programação não linear restrita devido às restrições

impostas às variáveis da função objetivo. Ocorre também que, às vezes, a função objetivo a ser minimizada não possui restrições, sendo denominada de programação não linear irrestrita.

5.2 – Conceitos e Teoremas

Para uma melhor compreensão da programação não linear, faz-se necessário o conhecimento de certos conceitos e determinados teoremas que regem a otimização de funções com uso da programação não linear.

5.2.1 – Mínimo e Máximo local e global

Cirilo (1997) analisa e define estes conceitos da seguinte maneira:

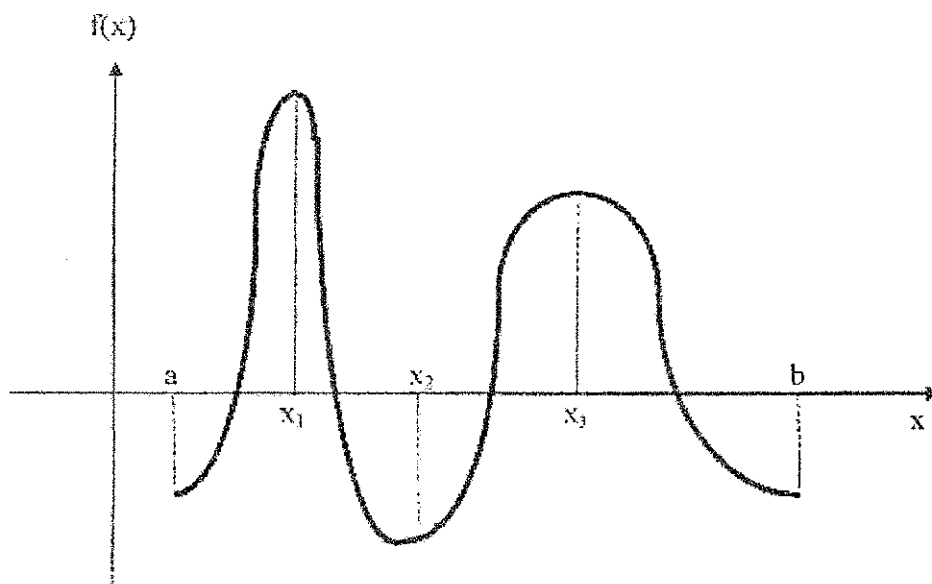
Seja o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Otimizar (maximizar ou minimizar) } f(\mathbf{X}) \\ \text{sujeito a} & a \leq \mathbf{X} \leq b \end{array} \quad (5.4)$$

Se, para um dado valor X_0 existir um intervalo centrado nesse ponto, tal que $f(\mathbf{X}) \geq f(X_0)$ para todo valor de \mathbf{X} deste intervalo, diz-se que X_0 é um mínimo local de $f(\mathbf{X})$.

Porém, se $f(\mathbf{X}) \geq f(X_0)$ para todo \mathbf{X} onde a função é definida, diz-se que X_0 é um mínimo global de $f(\mathbf{X})$. Da mesma forma, aplica-se esta definição para máximo local e global, utilizando-se a desigualdade oposta (Figura 5.1).

Figura 5.1 – Pontos de Máximos e Mínimos



Se da análise realizada resultar-se em apenas um ótimo, tem-se uma função unimodal e este ótimo é o denominado ótimo global. Contudo, se houver vários ótimos, tem-se uma função multimodal em que estes ótimos são denominados ótimos locais, sendo que destes ótimos locais, tem-se um ótimo global apenas, para máximo e mínimos respectivamente.

Para um melhor entendimento do problema, são enunciados três teoremas do cálculo diferencial, quais sejam:

Teorema 1: se $f(X)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ então $f(X)$ possui ótimos globais neste intervalo;

Teorema 2: se $f(X)$ possui um ótimo local em X_0 e é derivável em um pequeno intervalo centrado em X_0 , então $f'(X_0) = 0$;

Teorema 3: se $f(X)$ possui derivada de 2ª ordem em um pequeno intervalo centrado em X_0 , se $f'(X_0) = 0$ e $f''(X_0) > 0$, então $f(X_0)$ é mínimo local. Se $f'(X_0) = 0$ e $f''(X_0) < 0$, então $f(X_0)$ é um máximo local.

Conclui-se, da análise dos dois primeiros teoremas que, se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então a solução ótima ocorre onde $f'(X)$ é nula, ou ainda, nos limites do intervalo ($x = a$ ou $x = b$).

Os teoremas impostos anteriormente aplicam-se de forma semelhante à funções de mais de uma variável.

5.2.2 – Convexidade e Concavidade

O objetivo da definição de função convexa ou côncava está em que os métodos de otimização de uma função unimodal asseguram a obtenção do ótimo global apenas quando a função objetivo é côncava ou convexa. Daí a importância da definição de função côncava e convexa.

Uma função é dita convexa se para cada par de valores x' e x'' obedecer-se à seguinte expressão:

$$f[\theta x'' + (1 - \theta) x'] \leq \theta f(x'') + (1 - \theta) f(x') \quad (5.5)$$

onde

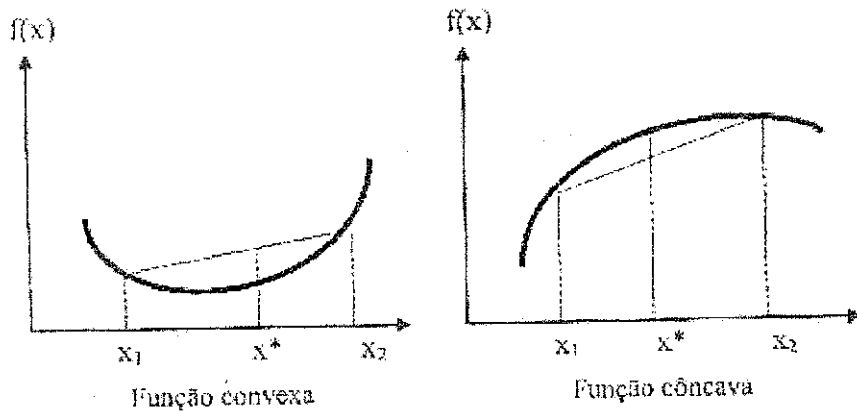
θ é um escalar compreendido no intervalo $0 \leq \theta \leq 1$;

A função é estritamente convexa se o sinal \leq puder ser substituído por $<$.

Será côncava a função (ou estritamente côncava) se a afirmação acima valer quando trocarmos \leq por \geq (ou $>$).

Na função convexa o segmento de reta que une os pontos $f(x')$ e $f(x'')$ está sempre acima de $f(x)$, exceto nos pontos $f(x')$ e $f(x'')$, enquanto na função côncava está abaixo (Figura 5.2).

Figura 5.2 – Gráficos de Funções Convexas e Côncavas



A idéia de segmento de reta pode ser estendida para o espaço n dimensional.

Assim, o segmento de linha reta unindo dois pontos

$$x' = (x_1', x_2', \dots, x_n') \text{ e,} \quad (5.6)$$

$$x'' = (x_1'', x_2'', \dots, x_n'') \quad (5.7)$$

é a coleção de pontos

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\theta x_1'' + (1 - \theta)x_1', \theta x_2'' + (1 - \theta)x_2', \dots, \theta x_n'' + (1 - \theta)x_n'] \quad (5.8)$$

onde

$$0 \leq \theta \leq 1 \quad (5.9)$$

O conceito de funções côncavas e convexas pode ser estendido para o espaço $(n + 1)$ dimensional, se substituir-se $f(\mathbf{X})$ por $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e, mantiverem-se as definições acima, trocando em todo local \mathbf{X} por (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Também observa-se que para funções de uma só variável, tem-se:

$$(a) \text{ uma função é convexa quando } \frac{d^2 f}{dx^2} \geq 0 \quad (5.10)$$

$$\text{e, estritamente convexa, quando } \frac{d^2 f}{dx^2} > 0; \quad (5.11)$$

$$(b) \text{ uma função é côncava quando } \frac{d^2 f}{dx^2} \leq 0 \quad (5.12)$$

e, estritamente côncava, quando $\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$. (5.13)

Assim como a derivada segunda, quando existente em todo espaço, pode ser utilizada para verificar se uma função de uma única variável é convexa ou não, as derivadas segundas parciais podem ser empregadas para verificar se uma função de diversas variáveis é convexa ou não.

Portanto, em funções de várias variáveis, faz-se necessário que se satisfaçam as seguintes condições para que se garanta a convexidade:

$$\frac{\delta^2 f(x_1, x_2)}{\delta x_1^2} \cdot \frac{\delta^2 f(x_1, x_2)}{\delta x_2^2} - \left[\frac{\delta^2 f(x_1, x_2)}{\delta x_1 \cdot \delta x_2} \right]^2 \geq 0; \quad (5.14)$$

$$\frac{\delta^2 f(x_1, x_2)}{\delta x_1^2} \geq 0; \quad (5.15)$$

$$\frac{\delta^2 f(x_1, x_2)}{\delta x_2^2} \geq 0. \quad (5.16)$$

Se os sinais de \leq ou \geq puderem ser trocados pelos sinais de $<$ ou $>$ a função será estritamente côncava ou convexa respectivamente.

Uma outra maneira de se escreverem as condições acima colocadas, advém da matriz Hessiana. Por isso, faz-se necessário conhecer o que vem a ser matriz Hessiana.

5.2.3 – Matriz Hessiana

Seja $f(\mathbf{X})$ continuamente diferenciável de 2ª ordem. Uma matriz Hessiana é uma matriz quadrática simétrica de derivadas segundas de $f(\mathbf{X})$.

Portanto, tem-se:

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \cdot \delta x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \cdot \delta x_1} & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Seja $H(\mathbf{X}^*)$ o valor da matriz Hessiana no ponto \mathbf{X}^* e seja $\mathbf{X} \neq 0 \in \mathfrak{R}$ um vetor, então, tem-se as seguintes definições:

- (a) Se $\mathbf{X}^T H \mathbf{X} > 0$ diz-se que a matriz Hessiana é dita definida positiva;
- (b) Se $\mathbf{X}^T H \mathbf{X} \geq 0$ diz-se que a matriz Hessiana é dita semidefinida positiva;
- (c) Se $\mathbf{X}^T H \mathbf{X} < 0$ diz-se que a matriz Hessiana é dita definida negativa;
- (d) Se $\mathbf{X}^T H \mathbf{X} \leq 0$ diz-se que a matriz Hessiana é dita semidefinida negativa.

Então, se a matriz Hessiana de uma função for definida positiva, tem-se que a função é convexa.

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for uma função convexa, então $-f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função côncava e vice-versa (EHRlich, 1985).

Tem-se também que a soma de duas funções convexas é convexa (EHRlich, 1985).

Com a explicação anterior, conclui-se que se a matriz Hessiana de determinada função não for semidefinida positiva para determinado ponto, tem-se que a mesma não é convexa, não possuindo portanto, no ponto proposto, ponto de mínimo. Em um outro ponto qualquer, a função pode ser convexa, de modo que é preciso se analisar as condições de segunda ordem no intervalo inteiro de definição da função, para se ter a certeza de que a mesma é convexa em todo intervalo e, ver se existe um mínimo global, ou se é convexa tão somente em torno de um ponto e atingir-se um mínimo local.

Antes de adentrar no estudo dos métodos de resolução da programação não linear, é necessário fazer relembrar alguns teoremas do cálculo diferencial que serão úteis na compreensão dos métodos, quais sejam (FORMIGA, 1999).

Teorema 4: se $f(\mathbf{X})$ é uma função contínua, definida em uma região fechada e limitada, então essa função apresenta um máximo e um mínimo nesta região;

Teorema 5: se $f(\mathbf{X})$ apresenta um máximo e um mínimo local em \mathbf{X}^* e se o gradiente de $f(\mathbf{X})$ existe na vizinhança de \mathbf{X}^* , então o gradiente de $f(\mathbf{X}^*)$ é nulo;

Teorema 6: se $f(\mathbf{X})$ possui derivadas parciais de segunda ordem na vizinhança de \mathbf{X}^* e ainda o gradiente de $f(\mathbf{X}^*)$ é nulo, como também a matriz Hessiana for definida negativa (côncava), então $f(\mathbf{X})$ possui máximo local em \mathbf{X}^* . Se a Hessiana for definida positiva (convexa), então $f(\mathbf{X})$ possuirá mínimo local em \mathbf{X}^* .

De acordo com Cirilo (1997), tem-se que dos teoremas 4 e 5 a função contínua assume ótimos nos pontos em que o gradiente da função é nulo ou inexistente.

Como se observa nos teoremas descritos anteriormente, foi descrito um termo denominado de gradiente da função. Portanto, para que os teoremas sejam melhores compreendidos, faz-se necessário que se defina este termo.

5.2.4 – Vetor Gradiente

O gradiente de uma função em qualquer ponto x , supondo um ponto $x = x^*$, é o vetor cujos elementos são as respectivas derivadas parciais, calculadas em $x = x^*$, de modo que

$$\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \text{ em } x = x^* \quad (5.18)$$

ou em forma matricial tem-se:

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Em outras palavras, o gradiente é um vetor cuja direção indica a direção na qual o campo escalar aumenta mais rapidamente. Suponha, por exemplo, que estando-se em um dado ponto de um campo de temperatura e desejando-se seguir para onde a temperatura aumenta mais rapidamente, basta tomar a direção do gradiente neste ponto. Movendo-se na direção oposta ao gradiente, ou seja, na direção do gradiente negativo, a temperatura diminuirá mais rapidamente (MUNEM-FOULIS, 1986).

Conclui-se que para a existência do vetor gradiente de uma função $f(\mathbf{X})$ faz-se necessário que esta função seja diferenciável.

Tem-se, então, que o gradiente é muito importante na resolução de problemas de otimização pois o mesmo fornece a direção ao longo do qual uma pequena variação em x fornece a maior variação em $f(x)$, ou seja, como anteriormente colocado, aponta a direção de crescimento da função.

Em outras palavras, isto significa que a partir de um ponto qualquer da função $f(x)$, desejando-se caminhar sobre a superfície da função $f(x)$ em direção ao ótimo, o caminho mais eficiente é seguir ao longo do gradiente até se encontrar o ótimo X^* , onde, de acordo com o teorema 5, o valor do gradiente é nulo.

5.2.5 – Algoritmos Iterativos

Segundo Fritzsche (1978) um algoritmo é um procedimento iterativo que, a partir de um ponto inicial x_0 , calcula, conforme determinadas regras, um novo ponto x_1 ; a partir de x_1 , pelas mesmas regras, um ponto x_2 e assim por diante. Os algoritmos existentes diferem entre si justamente naquelas determinadas regras que determinam o seguinte ponto.

Para problemas de programação não linear, os algoritmos normalmente nunca atingem exatamente a solução, como é o caso do método simplex da programação linear, mas geram uma sequência de pontos cujo limite converge ao ponto ótimo. Na prática, termina-se o processo da otimização quando um ponto está suficientemente perto do ponto de solução.

5.3 – Métodos de resolução da Programação Não Linear

A programação não linear possui vários métodos de resolução de seus problemas. Para realizar a classificação destes métodos dividem-se os mesmos em técnicas analíticas e técnicas de busca numérica.

5.3.1 – Técnicas Analíticas

Estas técnicas procuram determinar soluções ótimas resolvendo sistemas de equações com apoio de derivadas. A otimização pode ser reduzida a procura de raízes desses sistemas. O método de cálculo diferencial, o método dos multiplicadores de Lagrange e a Programação Geométrica são exemplos de técnicas analíticas (CIRILO, 1997).

Dentre as técnicas analíticas conhecidas, analisar-se-á o método dos Multiplicadores de Lagrange, por ser uma das mais utilizadas dentre as conhecidas.

Com relação as técnicas de busca numérica, far-se-á um breve apanhado das mesmas, dando ênfase nas mais importantes ou naquelas que serviram de base para outras.

5.3.1.1 – Multiplicadores de Lagrange

Estes métodos foram desenvolvidos para resolver problemas de extremos sujeitos a vínculos ou restrições.

Um típico problema de extremos vinculados requer que encontremos os extremos de uma função f de diversas variáveis quando estas não são independentes, mas, sim, satisfazem uma ou mais condições dadas, chamadas de vínculo ou restrições. Os vínculos são normalmente especificados por equações denominadas de equações de vínculos ou restrições. Estas equações envolvem as variáveis em questão (MUNEM-FOULIS, 1986).

Portanto, caso se deseje encontrar o máximo ou mínimo de uma função sujeita a restrições do tipo

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad (5.20)$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad (5.21)$$

...

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (5.22)$$

pode-se lançar mão da técnica dos Multiplicadores de Lagrange.

Mas, em que consiste esta técnica?

Tome-se o seguinte problema:

$$\text{Min } Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.23)$$

Sujeito a

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad (5.24)$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad (5.25)$$

De acordo com a técnica dos Multiplicadores de Lagrange, constrói-se uma nova função com $n+2$ variáveis, pois a função inicial possui apenas duas restrições. Então, tem-se:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.26)$$

As condições necessárias que, em uma otimização irrestrita, corresponderiam a anulação de todas as primeiras derivadas são, para o presente caso:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{\delta f}{\delta x_1} + \lambda_1 \cdot \frac{\delta g_1}{\delta x_1} + \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_1} = 0 \quad (5.27)$$

... ..

$$\frac{\delta L}{\delta x_n} = \frac{\delta f}{\delta x_n} + \lambda_1 \cdot \frac{\delta g_1}{\delta x_n} + \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_n} = 0 \quad (5.28)$$

além de

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_2} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5.30)$$

Conclui-se que a função de Lagrange L é uma função sem restrição e que sua minimização corresponde a minimização da função Z, com restrições.

Com relação a este método, tem-se as seguintes afirmações a serem observadas:

- I. a resolução do sistema das condições necessárias oriundas do método de Lagrange não garante que o ponto encontrado seja um máximo, um mínimo ou um ponto de sela;
- II. para se ter certeza que o ponto encontrado corresponde ao originalmente desejado, é preciso estudar a forma da função, ou seja, observar se ela é côncava, convexa ou se não se encaixa em uma forma definida (EHRlich, 1985).

5.3.2 – Técnicas de Busca Numérica

Estas técnicas são métodos iterativos que melhoram as soluções do processo de otimização através de informações obtidas ao longo das iterações realizadas. São baseadas no emprego de métodos numéricos para a resolução dos problemas, onde não é possível o emprego de soluções analíticas (CIRILO, 1997).

Mateus e Luna (1979) classificaram os métodos de busca numérica da seguinte maneira:

- Busca Unidirecional
 - Reduções sucessivas de intervalos
 - Métodos finitos de aprofundamento
- Otimização Irrestrita
 - Com busca através de derivadas
 - ❖ Método do gradiente

- ❖ Método de Newton-Raphson
- ❖ Método das direções conjugadas
- ❖ Métodos Quase Newtonianos
- Com busca sem auxílio de derivadas
 - ❖ Método de Hook e Jeeves
 - ❖ Método de Rosenbrock
 - ❖ Método de Powell
- Otimização Restrita
 - ❖ Métodos de penalidades
 - ❖ Método de barreira
 - ❖ Método de pontos extremos

- Métodos primais
 - ❖ Métodos de linearização
 - ❖ Métodos do gradiente reduzido
 - ❖ Métodos do gradiente reduzido generalizado

5.3.2.1 - Métodos de Busca Unidirecional

Como o próprio nome do método demonstra, estes métodos são caracterizados em realizar a procura pelo melhor resultado no conjunto de soluções possíveis, levando em consideração uma única direção, a partir de um ponto inicial adotado.

Mateus e Luna (1986) colocam o fundamento do método de busca unidirecional em duas possibilidades, quais sejam:

- I. encontrar um ponto ótimo próximo ao ponto mínimo, dentro de uma tolerância ϵ dada, tendo em vista à impossibilidade computacional de se determinar o ponto mínimo exato;

- II. encontrar um ponto desejável, que simplesmente diminua bastante o valor da função objetivo, sem no entanto, tentar minimizá-la.

Com isso, classificam-se os métodos de busca unidirecional em métodos de reduções sucessivas de intervalos e métodos finitos ou de aprofundamentos.

5.3.2.1.1 – Reduções Sucessivas de Intervalos

Estes métodos partem de um intervalo finito Δ no qual se atribui que a função seja unimodal no intervalo, e vão reduzindo sucessivamente esse intervalo, através de comparação de valor da função objetivo (CIRILO, 1997) até se chegar a precisão desejada.

Estes métodos são divididos em:

a) Métodos Diretos: são aplicados à funções simples, gerando um número maior de iterações de baixa complexidade. São exemplos destes métodos o método de Fibonacci e o método de busca do meio termo ou secção áurea;

b) Métodos de Aproximação por Polinômios: estas técnicas exigem funções convexas ou côncavas, continuamente diferenciáveis de primeira e de segunda ordem. Funções deste tipo permitem que seja ajustada uma outra função cuja mínimo é facilmente encontrado. Apesar destes métodos gerarem um número menor de iterações, quando comparados aos métodos diretos, tem-se que estas iterações são mais complexas. Como exemplos destes métodos cita-se o método de Newton, o método DSC-Powel, entre outros.

5.3.2.1.2 – Métodos Finitos ou de Aprofundamentos

Este método, ao contrário dos anteriormente descritos, não exigem convexidade, exigindo porém derivadas direcionais no ponto de partida. Como exemplo destes tipos de métodos tem-se o método de Armijo e o método de Goldstein.

5.3.2.2 – Métodos de Otimização Irrestrita

Problemas de otimização que são tratados pelos métodos descritos a seguir, são aqueles que contêm n variáveis de decisão. Assim sendo, faz-se necessário a determinação das direções em cada passo do processo iterativo de otimização destes problemas, aproximando-se em cada iteração do ponto de mínimo ou de máximo. Estes métodos podem ou não utilizar o auxílio de derivadas.

São divididos do seguinte modo:

5.3.2.2.1 – Com busca através de derivadas

Este método se subdivide em:

a) Método do Gradiente

É uma das mais antigas e difundidas técnicas de otimização de funções de múltiplas variáveis, sendo por este motivo descrito o seu modo de execução neste item.

Uma função $f(\mathbf{X})$ possui um gradiente $\nabla f(\mathbf{X})$ em cada ponto x , se é diferenciável. Mas, o que é gradiente?

O gradiente em um ponto específico $x = x'$ é o vetor cujos elementos são as respectivas derivadas parciais, calculadas naquele ponto em que $x = x'$. Com isso, tem-se:

$$\nabla f(x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \text{ em } x = x' \quad (5.31)$$

Podem surgir dúvidas no sentido da função do gradiente. Para tentar suprir estas dúvidas, tem-se o seguinte: o gradiente serve para mostrar a direção ao longo da qual uma pequena variação em x dá a maior direção em $f(\mathbf{X})$. Com isso, desejando-se caminhar sobre a superfície $f(\mathbf{X})$ em direção ao ótimo, é suficiente caminhar ao longo do gradiente até achar o ótimo x^* , onde o gradiente deste ponto é nulo, ou seja, $\nabla f(x^*) = 0$. Porém, há um problema, ou seja, não é possível reavaliar $\nabla f(x)$ continuamente e mudar,

correspondente e continuamente, a trajetória. Portanto, o problema é determinar até quando continuar em trajetória reta ao longo do gradiente, até recalculá-lo um novo gradiente e mudar de direção (EHRlich, 1986).

Como definição tem-se que, para maximização, o algoritmo é o seguinte:

$$X_{k+1} = X_k + t_k \cdot \nabla f(X_k) \quad (5.32)$$

Então, escolhe-se um $t_k = t_k^*$ (positivo), tal que se caminhe ao longo do gradiente enquanto $f(X)$ melhorar. Quando $f(X)$ piorar, troca-se a trajetória. Esta troca ocorre sendo calculado um novo gradiente e um novo t . Este procedimento é realizado sucessivamente até que se encontre $\nabla f(x) = 0$.

Para o caso particular de maximização, t_k^* é o valor positivo que maximiza a função $f(X_k + t_k \cdot \nabla f(X_k))$, de modo que:

$$f(X_k + t_k^* \cdot \nabla f(X_k)) = \max_{t_k \geq 0} f(X_k + t_k \cdot \nabla f(X_k)), \quad (5.33)$$

seguinte-se a busca do ótimo até encontrar-se $\nabla f(X) = 0$.

Conforme Ehrlich (1985) um problema de maximização n -dimensional reduz-se a uma sequência de maximizações em uma única variável t , aplicando-se os métodos clássicos de otimização com uma só variável derivando f em relação a t e anulando a mesma.

O método gradiente corresponde a andar em ziguezague, com direções sempre ortogonais a anterior.

Se a função estudada for unimodal o valor ótimo encontrado é, conseqüentemente, o ótimo global. Porém, se a função for multimodal o método do gradiente convergirá para um ótimo local. Neste caso, repete-se o processo para diferentes pontos iniciais, a fim de encontrar-se outros ótimos locais.

Para o caso de $f(X)$ ser uma função quadrática conhecida, a condição de se encontrar o ótimo reduz-se a um sistema de equações lineares em que o gradiente de x é igual a zero ou

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = 0; \frac{\delta f}{\delta x_2} = 0; \dots; \frac{\delta f}{\delta x_n} = 0 \quad (5.34)$$

O problema se dá quando o $f(\mathbf{X})$ não é conhecida, como no caso de resultado de um modelo de simulação com n variáveis de entrada. Nestes casos, as derivadas deverão ser calculadas por aproximação com secantes $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ e o valor ótimo de t deverá ser encontrado por aproximações sucessivas do tipo de bissecção do intervalo por meio do Critério Áureo, Fibonacci, entre outros.

b) Método de Newton – Raphson

Este método é uma extensão do método de Newton para busca unidirecional, onde aproxima a função $f(\mathbf{X})$, a ser minimizada, a uma quadrática. Enquanto no método do gradiente ocorre uma convergência linear, neste método tem-se uma convergência quadrática. O método de Newton – Raphson converge sob duas condições, quais sejam, a existência da inversa da matriz Hessiana e que esta matriz seja definida positiva, garantido-se assim uma direção de descida, ou diminuição da função objetivo. Também pode-se ter a matriz Hessiana definida negativa, quando no caso de se estar maximizando a função.

Apesar da rápida convergência deste método, tem-se uma dificuldade de uso do mesmo devido a necessidade de se calcular a inversa da matriz Hessiana. Esta dificuldade aumenta quando do aumento do número de variáveis n .

c) Método de Direções Conjugadas

Por este método tem-se que a aproximação quadrática à função geral é normalmente boa perto do ponto máximo e, conseqüentemente, as propriedades de convergência são parecidas ao caso quadrático. Este método é considerado como o melhor entre os métodos disponíveis devido a sua rápida convergência e sem grande

complexibilidade de cálculos, pois para se obter as direções conjugadas só é necessário o cálculo das derivadas de primeira ordem.

d) Métodos Quase Newtonianos

Também denominados métodos da métrica variável, estes métodos procuram a cada iteração achar uma matriz aproximada, utilizando apenas derivadas de primeira ordem. É de se notar que no método de Newton faz-se necessário encontrar a matriz Hessiana formada por derivadas de segunda ordem, o que o torna mais complexa que o presente método.

Todos os métodos descritos anteriormente fazem uso de derivadas quer de primeira quer de segunda ordem. A partir de agora serão colocados os métodos de otimização irrestrita sem o uso de derivadas conhecidos como métodos de pesquisa.

O desenvolvimento destes métodos deveu-se praticamente a necessidade de se resolver problemas complexos em que, devido ao porte das funções que constituem estes problemas, o uso de derivadas pode tornar a avaliação bastante complicada e demorada.

Segundo Mateus e Luna (1986) para problemas simples, os métodos de pesquisa demoram mais para convergir do que aqueles que utilizam derivadas. Entretanto, para problemas complexos os resultados obtidos com estes métodos podem ser considerados satisfatórios. Então, tem-se:

5.3.2.2.2 – Com busca sem o auxílio de derivadas

a) Método de Hooke e Jeeves

Este método consta basicamente na realização de dois tipos de pesquisa em torno do ponto x , quais sejam, buscas exploratórias ou locais e buscas padrões ou globais.

As buscas exploratórias ou locais são realizadas na direção dos eixos coordenados, enquanto que as buscas padrões ou globais procuram acelerar o processo de otimização.

b) Método de Rosenbrock

Segundo Cirilo (1997) o método de Rosenbrock é um processo semelhante ao processo de busca exploratória de Hook e Jeeves, onde saltos discretos são dados durante a busca.

Estes saltos são dados em direções linearmente independentes e ortogonais entre si, sendo que as pesquisas nestas direções são realizadas utilizando um método de busca unidirecional.

c) Método de Powell

Este método utiliza o conceito de direções conjugadas geradas em cada iteração. Tem como fundamento localizar o mínimo $f(\mathbf{X})$ de uma função quadrática com a matriz Hessiana $Hf(\mathbf{X}) > 0$ por meio de buscas unidirecionais sucessivas a partir de um ponto inicial X_0 segundo um conjunto de direções conjugadas S_1, S_2, \dots, S_n (CIRILO, 1997).

O método parte do princípio que se o mínimo de uma função quadrática é determinado para duas direções paralelas, a direção que une estes pontos será conjugada às anteriores (FRITZCHE, 1978).

5.3.2.3 – Métodos de Otimização com Restrições

Os métodos descritos anteriormente eram relativos a problemas em que a função estudada não possuía restrições. Com a introdução destas restrições, o nível de dificuldade para a obtenção do ótimo da função cresce consideravelmente, devido ao aumento da não linearidade do problema também aumentar (FRITZCHE, 1978).

Segundo Cirilo (1997) os algoritmos para a resolução desta nova classe de problemas são baseados nos seguintes artifícios:

- I. substituição do problema não linear original por sucessivos problemas lineares aproximados, resolvidos repetidamente por programação linear;
- II. uso de funções de penalidade para transformação do problema de programação não linear com restrições em uma sequência de problemas sem restrições;
- III. utilização de tolerâncias flexíveis para acomodar tanto as soluções viáveis como as não viáveis.

A seguir, alguns métodos utilizados na resolução destes tipos de problemas são brevemente descritos.

a) Métodos de Penalidade

Estes métodos têm como objetivo a transformação de um problema não linear restrito em um não linear irrestrito. Isto se dá com a introdução na função objetivo de uma outra função denominada função de repulsão ou de penalidade relativas as restrições. São divididos em:

a-1) Métodos de Barreira

O método de barreira foi proposto por Carroll (1961). Este método se limita à região viável na busca do ótimo, pois as penalidades geram verdadeiras barreiras, fazendo com que todas as soluções obtidas (a partir de uma solução inicial viável) ocorram sempre dentro desta região. Segundo Mateus e Luna (1986) este método encontra pelo menos uma solução viável caso ocorra uma interrupção do processo.

Seja, por exemplo, uma função $f(\mathbf{X})$ a ser minimizada e tendo como restrições funções do tipo

$$h_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, m \quad (5.35)$$

onde

as funções $h_i(\mathbf{X})$ incluem as condições de não negatividade e as restrições do tipo $h_i(\mathbf{X}) = b_i - g_i(\mathbf{X})$. (5.36)

Então, de acordo com o método, introduz-se na função objetivo a ser minimizada uma função de penalidade, que irá substituir as restrições do problema, impedindo a saída da região factível. Com isso, tem-se uma nova função objetivo sem restrições, do tipo:

$$\text{Min } f(\mathbf{X}) + r \cdot b(\mathbf{X}) \quad (5.37)$$

onde

r é um escalar positivo;

$b(\mathbf{X})$ uma função de penalidade interna não negativa e contínua na região factível.

$$b(\mathbf{X}) \text{ possui a seguinte forma } b(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{h_i(\mathbf{X})} \quad (5.38)$$

Portanto, tem-se a seguinte função a ser minimizada:

$$\text{Min } f(\mathbf{X}) + r \cdot \sum_{i=1}^m \frac{1}{h_i(\mathbf{X})} \quad (5.39)$$

A característica principal desta técnica consiste na observação de que, quando se aproxima da atuação da restrição, ou seja, $h_i(\mathbf{X})$ tendendo a zero, então $\frac{1}{h_i(\mathbf{X})}$ tende ao infinito, impedindo assim a viabilidade da solução ser violada. Também aqui, o processo de minimização tem de partir de uma solução viável.

Como agora não se tem mais restrições das funções objetivo, pode-se realizar o processo de otimização por qualquer dos métodos de otimização irrestrita, sendo que os métodos de pesquisa com saltos discretos como os de Hooke e Jeeves devem ser adaptados à situação, pois em um destes saltos a solução pode sair da região factível.

a-2) Métodos de Penalidade Externa

Quem primeiro utilizou funções de penalidade externa a problemas restritos foi Courant (1962).

Este método também adiciona à função objetivo penalidades, transformando o problema restrito em irrestrito. Porém, o que o diferencia do método de barreiras, descrito anteriormente, é que neste método são considerados os pontos externos, ou seja, os pontos que se localizam fora da região factível, no decorrer do processo iterativo. Isto se dá atribuindo um alto valor de penalidade, caso haja violação das restrições, fazendo com que se aproximem os pontos gerados à região viável, minimizando-se assim a função objetivo.

b) Métodos Primais

Este método foi proposto inicialmente por Zoutendijk (1960), tendo como uma de suas características o fato de trabalharem dentro de uma região factível ou viável, a exemplo dos métodos de penalidade interna, colocado anteriormente.

Ele toma por base os conceitos expostos na programação linear, através da linearização de funções e do emprego do método SIMPLEX.

O fundamento dos seus algoritmos é baseado na manipulação do gradiente da função objetivo em cada iteração, levando-se em conta as restrições ativas do problema, no ponto em que está sendo trabalhado.

Dentre os métodos primais, tem-se os métodos da linearização e do gradiente reduzido.

b.1) Método de Linearização

Como o próprio nome sugere, este método fundamenta-se na substituição da resolução de um problema não linear pela resolução de uma sequência de problemas lineares.

A técnica mais utilizada por tais métodos é a aproximação tangencial, em que uma função não linear, continuamente diferenciável $f(\mathbf{X})$ é substituída na sua vizinhança de X_0 pela seguinte função linear:

$$Z(\mathbf{X}_0) = f(\mathbf{X}_0) + \nabla f(\mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (5.40)$$

em que esta função corresponde à equação do plano tangente em X_0 ao gráfico da função $f(\mathbf{X})$ (FORMIGA, 1999).

Dois métodos trabalham com esta metodologia. São os métodos de Frank e Wolfe (1956) e o método de Robinson (1972).

b.2) Método do Gradiente Reduzido

Este método tem como objetivo resolver um problema não linear por um método parecido com o método simplex da programação linear. Foi desenvolvido inicialmente por Wolfe (1963), para resolver um problema de programação não linear com restrições lineares. Depois, o método foi generalizado por Abadie e Carpentier (1969) para considerar restrições não lineares.

Consiste este método, basicamente, no seguinte processo:

Seja o problema seguinte

$$\text{Min } f(\mathbf{X}) \quad (5.41)$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (5.42)$$

com

f sendo uma função real diferenciável e com as primeiras derivadas contínuas;

$$\mathbf{X} \geq 0;$$

$\mathbf{A}_{(m \times n)}$ é a matriz dos componentes;

\mathbf{b} é um vetor de m componentes e $m \leq n$.

Considerando-se as seguintes suposições:

- I. cada m colunas da matriz A é linearmente independente;
- II. cada ponto extremo de uma região possível tem m variáveis estritamente positivas.

De acordo com estas hipóteses cada possível solução tem ao menos m componentes positivos.

Seguindo o modelo simplex da programação não linear, o vetor \mathbf{X} é repartido em dois vetores, quais sejam, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$, onde \mathbf{X}_B é o vetor com as variáveis base, ou dependentes e \mathbf{X}_N é o vetor com as variáveis não-base, ou, independentes. As variáveis \mathbf{X}_N são denominadas de independentes pelo seguinte motivo:

Repartindo-se a matriz A em duas submatrizes \mathbf{B} e \mathbf{R} , tal que a Equação (5.42) escreve-se da seguinte forma:

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_B + \mathbf{R}\mathbf{X}_N = \mathbf{b} \quad (5.43)$$

Supõe-se que a submatriz \mathbf{B} é composta pelas primeiras m colunas de A e que \mathbf{B} corresponde ao vetor \mathbf{X}_B . Então, a equação 5.43 implica em:

$$\mathbf{X}_B = (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_N) \quad (5.44)$$

Então, da equação (5.44) tem-se que se pode assinalar quaisquer valores às componentes de \mathbf{X}_N e sempre resolver o sistema da equação (5.43) em termos de \mathbf{X}_B . Daí chamar-se o vetor \mathbf{X}_N de independente (FRITZSCHE, 1978).

Seja \mathbf{X} uma solução possível. De acordo com as suposições acima, A pode ser decomposta em $[\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ e \mathbf{X}^t em $[\mathbf{X}_B^t, \mathbf{X}_N^t]$, onde

\mathbf{B} é uma matriz invertida $m \times m$;

$\mathbf{X}_B > 0$;

X_B é chamado o vetor básico e cada um de seus componentes é estritamente positivo;

X_N é chamado vetor não básico e seus componentes ou são positivos ou zero.

$$\text{Seja } \nabla f(\mathbf{X})^t = [\nabla_B f(\mathbf{X})^t, \nabla_N f(\mathbf{X})^t], \quad (5.45)$$

onde

$\nabla_B f(\mathbf{X})$ é o gradiente de f com respeito ao vetor básico X_B ;

$\nabla_N f(\mathbf{X})$ é o gradiente de f com respeito ao vetor não básico X_N .

Seja uma direção \mathbf{d} uma direção possível de f para \mathbf{X} se:

$$\nabla f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d} < 0 \text{ e,} \quad (5.46)$$

$$A \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (5.47)$$

$$\text{com } d_j \geq 0 \text{ se } x_j = 0. \quad (5.48)$$

Primeiro \mathbf{d}^t é decomposto em $[\mathbf{d}_B^t, \mathbf{d}_N^t]$. Note que $A \cdot \mathbf{d} = 0$ e que A pode ser decomposta em $[B, N]$, portando

$$B \cdot \mathbf{d}_B + N \cdot \mathbf{d}_N = 0 \quad (5.49)$$

com isso,

$$\mathbf{d}_B = -B^{-1} \cdot N \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.50)$$

Tem-se, então:

$$\nabla f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d} = \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d}_B + \nabla_N f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.51)$$

substituindo a equação (5.50) na equação acima, tem-se:

$$\nabla f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d} = [\nabla_N f(\mathbf{X})^t - \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot B^{-1} \cdot N] \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.52)$$

Seja $\mathbf{r}^t = (\mathbf{r}_B^t, \mathbf{r}_N^t)$ e,

$$\mathbf{r}^t = \nabla f(\mathbf{X})^t - \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot B^{-1} \cdot A \quad (5.53)$$

$$= [0, \nabla_N f(\mathbf{X})^t - \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot B^{-1} \cdot N] \quad (5.54)$$

onde

\mathbf{r}^t é o gradiente reduzido.

$$\text{Então, } \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d} = \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d}_B + \nabla_N f(\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.55)$$

$$= [\nabla_N f(\mathbf{X})^t - \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot B^{-1} \cdot N] \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.56)$$

$$= \mathbf{r}_N^t \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.57)$$

Deve-se então escolher \mathbf{d}_N através de um caminho que forneça

$$\mathbf{r}_N^t \cdot \mathbf{d}_N < 0 \text{ e,} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{d}_j \geq 0 \text{ se } \mathbf{x}_j = 0. \quad (5.59)$$

A seguinte regra é adotada:

Para cada componente não básico j , seja $\mathbf{d}_j = -r_j$ se $r_j \leq 0$ e seja $\mathbf{d}_j = -x_j \cdot r_j$ se $r_j >$,
ou seja,

$$\begin{cases} d_j = -r_j \Leftrightarrow r_j \leq 0 \\ d_j = -x_j \cdot r_j \Leftrightarrow r_j > 0 \end{cases} \quad (5.60 \text{ e } 5.61)$$

Isto garante que $\mathbf{d}_j \geq 0$ se $\mathbf{x}_j = 0$ e evita um número excessivos de pequenos passos quando $\mathbf{x}_j > 0$.

Isto também faz com que a direção encontrada esteja em um mapa fechado, portanto permitindo a convergência (BAZARAA, 1999).

Também de acordo com Bazaraa (1999) se $\mathbf{d} \neq 0$ então \mathbf{d} é uma provável solução impossível.

A partir da determinação do gradiente reduzido, o problema é resolvido de forma análoga ao método simplex, sendo necessário o cálculo das derivadas da função objetivo, com relação às variáveis básicas.

Resumo do Algoritmo do Gradiente Reduzido (Bazaraa, 1999)

Assume-se primeiramente que todas as m colunas de A são linearmente independentes e que todo ponto extremo das possíveis regiões tem m componentes estritamente positivos;

Passo inicial:

Escolha um ponto \mathbf{x}_1 satisfazendo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$, com $\mathbf{x}_1 \geq 0$.

Seja $k = 1$, vá para o passo principal.

Passo principal:

$$1) \text{ Seja } \mathbf{d}k^l = (\mathbf{d}B^l, \mathbf{d}N^l) \quad (5.62)$$

onde

$\mathbf{d}N$ e $\mathbf{d}B$ são obtidos da equação (5.68) abaixo.

Se $\mathbf{d}k = 0$ pare.

De outro modo, vá ao passo 2.

Seja I_k um indexador adaptado dos m maiores componentes de $\mathbf{x}k$;

$$B = \{a_j : j \in I_k\} \quad (5.63)$$

$$N = \{a_j : j \notin I_k\} \quad (5.64)$$

$$\mathbf{r}t = \nabla f(\mathbf{X})^t - \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot B^{-1} \cdot \mathbf{A} \quad (5.65)$$

$$\mathbf{d}j = \begin{cases} -r_j & \text{se } j \notin I_k \text{ e } r_j \leq 0 \\ -x_j \cdot r_j & \text{se } j \notin I_k \text{ e } r_j > 0 \end{cases} \quad (5.66 \text{ e } 5.67)$$

$$\mathbf{d}B = -B^{-1} \cdot N \cdot \mathbf{d}N \quad (5.68)$$

2). Resolva a seguinte linha de pesquisa do problema:

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}_k + \lambda \cdot \mathbf{d}k) \quad (5.69)$$

$$\text{Sujeito a } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \quad (5.70)$$

$$\text{onde } \lambda_{\max} = \begin{cases} \text{Mínimo}_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{-x_j k}{d_j k} : d_j k < 0 \right\} & \text{se } d_k \geq 0 \\ \infty & \text{se } d_k < 0 \end{cases} \quad (5.71 \text{ e } 5.72)$$

e \mathbf{x}_{jk} , \mathbf{d}_{jk} são os j 's componentes de $\mathbf{x}k$ e $\mathbf{d}k$, respectivamente.

$$\text{Seja } \lambda_k \text{ uma solução ótima e seja } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}k. \quad (5.73)$$

Então substitua k por $k+1$ e repita o passo 1.

b.3) Método do Gradiente Reduzido Generalizado (BAZARAA, 1999)

Este método é uma extensão do método do Gradiente Reduzido para manusear restrições não lineares.

Considere um problema de programação não linear da seguinte forma:

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) \quad (5.74)$$

$$\text{sujeito a } h(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.75)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (5.76)$$

onde

$h(\mathbf{x}) = 0$ representa alguma m restrição de igualdade;

$\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$

Adequadas transformações de variáveis têm sido usadas para representar todas as variáveis como sendo não negativas. Neste caso, cada restrição de desigualdade pode ser assumida como sendo escrita como uma igualdade pela introdução de uma variável não negativa (BAZARAA, 1999).

Agora, dada uma possível solução \mathbf{x}_k , considera-se uma linearização $h(\mathbf{x}) = 0$ dada por:

$$h(\mathbf{x}_k) + \nabla h(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0 \quad (5.77)$$

onde

$h(\mathbf{x}_k)$ é a matriz Jacobiana $m \times n$ de h avaliada para \mathbf{x}_k .

Anotando que $h(\mathbf{x}_k) = 0$, o arranjo de restrições lineares dado por ∇

$$h(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}_k) \quad (5.78)$$

$$\text{é da forma } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.79)$$

onde $\mathbf{x}_k \geq 0$ é uma solução possível.

Assumindo que $A = \nabla h(\mathbf{x}_k)$ e repartindo dentro de $[B, N]$ e repartindo $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_B^t, \mathbf{x}_N^t)$, pode-se calcular o gradiente reduzido pela seguinte fórmula:

$$\mathbf{r}^t = \nabla f(\mathbf{x}_k)^t - \nabla_B f(\mathbf{x}_k)^t \cdot B^{-1} \cdot A \quad (5.80)$$

e, portanto, obter a direção de locomoção \mathbf{d}_k pelas fórmulas (5.81, 5.82 e 5.83))

$$\mathbf{d}_j = \begin{cases} -r_j & \text{se } j \notin I_k \text{ e } r_j \leq 0 \\ -x_j \cdot r_j & \text{se } j \notin I_k \text{ e } r_j > 0 \end{cases} \quad (5.81 \text{ e } 5.82)$$

$$\mathbf{d}_B = -B^{-1} \cdot N \cdot \mathbf{d}_N \quad (5.83)$$

obtem-se $\mathbf{d}_k = 0$ se e somente se \mathbf{x}_k é um ponto KKT, encerrando assim o procedimento. De outro modo, uma linha de pesquisa é formada ao longo de \mathbf{d}_k .

Versões recentes deste método adotam a seguinte estratégia:

Primeiro uma linha de pesquisa é formada pela determinação de um $\lambda_{\text{máx}}$ de acordo com as equações (5.71 e 5.72) e, então, encontra-se λ_k como a solução para o problema da linha de pesquisa para minimizar $f(\mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$ sujeito a $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{máx}}$. Isto fornece $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$. (5.84)

Desde que a condição $h(\mathbf{X}') = 0$ não for necessariamente satisfeita, necessita-se de um passo de correção. Nesta direção, o método de Newton-Raphson é então utilizado para se obter \mathbf{X}_{k+1} , satisfazendo $\mathbf{h}(\mathbf{X}_{k+1}) = 0$, começando com a solução \mathbf{X}' e mantendo os componentes de \mathbf{X}_N fixados para os valores \mathbf{X}'_N . portanto, \mathbf{X}_N permanece para $\mathbf{X}'_N \geq 0$ durante este processo iterativo, mas alguns componentes de \mathbf{X}_B devem tender a tornarem-se negativos.

Para cada ponto, uma ligação é realizada substituindo uma variável básica negativa \mathbf{X}_r com a variável não básica \mathbf{X}_q , a qual é preferencialmente positiva e que tem um expressivo elemento não nulo na correspondente ordem r da coluna $B^{-1} \cdot \mathbf{a}_q$.

O processo de Newton-Raphson então continua como mostrado acima com a base revisada (tendo agora fixado \mathbf{X}_r como nulo) e o sistema linearizado revisado, até a solução não negativa \mathbf{X}_{k+1} satisfazendo $\mathbf{h}(\mathbf{X}_{k+1}) = 0$ ser finalmente obtida.

A mais recente versão do método do GRG adota uma seqüência discreta de passos positivos e tenta encontrar um correspondente \mathbf{X}_{k+1} para cada passo, sequencialmente utilizando o esquema antecedente de Newton-Raphson. Usando o valor $f(\mathbf{X}_{k+1})$ para cada ponto semelhante, quando um terceiro ponto do método da interpolação quadrática é obtido, um ajuste quadrático é usado para determinar um novo passo, para o qual o correspondente ponto \mathbf{X}_{k+1} é novamente determinado. O possível ponto com menor valor objetivo então encontrado é usado para a próxima iteração (BAZARAA, 1999).

Algoritmo do Gradiente Reduzido Generalizado (BAZARAA, 1999)

Considere o seguinte problema:

$$\text{Minimize } f(\mathbf{X}) \quad (5.85)$$

$$\text{Sujeito a } h_i(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, L \quad (5.86)$$

$$a_j \leq \mathbf{X}_j \leq u_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (5.87)$$

Aqui assume-se que f e h_i para cada i são diferenciáveis. Seja \mathbf{h} o vetor função cujos componentes são h_i para $i = 1, 2, \dots, L$ e, além disso, seja \mathbf{a} e \mathbf{u} os vetores cujos componentes são a_j e u_j para $j = 1, 2, \dots, n$. Fazem-se as seguintes suposições:

Dada cada solução possível \mathbf{X}^t , pode ser decomposto em $(\mathbf{X}_B^t, \mathbf{X}_N^t)$ com $\mathbf{X}_B \in E_n$ e $\mathbf{X}_N \in E_{n-1}$, onde $\mathbf{a}_B < \mathbf{X}_B < \mathbf{u}_B$. Além disso, a matriz Hessiana $l \times n \nabla \mathbf{h}(\mathbf{X})$ é decomposta, em conformidade, dentro da matriz $l \times l \nabla_B \mathbf{h}(\mathbf{X})$ e a matriz $l \times (n-1) \nabla_N \mathbf{h}(\mathbf{X})$, tal como $\nabla_B \mathbf{h}(\mathbf{X})$ é invertida. Esquemmatizando-se,

Passo Inicial: Escolha uma solução possível \mathbf{X}^t e decomponha-a em $(\mathbf{X}_B^t, \mathbf{X}_N^t)$.

Passo Principal:

$$\text{Seja } \mathbf{r}^t = \nabla_N f(\mathbf{X}_k)^t - \nabla_B f(\mathbf{X})^t \cdot \nabla_B \mathbf{h}(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{B}^{-1} \cdot \nabla_N \mathbf{h}(\mathbf{X}). \quad (5.88)$$

Calcule o vetor $n-1 \mathbf{d}_N$ cujo j -ésimo componente de j é:

$$\mathbf{d}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j = a_j \text{ e } r_j > 0, \text{ ou } x_j = u_j \text{ e } r_j < 0 \\ -r_j & \text{de maneira diversa} \end{cases} \quad (5.89 \text{ e } 5.90)$$

se $\mathbf{d}_N = 0$, o processo para.

De outra maneira, vá ao passo 2..

Encontre uma solução para o sistema não linear $\mathbf{h}(\mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{x}}_N) = 0$ pelo método de Newton como se segue, onde $\tilde{\mathbf{x}}_N$ é especificado abaixo:

Inicialização: Escolhe-se $\varepsilon > 0$ e um número inteiro positivo k . Seja $\theta > 0$ tal que $\mathbf{a}_N \leq \tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u}_N$,

$$\text{onde } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_N + \theta \cdot \mathbf{d}_N. \quad (5.91)$$

Seja $\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_B$, seja também $k = 1$. Com estas suposições vá para a iteração k abaixo.

Iteração k :

$$(i) \text{ seja } \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Y}_k - \nabla_B \mathbf{h}(\mathbf{Y}_k, \tilde{\mathbf{x}}_N). \quad (5.92)$$

se $\mathbf{a}_B \leq \mathbf{Y}_{k+1} \leq \mathbf{u}_B$, $f(\mathbf{Y}_{k+1}) < f(\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N)$, e $\|\mathbf{h}(\mathbf{Y}_{k+1}, \tilde{\mathbf{x}}_N)\| < \varepsilon$, vá para o passo (iii); se estas condições não ocorrerem vá para (ii);

$$(ii) \text{ se } k = K, \text{ restabeleça } \theta \text{ por } \frac{1}{2} \theta.$$

seja $\tilde{\mathbf{x}}_N = \mathbf{X}_N + \theta \mathbf{d}_N$, seja também $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_B$, restabeleça k por 1, e repita o passo (i). De outro modo, restabeleça k por $k + 1$ e repita o passo (i);

$$(iii) \text{ seja } \mathbf{x}^t = (\mathbf{y}_{k+1}^t, \tilde{\mathbf{x}}_N^t), \quad (5.93)$$

escolha uma nova base B e vá para o passo 1 do algoritmo principal.

Capítulo VI

Metodologia

6.1 – Introdução

No capítulo III foram apresentadas metodologias de dimensionamento de redes de distribuição de água que não levam em consideração, nos seus processos, os custos de implantação e de manutenção da rede. Mesmo assim, estas metodologias são utilizadas em praticamente todos os problemas de dimensionamento de redes de distribuição de água existentes no Brasil. Isto se deve basicamente ao fato de que estas metodologias já são amplamente aceitas pelas empresas contratantes e projetistas em geral.

A metodologia utilizada neste trabalho foi inicialmente formulada por Formiga (1999) para o caso de redes de distribuição de água que contém uma fonte de alimentação, no caso, um reservatório. O presente trabalho estende o método para o caso em que a rede de distribuição de água contenha múltiplos reservatórios e múltiplas bombas abastecendo-a concomitantemente e possua no seu interior uma outra estação elevatória, denominada de booster, para fornecer a esta rede um acréscimo de energia, caso seja necessário. À metodologia desenvolvida por Formiga foi introduzida uma nova etapa, ou seja, uma terceira etapa onde realiza-se uma comparação de resultados obtidos para diversos valores iniciais de entrada, selecionando-se a que resulta em um dimensionamento com um menor custo final.

6.2 – A metodologia

Este método consiste em se realizar o dimensionamento econômico da rede de distribuição de água, basicamente, em três etapas.

Na primeira etapa, dimensiona-se a rede tomando-se como variáveis de decisão os diâmetros, as vazões nos trechos, as alturas manométricas da bomba e do booster. Com os resultados obtidos da otimização desta etapa, realiza-se a próxima etapa.

Na segunda etapa, um novo dimensionamento é realizado, em que os diâmetros encontrados na primeira etapa serão desdobrados em diâmetros comerciais, de dimensões imediatamente posterior e inferior aos da primeira etapa. Com isso, tem-se que os mesmos não mais serão considerados variáveis de decisão do problema, pois agora são previamente conhecidos. O que irá variar nesta segunda etapa, além das vazões e alturas manométricas das bombas e dos boosters, serão os valores dos comprimentos dos subtrechos em que foram divididos os trechos da rede, quando da subdivisão dos diâmetros encontrados para cada trecho em diâmetros comerciais respectivos.

Sabe-se que um grande problema da programação não linear diz respeito aos dados iniciais de entrada, pois dependendo da escolha de seus valores pode-se chegar a uma solução viável ou não, podendo também não se chegar a solução alguma.

Tendo em vista o exposto no parágrafo anterior, escolheu-se, para o início da resolução do problema, 11 (onze) conjuntos de valores de diâmetros iniciais diferentes para dar início ao processo de otimização. Esta primeira escolha ocorreu arbitrariamente, ou seja, no caso em questão fez-se variar os conjuntos de valores dos diâmetros iniciais onze vezes, chegando a onze respostas diferentes para o dimensionamento.

Este número de variação de valores iniciais de entrada, ou seja, onze conjuntos, deveu-se a limitação do tempo destinado à dissertação, tendo em vista que o mesmo não foi suficiente para se realizar um número maior de hipóteses de valores iniciais de entrada.

O critério de escolha arbitrária dos diâmetros tem em vista a limitação mínima destes diâmetros imposta pela Norma de Redes de Distribuição de Água Potável para Abastecimento Público (NB-594/77) e o número de equações de restrição máxima imposta pela ferramenta utilizada. Com esta limitação de valores mínimos e máximos, tem-se uma faixa de valores possíveis de escolha. Então, dentro desta faixa escolhem-se os diâmetros

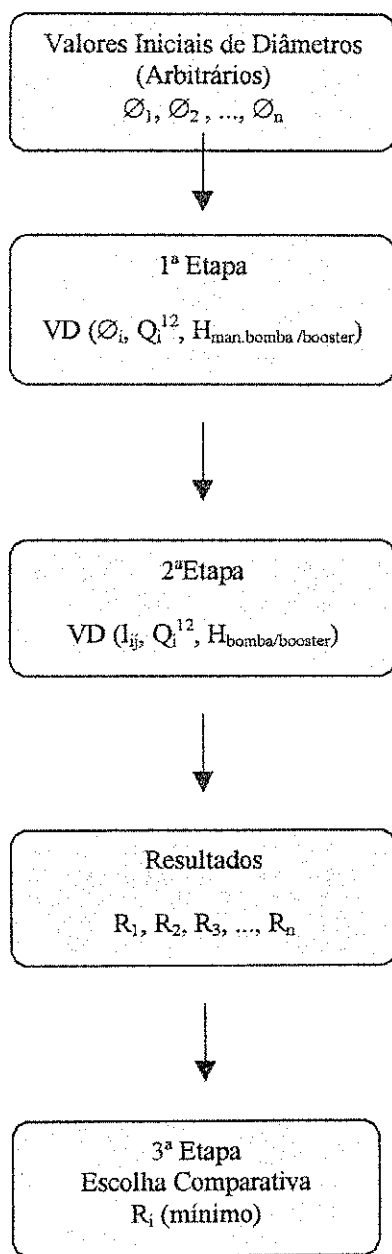
iniciais para os trechos tendo em vista o critério de maior valor de vazão, ou seja, para maiores valores de vazão, tem-se maiores valores de diâmetros. Este método de escolha foi denominado de escolha arbitrária.

Além dos onze conjuntos de valores iniciais dos diâmetros escolhidos arbitrariamente, optou-se por realizar uma nova entrada de diâmetros iniciais, considerando, agora, outro critério para esta escolha, qual seja: parte-se, de diferentes valores de velocidades máximas admissíveis em cada trecho, variando-se esta velocidade desde 0,5 m/s até 3,5 m/s (velocidade máxima estabelecida pela Norma Brasileira de Redes de Distribuição de Água - NBR-12218/94). Com isso, encontra-se para cada velocidade máxima admitida, um conjunto respectivo de diâmetros. Isto é realizado de acordo com a equação da continuidade, tendo em vista que as vazões estabelecidas para cada trecho são constantes. Com isso, também se obtém resultados diferentes para cada conjunto inicial de valores adotados.

A partir de então, ou seja, com os respectivos resultados dos dimensionamentos obtidos para os diferentes valores de entrada, comparam-se os mesmos com relação ao custo final e escolhe-se aquele que resulta em um dimensionamento com menor custo. Como o problema foi inicialmente estabelecido para duas situações iniciais, quais sejam, valores iniciais de diâmetros escolhidos arbitrariamente e escolhidos de acordo com o critério da velocidade máxima admissível, tem-se que, cada um destes critérios fornece uma resposta com menor custo final.

Esta etapa de escolha do valor mínimo, comparando-se as respostas obtidas, é colocada como uma terceira etapa do dimensionamento, garantindo-se assim o menor valor do mesmo.

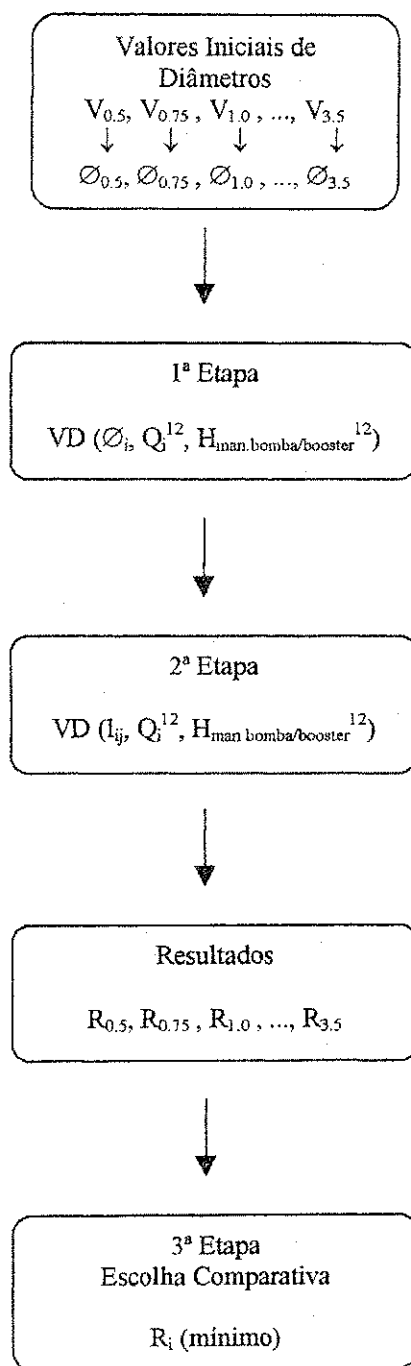
Resumindo, são formulados os esquemas 1 e 2 inseridos nas Figuras 6.1 e 6.2:



Esquema 1

Figura 6.1 –Etapas da otimização utilizando-se o critério arbitrário de escolha de diâmetros

Para o critério de escolha dos diâmetros iniciais, observa-se o esquema 2 da figura 6.2.



Esquema 2

Figura 6.2 –Etapas da otimização utilizando-se o critério das velocidades admissíveis na escolha de diâmetros

onde

VD é a variável de decisão;

Na realização da otimização do problema em questão, utilizar-se-á o algoritmo GRG2, que é um código de programação não-linear geral, desenvolvido por Lasdon e Waren (1984) e que é baseado no método dos gradientes reduzidos descrito no capítulo referente a programação não linear. Este algoritmo é encontrado na ferramenta de otimização Solver, introduzido na planilha eletrônica Excel[®].

Abaixo estão relacionadas as etapas do dimensionamento.

6.2.1 – Função Objetivo para a 1ª etapa

1ª Etapa

Nesta fase, a função objetivo a ser minimizada é a seguinte:

$$C(D_i, Q_i^1, Q_i^2, H_{bomba}, H_{booster}) = \sum_{i=1}^m L_i (P(D_i)) \alpha + C_{hbomba1} \cdot H_{bomba1} + C_{hbooster1} \cdot H_{booster1} + C_{hbomba2} \cdot H_{bomba2} + C_{hbooster2} \cdot H_{booster2} \quad (6.1)$$

onde

$C(D_i, Q_i^1, Q_i^2, H_{bomba}, H_{booster})$ é o custo da rede em função dos diâmetros, vazões e alturas manométricas da bomba e do booster para as duas situações de contorno;

L_i comprimento do trecho i ;

$P(D_i)$ é a função que relaciona o preço da tubulação com o diâmetro;

m é o número de trechos da rede;

α é o coeficiente de amortização do custo das tubulações;

$C_{hbomba1}$ é o custo de operação da estação de bombeamento por unidade de impulsão para a situação de demanda máxima;

H_{bomba1} é a altura manométrica da bomba para a situação de demanda máxima;

$C_{hbomba2}$ é o custo de operação da estação de bombeamento por unidade de impulsão para a situação de demanda mínima;

H_{bomba2} é a altura manométrica da bomba para a situação de demanda mínima;

$C_{hbooster1}$ é o custo de operação do booster por unidade de impulsão para a situação de demanda máxima;

$H_{booster1}$ é a altura manométrica do booster para a situação de demanda máxima;

$C_{hbooster2}$ é o custo de operação do booster por unidade de impulsão para a situação de demanda mínima;

$H_{booster2}$ é a altura manométrica do booster para a situação de demanda mínima.

Para se obter a função que relaciona o custo da tubulação com o diâmetro, utilizou-se o programa computacional de ajuste de curvas encontrado no EXCEL®.

O coeficiente de amortização a , ou seja, o número que converte, monetariamente, um custo fixo, ou de investimento, em amortizações anuais de capital, é encontrado segundo a seguinte expressão:

$$a = \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \quad (6.2)$$

onde

a é o fator de amortização;

i é a taxa de juros, em decimal;

n é o período correspondente à vida útil das instalações do projeto.

De acordo com a equação básica de potência de conjuntos elevatórios, o custo de operação da estação de bombeamento, denominado de Ch , é expresso pela seguinte fórmula:

$$C_h = \frac{1}{101,96} \times \frac{Q}{\eta} \times n \times p \quad (6.3)$$

onde

Q é a vazão no trecho em (l/s);

η é o rendimento do conjunto motor-bomba;

n é o número de horas anual da estação de bombeamento;

p é o preço do KWh.

A função objetivo em questão está sujeita a um grupo de restrições, que são derivadas do tipo de sistema a ser dimensionado e das suas características, ou seja, se o mesmo contém bombas ou funciona pela força da gravidade, se contém válvulas ou boosters, se possui um ou mais reservatórios, entre outras características.

Para cada nó da rede, há uma restrição de pressão mínima e máxima, uma restrição de continuidade e uma restrição de equidade de pressão para o caso de se trabalhar com múltiplas fontes de abastecimento.

Para cada trecho da rede, tem-se uma restrição de diâmetros máximos e mínimos e uma restrição de velocidade máxima admissível e, para cada anel da rede uma restrição de conservação da energia.

Tem-se também restrições do modelo, ou seja, a não negatividade dos diâmetros, não negatividade dos comprimentos dos trechos, das alturas manométricas e das alturas dos reservatórios.

Para o caso de múltiplo abastecimento da rede, leva-se em conta duas situações de contorno, quais sejam, uma situação de demanda máxima e uma situação de demanda mínima. Portanto, para cada uma destas situações, faz-se necessário a formulação das equações de restrição acima, de modo a garantir o funcionamento desejado da rede em cada situação de funcionamento da mesma.

Estas duas situações de contorno se fazem necessárias devido ao fato de se trabalhar com múltiplas fontes de abastecimento da rede. No caso em questão tem-se como fontes uma estação de bombeamento, que capta água de um lençol subterrâneo, e abastece a rede durante todo o período do dia e, dois reservatórios localizados em dois nós diferentes da rede que abastecem à mesma conjuntamente com a estação de bombeamento em determinado período do dia. Em um outro período, considerado de demanda mínima, os reservatórios são completados pela estação de bombeamento que, além de abastecer os reservatórios, abastece a rede.

Daí se considerar no dimensionamento as duas situações de contorno, pois se a rede fosse dimensionada unicamente para a situação de demanda máxima, poderia acontecer que no período de demanda mínima, em que a estação de bombeamento abastece a rede e os reservatórios, não se conseguisse pressão suficiente para completar estes reservatórios, pois quando se dimensiona rede de distribuição utilizando técnicas de otimização, tende-se a se

encontrar valores mínimos de diâmetros nos trechos localizados a uma maior distância da cabeceira da rede, isto devido a se encontrar nestes trechos as menores vazões possíveis, podendo inclusive obter-se vazão nula em determinado trecho. Portanto, para evitar este problema, ou seja, um aumento considerado da perda de carga devido a diminuição excessiva do diâmetro e, conseqüente perda de vazão, e assim não ser possível se completar os reservatórios, utilizam-se as duas situações de contorno no dimensionamento, quais sejam, a situação de demanda máxima e de demanda mínima.

Com isso, faz-se necessário garantir que a altura manométrica na cabeceira da rede, que também está sendo otimizada, diminuída das perdas nos trechos, forneça pressão suficiente para abastecer os reservatórios durante a situação de demanda mínima, vencendo assim as alturas dos mesmos, que também são otimizadas.

Outra característica presente na situação de demanda mínima é que devido ao abastecimento da rede nesta situação ser realizado por apenas uma fonte, não é necessária a formulação da restrição que garanta igualdade de pressão em qualquer nó, independentemente da fonte que abasteça o mesmo. Isso resulta na não formulação desta restrição para a demanda mínima, sendo exceção ao comentado anteriormente, em que foi dito que para cada situação de contorno, têm-se às mesmas equações de restrição.

6.2.2 – Restrições para a situação de demanda máxima

1ª) Restrição de pressões mínima e máxima nos nós

Por esta restrição se garante uma pressão suficiente para o atendimento das demandas necessárias em cada nó, sem prejuízo ao abastecimento da rede. Com isso, tem-se que as pressões nos nós da rede fornecidas por quaisquer das fontes não devem ser inferiores a uma pressão pré-determinada pelo projetista, nem superiores a outra pressão, também pré-determinada, seguindo orientação da norma brasileira de redes de distribuição de água para abastecimento público (NBR-12218/94 e NB-594/77). Assim, cada nó da rede possui a seguinte equação:

$$Z_w^{\max} \geq H_{\text{bomba}} + CT \pm \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k^{\min} \quad (6.4)$$

onde

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

CT é a cota do terreno na cabeceira da rede;

Z_k^{min} é a cota piezométrica mínima requerida no nó k ;

Z_k^{max} é a cota piezométrica máxima estabelecida no nó k ;

$\sum_{c=1}^k J_c$ é o somatório das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e o nó k .

2ª) Restrição de diâmetros máximos e mínimos

Os diâmetros da rede a ser dimensionada deverão estar compreendidos entre um intervalo de diâmetros máximos e mínimos.

$$D_{min} \leq D_i \leq D_{max} \quad (6.5)$$

onde

D_{min} é o diâmetro mínimo adotado;

D_i é o diâmetro do trecho i ;

D_{max} é o diâmetro máximo adotado.

3ª) Restrição da conservação de energia nos anéis

Segundo esta restrição, em cada anel da rede o somatório das perdas de carga é nulo, ou seja, escolhendo-se um nó qualquer do anel, o somatório das perdas de carga obtidos por um percurso, é igual ao somatório das perdas de carga encontradas pelo caminho oposto.

$$\sum_{i=1}^{Z_k} J_i - \sum_{j=1}^{p_k} Ep_j = 0 \quad (6.6)$$

onde

J_i é a perda de carga no trecho i ;

Z_k é o número de trechos no anel k em questão;

Ep_j é a energia de impulsão aplicada na malha ou anel;

P_k é o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel k .

4ª) Restrição da continuidade nos nós

Por esta restrição a soma das vazões que afluem a um nó qualquer da rede, tem que ser igual à soma das vazões que efluem do mesmo. Esta restrição é determinada para cada nó da rede, exceto os nós 1,8 e 9 devido a não existência de entradas de vazões nestes nós na situação de demanda máxima, pois, nesta situação as vazões destes nós só efluem.

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra(i)} - \sum_{j=1}^{q_n} Q_{sai(j)} = d_n \quad (6.7)$$

onde

$Q_{entra(i)}$ são as vazões dos trechos i que influem no nó n ;

$Q_{sai(j)}$ são as vazões dos trechos j que efluem do nó n ;

d_n é a demanda requerida no nó n ;

k_n é o número de trechos com vazões influindo no nó n ;

q_n é o número de trechos com vazões efluindo do nó n .

5ª) Restrição da velocidade máxima admissível

Teoricamente não existe necessidade de se fixar um limite para a velocidade dentro das tubulações em redes de distribuição de água. O problema é que à medida que se aumenta a velocidade, aumentam-se também as perdas de carga, fazendo com que aumente o custo da energia de bombeamento necessária para vencer esta perda. Também pode ocorrer um desgaste das tubulações e peças acessórias, um aumento na corrosão dos tubos, a ocorrência de ruídos desagradáveis, entre outros problemas. Segundo Azevedo Netto (1973), a velocidade máxima da água nos encanamentos, geralmente, depende dos seguintes fatores:

- a) condições econômicas;
- b) condições relacionadas ao bom funcionamento dos sistemas;
- c) limitação da perda de carga;
- d) desgaste das tubulações e peças acessórias (erosão);
- e) controle da corrosão;
- f) ruídos desagradáveis.

Com isso, limitar-se-á neste trabalho as velocidades em cada trecho, através da seguinte equação de restrição:

$$V_i \leq V_{m\acute{a}x} \quad (6.8)$$

onde

V_i é a velocidade média do trecho i , encontrada através da equação da continuidade;
 $V_{m\acute{a}x}$ é a velocidade máxima admitida para cada trecho.

6ª) Restrição da equidade de pressão nos nós

Esta restrição garante que a cota piezométrica em um nó qualquer da rede seja única, independentemente de onde provenha a água. Com isso, tem-se que independentemente da água provir de qualquer reservatório ou da bomba, a pressão em determinado nó é sempre a mesma. Assim, garante-se que não haja mais de um valor de pressão em determinado nó, o que seria impossível de ocorrer.

Como tem-se a garantia da equação de restrição número três, ou seja, o somatório das perdas de carga em cada anel da rede resulta em um valor nulo, é suficiente nesta 6ª equação de restrição que se formule uma única equação para um nó qualquer da rede, garantindo-se assim, a mesma restrição para todos os outros nós da respectiva rede.

Ao contrário das outras equações de restrição, que são formuladas para cada situação de contorno, demanda máxima e demanda mínima, esta restrição não será formulada para a situação de demanda mínima, pois nesta situação (demanda mínima) a rede só será abastecida pela bomba, que fornecerá água aos reservatórios e à rede. Portanto, não será necessário garantir esta restrição para a situação de demanda mínima.

$$H_{R1} - \sum_{i=1}^k J^1_{in} = H_{R2} - \sum_{i=1}^y J^2_{in} = H_{bomba1} - \sum_{i=1}^w J^1_{in} = \dots = H_{bomba(m)} - \sum_{i=1}^x J^m_{in} = \dots = H_{R(m)} - \sum_{i=1}^s J^m_{in} \quad (6.9)$$

onde

H_R é a cota do reservatório;

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

$\sum_{i=1}^k J^1_{in}$ é a perda de carga entre o reservatório 1 e o nó n ;

$\sum_{i=1}^y J^2_{in}$ é a perda de carga entre o reservatório 2 e o nó n ;

$\sum_{i=1}^w J^1_{in}$ é a perda de carga entre a bomba 1 e o nó n ;

m é o número de bombas ou de reservatórios;

k, y, w são os números de trechos entre o nó n e os reservatórios 1, 2 e m respectivamente;

x e s são os números de trechos entre o nó n e as bombas 1 e m respectivamente;

Formuladas as equações de restrição para a situação de demanda máxima, realiza-se o mesmo procedimento para a situação de demanda mínima.

Para esta situação têm-se algumas diferenças em relação as equações de restrição da situação de demanda máxima, que ocorrem principalmente na última restrição, ou seja, na restrição de equidade de pressão nos nós, em que nesta etapa esta restrição não se faz presente pelo motivo já exposto anteriormente.

Outra diferença ocorre com relação à necessidade de se garantir que a bomba consiga vencer as perdas de carga entre ela e os reservatórios e consiga enchê-los em tempo hábil, ou seja, nas horas disponíveis durante à noite. Esta restrição não existe na situação de demanda máxima, pois, nesta situação, a bomba não abastece os reservatórios, abastecendo unicamente à rede em conjunto com os mesmos. Portanto, na situação de demanda máxima, só é necessário garantir a pressão mínima requerida em cada nó, o que foi feito na primeira restrição.

Também ocorrerá alguma diferença em relação aos sinais encontrados nas respectivas equações de restrição. Isto se dá quando os sentidos das vazões adotados para as situações de contorno diferem entre si.

6.2.3 – Restrições para situação de demanda mínima

1ª) Restrição das pressões mínima e máxima nos nós

De acordo com a primeira restrição da situação de contorno para demanda máxima, as pressões mínima e máxima em cada nó deverão ser pré-determinadas, o mesmo acontecendo para a situação de contorno de demanda mínima. Ocorre, porém, uma divergência daquela restrição, que se dá com relação à necessidade de se garantir, nesta situação, o abastecimento dos reservatórios 1 e 2 nos nós 1 e 8, respectivamente, ocorrendo assim duas restrições a mais das existentes na situação de demanda máxima.

Portanto, tem-se, para cada nó da rede, uma equação de restrição, com exceção do nó 9, pois o mesmo não recebe água, só fornece.

Então, para os nós que contenham os reservatórios a serem enchidos durante esta situação (demanda mínima), há as seguintes equações de restrição:

$$H_{\text{bomba}} + CT - \sum_{c=1}^k J_c \geq H_{R\ k}^n + CT_k \quad (6.10)$$

onde

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

CT é a cota do terreno na cabeceira da rede;

$H_{R\ k}^n$ é a cota do reservatório n no nó k ;

$\sum_{c=1}^k J_c$ é o somatório das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso

compreendido entre a cabeceira e o nó k .

As equações de restrição para os demais nós são as seguintes:

$$Z_w^{m\acute{a}x} \geq H_{bomba} + CT \pm \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k^{min} \quad (6.11)$$

onde

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

CT é a cota do terreno na cabeceira da rede;

Z_k^{min} é a cota piezométrica mínima requerida no nó k ;

$Z_k^{m\acute{a}x}$ é a cota piezométrica máxima estabelecida no nó k ;

$\sum_{c=1}^k J_c$ é o somatório das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e o nó k .

2ª) Restrição dos diâmetros mínimos e máximos

Estas restrições são idênticas àquelas para a situação de contorno de demanda máxima.

$$Dmin \leq Di \leq Dm\acute{a}x \quad (6.12)$$

onde

$Dmin$ é o diâmetro mínimo adotado;

Di é o diâmetro do trecho i ;

$Dm\acute{a}x$ é o diâmetro máximo adotado.

3ª) Restrição da conservação de energia nos anéis

Esta restrição difere da terceira restrição formulada para a situação de contorno de demanda máxima, unicamente com relação aos sinais das perdas de carga, pois os sentidos dos escoamentos diferem para cada situação de contorno. Porém a equação básica é a mesma.

$$\sum_{i=1}^{Z_k} J_i - \sum_{j=1}^{F_k} Ep_j = 0 \quad (6.13)$$

onde

J_i é a perda de carga no trecho i ;

Z_k é o número de trechos no anel k em questão;

Ep_j é a energia de impulsão aplicada na malha ou anel;

P_k é o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel k .

4ª) Restrição da continuidade nos nós

O princípio básico desta restrição é o mesmo da quarta restrição na situação de demanda máxima, ou seja, o somatório das vazões que influem ao nó são idênticas às que efluem do mesmo.

A diferença encontrada nesta restrição, deve-se ao fato de que para esta situação de contorno os nós que contêm os reservatórios a serem abastecidos pela bomba, agora possuem demanda, ou seja, uma vazão necessária para encher os volumes dos mesmos. Portanto, nesta situação aparecerão mais duas restrições, quando comparadas com a restrição na situação de demanda máxima, sendo representadas da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra(i)} = d_n \quad (6.14)$$

onde

$Q_{entra(i)}$ são as vazões dos trechos i que influem no nó n ;

d_n é a demanda requerida no nó n ;

k_n é o número de trechos com vazões influenciando no nó n ;

Para os outros nós da rede, as equações de restrição são as mesmas daquelas formuladas para a situação de demanda máxima, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra(i)} - \sum_{j=1}^{q_n} Q_{sai(j)} = d_n \quad (6.15)$$

onde

$Q_{entra(i)}$ são as vazões dos trechos i que influem no nó n ;

$Q_{sai(j)}$ são as vazões dos trechos j que efluem do nó n ;

d_n é a demanda requerida no nó n ;

k_n é o número de trechos com vazões fluindo no nó n ;

q_n é o número de trechos com vazões efluindo do nó n .

5ª) Restrição da velocidade máxima admissível

Estas equações de restrição são idênticas às formuladas na situação de demanda máxima, ou seja:

$$V_i \leq V_{\text{máx}} \quad (6.16)$$

onde

V_i é a velocidade média do trecho i , encontrada através da equação da continuidade;

$V_{\text{máx}}$ é a velocidade máxima admitida para cada trecho.

6.2.4 – Função Objetivo para a 2ª etapa

Com os resultados obtidos na otimização da primeira etapa do problema, torna-se a executar uma nova otimização, realizada em uma segunda etapa do processo.

Nesta etapa do dimensionamento, para cada trecho da rede, o diâmetro contínuo, obtido na primeira etapa, é desdobrado em dois diâmetros comerciais, sendo um imediatamente superior e o outro o imediatamente inferior ao encontrado. Com isso, ocorrerá uma mudança na Função Objetivo a ser otimizada, pois as variáveis de decisão não são iguais às encontradas na função objetivo da primeira etapa. Com isso, os diâmetros, que eram variáveis de decisão na função objetivo da primeira etapa do dimensionamento, não mais serão, tendo em vista que os mesmos são agora conhecidos. No lugar dos diâmetros, entram os comprimentos dos trechos que são divididos em subtrechos a serem otimizados. As outras variáveis de decisão permanecem às mesmas.

$$C(l_{ij}, Q_i^1, Q_i^2, H_{\text{bomba}}, H_{\text{booster}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 l_{i,j} (P(D_j))_i + C_{\text{hbomba}}^1 \cdot H_{\text{bomba}}^1 + C_{\text{hbooster}}^1 \cdot H_{\text{booster}}^1 + C_{\text{hbomba}}^2 \cdot H_{\text{bomba}}^2 + C_{\text{hbooster}}^2 \cdot H_{\text{booster}}^2 \quad (6.17)$$

onde

$C(l_{ij}, Q_i^1, Q_i^2, H_{bomba}, H_{booster})$ é o custo da rede em função dos comprimentos dos subtrechos, vazões e alturas manométricas da bomba e do booster para as duas situações de contorno;

l_{ij} comprimento ocupado pelo diâmetro D_j no trecho i considerado;

$P(D_j)_i$ é o preço unitário do tubo de diâmetro D_j no trecho i considerado;

m é o número de trechos da rede;

α é o coeficiente de amortização do custo de investimento das tubulações;

C_{hbomba}^1 é o custo de operação da estação de bombeamento por unidade de impulsão para a situação de demanda máxima;

H_{bomba}^1 é a altura manométrica da bomba para a situação de demanda máxima;

C_{hbomba}^2 é o custo de operação da estação de bombeamento por unidade de impulsão para a situação de demanda mínima;

H_{bomba}^2 é a altura manométrica da bomba para a situação de demanda mínima;

$C_{hbooster}^1$ é o custo de operação do booster por unidade de impulsão para a situação de demanda máxima;

$H_{booster}^1$ é a altura manométrica do booster para a situação de demanda máxima;

$C_{hbooster}^2$ é o custo de operação do booster por unidade de impulsão para a situação de demanda mínima;

$H_{booster}^2$ é a altura manométrica do booster para a situação de demanda mínima.

A função objetivo acima apresentada, tem as seguintes variáveis de decisão:

- a) os comprimentos dos subtrechos;
- b) as vazões dos trechos;
- c) a altura manométrica da bomba e;
- d) a altura manométrica do booster;

Nesta etapa do dimensionamento, como foi feito na primeira etapa, formulam-se equações de restrição para garantir um funcionamento adequado da rede de distribuição de água.

As equações de restrição elaboradas na primeira etapa do dimensionamento são as mesmas a serem formuladas nesta nova etapa, exceto com relação à segunda restrição da primeira etapa, ou seja, restrição dos diâmetros máximos e mínimos, que não será agora utilizada, pois o diâmetro não é mais variável de decisão.

Outra diferença entre as equações de restrição das duas etapas é que na segunda etapa, introduzem-se duas novas equações de restrição referentes a nova variável de decisão, ou seja, o comprimento dos subtrechos. Estas novas restrições irão garantir que a soma dos subtrechos tem que ser igual ao valor do trecho que contém estes subtrechos e que os comprimentos dos subtrechos não possuam valores negativos. Então, do mesmo modo que foi realizado na primeira etapa, têm-se equações de restrição para cada situação de contorno, ou seja, situação de demanda máxima e de demanda mínima.

Outra observação a ser destacada é que a perda de carga em um trecho será igual a soma das perdas de carga nos dois respectivos subtrechos. Com isso, para cada diâmetro obtido com o desmembramento do diâmetro encontrado, em cada trecho, na primeira etapa do dimensionamento, encontra-se a perda de carga dos respectivos diâmetros imediatamente superiores e inferiores ao diâmetro desdobrado. Com estas perdas de carga encontradas em cada subtrecho, realiza-se a soma das mesmas para se obter a perda de carga total nos trechos respectivos.

6.2.5 – Restrições para situação de demanda máxima

1ª) Restrição de pressões mínima e máxima nos nós

$$Z_w^{\max} \geq H_{\text{bomba}} + CT \pm \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k^{\min} \quad (6.18)$$

onde

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

CT é a cota do terreno na cabeceira da rede;

Z_k^{\min} é a cota piezométrica mínima requerida no nó k ;

Z_k^{\max} é a cota piezométrica máxima estabelecida no nó k ;

$\sum_{c=1}^k J_c$ é o somatório das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e o nó k .

2ª) Restrição de conservação de energia nos anéis

$$\sum_{i=1}^{Z_k} J_i - \sum_{j=1}^{P_k} Ep_j = 0 \quad (6.19)$$

onde

J_i é a perda de carga no trecho i ;

Z_k é o número de trechos no anel k em questão;

Ep_j é a energia de impulsão aplicada na malha ou anel;

P_k é o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel k .

3ª) Restrição da continuidade nos nós

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra(i)} - \sum_{j=1}^{q_n} Q_{sai(j)} = d_n \quad (6.20)$$

onde

$Q_{entra(i)}$ são as vazões dos trechos i que influem no nó n ;

$Q_{sai(j)}$ são as vazões dos trechos j que efluem do nó n ;

d_n é a demanda requerida no nó n ;

k_n é o número de trechos com vazões influenciando no nó n ;

q_n é o número de trechos com vazões efluindo do nó n .

4ª) Restrição da velocidade máxima admissível

$$V_i \leq V_{m\acute{a}x} \quad (6.21)$$

onde

V_i é a velocidade média do trecho i , encontrada através da equação da continuidade;

$V_{m\acute{a}x}$ é a velocidade máxima admitida para cada trecho.

5ª) Restrição da equidade de pressão nos nós

$$H_{R1} - \sum_{i=1}^k J^1_{in} = H_{R2} - \sum_{i=1}^y J^2_{in} = H_{bomba1} - \sum_{i=1}^w J^1_{in} = \dots = H_{bomba(m)} - \sum_{i=1}^x J^m_{in} = \dots = H_{R(m)} - \sum_{i=1}^s J^m_{in} \quad (6.22)$$

onde

H_R é a cota do reservatório;

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

$\sum_{i=1}^k J^1_{in}$ é a perda de carga entre o reservatório 1 e o nó n ;

$\sum_{i=1}^y J^2_{in}$ é a perda de carga entre o reservatório 2 e o nó n ;

$\sum_{i=1}^w J^1_{in}$ é a perda de carga entre a bomba 1 e o nó n ;

m é o número de bombas ou de reservatórios;

k, y, w são os números de trechos entre o nó n e os reservatórios 1, 2 e m respectivamente;

x e s são os números de trechos entre o nó n e as bombas 1 e m respectivamente;

6ª) Restrição da não negatividade dos subtrechos

$$l_{ij} \geq 0 \quad (6.23)$$

onde

l_{ij} é o comprimento do subtrecho j no trecho i

7ª) Restrição dos comprimentos dos subtrechos

$$\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} = L_i \quad (6.24)$$

onde

l_{ij} é o comprimento do subtrecho j no trecho i

L_i é o comprimento do trecho i

Formuladas as equações de restrição para a situação de demanda máxima, realiza-se a formulação das equações de restrição para a situação de demanda mínima, as quais são as mesmas das formuladas para a primeira etapa do dimensionamento da rede, também com a exceção dos diâmetros, que não são mais variáveis de decisão e com a inclusão das restrições dos comprimentos dos subtrechos, que nesta segunda etapa passam a ser variáveis de decisão e, portanto precisam ser incluídas nas equações de restrição.

6.2.6 – Restrições para situação de demanda mínima

1ª) Restrição de pressões mínima e máxima nos nós

Para os nós 1 e 8, tem-se:

$$H_{\text{bomba}} + CT - \sum_{c=1}^k J_c \geq H_{R^n}_k + CT_k \quad (6.25)$$

onde

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

CT é a cota do terreno na cabeceira da rede;

$H_{R^n}_k$ é a cota do reservatório n no nó k ;

$\sum_{c=1}^k J_c$ é o somatório das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso

compreendido entre a cabeceira e o nó k .

As equações de restrição para os demais nós são as seguintes:

$$Z_w^{\text{máx}} \geq H_{\text{bomba}} + CT \pm \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k^{\text{mín}} \quad (6.26)$$

onde

H_{bomba} é a altura manométrica da bomba;

CT é a cota do terreno na cabeceira da rede;

Z_k^{min} é a cota piezométrica mínima requerida no nó k ;

Z_k^{max} é a cota piezométrica máxima estabelecida no nó k ;

$\sum_{c=1}^k J_c$ é o somatório das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre a cabeceira e o nó k .

2ª) Restrição da conservação de energia nos anéis

$$\sum_{i=1}^{Z_k} J_i - \sum_{j=1}^{P_k} Ep_j = 0 \quad (6.27)$$

onde

J_i é a perda de carga no trecho i ;

Z_k é o número de trechos no anel k em questão;

Ep_j é a energia de impulsão aplicada na malha ou anel;

P_k é o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel k .

3ª) Restrição da continuidade nos nós

Para os nós 1 e 8, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra(i)} = d_n \quad (6.28)$$

onde

$Q_{entra(i)}$ são as vazões dos trechos i que influem no nó n ;

d_n é a demanda requerida no nó n ;

k_n é o número de trechos com vazões influenciando no nó n ;

Para os outros nós da rede, as equações de restrição são as mesmas daquelas formuladas para a situação de demanda máxima, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra(i)} - \sum_{j=1}^{q_n} Q_{sai(j)} = d_n \quad (6.29)$$

onde

$Q_{entra(i)}$ são as vazões dos trechos i que influem no nó n ;

$Q_{sai(j)}$ são as vazões dos trechos j que efluem do nó n ;

d_n é a demanda requerida no nó n ;

k_n é o número de trechos com vazões influenciando no nó n ;

q_n é o número de trechos com vazões efluindo do nó n .

4ª) Restrição da velocidade máxima admissível

$$V_i \leq V_{m\acute{a}x} \quad (6.30)$$

onde

V_i é a velocidade média do trecho i , encontrada através da equação da continuidade;

$V_{m\acute{a}x}$ é a velocidade máxima admitida para cada trecho.

5ª) Restrição da não negatividade dos subtrechos

$$l_{ij} \geq 0 \quad (6.31)$$

onde

l_{ij} é o comprimento do subtrecho j no trecho i

6ª) Restrição dos comprimentos dos subtrechos

$$\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} = L_i \quad (6.32)$$

onde

l_{ij} é o comprimento do subtrecho j no trecho i

L_i é o comprimento do trecho i

Capítulo VII

Resultados e Discussões

7.1 – Exemplo de aplicação

O exemplo apresentado (Figura 7.1) baseou-se na rede de distribuição contida no trabalho de ALPEROVITS e SHAMIR (1977), onde adotou-se do mesmo os principais dados do problema em questão, o que permitiu, com o acréscimo de outras variáveis, uma maior generalização ao problema, ou seja, a aplicação a casos mais frequentes da prática de um projeto de abastecimento.

Figura 7.1 - Situação de Máxima Demanda

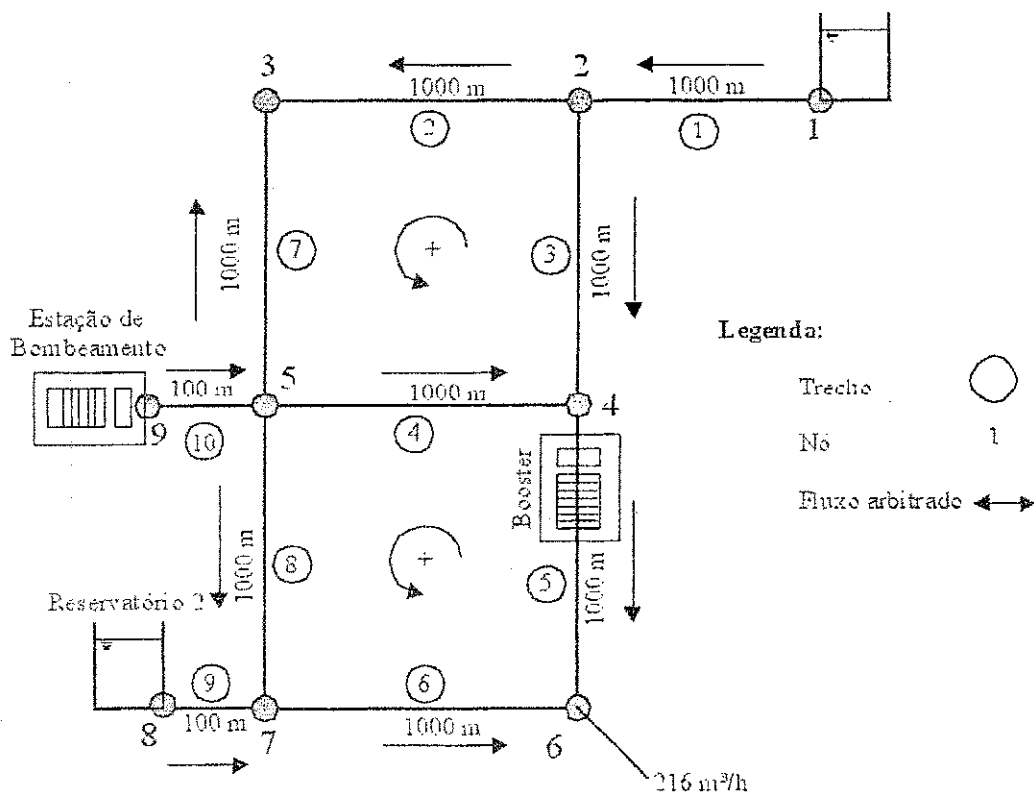
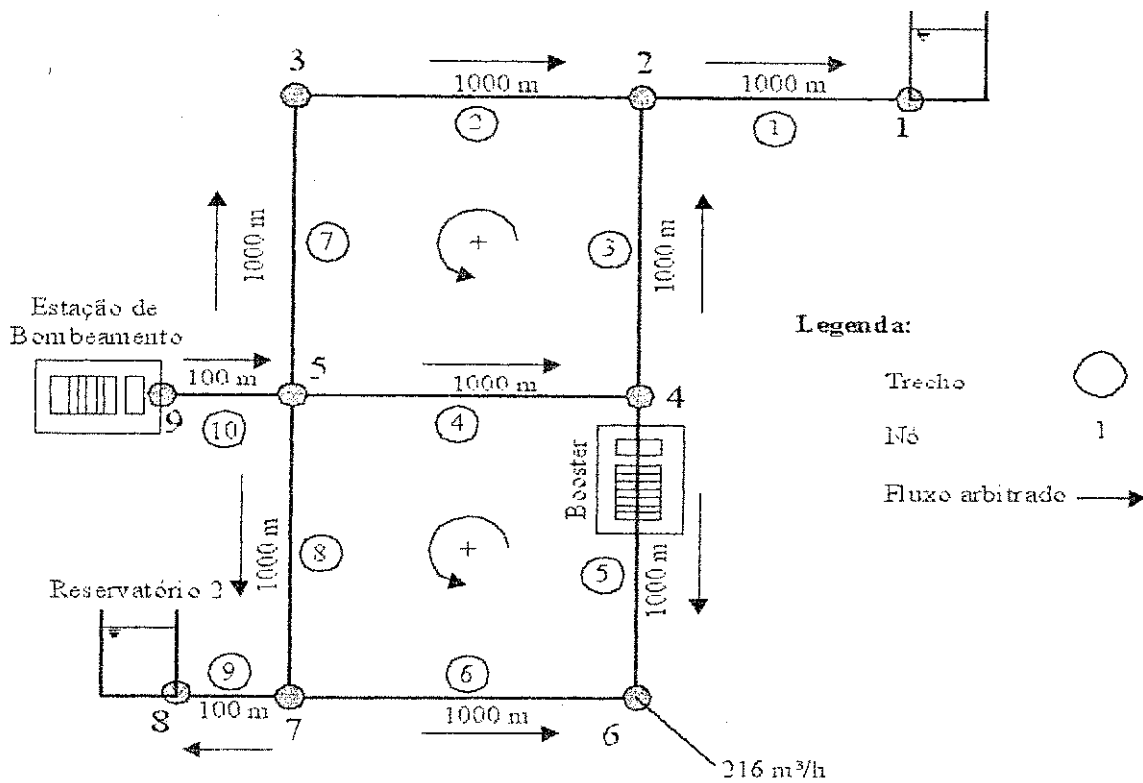


Figura 7.1 - Situação de Mínima Demanda

A rede consta de dez trechos, distribuídos em dois anéis, possuindo em seu interior uma estação elevatória (booster), com o intuito de fornecer energia de pressão à rede, para vencer o aparente desnível de cotas que a mesma possui. Durante o período das seis horas da manhã às vinte e duas horas, período estabelecido como de demanda máxima, ela é abastecida, simultaneamente, por três fontes:

- Estação de Bombeamento;
- Reservatório (R-1);
- Reservatório (R-2).

Durante o outro período, ou seja, das vinte e duas horas às seis horas, período estabelecido como de demanda mínima, a rede é abastecida unicamente pela estação de bombeamento que além de alimentá-la, alimenta também os dois reservatórios para que os mesmos, no próximo dia, estejam com as suas capacidades máximas de fornecimento de água.

No exemplo em questão as cotas dos reservatórios são variáveis a ser otimizadas em conjunto com as alturas manométricas da bomba e do booster.

Segundo a Norma de Projetos de Redes de Distribuição de Água para Abastecimento Público (NBR-12218/94) a pressão dinâmica mínima deve ser igual a 10 mca, porém, adotou-se no exemplo em questão 15 mca seguindo recomendação da Norma de Projetos Hidráulicos de Redes de Distribuição de Água Potável para Abastecimento Público (NB-594/77).

A equação utilizada para se calcular a perda de carga em cada trecho da rede foi a de Hazen-Williams, descrita abaixo:

$$h_f = \omega \left(\frac{Q}{C} \right)^a \frac{L}{D^b} \quad (\text{eq. 7.1})$$

Os coeficientes a , b , ω variam de pesquisador para pesquisador. Segundo Savic e Walters (1997) são os seguintes valores de coeficientes utilizados pelos diversos pesquisadores em questão, Tabela 7.1:

Tabela 7.1 – Coeficientes da equação de Hazen-Williams utilizados pelos autores citados, segundo Savic e Walters (1997)

| Autores | Coeficientes | | |
|----------------------------|--------------|----------|----------|
| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>w</i> |
| Alperovits e Shamir (1977) | 1.852 | 4.87 | 10.6792 |
| Alperovits e Shamir (1977) | 1.852 | 4.87 | 10.7109 |
| Quidry et al. (1981) | 1.852 | 4.8704 | 10.9031 |
| Ormsbee e Wood (1986) | 1.852 | 4.87 | 10.6866 |
| Gouter et al. (1986) | 1.852 | 4.8704 | 10.6658 |
| Kessler e Shamir (1989) | 1.852 | 4.8704 | 10.6792 |
| Fujiwara e Khang (1990) | 1.852 | 4.8704 | 10.5088 |
| Murphy e Simpson (1992) | 1.852 | 4.8704 | 10.6744 |
| Eiger et al. (1994) | 1.852 | 4.8704 | 10.6792 |
| Simpson et al. (1994) | 1.852 | 4.8704 | 10.6750 |

No presente exemplo, utilizou-se os coeficientes utilizados por Gomes (1997), quais sejam:

$$\omega = 10.66;$$

$$a = 1.852;$$

$$b = 4.87.$$

Para se calcular a perda de carga unitária j das tubulações, utilizaram-se dois coeficientes (C) de Hazen-Williams: um para tubulações de PVC e outro para tubulações de Ferro Dúctil, ou seja, 130 e 145 respectivamente, pois para tubulações de até 300 mm utilizou-se PVC e, acima desse valor, Ferro Fundido, apesar de saber-se que atualmente já existem tubulações feitas com PVC para diâmetros de até 500 mm.

O tempo de vida útil do projeto foi estimado em vinte (20) anos; a taxa de juros no período considerou-se em 12% ao ano e o custo da energia foi estimado em 12 unidades monetárias (Umt).

Os outros dados utilizados no exemplo, inclusive os diâmetros iniciais adotados para as soluções que resultaram custo mínimo, estão demonstrados nas tabelas a seguir:

Tabela 7.2 – Comprimento dos trechos da rede

| Trecho | Comprimento (m) |
|--------|-----------------|
| 1 | 1000 |
| 2 | 1000 |
| 3 | 1000 |
| 4 | 1000 |
| 5 | 1000 |
| 6 | 1000 |
| 7 | 1000 |
| 8 | 1000 |
| 9 | 100 |
| 10 | 100 |

Tabela 7.3 – Cotas do terreno nos nós da rede

| Nó | Cotas do Terreno (m) |
|----|----------------------|
| 1 | 168 |
| 2 | 170 |
| 3 | 180 |
| 4 | 175 |
| 5 | 170 |
| 6 | 185 |
| 7 | 180 |
| 8 | 175 |
| 9 | 165 |

Tabela 7.4 – Demandas máximas e mínimas nos nós da rede

| Nó | Demanda Máxima (m3/h) | Demanda Mínima (m3/h) |
|-----------|------------------------------|------------------------------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 100 | 0 |
| 3 | 100 | 0 |
| 4 | 120 | 0 |
| 5 | 270 | 0 |
| 6 | 546 | 216 |
| 7 | 200 | 0 |
| 8 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 |

Tabela 7.5 – Preços unitários de diâmetros

| Diâmetros (mm) | Custo Unitário (UMT/m) |
|-----------------------|-------------------------------|
| 150 | 4054 |
| 200 | 5769 |
| 250 | 7718 |
| 300 | 9237 |
| 350 | 11012 |
| 400 | 12397 |
| 450 | 15501 |
| 500 | 17696 |
| 600 | 23132 |

Tabela 7.6 – Valores iniciais de diâmetros (arbitrários)

| Trecho | Comprimento (m) | Diâmetro (mm) | Vazão (m ³ /h) |
|--------|-----------------|---------------|---------------------------|
| 1 | 1000 | 600 | 318 |
| 2 | 1000 | 450 | 50 |
| 3 | 1000 | 500 | 168 |
| 4 | 1000 | 500 | 180 |
| 5 | 1000 | 600 | 228 |
| 6 | 1000 | 500 | 318 |
| 7 | 1000 | 450 | 50 |
| 8 | 1000 | 500 | 200 |
| 9 | 100 | 600 | 318 |
| 10 | 100 | 600 | 700 |

Tabela 7.7 – Valores iniciais de diâmetros (velocidade adotada 1 m/s)

| Trecho | Comprimento (m) | Diâmetro (mm) | Vazão (m ³ /h) |
|--------|-----------------|---------------|---------------------------|
| 1 | 1000 | 335 | 318 |
| 2 | 1000 | 133 | 50 |
| 3 | 1000 | 244 | 168 |
| 4 | 1000 | 252 | 180 |
| 5 | 1000 | 284 | 228 |
| 6 | 1000 | 335 | 318 |
| 7 | 1000 | 133 | 50 |
| 8 | 1000 | 266 | 200 |
| 9 | 100 | 335 | 318 |
| 10 | 100 | 498 | 700 |

Para aplicar-se a formulação do modelo de Programação Não Linear, tem-se que determinar inicialmente:

- a) uma função que relacione o preço da tubulação com o diâmetro;
- b) custo unitário de operação da estação elevatória;
- c) coeficiente de amortização do capital investido, em função da taxa de juros adotada e do tempo estimado de vida útil da obra.

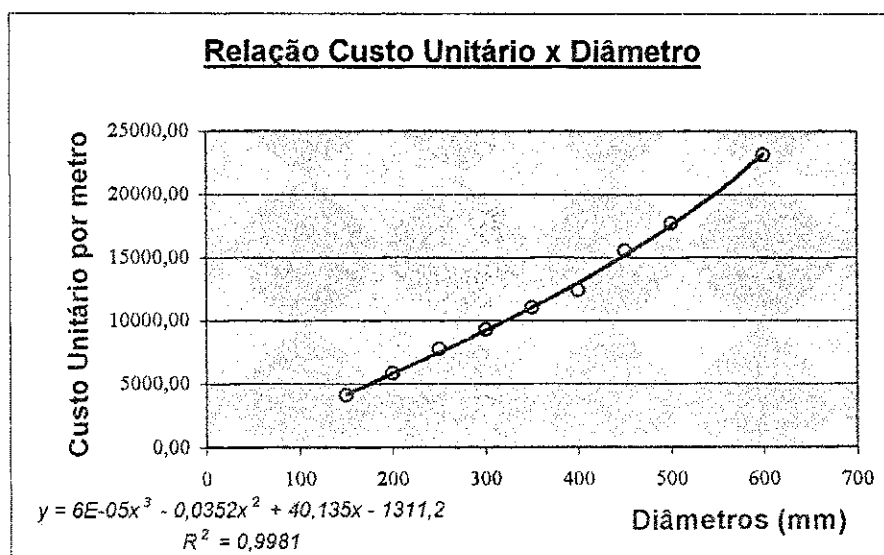
Para a obtenção da função que relaciona o custo da tubulação por metro linear com o diâmetro, utilizou-se o programa de ajuste de curvas do EXCEL que fornece a melhor relação desejada.

No exemplo em questão, utilizando-se os dados constantes na Tabela 7.5 e o programa de ajuste de curvas do EXCEL, encontrou-se a seguinte curva de ajuste:

$$y = 6E-05 x^3 - 0.0352 x^2 + 40.135 x - 1311.20 \quad (7.2)$$

Esta curva foi obtida com base no gráfico apresentado na Figura 7.2 abaixo, sendo utilizado o recurso de adicionamento de linha de tendências do EXCEL.

Figura 7.2 – Relação custo unitário x diâmetro das tubulações



Como no problema em questão houve a utilização de uma estação de bombeamento para o abastecimento da rede de distribuição de água e para o enchimento dos reservatórios 1 e 2, então levou-se em consideração, na função objetivo a ser minimizada, o custo da energia a ser utilizada nessa operação, já que o mesmo influi consideravelmente no custo total do sistema.

O custo unitário de operação da estação elevatória, o qual denomina-se de C_h , é determinado de acordo com a seguinte expressão:

$$C_h = \frac{1}{101,96} \times \frac{Q}{\eta} \times n \times p \quad (7.3)$$

onde:

Q é a vazão no trecho em que localizam-se a bomba e o booster em l/s;

η é o rendimento do conjunto motor-bomba;

n é o número de horas anual da estação de bombamento;

p é o preço do KWh.

No exemplo em questão, consideraram-se os seguintes dados:

$$\eta = 75\%;$$

$$n_{diurno} = 5840 \text{ horas};$$

$$n_{noturno} = 2920 \text{ horas};$$

$$p = 12 \text{ Umt.}$$

O fator de amortização, ou seja, o número que converte monetariamente, um custo fixo ou de investimento, em amortizações anuais do capital, foi encontrado de acordo com a fórmula abaixo, segundo o “Sistema Francês de Amortização”:

$$a = \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \quad (7.4)$$

onde

a é o fator de amortização;

i é a taxa de juros, em decimal;

n é o período correspondente à vida útil das instalações do projeto.

No caso em questão, foram utilizados os seguintes dados, correspondentes aos valores acima citados:

$$i = 12\% \text{ ao ano};$$

$$n = 20 \text{ anos.}$$

Aplicando estes valores na Equação 7.4, encontra-se o seguinte valor para o fator de amortização: $\alpha = 0.1339$

A partir dos dados apresentados anteriormente, realizou-se o dimensionamento ótimo, que, como visto no capítulo anterior, foi dividido em três etapas.

Na primeira etapa tem-se um pré-dimensionamento, onde é formulada uma função objetivo que possui como variáveis de decisão as vazões nos trechos, os diâmetros dos mesmos e as alturas manométricas de bombeamento da bomba e do booster. Nesta primeira etapa encontram-se valores de diâmetros e vazões para os trechos da rede e a altura manométrica da bomba e do booster, com um custo mínimo.

Na segunda etapa, com os valores obtidos anteriormente, formula-se nova função objetivo com novas variáveis de decisão, quais sejam, vazões nos trechos, comprimento dos subtrechos, altura manométrica da bomba e do booster. São então determinados os valores definitivos da rede, ou seja, as vazões dos trechos, os diâmetros dos mesmos, os comprimentos dos subtrechos para cada diâmetro encontrado e as alturas manométricas de bombeamento da bomba e do booster.

Como colocado no capítulo anterior, essas duas etapas expostas acima, são realizadas para diversos conjuntos de valores de diâmetros iniciais, ou seja, os diâmetros tomados arbitrariamente e tomados com base em valores prefixados de velocidades máximas admissíveis (0,5 a 3,5 m/s), resultando assim, para cada conjunto de valores iniciais, um dimensionamento específico, com seu respectivo custo.

A partir destas soluções tem-se uma terceira etapa, onde escolhe-se aquela que fornece o menor custo final para cada um dos critérios escolhidos na adoção dos diâmetros iniciais.

O início do problema se dá com a formulação da função objetivo para a primeira etapa do dimensionamento, a partir dos dados apresentados anteriormente.

7.2 - 1ª Etapa

7.2.1 – Função Objetivo

A função objetivo a ser minimizada é expressa em função dos diâmetros, vazões e alturas manométricas da estação de bombeamento e da estação de bombeamento booster.

Como têm-se duas condições de contorno, quais sejam, uma que considera as demandas máximas da rede em determinado período do dia e outra que considera as demandas mínimas da rede no outro período, a função objetivo e as equações de restrição são formuladas para que as duas situações sejam resolvidas, simultaneamente, na otimização. A função objetivo leva em consideração o preço da tubulação para a condição de demanda máxima, pois é a situação mais desfavorável; porém, no cálculo da energia de bombeamento as duas condições de contorno (demanda máxima e mínima) estarão expressas na função, pois a bomba e o booster operam todas as horas do dia e da noite.

Portanto, a função objetivo em questão está expressa na equação 6.1:

Como o exemplo em questão constitui-se de uma rede que possui dez trechos, tem-se, então, os valores de dez custos de diâmetros, multiplicados pelos respectivos comprimentos de cada trecho em questão. Estes valores são multiplicados pelo fator de amortização para transformar este custo fixo em um custo variável ao longo dos anos da vida útil do projeto. Adicionado a este custo, tem-se o custo de energia necessário ao bombeamento, tanto da bomba quanto do booster, para as duas condições de contorno. Assim, tem-se:

$$C(D_i, Q_i^1, Q_i^2, H_{bomba}, H_{booster}) = [1000 P(D1) + 1000 P(D2) + 1000 P(D3) + 1000 P(D4) + 1000 P(D5) + 1000 P(D6) + 1000 P(D7) + 1000 P(D8) + 100 P(D9) + 100 P(D10)] a + C_{h1} H_{bomba1} + C_{h2} H_{bomba2} + C_{h1} H_{booster1} + C_{h2} H_{booster2} \quad (7.5)$$

Substituindo os termos pelos respectivos valores,

$$\begin{aligned}
C(D_i, Q_i^1, Q_i^2, H_{bomba}, H_{booster}) = & [1000 (6 \times 10^{-5} \times D_1^3 - 0.0352 \times D_1^2 + 40.135 \times D_1 - \\
& 1311.20) + 1000 (6 \times 10^{-5} \times D_2^3 - 0.0352 \times D_2^2 + 40.135 \times D_2 - 1311.20) + 1000 (6 \times 10^{-5} \\
& \times D_3^3 - 0.0352 \times D_3^2 + 40.135 \times D_3 - 1311.20) + 1000 (6 \times 10^{-5} \times D_4^3 - 0.0352 \times D_4^2 + \\
& 40.135 \times D_4 - 1311.20) + (6 \times 10^{-5} \times D_5^3 - 0.0352 \times D_5^2 + 40.135 \times D_5 - 1311.20) + \dots + \\
& 100 (6 \times 10^{-5} \times D_9^3 - 0.0352 \times D_9^2 + 40.135 \times D_9 - 1311.20) + 100 (6 \times 10^{-5} \times D_{10}^3 - \\
& 0.0352 \times D_{10}^2 + 40.135 \times D_{10} - 1311.20)] 0.1339 + 1355.83 Q_{10}^1 H_{bomba1} + 1355.83 Q_{10}^2 \\
& H_{bomba2} + 1355.83 Q_5^1 H_{booster1} + 1355.83 Q_5^2 H_{booster2}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

7.2.2 – Restrições para situação de demanda máxima

1ª) Pressão mínima e máxima nos nós

De acordo com a Norma Brasileira de Redes de Distribuição de Águas para Abastecimento Público – NBR 12218/92, a pressão dinâmica mínima a ser adotada nos nós para garantir um abastecimento seguro de falhas, é de 100 KPa (10 mca), porém adotar-se-á, obedecendo a antiga Norma de Redes de Distribuição de Água Potável – NB 594/77, a pressão mínima de 150 Kpa (15 mca).

De acordo com a mesma norma, a pressão máxima a ser obedecida é de 500 Kpa (50 mca), o que também se garante com esta restrição.

Com isso, em todos os nós da rede, tem-se a garantia de uma pressão de no mínimo 15 mca e no máximo 50 mca, o que contribui para o correto funcionamento do sistema sem danificar os componentes do mesmo.

Para cada nó, tem-se duas equações de restrição, devido às duas condições de contorno (demanda máxima e mínima). Para a situação de demanda mínima, tem-se que garantir a pressão mínima necessária para encher os dois reservatórios. Portanto, tem-se dezoito (18) equações de restrição a serem desenvolvidas em cada situação de contorno.

Outra importante consideração é que, na determinação do caminho a ser percorrido para o nó em questão, leva-se em conta o caminho mais curto, para facilitar o cálculo computacional, pois um caminho mais curto gera equações de restrição menores.

Assim, tem-se o seguinte:

Considerando H_{bomba} a altura manométrica de bombeamento e CT a cota do terreno na cabeceira da rede, então a cota de cabeceira Z é dada por:

$$Z = H_{\text{bomba}} + \text{CT} \quad (7.7)$$

$$Z = H_{\text{bomba}} + 165 \quad (7.8)$$

$$\text{Nó 1: } 50 + 168 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_7 + 1000 j_2 + 1000 j_1 \geq 15 + 168 \quad (7.9)$$

$$\text{Nó 2: } 50 + 170 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_7 + 1000 j_2 \geq 15 + 170 \quad (7.10)$$

$$\text{Nó 3: } 50 + 180 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_7 \geq 15 + 180 \quad (7.11)$$

$$\text{Nó 4: } 50 + 175 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_4 \geq 15 + 175 \quad (7.12)$$

$$\text{Nó 5: } 50 + 170 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} \geq 15 + 170 \quad (7.13)$$

$$\text{Nó 6: } 50 + 185 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_8 - 1000 j_6 \geq 15 + 185 \quad (7.14)$$

$$\text{Nó 7: } 50 + 180 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_8 \geq 15 + 180 \quad (7.15)$$

$$\text{Nó 8: } 50 + 175 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_8 + 100 j_9 \geq 15 + 175 \quad (7.16)$$

$$\text{Nó 9: } 50 + 165 \geq H_{\text{bomba}} + 165 \geq 15 + 165 \quad (7.17)$$

A perda de carga unitária (j_i) será encontrada com base na equação de Hazen-Williams, como citado anteriormente.

2ª) Diâmetros Máximos e Mínimos

De acordo com a atual Norma de Redes de Distribuição de Água para Abastecimento Público (NBR-12218/92), não existe restrição quanto ao diâmetro mínimo das tubulações principais, mas há restrição quanto ao diâmetro mínimo das tubulações secundárias. Segundo a mesma, “o diâmetro mínimo dos tubos secundários é de 50 mm”.

Com o exposto acima, é prudente utilizar-se o que diz a Norma de Redes de Distribuição de Água anterior, ou seja, a NB-594/77. A Norma diz que “o diâmetro mínimo das tubulações principais de redes de distribuição de água, calculadas como redes malhadas

será igual a, 150 mm quando abastecendo zonas comerciais ou residenciais com densidade igual ou superior a 150 hab/km²". Portanto, utilizar-se-á esta restrição.

Quanto ao diâmetro máximo, não existe restrição, mas adotar-se-á um diâmetro máximo de 600 mm devido a não se proporcionar uma sobrecarga de cálculos no modelo.

Com isso, como no problema em questão há 10 trechos e que para cada trecho deve haver duas restrições, quais sejam, diâmetros máximos e mínimos, têm-se quanto aos diâmetros vinte restrições para cada situação de contorno.

$$150 \text{ mm} \leq D1 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.18)$$

$$150 \text{ mm} \leq D2 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.19)$$

$$150 \text{ mm} \leq D3 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.20)$$

$$150 \text{ mm} \leq D4 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.21)$$

$$150 \text{ mm} \leq D5 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.22)$$

$$150 \text{ mm} \leq D6 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.23)$$

$$150 \text{ mm} \leq D7 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.24)$$

$$150 \text{ mm} \leq D8 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.25)$$

$$150 \text{ mm} \leq D9 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.26)$$

$$150 \text{ mm} \leq D10 \leq 600 \text{ mm} \quad (7.27)$$

3ª) Conservação de Energia nos Anéis

Segundo esta restrição, garante-se que em cada anel, o somatório das perdas de carga seja nulo, ou seja, escolhendo-se um nó qualquer do anel, o somatório das perdas de carga obtidas por um determinado percurso é igual ao somatório das perdas de cargas encontradas pelo percurso oposto.

Nesta etapa do problema tem-se que cada anel possui uma equação de restrição. Como o problema possui dois anéis, tem-se duas equações de restrição para cada situação de contorno, ou seja, demanda máxima e mínima.

Este caso envolve uma particularidade, que é a existência de um conjunto motor-bomba inserido em um anel da rede, o qual fornece energia à mesma para que se possa vencer o desnível topográfico do terreno e garantir a pressão mínima nos nós a jusante do mesmo. Este conjunto motor-bomba, denomina-se booster.

Com isso, tem-se dois anéis com características diversas. Um possuindo uma energia introduzida na rede e outro não.

Assim, para a situação de demanda máxima as restrições são as seguintes:

$$\text{Anel ①: } 1000 j_2 - 1000 j_3 + 1000 j_4 - 1000 j_7 = 0 \quad (7.28)$$

$$\text{Anel ②: } -1000 j_4 - 1000 j_5 + 1000 j_6 + 1000 j_8 - H_{\text{booster}} = 0 \quad (7.29)$$

4ª) Continuidade nos Nós

Por esta restrição, tem-se que a soma das vazões que afluem em um nó qualquer da rede em estudo tem que ser igual a soma das vazões que efluem do mesmo.

Como a restrição em questão estuda o fluxo de vazões nos nós, tem-se para cada nó uma equação de restrição, excetuando-se, para a situação de demanda máxima, os nós 1, 8, 9 que são os nós respectivos dos reservatórios R1, R2 e da estação de bombeamento, os quais nesta situação não possuem demanda, apenas fornecendo vazões à rede.

Situação diversa ocorre quando se encontra na condição de demanda mínima, pois os nós dos reservatórios neste caso possuem uma vazão afluente e uma efluente, fazendo com que se obrigue à garantia da restrição em questão nos referidos nós, ficando excluído apenas o nó 9 que em nenhum caso contém vazões afluentes e efluentes concomitantemente.

Portanto, tem-se seis equações de restrição para a situação de demanda máxima e oito para a situação de demanda mínima.

Então, para a primeira situação (máxima demanda),

$$\text{Nó 2: } Q_1^1 = Q_2^1 + Q_3^1 + d_2 \quad (7.30)$$

$$\text{Nó 3: } Q_2^1 + Q_7^1 = d_3 \quad (7.31)$$

$$\text{Nó 4: } Q_3^1 + Q_4^1 = Q_5^1 + d_4 \quad (7.32)$$

$$\text{Nó 5: } Q_{10}^1 = Q_4^1 + Q_7^1 + Q_8^1 + d_5 \quad (7.33)$$

$$\text{Nó 6: } Q_5^1 + Q_6^1 = d_6 \quad (7.34)$$

$$\text{Nó 7: } Q_9^1 + Q_8^1 = Q_6^1 + d_7 \quad (7.35)$$

onde

$d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$ são as demandas dos respectivos nós, expostas na Tabela 7.4;

Q_i^k é a vazão do trecho em questão;

k é a indicação da demanda máxima.

5ª) Velocidade Máxima Admissível

De acordo com a Norma Brasileira de Redes de Distribuição de Água para Abastecimento Público, NBR 12218/94, tem-se que a velocidade máxima nas tubulações deve ser de 3,5 m/s e a mínima de 0,6 m/s. São limites referentes às demandas máximas horárias no início e no final da etapa de execução das redes.

Já a Norma de Distribuição de Água NB 594/77, diz que para tubulações com diâmetros superiores a 400 mm, deve-se utilizar velocidade máxima de 2,0 m/s. A mesma não traz nenhum comentário sobre velocidade mínima em qualquer dimensão dos tubos, nem sobre a velocidade máxima para tubos com diâmetros iguais ou inferiores a 400 mm.

De acordo com o Manual de Hidráulica, Vol. 1 de Azevedo Netto, tem-se que a velocidade máxima deve ser encontrada pela fórmula abaixo:

$$V_{\text{máxima}} = 0,6 + 1,5 D \text{ (m)} \quad (7.36)$$

Gomes (1997) fornece velocidades máximas encontradas por Clément-Galant e por Granados em função dos diâmetros das tubulações conforme mostra a Tabela 7.8.

Tabela – 7.8. Velocidades máximas Clément-Galant / Granados

| Diâmetro (mm) | Velocidade máxima (m/s) ¹ | Velocidade máxima (m/s) ² |
|------------------|--|--|
| ≤100 | 1.80 | 2.00 |
| 125 | 1.85 | 2.00 |
| 150 | 1.95 | 2.00 |
| 200 | 2.05 | 2.00 |
| 250 | 2.15 | 2.00 |
| 300 | 2.25 | 2.10 |
| 350 | 2.30 | 2.20 |
| 400 | 2.50 | 2.30 |
| 450 | 2.85 | 2.40 |
| 500 | 2.85 | 2.50 |
| 600 | 3.10 | 2.60 |
| 700 | 3.10 | 2.70 |
| 800 | 3.10 | 2.80 |
| 900 | 3.10 | 2.90 |
| 1000 | 3.10 | 3.00 |
| >1000 | 3.10 | 2 + D (m) |

⁽¹⁾ Valores recomendados por Clément-Galant (1986)

⁽²⁾ Valores recomendados por Granados (1990)

Como demonstrado, o critério de velocidade máxima admissível não é uniforme perante os diversos estudiosos dos assunto.

Adotou-se unicamente o critério da velocidade máxima, baseado na Norma Brasileira NBR 12218/94, ou seja, a velocidade máxima admissível de 3,50 m/s para todas as tubulações consideradas no exemplo. Não foi adotada velocidade mínima para o problema.

Para esta restrição, têm-se velocidades máximas admissíveis em cada trecho da rede e como a rede tem dez trechos, ter-se-ão dez equações de restrição para cada situação de

contorno, ou seja, dez equações para a condição de demanda máxima e dez equações para a condição de demanda mínima.

Em cada trecho, a velocidade média no mesmo é encontrada pela equação da continuidade:

$$V_i = \frac{Q_i}{A_i}; \quad (7.37)$$

$$A_i = \pi \frac{D_i^2}{4} \quad (7.38)$$

$$V_i = 1,273 \frac{Q_i}{D_i^2} \quad (7.39)$$

Portanto, para cada trecho tem-se:

$$\text{Trecho 1: } 1,273 \frac{Q_1^1}{D_1^2} \leq 3,50 \quad (7.40)$$

$$\text{Trecho 2: } 1,273 \frac{Q_2^1}{D_2^2} \leq 3,50 \quad (7.41)$$

$$\text{Trecho 3: } 1,273 \frac{Q_3^1}{D_3^2} \leq 3,50 \quad (7.42)$$

$$\text{Trecho 4: } 1,273 \frac{Q_4^1}{D_4^2} \leq 3,50 \quad (7.43)$$

$$\text{Trecho 5: } 1,273 \frac{Q_5^1}{D_5^2} \leq 3,50 \quad (7.44)$$

$$\text{Trecho 6: } 1,273 \frac{Q_6^1}{D_6^2} \leq 3,50 \quad (7.45)$$

$$\text{Trecho 7: } 1,273 \frac{Q_7^1}{D_7^2} \leq 3,50 \quad (7.46)$$

$$\text{Trecho 8: } 1,273 \frac{Q_8^1}{D_8^2} \leq 3,50 \quad (7.47)$$

$$\text{Trecho 9: } 1,273 \frac{Q_9^1}{D_9^2} \leq 3,50 \quad (7.48)$$

$$\text{Trecho 10: } 1,273 \frac{Q_{10}^1}{D_{10}^2} \leq 3,50 \quad (7.49)$$

6ª) Equidade de pressão nos Nós

Esta restrição garante que a cota piezométrica em um nó qualquer do sistema, é única, independente da fonte que forneça energia ao nó.

Da restrição da conservação de energia, tem-se que o somatório das perdas de carga obtidas em um anel é nulo, ou seja, escolhendo-se um nó qualquer do anel, o somatório das perdas de carga nesse nó encontrado por um caminho é igual ao somatório das perdas de carga nesse mesmo nó pelo caminho contrário. Portanto, para que a equidade de pressão nos nós seja satisfeita é necessário unicamente, que se garanta a igualdade das pressões em um nó apenas. Como têm-se três fontes de abastecimento da rede, escolhe-se um nó qualquer da mesma e faz-se a igualdade de pressão nesse nó para cada uma das fontes. No exemplo em questão, foi escolhido o *nó 4* para garantir a restrição de igualdade de pressão nos nós.

Ao contrário das outras equações de restrição, que são impostas para as duas situações de contorno, ou seja, demanda máxima e mínima, esta não foi formulada para a situação de demanda mínima, pois nesta situação (demanda mínima) a rede só é abastecida pela bomba, que fornece água a mesma e aos reservatórios 1 e 2. Portanto, não se faz necessário garantir esta restrição para a situação de demanda mínima. Então, para a situação de demanda máxima, tem-se para o *nó 4* a seguinte equação de restrição:

$$H_{R1} - 1000 j_1 - 1000 j_3 = H_{R2} - 100 j_9 - 1000 j_8 + 1000 j_4 = H_{\text{bomba}} - 100 j_{10} + 1000 j_4 \quad (7.50)$$

Colocadas as equações de restrição para a condição de demanda máxima, procede-se do mesmo modo para a condição de contorno de demanda mínima.

A diferença entre elas é que o sentido inicial das vazões para demanda mínima é diferente do adotado para demanda máxima, como pode-se constatar com uma análise na Figura 7.1. A Outra diferença é a já comentada na restrição número seis a qual não necessita de colocar-se a referida restrição para a situação de contorno de demanda mínima.

7.2.3 – Restrições para situação de demanda mínima

1ª) Pressão Mínima nos Nós

Como na primeira equação de restrição, imposta para a situação de contorno de demanda máxima, as pressões mínimas e máximas em cada nó deverão ser de 15 mca e 50 mca, respectivamente, sendo que para os nós 1 e 8 excepcionalmente, a pressão mínima tem que ser aquela suficiente para encher os dois reservatórios dos respectivos nós. Então para cada nó, tem-se uma equação de restrição, o que fornece nove equações.

$$\text{Nó 1: } 50 + 168 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_7 - 1000 j_2 - 1000 j_1 \geq H_{R1} + 168 \quad (7.51)$$

$$\text{Nó 2: } 50 + 170 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_7 - 1000 j_2 \geq 15 + 170 \quad (7.52)$$

$$\text{Nó 3: } 50 + 180 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_7 \geq 15 + 180 \quad (7.53)$$

$$\text{Nó 4: } 50 + 175 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_4 \geq 15 + 175 \quad (7.54)$$

$$\text{Nó 5: } 50 + 170 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} \geq 15 + 170 \quad (7.55)$$

$$\text{Nó 6: } 50 + 185 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_8 - 1000 j_6 \geq 15 + 185 \quad (7.56)$$

$$\text{Nó 7: } 50 + 180 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_8 \geq 15 + 180 \quad (7.57)$$

$$\text{Nó 8: } 50 + 175 \geq H_{\text{bomba}} + 165 - 100 j_{10} - 1000 j_8 - 100 j_9 \geq H_{R2} + 175 \quad (7.58)$$

$$\text{Nó 9: } 50 + 165 \geq H_{\text{bomba}} + 165 \geq 15 + 165 \quad (7.59)$$

2ª) Diâmetros Máximos e Mínimos

Da mesma forma que o comentado na 2ª restrição para demanda máxima, tem-se o estabelecimento de um diâmetro mínimo de 150 mm e um diâmetro máximo de 600 mm

para todas as tubulações da rede em estudo, constituindo assim, vinte equações de restrição idênticas às Equações 7.18, ..., 7.27.

3ª) Conservação de Energia nos anéis

Como comentado na terceira restrição da situação de demanda máxima, tem-se uma equação para cada anel da rede. Como o exemplo possui uma rede constituída de dois anéis, então há duas equações de restrição, quais sejam:

$$\text{Anel ①: } -1000 j_2 + 1000 j_3 + 1000 j_4 - 1000 j_7 = 0 \quad (7.60)$$

$$\text{Anel ②: } -1000 j_4 - 1000 j_5 + 1000 j_6 + 1000 j_8 - H_{\text{booster}} = 0 \quad (7.61)$$

4ª) Continuidade dos Nós

Conforme exposto na quarta restrição de demanda máxima, para cada nó em questão, excetuando-se nesta situação o nó 9, pois agora os nós 1 e 8 possuem demanda, tem-se que a vazão afluente é igual a vazão efluente em cada nó. Com isso, formam-se oito equações de restrição para o caso.

Nesta situação, a rede funciona com demanda mínima, fazendo com que nesse período, o conjunto motor-bomba abasteça os dois reservatórios e continue atendendo à solicitação da rede, ou seja, a uma indústria localizada no nó seis, tendo em vista que esta indústria funciona vinte e quatro horas por dia, necessitando por isso de ser abastecida em todos os períodos do dia.

Para que estas condições sejam satisfeitas, o volume armazenado dos reservatórios foi considerado maior ou igual a um terço (1/3) do volume distribuído no dia de consumo máximo, dividido por 1.5 para transformar esta vazão em uma vazão máxima diária, visto que o cálculo do volume do reservatório é feito com base na vazão máxima diária e não na vazão máxima horária, a qual é utilizada para o cálculo das redes de distribuição. Isto é realizado devido a procurar-se seguir instrução contida na norma de Projetos de Redes de Distribuição de Água potável para Abastecimento Público, (NB-594/77).

Para o cálculo dos volumes dos reservatórios R_1 e R_2 toma-se a demanda máxima horária, aqui admitida como sendo o valor do somatório das demandas em cada nó, constantes na Tabela 4. A soma destes valores resulta em $1.336 \text{ m}^3/\text{h}$. Este valor fornece, a vazão a ser distribuída durante o período de dezesseis horas do dia. Então, para o cálculo do volume total contido na rede ao longo destas dezesseis horas, faz-se a simples multiplicação deste valor pelas dezesseis horas em questão, resultando em 21.376 m^3 . Dividindo-se por três, encontra-se o valor de aproximadamente 7.125 m^3 a serem preenchidos em 8 horas. Estas oito horas são o tempo necessário para que a bomba encha os dois reservatórios no período da noite. Com isso, tem-se uma vazão de aproximadamente $890 \text{ m}^3/\text{h}$ ou 247 l/s . Dividindo-se por dois este valor como o objetivo de obter-se a vazão necessária para encher cada reservatório, encontra-se $445 \text{ m}^3/\text{h}$ ou $123,7 \text{ l/s}$. Agora, basta dividir-se por 1.5 este último valor encontrado para se encontrar a vazão definitiva necessária para o enchimento de cada reservatório, ou seja, $82,46 \text{ l/s}$ ou $296 \text{ m}^3/\text{h}$.

Portanto, para cada nó, excetuando-se o nó 9, formulam-se as seguintes equações de restrição:

$$\text{Nó 1: } Q_1^2 - Q_1^2 R_1 = 0 \quad (7.62)$$

$$\text{Nó 2: } Q_2^2 + Q_3^2 = Q_1^2 \quad (7.63)$$

$$\text{Nó 3: } Q_7^2 = Q_2^2 \quad (7.64)$$

$$\text{Nó 4: } Q_4^2 = Q_3^2 + Q_5^2 \quad (7.65)$$

$$\text{Nó 5: } Q_{10}^2 = Q_7^2 + Q_8^2 + Q_4^2 \quad (7.66)$$

$$\text{Nó 6: } Q_5^2 + Q_6^2 - D_6 = 0 \quad (7.67)$$

$$\text{Nó 7: } Q_8^2 = Q_9^2 + Q_6^2 \quad (7.68)$$

$$\text{Nó 8: } Q_9^2 - Q_9^2 R_2 = 0 \quad (7.69)$$

5ª) Velocidade Máxima Admissível

Aqui, também utilizar-se-á a mesma condição de velocidade máxima exposta na restrição de número cinco na condição de demanda máxima, ou seja, a velocidade em cada trecho da rede deverá resultar em um valor menor que $3,50 \text{ m/s}$. Então, para cada trecho tem-se uma equação de restrição, o que resulta em um total de dez restrições.

$$\text{Trecho 1: } 1,273 \frac{Q_1^2}{D_1^2} \leq 3,50; \quad (7.70)$$

$$\text{Trecho 2: } 1,273 \frac{Q_2^2}{D_2^2} \leq 3,50; \quad (7.71)$$

$$\text{Trecho 3: } 1,273 \frac{Q_3^2}{D_3^2} \leq 3,50; \quad (7.72)$$

$$\text{Trecho 4: } 1,273 \frac{Q_4^2}{D_4^2} \leq 3,50; \quad (7.73)$$

$$\text{Trecho 5: } 1,273 \frac{Q_5^2}{D_5^2} \leq 3,50; \quad (7.74)$$

$$\text{Trecho 6: } 1,273 \frac{Q_6^2}{D_6^2} \leq 3,50; \quad (7.75)$$

$$\text{Trecho 7: } 1,273 \frac{Q_7^2}{D_7^2} \leq 3,50; \quad (7.76)$$

$$\text{Trecho 8: } 1,273 \frac{Q_8^2}{D_8^2} \leq 3,50; \quad (7.77)$$

$$\text{Trecho 9: } 1,273 \frac{Q_9^2}{D_9^2} \leq 3,50; \quad (7.78)$$

$$\text{Trecho 10: } 1,273 \frac{Q_{10}^2}{D_{10}^2} \leq 3,50. \quad (7.79)$$

7.2.4 – Resolução da primeira etapa da otimização

Com as equações montadas, procede-se a edição das mesmas na Planilha Eletrônica do EXCEL[®] e, após a edição destas planilhas, realiza-se a primeira otimização utilizando-se o algoritmo GRG-2 disponível na ferramenta SOLVER contida na planilha EXCEL[®].

Esta primeira exposição de valores, resulta do dimensionamento obtido com custo mínimo, dentre os obtidos de cada conjunto de diâmetros iniciais, ou seja, para os onze

conjuntos de diâmetros iniciais diferentes, escolhidos arbitrariamente, tem-se como melhor resultado, após compararem-se os valores obtidos dos mesmos, os apresentados nas tabelas abaixo.

Os resultados desta otimização estão representados na Tabela 7.9 abaixo:

Tabela 7.9 – Resultados para a primeira etapa de otimização/ Situação de demanda máxima

| Trecho | Comprimento (m) | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Perdas (mca) | Velocidade (m/s) |
|--------|-----------------|---------------------------|---------------|--------------|------------------|
| 1 | 1000 | 192,54 | 499,27 | 0,14 | 0,27 |
| 2 | 1000 | 51,27 | 524,63 | 0,01 | 0,07 |
| 3 | 1000 | 41,28 | 432,40 | 0,02 | 0,08 |
| 4 | 1000 | 155,27 | 461,21 | 0,14 | 0,26 |
| 5 | 1000 | 76,54 | 488,47 | 0,03 | 0,11 |
| 6 | 1000 | 469,46 | 454,51 | 1,15 | 0,80 |
| 7 | 1000 | 48,73 | 300,07 | 0,13 | 0,19 |
| 8 | 1000 | 638,74 | 498,18 | 1,30 | 0,91 |
| 9 | 100 | 30,71 | 600,00 | 0,00 | 0,03 |
| 10 | 100 | 1112,74 | 369,09 | 1,56 | 2,89 |

Continuação da Tabela 7.9

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|----------|--------------------------|
| 1 | 213,46 | 168 | 45,46 |
| 2 | 213,32 | 170 | 43,32 |
| 3 | 213,31 | 180 | 33,31 |
| 4 | 213,30 | 175 | 38,30 |
| 5 | 213,44 | 170 | 43,44 |
| 6 | 213,27 | 185 | 28,27 |
| 7 | 212,14 | 180 | 32,14 |
| 8 | 212,14 | 175 | 37,14 |
| 9 | 215,00 | 165 | 50,00 |

Continuação da tabela 7.9

| | |
|---------|--------|
| R -1 | 213,46 |
| R -2 | 212,14 |
| Bomba | 215,00 |
| Booster | 2,28 |

Para situação de demanda mínima, tem-se:

Tabela 7.10 – Resultados para a primeira etapa da otimização/ Situação de demanda mínima

| Trecho | Comprimento (m) | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Perdas (mca) | Velocidade (m/s) |
|--------|-----------------|---------------------------|---------------|--------------|------------------|
| 1 | 1000 | 296,86 | 499,27 | 0,31 | 0,42 |
| 2 | 1000 | 81,88 | 524,63 | 0,02 | 0,11 |
| 3 | 1000 | 214,98 | 432,40 | 0,34 | 0,41 |
| 4 | 1000 | 55,07 | 461,21 | 0,02 | 0,09 |
| 5 | 1000 | -159,91 | 488,47 | 0,11 | 0,24 |
| 6 | 1000 | 375,91 | 454,51 | 0,76 | 0,64 |
| 7 | 1000 | 81,88 | 300,07 | 0,34 | 0,32 |
| 8 | 1000 | 672,76 | 498,18 | 1,43 | 0,96 |
| 9 | 100 | 296,86 | 600,00 | 0,01 | 0,29 |
| 10 | 100 | 809,71 | 369,09 | 0,87 | 2,10 |

Continuação da Tabela 7.10

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|----------|--------------------------|
| 1 | 213,46 | 168,00 | 45,46 |
| 2 | 213,77 | 170,00 | 43,77 |
| 3 | 213,79 | 180,00 | 33,79 |
| 4 | 214,11 | 175,00 | 39,11 |
| 5 | 214,13 | 170,00 | 44,13 |
| 6 | 214,22 | 185,00 | 29,22 |
| 7 | 212,71 | 180,00 | 32,71 |
| 8 | 212,69 | 175,00 | 37,69 |
| 9 | 215,00 | 165,00 | 50,00 |

Com os resultados de diâmetros, vazões e alturas manométricas obtidos na primeira etapa da otimização, ilustrado nas Tabelas 7.9 e 7.10, torna-se a fazer um novo processo de otimização, considerada como segunda etapa, alterando-se algumas variáveis de decisão do problema, pois agora o diâmetro não é mais variável de decisão, passando a sê-la, no seu lugar, o comprimento dos subtrechos.

Este procedimento é realizado adotando-se para cada trecho, dois diâmetros comerciais, um imediatamente superior e outro imediatamente anterior ao encontrado na

primeira etapa do dimensionamento. Dessa forma, tem-se os diâmetros utilizados para cada trecho colocados na Tabela 7.11 a seguir:

Tabela 7.11 – Diâmetros obtidos e utilizados na 2ª etapa da otimização

| Trecho | Diâmetro Encontrado (mm) | Diâmetros Comerciais (mm) |
|--------|--------------------------|---------------------------|
| 1 | 499,27 | 450 |
| | | 500 |
| 2 | 524,63 | 500 |
| | | 600 |
| 3 | 432,4 | 400 |
| | | 450 |
| 4 | 461,21 | 450 |
| | | 500 |
| 5 | 488,47 | 450 |
| | | 500 |
| 6 | 454,51 | 450 |
| | | 500 |
| 7 | 300,07 | 300 |
| | | 350 |
| 8 | 498,18 | 450 |
| | | 500 |
| 9 | 600 | 500 |
| | | 600 |
| 10 | 369,09 | 350 |
| | | 400 |

7.3 – 2ª etapa

7.3.1 – Função Objetivo

Tem-se, nesta nova etapa, uma nova função objetivo a ser minimizada, gerando um novo custo total da rede, expressa na equação 6.17.

Colocando os devidos valores na equação citada acima (equação 6.17), tem-se:

$$\begin{aligned}
 C(l_{ij}, Q_i^1, Q_i^2, H_{\text{bomba}}, H_{\text{booster}}) = & \{ [l_{1,450} P(450) + l_{1,500} P(500)] + [l_{2,500} \\
 & P(500) + l_{2,600} P(600)] + [l_{3,400} P(400) + l_{3,450} P(450)] + [l_{4,450} P(450) + l_{4,500} \\
 & P(500)] + [l_{5,450} P(450) + l_{5,500} P(500)] + [l_{6,450} P(450) + l_{6,500} P(500)] + [l_{7,300} \\
 & P(300) + l_{7,350} P(350)] + [l_{8,450} P(450) + l_{8,500} P(500)] + [l_{9,500} P(500) + l_{9,600} \\
 & P(600)] + [l_{10,350} P(350) + l_{10,400} P(400)] \} \times 0.1339 + 1355.83 Q_{10}^1 H_{\text{bomba}1} + \\
 & 1355.83 Q_{10}^2 H_{\text{bomba}2} + 1355.83 Q_5^1 H_{\text{booster}1} + 1355.83 Q_5^2 H_{\text{booster}2}. \quad (7.80)
 \end{aligned}$$

Os valores dos custos dos diâmetros são constantes, de acordo com a Tabela 7.5. Então, tomando os respectivos valores dos mesmos, tem-se para a equação acima o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 C(i_{ij}, Q_i^1, Q_i^2, H_{\text{bomba}}, H_{\text{booster}}) = & \{ [l_{1,450} (15.501) + l_{1,500} (17.696)] + [l_{2,500} \\
 & (17.696) + l_{2,600} (23.132)] + [l_{3,400} (12.397) + l_{3,450} (15.501)] + [l_{4,450} (15.501) + \\
 & l_{4,500} (17.696)] + [l_{5,450} (15.501) + l_{5,500} (17.696)] + [l_{6,450} (15.501) + l_{6,500} + \\
 & (17.696)] + [l_{7,300} (9.237) + l_{7,350} (11.012)] + [l_{8,450} (15.501) + l_{8,500} (17.696)] + \\
 & [l_{9,500} (17.696) + l_{9,600} (23.132)] + [l_{10,350} (11.012) + l_{10,400} (12.397)] \} \times 0.1339 \\
 & + 1355.83 Q_{10}^1 H_{\text{bomba}1} + 1355.83 Q_{10}^2 H_{\text{bomba}2} + 1355.83 Q_5^1 H_{\text{booster}1} + 1355.83 \\
 & Q_5^2 H_{\text{booster}2}. \tag{7.81}
 \end{aligned}$$

A nova função objetivo está sujeita às mesmas equações de restrição anteriores, acrescida das restrições dos comprimentos dos subtrechos, em que a soma dos subtrechos de um trecho tem que ser igual ao valor deste trecho e da não negatividade dos comprimentos dos subtrechos. Esta mesma função objetivo tem diminuída das equações de restrição anteriores às equações que envolviam valores de diâmetros, pois nesta etapa da otimização os diâmetros não são mais variáveis de decisão.

Novamente tem-se duas condições de contorno, ou seja, condições em que as demandas serão consideradas máximas e mínimas, de acordo com o período do dia, o qual já foi explicado anteriormente.

7.3.2 – Restrições para situação de demanda máxima

1ª) Pressão Mínima nos Nós

De acordo com a primeira parte do problema em questão, a cota de cabeceira é igual à soma da cota do terreno com a altura manométrica de bombeamento e, partindo-se dela, subtraindo-se às perdas de carga dos trechos considerados no caminhamento, tem-se que

chegar a todos os nós da rede com uma pressão de no mínimo 15 mca e no máximo de 50 mca, ou seja,

$$\text{Nó 1: } (50 + 168) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{7,300} j_{7,300} + l_{7,350} j_{7,350}) + (l_{2,500} j_{2,500} + l_{2,600} j_{2,600}) + (l_{1,450} j_{1,450} + l_{1,500} j_{1,500}) \geq (15 + 168) \quad (7.82)$$

$$\text{Nó 2: } (50 + 170) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{7,300} j_{7,300} + l_{7,350} j_{7,350}) + (l_{2,500} j_{2,500} + l_{2,600} j_{2,600}) \geq (15 + 170); \quad (7.83)$$

$$\text{Nó 3: } (50 + 180) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{7,300} j_{7,300} + l_{7,350} j_{7,350}) \geq (15 + 180); \quad (7.84)$$

$$\text{Nó 4: } (50 + 175) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{4,450} j_{4,450} + l_{4,500} j_{4,500}) \geq (15 + 175); \quad (7.85)$$

$$\text{Nó 5: } (50 + 170) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) \geq (15 + 170); \quad (7.86)$$

$$\text{Nó 6: } (50 + 185) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{8,450} j_{8,450} + l_{8,500} j_{8,500}) - (l_{6,450} j_{6,450} + l_{6,500} j_{6,500}) \geq (15 + 185); \quad (7.87)$$

$$\text{Nó 7: } (50 + 180) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{8,450} j_{8,450} + l_{8,500} j_{8,500}) \geq (15 + 180); \quad (7.88)$$

$$\text{Nó 8: } (50 + 175) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{8,450} j_{8,450} + l_{8,500} j_{8,500}) + (l_{9,500} j_{9,500} + l_{9,600} j_{9,600}) \geq (15 + 175) \quad (7.89)$$

$$\text{Nó 9: } (50 + 165) \geq [(H_{bomba}) + 165] \geq (15 + 165) \quad (7.90)$$

2ª) Conservação de Energia nos Anéis

Do mesmo modo que realizado na primeira etapa, há aqui dois anéis que diferem entre si, basicamente, devido ao segundo anel possuir no seu interior uma estação elevatória booster e suas demandas em seus respectivos nós serem diferentes. Portanto, tem-se para cada anel uma equação de restrição que garanta que o somatório das perdas de carga dentro deles seja nula. Com isso, há as seguintes equações de restrição:

$$\text{Anel ①: } (1000 j_{2,500} + 1000 j_{2,600}) - (1000 j_{3,400} + 1000 j_{3,450}) + (1000 j_{4,450} + 1000 j_{4,500}) - (1000 j_{7,300} + 1000 j_{7,350}) = 0 \quad (7.91)$$

$$\text{Anel ②: } - (1000 j_{4,450} + 1000 j_{4,500}) - (1000 j_{5,450} + 1000 j_{5,500}) + (1000 j_{6,450} + 1000 j_{4,500}) + (1000 j_{8,450} + 1000 j_{8,500}) = H_{\text{booster}} \quad (7.92)$$

3ª) Continuidade dos Nós

As equações de continuidade nos nós são idênticas às obtidas na primeira etapa do problema, ou seja, equações 7.30, ..., 7.35.

4ª) Velocidade Máxima Admissível

Nesta etapa do problema, os diâmetros a serem utilizados nos trechos são conhecidos, não se conhecendo porém os comprimentos dos subtrechos que contêm os respectivos diâmetros. Portanto, pode-se utilizar diretamente as restrições de velocidade máxima admissível de acordo com o exposto na primeira etapa do problema, tendo como única variável a vazão nos trechos. Então, tem-se para cada trecho duas equações de restrição, o que fornece um total de vinte equações, como apresentado a seguir:

$$\text{Trecho 1: } 1,273 \frac{Q_1^1}{D_{1,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_1^1}{D_{1,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.93)$$

$$\text{Trecho 2: } 1,273 \frac{Q_2^1}{D_{2,500}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_2^1}{D_{2,600}^2} \leq 3.50 \quad (7.94)$$

$$\text{Trecho 3: } 1,273 \frac{Q_3^1}{D_{3,400}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_3^1}{D_{3,450}^2} \leq 3.50 \quad (7.95)$$

$$\text{Trecho 4: } 1,273 \frac{Q_4^1}{D_{4,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_4^1}{D_{4,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.96)$$

$$\text{Trecho 5: } 1,273 \frac{Q_5^1}{D_{5,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_5^1}{D_{5,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.97)$$

$$\text{Trecho 6: } 1,273 \frac{Q_6^1}{D_{6,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_6^1}{D_{6,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.98)$$

$$\text{Trecho 7: } 1,273 \frac{Q_7^1}{D_{7,300}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_7^1}{D_{7,350}^2} \leq 3.50 \quad (7.99)$$

$$\text{Trecho 8: } 1,273 \frac{Q_8^1}{D_{8,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_8^1}{D_{8,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.100)$$

$$\text{Trecho 9: } 1,273 \frac{Q_9^1}{D_{9,500}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_9^1}{D_{9,600}^2} \leq 3.50 \quad (7.101)$$

$$\text{Trecho 10: } 1,273 \frac{Q_{10}^1}{D_{10,350}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_{10}^1}{D_{10,400}^2} \leq 3.50 \quad (7.102)$$

5ª) Comprimento dos Trechos

Por esta nova restrição, tem-se que a soma dos comprimentos dos subtrechos deve ser igual ao valor do trecho, ou seja, para cada trecho tem-se uma equação de restrição, o que proporciona dez equações de restrição.

$$\text{Trecho 1: } l_{1,1} + l_{1,2} = L_1; \quad (7.103)$$

$$\text{Trecho 2: } l_{2,1} + l_{2,2} = L_2; \quad (7.104)$$

$$\text{Trecho 3: } l_{3,1} + l_{3,2} = L_3; \quad (7.105)$$

$$\text{Trecho 4: } l_{4,1} + l_{4,2} = L_4; \quad (7.106)$$

$$\text{Trecho 5: } l_{5,1} + l_{5,2} = L_5; \quad (7.107)$$

$$\text{Trecho 6: } l_{6,1} + l_{6,2} = L_6; \quad (7.108)$$

$$\text{Trecho 7: } l_{7,1} + l_{7,2} = L_7; \quad (7.109)$$

$$\text{Trecho 8: } l_{8,1} + l_{8,2} = L_8; \quad (7.110)$$

$$\text{Trecho 9: } l_{9,1} + l_{9,2} = L_9; \quad (7.111)$$

$$\text{Trecho 10: } l_{10,1} + l_{10,2} = L_{10}. \quad (7.112)$$

6ª) Não negatividade dos comprimentos dos subtrechos

Está claro que não deve haver comprimentos de subtrechos com valores negativos, pois este fato não é lógico, tendo em vista que não existe comprimento negativo. Portanto, tem-se que introduzir uma restrição que garanta a não negatividade dos subtrechos. Então, como o problema contém vinte subtrechos, haverá vinte equações de restrição. Com isso, tem-se:

$$\text{Trecho 1: } l_{1,1} \geq 0 \quad e \quad l_{1,2} \geq 0; \quad (7.113)$$

$$\text{Trecho 2: } l_{2,1} \geq 0 \quad e \quad l_{2,2} \geq 0; \quad (7.114)$$

$$\text{Trecho 3: } l_{3,1} \geq 0 \quad e \quad l_{3,2} \geq 0; \quad (7.115)$$

$$\text{Trecho 4: } l_{4,1} \geq 0 \quad e \quad l_{4,2} \geq 0; \quad (7.116)$$

$$\text{Trecho 5: } l_{5,1} \geq 0 \quad e \quad l_{5,2} \geq 0; \quad (7.117)$$

$$\text{Trecho 6: } l_{6,1} \geq 0 \quad e \quad l_{6,2} \geq 0; \quad (7.118)$$

$$\text{Trecho 7: } l_{7,1} \geq 0 \quad e \quad l_{7,2} \geq 0; \quad (7.119)$$

$$\text{Trecho 8: } l_{8,1} \geq 0 \quad e \quad l_{8,2} \geq 0; \quad (7.120)$$

$$\text{Trecho 9: } l_{9,1} \geq 0 \quad e \quad l_{9,2} \geq 0; \quad (7.121)$$

$$\text{Trecho 10: } l_{10,1} \geq 0 \quad e \quad l_{10,2} \geq 0; \quad (7.122)$$

7ª) Equidade de Pressão nos Nós

Da mesma forma que realizado na primeira etapa do problema, tem-se também aqui que garantir, em um nó qualquer da rede, um único valor de pressão, independentemente da fonte de onde provenha a água. Portanto, para o nó 4 escolhido tem-se:

$$\begin{aligned}
 H_{R1} - (1000 j_{1,1} + 1000 j_{1,2}) - (1000 j_{3,1} + 1000 j_{3,2}) = H_{R2} - (100 j_{9,1} + \\
 j_{9,2}) + (1000 j_{8,1} + 1000 j_{8,2}) - (1000 j_{4,1} + 1000 j_{4,2}) = H_{bomba} - (100 j_{10,1} + \\
 100 j_{10,2}) - (1000 j_{4,1} + 1000 j_{4,2}) \quad (7.123)
 \end{aligned}$$

Terminada a formulação das equações de restrição para a situação de demanda máxima, procede-se da mesma maneira para a situação de demanda mínima, considerando como variáveis de decisão o comprimento dos subtrechos, as vazões e as alturas manométricas da bomba e do booster. Então tem-se:

7.3.3 – Restrições para situação de demanda mínima

1ª) Pressões Mínimas nos Nós

Da mesma forma que realizado anteriormente, para cada nó, com exceção do nó 9, tem-se uma equação de restrição, o que fornece um total de oito equações, como colocado a seguir:

$$\begin{aligned}
 \text{Nó 1: } (50 + 168) [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{7,300} j_{7,300} + l_{7,350} \\
 j_{7,350}) - (l_{2,500} j_{2,500} + l_{2,600} j_{2,600}) - (l_{1,450} j_{1,450} + l_{1,500} j_{1,500}) \geq (H_{R1} + 168); \quad (7.124)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nó 2: } (50 + 170) \geq [(H_{bomba}) + 165] - (l_{10,350} j_{10,350} + l_{10,400} j_{10,400}) - (l_{7,300} j_{7,300} + l_{7,350} \\
 j_{7,350}) - (l_{2,500} j_{2,500} + l_{2,600} j_{2,600}) \geq (15 + 170); \quad (7.125)
 \end{aligned}$$

$$\text{Nó 3: } (50 + 180) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] - (I_{10,350} j_{10,350} + I_{10,400} j_{10,400}) - (I_{7,300} j_{7,300} + I_{7,350} j_{7,350}) \geq (15 + 180); \quad (7.126)$$

$$\text{Nó 4: } (50 + 175) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] - (I_{10,350} j_{10,350} + I_{10,400} j_{10,400}) - (I_{4,450} j_{4,450} + I_{4,500} j_{4,500}) \geq (15 + 175); \quad (7.127)$$

$$\text{Nó 5: } (50 + 170) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] - (I_{10,350} j_{10,350} + I_{10,400} j_{10,400}) \geq (15 + 170); \quad (7.128)$$

$$\text{Nó 6: } (50 + 185) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] - (I_{10,350} j_{10,350} + I_{10,400} j_{10,400}) - (I_{8,450} j_{8,450} + I_{8,500} j_{8,500}) - (I_{6,450} j_{6,450} + I_{6,500} j_{6,500}) \geq (15 + 185); \quad (7.129)$$

$$\text{Nó 7: } (50 + 180) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] - (I_{10,350} j_{10,350} + I_{10,400} j_{10,400}) - (I_{8,450} j_{8,450} + I_{8,500} j_{8,500}) \geq (15 + 180); \quad (7.130)$$

$$\text{Nó 8: } (50 + 175) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] - (I_{10,350} j_{10,350} + I_{10,400} j_{10,400}) - (I_{8,450} j_{8,450} + I_{8,500} j_{8,500}) - (I_{9,500} j_{9,500} + I_{10,600} j_{10,600}) \geq (H_{R2} + 175); \quad (7.131)$$

$$\text{Nó 9: } (50 + 165) \geq [(H_{\text{bomba}}) + 165] \geq (15 + 165) \quad (7.132)$$

2ª) Conservação de Energia nos Anéis

As equações de restrição aqui colocadas são as mesmas da situação de demanda máxima da segunda etapa do dimensionamento, divergindo apenas com relação ao sentido inicial das vazões que nesta etapa difere da situação anterior, ou seja, de demanda máxima. Portanto, tem-se duas equações que são as seguintes:

$$\text{Anel } \textcircled{1}: - (1000 j_{2,500} + 1000 j_{2,600}) + (1000 j_{3,400} + 1000 j_{3,450}) + (1000 j_{4,450} + 1000 j_{4,500}) - (1000 j_{7,300} + 1000 j_{7,350}) = 0 \quad (7.133)$$

$$\begin{aligned} \text{Anel } \textcircled{2}: & - (1000 j_{4,450} + 1000 j_{4,500}) - (1000 j_{5,450} + 1000 j_{5,500}) + (1000 j_{6,450} \\ & + 1000 j_{4,500}) + (1000 j_{8,450} + 1000 j_{8,500}) = H_{booster} \end{aligned} \quad (7.134)$$

3ª) Continuidade nos Nós

As equações de continuidade nos nós são as mesmas das utilizadas na primeira etapa do problema, ou seja, na situação de demanda mínima da primeira fase do dimensionamento. O mesmo ocorre com relação ao volume dos reservatórios que será idêntico para a primeira etapa. Para mais informação, vide o comentário contido na quarta restrição da primeira etapa do problema para a situação de demanda mínima. Então, tem-se para cada nó, excetuando-se o nó 9, uma equação de restrição, totalizando oito equações de restrição. Portanto, as equações de restrição são idênticas as equações 7.62, ..., 7.69.

4ª) Velocidade Máxima Admissível

Também nesta restrição tem-se uma igualdade com a quinta restrição para a situação de demanda mínima da primeira etapa do dimensionamento. A diferença é que agora um trecho será dividido em dois subtrechos, como feito na segunda etapa para situação de demanda máxima. Portanto, para cada trecho, tem-se duas equações de restrição, o que proporciona um total de vinte equações, quais sejam:

$$\text{Trecho 1: } 1,273 \frac{Q_1^2}{D_{1,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_1^2}{D_{1,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.135 \text{ e } 7.136)$$

$$\text{Trecho 2: } 1,273 \frac{Q_2^2}{D_{2,500}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_2^2}{D_{2,600}^2} \leq 3.50 \quad (7.137 \text{ e } 7.138)$$

$$\text{Trecho 3: } 1,273 \frac{Q_3^2}{D_{3,400}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_3^2}{D_{3,450}^2} \leq 3.50 \quad (7.139 \text{ e } 7.140)$$

$$\text{Trecho 4: } 1,273 \frac{Q_4^2}{D_{4,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_4^2}{D_{4,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.141 \text{ e } 7.142)$$

$$\text{Trecho 5: } 1,273 \frac{Q_5^2}{D_{5,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_5^2}{D_{5,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.143 \text{ e } 7.144)$$

$$\text{Trecho 6: } 1,273 \frac{Q_6^2}{D_{6,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_6^2}{D_{6,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.145 \text{ e } 7.146)$$

$$\text{Trecho 7: } 1,273 \frac{Q_7^2}{D_{7,300}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_7^2}{D_{7,350}^2} \leq 3.50 \quad (7.147 \text{ e } 7.148)$$

$$\text{Trecho 8: } 1,273 \frac{Q_8^2}{D_{8,450}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_8^2}{D_{8,500}^2} \leq 3.50 \quad (7.149 \text{ e } 7.150)$$

$$\text{Trecho 9: } 1,273 \frac{Q_9^2}{D_{9,500}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_9^2}{D_{9,600}^2} \leq 3.50 \quad (7.151 \text{ e } 7.152)$$

$$\text{Trecho 10: } 1,273 \frac{Q_{10}^2}{D_{10,350}^2} \leq 3.50 \quad \text{e} \quad 1,273 \frac{Q_{10}^2}{D_{10,400}^2} \leq 3.50 \quad (7.153 \text{ e } 7.154)$$

5ª) Comprimento dos Trechos

Esta restrição garante que a soma dos comprimentos dos subtrechos tem que ser igual ao comprimento do respectivo trecho, ou seja, tem-se uma equação para cada trecho, o que resulta em dez equações de restrição, idênticas as equações 7.102, ..., 7.111.

6ª) Não negatividade dos Comprimentos dos Subtrechos

Todos os comprimentos dos subtrechos devem ser maiores que zero. Portanto, como em cada trecho tem-se dois subtrechos e cada subtrecho fornece uma equação de restrição, formam-se vinte equações idênticas as 7.112, ..., 7.121.

7.3.4 – Resolução da segunda etapa da otimização

Montadas as equações acima, editam-se as novas Planilhas Eletrônicas do EXCEL[®] para a segunda etapa do dimensionamento ótimo, que também será realizado com o auxílio do algoritmo GRG-2 disponível na ferramenta SOLVER contida na planilha EXCEL[®].

Os resultados desta otimização estão representados na tabela 7.12.

Tabela 7.12 – Resultados da segunda etapa do dimensionamento / Situação de máxima demanda

| Trecho | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Velocidade (m/s) | Perdas no trecho (mca) |
|--------|---------------------------|---------------|-----------------|------------------|------------------------|
| 1 | 44,28 | 450.00 | 13,19 | 0,08 | 0,01 |
| | | 500.00 | 986,81 | 0,06 | |
| 2 | -0.50 | 500.00 | 1000,00 | 0,00 | 0,00 |
| | | 600.00 | 0,00 | 0,00 | |
| 3 | -55.21 | 400.00 | 0,12 | 0,12 | 0,04 |
| | | 450.00 | 0,10 | 0,10 | |
| 4 | 312.67 | 450.00 | 0,55 | 0,55 | 0,56 |
| | | 500.00 | 0,44 | 0,44 | |
| 5 | 137.46 | 450.00 | 0,24 | 0,24 | 0,12 |
| | | 500.00 | 0,19 | 0,19 | |
| 6 | 408.54 | 450.00 | 0,71 | 0,71 | 0,92 |
| | | 500.00 | 0,58 | 0,58 | |
| 7 | 100.50 | 300.00 | 0,39 | 0,39 | 0,60 |
| | | 350.00 | 0,29 | 0,29 | |
| 8 | 288.71 | 450.00 | 0,50 | 0,50 | 0,30 |
| | | 500.00 | 0,41 | 0,41 | |
| 9 | 319.83 | 500.00 | 0,45 | 0,45 | 0,01 |
| | | 600.00 | 0,31 | 0,31 | |
| 10 | 971.89 | 350.00 | 2,81 | 2,81 | 1,55 |
| | | 400.00 | 2,15 | 2,15 | |

Continuação da tabela 7.12

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota do Terreno (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|---------------------|--------------------------|
| 1 | 200,09 | 168,00 | 32,09 |
| 2 | 200,08 | 170,00 | 30,08 |
| 3 | 200,08 | 180,00 | 20,08 |
| 4 | 200,12 | 175,00 | 25,12 |
| 5 | 200,68 | 170,00 | 30,68 |
| 6 | 200,00 | 185,00 | 15,00 |
| 7 | 200,38 | 180,00 | 20,38 |
| 8 | 200,40 | 175,00 | 25,40 |
| 9 | 202,24 | 165,00 | 37,24 |

Continuação da tabela 7.12

| | |
|---------|--------|
| R-1 | 200,09 |
| R-2 | 200,40 |
| Bomba | 202,24 |
| Booster | 0,53 |

Continuando, colocam-se agora os resultados da situação de demanda mínima:

Tabela 7.13 – Resultado da Segunda etapa do dimensionamento/ Situação de mínima demanda

| Trecho | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Velocidade (m/s) | Perdas no trecho (mca) |
|--------|---------------------------|---------------|-----------------|------------------|------------------------|
| 1 | 296,86 | 450 | 13,19 | 0,52 | 0,31 |
| | | 500 | 986,81 | 0,42 | |
| 2 | 107,81 | 500 | 1000,00 | 0,15 | 0,05 |
| | | 600 | 0,00 | 0,11 | |
| 3 | 189,04 | 400 | 1000,00 | 0,42 | 0,39 |
| | | 450 | 0,00 | 0,33 | |
| 4 | 238,32 | 450 | 1000,00 | 0,42 | 0,34 |
| | | 500 | 0,00 | 0,34 | |
| 5 | 49,28 | 450 | 1000,00 | 0,09 | 0,02 |
| | | 500 | 0,00 | 0,07 | |
| 6 | 166,72 | 450 | 1000,00 | 0,29 | 0,17 |
| | | 500 | 0,00 | 0,24 | |
| 7 | 107,81 | 300 | 990,57 | 0,42 | 0,68 |
| | | 350 | 9,43 | 0,31 | |
| 8 | 463,58 | 450 | 47,61 | 0,81 | 0,72 |
| | | 500 | 952,39 | 0,66 | |
| 9 | 296,86 | 500 | 1,03 | 0,42 | 0,01 |
| | | 600 | 98,97 | 0,29 | |
| 10 | 809,71 | 350 | 100,00 | 2,34 | 1,11 |
| | | 400 | 0,00 | 1,79 | |

Continuação da tabela 7.13

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota do Terreno (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|---------------------|--------------------------|
| 1 | 200,09 | 168 | 32,09 |
| 2 | 200,40 | 170 | 30,40 |
| 3 | 200,44 | 180 | 20,44 |
| 4 | 200,79 | 175 | 25,79 |
| 5 | 201,13 | 170 | 31,13 |
| 6 | 200,77 | 185 | 15,77 |
| 7 | 200,41 | 180 | 20,41 |
| 8 | 200,40 | 175 | 25,40 |
| 9 | 202,24 | 165 | 37,24 |

| | |
|--------------------------------|--------------------|
| Custo Total Anual (Umt) | 39662686,82 |
|--------------------------------|--------------------|

7.4 – Resultados obtidos para o segundo conjunto de valores iniciais de entrada

Coloca-se agora o resultado obtido para a otimização realizada com dados iniciais de diâmetros diferentes daqueles que resultaram à resposta anterior, ou seja, os diâmetros, neste caso, são escolhidos de acordo com um critério de velocidades admissíveis para os trechos, como explicado no capítulo anterior.

Assim, para a primeira etapa da otimização, obtém-se os resultados apresentados na Tabela 7.14:

Tabela 7.14 – Resultados obtidos na primeira etapa do dimensionamento/ Demanda Máxima

| Trecho | Comprimento (m) | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Perdas (mca) | Velocidade (m/s) |
|--------|-----------------|---------------------------|---------------|--------------|------------------|
| 1 | 1000 | 0,00 | 366,46 | 0,00 | 0,00 |
| 2 | 1000 | 27,38 | 198,08 | 0,42 | 0,25 |
| 3 | 1000 | -127,38 | 304,10 | 0,73 | 0,49 |
| 4 | 1000 | 359,75 | 296,54 | 6,86 | 1,45 |
| 5 | 1000 | 112,37 | 285,24 | 0,96 | 0,49 |
| 6 | 1000 | 433,63 | 330,09 | 4,70 | 1,41 |
| 7 | 1000 | 72,62 | 156,44 | 8,01 | 1,05 |
| 8 | 1000 | 487,05 | 355,73 | 4,05 | 1,36 |
| 9 | 100 | 146,58 | 343,50 | 0,05 | 0,44 |
| 10 | 100 | 1189,42 | 497,02 | 0,41 | 1,70 |

Continuação da tabela 7.14

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|----------|--------------------------|
| 1 | 200,24 | 168 | 32,24 |
| 2 | 200,24 | 170 | 30,24 |
| 3 | 199,82 | 180 | 19,82 |
| 4 | 200,96 | 175 | 25,96 |
| 5 | 207,83 | 170 | 37,83 |
| 6 | 200,00 | 185 | 15,00 |
| 7 | 203,78 | 180 | 23,78 |
| 8 | 203,83 | 175 | 28,83 |
| 9 | 208,24 | 165 | 43,24 |

Continuação da tabela 7.14

| | |
|---------|--------|
| R -1 | 200,24 |
| R -2 | 203,83 |
| Bomba | 208,24 |
| Booster | 0,92 |

Do mesmo modo que demonstrado anteriormente, colocam-se na Tabela 7.15 os resultados obtidos para a situação mínima da otimização do problema.

Tabela 7.15 – Resultados obtidos na primeira etapa do dimensionamento/ Situação de demanda Mínima

| Trecho | Comprimento (m) | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Perdas (mca) | Velocidade (m/s) |
|--------|-----------------|---------------------------|---------------|--------------|------------------|
| 1 | 1000 | 296,86 | 366,46 | 1,40 | 0,78 |
| 2 | 1000 | 55,41 | 198,08 | 1,54 | 0,50 |
| 3 | 1000 | 241,45 | 304,10 | 2,37 | 0,92 |
| 4 | 1000 | 269,42 | 296,54 | 4,02 | 1,08 |
| 5 | 1000 | 27,97 | 285,24 | 0,07 | 0,12 |
| 6 | 1000 | 188,03 | 330,09 | 1,00 | 0,61 |
| 7 | 1000 | 55,41 | 156,44 | 4,86 | 0,80 |
| 8 | 1000 | 484,89 | 355,73 | 4,02 | 1,36 |
| 9 | 100 | 296,86 | 343,50 | 0,19 | 0,89 |
| 10 | 100 | 809,71 | 497,02 | 0,20 | 1,16 |

Continuação da tabela 7.15

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|----------|--------------------------|
| 1 | 200,24 | 168,00 | 32,24 |
| 2 | 201,65 | 170,00 | 31,65 |
| 3 | 203,18 | 180,00 | 23,18 |
| 4 | 204,02 | 175,00 | 29,02 |
| 5 | 208,04 | 170,00 | 38,04 |
| 6 | 203,94 | 185,00 | 18,94 |
| 7 | 204,02 | 180,00 | 24,02 |
| 8 | 203,83 | 175,00 | 28,83 |
| 9 | 208,24 | 165,00 | 43,24 |

De posse destes valores, realiza-se a segunda etapa do dimensionamento, gerando os resultados para a situação de demanda máxima colocados na Tabela 7.16.

Tabela 7.16 – Resultados obtidos na segunda etapa do dimensionamento/ Situação de demanda máxima

| Trecho | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Velocidade (m/s) | Perdas no trecho (mca) |
|--------|---------------------------|---------------|-----------------|------------------|------------------------|
| 1 | 13,30 | 350 | 0,00 | 0,04 | 0,00 |
| | | 400 | 1000,00 | 0,03 | |
| 2 | 54,70 | 150 | 0,00 | 0,86 | 1,41 |
| | | 200 | 1000,00 | 0,48 | |
| 3 | -141,40 | 300 | 0,00 | 0,56 | 0,44 |
| | | 350 | 1000,00 | 0,41 | |
| 4 | 124,70 | 250 | 1000,00 | 0,71 | 2,18 |
| | | 300 | 0,00 | 0,49 | |
| 5 | -136,70 | 250 | 1000,00 | 0,77 | 2,59 |
| | | 300 | 0,00 | 0,54 | |
| 6 | 682,70 | 300 | 0,00 | 2,68 | 8,08 |
| | | 350 | 1000,00 | 1,97 | |
| 7 | 45,30 | 150 | 1000,00 | 0,71 | 4,03 |
| | | 200 | 0,00 | 0,40 | |
| 8 | 715,16 | 350 | 0,00 | 2,06 | 4,59 |
| | | 400 | 1000,00 | 1,58 | |
| 9 | 167,54 | 300 | 0,00 | 0,66 | 0,06 |
| | | 350 | 100,00 | 0,48 | |
| 10 | 1155,16 | 450 | 100,00 | 2,02 | 0,63 |
| | | 500 | 0,00 | 1,63 | |

Continuação da tabela 7.16

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota do Terreno (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|---------------------|--------------------------|
| 1 | 196,98 | 168,00 | 28,98 |
| 2 | 196,97 | 170,00 | 26,97 |
| 3 | 195,57 | 180,00 | 15,57 |
| 4 | 197,41 | 175,00 | 22,41 |
| 5 | 199,59 | 170,00 | 29,59 |
| 6 | 200,00 | 185,00 | 15,00 |
| 7 | 195,00 | 180,00 | 15,00 |
| 8 | 195,06 | 175,00 | 20,06 |
| 9 | 200,22 | 165,00 | 35,22 |

Continuação da tabela 7.16

| | |
|---------|--------|
| R-1 | 196,98 |
| R-2 | 195,06 |
| Bomba | 200,22 |
| Booster | 13,08 |

| | |
|--------------------------------|--------------------|
| Custo total anual (UMT) | 35517675,36 |
|--------------------------------|--------------------|

Apresenta-se a seguir, na Tabela 7.17, os resultados obtidos na segunda etapa para a situação de demanda mínima.

Tabela 7.17 – Resultados obtidos na segunda etapa de otimização/ Situação de demanda mínima

| Trecho | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Velocidade (m/s) | Perdas no trecho (mca) |
|--------|---------------------------|---------------|-----------------|------------------|------------------------|
| 1 | 296,86 | 350 | 0,00 | 0,86 | 0,90 |
| | | 400 | 1000,00 | 0,66 | |
| 2 | 27,71 | 150 | 0,00 | 0,44 | 0,40 |
| | | 200 | 1000,00 | 0,24 | |
| 3 | 269,15 | 300 | 0,00 | 1,06 | 1,44 |
| | | 350 | 1000,00 | 0,78 | |
| 4 | 60,92 | 250 | 1000,00 | 0,34 | 0,58 |
| | | 300 | 0,00 | 0,24 | |
| 5 | -208,23 | 250 | 1000,00 | 1,18 | 5,65 |
| | | 300 | 0,00 | 0,82 | |
| 6 | 424,23 | 300 | 0,00 | 1,67 | 3,35 |
| | | 350 | 1000,00 | 1,22 | |
| 7 | 27,71 | 150 | 1000,00 | 0,44 | 1,62 |
| | | 200 | 0,00 | 0,24 | |
| 8 | 721,08 | 350 | 0,00 | 2,08 | 4,67 |
| | | 400 | 1000,00 | 1,59 | |
| 9 | 296,86 | 300 | 0,00 | 1,17 | 0,17 |
| | | 350 | 100,00 | 0,86 | |
| 10 | 809,71 | 450 | 100,00 | 1,41 | 0,33 |
| | | 500 | 0,00 | 1,15 | |

Continuação da tabela 7.17

| Nó | Altura Piezométrica (m) | Cota do Terreno (m) | Pressão disponível (mca) |
|----|-------------------------|---------------------|--------------------------|
| 1 | 196,98 | 168 | 28,98 |
| 2 | 197,88 | 170 | 27,88 |
| 3 | 198,28 | 180 | 18,28 |
| 4 | 199,32 | 175 | 24,32 |
| 5 | 199,90 | 170 | 29,90 |
| 6 | 204,96 | 185 | 19,96 |
| 7 | 195,23 | 180 | 15,23 |
| 8 | 195,06 | 175 | 20,06 |
| 9 | 200,22 | 165 | 35,22 |

7.5 – Tabelas Comparativas dos Custos Encontrados para cada Conjunto de Diâmetros Iniciais do Problema

Tabela 7.18 – Custos encontrados para cada conjunto de valores iniciais de diâmetros escolhidos arbitrariamente

| Conjunto de Dados Iniciais de Entrada | Custo Total Anual (Umf) |
|---------------------------------------|------------------------------|
| 1 | 43.740.112,94 |
| 2 | 43.498.947,90 |
| 3 | 44.555.165,15 |
| 4 | 40.872.637,06 |
| 5 | 42.423.220,31 |
| 6 | 39.662.686,82 |
| 7 | 40.203.257,77 |
| 8 | 39.746.465,75 |
| 9 | 42.718.739,34 |
| 10 | 40.841.185,10 |
| 11 | Não encontrou solução viável |

Tabela 7.19 - Custos encontrados para cada conjunto de valores iniciais de diâmetros escolhidos de acordo com as velocidades máximas admissíveis

| Velocidades Iniciais (m/s) | Custo Total Anual (Umf) |
|----------------------------|------------------------------|
| 0,50 | 38.138.394,25 |
| 0,75 | 37.472.783,27 |
| 1,00 | 35.517.675,36 |
| 1,50 | 38.358.151,83 |
| 1,70 | 36.727.379,05 |
| 2,00 | Não encontrou solução viável |
| 2,25 | Não encontrou solução viável |
| 2,50 | Não encontrou solução viável |

Como é possível se observar dos resultados finais apresentados acima, alguns trechos são compostos por um conjunto de dois diâmetros diferentes, o que era esperado, pois o ótimo em algum trecho pode ser formado por um grupo de até dois diâmetros (GRANADOS, 1990). Porém, com relação aos resultados obtidos considerando-se como variáveis iniciais os diâmetros obtidos com base nas velocidades máximas admissíveis nos trechos, o resultado não revela uma decomposição de trechos em subtrechos o que também está correto, pois, para o método, aquela solução é a mais econômica, não sendo porém obrigatório que o resultado final seja composto de trechos decompostos em subtrechos, como ocorreu com o primeiro exemplo.

7.6 - Discussões

Como foi demonstrado, através das tabelas de respostas, a metodologia foi satisfeita também para o caso de se trabalhar com múltiplas fontes de abastecimento de uma rede e com uma energia interna inserida na mesma, ou seja, encontrou-se uma resposta econômica que satisfaz as condições hidráulicas necessárias a um dimensionamento e funcionamento correto de redes de distribuição de água.

Tem-se como grande dificuldade encontrada neste trabalho a necessidade de se inserir bons valores iniciais de entrada, pois se assim não acontecer, provavelmente não serão encontrados valores satisfatórios na resposta. Além disso, é possível não se conseguir gerar nenhum valor de resposta.

7.6.1 – Discussões dos resultados obtidos a partir do primeiro conjunto de dados iniciais de entrada

Como se pode observar nas tabelas apresentadas anteriormente, com referência ao primeiro conjunto dos valores de diâmetros iniciais de entrada, tem-se que em quatro trechos o programa dividiu os mesmos em subtrechos, quais sejam, os trechos 1, 7, 8 e 9, resultando assim em um dimensionamento com custo mínimo, apesar de que, na prática, não seria adequado realizar esta divisão, pois os comprimentos dos subtrechos obtidos

causariam maiores gastos na execução da obra, do que se fosse considerado um trecho único, isto tendo em vista o curto comprimento obtido para estas subdivisões.

Tem-se que a velocidade final não se mostrou muito elevada nos trechos, a exceção do trecho que parte da estação de bombeamento (trecho 10), o qual conduz um maior valor de vazão em um diâmetro de dimensão não tão elevada. O modelo poderia trabalhar com diâmetros maiores pois os valores limites de pressão e velocidade não foram atingidos, porém, levando-se em consideração o conjunto de soluções possíveis, tendo em vista a solução mais econômica, o modelo optou por considerar a solução apresentada.

Curiosamente, o diâmetro deste trecho, ou seja, do trecho que parte da bomba, não foi dimensionado como o maior diâmetro da rede, o que inicialmente era esperado. Isto pode ter acontecido devido ao curto comprimento do trecho que é de 100 m, o que deve ter sido levado em conta no dimensionamento pelo modelo, pois, como se sabe o método não é capaz de analisar estes dados, ou seja, ele simplesmente dimensiona a rede tendo em vista o menor custo e, satisfazendo as condições impostas pelo projetista. Como isso, a análise final dos resultados encontrados caberá ao projetista, que irá verificar a adequação destes resultados ao problema prático em questão, mesmo sabendo que estes valores, teoricamente, estão corretos, tendo em vista ao atendimento das restrições hidráulicas do problema.

Observa-se também que o booster praticamente não é utilizado, pois a altura manométrica encontrada para o mesmo é de aproximadamente 0,50 mca, o que se justifica pelo fato de que o custo de energia aumenta muito o custo final do projeto, optando o modelo em fazer um maior uso do reservatório 2 para atender os nós 6 e 7 do que utilizar o booster, tendo em vista este aumento do custo da energia.

Outra observação a ser feita é com relação à vazão na situação de contorno de demanda máxima do trecho 2, em que a mesma é praticamente nula, ou seja, 0,50 m³/h. Isto não tem uma explicação plausível, apenas o modelo optou por abastecer o nó 3 com a vazão provinda da estação de bombeamento e não do reservatório 1 que só abastece o nó 2. Isto, aparentemente, é uma solução que acarreta um maior custo do que se fosse abastecido o nó três com o reservatório 1, tendo em vista uma menor energia de bombeamento a ser disponibilizada para este caso. Porém, levando-se em conta o conjunto de possibilidades possíveis de abastecimento dos nós pelas três fontes, o modelo encontrou a apresentada

solução como sendo a mais econômica para aqueles valores iniciais de entrada. Então, como esta solução não é inviável na prática, aceita-se a mesma como válida, mesmo porque o diâmetro encontrado não é para transportar esta vazão de $0,50 \text{ m}^3/\text{h}$ e sim para transportar a vazão da situação de demanda mínima, pois como foi colocado anteriormente, as duas situações são otimizadas conjuntamente e não em separado, daí o motivo do diâmetro encontrado para este trecho ter sido de 500 mm, o que poderia parecer estranho, se fosse analisado pelo prisma de que a otimização é realizada separadamente para as duas situações de contorno, o que não ocorre.

Com isso, demonstra-se a necessidade de se realizar o dimensionamento levando-se em consideração as duas situações de contorno (demanda máxima e mínima), pois, caso assim não ocorresse, ou seja, o dimensionamento tivesse sido realizado considerando-se apenas a situação de demanda máxima, poderia haver um problema quando da necessidade de se encher o reservatório 1, já que, devido ao baixo valor de vazão considerado para o trecho e, conseqüente, baixo valor de diâmetro do mesmo, aumentaria-se consideravelmente a perda de carga neste trecho, diminuindo-se assim a pressão e, conseqüentemente, resultaria em uma possível falha no enchimento do reservatório 1.

O sinal negativo colocado nos resultados das vazões dos trechos 2 e 3 para a situação de demanda máxima significa que os sentidos iniciais das vazões nos respectivos trechos não foram considerados pelo programa, optando o mesmo em mudar o sentido destas vazões, tendo em vista em este ser um arranjo que resulta em um dimensionamento econômico da rede de distribuição de água.

7.6.2 - Discussões dos resultados obtidos a partir do segundo conjunto de dados iniciais de entrada

Com relação à situação dos conjuntos de valores iniciais de diâmetros, tendo em vista o critério da velocidade admissível, tem-se como maior perda de carga a obtida no trecho número seis. Isto aconteceu, provavelmente, devido ao alto valor de vazão encontrado neste trecho, que por sua vez possui uma grande extensão, e não ser possível aumentar-se o diâmetro do trecho devido a um conseqüente aumento do custo de projeto. Também não se poderia diminuir o diâmetro deste trecho, com objetivo de se diminuir o

custo do dimensionamento, devido a não ser possível diminuir-se mais ainda a pressão disponível, que já se encontra no seu limite mínimo (15 mca), pois sabe-se que diminuindo o diâmetro do tubo, aumenta-se consideravelmente a perda de carga e, por conseguinte, diminui-se a pressão.

Com isso, nota-se que se quisesse diminuir o valor desta perda de carga, seria necessário aumentar o valor do diâmetro, o que não foi considerado, devido ao objetivo de se encontrar uma solução econômica para o dimensionamento.

Com relação à vazão considerada no trecho 1, tem-se que, na resposta da primeira etapa do problema para a situação de demanda máxima, a mesma foi considerada nula, ou seja, não seria necessário o reservatório 1 inserido na rede. Porém, a resposta considerada na segunda etapa do problema para a mesma situação, leva em consideração este reservatório, pois a vazão que dele provém é de aproximadamente $14 \text{ m}^3/\text{h.}$, o que faz com que este reservatório seja considerado.

O booster é muito utilizado neste problema, pois pode-se observar que o resultado final (2ª etapa) do mesmo é de aproximadamente 14 mca, o que leva a conclusão de que para se vencer o desnível topográfico do problema e considerando o menor custo, o modelo optou pelo funcionamento do booster, ao invés de considerar unicamente o reservatório 2 abastecendo o nó 6 em questão.

Nota-se neste caso que o maior diâmetro considerado foi colocado no trecho que possui a maior vazão, ou seja, o trecho 10.

Em relação a alguns valores negativos encontrados tem-se a mesma explicação colocada anteriormente, ou seja, os sentidos iniciais das vazões nos respectivos trechos não foram considerados pelo programa, optando o mesmo em mudar o sentido destas vazões, tendo em vista em este ser um arranjo que resulta em um dimensionamento econômico da rede de distribuição de água.

As perdas de carga obtidas nestes trechos de vazões negativas também são negativas, devido ao uso das vazões na fórmula da perda de carga (Equação 7.1).

Os comprimentos dos trechos não foram desdobrados em subtrechos. Esta resposta mostra que não é obrigatório o desdobramento dos trechos em subtrechos para se obter o dimensionamento da rede com custo econômico, já que neste exemplo, com

estes valores iniciais de entrada, foi encontrado um dimensionamento econômico sem desdobramento dos trechos.

Observa-se também que, no dimensionamento da rede, considerando-se o primeiro conjunto de valores de diâmetros iniciais de entrada, o booster praticamente não foi utilizado e, no segundo conjunto de valores de diâmetros iniciais de entrada, o booster se mostrou útil, levando-se à conclusão de que a metodologia também pode ser utilizada para se testar a necessidade de locação à rede de determinados equipamentos.

No caso dos reservatórios, o método também serve como base para a inserção ou não dos mesmos na rede, pois caso tivesse ocorrido uma vazão nula ou muito pequena nos trechos 1 e/ou 9 da rede, levaria a conclusão de que os respectivos reservatórios não seriam úteis e necessários nestes nós, o que não ocorreu no presente trabalho.

Como a ferramenta solver otimiza as respostas, tem-se então que as mesmas são econômicas (mínimas), quando comparadas com os métodos tradicionais de dimensionamento, por exemplo o Hardy-Cross. Esta afirmação já foi demonstrada na dissertação de Formiga (1999), sendo, por isso mesmo, não testada neste trabalho.

Os resultados obtidos neste trabalho atenderam ao objetivo desejado, pois o método dimensionou a rede, atendendo a todas as restrições colocadas no modelo e com respostas otimizadas. Porém, não se garante que estas respostas sejam ótimos globais, devido à complexibilidade de variáveis inseridas na rede e ao alto valor de não linearidade contida nas equações que regem o problema.

Capítulo VIII

Conclusões e Recomendações

Até os dias atuais os projetistas, principalmente no nosso país, não utilizam as técnicas de otimização em seus projetos, ficando as mesmas restritas às pesquisas realizadas em universidades. Isto pode ser explicado devido ao fato de que para o uso destes métodos, na maioria das vezes, faz-se necessário um certo conhecimento de programação computacional e, também, devido à falta de programas específicos desenvolvidos para este fim. Com isso, utilizou-se neste trabalho uma metodologia que pode ser implementada em planilhas eletrônicas, não necessitando assim de conhecimentos mais profundos de programação computacional, sendo portanto de mais fácil acesso aos profissionais que trabalham com dimensionamento de redes de distribuição de água e estão fora dos centros de pesquisa.

A metodologia em questão utiliza técnicas de programação não linear, tendo em vista que o problema físico de dimensionamento hidráulico e econômico de redes é representado por equações e inequações não lineares. O método desenvolvido demonstrou ser eficiente, já que todas as restrições hidráulicas do problema foram atendidas.

O dimensionamento foi resolvido, basicamente, em três etapas, sendo as duas primeiras de dimensionamento propriamente dito e a terceira etapa de comparação dos resultados obtidos para as diferentes variáveis iniciais de entrada, escolhendo-se assim, aquela que realmente fornece o dimensionamento com menor custo.

A desvantagem da utilização das planilhas eletrônicas e o conseqüente uso da ferramenta Solver contida na planilha eletrônica do Excel[®] é a limitada capacidade de inserção das equações e inequações de restrição, pois a mesma comporta no máximo 256 restrições, ou seja, restringe assim o número de anéis e variáveis que pode conter a rede de distribuição. Esse problema pode ser superado com a possibilidade de se adquirir um

complemento do pacote (“up-grade”), o que permite uma inclusão de um número muito maior de restrições, podendo-se assim resolver o dimensionamento para redes de distribuição de grande porte.

Outra grande vantagem de se utilizar as tabelas eletrônicas diz respeito a liberdade que dispõe o projetista em fazer variar a função objetivo e modificar as restrições, introduzindo ou reduzindo-as de acordo com a necessidade do problema. Isto é uma grande vantagem, pois sabe-se que uma rede de distribuição nunca é igual a outra, sendo necessário portanto inserir no dimensionamento as particularidades de cada uma.

O dimensionamento da rede de distribuição exposto neste trabalho foi resolvido tendo em vista dois conjuntos de valores iniciais de diâmetros diferentes, um conjunto escolhido arbitrariamente e o outro levando em consideração valores admissíveis de velocidade, pois sabe-se que para realizar problemas de otimização necessita-se de valores iniciais das variáveis colocados ao problema, e mais ainda, de bons valores iniciais. Para testar se os valores iniciais escolhidos eram bons, variou-se um deles (conjunto de diâmetros) várias vezes, dimensionando a rede para cada nova entrada desses diâmetros, obtendo-se assim um determinado dimensionamento com respectivo custo para cada valor inicial das variáveis. Com isso, comparou-se cada resultado e encontrou-se aquele de menor custo.

O dimensionamento que levou ao menor custo foi encontrado tendo por base os valores iniciais de diâmetros de acordo com o critério de velocidade admissível comprovando assim a necessidade de bons valores iniciais introduzidos no problema, pois aqueles valores estabelecidos arbitrariamente não levaram ao dimensionamento mais econômico, tendo, inclusive, por vezes levado a respostas não viáveis.

A rede examinada em questão é uma rede fictícia que selecionada para ampliar a metodologia utilizada às mais variadas possibilidades de arranjo dos componentes de uma rede de distribuição. Porém não se fez nenhum teste utilizando outra metodologia de dimensionamento de redes de distribuição para poder comparar os resultados obtidos com a metodologia em questão. Dessa forma, através do presente trabalho, não se pode garantir que a solução de menor custo, entre todas encontradas, seja a correspondente à de custo mínimo. As soluções otimizadas encontradas, que forneceram os custos “considerados mínimos” podem corresponder a mínimos locais e não necessariamente ao mínimo global,

já que não se dispôs de uma metodologia comparativa para garantir que realmente se alcançou o mínimo global. Assim, recomenda-se um estudo comparativo da metodologia utilizada e ampliada neste problema com outros métodos de otimização, o que poderia ser objeto de outra tese de mestrado.

O dimensionamento aqui realizado foi desenvolvido em três etapas, sendo que a última etapa é a de comparação de valores encontrados, quando dos diversos dimensionamentos realizados a partir da variação das variáveis iniciais de entrada, especificamente os diâmetros, adotando-se como resposta final aquela alternativa que proporcionou o menor custo total do sistema (rede, mais energia). Portanto, sugere-se que esta terceira etapa seja realizada automaticamente, ou seja, seja desenvolvido um programa que automatize o processo de comparação.

Sugere-se que se aumente o porte da rede aqui utilizada, introduzindo novos anéis a mesma para ver como se comporta o dimensionamento.

O custo do reservatório não foi levado em consideração nem o rendimento das bombas, sugerindo-se assim o desenvolvimento de uma expressão que relacionasse o custo do reservatório com o volume e altura deste e, desenvolvendo uma expressão que relacionasse o custo da bomba de acordo com a altura manométrica, vazão e rendimento da mesma.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABADIE, J.; CARPENTIER, J.. *Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to Case of Non Linear Constraints*. In: FLETCHER, R. (Ed.) OPTIMIZATION., Chapter 4, p. 37 – 47, Academic Press, London, UK, 1969.
- ALPEROVITS, E.; SHAMIR, U. *Design of Optimal Water Distribution Systems*. Water Resources Research. AGO. Vol 13, N°6, p. 885-900. New York, NY, USA, 1977.
- AZEVEDO NETO, José Martiniano. *Manual de Hidráulica*. Vol. I, 6ª Edição. Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, SP, 1973.
- BABBITT, Harold, E.; DOLAND, James, J.; CLEASBY, John L.. *Abastecimento de Água*. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, SP, 1967.
- BARBOSA, Paulo, S., F.. *Modelos de Programação Linear em Recursos Hídricos*, in: Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídricos, Organizador: Rubem La Laina Porto. Editora Universidade / UFRGS / Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, RS, 1997.
- BAZARAA, Mokhtar S.; SHERALI, Hanif D.; SHETTY, C. M.. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2ª Edição, Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA, 1999.
- BELLMAN, R. E., *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1957
- BROOKE, A.; KENDRICK, D.; MEEARUS, A.. *GAMS: a User's Guide*. The Scientific Press. Redwood City, CA, USA, 1988.

- CETESB – Companhia Estadual de Tecnologia de Saneamento Básico e Defesa do Meio Ambiente. *Técnica de Abastecimento e Tratamento de Água*. CETESB. São Paulo, SP, 1976.
- CIRILO, José Almir. *Programação Não Linear Aplicada a Recursos Hídricos*, in: Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídricos. Organizador: Rubem La Laina Porto. Editora Universidade/UFRGS/Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, RS, 1997.
- DACACH, Nelson Gandur. *Sistemas Urbanos de Água*. 2ª Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, RJ, 1979.
- DUAN, Ning; MAYS, Larry W.; LANSEY, Kevin E.. *Optimal Reliability-Based Design of Pumping and Distribution Systems*. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 116, Nº 2, p. 249-267, New York, NY, USA, 1990.
- EL-BAHARAWY, A.; SMITH, A. A.. *Application of MINOS to Water Collection and Distribution Networks*. Civil Engineering Systems, Vol. 2, p. 38 – 49, 1985.
- EHRlich, Pierre Jacques. *Pesquisa Operacional – Curso Introdutório*. Editora Atlas, 5ª edição, São Paulo, SP, 1985.
- FAIR, Gordon, M.; GEYER, John, C.. *Elements of Water Supply and Waste-Water Disposal*. 4ª Edição. John Wiley & Sons. New York, NY, 1964.
- FORMIGA, Klebber Teodomiro.. *Metodologia de Otimização de Redes Malhadas Através da Programação Não Linear*, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1999.

- FRITZCHE, Helmut. *Programação Não Linear: Análise e Métodos*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, SP, 1978.
- GARCEZ, Lucas Nogueira. *Elementos de Engenharia Hidráulica e Ambiental*. 2ª Edição, Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, SP, 1974.
- GESSLER, J.; WALSKY, T., M.. *Technical Report EL – 85 – 11: Water Distribution System Optimization*. U.S. Army Corps Engineers, Washington, DC, USA, 1985.
- GOMES, Héber Pimentel. *Engenharia de Irrigação: Hidráulica dos Sistemas Pressurizados Aspersão e Gotejamento*. 2ª Edição. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1997.
- GRANADOS, Alfredo. *Infraestructuras de Regadíos – Redes Colectivas de Riego a Presión*. Servicio de Publicación de E. T. S. I. de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid, Espanha, 1990.
- HAMBERG, Dan; SHAMIR, Uri.. *Schematic Models for Distribution Systems Design I: Combination Concept*. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 114. N. 2. p. 129-162. New York, NY, USA, 1988.
- HAMMER, Mark, J., *Water and Waste-Water Technology*. John Wiley & Sons. New York, NY – USA, 1977.
- HOLLAND, J. H.. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT Press. Cambridge, Massachusetts, USA, 1975.
- LANSEY, Kevin E.; DUAN, Ning; MAYS, Larry W.; TUNG, Yeou-Kuong.. *Water Distribution System Under Uncertainties*. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 125, Nº 5, p. 630 – 644, New York, NY, USA, 1989.

- LASDON, L. S.; WARREN, A. D.; RATNER, M. S.. *GRG2 User's Guide*. University of Texas at Austin, Austin Tex, USA, 1984.
- LEAL, Antônio Farias; GOMES, Heber Pimentel. *Utilização da Metodologia Granados para a Otimização de Redes Hidráulicas Malhadas*. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, Vol. 1, p. 13 – 16, Campina Grande, PB, 1997.
- LIEBMAN, J. S.; LASDON, L.; SCHRAGE, L.; WARE, A.. *Modeling and Optimization with GINO*. The Scientific Press. Palo Alto, CA, USA, 1986.
- MATEUS, Geraldo R.; LUNA, Henrique, L.. *Programação Não Linear*. V Escola de Computação. Belo Horizonte, MG, 1986.
- MAYS, L., W.. *Reability Analysis of Water Distribution Systems*. ASCE, New York, NY, USA, 1989.
- MELO, José R. C.. *Sistemas de Abastecimento Público de Água*. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 1991.
- MONBALIU, J.; JO, J. H.; FRAISSE, C. W.; VADAS, R. G.. *Computer Aided Design Pipe Network* In: Water Resource Systems Applications. Friesen Printers, Winnipeg, Canada, 1990.
- MORGAN, D.; GOULTER, I.. *Least Cost Layout and Design of Looped Water Distribution Systems*. Ninth International Symposium on Urban Hydrology, Hydraulics and Sediment Control, University of Ky., Lexington, July, p. 27 – 30, 1982.
- MORGAN, D.; GOULTER, I.. *Optimal Urban Water Distribution Design*. Water Resources Research. Vol. 21, Nº 5. p. 642-652. 1985.
- MUNEM, Mustafá A.; FOULIS, David J.. *Cálculo*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.. Rio de Janeiro, RJ, 1986.

- MURTAGH, B. A.. *MINOS 5.1 User's Guide*. Systems Optimization Laboratory Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, CA, USA, 1987.
- SCHAAKE, J., C.; LAI, D.. *Linear Programming and Dynamic Programming Application of Water Distribution Network Design*. Rep. 116, Mit Press, Cambridge, Mass., 1969.
- SILVA, Rossana Cavalcanti Araújo. *Otimização de Redes Ramificadas Através do Método da Programação Não Linear*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 1997.
- SILVESTRE, Paschoal. *Hidráulica Geral*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, RJ, 1982.
- SIMPSON, Angus, R.; DANDY, Graeme, C.; MURPHY, Laurence, J.. *Genetic Algorithms Compares to Other Techniques for Pipe Optimization*. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 120. N. 4. p. 423 – 443. New York, NY. USA. 1994.
- SU, Yu-Chun; MAYS, Larry W.; DUAN, Ning; LANSEY, Kevin E.. *Reliability-Based Optimization Model for Water Distribution Systems*. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 114, N° 12, p. 1539 – 1555, New York, NY, USA, 1987.
- WALSKI, Thomas, M.; GESSLER, Johannes, SJOSTROM, John, W.. *Water Distribution Systems: Simulation and Sizing*. Lewis Publishers. Michigan, USA, 1990
- WOLFE, P.. *Methods of Nonlinear Programming: the Reduced Gradient Method*, in Recent Advances in Mathematical Programming. Editors Graves e Wolfe, Mc-Graw-Hill, New York, NY, USA, 1963.