



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA E RECURSOS NATURAIS**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE ENGENHARIA AGRÍCOLA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AGRÍCOLA**



**TESE DE DOUTORADO**

**HYGOR CÉSAR SOARES RODRIGUES**

**INSTABILIDADE GLOBAL DE SILOS CILÍNDRICOS METÁLICOS COM CHAPAS  
CORRUGADAS ENRIJECIDAS VERTICALMENTE**

**CAMPINA GRANDE - PB**

**2025**

**HYGOR CÉSAR SOARES RODRIGUES**

**INSTABILIDADE GLOBAL DE SILOS CILÍNDRICOS METÁLICOS COM CHAPAS  
CORRUGADAS ENRIJECIDAS VERTICALMENTE**

**Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Agrícola da Universidade Federal de Campina Grande, como parte das exigências para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Agrícola, na Área de Construções Rurais e Ambiente.**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. José Wallace Barbosa do Nascimento**

**CAMPINA GRANDE - PB**

**2025**

R696i

Rodrigues, Hygor César Soares.

Instabilidade global de silos cilíndricos metálicos com chapas corrugadas enrijecidas verticalmente / Hygor César Soares Rodrigues. – Campina Grande, 2025.

125 f. : il. color.

Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Tecnologia e Recursos Naturais, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. José Wallace Barbosa do Nascimento".

Referências.

1. Silo. 2. Flambagem Global. 3. Método dos Elementos Finitos. 4. Silo Cilíndrico Metálico - Montantes. I. Nascimento, José Wallace Barbosa do. II. Título.

CDU 631.363.1(043.2)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
POS-GRADUACAO EM ENGENHARIA AGRICOLA  
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

## FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

**HYGOR CÉSAR SOARES RODRIGUES**

**“INSTABILIDADE GLOBAL DE SILOS  
CILÍNDRICOS METÁLICOS COM CHAPAS  
CORRUGADAS ENRIJECIDAS  
VERTICALMENTE”**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola como pré-requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Agrícola.

Aprovada em: 24/07/2025

Jose Wallace Barbosa do Nascimento - Orientador(a) - PPGEA/CTRN/UFCG

José Pinheiro Lopes Neto - Examinador(a) Interno(a) - PPGEA/CTRN/UFCG

Josivanda Palmeira Gomes - Examinador(a) Interno(a) - PPGEA/CTRN/UFCG

Carlito Calil Junior - Examinador(a) Externo(a) - USP

Andrés Batista Cheung - Examinador(a) Externo(a) - UFMS

Francisco Carlos Gomes - Examinador(a) Externo(a) - UFLA



Documento assinado eletronicamente por **JOSE PINHEIRO LOPES NETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 25/07/2025, às 12:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSÉ WALLACE PARBOSA DO NASCIMENTO, Usuário Externo**, em 25/07/2025, às 14:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andrés Batista Cheung, Usuário Externo**, em 25/07/2025, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **JOSIVANDA PALMEIRA GOMES, PROFESSOR(A) DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 25/07/2025, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **CARLITO CALIL JUNIOR, Usuário Externo**, em 25/07/2025, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Carlos Gomes, Usuário Externo**, em 28/07/2025, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **5682477** e o código CRC **66D740FF**.

---

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por sua generosa bondade em ter me concebido a graça da vida e por ter me permitido evoluir espiritualmente em Cristo Jesus.

A meu orientador, Prof. José Wallace Barbosa do Nascimento, por todos os ensinamentos, paciência, dedicação e atenção ao longo da graduação, mestrado e doutorado. Obrigado pelo trabalho que o senhor desenvolveu durante muitos anos na Universidade Federal de Campina Grande, com perseverança e dedicação. Sem dúvida, sou um dos frutos desse trabalho. Seu exemplo de vida e profissional inspirou muitos alunos, e eu fui um deles. O senhor foi mais que um orientador, foi também um amigo e marcou muito minha caminhada.

A minha família, aos meus pais, João Rodrigues e Eliane Soares, e aos meus irmãos, Harlan e Yharla, por me proporcionarem tanto amor e carinho ao longo da minha vida. Obrigado, pai e mãe, por terem lutado tanto para me dar educação; sem isso, eu não teria chegado até aqui.

A minha esposa, Erika Thais, que perseverou com coragem e firmeza em todos os momentos que vivemos. Foram dias desafiadores, cheios de incertezas, mas em nenhum deles te vi desanimar. Sem o teu amor, o teu carinho e a tua dedicação incansável, nada disso teria sido possível.

Aos professores da área de Construções Rurais e Ambiente, Prof. José Wallace Barbosa do Nascimento, Prof. Dr. Dermeval Araújo Furtado, Prof.<sup>a</sup> Dra. Cássia Mendonça dos Anjos, e Prof. Dr. Carlos Eduardo Alves Oliveira.

À Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo apoio constante, pela bolsa concedida e pelos recursos que possibilitaram a realização deste estudo.

Aos colegas do Laboratório de Construções Rurais e Ambiente (LaCra), que desde o início estiveram presentes em minha caminhada, em especial, a Karoline Dornellas, Rafael e Gypson.

# INSTABILIDADE GLOBAL DE SILOS CILÍNDRICOS METÁLICOS COM CHAPAS CORRUGADAS ENRIJECIDAS VERTICALMENTE

## RESUMO

No projeto de silos cilíndricos metálicos, a verificação da resistência a instabilidade global é uma das etapas mais importante do projeto, portanto, negligenciar essa verificação pode tornar a estrutura susceptível a falhas estruturais. A instabilidade global de silos cilíndricos metálicos com chapas corrugadas enrijecidas verticalmente com montantes ainda é pouco estudado em comparação com outras estruturas de casca. A carga crítica de flambagem elástica em cascas ortotrópicas enrijecidas é fundamental para avaliar sua resistência à instabilidade. A norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017) recomenda dois métodos de cálculo: a abordagem de casca ortotrópica de Donnell-Mushtari-Vlasov e a teoria de coluna com base elástica. Pesquisas sobre a aplicação dos modelos prescritos pela norma eurocode têm indicado que os resultados obtidos com esses métodos tendem a ser conservadores na determinação da carga crítica de flambagem. O objetivo deste trabalho é analisar os métodos empregados para realizar análises de estabilidade global de silos cilíndricos metálicos com chapas corrugadas e enrijecidas verticalmente a fim de validar os métodos analíticos e numéricos, para propor recomendações que auxiliem no projeto de montantes de silos. Três estudos de caso foram conduzidos. As análises iniciais abrangeram modelos de silos com diâmetros de 4,55 m, 10,0 m e 14,55 m, todos com altura de 20,0 m e espaçamento entre montantes de 1,429 m. Para cada diâmetro, avaliaram-se quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,0 mm), dois perfis de corrugação (101,6x11,1mm e 76x18 mm) e duas seções de montantes. As análises de estabilidade linear – LBA foram realizados em elementos finitos com o software SCIA Engineer. Além disso, foi analisado também um modelo de silo real com diâmetro igual a 5,35 m, pertencente a um grupo de silos construída na Polônia com o emprego dos métodos analíticos e numérico estudados neste trabalho. Por fim, o modelo de silo ensaiado experimentalmente por Rodrigues (2019) foi modelado por meio do método dos elementos finitos. Para isso, foram construídos dois modelos distintos: no primeiro, tanto a corrugação das chapas quanto os montantes foram representados por elementos de casca com comportamento isotrópico; no segundo, a chapa corrugada foi modelada com elementos de casca ortotrópica, enquanto os montantes foram representados por elementos de barras. O cálculo da resistência à instabilidade dos montantes desse silo, foi realizado com o uso dos métodos das normas brasileira NBR 14.762:2010 e europeia EN 1993-4-1:2007:A1(2017). Nas análises dos modelos de silos, os resultados mostram que os métodos mais precisos para diâmetros de 4,55 m, foi o método b),

enquanto para os silos com diâmetros iguais a 10,0 e 14,55 m, foi o método de Sanders. As análises realizadas para o modelo de silo real SL535 demonstraram que os fatores de carga calculados com o emprego do método (a) produziram resultados mais próximos dos encontrados em elementos finitos. As simulações dos modelos de silo estudado por Rodrigues (2019) indicaram que os modelos de casca ortotrópica produziram resultados precisos quando comparados ao modelo 3D. Além disso, verificou-se que a posição dos anéis de vento não teve influência significativa no aumento dos fatores de carga. No cálculo da resistência à instabilidade, o método da norma europeia apresentou maior precisão em comparação ao método da norma brasileira.

**PALAVRAS-CHAVE:** silo, flambagem global, método dos elementos finitos, montantes.

# GLOBAL INSTABILITY OF METAL CYLINDRICAL SILOS WITH VERTICALLY STIFFENED CORRUGATED SHEETS

## ABSTRACT

In the design of cylindrical metal silos, the verification of global instability resistance is one of the most important steps in the project; therefore, neglecting this verification can make the structure susceptible to structural failures. The global instability of metal cylindrical silos with vertically stiffened corrugated sheets is still less studied compared to other shell structures. The critical elastic buckling load in orthotropic stiffened shells is fundamental for assessing their resistance to instability. The standard EN 1993-4-1:2007:A1(2017) recommends two calculation methods: the Donnell-Mushtari-Vlasov orthotropic shell approach and the elastic base column theory. Research on the application of the models prescribed by the Eurocode has indicated that the results obtained from these methods tend to be conservative in determining the critical buckling load. The objective of this work is to analyze the methods used to perform global stability analyses of metal cylindrical silos with corrugated and vertically stiffened sheets in order to validate the analytical and numerical methods, and to propose recommendations that assist in the design of silo supports. Three case studies were conducted. The initial analyses covered silo models with diameters of 4.55 m, 10.0 m, and 14.55 m, all with a height of 20.0 m and a spacing of 1.429 m between supports. For each diameter, four thicknesses (0.95, 1.55, 2.25, and 3.0 mm), two corrugation profiles (101.6x11.1 mm and 76x18 mm), and two support sections were evaluated. The linear stability analyses – LBA were performed using finite element software SCIA Engineer. Additionally, a real silo model with a diameter of 5.35 m, belonging to a group of silos built in Poland, was analyzed using the analytical and numerical methods studied in this work. Finally, the silo model experimentally tested by Rodrigues (2019) was modeled using the finite element method. For this, two distinct models were constructed: in the first, both the corrugation of the sheets and the supports were represented by shell elements with isotropic behavior; in the second, the corrugated sheet was modeled with orthotropic shell elements, while the supports were represented by bar elements. The calculation of the resistance to instability of the supports of this silo was performed using the methods from the Brazilian standard NBR 14.762:2010 and the European standard EN 1993-4-1:2007:A1(2017). In the analyses of the silo models, the results showed that the most accurate method for the diameter of 4.55 m was method b), while for silos with diameters of 10.0 and 14.55 m, it was the Sanders method. The analyses conducted for the real silo model SL535 demonstrated that the load factors calculated using method (a) produced results closer to those found in finite elements. The simulations of the silo models studied by Rodrigues (2019) indicated that the orthotropic shell models produced accurate results when compared to the 3D model.

Furthermore, it was verified that the position of the wind rings did not have a significant influence on the increase of load factors. In calculating instability resistance, the European standard method presented greater accuracy compared to the Brazilian standard method.

**KEY WORDS:** silo, global buckling, finite element method, stiffener.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Flambagem de cilindros submetidos à compressão axial .....	21
Figura 2 Curva de capacidade genérica estendida da EN 1993-1-6 (2007) .....	23
Figura 3 Cilindros enrijecidos n.º 3 a), n.º 1 b), e n.º 11 c) .....	27
Figura 4 Geometria das seções analisadas .....	36
Figura 5 Perfis de corrugação analisados .....	36
Figura 6 Dimensões do perfil de corrugação .....	37
Figura 7 Condições de contorno e carregamento .....	39
Figura 8 Configuração do modo de flambagem .....	44
Figura 9 Excentricidade do montante em relação ao plano médio da chapa .....	44
Figura 10 Configuração do modelo de coluna de base elástica .....	45
Figura 11 Silos metálicos construídos na Polônia .....	51
Figura 12 Dimensões das seções do SL535 .....	52
Figura 13 Pressões horizontais, de atrito, e esforços de compressão no silo SL535 .....	52
Figura 14 Elementos de link rígidos .....	54
Figura 15 Modelo do silo de chapa corrugada enrijecido com montantes .....	55
Figura 16 Seção do montante ensaiado .....	56
Figura 17 Modelos de análises .....	56
Figura 18 Cargas aplicadas nos modelos analisados .....	57
Figura 19 Condições de contorno aplicado ao modelo .....	58
Figura 20 Modelos de análises com anéis de vento .....	59
Figura 21 Condições de contorno e carregamentos aplicados à seção do silo analisada .....	60
Figura 22 Parâmetros de flambagem para seções dos montantes .....	63
Figura 23 Análise da convergência de malha .....	66
Figura 24 Análise de convergência dos modelos em MEF .....	66
Figura 25 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455 .....	69
Figura 26 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455 .....	70
Figura 27 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455 .....	71
Figura 28 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455 .....	72
Figura 29 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000 .....	73
Figura 30 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000 .....	74
Figura 31 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000 .....	75
Figura 32 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000 .....	77

Figura 33 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550 .....	78
Figura 34 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550 .....	79
Figura 35 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550 .....	80
Figura 36 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550 .....	81
Figura 37 Espaçamento máximo entre montantes - $d_{s,máx}$ .....	83
Figura 38 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m .....	85
Figura 39 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m .....	86
Figura 40 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m .....	87
Figura 41 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m .....	88
Figura 42 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m .....	90
Figura 43 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m .....	91
Figura 44 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m .....	91
Figura 45 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m .....	92
Figura 46 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m .....	94
Figura 47 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m .....	95
Figura 48 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m .....	95
Figura 49 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m .....	96
Figura 50 Análise de flambagem linear do modelo SL535 (Pw).....	98
Figura 51 Análise de flambagem linear do modelo SL535 (Pw+Ph) .....	98
Figura 52 Modo de flambagem (LBA) dos modelos 3D e equivalente .....	101
Figura 53 Modos de flambagem (LBA) dos modelos 3D e equivalente (vista superior) .....	102
Figura 54 Deformações devido ao carregamento aplicado dos modelos 3D e equivalente.....	102
Figura 55 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF1 .	103
Figura 56 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF2 .	104
Figura 57 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF3 .	104
Figura 58 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF4 .	105
Figura 59 Esforços atuantes nos montantes dos modelos sem anel de vento .....	106
Figura 60 Esforços atuantes nos montantes dos modelos com anel de vento .....	106
Figura 61 Análise de flambagem linear do modelo com anéis de vento reposicionados.....	107
Figura 62 Comprimento do arco empregado no modelo ECB+02.....	108
Figura 63 Cálculo dos deslocamentos do modelo MEF01 .....	109
Figura 64 Cálculo dos deslocamentos do modelo MEF02.....	109

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Configuração do modelo analisado com diâmetro de 4,55 m .....	35
Tabela 2 Condições de emprego das equações de Sanders .....	50
Tabela 3 Pressões, solicitações e seções do SL535.....	53
Tabela 4 Análise de convergência da malha .....	65
Tabela 5 Dados das propriedades das seções geométricas.....	82
Tabela 6 Coeficientes de rigidez das chapas corrugadas .....	82
Tabela 7 Espaçamento máximo entre montantes - $d_{s,máx}$ .....	83
Tabela 8 Carga crítica de flambagem do costado com diâmetro 4,55 m .....	84
Tabela 9 Carga crítica de flambagem do costado com diâmetro 10,0 m .....	89
Tabela 10 Carga crítica de flambagem do costado com diâmetro 14,55 m .....	93
Tabela 11 Carga crítica de flambagem do silo .....	99
Tabela 12 Valores dos fatores de carga do modelo SL535 .....	100
Tabela 13 Valores da rigidez à flexão da chapa corrugada.....	107
Tabela 14 Cargas e fatores de redução experimental do modelo ensaiado por Rodrigues (2019) ..	110
Tabela 15 Resistência à instabilidade global dos montantes.....	111

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
1.1	Justificativa.....	18
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>19</b>
2.1	Objetivo geral.....	19
2.2	Objetivos específicos .....	19
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>20</b>
3.1	Instabilidade de cascas isotrópicas .....	20
3.2	Instabilidade de cascas ortotrópicas enrijecidas.....	24
3.3	Artigos científicos.....	27
<b>4</b>	<b>MATERIAL E MÉTODOS .....</b>	<b>35</b>
4.1	Modelo computacional de cascas ortotrópicas enrijecidas .....	35
4.1.1	Descrição dos modelos .....	35
4.1.2	Elementos.....	36
4.1.3	Carregamento e condição de contorno.....	39
4.1.4	Análise de flambagem linear (LBA).....	40
4.2	Modelos analíticos.....	41
4.2.1	Método a) - casca ortotrópica EN 1993-4-1:2007/A1(2017).....	41
4.2.2	Método b) - coluna apoiada em base elástica EN 1993-4-1:2007/A1(2017) .....	45
4.2.3	Método de Sanders (1963).....	46
4.3	Modelo de silo real SL535 .....	51
4.3.1	Descrição do modelo analisado .....	51
4.3.2	Modelagem do silo.....	53
4.4	Modelo de silo ensaiado por Rodrigues (2019).....	55
4.4.1	Descrição do modelo .....	55
4.4.2	Modelagem do silo.....	56

4.4.3 Resistência à instabilidade global .....	59
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>65</b>
<b>5.1 Análise numérica.....</b>	<b>69</b>
5.1.1 Análise de flambagem linear do SL455.....	69
5.1.2 Análise de flambagem linear do SL1000.....	73
5.1.3 Análise de flambagem linear do SL14550.....	78
<b>5.2 Análise comparativa .....</b>	<b>82</b>
5.2.1 Análises do modelo SL4550 .....	83
5.2.2 Análises do modelo SL1000 .....	89
5.2.3 Análises do modelo SL14550 .....	93
<b>5.3 Instabilidade global do silo SL535.....</b>	<b>97</b>
<b>5.4 Análise de instabilidade do silo ensaiado por Rodrigues (2019).....</b>	<b>101</b>
5.4.1 Validação do modelo de casca ortotrópica .....	101
5.4.2 Análise de flambagem linear do silo com anéis de vento.....	103
5.4.3 Resistencia à instabilidade dos montantes .....	107
<b>6 CONCLUSÕES.....</b>	<b>113</b>
<b>7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>115</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>116</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>119</b>
<b>ANEXO B.....</b>	<b>125</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os silos são estruturas destinadas ao armazenamento de produtos granulares ou pulverulentos advindos de diversos setores industriais, agrícolas e extrativistas. Essas estruturas podem ser produzidas com diversas formas geométricas, podendo ser cilíndricas, prismáticas, uni ou multicelulares. Os materiais mais empregados são o aço, concreto e madeira. Entretanto, na agricultura, em nível de fazenda, são frequentemente empregados silos cilíndricos metálicos construídos com chapas corrugadas e reforçadas verticalmente com montantes (enrijecedores).

A forma cilíndrica promove projetos mais econômicos, pois os esforços predominantes são os de tração. A chapa corrugada é responsável por resistir aos esforços de tração devido às pressões horizontais e restringem o montante quanto à instabilidade, enquanto os esforços os montantes são responsáveis por resistir aos esforços de compressão que surgem devido ao atrito entre grão-parede (Lopes Neto *et al.*, 2014).

Segundo Hilburger (2020) e Reddy e Starnes (1993), o termo “cilindro ortotrópico” é aplicável a cilindros ou cascas enrijecidas cujo espaçamento entre os enrijecedores é suficientemente pequeno. Nesta situação, a rigidez de membrana e de flexão dos enrijecedores é distribuída no plano médio de uma única casca equivalente. A teoria fundamental sobre flambagem de cascas ortotrópicas foi desenvolvida por Flugge; entretanto, nessas análises, não foi considerada a influência das excentricidades dos enrijecedores.

Baruch e Singer (1963), Block *et al.* (1965) e Card e Jones (1966) realizaram pesquisas sobre a flambagem de cascas ortotrópicas verticalmente enrijecidas com longarinas e anéis. Seus estudos incluíram a formulação de modelos para a determinação das cargas críticas de flambagem e a análise dos efeitos das excentricidades dos enrijecedores. Rotter e Sadowski (2012) afirmaram que esses estudos são aplicáveis a veículos aeroespaciais, onde os carregamentos são diretos e os estados de tensão pré-flambagem são fáceis de analisar. Em contraste, as cargas em silos e tanques resultam em paredes de espessura variável, com pressões horizontais e de atritos variando na superfície da casca, criando estados de pré-flambagem mais complexos.

As condições de projeto inerentes a esse tipo de estrutura são complexas e, ainda, têm sido pouco exploradas em normas técnicas e na literatura. Há poucas publicações sobre instabilidade de cascas enrijecidas empregadas em silos cilíndricos de chapas corrugadas,

enrijecidas verticalmente com montantes (Hotala, 1996; Hotala, 2001; Chen et al., 2012; Chen e Rotter, 2012; Hotała e Skotny, 2014; Iwicki et al., 2016; Iwicki et al., 2017; Iwicki et al., 2019).

A abordagem da norma europeia EN 1993-4-1:2007 sobre flambagem de paredes de silos corrugadas sobre esforços de compressão baseia-se em dois métodos de cálculo, cuja aplicação depende do espaçamento entre seus enrijecedores. Para pequenas distâncias, a proposição de cálculo para a carga crítica de flambagem é a partir da teoria da casca ortotrópica. Para distâncias maiores, a determinação da carga crítica é baseada na solução de uma coluna apoiada em uma fundação elástica. O limite entre ambos os métodos é dado pelo espaçamento máximo, calculado conforme recomendações da própria norma.

Estudos de Wójcik e Tejchman (2011), Iwicki *et al.* (2011, 2015), Sondej *et al.* (2015), e Hajko *et al.* (2018) indicaram que os métodos da norma EN 1993-4-1:2007 são conservadores quando comparados aos resultados das análises de estabilidade usando elementos finitos. A diferença ocorre porque os métodos analíticos não consideram o efeito positivo da pressão horizontal nem a curvatura na rigidez das chapas corrugadas.

Iwicki *et al.* (2019) relataram que, na prática dos projetos de engenharia, fórmulas simples são geralmente empregadas ao invés de análises de elementos finitos, pelo fato das simulações exigirem um grande número de elementos e tempos de cálculo muito longos. Diante desse cenário, o projeto do costado de silos cilíndricos metálicos contra a flambagem global é um dos desafios mais importantes da engenharia, existindo lacunas e muitos colapsos que acontecem devido à instabilidade gerada por imperfeições construtivas e amplificadas por carregamentos assimétricos.

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo a análise da flambagem global elástica do costado de silos cilíndricos metálicos, compostos por chapas corrugadas e enrijecidos verticalmente com montantes, através de modelos analíticos e numéricos.

A proposta de pesquisa permitirá uma compreensão mais profunda dos mecanismos de flambagem, fornecendo novas abordagens para o projeto e operação de silos, com benefícios diretos para a indústria e a sociedade.

## 1.1 Justificativa

Silos cilíndricos metálicos são amplamente utilizados para o armazenamento de grãos, minerais, cimento, entre outros produtos. Sua eficiência está diretamente relacionada à segurança estrutural, sendo a instabilidade das paredes do silo um dos modos críticos de falha que podem comprometer sua integridade e operação. Nesse contexto, o estudo da flambagem das paredes dos silos cilíndricos metálicos revela-se de extrema importância.

As consequências de uma falha por flambagem podem ser desastrosas, resultando em danos ao silo, ao produto armazenado, ambientalmente, além de riscos para a segurança dos operadores e das instalações. Portanto, é essencial entender como a instabilidade ocorre nas paredes dos silos metálicos cilíndricos, para que se possa prevenir falhas e melhorar os projetos estruturais. A abordagem tradicional de análise de instabilidade, baseada em fórmulas e métodos aproximados, muitas vezes não é capaz de capturar toda a complexidade do comportamento real dos silos, principalmente devido à geometria irregular e às condições de carga não uniformes a que estão sujeitos.

O uso de métodos de cálculo numéricos, especialmente o Método dos Elementos Finitos (MEF), tem se mostrado uma ferramenta poderosa na análise estrutural de sistemas complexos. O MEF permite a discretização da estrutura em pequenos elementos, levando em consideração tanto a geometria precisa quanto as condições de carregamento e de contorno, possibilitando uma análise mais detalhada do comportamento da estrutura em situações extremas.

No caso dos silos cilíndricos metálicos com chapas corrugadas, o MEF oferece a vantagem de simular as condições de flambagem sob diversas configurações de carga, considerando a interação entre os diferentes componentes da estrutura (como as paredes e a base do silo) e os efeitos de não linearidade tanto no material quanto na geometria da estrutura. Isso torna possível uma previsão mais precisa do ponto de flambagem e das condições críticas que podem levar ao colapso da estrutura.

Além disso, o método numérico permite estudar cenários variados, como a presença de imperfeições nas paredes do silo, variações nas propriedades do material, efeitos de cargas dinâmicas (como vibrações) e o impacto de diferentes métodos de construção. A possibilidade de simular essas condições de forma realista oferece uma grande vantagem na otimização de projetos e no desenvolvimento de estratégias de monitoramento e manutenção preventiva.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Objetivo geral

O objetivo deste estudo é analisar os métodos analíticos e numéricos empregados para realizar análises de estabilidade global de silos cilíndricos metálicos com chapas corrugadas enrijecidos verticalmente com montantes empregando.

### 2.2 Objetivos específicos

- Modelar em elementos finitos o costado de silos cilíndricos metálicos de chapas corrugadas e enrijecidos verticalmente, com montantes para realizar análises de flambagem linear – LBA;
- Calcular a carga crítica de flambagem de estruturas utilizando os métodos analíticos recomendados pela norma europeia EN 1993-4-1:2007:A1(2017). Serão aplicados, em particular, o método a) de casca ortotrópica, baseado nas teorias de Donnell-Mustari-Vlasov, o método b) que adota a teoria de pilar apoiado em base elástica, e o método sugerido por Sanders;
- Realizar análises comparativas entre os métodos analíticos e numéricos empregados para calcular a carga crítica de flambagem, a fim de identificar os parâmetros que afetam a precisão dos modelos analíticos;
- Aplicar os métodos analíticos recomendados pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017), o método de Sanders, e os métodos numéricos, para realizar análises de estabilidade de um modelo de silo cilíndrico metálico real de 5,35 m de diâmetro estudado em Iwicki *et al.* (2019);
- Modelar em elementos finitos o silo analisado por Rodrigues (2019) de duas maneiras distintas. A primeira abordagem consiste na modelagem da chapa corrugada em três dimensões (3D) de forma completa, enquanto a segunda envolve a utilização de elementos de casca ortotrópica. O intuito é validar a precisão da modelagem utilizando elementos de casca ortotrópica;
- Calcular a resistência à instabilidade global dos montantes do silo ensaiado por Rodrigues (2019), empregando os modelos da norma NBR 14762:2010 e EN 1993-4-1:2007:A1(2017);

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Inicialmente, na primeira parte deste capítulo, discute-se sobre instabilidade de cascas isotrópicas e métodos de análise de instabilidade de cascas ortotrópicas, e, em sequência, são abordados os estudos atuais sobre instabilidade de silos cilíndricos metálicos de chapas corrugadas, enrijecidos verticalmente com montantes. Não é de interesse deste trabalho esgotar o tema sobre análise de instabilidade; portanto, o foco dessa revisão será limitado à análise de flambagem elástica.

As estruturas são projetadas a fim de atender aos critérios de segurança no estado limite último, estabelecidos em padrões normativos. O estado limite último está relacionado ao colapso ou ruína que determine a inutilização parcial ou total da estrutura. No projeto, uma das etapas a ser realizada é a determinação da resistência dos elementos a determinados modos de falhas. Em estruturas metálicas, basicamente, os elementos podem colapsar devido ao escoamento do material ou por instabilidade. Quando as tensões, sejam elas de contato, esmagamento ou cisalhamento atingem o valor limite da tensão de escoamento, ocorre a falha do elemento por esgotamento da capacidade resistente ao escoamento do material. Quanto à instabilidade, esse é um fenômeno caracterizado pela perda de equilíbrio dos elementos estruturais quando submetidos a esforços predominantemente de compressão. Ressalta-se a diferença entre flambagem e instabilidade. A flambagem é a perda de equilíbrio de elementos estruturais em condições ideais, com peças retas e materiais perfeitos. Na prática, falhas podem ocorrer com cargas menores devido a imperfeições geométricas e materiais que geram esforços de flexão.

#### 3.1 Instabilidade de cascas isotrópicas

Samuelson e Eggwertz (2003) abordaram a estabilidade de diversos elementos de cascas, além dos métodos teóricos, numéricos e experimentais empregados na determinação dos valores de carga crítica de flambagem. Os métodos teóricos apresentados baseiam-se na teoria linear da flambagem, que assume geometria perfeita, comportamento elástico-linear, pequenas deformações e carregamento ideal. Essa abordagem fornece um “valor idealizado” da carga crítica de flambagem, ignorando fatores como ovalização, soldas ou tensões residuais, e superestima a capacidade real das cascas. A equação (1) é empregada para determinar a carga

crítica de flambagem de cascas cilíndricas isotrópicas, é simples e de fácil emprego. A solução dessa equação pressupõe que a tensão axial é constante em toda a casca antes de flambar e que o modo de flambagem pode ser descrito pela equação (2).

$$\sigma_{el} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{r} \quad (1)$$

$$w = w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}(n\varphi) \quad (2)$$

Onde:

$t$  é a espessura da casca;

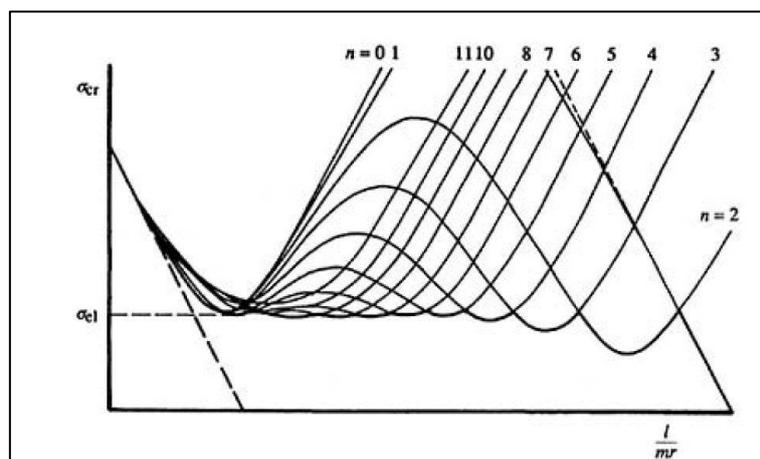
$E$  é o módulo de elasticidade do material;

$r$  é o raio da casca;

$\nu$  é o coeficiente de Poisson;

A solução geral  $\sigma_{cr} = f(m, n)$  é dada pela equação (3), que representa todas as condições de flambagem possíveis. Se variar o número de ondas críticas no sentido circunferencial ( $n$ ) e axial ( $m$ ), curvas, conforme ilustradas na Figura (1). Cada curva separada é composta por um ou dois mínimos que representam a condição de flambagem. A figura também ilustra que, para muitas combinações dos números de ondas  $n$  e  $m$ , é produzida a mesma tensão crítica produzida pela equação (1).

Figura 1 Flambagem de cilindros submetidos à compressão axial



Fonte: Samuelson e Eggwertz (2003)

$$q_{xcr} = \frac{(m^2 + n^2)^2 D}{m^2 r^2} + \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2} (1 - \nu^2) C \quad (3)$$

Conforme os autores acima, os métodos experimentais são cruciais para estimar parâmetros que afetam a carga última dos elementos. Ensaios com cascas cilíndricas mostram que imperfeições iniciais, como amassamentos ou irregularidades, reduzem a carga de flambagem para 20 a 40% do valor teórico. Tensões residuais e excentricidades de carga também contribuem para essa redução. Diversas pesquisas (e.g., Koiter, Brush-Almroth) mostraram que, mesmo imperfeições de amplitude próxima à espessura da parede, podem comprometer drasticamente a estabilidade. Isso levou ao desenvolvimento de fatores de redução empíricos.

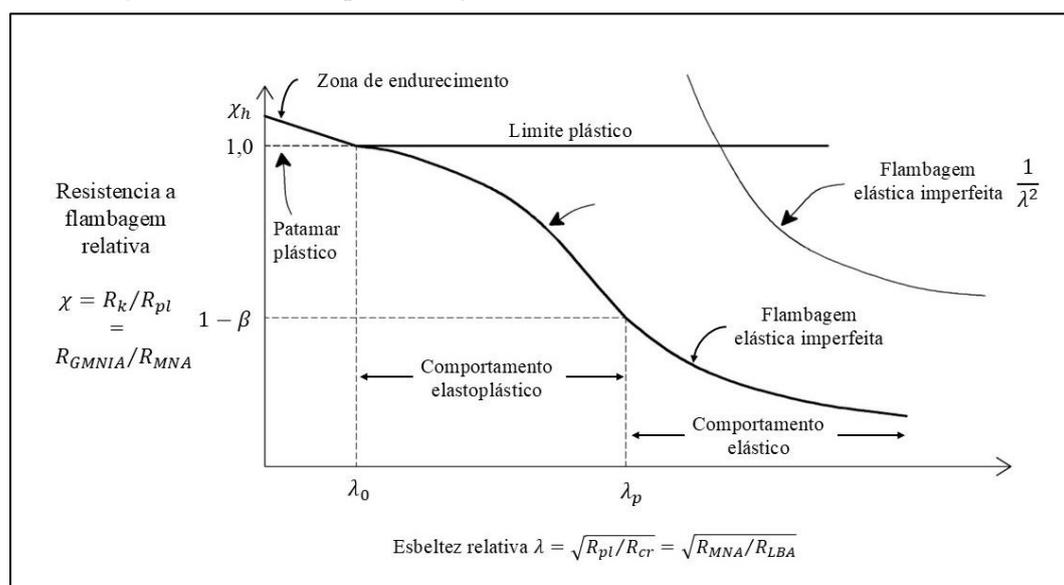
Em Rotter (2011), é apresentada uma análise abrangente sobre estruturas de casca, concentrando-se em suas aplicações, desafios no projeto e as normas europeias que regulamentam essas estruturas, especificamente o Eurocode 3 - EN 1993-1-6:2007. O autor aborda os métodos de projeto e as relações entre os métodos algébricos e computacional na determinação da resistência, além de discutir os desafios enfrentados pelos usuários ao empregar o procedimento LBA-MNA, onde a LBA é a análise de flambagem linear e a MNA é a análise com não linearidade de material.

O autor aborda sobre as análises lineares (LA) e as análises não lineares, as quais podem englobar as não linearidades geométricas (GNA) e de materiais (GMNA), com ou sem imperfeições iniciais (GNIA e GMNIA). O resultado da análise de tensão linear simples (LA) é tratado da mesma forma que um cálculo manual, que resolve as equações diferenciais de flexão da casca e usa as tensões produzidas na avaliação da resistência, as quais são baseadas nas mesmas descrições algébricas de flambagem e resistência plástica que foram derivadas para casos de carga simples. Isso leva a resultado significativamente conservador no projeto. Uma análise completa e cuidadosa da verdadeira resistência de uma casca deve usar uma análise com não linearidade geométrica e de materiais com a inclusão explícita de imperfeições (GMNIA). No entanto as imperfeições podem assumir muitas formas e podem ter muitas amplitudes, tornando o desafio de identificar a pior condição bastante significativo (Rotter 2005). Esses aspectos tornam a análise GMNIA particularmente difícil e trabalhoso de ser empregada. Dada esta situação desafiadora, o comitê que elaborou a EN 1993-1-6 (2007) desenvolveu um novo procedimento, no qual a primeira estimativa da resistência à flambagem da casca foi obtida

como uma carga de flambagem elástica linear (LBA), e a primeira estimativa da resistência do mecanismo plástico da casca foi obtida com a utilização da teoria de pequenas deformações para determinar a carga de colapso plástico (MNA). O primeiro é relativamente fácil de ser determinado usando softwares em elementos finitos. Este último envolve uma análise não linear; portanto, o usuário deve ter uma boa ideia da magnitude do nível de carga que causará a formação de um mecanismo plástico. O modelo computacional deve ser cuidadosamente planejado para capturar o mecanismo, e o software deve ser robusto quando ocorrerem grandes deformações plásticas locais.

O resultado de estudos GMNIA completos, aplicados a um problema específico de flambagem de casca, é melhor caracterizado usando a curva de capacidade genérica da EN 1993-1-6 (2007), a qual é mostrada na Figura (2). Essa curva relaciona todas as resistências de flambagem ao valor crítico elástico LBA ( $R_{cr}$ ) e ao valor de colapso do mecanismo plástico MNA ( $R_{pl}$ ). Deve-se notar que cada um desses parâmetros tem um significado físico:  $\alpha$  indica a sensibilidade elástica a imperfeições e não linearidade geométrica;  $\beta$  indica o nível de carga no qual o escoamento tem um efeito macroscopicamente significativo na resistência à flambagem;  $\lambda_0$  indica a rigidez de uma estrutura que pode exceder a carga limite de plástico e  $\eta$  indica a taxa na qual o escoamento afeta a resistência à flambagem elástica seja de forma muito leve, levando a uma transição abrupta quase perfeita de elástico para plástico, seja de forma muito forte, resultando em grande perda de resistência à flambagem para pequenas mudanças na esbelteza).

Figura 2 Curva de capacidade genérica estendida da EN 1993-1-6 (2007)



Fonte: Adaptado de Rotter (2011).

### 3.2 Instabilidade de cascas ortotrópicas enrijecidas

A motivação para o estudo da flambagem global de cascas e avaliações adequadas das cascas de flambagem aumentou exponencialmente desde a década de 1930 (Jones, 2006). Segundo Broliar e Dickson (1969), nos anos anteriores antes da publicação, o interesse na análise de estabilidade global de cascas enrijecidas aumentou consideravelmente, por causa das muitas aplicações em estruturas de veículos espaciais, embora esse problema seja antigo. Ainda em Broliar e Dickson (1969), é citado que, por muitos anos, os cilindros enrijecidos eram projetados quase exclusivamente com métodos empíricos ou semiempíricos, uma vez que esses eram os métodos mais confiáveis disponíveis. Segundo Bodner (1957), a abordagem usual para a análise de estabilidade de uma casca enrijecida é substituí-la por uma casca ortotrópica equivalente. Tal abordagem, no entanto, não permite levar em conta a excentricidade dos enrijecedores.

Van Der Neut (1947) mostrou que a flambagem de cascas cilíndricas enrijecidas submetidas à compressão era afetada pela excentricidade dos enrijecedores radiais e longitudinais. Segundo Jones (2006), entre os anos de 1947 e 1960, essa constatação não se tornou tão conhecida e verificada por experimentos. Entretanto, a partir de 1960, importantes trabalhos teóricos e experimentais foram desenvolvidos pelos autores Baruch e Singer (1963), Block et al. (1965) e Card e Jones (1966) sobre instabilidade de cascas enrijecidas, onde foi avaliado o efeito dos enrijecedores na instabilidade global.

Baruch e Singer (1963) desenvolveram um modelo para determinar a carga crítica de cascas cilíndricas simplesmente suportadas sob pressão hidrostática. Nesse estudo, foi avaliado o efeito da posição e das excentricidades dos enrijecedores. Para isso, foi formulado um modelo para cálculo da pressão crítica a partir da consideração de “rigidez distribuída” dos anéis e longarinas (enrijecedores).

A formulação do modelo para o cálculo da carga crítica das cascas enrijecidas foi baseada na relação tensão-deformação da casca, juntamente com a dos enrijecedores. As relações de tensão-deformação foram usadas para determinar as variações das forças e momentos durante a flambagem. Essas variações foram substituídas nas equações do equilíbrio na flambagem (tipo Donnell) para encontrar a equação diferencial de flambagem. A solução da equação diferencial de flambagem é obtida para a condição de contorno ( $w = 0$ ,  $v = 0$ ,  $N_x = 0$ , e  $M_x = 0$ , em  $x = 0, L/R$ ) empregando os deslocamentos na flambagem. O menor valor da

carga crítica (flambagem) é obtida variando os valores de  $t$  e  $n$ , os quais são, respectivamente, o número de ondas circunferencial e axial de ondas.

Os resultados das pressões críticas foram calculados com o modelo desenvolvido para cascas enrijecidas por anéis (com anéis no interior e no exterior), cascas enrijecidas por longarinas (com longarinas no interior e no exterior) e para cascas enrijecidas por anéis e longarinas iguais (no interior e no exterior). Esses resultados foram comparados com os obtidos em Bodner (1957) e, ainda, com os valores calculados com o emprego da equação de Flugge's e modelo de Kendrick's. Para os resultados calculados, inicialmente, foi observado que o emprego de anéis internos em cascas cilíndricas promoveu aumento da carga crítica (instabilidade global) em 263% em relação à casca sem anéis. As cascas com enrijecedores longitudinais externos (longarinas) provocaram um aumento de 4,0% em relação às cascas sem enrijecedores. O uso em conjunto dos anéis e longarinas tiveram aumento um pouco pronunciado em relação às cascas enrijecidas apenas com anéis. Quando submetidos a pressão lateral, o efeito das excentricidades dos enrijecedores longitudinais na magnitude da instabilidade global foi reduzido. As cascas cilíndricas submetidas à pressão lateral apresentaram maior valor de instabilidade quando os anéis enrijecedores estavam posicionados internamente. A razão física para esse aumento é a maior rigidez dos anéis no interior da casca, devido a sua menor relação profundidade/ raio.

Em Block *et al.* (1965), é apresentada uma teoria de pequenas deflexões para análise de flambagem de cilindros ortotrópicos enrijecidos por longarinas (enrijecedores longitudinais) e anéis. A teoria inclui o efeito da excentricidade dos enrijecedores e representa uma generalização do trabalho desenvolvido por Baruch e Singer (1963) para cascas isotrópicas enrijecidas por anéis e longarinas, submetidas à pressão hidrostática. Na formulação do modelo, é abordada a teoria clássica de flambagem, em que os efeitos das deformações de pré-flambagem são negligenciados e apenas as pequenas deflexões são consideradas.

No desenvolvimento da solução para obtenção das equações para determinar a carga crítica de flambagem, foram feitas várias suposições básicas, as quais são apresentadas a seguir. A casca cilíndrica enrijecida é considerada como casca ortotrópica, enrijecida por longarinas (enrijecedores longitudinais) e anéis uniformemente espaçados. As rigidezes de cisalhamento transversal da casca são assumidas como infinitamente grandes. Os espaçamentos dos anéis e longarinas são considerados pequenos ou suficientemente próximos para que as propriedades do elásticas possam ser calculadas na superfície média da casca. As suposições usuais do tipo

Donnell são usadas para especificar os deslocamentos do durante a flambagem da casca, enquanto os enrijecimentos são tratados como elementos de barras com rigidez a torção contabilizada de forma aproximada. Nos casos em que os anéis e longarinas ficam na mesma superfície da casca, o efeito da rigidez das ligações na estrutura é ignorado.

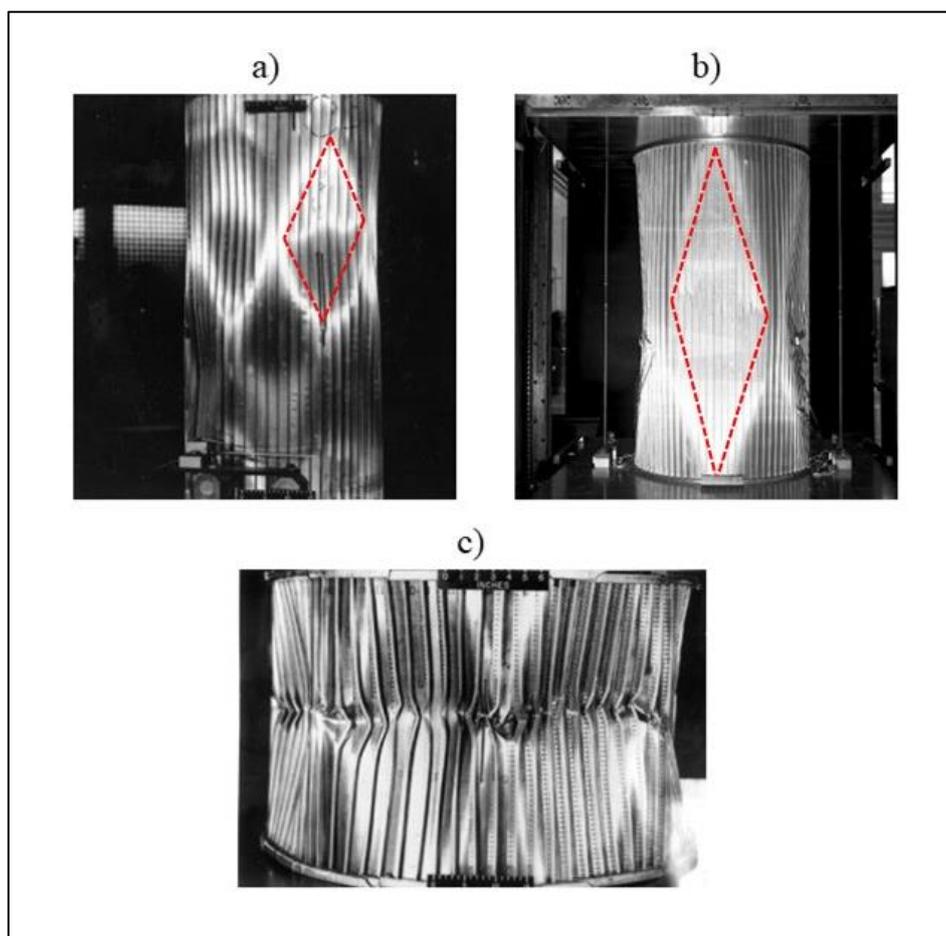
Para obter as equações de equilíbrio do sistema que governam o comportamento de flambagem da casca cilíndrica enrijecida, foi aplicado o princípio da mínima energia potencial, onde foi determinada a energia de deformação correspondentes aos deslocamentos de flambagem da casca e enrijecedores, além da energia potencial das forças externas.

A carga crítica de flambagem foi calculada para três tipos de cascas cilíndricas enrijecidas: cascas cilíndricas corrugadas enrijecidas com anéis, cascas cilíndricas isotrópicas enrijecidas com anéis, longarinas e cascas cilíndricas isotrópicas enrijecidas longitudinalmente. Cascas cilíndricas corrugadas com anéis internos submetidas a esforços de compressão flambam sob um terço da carga crítica de cascas com enrijecedores externos devido às excentricidades. Os resultados podem ser explicados observando que a excentricidade dos anéis, somada à excentricidade do plano médio das cascas corrugadas, induz um valor elevado para as excentricidades dos anéis. Para cascas cilíndricas isotrópicas enrijecidas com anéis e longarinas sobre esforços de compressão, a diferença entre reforço interno e externo é menor do que nas cascas corrugadas, mas ainda significativa. Essa constatação demonstra que anéis e longarinas externas são mais eficazes.

Em Card e Jones (1966) são abordadas questões sobre a instabilidade de cilindros com enrijecedores excêntricos. Os autores conduziram um estudo experimental e teórico para investigar como a excentricidade dos enrijecedores afeta a resistência à flambagem de cilindros. A pesquisa incluiu ensaios experimentais realizados em doze cilindros com diferentes configurações de reforço, tanto internos quanto externos, utilizando reforços em "Z" e retangulares. Os resultados dos ensaios demonstraram que os modos de flambagem, observados nos ensaios, variaram conforme a configuração dos cilindros. Para cilindros com reforços externos, a instabilidade foi acompanhada de um barulho e pelo aparecimento de várias flambagens em forma de diamante com grandes amplitudes, esses modos de instabilidade são ilustrados na Figura (3) a) e b). Contudo, para os cilindros enrijecidos internamente, a flambagem ocorreu de forma mais branda, com flambagem semelhante, entretanto com amplitudes menores. A falha dos cilindros da Figura (3) a) e b) foi caracterizada por instabilidade global, enquanto a do cilindro enrijecido com perfil "Z" foi marcada por

instabilidade local dos enrijecedores, conforme ilustrado na Figura (3) c). Análises comparativas mostraram que enrijecedores externos aumentam a resistência à instabilidade dos cilindros em cerca do dobro, em comparação aos enrijecedores internos. Já em relação à análise comparativa entre os resultados experimentais e teóricos, observou-se que os resultados experimentais variaram entre 70 e 95% das previsões teóricas. Essa diferença pode resultar da negligência das imperfeições geométricas iniciais.

Figura 3 Cilindros enrijecidos n.º 3 a), n.º 1 b), e n.º 11 c)



Fonte: Card e Jones (1966)

### 3.3 Artigos científicos

A flambagem no costado de silos cilíndricos metálicos é um fenômeno importante a ser considerado no projeto e análise estrutural de silos, especialmente porque esses sistemas são submetidos a cargas estáticas e dinâmicas, que podem gerar condições de instabilidade. A

revisão de artigos científicos sobre esse tema engloba uma série de tópicos relacionados ao comportamento dos costados durante o processo de flambagem.

Iwicki *et al.* (2011) investigaram os modos de falha em silos cilíndricos metálicos compostos por chapas corrugadas e enrijecedores, além de avaliar métodos de reparo através de uma análise de sensibilidade. A pesquisa abordou os principais fatores que podem levar à falha dessas estruturas metálicas, que são comuns na indústria de armazenamento de grãos. O estudo utilizou a análise de sensibilidade para avaliar de que forma variáveis como a espessura das chapas, a resistência do aço, a altura do silo e a carga interna afetam a estabilidade do silo. As análises sensitivas ajudaram a identificar quais parâmetros têm maior influência sobre o risco de falha. A metodologia permitiu simular diferentes cenários de operação e verificar a capacidade de resistência das estruturas metálicas, levando em consideração as condições variáveis de carga. Os autores constataram que a falha dos silos foi causada pela instabilidade dos enrijecedores verticais. A resistência à instabilidade dos enrijecedores era de 2 a 4 vezes menor do que a permitida pelo Eurocode 3. Além disso, concluíram que as imperfeições iniciais na parede da estrutura são os fatores mais prejudiciais para um silo.

Wójcik *et al.* (2011) trataram da análise de flambagem tridimensional de silos metálicos cilíndricos, compostos por chapas corrugadas e reforçados com nervuras verticais. O objetivo do estudo foi avaliar o comportamento estrutural desses silos sob a ação de cargas externas e internas, considerando as propriedades dos materiais, as características geométricas e os reforços adicionais. O estudo utilizou uma abordagem numérica avançada para simular o comportamento de flambagem de silos cilíndricos. A análise tridimensional permitiu uma visão mais detalhada da resposta da estrutura a diferentes tipos de carga, considerando não apenas a rigidez da chapa corrugada, mas também o efeito das nervuras verticais. A simulação computacional foi baseada no método dos elementos finitos (MEF), o que possibilitou uma modelagem precisa da geometria complexa do silo e a interação entre os diferentes elementos estruturais. As nervuras verticais foram incorporadas para reforçar a estrutura do silo e melhorar sua resistência à flambagem. O artigo examinou como essas nervuras ajudam a distribuir melhor as cargas e a reduzir o risco de falhas estruturais, especialmente em altas pressões internas. Os resultados da análise mostraram que as nervuras têm um efeito significativo na melhoria da estabilidade global do silo, particularmente nas regiões mais suscetíveis à flambagem. A pesquisa concluiu que a modelagem tridimensional oferece uma ferramenta mais precisa para avaliar o comportamento de silos metálicos, podendo ser fundamental para o projeto e a segurança dessas estruturas. O estudo sugere que o uso de nervuras verticais é uma estratégia

eficaz para melhorar a estabilidade e a durabilidade dos silos metálicos, além de otimizar o uso de materiais e reduzir custos de construção.

Rotter e Sadowski (2012) abordaram a teoria de flexão de cascas cilíndricas ortotrópicas sob distribuições de pressão simétricas. A pesquisa propôs um modelo teórico para analisar o comportamento de cascas cilíndricas, como as encontradas em silos, quando submetidas a pressões simétricas devido ao produto armazenado. A formulação leva em consideração tanto a curvatura da casca quanto a rigidez de flexão, fundamentais para entender o comportamento dessas estruturas sob cargas. Os autores formularam as equações de equilíbrio para as cascas cilíndricas sob essas pressões, levando em conta as condições de contorno adequadas e as propriedades ortotrópicas do material. A solução analítica fornecida no artigo permite a determinação das deformações, tensões e momentos resultantes na casca sob diversas condições de carregamento, sendo útil para a previsão do comportamento estrutural. O artigo propôs uma teoria robusta e detalhada para analisar o comportamento de cascas cilíndricas ortotrópicas sob pressões simétricas. Através da formulação de equações de equilíbrio, foi possível obter soluções analíticas que ajudaram a entender as tensões e deformações em cascas com materiais ortotrópicos. Os autores concluíram que as paredes esbeltas de silo enrijecidos verticalmente exigiam um projeto mais cuidadoso do que é comumente assumido: a casca, por si só, poderia estar em tração nas partes superiores, enquanto os enrijecedores verticais poderiam ser obrigados a suportar forças em excesso da carga vertical total aplicada à estrutura no mesmo nível. Essa situação reduziu o requisito de projeto para flambagem da casca, mas aumentou a resistência necessária do reforço.

Sondej *et al.* (2015), em seu artigo, apresentaram uma análise crítica da abordagem da norma europeia EN 1993-4-1:2007 para a estabilidade de silos metálicos cilíndricos compostos por paredes corrugadas e reforçados com nervuras verticais. O objetivo do estudo foi avaliar a adequação das diretrizes da EN 1993-4-1:2007 para esse tipo de estrutura e identificar possíveis melhorias ou limitações na aplicação dos métodos de cálculo para a estabilidade desses silos. O estudo considerou silos metálicos com paredes corrugadas, que possuíam características de rigidez ortotrópica, e montantes verticais, que são utilizados para reforçar as paredes contra a flambagem. O artigo analisou como as fórmulas da EN 1993-4-1:2007 lidam com a flambagem e outras formas de instabilidade em silos com paredes corrugadas e montantes. Uma das principais críticas é que o Eurocode, em sua abordagem padrão, não leva completamente em consideração as características específicas das paredes corrugadas e a interação entre os montantes verticais e as chapas, que podem ter um impacto significativo na capacidade de resistência à flambagem. O estudo também apontou que o Eurocode pode subestimar ou

superestimar a capacidade de resistência de silos com montantes, dependendo das dimensões e do espaçamento dos mesmos, o que pode afetar a segurança do projeto. Os autores sugeriram melhorias nos métodos de cálculo para a estabilidade de silos metálicos, incluindo uma análise mais detalhada da rigidez das paredes corrugadas e do efeito dos montantes. Além disso, recomendaram uma abordagem mais precisa para modelar a interação entre montantes e as chapas, com o uso de métodos mais avançados, como o método dos elementos finitos (FEM). Os autores propuseram também que o Eurocode seja atualizado para incluir recomendações específicas para silos com enrijecedores verticais, baseadas em estudos experimentais e análises numéricas mais detalhadas.

Iwicki *et al.* (2015) analisaram a estabilidade de silos metálicos cilíndricos compostos por chapas corrugadas e enrijecedor, comparando os resultados obtidos por meio de análises numéricas usando o método dos elementos finitos com as abordagens previstas pelo Eurocode 3, identificando possíveis discrepâncias e limitações. Os resultados indicaram que a abordagem do documento normativo tende a ser mais conservadora em relação à capacidade de estabilidade dos silos metálicos. Em alguns casos, o Eurocode 3 EN 1993-4-1:2007 pode superestimar a capacidade de flambagem, enquanto as análises FE indicam uma resposta mais precisa e, por vezes, menos conservadora. A comparação também revela que o Eurocode 3 não leva totalmente em conta as particularidades das chapas corrugadas e a interação entre os enrijecedores e as paredes, o que pode afetar a precisão do cálculo da estabilidade. A análise por elementos finitos oferece uma visão mais detalhada e realista do comportamento estrutural, considerando a geometria complexa e as propriedades dos materiais. Contudo, essa modelagem pode ser mais complexa e exigir mais recursos computacionais, além de depender de uma maior quantidade de dados de material e parâmetros de entrada. Por outro lado, a abordagem normativa tradicional é mais simples e amplamente utilizada na prática de engenharia, sendo uma ferramenta eficaz para o projeto e verificação da estabilidade de silos, embora possa ser menos precisa para geometrias complexas, como as dos silos com chapas corrugadas. O estudo concluiu que, enquanto a abordagem do Eurocode 3 fornece uma base útil e prática para o projeto de silos metálicos, as análises de elementos finitos oferecem uma avaliação mais precisa e detalhada, especialmente para silos com formas geométricas complexas. Os autores sugeriram que a combinação das duas abordagens pode ser benéfica: utilizar a norma europeia para uma análise preliminar e, em seguida, aplicar a análise de elementos finitos para otimizações mais detalhadas, garantindo segurança e eficiência no projeto.

Iwicki *et al.* (2016) abordaram a aplicação de uma análise de sensibilidade linear de flambagem no projeto econômico de silos metálicos cilíndricos compostos por chapas corrugadas e enrijecedores. O estudo buscou integrar a análise de estabilidade estrutural com considerações econômicas, a fim de otimizar o projeto de silos, garantindo a segurança e minimizando os custos. A análise de sensibilidade linear de flambagem foi aplicada para entender como pequenas variações nos parâmetros de projeto influenciam a resposta à flambagem da estrutura. Esse tipo de análise permite identificar quais variáveis têm maior impacto na estabilidade do silo e, portanto, no seu desempenho estrutural. A análise considerou o comportamento das chapas corrugadas e dos enrijecedores, bem como sua interação, para avaliar como esses elementos contribuem para o risco de flambagem sob diferentes condições de carga. Os resultados indicaram que, ao focar nos parâmetros mais sensíveis à flambagem, é possível realizar ajustes no projeto do silo que melhorem sua estabilidade e, ao mesmo tempo, reduzam os custos. Por exemplo, ajustar a espessura das chapas corrugadas ou otimizar o espaçamento entre os enrijecedores pode melhorar a resistência à flambagem de maneira eficiente em termos de custo. Os pesquisadores concluíram que a análise de sensibilidade linear de flambagem é uma ferramenta útil para o projeto econômico de silos metálicos, permitindo uma otimização que combina segurança e custos reduzidos.

Iwicki *et al.* (2017) abordaram a estabilidade global de silos cilíndricos metálicos compostos por chapas corrugadas reforçadas com enrijecedores verticais. O foco principal do estudo foi a análise da flambagem de silos com grandes espaçamentos entre os enrijecedores (montantes). Os autores propuseram procedimentos de projeto realistas para a flambagem, baseados em modelos numéricos de segmentos do silo, considerando duas combinações de carga e novas condições de contorno nas bordas verticais analisadas. Esse procedimento foi avaliado através de cálculos de elementos finitos em modelos 3D de três silos reais, variando-se o número de enrijecedores. Os autores identificaram três intervalos distintos (*ranges*) nos gráficos dos fatores de carga em relação ao número de enrijecedores, os quais correspondem a diferentes configurações de espaçamento entre os enrijecedores e a três modos distintos de flambagem. No range 1, para os três modelos de silos, o modo de flambagem apresentou três meias-ondas na direção circunferencial, correspondendo a um espaçamento de  $2d_s$ . Nessa situação, uma coluna sofreu flambagem por flexão, enquanto as outras duas apresentaram torção. No range 2, o modo de flambagem caracterizou-se pela deformação de todas os enrijecedores ao longo da circunferência, com um número de meias-ondas na direção circunferencial equivalente ao número de enrijecedores. Finalmente, no range 3, o modo de

flambagem para os três modelos analisados foi compatível com a flambagem de casca ortotrópica, onde, ao longo de uma meia-onda, havia mais de uma coluna de montantes. Assim, nesta faixa, o número de meias-ondas era sempre menor que o número total de enrijecedores. Nas análises realizadas, os modelos completos 3D e os modelos que representavam segmentos do silo foram comparados, sendo que os modelos de segmentos com a condição de contorno nomeada StripFix se mostraram mais eficazes em descrever o comportamento dos silos em 3D. Essa condição de contorno permitia o deslocamento radial dos enrijecedores da extremidade do arco.

Hajko *et al.* (2018) investigaram os fenômenos de flambagem local e flambagem global em silos cilíndricos metálicos compostos por chapas corrugadas e enrijecedores de seção aberta. O estudo concentrou-se na análise do comportamento estrutural desses silos sob diferentes tipos de carga, com ênfase nas interações entre as paredes corrugadas e os enrijecedores de suporte, que têm perfis de seção aberta. A análise foi conduzida usando o método dos elementos finitos, que permite uma modelagem detalhada da estrutura e simula o comportamento do silo sob diferentes condições de carga. O estudo levou em consideração as propriedades dos materiais, as dimensões dos enrijecedores, o perfil das chapas corrugadas e os tipos de carga aplicados, incluindo pressões internas de materiais armazenados e forças externas. Os resultados mostraram que a interação entre flambagem local e global tem um impacto significativo na estabilidade da estrutura. Em alguns casos, a flambagem local nas chapas corrugadas pode ser iniciada antes da flambagem global, o que pode comprometer a integridade estrutural do silo. A análise também revelou que os enrijecedores de seção aberta são mais suscetíveis à flambagem global do que as de seção fechada, no entanto, a interação com as paredes corrugadas pode fornecer resistência adicional, dependendo do espaçamento entre os enrijecedores e da rigidez das paredes. O estudo também sugere que, para otimizar o projeto dos silos, deve-se considerar tanto as propriedades dos enrijecedores quanto a rigidez das paredes corrugadas, com o objetivo de reduzir os riscos de falha por flambagem e melhorar a eficiência estrutural.

Iwicki *et al.* (2019) abordaram a determinação da resistência à flambagem de silos metálicos compostos por paredes corrugadas e montantes. O estudo propõe o uso de modelos simplificados de segmentos de parede para calcular a resistência à flambagem de forma eficiente e precisa, sem a necessidade de modelagens complexas e dispendiosas. O foco do artigo foi a análise da flambagem global da estrutura, que pode ser causada por diversas condições de carga. A pesquisa apresentou uma forma de calcular a força crítica de flambagem

dos silos usando esses modelos simplificados, considerando tanto a rigidez dos montantes quanto das paredes corrugadas. A análise levou em conta o comportamento elástico das paredes e a distribuição das tensões ao longo do silo, permitindo prever de forma eficiente o ponto de falha devido à flambagem. No artigo, são validados os modelos simplificados por meio de comparações com resultados de análises mais detalhadas, como as obtidas pelo método dos elementos finitos. Os resultados mostraram que os modelos simplificados são eficazes em prever a resistência à flambagem dos silos com uma boa precisão, oferecendo uma alternativa viável em relação a abordagens mais complexas e demoradas. O método também facilita o projeto de silos, pois pode ser facilmente integrado a processos de projeto, sem a necessidade de softwares avançados de simulação ou grande expertise técnica. Os autores concluíram que os modelos simplificados de segmentos de parede são uma ferramenta eficaz e confiável para determinar a resistência à flambagem de silos metálicos compostos por chapas corrugadas e enrijecedores de parede fina.

Rodrigues (2019) investigou a instabilidade de enrijecedores (montantes) de silos metálicos cilíndricos com chapas corrugadas. O estudo apresentou um modelo matemático destinado a determinar o coeficiente de rigidez da chapa, levando em consideração a sua curvatura. Essa abordagem buscou determinar com precisão a carga crítica de flambagem. A autora avaliou a instabilidade de enrijecedores de silos, revisou a literatura sobre o tema, construiu modelos numéricos e experimentais para avaliar a contribuição dos anéis de vento e cobrejuntas na instabilidade dos montantes e comparou os resultados para validar o modelo proposto. O modelo proposto produziu resultados 10% maiores do que os obtidos experimentalmente. A diferença é atribuída à não linearidade geométrica, que pode ter afetado a resistência do modelo experimental. A presença dos anéis de vento e cobrejuntas não altera os valores de carga crítica de flambagem dos montantes.

Rejowski *et al.* (2023) investigaram a resistência à instabilidade de enrijecedores de (montantes) silos metálicos com chapas corrugadas, utilizando experimentos em escala real e simulações numéricas não lineares, utilizando produto granular (trigo). Além disso, os autores avaliaram a precisão das fórmulas do Eurocódigo 3 na previsão da resistência da instabilidade, comparando-as com resultados experimentais e simulações numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). As simulações incorporaram imperfeições geométricas iniciais baseadas em medições geodésicas ou análises de bifurcação linear. Foi constatado no presente trabalho que presença do produto armazenado (trigo) aumentou significativamente a resistência a flambagem dos enrijecedores, atuando como um suporte adicional que restringe deformações.

Os autores identificaram que as fórmulas do Eurocódigo 3 mostraram-se excessivamente conservadoras, especialmente para silos vazios ou parcialmente preenchidos, subestimando à resistência real observada nos testes. Em contrapartida, as simulações numéricas apresentaram boa concordância com os resultados experimentais, particularmente para o silo vazio. No entanto, para o silo preenchido, as simulações subestimaram a resistência à instabilidade, indicando a necessidade de modelos mais precisos para representar o material granular. Sendo assim, destaca-se a importância de considerar o efeito estabilizador do produto armazenado na análise estrutural de silos metálicos. Além disso, sugere-se que as abordagens atuais do Eurocódigo 3 podem ser aprimoradas para fornecer estimativas mais precisas da resistência à instabilidade, especialmente em condições de operação reais.

## 4 MATERIAL E MÉTODOS

### 4.1 Modelo computacional de cascas ortotrópicas enrijecidas

Modelos de cascas ortotrópicas enrijecidas foram desenvolvidos utilizando o software de elementos finitos SCIA Engineer V25 para realizar análises de estabilidade linear-LBA. Os resultados dessas análises são os fatores de carga, os quais relacionam as cargas críticas de flambagem com os carregamentos aplicados à estrutura. A construção dos modelos seguiu a metodologia descrita por Sondej *et al.* (2015).

#### 4.1.1 Descrição dos modelos

Analisaram-se modelos de cascas ortotrópicas reforçadas com montantes para três diâmetros de silos: 4,55, 10,0 e 14,55 m, todos com altura de 20,0 m e espaçamento entre montantes de 1,429 m. Em cada diâmetro, avaliaram-se quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,0 mm), dois perfis de corrugação (101,6x11,1mm e 76x18 mm) e duas seções de montantes. Tanto os perfis de corrugação quanto os perfis das seções são ilustrados nas Figuras (4) e (5). Ao todo, 48 modelos foram modelados em elementos finitos e calculados. Na Tabela (1), são apresentadas as configurações analisadas para o silo com 4,55 m de diâmetro.

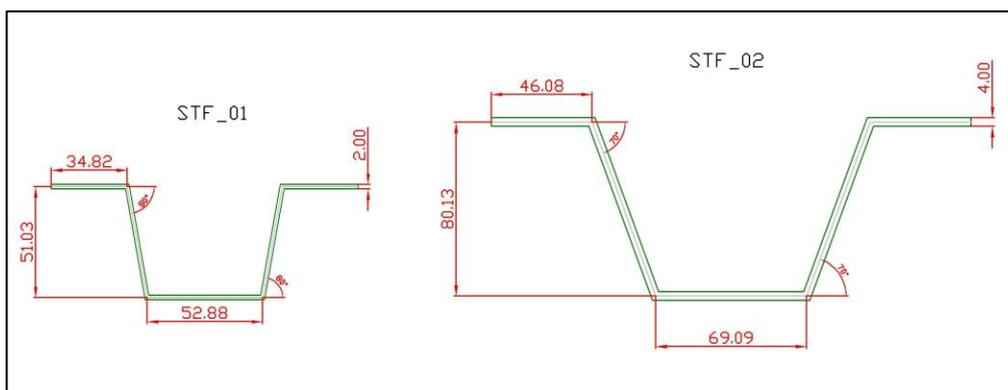
Tabela 1 Configuração do modelo analisado com diâmetro de 4,55 m

dc (m)	t (mm)	Seção	Perfil de corrugação		
4,55	0,95	1	101,6x11,1		
	1,55				
	2,25				
	3,00				
	0,95	2			
	1,55				
	2,25				
	3,00				
	4,55	0,95		1	76x18
		1,55			
2,25					
3,00					
0,95		2			

	1,55		
	2,25		
	3,00		

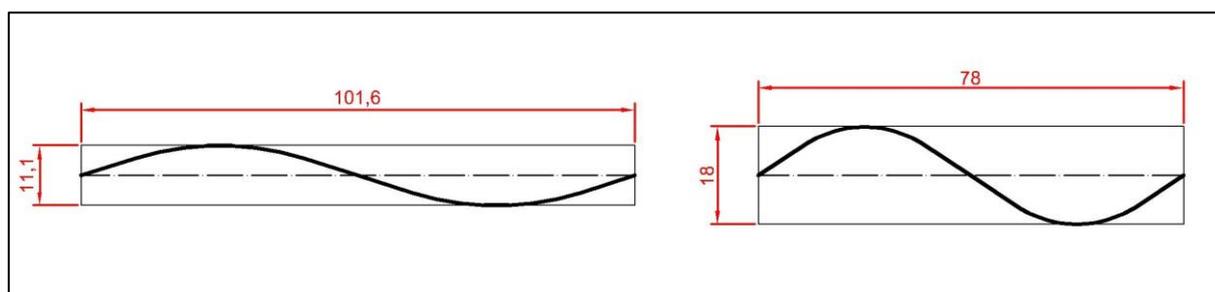
$t$ =espessura da chapa corrugada

Figura 4 Geometria das seções analisadas



Fonte: Autor

Figura 5 Perfis de corrugação analisados



Fonte: Autor

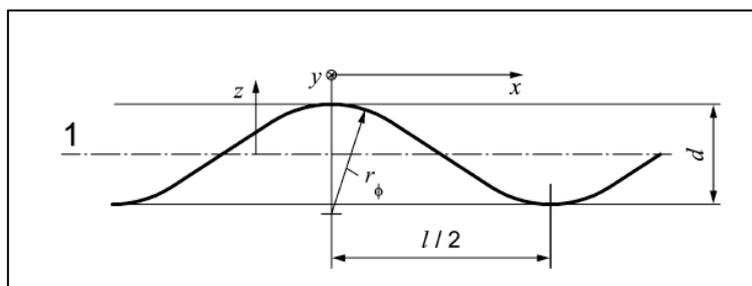
#### 4.1.2 Elementos

Para representar os elementos estruturais do costado - chapas corrugadas e montantes foram modelados com elementos finitos de cascas ortotrópicas e barras, respectivamente. Os elementos de casca ortotrópica possuem quatro nós, cada um com 6 graus de liberdade: três de translação e três de rotação nos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Já os elementos de barra possuem dois nós, cada um com 6 graus de liberdade: três de translação e três de rotação nos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . A equação constitutiva de elementos de casca ortotrópica é representada pela equação matricial (4).

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_{vx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{vx} & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_x & D_{vx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{vx} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

As rigidezes de membrana e flexão dos elementos de cascas ortotrópicas foram calculadas empregando as equações recomendadas pela norma EN 1993-4-1 (2007)/A1:2017. O material empregado para modelar as chapas corrugadas e montantes possuem módulo de elasticidade  $E = 200 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Figura 6 Dimensões do perfil de corrugação



Fonte: EN 1993-4-1:2007

Onde:

1 - superfície média efetiva;

$l$  - comprimento de onda da corrugação;

$d$  - distância transversal crista a crista da corrugação.

A rigidez de membrana dos elementos de casca ortotrópica foi calculada com o emprego das equações (5) a (11).

$$C_x = Et_x \quad (5)$$

$$C_{vx} = 0 \quad (6)$$

$$C_y = Et_y \quad (7)$$

$$C_{xy} = Et_{xy} \quad (8)$$

Onde:

$t_x$  é a espessura equivalente para a rigidez de membrana distribuída normal à direção da corrugação, dada por:

$$t_x = \frac{2t^3}{3d^2} \quad (9)$$

$t_y$  é a espessura equivalente para a rigidez de membrana distribuída paralela à direção da corrugação, dada por:

$$t_y = t \left( 1 + \frac{\pi^2 d^2}{4l^2} \right) \quad (10)$$

$t_{xy}$  é a espessura equivalente para a rigidez ao cisalhamento de membrana distribuída, dada por:

$$t_{xy} = \frac{t}{\left( 1 + \frac{\pi^2 d^2}{4l^2} \right)} \quad (11)$$

A rigidez à flexão dos elementos de casca ortotrópica foi calculada com o emprego das equações (12) a (18). As rigidezes de flexão são distribuídas na direção em que o momento causa tensão de flexão.

$$D_x = EI_x \quad (12)$$

$$D_{vx} = 0 \quad (13)$$

$$D_y = EI_y \quad (14)$$

$$D_{xy} = GI_{xy} \quad (15)$$

Onde:

$I_x$  é o momento de inércia de área por unidade de comprimento da rigidez à flexão distribuída perpendicular a corrugação, dado por:

$$I_x = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 d^2}{4l^2}\right)} \quad (16)$$

$I_y$  é o momento de inércia de área por unidade de comprimento da rigidez à flexão distribuída paralelo a corrugação, dado por:

$$I_y = \frac{td^2}{8} \left(1 + \frac{\pi^2 d^2}{8l^2}\right) \quad (17)$$

$I_{xy}$  é o momento de inércia de área por unidade de comprimento da rigidez à torção distribuída, dado por:

$$I_{xy} = \frac{t^3}{12} \left(1 + \frac{\pi^2 d^2}{4l^2}\right) \quad (18)$$

Onde:

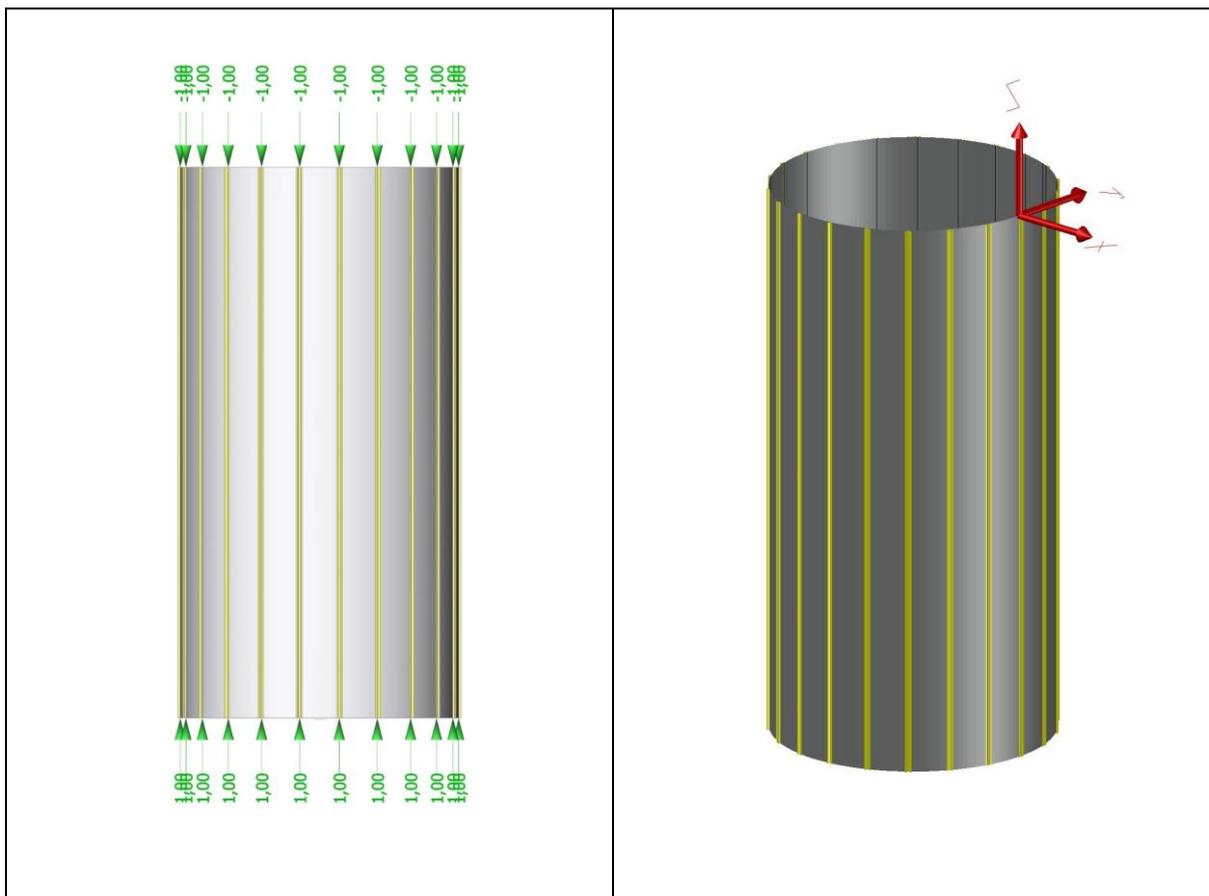
$t$  é a espessura da chapa corrugada.

#### 4.1.3 Carregamento e condição de contorno

O carregamento aplicado às cascas cilíndricas enrijecidas consistiu em forças pontuais nas extremidades dos montantes, com magnitude de 1,0 kN, conforme mostrado na Figura (7) A). Com relação às condições de contorno, nas bordas inferior e superior da casca ortotrópica enrijecida, os deslocamentos foram restringidos nas direções  $x$  e  $y$ , conforme ilustrado na Figura (7) B), enquanto na direção  $z$  (axial) estava sem restrições.

Figura 7 Condições de contorno e carregamento

A)	Carregamento: 1,0 kN	B)	Condição de contorno $x = 0; y = 0;$
----	-------------------------	----	---



Fonte: Autor

#### 4.1.4 Análise de flambagem linear (LBA)

As formulações para análise de estabilidade linear empregadas no software SCIA Engineer são apresentadas no manual *Advanced Professional Training - Non Linear and Stability*. A análise de estabilidade linear das estruturas consiste em determinar os pontos os pontos de bifurcação, onde o equilíbrio passa de estável para instável. Nas análises de flambagem linear (LBA) pelo método dos elementos finitos, a condição de equilíbrio da estrutura é dada pela equação (19), onde:

$[K_e]$  representa a matriz de rigidez elástica;

$[K_g]$  a matriz de rigidez geométrica;

$[u]$  o vetor deslocamento; e

$\alpha_{cr}$  o fator de carga que relaciona as cargas críticas ( $N_{cr}$ ) com as cargas nodais aplicadas ( $N_E$ ) a estrutura.

Para determinar os fatores de carga, impõem-se que o determinante da equação (19) seja igual a zero, conforme apresentado pela equação (20).

$$[K_e - \alpha_{cr}K_g][u] = 0 \quad (19)$$

$$\det[K_e - \alpha_{cr}K_g] = 0 \quad (20)$$

$$N_{cr} = \alpha_{cr}N_E \quad (21)$$

## 4.2 Modelos analíticos

Este trabalho emprega três modelos para calcular cargas críticas de flambagem de cascas ortotrópicas enrijecidas. Dois deles são recomendados pela norma europeia EN 1993-4-1: 2007/A1:2017, denominados métodos a) e b). No método a), é empregado um modelo baseado na teoria de casca ortotrópica enrijecida de Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV), enquanto o método b) utiliza a teoria de coluna de base elástica. O terceiro modelo é o de Sanders, também formulado com base na teoria de casca ortotrópica, entretanto considerada grandes deformações. A seguir, são apresentados os modelos matemáticos.

Os espaçamentos máximos entre montantes ( $d_{s,máx}$ ) foram calculados para cada silo usando a equação (22). Esse parâmetro, conforme indicado pela norma EN 1993-4-1:2007/A1:2014, determina o método a ser empregado. O cálculo demonstrou os limites da Eurocode entre os métodos a) e b). Os  $d_{s,máx}$  foram calculados para dois perfis de corrugação e 4 diâmetros, totalizando 8 espaçamentos. Os cálculos foram realizados empregando o coeficiente  $k_{d\theta}$  igual a 9,1.

$$d_{s,máx} = k_{d\theta} \left( \frac{r^2 D_y}{C_y} \right)^{0,25} \quad (22)$$

### 4.2.1 Método a) - casca ortotrópica EN 1993-4-1:2007/A1(2017)

A carga crítica de flambagem da casca enrijecida foi calculada pela equação (23). Para determinar o menor valor da carga crítica, minimizou-se a equação variando-se o número de ondas circunferenciais críticas ( $j$ ) de 1 a 20, com o comprimento meia-onda vertical ( $l_i$ ) igual a 20,0 m.

A equação (23) foi desenvolvida com base nas premissas de cascas ortotrópicas:

- a carga linear uniforme é aplicada apenas em ambas as extremidades (a pressão normal da parede é desprezada);
- a rigidez distribuída (*smearred stiffness*) resultante é uniformemente distribuída;
- a superfície média da casca equivalente é tomada como o eixo médio da ondulação;
- a casca cilíndrica tem as translações radial e circunferencial fixas nas extremidades;
- os deslocamentos do modo de flambagem são descritos por funções trigonométricas.

$$n_{x,Rcr} = \frac{1}{j^2\omega^2} \left( A_1 + \frac{A_2}{A_3} \right) \quad (23)$$

Onde:

$A_{1,2,3}$  são parâmetros que incluem a rigidez à flexão e de membrana nas direções ortogonais do cilindro ortotrópico equivalente.

$$A_1 = j^4[\omega^4 C_{44} + 2\omega^2(C_{45} + C_{66})] + C_{22} + 2j^2 C_{25} \quad (24)$$

$$A_2 = 2\omega^2(C_{12} + C_{33})(C_{22} + j^2 C_{25})(C_{12} + j^2\omega^2 C_{14}) - (\omega^2 C_{11} + C_{33})(C_{22} + j^2 C_{25})^2 - \omega^2(C_{22} + \omega^2 C_{33})(C_{12} + j^2\omega^2 C_{14})^2 \quad (25)$$

$$A_3 = (\omega^2 C_{11} + C_{33})(C_{22} + C_{25} + \omega^2 C_{33}) - \omega^2(C_{12} + C_{33})^2 \quad (26)$$

$$C_{11} = C_\phi + EA_s/d_s \quad (27)$$

$$C_{12} = v \sqrt{C_\phi C_\theta} \quad (28)$$

$$C_{22} = C_\theta + EA_r/d_r \quad (29)$$

$$C_{33} = C_{\phi\theta} \quad (30)$$

$$C_{14} = e_s EA_s/(rd_s) \quad (31)$$

$$C_{25} = e_r EA_r/(rd_r) \quad (32)$$

$$C_{44} = [D_{\phi} + EI_s/d_s + EA_s e_s^2/d_s]/r^2 \quad (33)$$

$$C_{55} = [D_{\theta} + EI_r/d_r + EA_r e_r^2/d_r]/r^2 \quad (34)$$

$$C_{66} = [D_{\phi\theta} + 0,5(GI_{ts}/d_s + GI_{tr}/d_r)]/r^2 \quad (35)$$

$$\omega = \frac{\pi r}{j l_i} \quad (36)$$

Onde:

$l_i$  é o comprimento de meia-onda da potencial flambagem na direção vertical, conforme apresentado na Figura (9);

$A_s$  é a área da seção transversal do perfil do montante;

$I_s$  é o momento de inércia do perfil do montante no eixo circunferencial, para flambagem vertical;

$d_s$  é a distância entre os montantes;

$I_{ts}$  é a inércia a torção do perfil do montante;

$e_s$  é a excentricidade entre o plano médio da chapa e o centroide do perfil do montante;

$A_r$  é a área da seção transversal do anel de vento;

$I_r$  é o momento de inércia do anel de vento no eixo vertical, para flambagem circunferencial;

$d_r$  é a distância entre os anéis de vento;

$I_{tr}$  é a inércia à torção do anel de vento;

$e_r$  é a excentricidade entre o plano médio da chapa e o centroide do perfil do anel de vento;

$C_{\phi}$  é a rigidez de membrana da chapa na direção axial;

$C_{\theta}$  é a rigidez de membrana na direção circunferencial da chapa;

$C_{\phi\theta}$  é a rigidez de membrana ao cisalhamento da chapa;

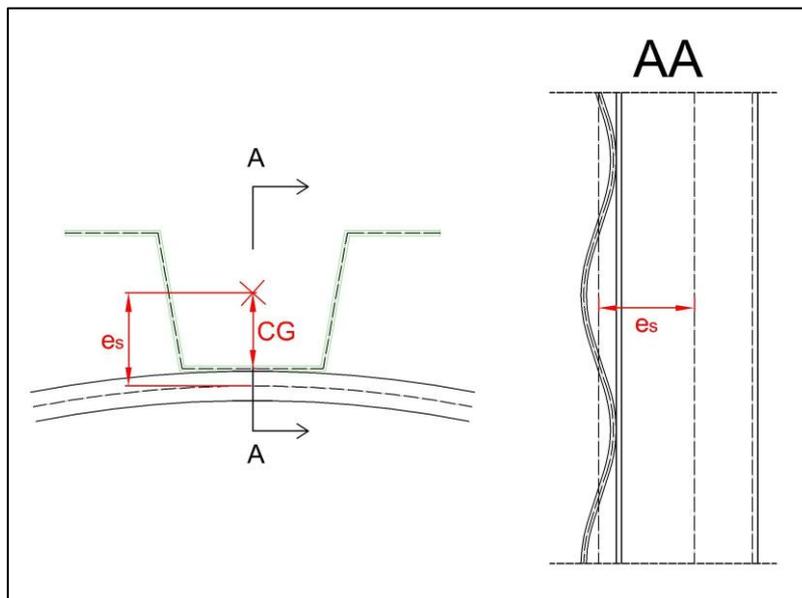
$D_{\phi}$  é a rigidez à flexão da chapa na direção axial;

$D_\theta$  é a rigidez à flexão da chapa na direção circunferencial;

$D_{\phi\theta}$  é a rigidez à flexão torcional;

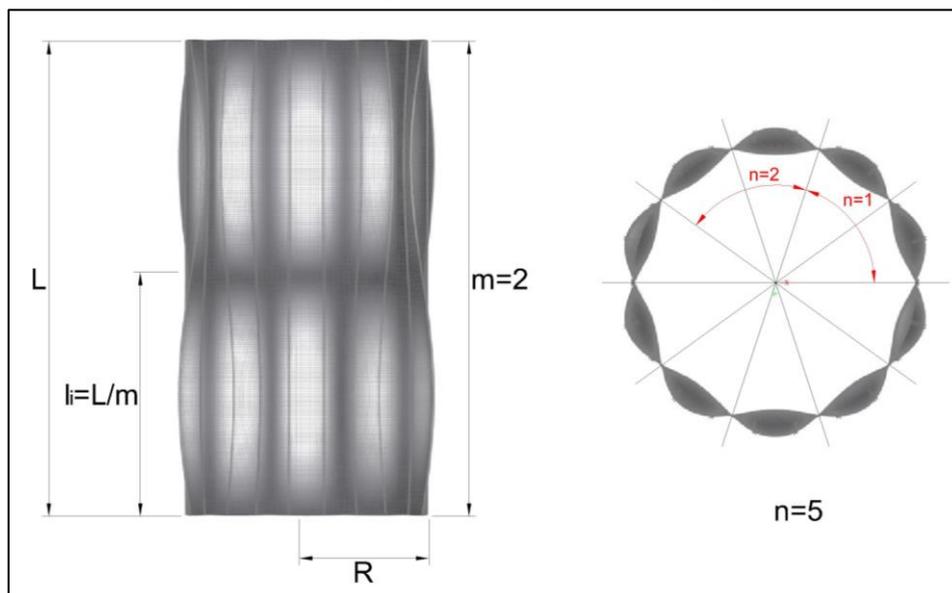
$r$  é o raio do silo.

Figura 9 Excentricidade do montante em relação ao plano médio da chapa



Fonte: Autor

Figura 8 Configuração do modo de flambagem

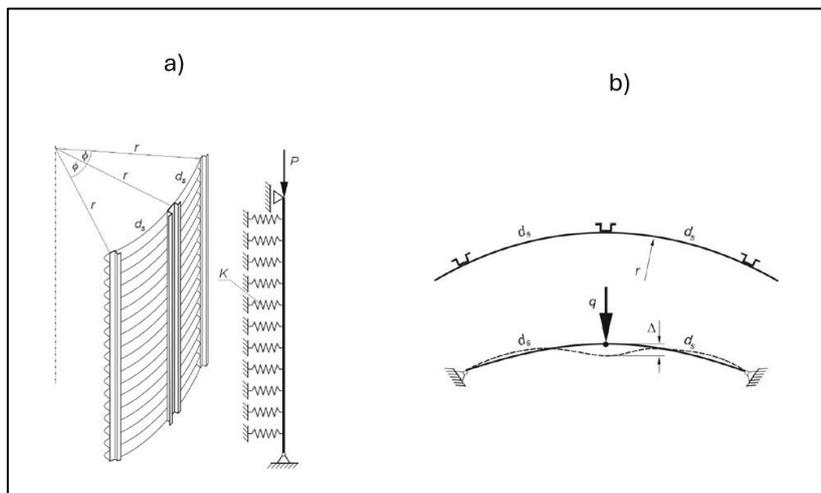


Fonte: Autor

#### 4.2.2 Método b) - coluna apoiada em base elástica EN 1993-4-1:2007/A1(2017)

A carga crítica de flambagem da casca enrijecida foi determinada com o emprego da equação (37). Esse modelo considera uma coluna apoiada em uma base elástica distribuída uniformemente ao longo do comprimento do elemento biapoiado, conforme ilustrado na Figura (10) a). O parâmetro  $K$ , da equação, considera a rigidez à flexão de um arco biapoiado de chapa corrugada com comprimento igual a  $2d_s$ , conforme ilustrado na Figura (10) b). A rigidez  $K$  é calculada com o emprego das equações (37) a (41).

Figura 10 Configuração do modelo de coluna de base elástica



Fonte: Marcinowski, 2023

$$N_{bRk} = 2 \sqrt{EI_y K} \quad (37)$$

Onde:

$$K = \frac{1}{r} \left\{ \frac{2C_\theta D_\theta}{fD_\theta + r^2 C_\theta \{f + \phi \cos^2 \phi (\tan \phi + 2g)^2 - 2[2g^2 \sin 2\phi - 2g(\cos 2\phi - \cos \phi) - \sin \phi (\cos \phi - 1)]\}} \right\} \quad (38)$$

$$\phi = \frac{d_s}{r} \quad (39)$$

$$f = \frac{1}{4} \{ (4g^2 + 1)(2\phi + \sin 2\phi) + 4g(1 - \cos 2\phi) - 2\sin 2\phi \} \quad (40)$$

$$g = \frac{D_y \sin^2 \phi - r^2 C [(1 - \cos \phi)(1 + 3 \cos \phi - \phi \sin 2\phi)]}{D_y (2\phi + \sin 2\phi) - r^2 C [2\phi (2 + \cos^2 2\phi) - 3 \sin 2\phi]} \quad (41)$$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade do aço;

$I_y$  é o momento de inercia do montante.

#### 4.2.3 Método de Sanders (1963)

O modelo baseado na teoria de Sanders foi usado para determinar a carga crítica de flambagem das cascas ortotrópicas enrijecidas. As cargas críticas de flambagem foram calculadas empregando-se as equações (42) a (82), para cilindros sob compressão axial. Essas equações foram desenvolvidas por Nemeth (2014) para calcular a carga crítica de flambagem de cilindros simplesmente apoiados, baseando-se na teoria de Sanders.

$$[K]\{d\} = \tilde{p}[G]\{d\} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \frac{m\pi}{L} \bar{w} \end{Bmatrix} = \tilde{p} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \frac{m\pi}{L} \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Onde:  $\tilde{p}$  é o autovalor (fator de carga),  $K_{ij}$  e  $G_{ij}$  são os coeficientes de rigidez e rigidez geométrica, e  $L$  a altura do cilindro, conforme ilustrado na Figura (9). Os coeficientes  $K$  e  $G$  foram calculados com o emprego das equações a seguir:

$$K_{11} = A_{11} + \left( A_{66} - B_{66} \frac{c_2}{R} + D_{66} \frac{c_2}{4R^2} - \frac{c_1}{4} (L_1^* + L_2^*) \right) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 \quad (44)$$

$$K_{12} = - \left( \frac{nL}{m\pi R} \right) \left( A_{12} + A_{66} + [B_{12} + B_{66}] \frac{c_2}{R} - D_{66} \frac{3c_2}{4R^2} + \frac{c_1}{4} (L_1^* + L_2^*) \right) \quad (45)$$

$$K_{13} = - \left[ \left( \frac{A_{12}}{R} + \frac{c_4 L_2^*}{R} \right) \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 + B_{11} - \left( D_{66} \frac{c_2}{R} - B_{12} - 2B_{66} \right) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 \right] \quad (46)$$

$$K_{22} = \left( A_{66} + B_{66} \frac{3c_2}{R} + D_{66} \frac{9c_2}{4R^2} \right) + \left( A_{22} + 2B_{22} \frac{c_2}{R} + D_{22} \frac{c_2}{R^2} \right) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 - \frac{(c_2 - c_4)L_2^*}{R^2} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 - \frac{c_1}{4} (L_1^* + L_2^*) \quad (47)$$

$$K_{23} = \left( \frac{nL}{m\pi R} \right) \left[ \frac{1}{R} \left( A_{22} + B_{22} \frac{c_2}{R} \right) \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 + \left( B_{12} + 2B_{66} + \left[ D_{12} + 3D_{66} \frac{c_2}{R} \right] + \left( B_{22} + D_{22} \frac{c_2}{R} \right) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 \right] - \frac{(c_2 - c_4)L_2}{R} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \left( \frac{nL}{m\pi R} \right) \quad (48)$$

$$K_{33} = \frac{A_{22}}{R^2} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^4 + \frac{2}{R} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \left[ B_{12} + B_{22} \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 \right] + \left[ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^4 \right] - \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \left[ L_1^* + L_2^* \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 - \frac{c_4 L_2^*}{R^2} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \right] \quad (49)$$

$$G_{11} = \frac{c_1}{4} (L_1 + L_2) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 \quad (50)$$

$$G_{12} = \frac{c_1}{4} (L_1 + L_2) \left( \frac{nL}{m\pi R} \right) \quad (51)$$

$$G_{13} = \frac{c_4 L_2}{R} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \quad (52)$$

$$G_{22} = \frac{(c_2 - c_4)L_2}{R^2} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 + \frac{c_1}{4} (L_1 + L_2) \quad (53)$$

$$G_{23} = \frac{(c_2 - c_4)L_2}{R} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \left( \frac{nL}{m\pi R} \right) \quad (54)$$

$$G_{33} = \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \left[ L_1 + L_2 \left( \frac{nL}{m\pi R} \right)^2 - \frac{c_4 L_2}{R^2} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \right] \quad (55)$$

Os parâmetros  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  e  $B_{ij}$  encontrados nas equações acima, representam, respectivamente, a rigidez de membrana, de flexão, e de acoplamento da casca ortotrópica. (É isso???) A seguir são apresentadas as equações para determinar essas rigidezes.

Rigidez de membrana da casca ortotrópica:

$$A_{11} = C_\phi + \frac{EA_s}{d_s} \quad (56)$$

$$A_{12} = \nu C_{\phi} \quad (57)$$

$$A_{22} = C_{\theta} + \frac{EA_r}{d_r} \quad (58)$$

$$A_{66} = C_{\phi\theta} \quad (59)$$

$$A_{21} = A_{12} \quad (60)$$

Rigidez à flexão da casca ortotrópica:

$$D_{11} = \left( D_{\phi} + \frac{EI_s}{d_s} + \frac{EA_s e_s^2}{d_s} \right) \quad (61)$$

$$D_{12} = \nu D_{\phi} \quad (62)$$

$$D_{21} = D_{12} \quad (63)$$

$$D_{22} = \left( D_{\theta} + \frac{EI_r}{d_r} + \frac{EA_r e_r^2}{d_r} \right) \quad (64)$$

$$D_{66} = \left( D_{\phi\theta} + \frac{1}{4} \left( \frac{GI_{ts}}{d_s} + \frac{GI_{tr}}{d_r} \right) \right) \quad (65)$$

Rigidez de acoplamento:

$$B_{11} = \frac{EA_s e_s}{d_s} \quad (66)$$

Para chapas corrugadas, as demais rigidezes de acoplamento  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$  e  $B_{66}$  foram consideradas iguais a zero.

A carga crítica de flambagem é encontrada a partir da solução não trivial da equação (67), na qual o determinante de  $K^T$  é igual a zero. Ao resolver esse determinante, obtém-se a equação polinomial (70). O valor crítico de  $\tilde{p}$  é o menor valor positivo que satisfaz a equação (70) para valores  $m$  e  $n$ , os quais representam, respectivamente, o número de meia onda na direção meridional e o número de ondas na direção circunferencial de flambagem, conforme ilustrado na Figura (9). Para a análise dos silos neste tópico, os valores de carga crítica foram encontrados com  $n$  variando de 1 a 20, enquanto os valores de  $m$  foram iguais a 1.

$$\det|[K^T]| = 0 \quad (67)$$

$$[K^T] = [K] - \tilde{p}[G] \quad (68)$$

$$\det \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{vmatrix} - \tilde{p} \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (69)$$

$$C_3 \tilde{p}^3 + C_2 \tilde{p}^2 - C_1 \tilde{p} + C_0 = 0 \quad (70)$$

$$C_0 = K_{33}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2) + (K_{12}K_{13} - K_{11}K_{23})K_{23} + (K_{12}K_{23} - K_{22}K_{13})K_{13} \quad (71)$$

$$C_1 = G_{11}(K_{22}K_{33} - K_{23}^2) + G_{22}(K_{11}K_{33} - K_{13}^2) + G_{33}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2) + 2G_{12}(K_{13}K_{23} - K_{12}K_{33}) + 2G_{13}(K_{12}K_{23} - K_{13}K_{22}) + 2G_{23}(K_{12}K_{13} - K_{11}K_{23}) \quad (72)$$

$$C_2 = K_{11}(G_{22}G_{33} - G_{23}^2) + K_{22}(G_{11}G_{33} - G_{13}^2) + K_{33}(G_{11}G_{22} - G_{12}^2) + 2K_{12}(G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33}) + 2K_{13}(G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22}) + 2K_{23}(G_{12}G_{13} - G_{11}G_{23}) \quad (73)$$

$$C_3 = G_{11}G_{23}^2 + G_{22}G_{13}^2 - G_{33}(G_{11}G_{22} - G_{12}^2) - 2G_{12}G_{13}G_{23} \quad (74)$$

Nas equações acima, os parâmetros  $L_1$ ,  $L_2$ , e  $L_3$  são fatores de cargas, e  $L_1^*$ ,  $L_2^*$  e  $L_3^*$  são fatores de carga associados às cargas de pré-flambagem passivas. As equações desses parâmetros são definidas a seguir:

$$L_1 = \ell_4 N_x \quad (75)$$

$$L_2 = \ell_3 q_{\text{ext}} R \quad (76)$$

$$L_3 = 0 \quad (77)$$

$$L_1^* = -q_{\text{int}} \frac{R}{2} \quad (78)$$

$$L_2^* = -q_{\text{int}} R \quad (79)$$

$$L_3^* = 0 \quad (80)$$

Onde:  $q_{\text{int}}$  é a pressão interna aplicada e mantida fixa antes da flambagem, e  $q_{\text{ext}}$  é a pressão externa aplicada no sentido de fora para dentro.

Nas equações acima, aparecem três parâmetros -  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_4$  - que são usados para traçar as contribuições dos termos das equações que governam a resposta não linear e a resposta de flambagem. Por essa razão, esses parâmetros são denominados traçadores.

No cálculo das cargas críticas de flambagem utilizando o modelo de Sanders, apenas a compressão axial foi considerada; portanto,  $L_2 = 0$ . Neste estudo, os modelos de Sanders foram aplicados para duas condições distintas. A primeira condição (01) considerou pequenas deformações e rotações moderadas, com os parâmetros definidos como  $c_1 = c_2 = 0$  e  $c_4 = 1$ . A segunda abordagem levou em conta pequenas deformações e rotações não lineares, estabelecendo  $c_1 = c_2 = c_4 = 1$ . Assim, para o primeiro caso, em que as equações são aplicadas a pequenas deformações e rotações moderadas, a equação (70) se reduz à equação (81). Por outro lado, na condição em que foram consideradas rotações não lineares, a equação (70) se transforma na equação (82), de segundo grau, cuja solução é apresentada pela equação (83). Na Tabela (2) é apresentado as condições de emprego da equação de Sanders.

Tabela 2 Condições de emprego das equações de Sanders

Condição 01	Condição 02
$c_1 = c_2 = 0$ e $c_4 = 1$	$c_1 = c_2 = c_4 = 1$
$C_3\tilde{p}^3 + C_2\tilde{p}^2 - C_1\tilde{p} + C_0 = 0$	$C_3\tilde{p}^3 + C_2\tilde{p}^2 - C_1\tilde{p} + C_0 = 0$
$\tilde{p} = \frac{C_0}{C_1} \quad (81)$	$C_2\tilde{p}^2 - C_1\tilde{p} + C_0 = 0 \quad (82)$
	$\tilde{p} = \frac{C_1}{2C_2} - \sqrt{\left(\frac{C_1}{2C_2}\right)^2 - \frac{C_0}{C_2}} \quad (83)$

### 4.3 Modelo de silo real SL535

#### 4.3.1 Descrição do modelo analisado

Os métodos analíticos e numéricos descrito neste trabalho foram utilizados para realizar análises de estabilidade de um silo cilíndrico metálico real, pertencente a um grupo de silos construída na Polônia, conforme ilustrado na Figura (11). As descrições e análises desse silo encontram-se tanto em Wójcik *et al.* (2011) quanto em Iwicki *et al.* (2019). Esse silo foi construído com chapas corrugadas e reforçado com 18 enrijecedores verticais distribuídos na direção circunferencial. O modelo de silo analisado possui diâmetro igual a 5,35 m, altura igual a 17,62 m metros de altura, o que equivale a 21 anéis, com as chapas dos anéis tendo altura útil de 0,836 m. Esse modelo foi denominado de SL535. O perfil de corrugação da chapa usada nesse silo possui comprimento de onda igual a 76 mm e distância transversal crista a crista igual de 18 mm. O aço empregado possui modo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e tensão de escoamento  $f_y = 350 \text{ MPa}$ .

Figura 11 Silos metálicos construídos na Polônia

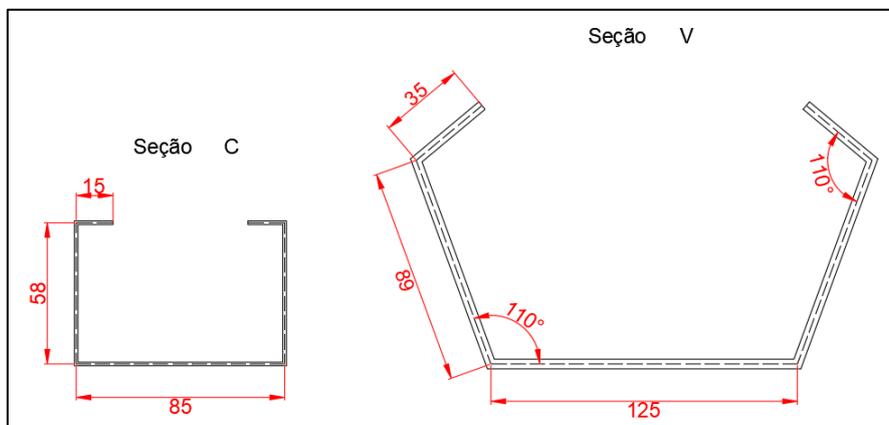


Fonte: Wójcik *et al.* (2011)

As seções dos montantes utilizados no SL535 são denominadas “C” e “V”. As dimensões dessas seções são apresentadas na Figura (12) e o diagrama das espessuras são apresentados na Tabela (2). Ao longo da altura do silo, a espessura das seções variou entre 1,50 e 5,0 mm. O diagrama das espessuras dos montantes é apresentado nas Tabela (2), segue a

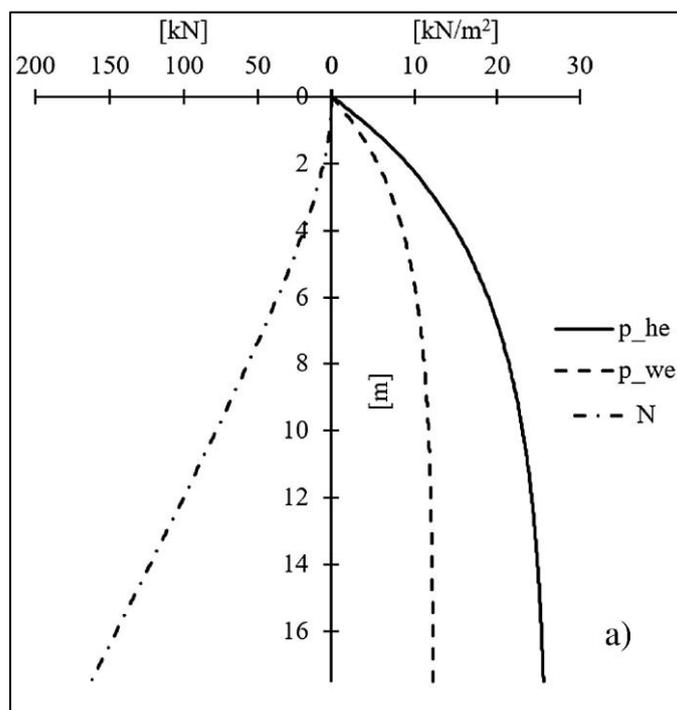
seguinte forma: a seção especificada por C1.5, por exemplo, a letra indica o tipo da seção (“C”), e o número à direita representa a espessura da seção.

Figura 12 Dimensões das seções do SL535



As pressões horizontais e de atrito, assim como os esforços de compressão nos montantes, foram obtidos no artigo Iwicki *et al.* (2019), para a condição de descarregamento concêntrico do produto armazenado. Os valores dessas ações e solicitações são apresentados na Tabela (2). Nas análises de flambagem linear, foram consideradas duas combinações de carregamento.

Figura 13 Pressões horizontais, de atrito, e esforços de compressão no silo SL535



Fonte: Iwicki *et al.* (2019)

Tabela 3 Pressões, solicitações e seções do SL535

Anel	z (m)	P <sub>h</sub> (kPa)	P <sub>w</sub> (kPa)	n <sub>zSk</sub> (kN)	Seções
1	0,84	4,54	2,78	1,00	C1.5
2	1,67	8,04	4,85	3,42	
3	2,51	11,03	6,60	8,31	
4	3,34	13,51	7,84	13,81	C2.0
5	4,18	15,57	8,76	19,97	
6	5,02	17,32	9,48	27,26	
7	5,85	18,66	10,21	34,37	
8	6,69	19,90	10,72	42,62	
9	7,52	20,93	11,03	52,27	C2.5
10	8,36	21,86	11,34	60,19	
11	9,20	22,58	11,55	69,46	
12	10,03	23,20	11,65	78,13	C4.0
13	10,87	23,61	11,75	87,83	
14	11,70	24,02	11,96	96,18	
15	12,54	24,43	11,96	106,44	
16	13,38	24,74	12,16	115,28	
17	14,21	24,95	12,16	124,95	V4.0
18	15,05	25,15	12,16	134,51	
19	15,88	25,46	12,27	144,00	
20	16,72	25,46	12,27	153,24	
21	17,56	25,67	12,27	160,92	

#### 4.3.2 Modelagem do silo

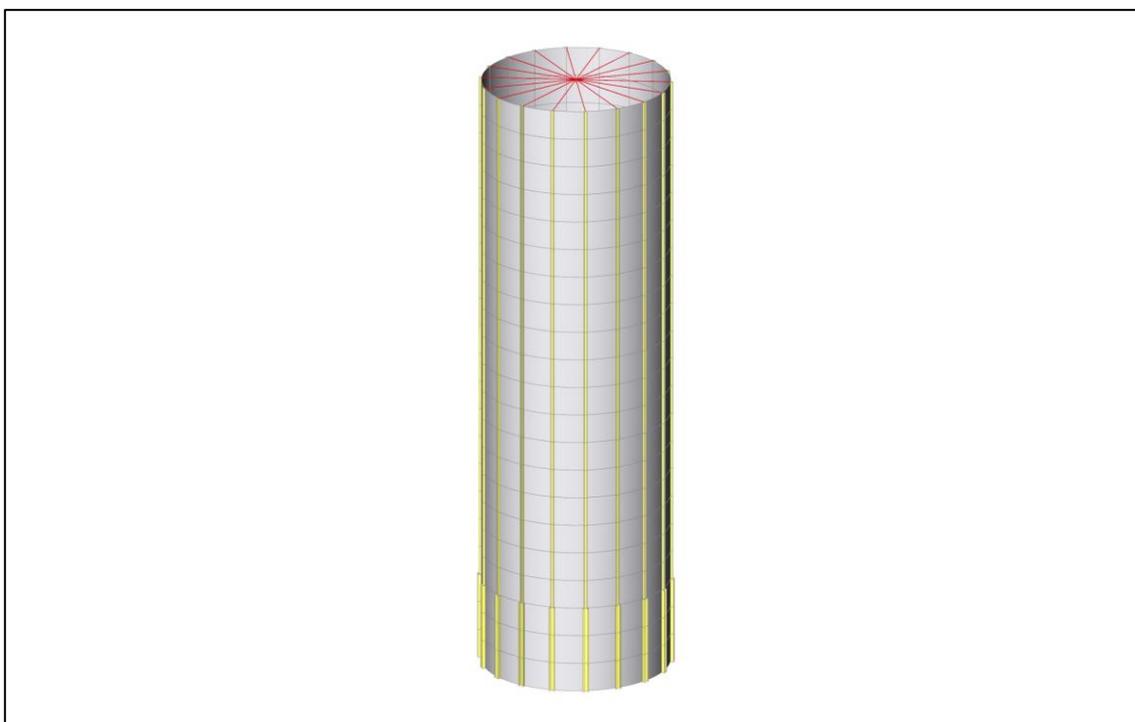
As simulações do silo SL535 foram realizadas no software SCIA Engineer V25. Nessas análises, realizaram-se análises de flambagem linear (LBA), para determinar os fatores de carga. A seguir, são apresentadas informações sobre os elementos utilizados para modelar o costado do silo, bem como os carregamentos e as condições de contorno aplicadas.

As chapas corrugadas foram modeladas com elementos de casca ortotrópica, cujas rigidezes dos elementos foram calculadas usando as equações (5) a (18), recomendadas pela norma EN 1993-4-1:2007/A1(2017). Os montantes foram modelados com elementos de barras.

As pressões horizontais e de atrito foram aplicadas ao modelo numérico com os valores apresentados na Tabela (2). Foram realizadas análises de estabilidade linear para duas combinações de ações: uma considerando apenas pressões de atrito, e outra incluindo pressões horizontais e de atrito. Compararam-se os resultados dos métodos analíticos com os da análise de flambagem linear (LBA) na primeira combinação, e avaliou-se o efeito das pressões horizontais na estabilidade na segunda.

Os deslocamentos dos montantes na base do silo (parte inferior) foram restringidos em x, y e z, assim como as rotações nessas direções. Os deslocamentos das chapas próximas à base também foram restringidos em x, y e z. Na parte superior do silo, não foram utilizados apoios para limitar os deslocamentos. No entanto, para considerar as condições impostas pela cobertura, os montantes foram interconectados em posições diametralmente opostas por meio de elementos de ligação rígidos (links rígidos). Essa configuração visa prevenir deformações, como ovalizações, nessa área. O emprego desses elementos é apresentado na Figura (14).

Figura 14 Elementos de link rígidos



Fonte: Autor

Os modelos analíticos para o cálculo da carga crítica de flambagem, conforme recomendados pela norma EN 1993-4-1:2007/A1:2017 e pelo modelo de Sanders, foram aplicados de acordo com a metodologia apresentada no item 4.2. Entretanto, nas análises realizadas, foram utilizadas as propriedades dos materiais descritas no item 4.3.1. Além disso, no modelo de Sanders o número de ondas circunferenciais,  $n$ , e o número de meias-ondas,  $m$ , foram ajustados para 20 em ambas as variáveis. Em relação ao método a),  $j$  variou de 1 a 20 e comprimento de flambagem foi igual a  $l_i = 17620 \text{ mm} - (i - 1) * 1000 \text{ mm}$ , onde  $i$  variou de 1 a 15 com o incremento de 1000 mm. Os modelos foram calculados com o emprego do software Smath. Em anexo é apresentado os cálculos dos modelos.

#### 4.4 Modelo de silo ensaiado por Rodrigues (2019)

##### 4.4.1 Descrição do modelo

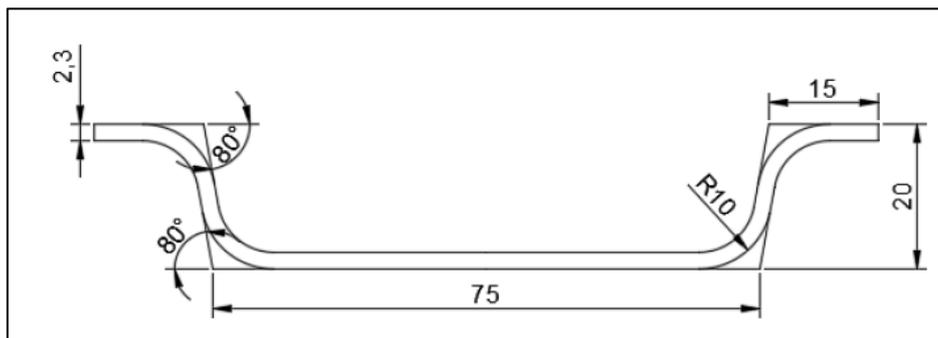
O modelo de silo, conforme ensaiado experimentalmente por Rodrigues (2019), foi utilizado nas simulações em elementos finitos. Esse modelo apresenta um diâmetro de 3637,8 mm e altura de 2743,2 mm (composta por três anéis). O silo dispõe de oito montantes, distribuídos uniformemente ao longo da circunferência, com espaçamento de 1428,56 mm ( $45^\circ$ ). O modelo experimental está ilustrado na Figura (15). A chapa corrugada empregada no modelo possui comprimento de onda de 101,6 mm, distância crista a crista de 11,1 mm e espessura de 0,95 mm. A seção do montante ensaiado é apresentada na Figura (16). Essa seção possui área da seção transversal igual a 2,92 cm<sup>2</sup> e espessura igual a 2,30 mm.

Figura 15 Modelo do silo de chapa corrugada enrijecido com montantes



Fonte: Rodrigues (2019)

Figura 16 Seção do montante ensaiado



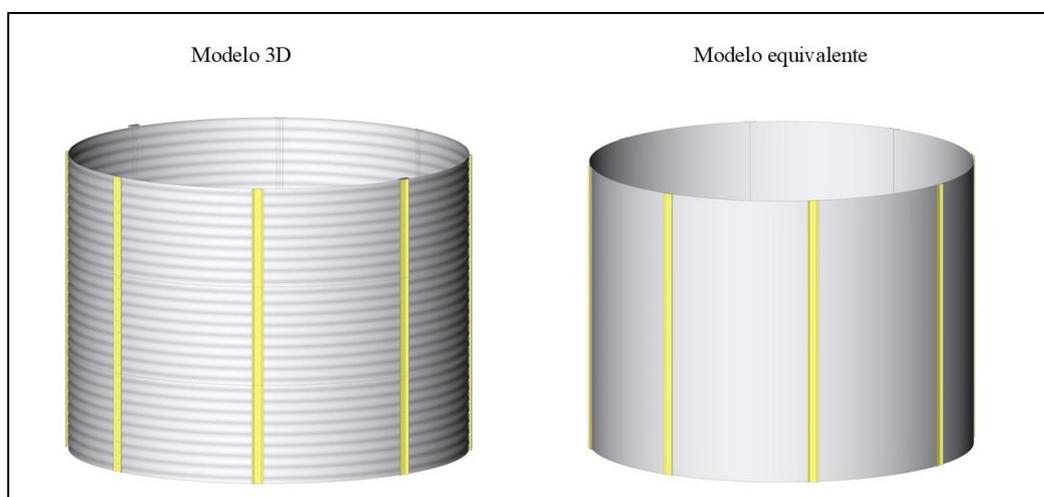
Rodrigues (2019)

#### 4.4.2 Modelagem do silo

As simulações dos silos mencionadas foram feitas no software SCIA Engineer V25, utilizando análises de flambagem linear (LBA), para determinar os fatores de carga ( $\alpha_{cr}$ ).

Inicialmente, foi realizada a validação dos modelos de silos construídos com elementos de casca ortotrópica, utilizando como referência modelos em 3D. Para esse propósito, foram desenvolvidos dois modelos distintos, com base no estudo de Rodrigues (2019). No primeiro modelo (modelo equivalente), que estava destinado à validação, as chapas corrugadas foram simuladas com elementos de casca ortotrópica, enquanto os montantes foram modelados com elementos de barras. No segundo modelo (modelo 3D), tanto as chapas corrugadas quanto os montantes foram modelados com elementos de casca isotrópica. Esses modelos são ilustrados na Figura (17). As rigidezes dos elementos de casca ortotrópica foram calculadas usando as equações (5) a (18), recomendadas pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017).

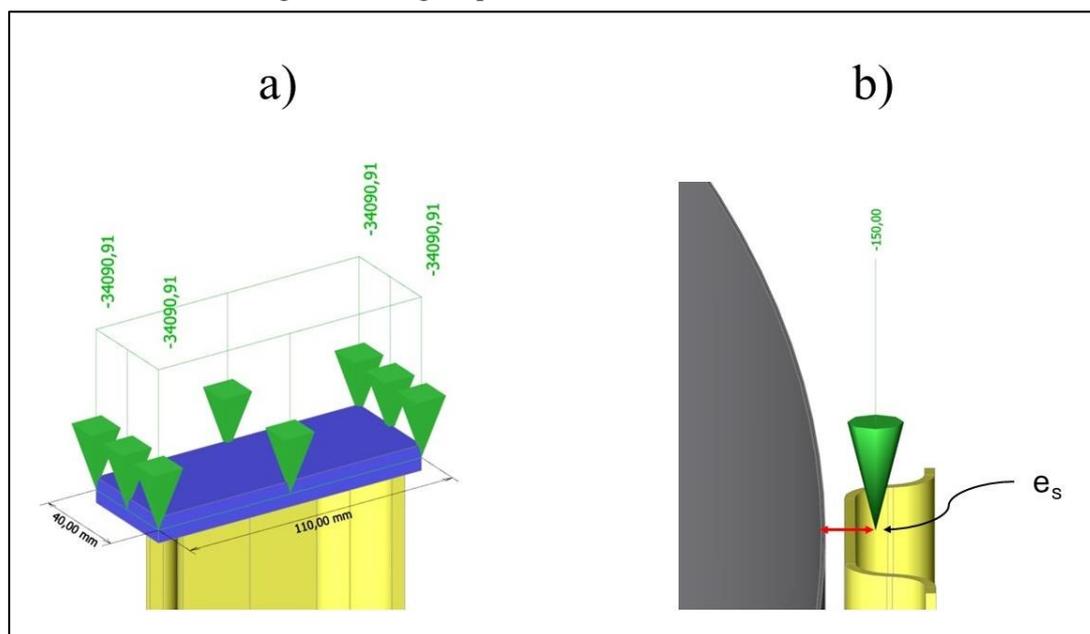
Figura 17 Modelos de análises



Fonte: Autor

Nos modelos de silos analisados, o carregamento foi aplicado de duas maneiras distintas. No modelo 3D, uma chapa retangular com dimensões de 110 x 40 mm e espessura de 10,0 mm foi modelada na extremidade superior dos montantes. Sobre essa chapa, foi aplicada uma pressão de 34.090,91 kN/m<sup>2</sup>, equivalente a uma força total de 150 kN, distribuída uniformemente sobre a área da chapa retangular, conforme ilustrado na Figura (18) a). No modelo equivalente, foi aplicado uma força de 150 kN no centro geométrico da seção do montante, conforme ilustrado na Figura (18) b).

Figura 18 Cargas aplicadas nos modelos analisados

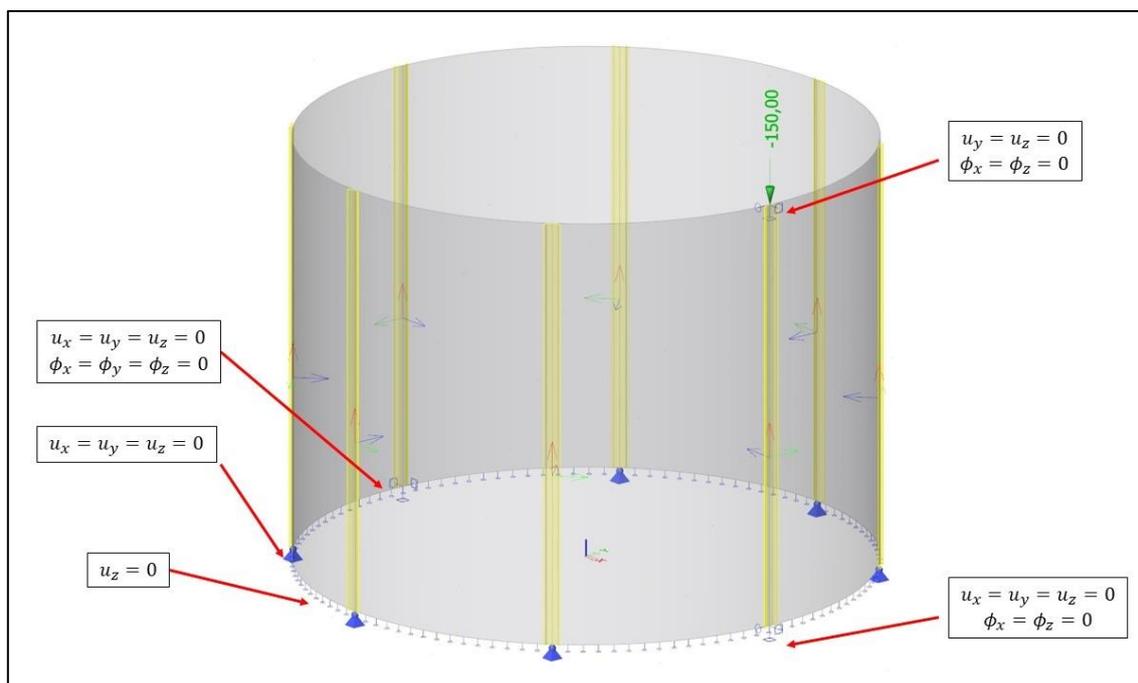


Fonte: Autor

No modelo equivalente, o montante foi posicionado com uma excentricidade  $e_s$ , que representa a distância entre o plano médio da chapa e o centro geométrico da seção do montante da casca. O valor da excentricidade  $e_s$  foi igual a 11,28 mm, calculado pela soma de 5,55 e 5,73 mm.

Nos montantes do silo analisado, foram empregados apoios para restringir os deslocamentos na base do silo e na extremidade superior dos montantes, conforme observado em Rodrigues (2019). Nos montantes do silo modelado, ilustrado pela Figura (19), os deslocamentos nos eixos locais  $u_x$  e  $u_y$ , assim como as rotações  $\phi_x$  e  $\phi_z$ , foram restringidos. Na base do montante diametralmente oposto ao montante onde foi aplicada a carga de 150 kN, todas as restrições de deslocamentos e rotações foram impostas. Nos demais montantes, apenas os deslocamentos em  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  foram restringidos. Já na borda inferior dos elementos de casca, apenas os deslocamentos na direção  $z$  foram restritos.

Figura 19 Condições de contorno aplicado ao modelo

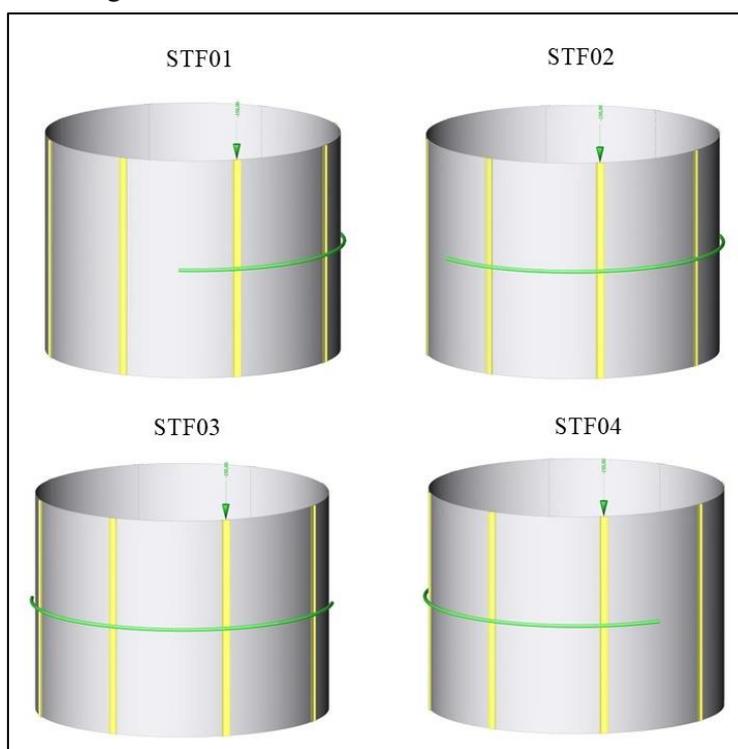


Fonte: Autor

Nos modelos de silos com anéis de vento, as chapas corrugadas foram modeladas utilizando elementos de casca ortotrópica, enquanto os montantes e anéis de vento foram representados por elementos de barra. Esses modelos foram ensaiados com anéis de vento fixos a uma altura equivalente à metade do silo, distribuídos no sentido circunferencial, cobrindo apenas metade da estrutura.

A aplicação do carregamento e das condições de contorno foi realizada conforme descrito anteriormente para o modelo equivalente. Contudo, a aplicação das cargas nos montantes foi feita conforme observado nos ensaios experimentais: a cada teste, o silo era girado em incrementos de 45°. Assim, no modelo em elementos finitos, foram gerados quatro modelos, nos quais um carregamento era aplicado a cada montante, permitindo uma análise abrangente do comportamento estrutural sob diferentes condições de carregamento. Esses modelos são apresentados na Figura (20).

Figura 20 Modelos de análises com anéis de vento



Fonte: Autor

#### 4.4.3 Resistência à instabilidade global

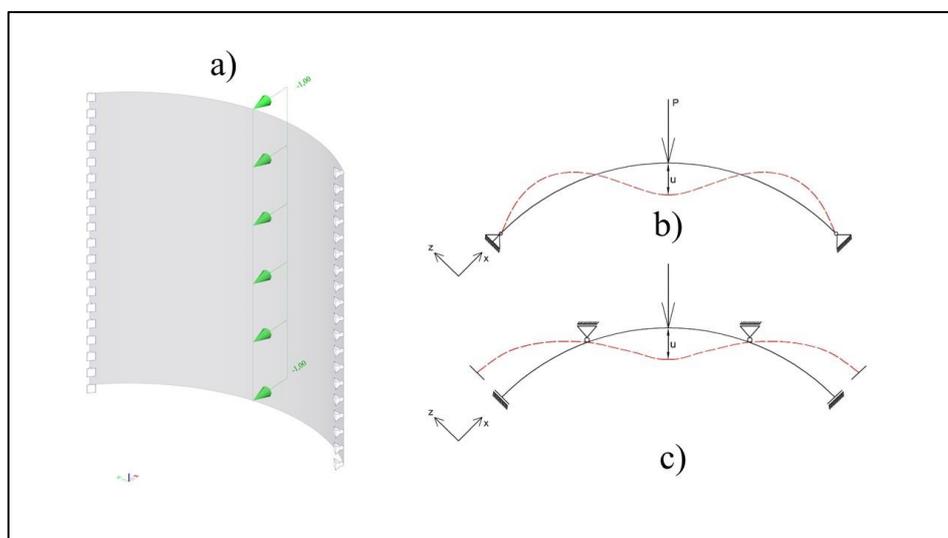
O cálculo da resistência à instabilidade dos montantes de silos conformados a frio, envolve a determinação dos fatores de redução associados à flambagem global. Nesse fator de redução, são levadas em consideração as imperfeições geométricas iniciais, tensões residuais, a não linearidade dos materiais e a geometria das seções. Para calcular os fatores de redução, foram utilizadas duas metodologias distintas: uma recomendada pela norma brasileira de perfis conformados a frio, a NBR 14762:2010 e outra proposta pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017) e pela prEN 1993-4-1:2024. É importante destacar que, enquanto a norma brasileira não apresenta orientações específicas para montantes de silos, a norma europeia inclui recomendações para o cálculo desses elementos.

Em ambas as metodologias, é necessário determinar o índice de esbeltez relativo dos elementos, que depende da força resistente ao escoamento e da carga crítica de flambagem global elástica. A carga crítica de flambagem dos montantes dos silos foi determinada utilizando análises de flambagem linear (LBA) por meio de elementos finitos e pelo método b) da norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017). Ao aplicar o método b), o coeficiente de rigidez à flexão da chapa corrugada foi calculado utilizando três métodos distintos: no primeiro, foi empregada a equação

(37); no segundo, utilizou-se as equações (85) a (87), formuladas por Rodrigues (2019); por último, o coeficiente de rigidez foi obtido através de análises por elementos finitos.

A rigidez à flexão  $K$  das chapas corrugadas foi calculada utilizando a equação (38) da norma europeia EN 1993-4-1:2007:A1(2017) e pelo método dos elementos finitos. O cálculo da rigidez à flexão da chapa corrugada pelo método da norma foi realizado para dois comprimentos de arco: no primeiro, considerou-se o espaçamento estabelecido pela norma, o qual foi  $2d_s$ , com  $d_s$  igual a 1428,59 mm, denominado ECB+01. No segundo, o comprimento do arco foi extraído do modo de flambagem do silo sem anéis de vento (LBA), o qual foi chamado de ECB+02. Nos modelos em elementos finitos, foram utilizadas duas condições de contorno: no primeiro, denominado MEF01, nas bordas dos elementos, foram aplicados apoios lineares, nos quais os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  foram restringidos, enquanto as rotações em torno do eixo  $y$  foram liberadas, conforme ilustrado na Figura 21(b). No segundo, classificado MEF02, nas bordas dos elementos, foram aplicados apoios lineares, nos quais os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  foram restringidos e na direção de  $z$  os deslocamentos foram liberados, enquanto as rotações em torno do eixo  $x$ ,  $y$ , e  $z$  foram restringidos. Nesse mesmo modelo, onde os deslocamentos foram nulos na LBA do silo sem anéis de vento, foram empregados apoios restringindo apenas os deslocamentos na direção  $z$ , conforme ilustrado na Figura (21) c). Um carregamento uniformemente distribuído de 1,0 kN/cm foi aplicado na posição onde se deseja calcular a rigidez no modelo analisado, cuja configuração está ilustrada na Figura (21) a). O coeficiente de rigidez à flexão  $K$  da chapa foi determinado a partir da relação entre o carregamento  $P$  e os deslocamentos  $u$ , conforme descrito na Equação (84).

Figura 21 Condições de contorno e carregamentos aplicados à seção do silo analisada



Fonte: Autor

$$K = \frac{P}{u} \quad (84)$$

$$\theta(\text{ em graus }) = \frac{360^\circ}{n} \quad (85)$$

$$H = \frac{-1 + 4\cos(\theta) - 3\cos(2\theta) - 2\theta\sin(2\theta)}{8\theta + 4\theta\cos(2\theta) - 6\sin(2\theta)} \quad (86)$$

$$K = \frac{-4D_y}{R^3(-4H - 2\theta + 2H\theta^2\cos(\theta) + \theta^2\sin(\theta) + 4H\cos(\theta) + 2\sin(\theta))} \quad (87)$$

A seguir, são apresentadas as metodologias utilizadas para o cálculo da resistência à instabilidade global dos montantes, conforme as recomendações das normas citadas.

#### 4.4.3.1 NBR 14762:2010

A resistência à instabilidade global dos montantes ( $N_{c,Rd}$ ) é dado pela equação (88):

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi A_{ef} f_y}{\gamma} \quad \gamma = 1,20 \quad (88)$$

Onde:

$\chi$  é o fator de redução associado à flambagem global;

$A_{ef}$  é a área efetiva da seção transversal do montante;

$f_y$  é a tensão de escoamento do material.

$$\lambda_0 \leq 1,5: \quad \chi = 0,658\lambda_0^2 \quad (89)$$

$$\lambda_0 > 1,5: \quad \chi = \frac{0,877}{\lambda_0^2} \quad (90)$$

Onde:

$\lambda_0$  é o índice de esbelteza reduzido associado à flambagem global, o qual é calculado pela equação (91).

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Af_y}{N_e}} \quad (91)$$

Onde:

$A$  é a área bruta da seção transversal do montante;

$N_e$  é a força axial de flambagem global elástica.

#### 4.4.3.2 EN 1993-4-1:2007:A1(2017)

A norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017) recomenda o emprego da norma EN 1993-1-6:2007 para determinar o fator de redução de flambagem. Nesta norma, a resistência à instabilidade  $F_{Rd}$  é calculada a partir do fator de amplificação  $R_d$  aplicado ao valor de projeto  $F_{Ed}$ .

$$F_{Rd} = R_d F_{Ed} \quad (92)$$

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_{M1}} \quad (93)$$

$$R_k = \chi R_{pl} \quad (94)$$

Onde:

$\chi_x$  é o fator de redução associado à flambagem global;

$R_{pl}$  é a resistência plástica de referência.

$$\chi_x = \chi_{xh} - \left( \frac{\bar{\lambda}_x}{\bar{\lambda}_{x0}} \right) (\chi_{xh} - 1) \quad \text{Para } \bar{\lambda}_x \leq \bar{\lambda}_{x0} \quad (95)$$

$$\chi_x = 1 - \beta_x \left( \frac{\bar{\lambda}_x - \bar{\lambda}_{x0}}{\bar{\lambda}_{xp} - \bar{\lambda}_{x0}} \right)^\eta \quad \text{Para } \bar{\lambda}_{x0} < \bar{\lambda}_x < \bar{\lambda}_{xp} \quad (96)$$

$$\chi_x = \frac{\alpha_x}{\bar{\lambda}_x^2} \quad \text{Para } \bar{\lambda}_{xp} \leq \bar{\lambda}_x \quad (97)$$

Onde:

$\bar{\lambda}_x$  é o índice de esbeltez relativa;

$\alpha_x$  é o fator de redução de imperfeição elástica;

$\beta_x$  é o fator de variação plástica;

$\eta$  é o expoente de variação;

$\bar{\lambda}_{x0}$  é o limite de esbeltez relativa de escoamento;

$\bar{\lambda}_{xp}$  é o limite plástico de esbeltez relativa;

$\chi_{xh}$  é o endurecimento nocional em esbeltez relativa zero.

$$\bar{\lambda}_{xp} = \sqrt{\frac{\alpha_x}{1 - \beta_x}} \quad (98)$$

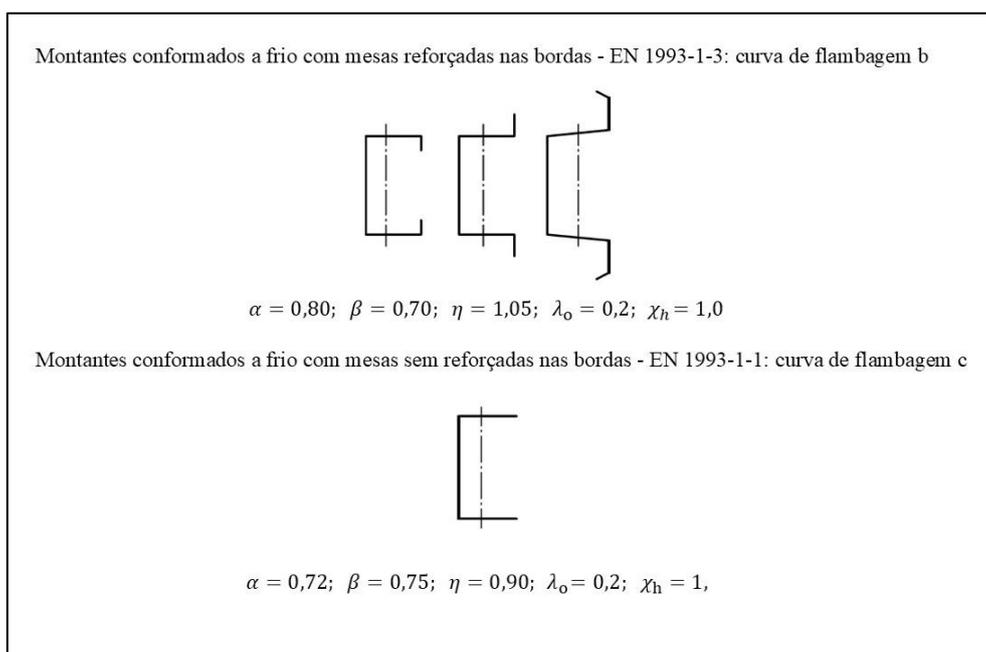
$$\bar{\lambda}_x = \sqrt{\frac{R_{pl}}{R_{cr}}} \quad (99)$$

Onde:

$R_{cr}$  é denominado de amplificador elástico de carga crítica.

Os parâmetros de flambagem  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\eta$  e  $\bar{\lambda}_{x0}$  são adotados conforme o tipo de seções. Na norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017), para seções com ou sem enrijecedores, os valores desses parâmetros são dados na Figura (22).

Figura 22 Parâmetros de flambagem para seções dos montantes



Fonte: adaptado da EN 1993-4-1:2007:A1(2017)

Para a determinação do amplificador elástico de carga crítica, tanto a norma de estrutura de silos EN 1993-4-1:2007:A1(2017) quanto a norma EN 1993-1-6:2023, recomenda-se que esse fator de carga seja estabelecido por meio de uma análise de flambagem linear (LBA). Neste estudo, a análise de flambagem linear foi realizada utilizando o software SCIA Engineer, conforme a formulação apresentada no item 4.1.4, com o objetivo de determinar o menor valor de  $R_{cr}$ .

Para determinar a resistência plástica de referência ( $R_{pl}$ ), a norma de estrutura de silos EN 1993-4-1:2007:A1(2017) sugere que ela seja calculada utilizando a equação (100). O valor área efetiva ( $A_{eff}$ ) deve ser calculado para cada seção empregada ao longo da altura do silo, assim como o valor máximo de compressão ( $N_{Ed,max}$ ), o qual foi igual a 150 kN. O valor de  $A_{eff}$  deve ser calculado conforme as recomendações da norma EN 1993-1-3.

$$R_{pl} = \frac{A_{eff}f_y}{N_{Ed,max}} \quad (100)$$

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir são apresentados os resultados das análises de estabilidade calculados a partir de método dos elementos finitos com software SCIA Engineer, e por métodos analíticos proposto pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017) e pelo modelo de Sanders.

A convergência da malha foi analisada para o modelo de silo com 14,55 m de diâmetro, 20 m de altura, espessura de chapa 3,0 mm, perfil de corrugação 101,6x11,1, e seção STF\_02. A Tabela (4) apresenta o número de elementos, o tamanho dos elementos da malha, os valores dos fatores de carga ( $\alpha_{cr}$ ) calculados para cada modelo, bem como os valores analíticos da carga crítica de flambagem, calculados tanto pelo método (a) quanto pelo método de Sanders.

Tabela 4 Análise de convergência da malha

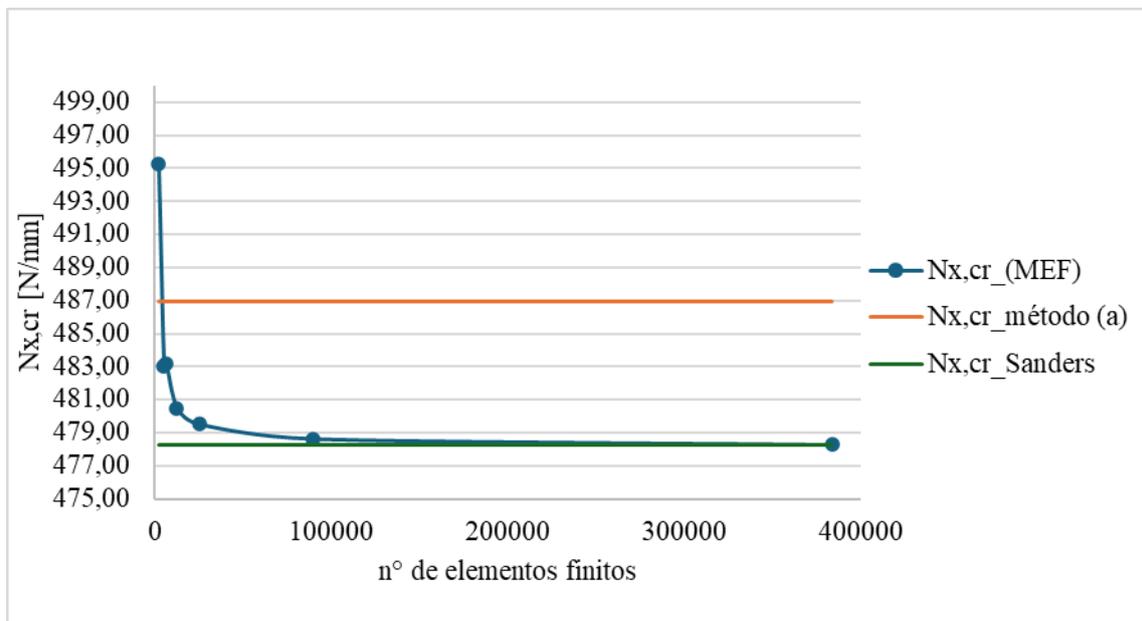
Tamanho dos elementos (mm)	n° de elementos	$\alpha_{cr}$	$N_{x,cr}$ (MEF) (N/mm)	$N_{x,cr}$ Método (a) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders) (N/mm)
600	2176	707,44	495,25	486,97	478,29
500	5120	690,01	483,05	486,97	478,29
400	6400	690,18	483,17	486,97	478,29
300	12672	686,33	480,48	486,97	478,29
200	25600	684,96	479,52	486,97	478,29
100	89600	683,7	478,63	486,97	478,29
50	384000	683,18	478,27	486,97	478,29

A Figura (23) ilustra a convergência dos resultados das cargas críticas de flambagem calculadas por meio de elementos finitos em função do número de elementos utilizados. A Figura (24) apresenta os resultados das análises de flambagem linear para cada configuração de malha examinada. Os valores analíticos da carga crítica de flambagem, obtidos pelos métodos (a) e de Sanders, foram utilizados como referência para a comparação com os resultados numéricos. Observa-se que, à medida que o número de elementos finitos aumenta, os resultados convergem para valores próximos aos obtidos pelo método de Sanders.

A malha com tamanho de 100 mm mostrou-se adequada para a avaliação dos modelos, uma vez que gerou resultados satisfatórios em um tempo de processamento inferior em

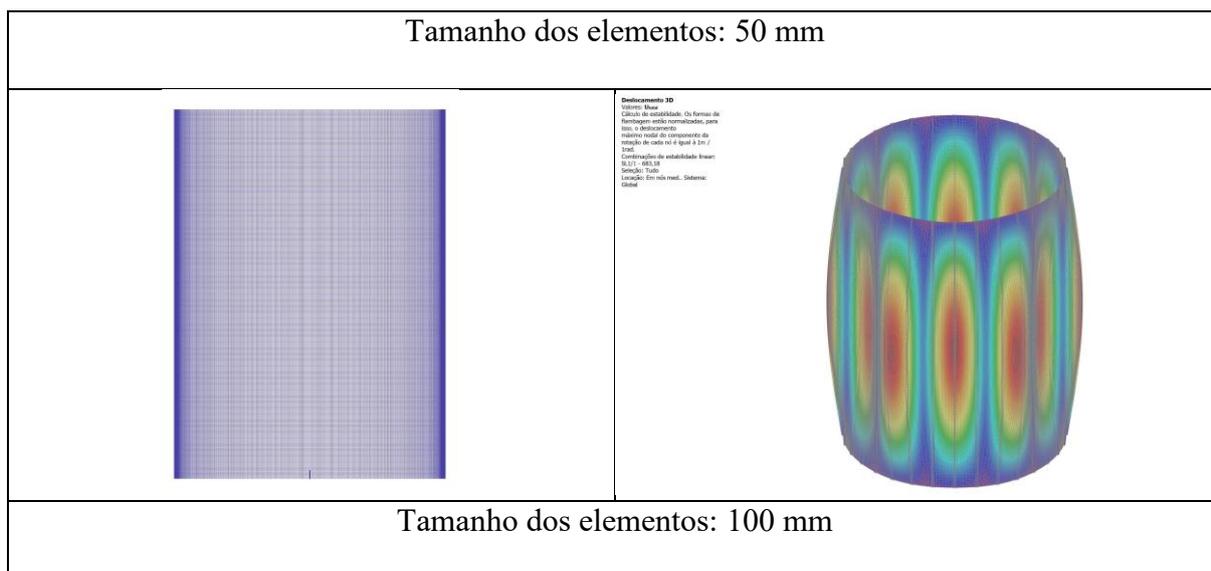
comparação aos modelos que utilizaram um tamanho de elemento de 50 mm. Por isso, os elementos usados nas análises desta tese foram de 100 mm para simular os modelos.

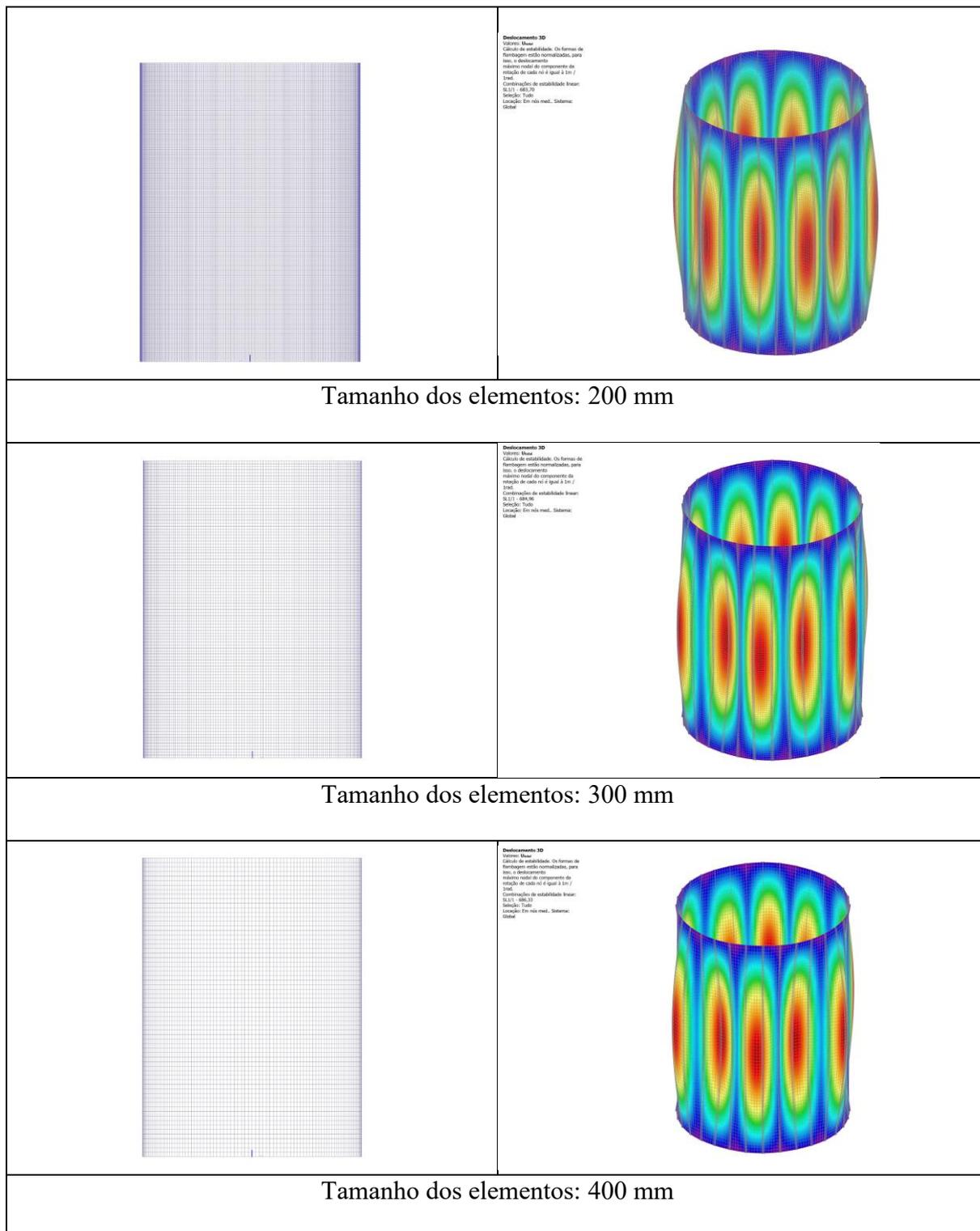
Figura 23 Análise da convergência de malha

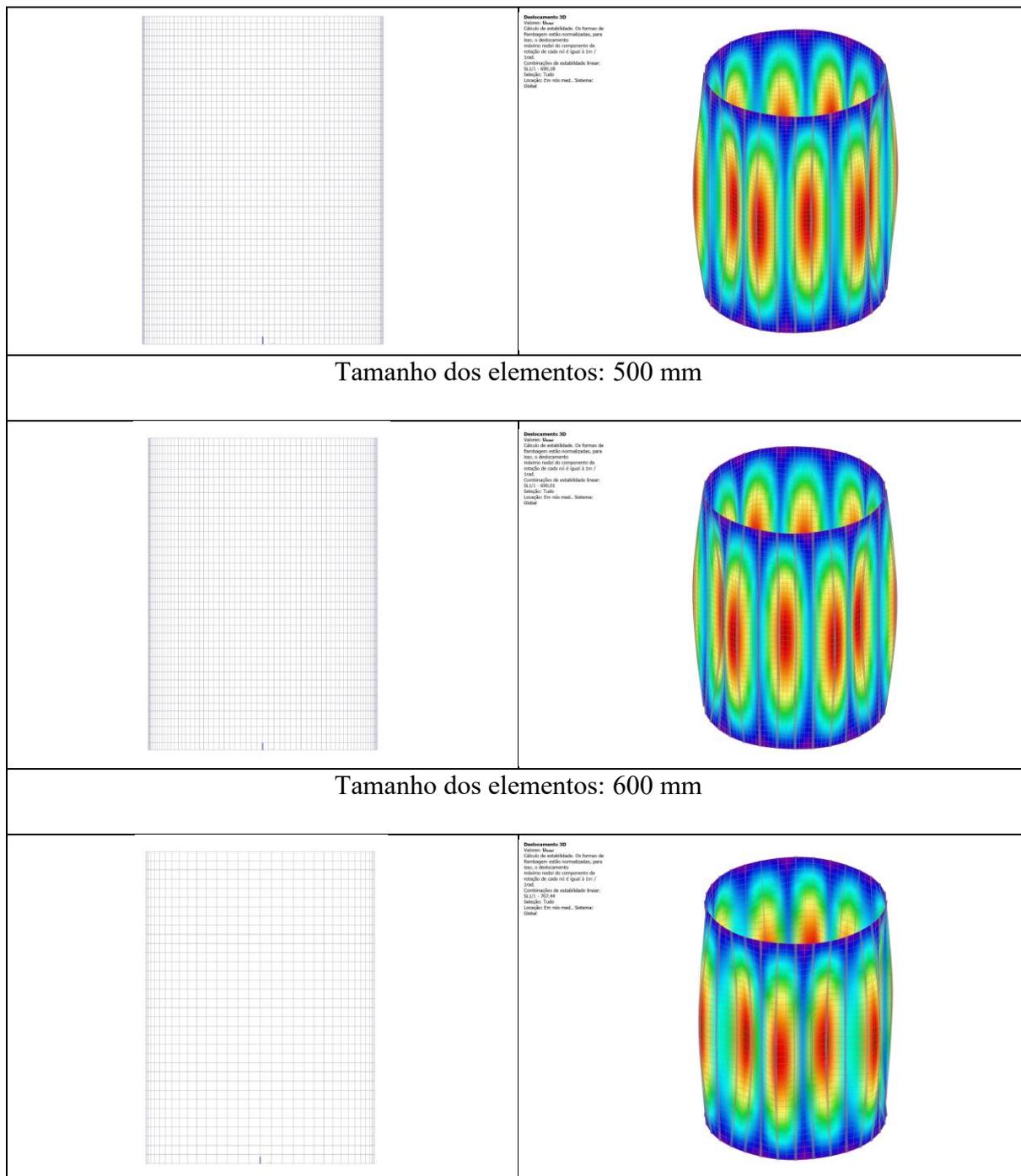


Fonte: Autor

Figura 24 Análise de convergência dos modelos em MEF







Fonte: Autor

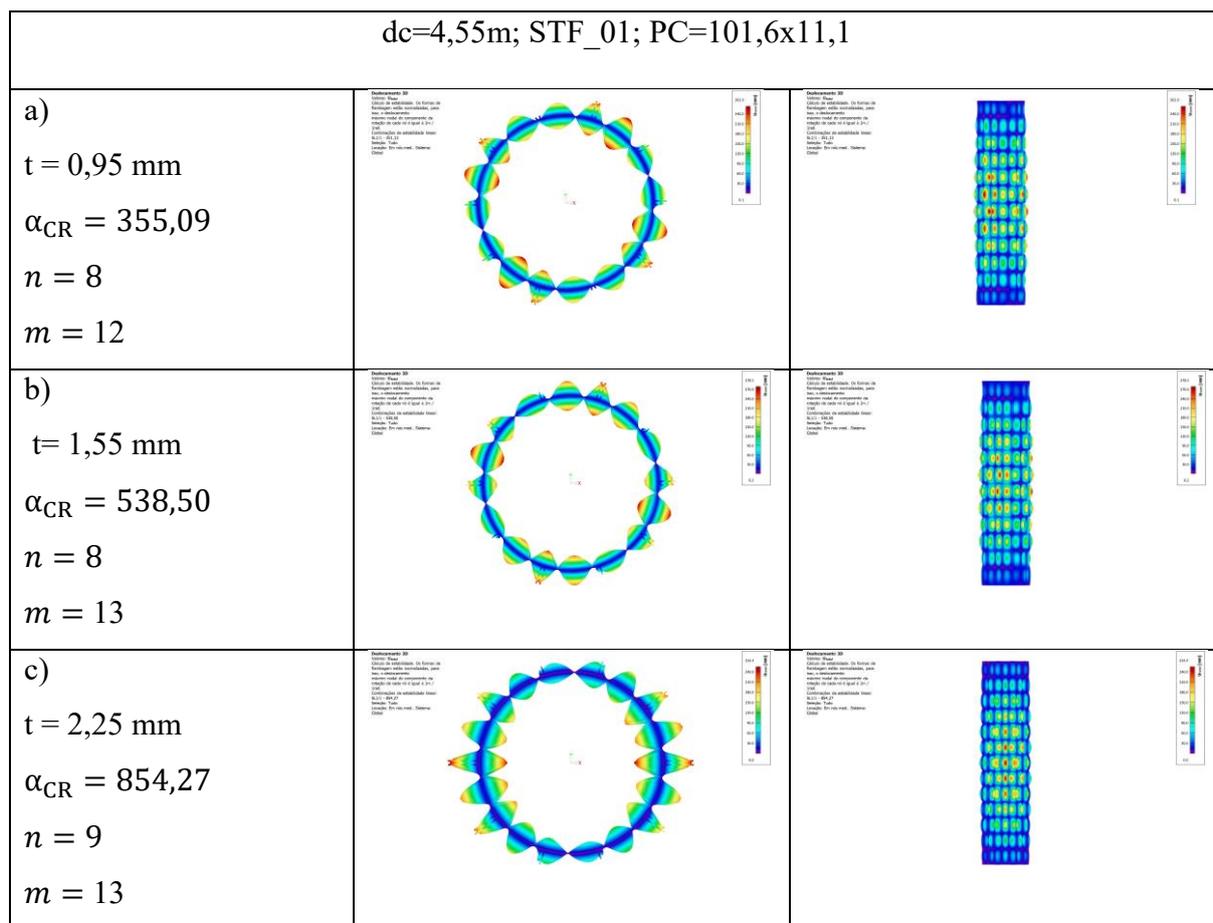
## 5.1 Análise numérica

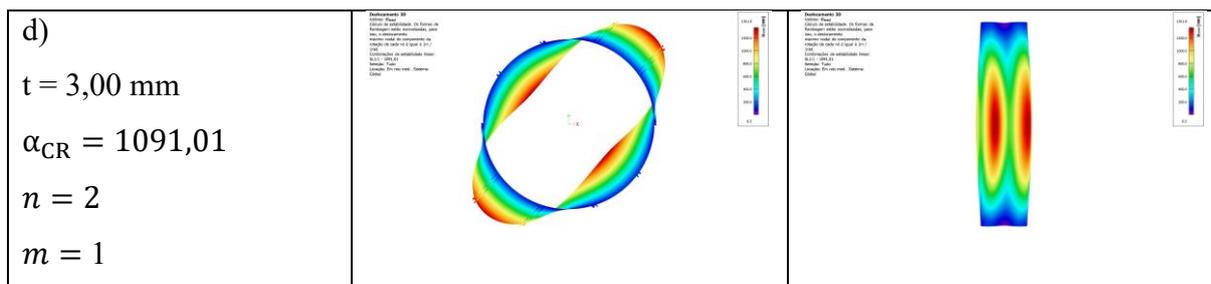
A seguir, são apresentados os resultados das análises de flambagem linear dos modelos de silos com diâmetros de 4,55, 10,0 e 14,5 m, referidos, respectivamente, como SL455, S1000 e SL14550.

### 5.1.1 Análise de flambagem linear do SL455

A Figura (25) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear - LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 4,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_01 e perfil de corrugação 101,6x11,1. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas meridionais ( $m$ ).

Figura 25 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455

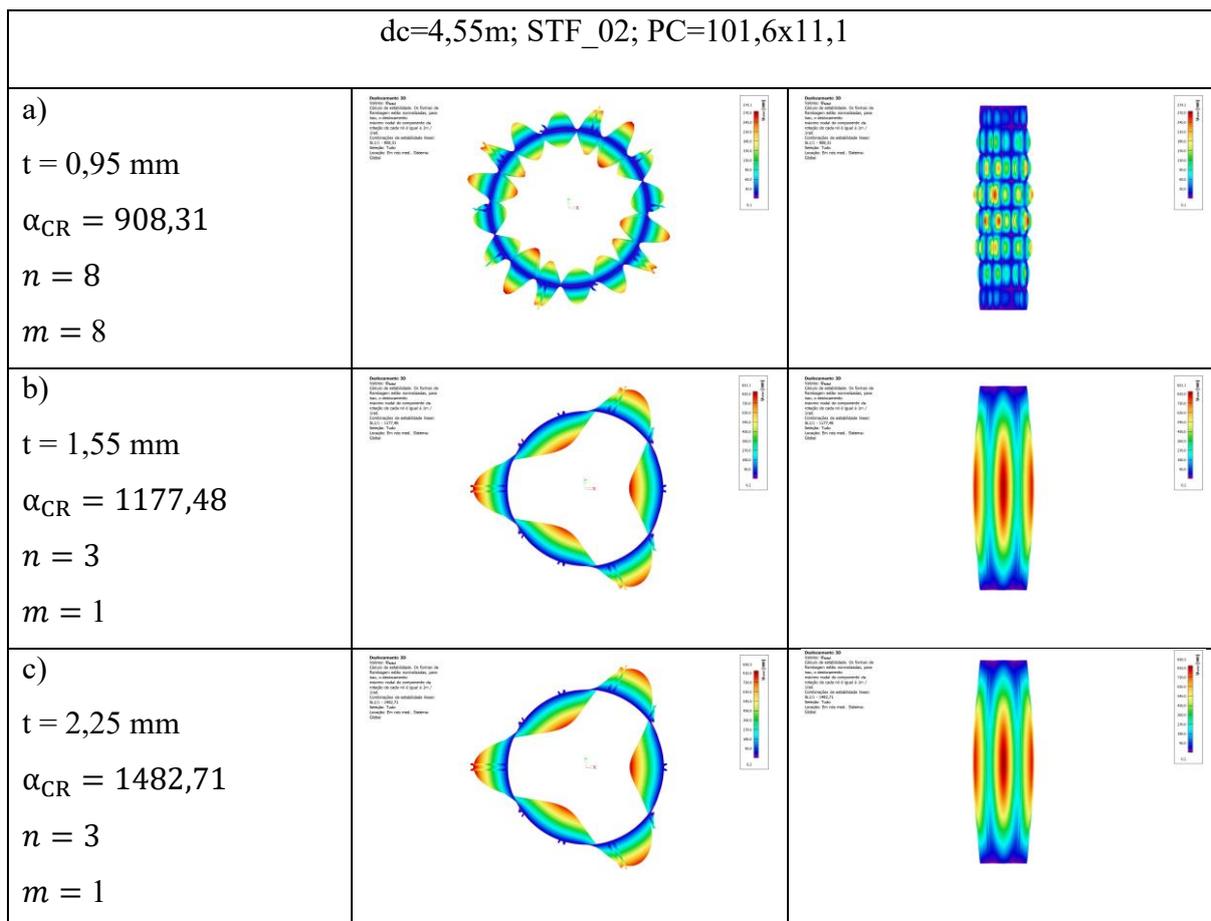


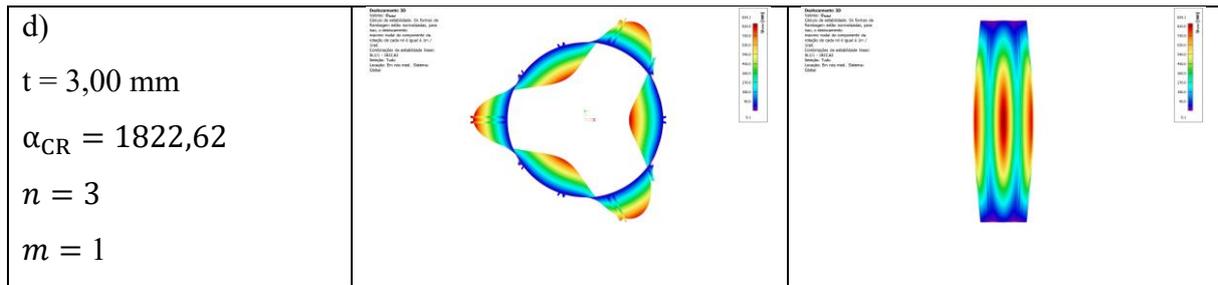


Fonte: Autor

A Figura (26) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear -LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 4,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_02, perfil de corrugação 101,6x11,1 e número de montantes igual a 10. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas meridionais ( $m$ ).

Figura 26 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455

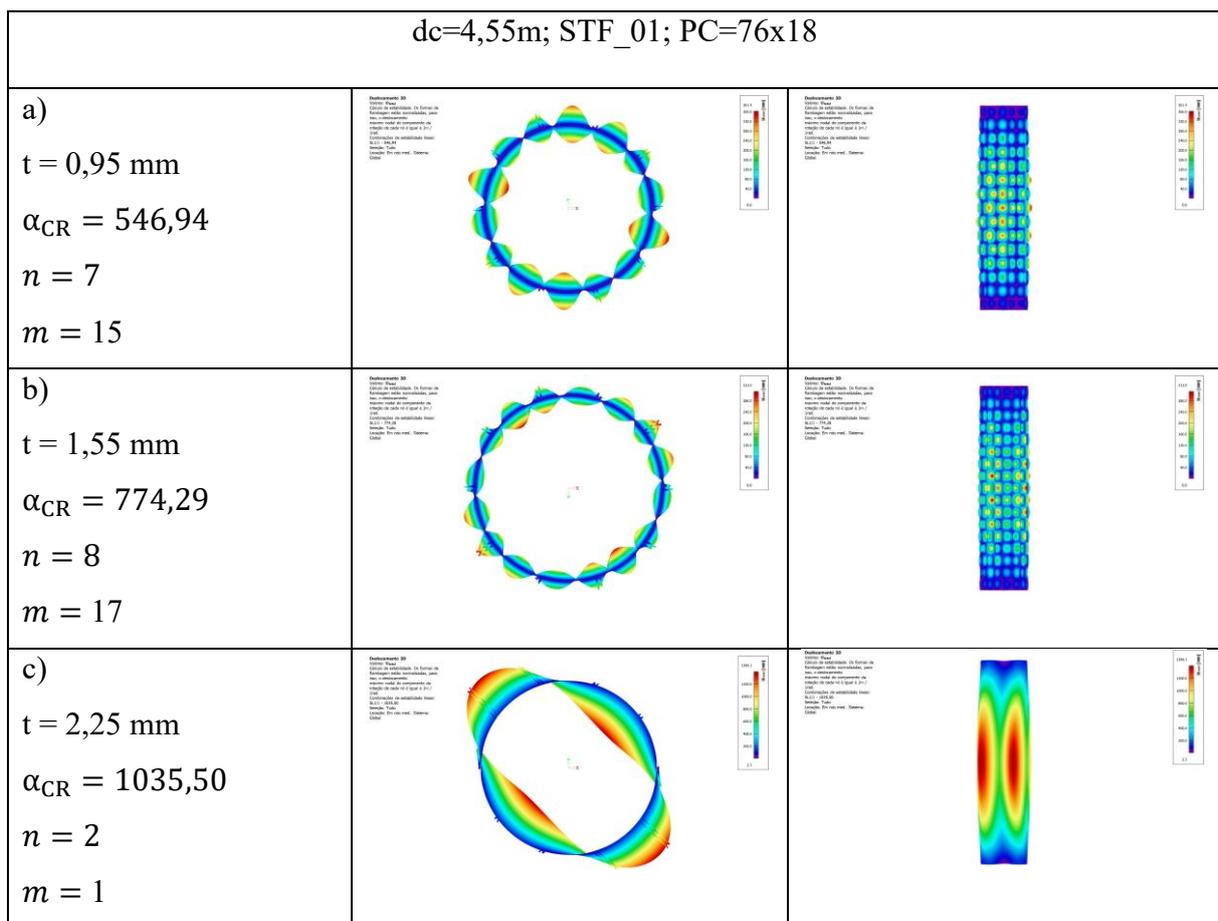


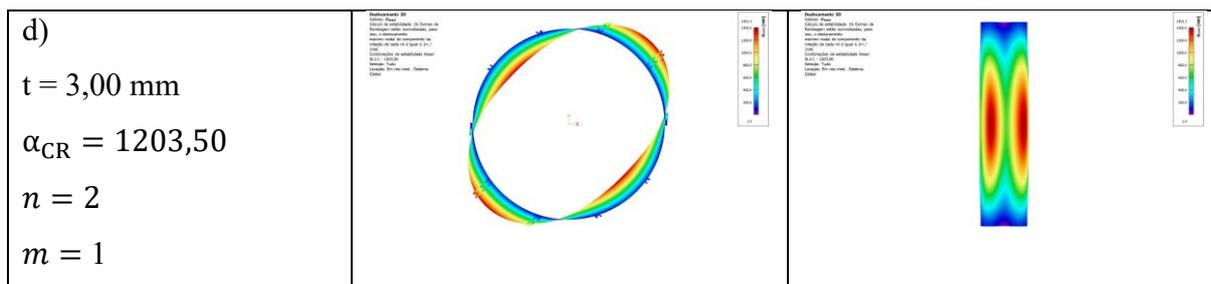


Fonte: Autor

A Figura (27) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear - LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 4,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_01, perfil de corrugação 76x18 e número de montantes igual a 10. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas meridionais ( $m$ ).

Figura 27 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455

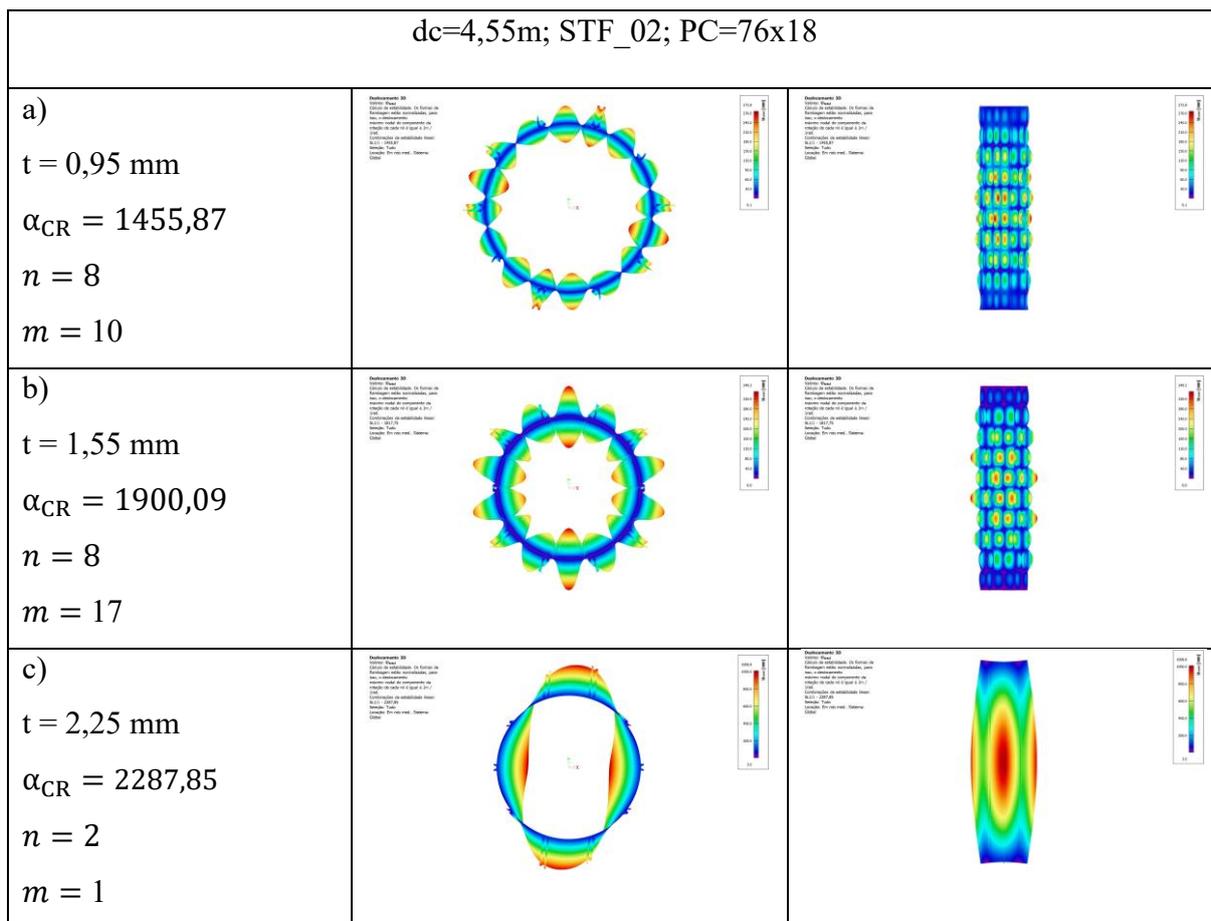


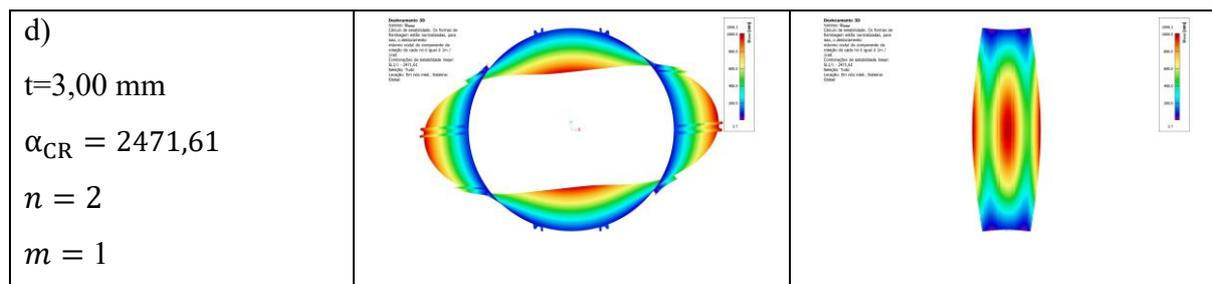


Fonte: Autor

A Figura (28) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear - LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 4,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_02, perfil de corrugação 76x18 e número de montantes igual a 10. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas meridionais ( $m$ ).

Figura 28 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL455





Fonte: Autor

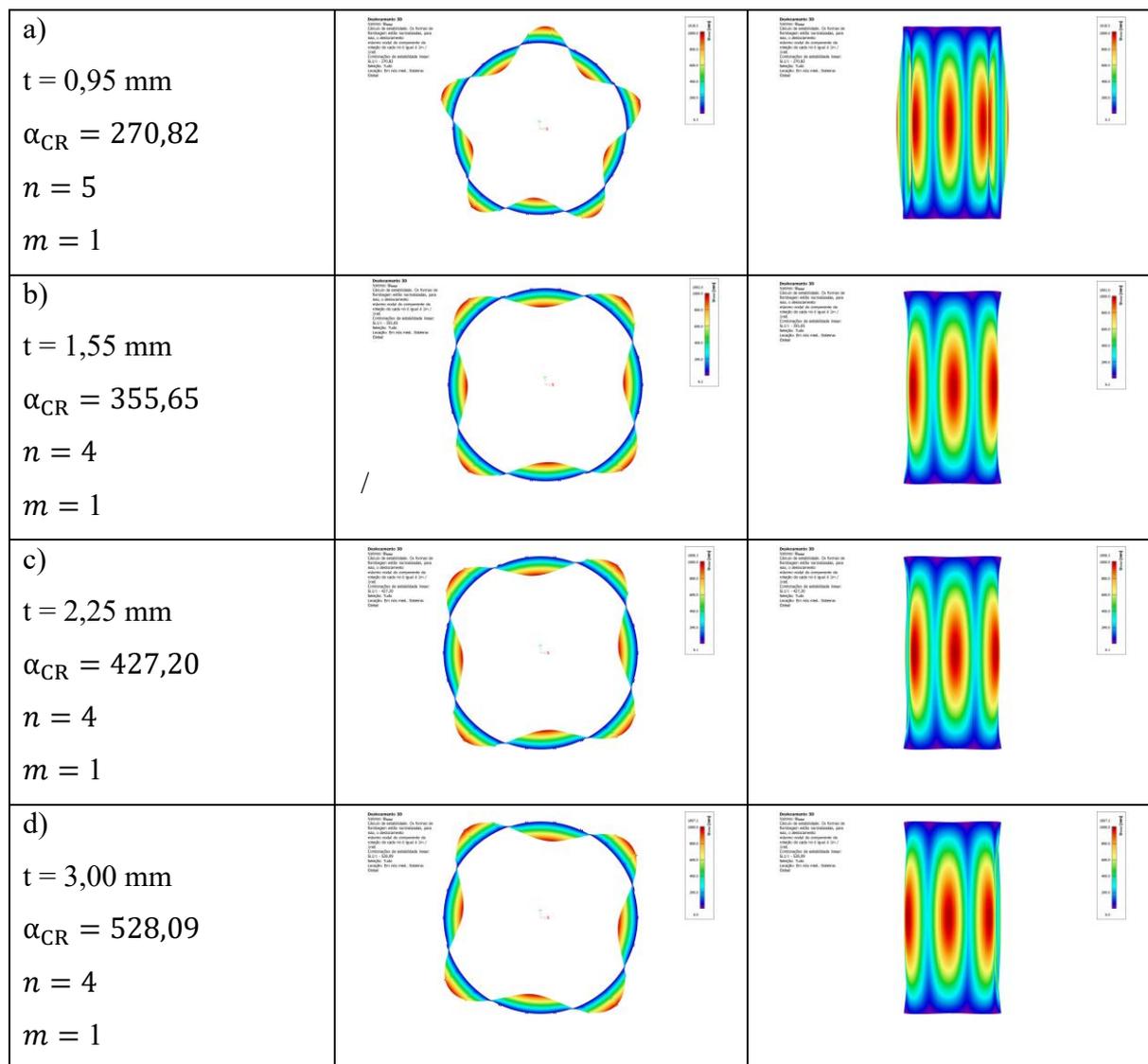
Ao analisar os resultados das análises de estabilidade linear (LBA) dos modelos com diâmetro de 4,55 m e perfil de corrugação 101,6x11,1, foram observados os seguintes comportamentos: para o modelo com seção STF\_01, verificou-se que, nas espessuras entre 0,95 e 2,25 mm, os números de ondas circunferenciais ( $n$ ) e meridionais ( $m$ ) foram maiores que 1. Para a espessura de 3,0 mm,  $n$  e  $m$  foram 2 e 1, respectivamente. Nos modelos com seção STF\_02, verificou-se que, para espessuras 0,95 mm, os valores de  $n$  e  $m$  foram também superiores a 1, enquanto para as espessuras entre 1,55 e 3,00 mm os valores de  $n$  e  $m$  foram 3 e 1, respectivamente. Esses resultados estão de acordo com os achados em Sondej et al. (2015), os quais constataram que cilindros com longarinas densamente distribuídas ( $d_s < d_{s,máx}$ ) apresentaram uma onda meridional e várias ondas circunferenciais. Em contraste, cilindros com espaçamentos maiores ( $d_s > d_{s,máx}$ ) demonstraram maior número de ondas tanto meridionais quanto circunferenciais.

### 5.1.2 Análise de flambagem linear do SL1000

A Figura (29) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear - LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 10,00 m, seção do perfil dos montantes STF\_01, perfil de corrugação 101,6x11,1 e número de montantes igual a 22. Nessa figura, estão ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

Figura 29 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000

dc=10,0 m; STF\_01; PC=101,6x11,1

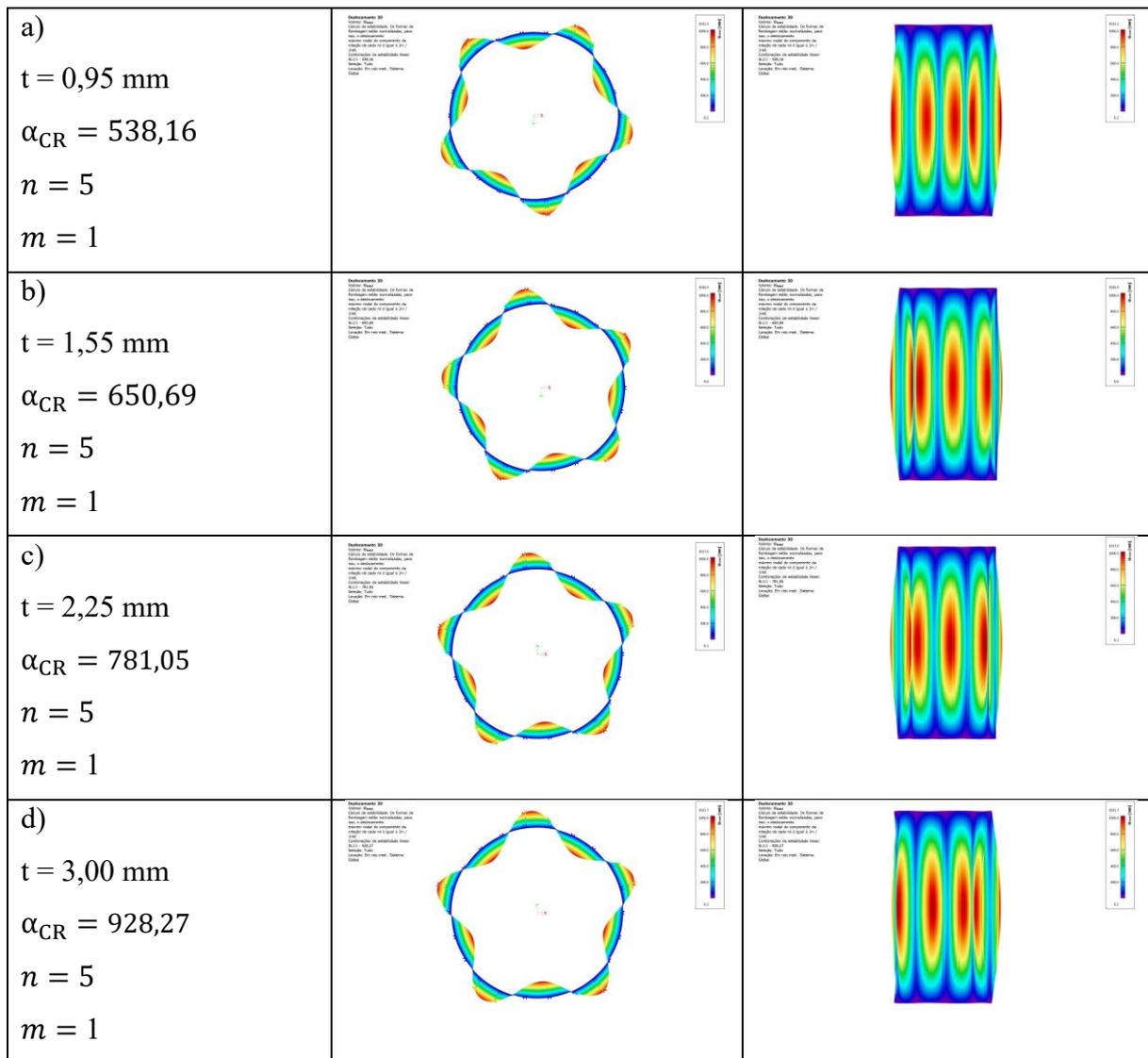


Fonte: Autor

A Figura (30) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear -LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 10,00 m, seção do perfil dos montantes STF\_02, perfil de corrugação 101,6x11,1 e número de montantes igual a 22. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

Figura 30 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000

dc=10,0 m; STF\_02; PC=101,6x11,1

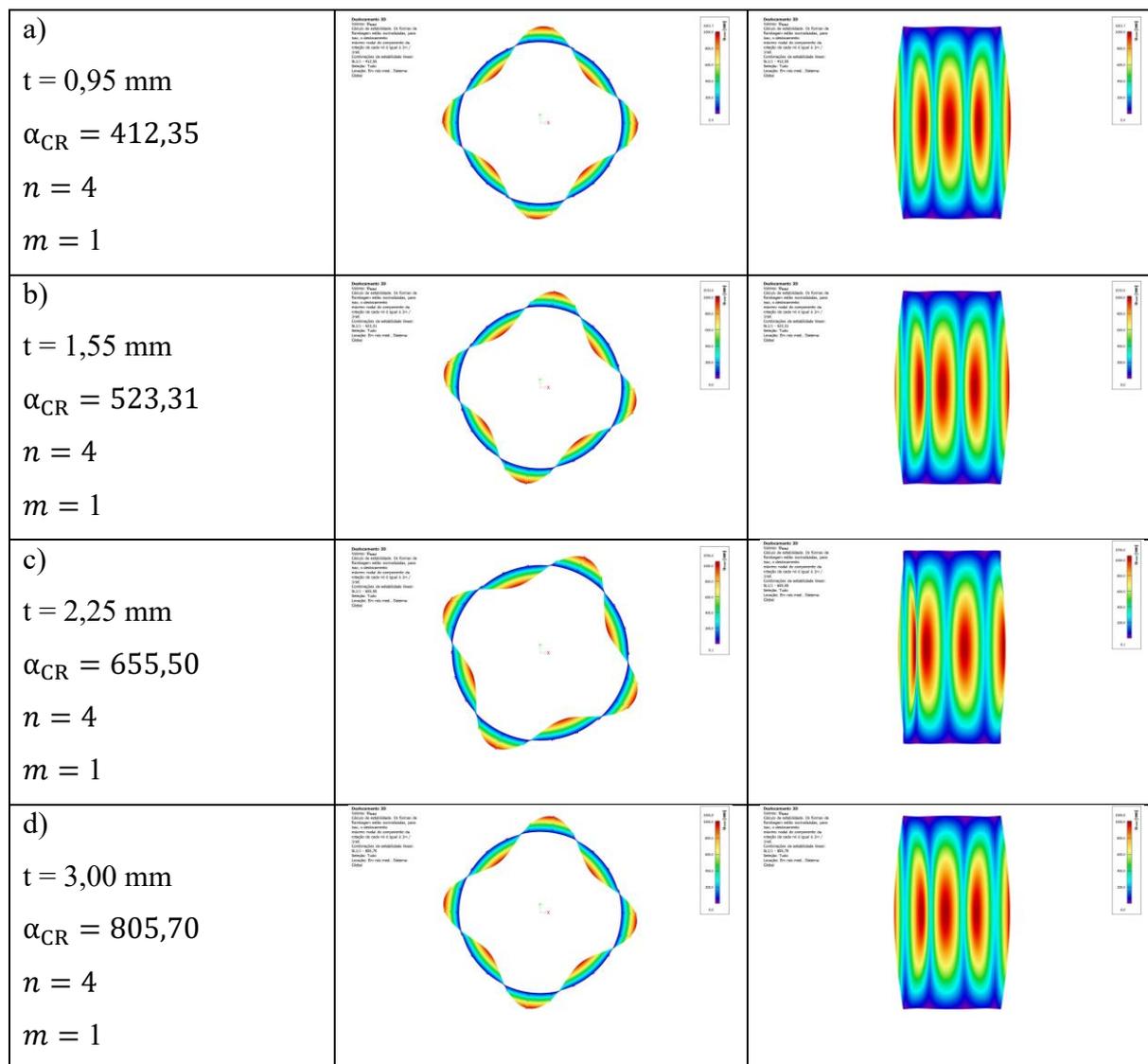


Fonte: Autor

A Figura (31) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear -LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 10,00 m, seção do perfil dos montantes STF\_01, perfil de corrugação 76x18 e número de montantes igual a 22. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

Figura 31 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000

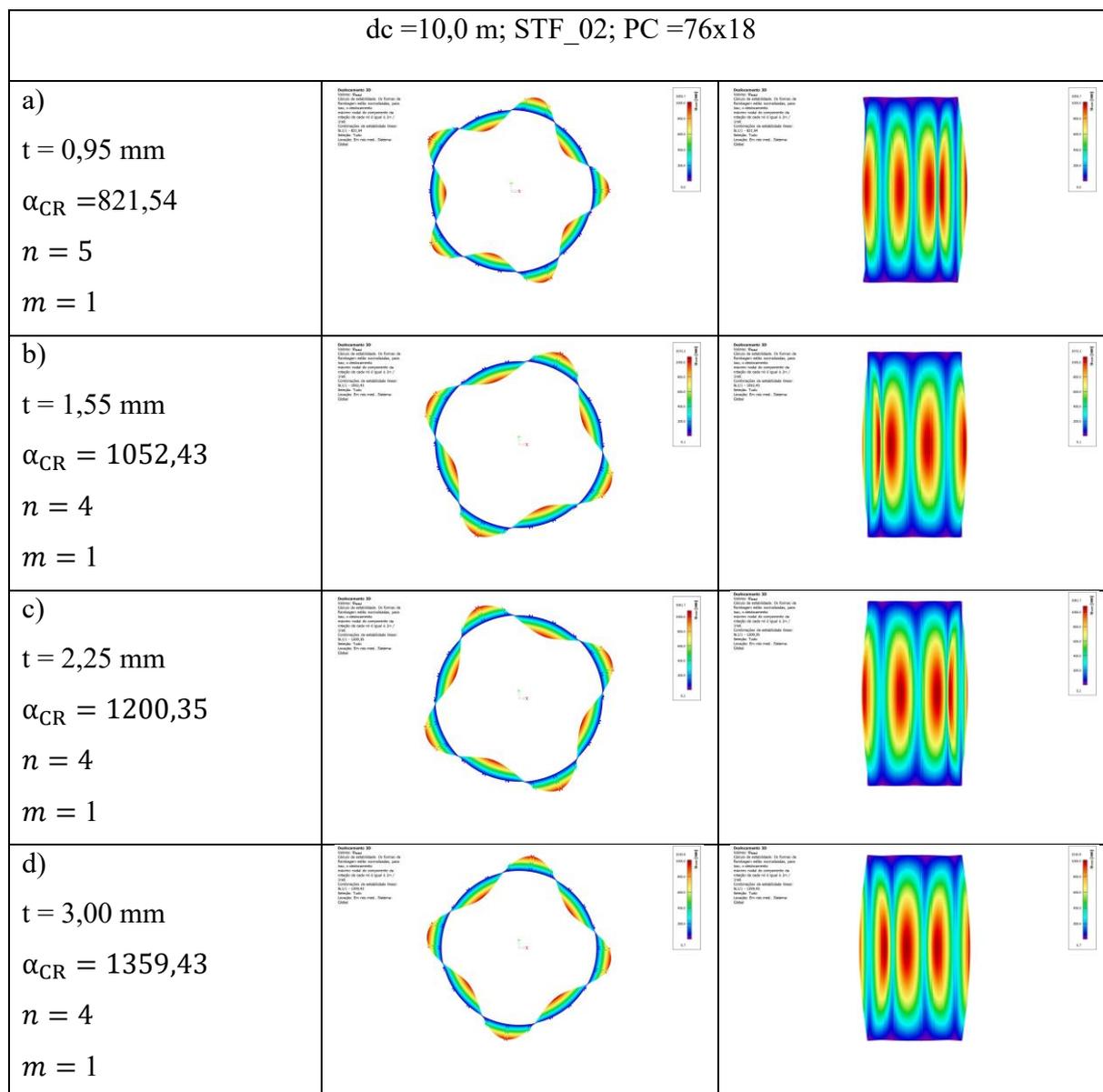
dc=10,0 m; STF\_01; PC=76x18



Fonte: Autor

A Figura (32) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear - LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 10,00 m, seção do perfil dos montantes STF\_02, perfil de corrugação 76x18 e número de montantes igual a 22. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

Figura 32 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL1000



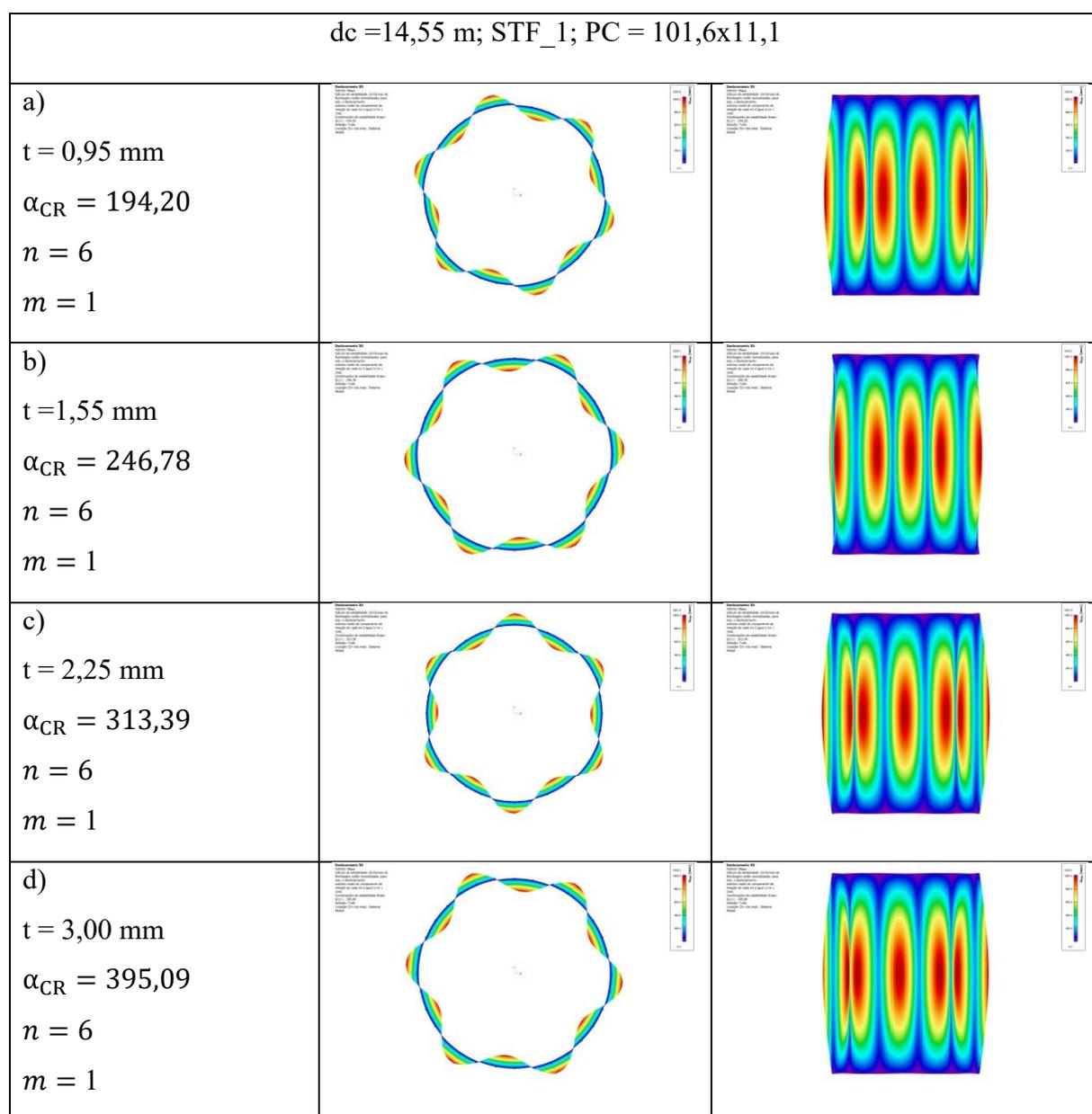
Fonte: Autor

A análise de estabilidade linear (LBA) aplicada a todos os modelos com diâmetro de 10 m revelou que o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) variou entre 4 e 5, enquanto o número de ondas meridionais foi igual a 1. Em todos esses modelos, independentemente da configuração, o número de ondas circunferenciais e meridionais que caracterizam o modo de flambagem dos cilindros permaneceram constantes. Sondej *et al.*, (2015) verificaram que cilindros com  $d_s < d_{s,máx}$  apresentaram o mesmo modo de flambagem independentemente do espaçamento entre montantes  $d_s$ .

### 5.1.3 Análise de flambagem linear do SL14550

A Figura (33) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear - LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 14,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_01, perfil de corrugação 101,6x11,1 e número de montantes igual a 32. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas meridionais ( $m$ ).

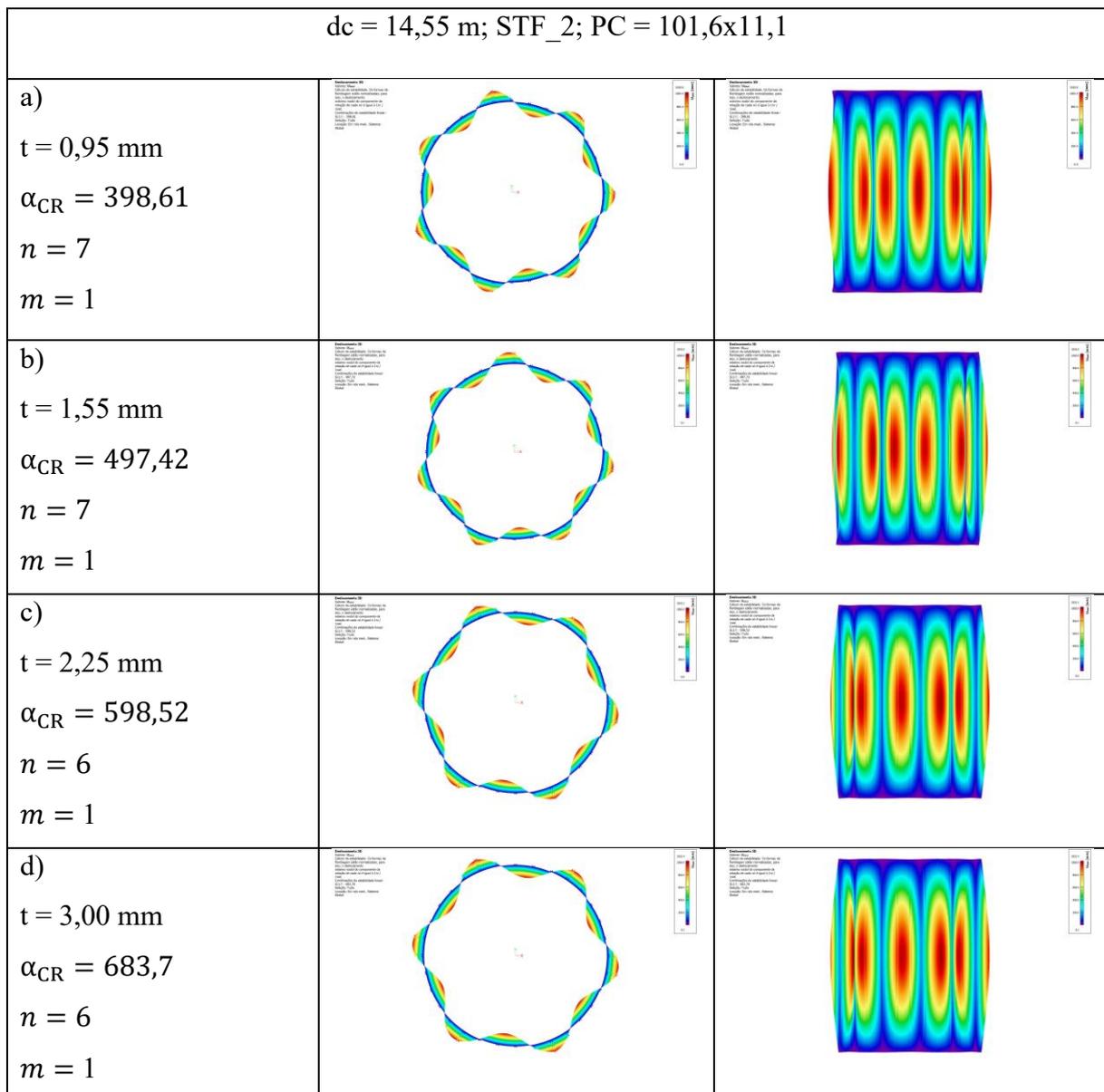
Figura 33 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550



Fonte: Autor

A Figura (34) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear -LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 14,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_02, perfil de corrugação 101,6x11,1 e número de montantes igual a 32. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

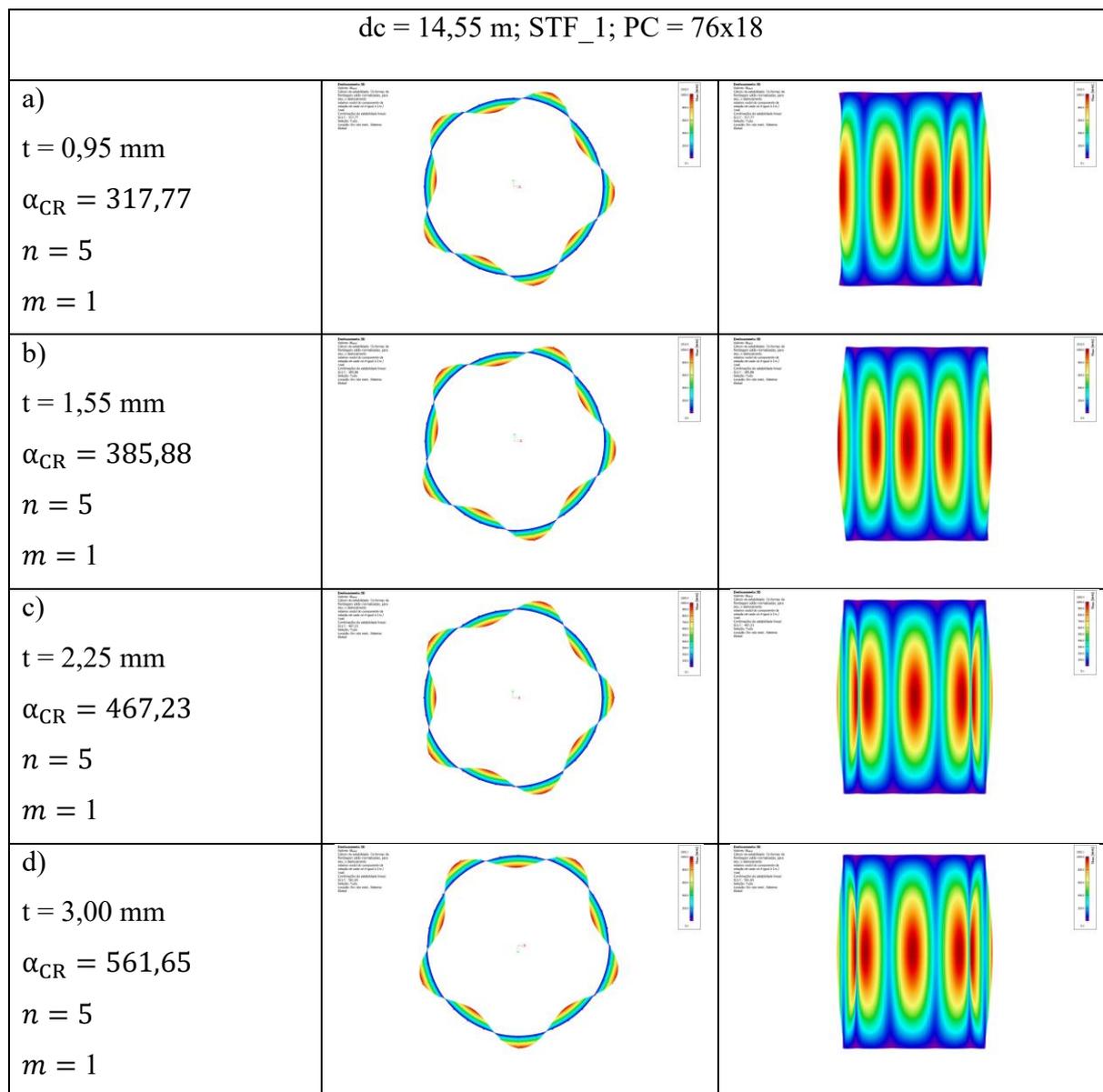
Figura 34 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550



Fonte: Autor

A Figura (35) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear -LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 14,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_01, perfil de corrugação 76x18 e número de montantes igual a 32. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

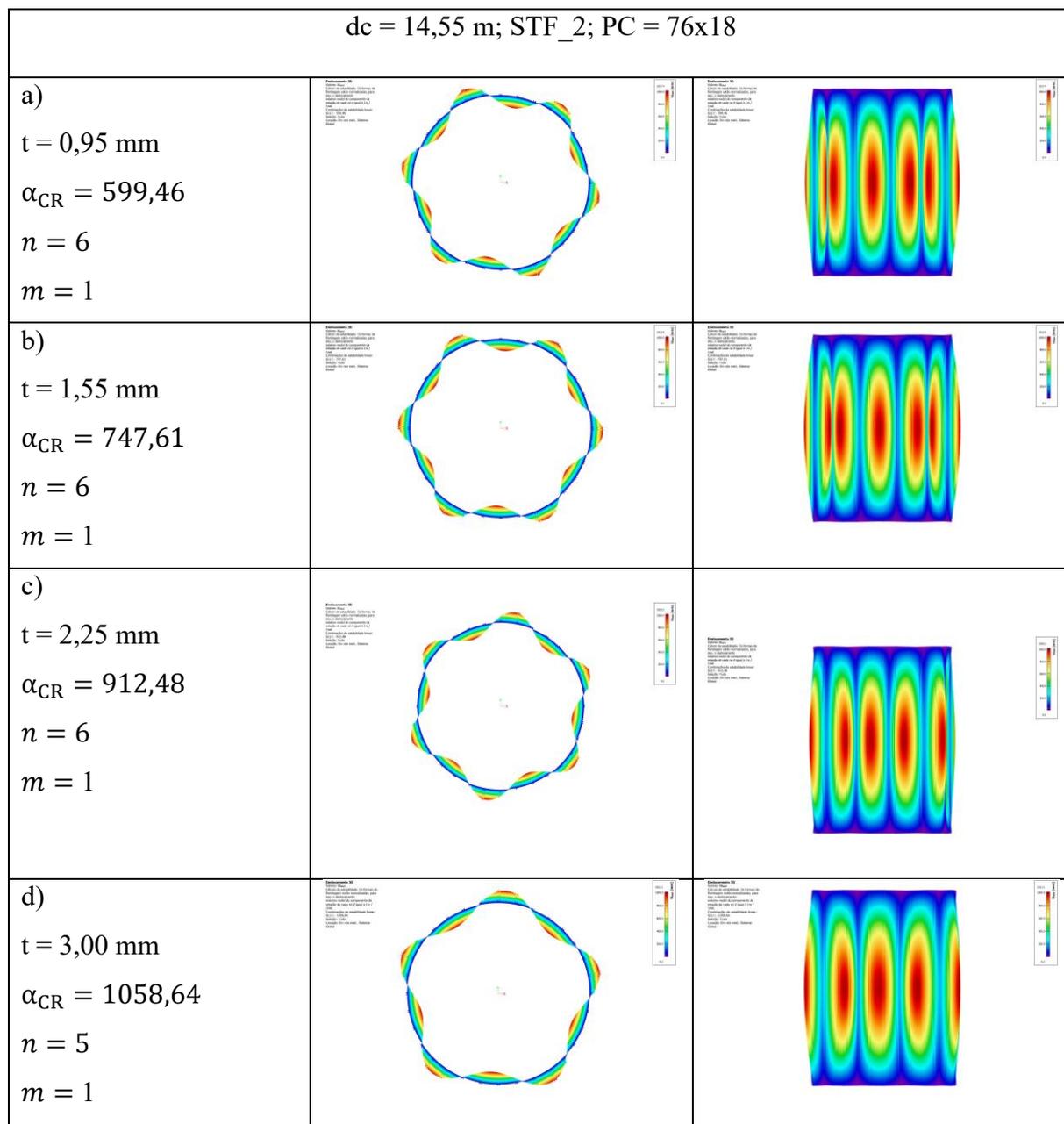
Figura 35 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550



Fonte: Autor

A Figura (36) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear -LBA dos modelos estudados com quatro espessuras (0,95, 1,55, 2,25 e 3,00), diâmetro igual a 14,55 m, seção do perfil dos montantes STF\_02, perfil de corrugação 76x18 e número de montantes igual a 32. Nessa figura, são ilustrados os modos de flambagem correspondentes aos menores fatores de carga, bem como o número de ondas circunferenciais ( $n$ ) e o número de meias-ondas ( $m$ ).

Figura 36 Análise de estabilidade linear -LBA do modelo SL14550



Fonte: Autor

## 5.2 Análise comparativa

A seguir, são apresentados os valores das cargas críticas de flambagem do costado de silos, calculados por meio de métodos analíticos e numéricos. Esses cálculos foram realizados para modelos com diâmetros de 4,55 m e 14,55 m, com espessuras variando entre 0,95 mm e 3,00 mm, utilizando as seções STF\_01 e STF\_02, e os perfis de corrugação 101,6x11,1 mm e 76x18 mm.

Na Tabela (5) são apresentados os valores das áreas das seções transversais ( $A_s$ ), espaçamentos entre centro da chapa e centroide dos montantes ( $e_s$ ), momento de inércia da seção do montante calculado em torno do eixo x do centroide ( $I_x$ ), e momento de inércia da seção do montante (I) calculado a uma distância ( $e_s$ ) em torno do eixo tangente ao plano médio da chapa corrugada. A Tabela (6) apresenta os valores dos coeficientes de rigidez das chapas corrugadas, calculados conforme as equações (32), os quais foram empregados para determinar a carga crítica de flambagem pelo método b) da norma europeia.

Tabela 5 Dados das propriedades das seções geométricas

101,6x11,1					76x18			
STF	$e_s$ (mm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	$e_s$ (mm)	A (cm <sup>2</sup> )	$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )
1	32,95	4,52	20,32	69,39	36,4	4,52	20,32	80,21
2	48,35	13,27	139,29	449,51	51,8	13,27	139,29	495,36

Tabela 6 Coeficientes de rigidez das chapas corrugadas

t (mm)	Perfil de corrugação	$d_s$ (mm)	K (kN/cm <sup>2</sup> )		
			dc = 4,55 m	dc = 10,0 m	dc = 14,55 m
0,95	101,6x11,1	1429,42	0,0250	0,0252	0,0245
1,55			0,0408	0,0411	0,0400
2,25			0,0592	0,0597	0,0581
3,00			0,0790	0,0796	0,0774
0,95	76x18		0,0687	0,0670	0,0625
1,55			0,1121	0,1094	0,1020
2,25			0,1627	0,1588	0,1480
3,00			0,2170	0,2117	0,1974

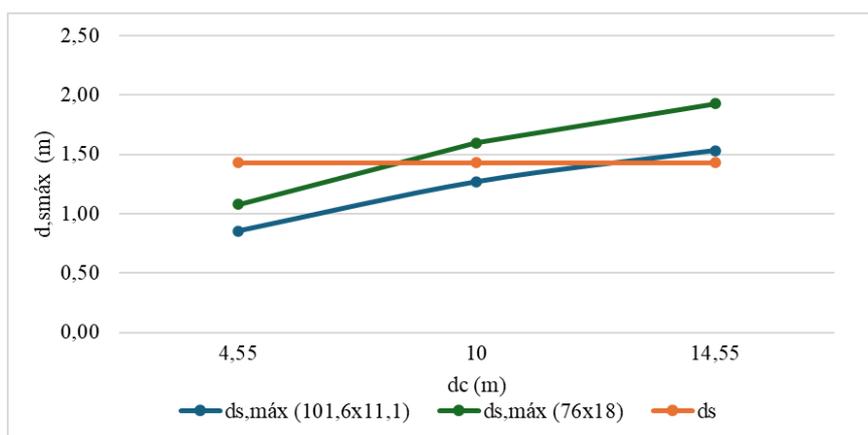
A Tabela (7) apresenta os espaçamentos máximos calculados com o emprego da equação (16) recomendada pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017). Na Figura (35) é ilustrado o gráfico dos espaçamentos máximos em função dos diâmetros dos costados analisados. Observa-se que, para chapas com perfil de corrugação 101,6x11,1,  $d_s > d_{s,máx}$  para o costado com diâmetros iguais 4,55 e 10,0 m, e  $d_s < d_{s,máx}$  para o silo com diâmetro 14,55 m. Já para chapas com perfil de corrugação 76x18, apenas o costado com diâmetro igual a 4,55 m  $d_s > d_{s,máx}$ . Segundo a norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017), quando a condição  $d_s < d_{s,máx}$  é satisfeita, emprega-se o método a), o qual refere-se ao modelo de casca ortotrópica baseado na teoria de Donnell-Muschtari-Vlasov. Caso contrário, emprega-se o método b), baseado em um modelo de coluna de base elástica.

Tabela 7 Espaçamento máximo entre montantes -  $d_{s,máx}$

$d_c$ (m)	$n_{st}$	$d_{s,máx}$ (m)		$d_s$ (m)
		101,6x11,1	76x18	
4,55	10	0,86	1,08	1,428
10	22	1,27	1,60	
14,55	32	1,53	1,93	

$n_{st}$ = número de montantes/stiffeners

Figura 37 Espaçamento máximo entre montantes -  $d_{s,máx}$



Fonte: Autor

### 5.2.1 Análises do modelo SL4550

A Tabela (7) apresenta os resultados das cargas críticas de flambagem para os modelos de costado com diâmetro de 4,55 m, calculadas pelos métodos a) e b), bem como pelos métodos de Sanders, tanto para pequenas deformações e rotações moderadas quanto para pequenas rotações não lineares. Respectivamente, esses métodos foram nomeados como  $N_{x,cr}$  Método (a),  $N_{x,cr}$  Método (b),  $N_{x,cr}$  (Sanders) e  $N_{x,cr}$  (Sanders\*). Pelo método dos elementos finitos, a carga crítica de flambagem foi denominada  $N_{x,cr}$  (MEF).

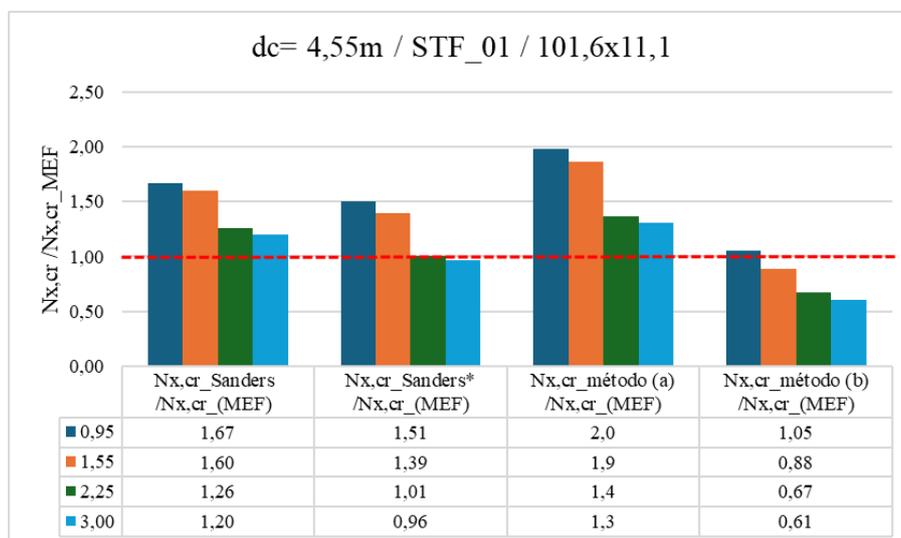
Tabela 8 Carga crítica de flambagem do costado com diâmetro 4,55 m

$d_c$ (m)	t (mm)	Seção	Perfil de corrugação	$N_{x,cr}$ Método (a) (N/mm)	$N_{x,cr}$ Método (b) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders*) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (MEF) (N/mm)	
4,55	0,95	1	101,6x11,1	492,15	260,67	415,63	374,56	248,42	
	1,55			703,25	332,96	602,81	524,61	376,73	
	2,25			819,20	401,16	751,01	602,46	597,63	
	3,00			999,67	463,22	916,64	735,09	763,25	
	0,95	2		771,53	663,43	694,78	627,86	635,44	
	1,55			1011,85	847,42	886,87	800,21	823,75	
	2,25			1295,37	1021,00	1114,67	1004,99	1037,28	
	3,00			1609,47	1178,95	1369,99	1234,71	1275,08	
	0,95	1	76x18	757,11	464,49	669,69	539,08	382,63	
	1,55			898,43	593,31	756,30	607,39	541,68	
	2,25			1071,83	714,83	866,97	695,49	724,42	
	3,00			1278,08	825,42	1007,89	808,10	841,95	
	0,95			2	1422,92	1154,32	1210,81	1094,47	1018,50
	1,55				2011,19	1474,44	1722,26	1511,06	1329,27
	2,25				2209,41	1776,45	2002,71	1614,90	1600,54
	3,00				2429,20	2051,27	2156,51	1735,82	1729,10

As Figuras (38) a (41) ilustram os gráficos da razão entre as cargas críticas de flambagem determinadas pelos métodos analíticos e pelo método dos elementos finitos ( $N_{x,cr}$  (analítico) /  $N_{x,cr}$  (MEF)) para as configurações dos costados analisados com diâmetro igual a 4,55 m.

O modelo de Sanders foi utilizado para descrever o comportamento de cascas sob grandes rotações. Nas análises realizadas com base na Figura (38), foi observado que a razão  $N_{x,cr(Sanders)}/N_{x,cr(MEF)}$  foi maior que 1 para todas as espessuras analisadas. No entanto, esse valor apresentou uma diminuição com o aumento da espessura das chapas. Esse fenômeno também foi notado para a razão  $N_{x,cr \text{ Método (a)}}/N_{x,cr(MEF)}$ . Especificamente no modelo de Sander, que considera grandes rotações, a razão  $N_{x,cr(Sanders*)}/N_{x,cr(MEF)}$  foi superior a 1 para espessuras variando de 0,95 mm a 1,55 mm, enquanto para espessuras de 2,25 mm a 3,00 mm essa razão aproximou-se de 1, indicando uma convergência dos resultados entre os métodos à medida que a espessura aumenta. Ao analisar o método (b), observou-se que o aumento das espessuras faz a razão diminuir, tal como nos outros modelos, embora os valores da razão sejam menores que 1. Sondej *et al.* (2015) demonstraram que a razão entre as cargas críticas calculadas com modelos analíticos, como os de Sanders e EN 1993-4-1, e os resultados obtidos por métodos numéricos (MEF) para silos com 5,0 diâmetros foi superior a 1. Contudo, à medida que as espessuras aumentaram, os resultados tenderam a se aproximar de 1. Além disso, Sondej *et al.* (2015) constataram que o método de Sanders apresentou maior precisão em comparação ao método de DMV.

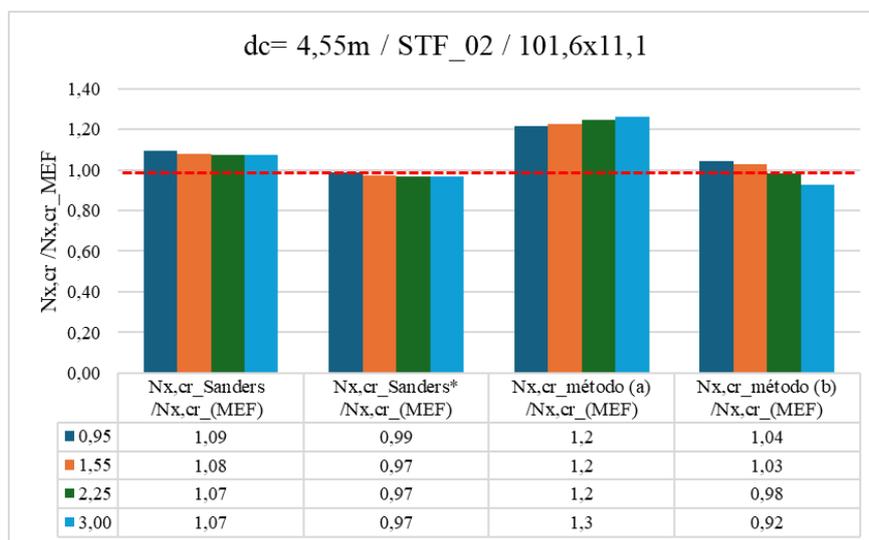
Figura 38 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m



Fonte: Autor

A Figura (39) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos, como os de Sanders e EN 1993-4-1, e os resultados obtidos por métodos numéricos (MEF), para um silo com 4,55 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 101,6 x 11,1 e a seção do montante STF\_02.

Figura 39 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m

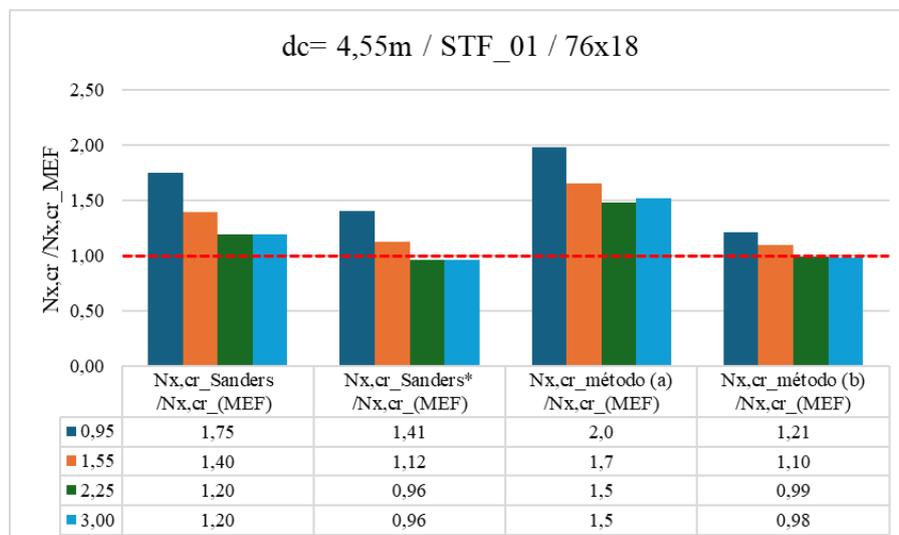


Fonte: Autor

Observa-se que, para o modelo da Figura (39), que possui um maior momento de inércia, os resultados mostraram uma precisão superior em comparação aos dados apresentados na Figura (38). Esse aumento na precisão pode ser atribuído à maior rigidez proporcionada pelo elevado momento de inércia, o que, por sua vez, contribui para uma melhor resistência às cargas críticas. Conseqüentemente, isso indica que o modelo analítico mostrou-se mais eficaz na previsão do comportamento estrutural em seções com maior inércia, refletindo uma maior confiabilidade dos resultados quando comparados aos obtidos pelos métodos numéricos. Essa análise ressalta a importância de se considerar as características geométricas das seções na avaliação da estabilidade e no dimensionamento de silos.

A Figura (40) apresenta a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 4,55m de diâmetro, com perfil de corrugação 76x18 e STF\_01. O comportamento desses resultados foram semelhantes aos encontrados para na Figura (38). entretanto, para o método b), os valores da razão foram mais próximos de 1, indicando uma maior precisão dos resultados obtidos por esse modelo

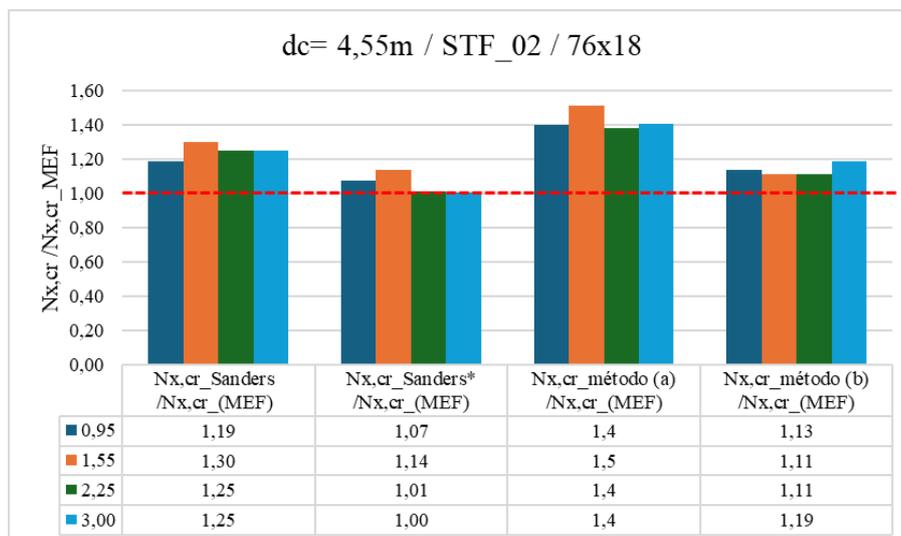
Figura 40 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m



Fonte: Autor

A Figura (41) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 4,55m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 76x18 e seção STF\_02. A análise revelou que a utilização de montantes com um momento de inércia superior proporcionou resultados mais precisos em comparação aos modelos apresentados na Figura (40). Adicionalmente, ao comparar os resultados do modelo 76x18 e STF\_02 da Figura (41) com os da Figura (39), que também utiliza a seção STF\_02, mas com um perfil de chapa diferente, foi possível observar que as chapas com corrugação de 101,6x11,1 apresentaram valores mais próximos de 1. Isso indica que, para este tipo de chapa, a concordância entre os modelos analíticos e numéricos é maior, sugerindo uma representação mais precisa das cargas críticas de flambagem.

Figura 41 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 4,55 m



Fonte: Autor

O modelo de cascas rasas, também conhecido como modelo de Donnell ou DMV, apresentou resultados superestimados em todos os casos analisados para as paredes dos silos com diâmetro de 4,55 m e altura de 20,0 m. Estudos realizados por Hilburger (2020) e Simitzes *et al.* (1985) corroboram essa observação, indicando que o modelo de Donnell tende a superestimar as respostas em cilindros longos. Além disso, Houghton e Johns (1961) afirmaram que o modelo de Donnell não deve ser utilizado para intervalos de 0 a 3 do número de ondas circunferenciais.

A discussão dos resultados revela que o modelo de Donnell pode ser inadequado para a análise estrutural de silos com dimensões específicas, como os mencionados, devido à sua tendência de superestimar as cargas críticas. É importante considerar que as espessuras das chapas e dos montantes, assim como a geometria das seções, variam ao longo da altura do silo. Portanto, os valores obtidos podem ser superestimados em algumas posições e, em outras, podem não refletir a realidade estrutural. Essa variabilidade na geometria deve ser levada em conta para uma avaliação mais precisa e eficiente do desempenho do silo.

Os resultados das razões entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e método (a)) e numéricos (MEF) mostraram que o método de Sanders foi mais preciso que o de DMV para costados de silos com 4,55 m de diâmetro. Segundo Nemeth (2014), as equações de Sanders capturam efeitos não abordados pelas equações de Donnell, porque incluem termos adicionais que a teoria de Donnell não contempla. Hilburger (2020) citou que Sanders (1963) desenvolveu uma teoria que resulta em previsões mais precisas em comparação

com a teoria de Donnell. Essa precisão é alcançada pela inclusão de termos rotacionais adicionais na superfície média, nos campos de deformação não linear da membrana e da flexão. Ainda em Hilburger (2020), é citado que a teoria de Sanders pode fornecer previsões precisas da carga de flambagem para todo o espectro de relações comprimento-raio do cilindro, incluindo previsões de carga de flambagem da coluna de Euler para tubos muito longos submetidos à compressão.

### 5.2.2 Análises do modelo SL1000

A Tabela (9) apresenta os resultados das cargas críticas de flambagem para os modelos de costado com diâmetro de 10,0 m, calculadas pelos métodos a) e b), bem como pelos métodos de Sanders, tanto para pequenas deformações e rotações moderadas quanto para pequenas rotações não lineares. Respectivamente, esses métodos foram nomeados como  $N_{x,cr}$  Método (a),  $N_{x,cr}$  Método (b),  $N_{x,cr}$  (Sanders) e  $N_{x,cr}$  (Sanders\*). Pelo método dos elementos finitos, a carga crítica de flambagem foi denominada  $N_{x,cr}$  (MEF).

Tabela 9 Carga crítica de flambagem do costado com diâmetro 10,0 m

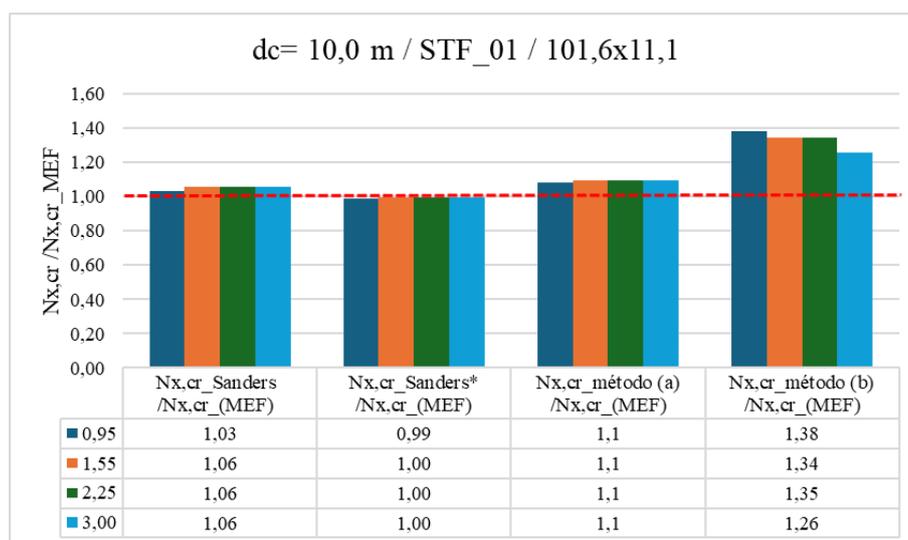
$d_c$ (m)	t (mm)	Seção	Perfil de corrugação	$N_{x,cr}$ Método (a) (N/mm)	$N_{x,cr}$ Método (b) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders*) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (MEF) (N/mm)
10,0	0,95	1	101,6x11,1	205,07	261,95	195,53	188,19	189,65
	1,55			272,90	334,60	263,42	248,27	249,06
	2,25			328,68	403,14	316,14	297,85	299,16
	3,00			405,33	465,50	390,94	368,29	369,81
	0,95	2		392,15	666,70	382,46	368,81	376,86
	1,55			477,57	851,60	461,90	444,94	455,67
	2,25			577,26	1026,03	554,94	534,30	546,96
	3,00			689,66	1184,76	660,86	636,11	650,05
	0,95	1	76x18	321,54	459,28	304,81	287,57	288,76
	1,55			413,29	586,65	386,09	363,92	366,46
	2,25			522,58	706,82	483,44	455,50	459,03
	3,00			645,81	816,16	594,44	559,96	564,22
0,95	2	610,51		1141,37	584,07	563,38	575,31	
1,55		801,12		1457,91	773,46	731,13	737,00	

	2,25			920,62	1756,54	880,79	831,55	840,58
	3,00			1049,47	2028,27	997,15	940,76	951,98

As Figuras (42) a (45) ilustram os gráficos da razão entre as cargas críticas de flambagem determinadas pelos métodos analíticos e pelo método dos elementos finitos ( $N_{x,cr}(\text{analítico})/N_{x,cr}(\text{MEF})$ ) para as configurações dos costados analisados com diâmetro igual a 10,0 m.

A Figura (42) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 10,0 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 101,6x11,1 e seção STF\_01.

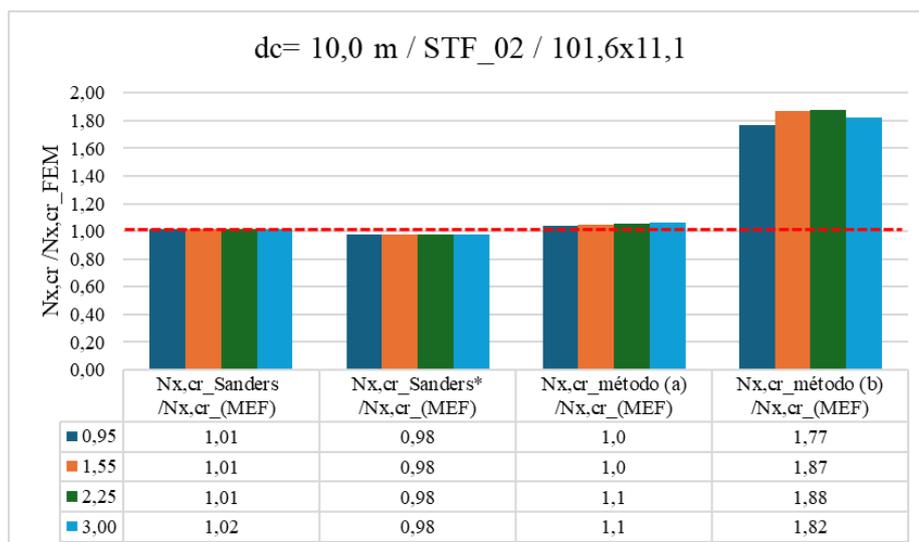
Figura 42 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m



Fonte: Autor

A Figura (43) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 10,0 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 101,6x11,1 e seção STF\_02.

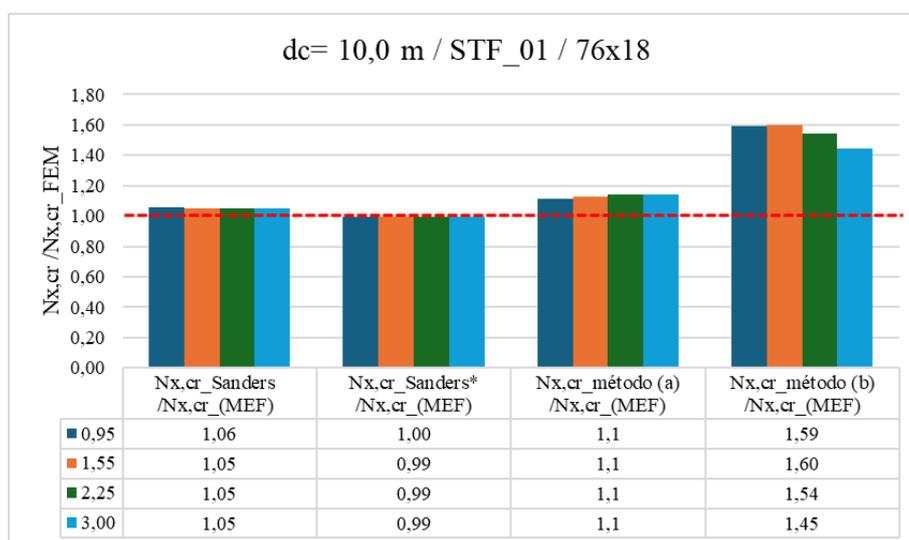
Figura 43 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m



Fonte: Autor

A Figura (44) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 10,0 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 76x18 e seção STF\_01.

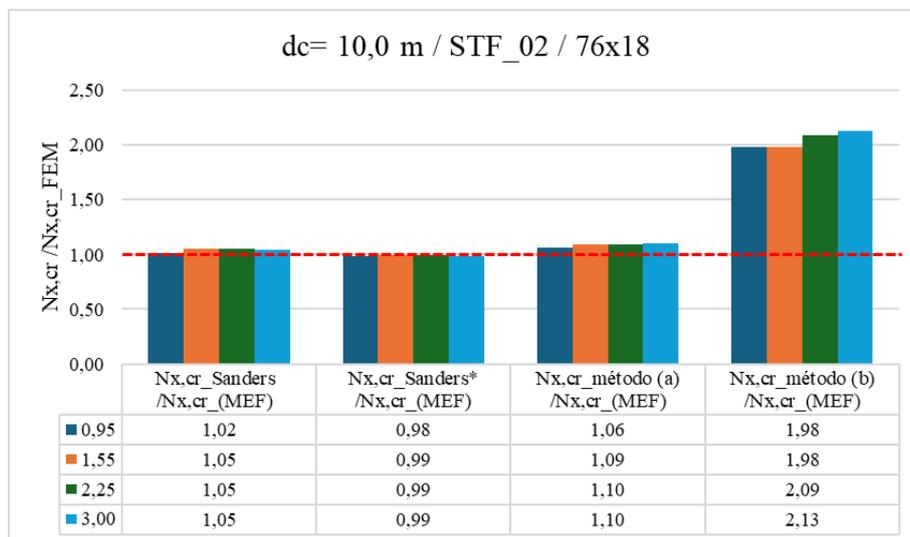
Figura 44 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m



Fonte: Autor

A Figura (45) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 10,0 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 76x18 e seção STF\_02.

Figura 45 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 10,0 m



Fonte: Autor

As Figuras (42) a (45) mostram que os resultados das razões do modelo de Sanders e o método (a) convergiram para 1 em todos os modelos de costados de silos com 10,0 m de diâmetro, indicando precisão nas condições analisadas. O modo de flambagem do modelo SL10, estudado no item 5.1.2, foi semelhante à instabilidade de casca ortotrópica. Em Iwicki *et al.* (2017), comportamento semelhante foi observado para os silos na faixa 3 (range 3), onde número de meias-ondas na direção circunferencial foi menor do que o número de montantes e  $d_s \leq d_{s,máx}$ .

As análises realizadas com os modelos de Sanders, tanto para pequenas deformações e rotações moderadas quanto para grandes rotações, apresentaram resultados que convergiram para razões próximas de 1. Isso indica que, para o modelo de silo analisado, as grandes rotações não causam alterações significativas nos resultados.

Em relação aos resultados obtidos com o método (b), observou-se que, em todos os modelos analisados, a razão  $N_{x,cr}(\text{analítico})/N_{x,cr}(\text{MEF})$  foi superior a 1. O modelo de silo SL10,0 apresentou espaçamentos entre montantes ( $d_s$ ) superiores ao espaçamento máximo ( $d_{s,máx}$ ). Por essa razão, o método mais adequado, segundo as recomendações da EN 1993-4-1:2007:A1(2017), seria o método (b); entretanto, isso não se concretizou. O coeficiente  $k_{d\theta}$  da equação utilizada para determinar o espaçamento máximo entre montantes é um parâmetro

que influencia essas análises e pode variar em função do perfil de corrugação da chapa. A avaliação do espaçamento máximo entre montantes recomendada pelo Eurocode é calculada para um valor fixo do coeficiente  $k_{d\theta}$  ( $k_{d\theta} = 9,1$ ), e, portanto, não abrange todos os perfis de corrugação. Isso pode levar a avaliações sobre o método a ser empregado que divergirem das análises em elementos finitos. Em Sondej *et al.* (2015), foram realizados cálculos em elementos finitos para determinar os valores desses coeficientes para dois perfis de corrugação: um com comprimento de onda igual a 76 mm e distância crista a crista igual a 18 mm, e o outro com comprimento de onda igual a 119 mm e distância crista a crista igual a 10 mm. Os autores encontraram  $k_{d\theta}$  igual a 9,3 para o primeiro perfil e  $k_{d\theta}$  igual a 11,6 para o segundo.

Além disso, a diferença encontrada entre os resultados das razões entre o método (b) e o MEF é influenciada pelo valor elevado do coeficiente K proposto pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017). O comprimento de meia-onda de flambagem usado no cálculo da rigidez à flexão K do método (b), é menor do que os comprimentos de meia-onda na direção circunferenciais observados nas análises de flambagem linear do silo SL10,0 no item 5.1.2.

### 5.2.3 Análises do modelo SL14550

A Tabela (10) apresenta os resultados das cargas críticas de flambagem para os modelos de costado com diâmetro de 14,55 m, calculadas pelos métodos (a) e (b), bem como pelos métodos de Sanders, tanto para pequenas deformações e rotações moderadas quanto para pequenas rotações não lineares. Respectivamente, esses métodos foram nomeados como  $N_{x,cr}$  Método (a),  $N_{x,cr}$  Método (b),  $N_{x,cr}$  (Sanders) e  $N_{x,cr}$  (Sanders\*). Pelo método dos elementos finitos, a carga crítica de flambagem foi denominada  $N_{x,cr}$  (MEF).

Tabela 10 Carga crítica de flambagem do costado com diâmetro 14,55 m

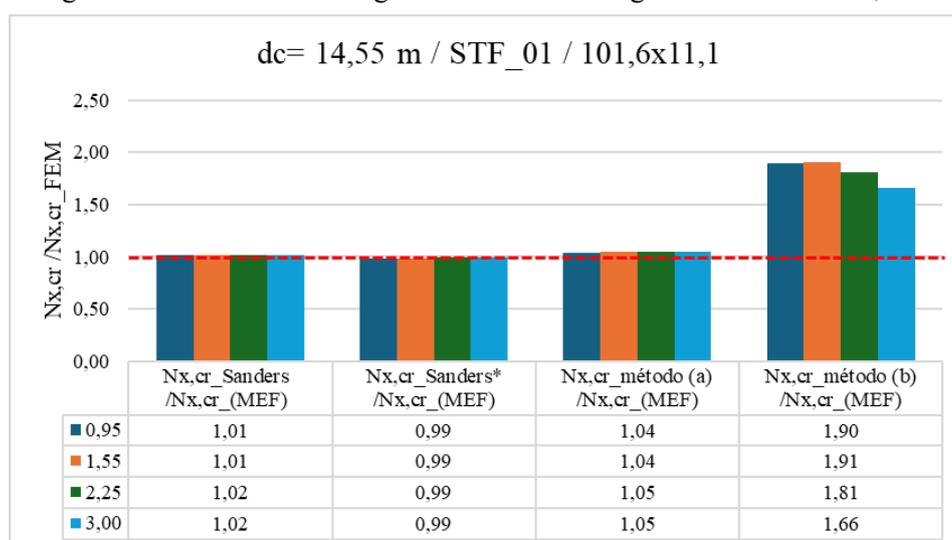
$d_c$ (m)	t (mm)	Seção	Perfil de corrugação	$N_{x,cr}$ Método (a) (N/mm)	$N_{x,cr}$ Método (b) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (Sanders*) (N/mm)	$N_{x,cr}$ (MEF) (N/mm)
14,55	0,95	1	101,6x11,1	140,98	258,25	137,83	134,24	135,952
	1,55			180,17	329,87	175,20	170,57	172,762
	2,25			229,55	397,43	222,81	216,90	219,393
	3,00			289,62	458,92	281,60	274,11	276,588
	0,95	2		274,88	657,27	270,52	265,56	279,05
	1,55			346,09	839,55	339,02	332,60	348,23

2,25			424,86	1011,52	417,63	406,89	419,00
3,00			486,97	1168,00	478,29	465,87	478,63
0,95	1	76x18	235,17	443,34	229,15	220,80	222,46
1,55			287,70	566,29	277,96	267,63	270,14
2,25			350,36	682,28	336,55	323,92	327,09
3,00			422,55	787,83	404,86	389,59	393,19
0,95	2		427,08	1101,75	418,37	408,35	419,66
1,55			536,16	1407,30	521,90	508,83	523,37
2,25			658,50	1695,55	637,85	621,51	638,79
3,00			775,44	1957,86	756,67	729,13	741,11

As Figuras (46) a (49) ilustram os gráficos da razão entre as cargas críticas de flambagem determinadas pelos métodos analíticos e pelo método dos elementos finitos ( $N_{x,cr}(\text{analítico})/N_{x,cr}(\text{MEF})$ ) para as configurações dos costados analisados com diâmetro igual a 10,0 m.

A Figura (46) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 10,0 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 101,6x11,1 e seção STF\_01.

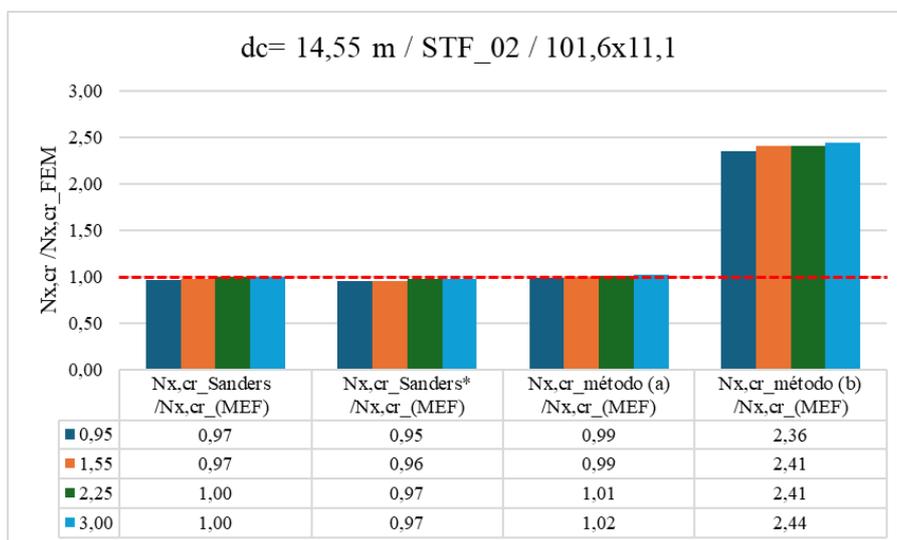
Figura 46 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m



Fonte: Autor

A Figura (47) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 14,55 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 101,6x11,1 e seção STF\_02.

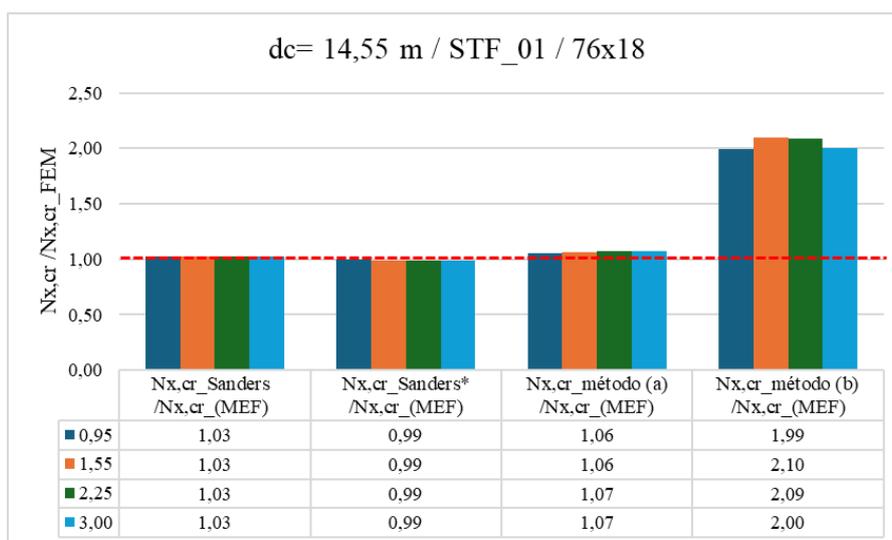
Figura 47 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m



Fonte: Autor

A Figura (48) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 14,55 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 76x16 e seção STF\_01.

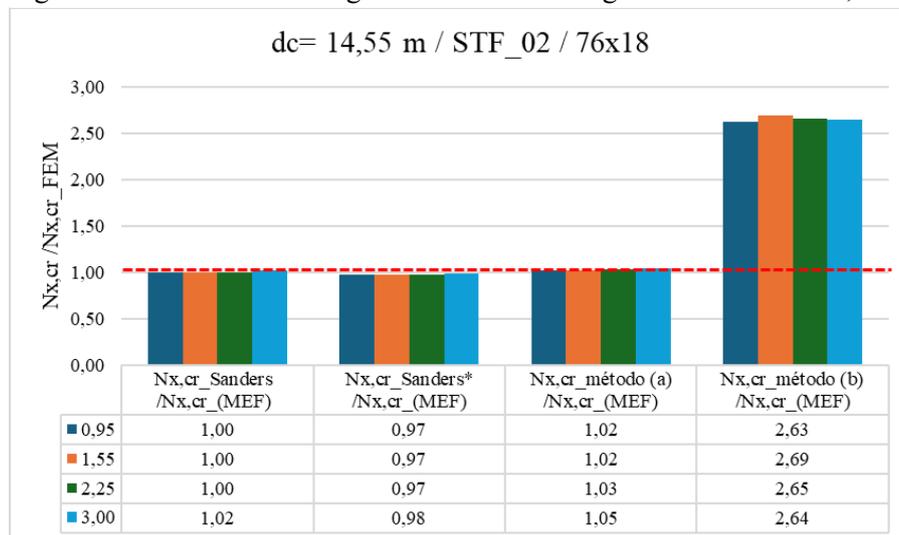
Figura 48 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55



Fonte: Autor

A Figura (49) ilustra a razão entre as cargas críticas calculadas por modelos analíticos (Sanders e EN 1993-4-1) e numéricos (MEF) para o silo de 14,55 m de diâmetro, apresentando um perfil de corrugação de 76x16 e seção STF\_02.

Figura 49 Razão entre as cargas críticas de flambagem costado com 14,55 m



Fonte: Autor

As Figuras (46) a (49) mostram que os resultados das razões do modelo de Sanders e o método (a) convergiram para 1 em todos os modelos de costados de silos com 14,55 m de diâmetro, indicando precisão nas condições analisadas. O modo de flambagem do modelo SL14,55, estudado no item 6.1.2, foi semelhante à instabilidade de casca ortotrópica. Em Iwicki *et al.* (2017), comportamento semelhante foi observado para os silos na faixa 3 (range 3), onde o número de meias-ondas na direção circunferencial foi menor do que o número de montantes e  $d_s \leq d_{s,máx}$ .

As análises realizadas dos modelos de silos SL14,55 com o método de Sanders, tanto para pequenas deformações e rotações moderadas quanto para grandes rotações, apresentaram resultados que convergiram para razões próximas de 1. Isso indica que, para o modelo de silo analisado, as grandes rotações não causam alterações significativas nos resultados.

Em relação aos resultados obtidos com o método (b), observou-se que, em todos os modelos analisados, a razões  $N_{x,cr}(analítico)/N_{x,cr}(MEF)$  foi superior a 1. A diferença encontrada entre os resultados das razões entre o método (b) e o MEF foi causada pelo valor elevado do coeficiente K proposto pela norma EN 1993-4-1:2007:A1(2017). O comprimento de meia-onda de flambagem usado no cálculo da rigidez à flexão K, no método (b), é menor do

que os comprimentos de meia-onda na direção circunferenciais observados nas análises de flambagem linear do silo SL14,55 no item 5.1.3.

### 5.3 Instabilidade global do silo SL535

A seguir, são apresentados os resultados das análises de estabilidade linear (LBA) do modelo SL535, realizadas no software SCIA Engineer V25, com o emprego de elementos de casca ortotrópica e das análises de flambagem linear realizadas para duas combinações de carregamento. Na primeira, denominada combinação 01, atuaram apenas as pressões de atrito; na segunda, chamada de combinação 02, atuaram as pressões horizontais e de atrito.

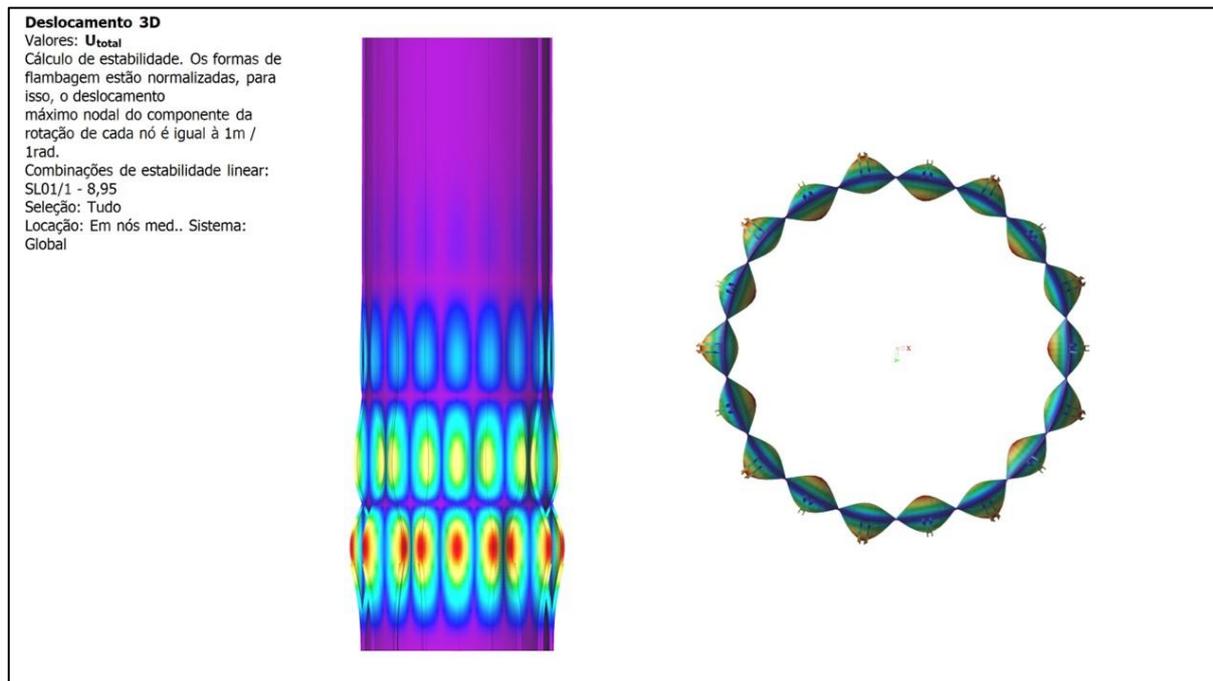
O espaçamento entre montantes ( $d_s$ ) desse silo foi igual a 934 mm, enquanto o espaçamento máximo ( $d_{s,máx}$ ) foi igual a 1168,85 mm. Portanto, para essa condição, a norma recomenda, para calcular a carga crítica, o emprego do método (a). Esse método é baseado na teoria de estabilidade de casca ortotrópica.

No modelo analisado, ilustrado pela Figura (50), é apresentada a análise de estabilidade linear para a combinação 01, na qual foram consideradas apenas as pressões de atrito. A figura também ilustra o modo de flambagem correspondente ao menor fator de carga, o qual foi de 8,95. Iwicki *et al.* (2019), ao realizarem análises de flambagem linear deste modelo de silo, tanto em 3D quanto em modelos de casca ortotrópica, obtiveram fatores de carga iguais a 9,33 e 8,33, respectivamente, resultando em uma diferença de 10% entre esses valores.

O modo de flambagem do modelo SL535 é caracterizado pela deformação de todos os montantes, o que implica que o número de meias-ondas na direção circunferencial é igual ao número de montantes, totalizando 18. Na direção meridional, o número de meias-onda foi igual a 4. Esse modo de flambagem também foi observado em Iwicki *et al.* (2017) na faixa 2 (range 2), para o silo de mesmo diâmetro.

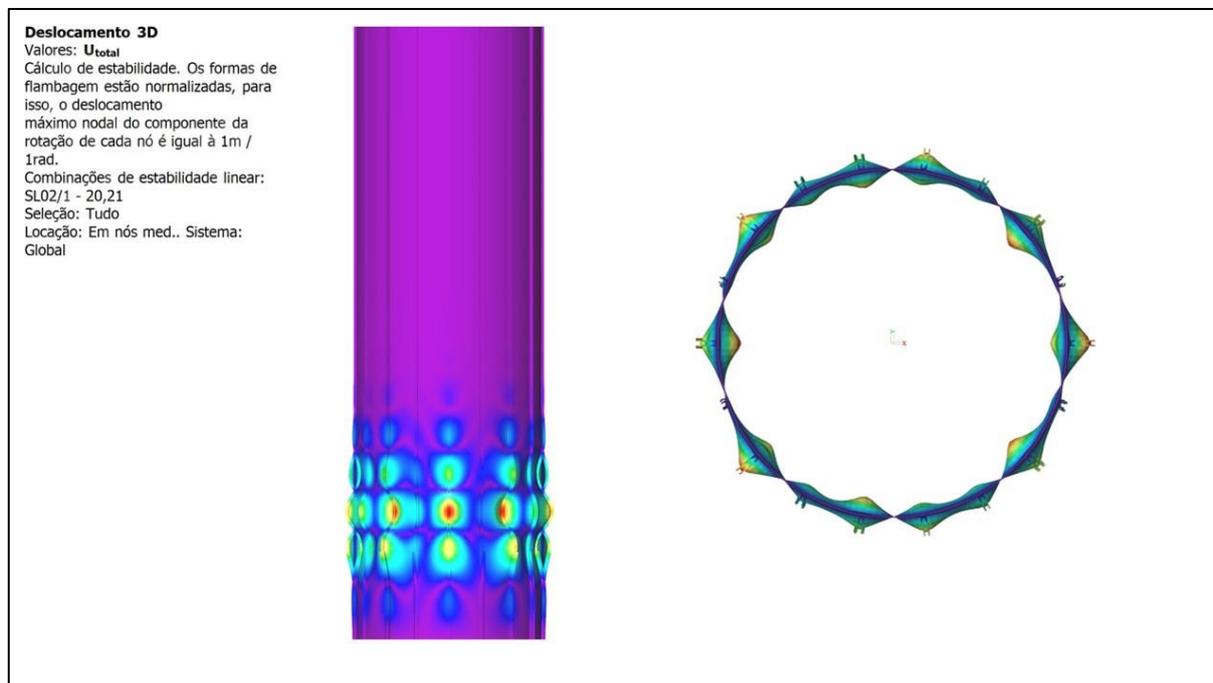
A Figura (51) apresenta o resultado da análise de estabilidade linear (LBA) do modelo SL535, realizada no software SCIA Engineer V25. Neste modelo, foram consideradas as pressões horizontais e de atrito. A Figura (51) ilustra o modo de flambagem correspondente ao menor fator de carga, o qual foi de 20,21. Em Iwicki *et al.* (2019), o resultado das análises de flambagem linear do modelo de silo SL535, considerando a atuação das pressões horizontais e de atrito, obteve fator de carga igual a 20,5. Ao comparar os resultados das análises de estabilidade linear da Figura (50) e (51), observa-se que a pressão horizontal promoveu um aumento nos valores dos fatores de carga de 2,25 vezes.

Figura 50 Análise de flambagem linear do modelo SL535 (Pw)



Fonte: Autor

Figura 51 Análise de flambagem linear do modelo SL535 (Pw+Ph)



Fonte: Autor

A Tabela (11) mostra os esforços de compressão e as cargas críticas de flambagem calculadas pelos métodos (a) e Sanders. O método (a), recomendado pela norma europeia, gerou as maiores cargas críticas, enquanto o método de Sanders, que considera rotações não lineares,

apresentou os menores valores. No cálculo da carga crítica pelo método (a), o fator de redução ( $\alpha_x = 0,80$ ), que considera as imperfeições geométricas, não foi incluído, pois os valores foram comparados a modelos perfeitos.

Tabela 11 Carga crítica de flambagem do silo

<b>Anel</b>	<b><math>n_{zSk}</math> (kN)</b>	<b>Perfil</b>	<b><math>N_{x,cr}</math> Método (a) (kN)</b>	<b><math>N_{x,cr}</math> (Sanders) (kN)</b>	<b><math>N_{x,cr}</math> (Sanders*) (kN)</b>
A1	1,00	C1.5	554,63	493,90	446,19
A2	3,42		554,63	493,90	446,19
A3	8,31		554,63	493,90	446,19
A4	13,81	C2.0	637,88	571,15	516,60
A5	19,97		637,88	571,15	516,60
A6	27,26		637,88	571,15	516,60
A7	34,37		637,88	571,15	516,60
A8	42,62		637,88	571,15	516,60
A9	52,27		637,88	571,15	516,60
A10	60,19	C2.5	714,28	647,50	586,37
A11	69,46		714,28	647,50	586,37
A12	78,13		714,28	647,50	586,37
A13	87,83	C4.0	933,92	867,01	787,82
A14	96,18		933,92	867,01	787,82
A15	106,44		933,92	867,01	787,82
A16	115,28		933,92	867,01	787,82
A17	124,95		933,92	867,01	787,82
A18	134,51		933,92	867,01	787,82
A19	144,00	V4.0	1299,19	1292,83	1181,41
A20	153,24		1299,19	1292,83	1181,41
A21	160,92		1299,19	1292,83	1181,41

Na Tabela (11) são apresentados os valores dos fatores de carga ( $\alpha_{cr}$ ) calculados pelos métodos (a) e de Sanders. O fator de carga ( $\alpha_{cr} = N_{x,cr}/n_{z,Sk}$ ) foi definido como a razão entre a carga crítica de flambagem e os esforços de compressão atuantes nos montantes. Os menores fatores de carga cálculos com o método (a) e pelo método de Sanders, foram respectivamente,

6,94, 6,45 e 5,85. Esses valores foram encontrados na posição do anel 18, onde estava posicionado o perfil C.4,0. O valor do fator de carga encontrado com o modelo de Sanders, que considera rotações não lineares, foi semelhante ao obtido por Iwicki et al. (2019) para uma imperfeição inicial de 5,0 mm em análises GNIA do mesmo silo, considerando apenas a pressão de atrito.

A razão entre os fatores de carga calculados pelos métodos analíticos (método (a) e de Sanders) e pelo método numérico (MEF) foi de 0,78, 0,72 e 0,65, respectivamente. Sondej *et al.* (2015) ao analisarem a estabilidade de silos com diâmetros de 5,35, 14,71 e 29,41 m, concluíram que os fatores de carga calculados pelo método (a), conforma a norma Eurocode, foram entre 30 a 50% menores que os calculados por elementos finitos.

Tabela 12 Valores dos fatores de carga do modelo SL535

Anel	Perfil	$\alpha_{cr}$ método (a)	$\alpha_{cr}$ Sanders	$\alpha_{cr}$ Sanders*
A1	C1.5	554,63	493,90	446,19
A2		162,17	144,42	130,46
A3		66,73	59,42	53,68
A4	C2.0	46,19	41,36	37,41
A5		31,94	28,60	25,87
A6		23,40	20,95	18,95
A7		18,56	16,62	15,03
A8		14,97	13,40	12,12
A9		12,20	10,93	9,88
A10	C2.5	11,87	10,76	9,74
A11		10,28	9,32	8,44
A12		9,14	8,29	7,51
A13	C4.0	10,63	9,87	8,97
A14		9,71	9,01	8,19
A15		8,77	8,15	7,40
A16		8,10	7,52	6,83
A17		7,47	6,94	6,31
A18		6,94	6,45	5,86

A19	V4.0	9,02	8,98	8,20
A20		8,48	8,44	7,71
A21		8,07	8,03	7,34
<b>Valor mínimo =</b>		<b>6,94</b>	<b>6,45</b>	<b>5,86</b>

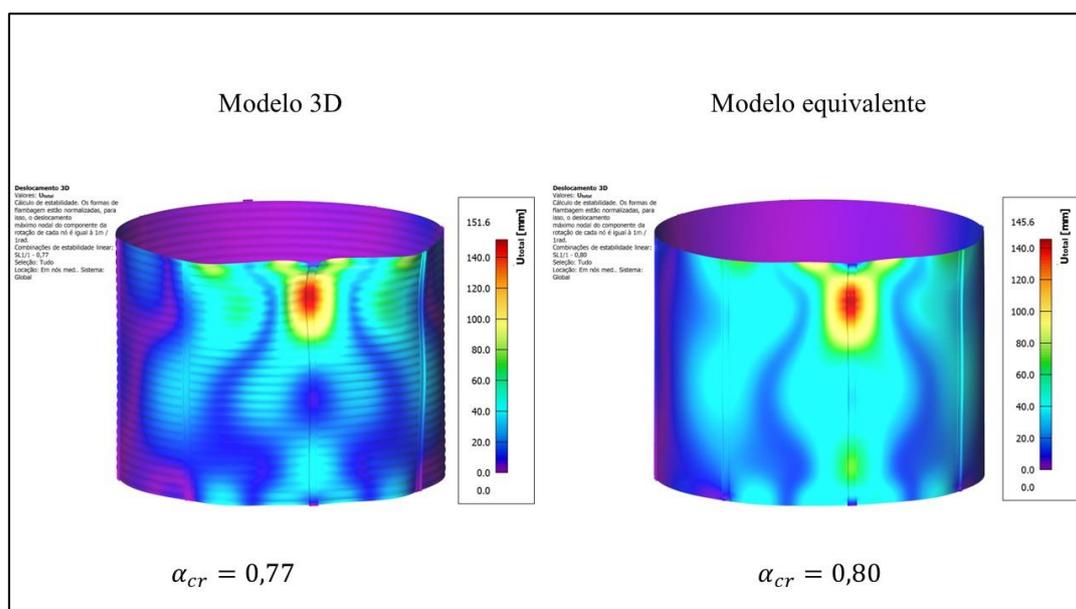
## 5.4 Análise de instabilidade do silo ensaiado por Rodrigues (2019)

### 5.4.1 Validação do modelo de casca ortotrópica

A seguir, apresenta-se a validação do modelo de casca ortotrópica com base no modelo tridimensional, ambos desenvolvidos utilizando elementos finitos. Foi realizada uma análise comparativa em relação aos fatores de carga produzidos pela análise de flambagem linear, bem como em relação aos deslocamentos correspondentes.

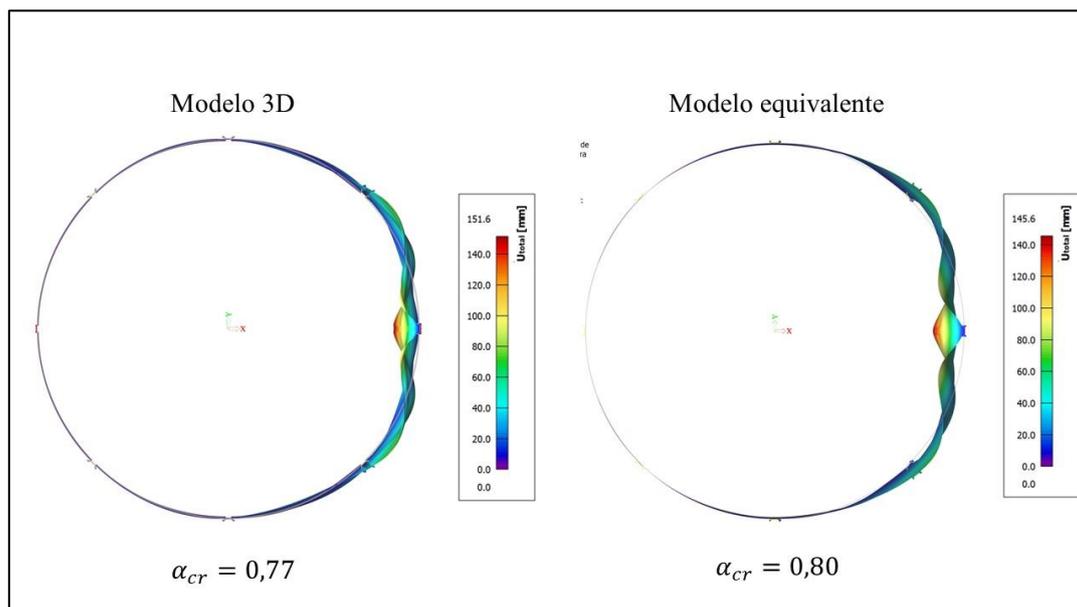
As Figuras (52) e (53) apresentam os modos de flambagem tanto do modelo 3D quanto do modelo equivalente, juntamente com os menores valores dos fatores de carga. Ao comparar os resultados de ambos os modelos, observou-se que a diferença entre os deslocamentos totais ( $U_{total}$ ) foi de 4,12%, enquanto a diferença entre os valores dos fatores de carga foi de 3,90%. Iwicki *et al.* (2019) também realizaram uma comparação dos fatores de carga entre modelos equivalentes e o modelo 3D, encontrando uma diferença que variava entre 7,6 e 10%.

Figura 52 Modo de flambagem (LBA) dos modelos 3D e equivalente



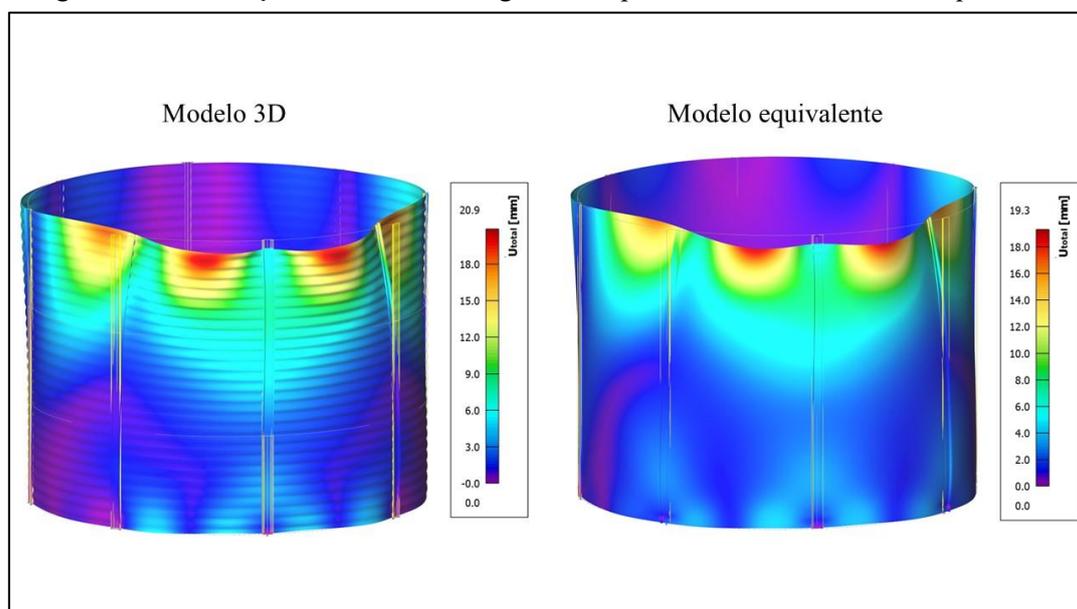
Fonte: Autor

Figura 53 Modos de flambagem (LBA) dos modelos 3D e equivalente (vista superior)



Fonte: Autor

Figura 54 Deformações devido ao carregamento aplicado dos modelos 3D e equivalente



Fonte: Autor

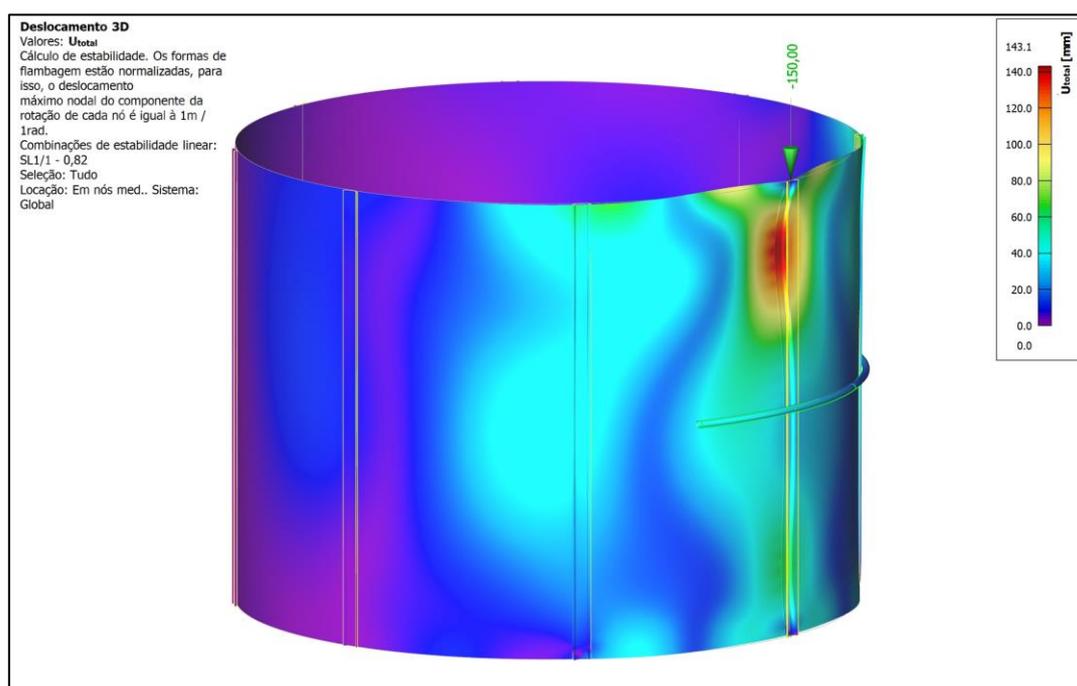
A Figura (54) apresenta os deslocamentos totais do costado calculados utilizando análises linear dos esforços para o carregamento aplicado de 150 kN, tanto do modelo 3D quanto do modelo equivalente. Ao comparar os resultados de ambos os modelos, observou-se que a diferença entre os deslocamentos totais ( $U_{total}$ ) foi de 8,29%. Iwicki et al. (2019) também

realizaram uma comparação dos deslocamentos da parede entre modelos equivalentes e o modelo 3D, encontrando uma diferença que variava entre 1,50 e 1,95%.

#### 5.4.2 Análise de flambagem linear do silo com anéis de vento

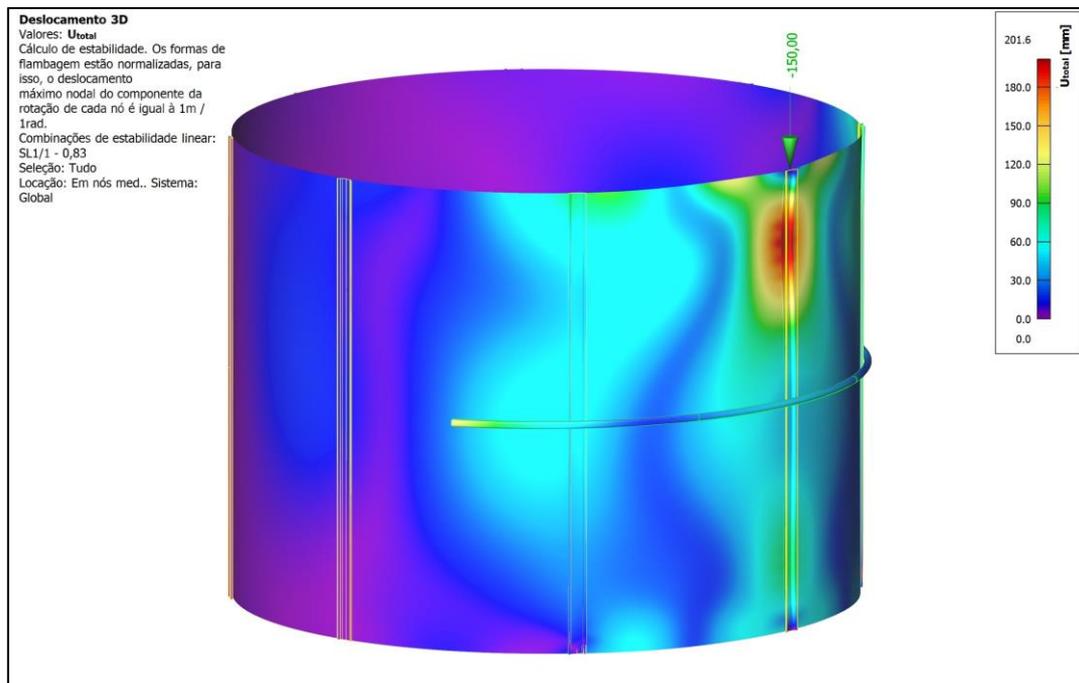
A seguir, nas Figuras (55) a (58), são ilustrados os resultados das análises de estabilidade linear dos modelos equivalentes de silos com anéis de vento. Observa-se que a posição da aplicação da carga não gerou resultados significativos, conforme demonstrado pelos valores dos fatores de carga produzidos na análise de flambagem linear, que foram 0,82, 0,83, 0,84 e 0,82, respectivamente, para as posições STF01, STF02, STF03 e STF04. Em Rodrigues (2019), ao realizar ensaios experimentais, foi observado que não houve uma relação entre as cargas encontradas e a presença de cobrejunta e do anel de vento. Além disso, foi constatado que todas as cargas apresentaram valores relativamente próximos, com coeficiente de variação em torno de 10%.

Figura 55 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF1



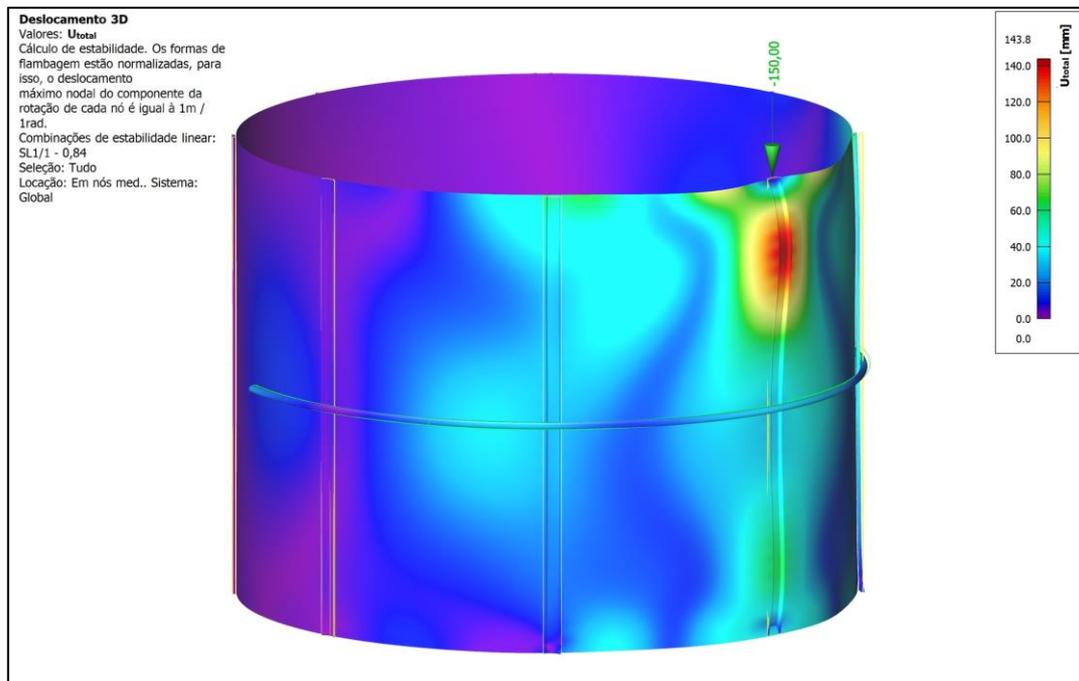
Fonte: Autor

Figura 56 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF2



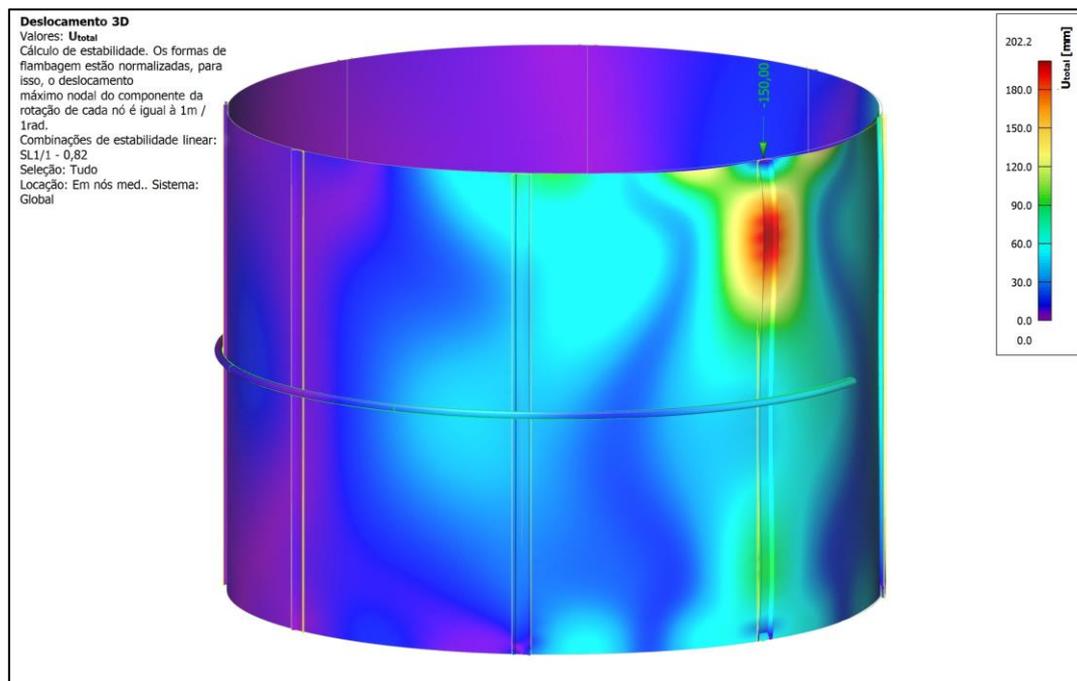
Fonte: Autor

Figura 57 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF3



Fonte: Autor

Figura 58 Modo de flambagem (LBA) do silo com anel de vento para a carga aplicada no STF4



Fonte: Autor

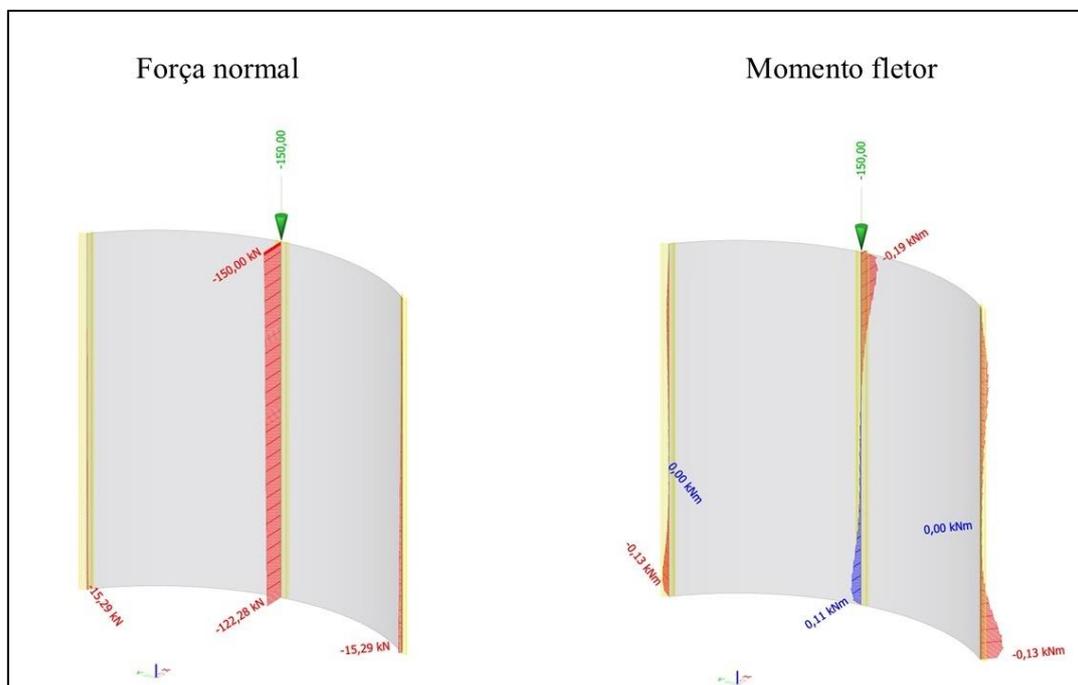
Nas Figuras (52), e (55) a (58), são apresentados os modos de flambagem identificados para cada posição em que o carregamento foi aplicado. Observa-se que as maiores deformações ocorreram na região superior dos montantes, tanto nos modelos simulados com anéis de vento quanto naqueles sem esse reforço.

Nas Figuras (59) e (60), é evidente que, na região superior dos montantes, onde foram registradas as maiores deformações, também se verificaram os maiores valores dos esforços axial e de flexão. Isso justifica as maiores deformações observadas nos modelos. Além disso, a partir dessas imagens, nota-se que os esforços normais do modelo diminuíram ao longo da altura, variando de 150 a 120 kN, com o menor valor registrado próximo à base dos montantes. Essa redução pode ser explicada pelo fato de que a chapa absorveu parte dos esforços aplicados ao montante ensaiado e os transmitiu para os montantes adjacentes.

No caso do silo com anéis de vento, a presença desses elementos não promoveu resultados significativos nos valores dos fatores de carga. Para compreender o motivo o qual os anéis de vento não contribuírem com o aumento da estabilidade, nas Figuras (59) e (60) é ilustrado o diagrama de momentos fletores atuantes nos montantes no qual a carga foi aplicada. A análise revelou que, próximo à metade da altura do silo, ocorreu uma inflexão no diagrama de momento fletor, indicando um ponto de momento zero com pequenos deslocamentos. Como

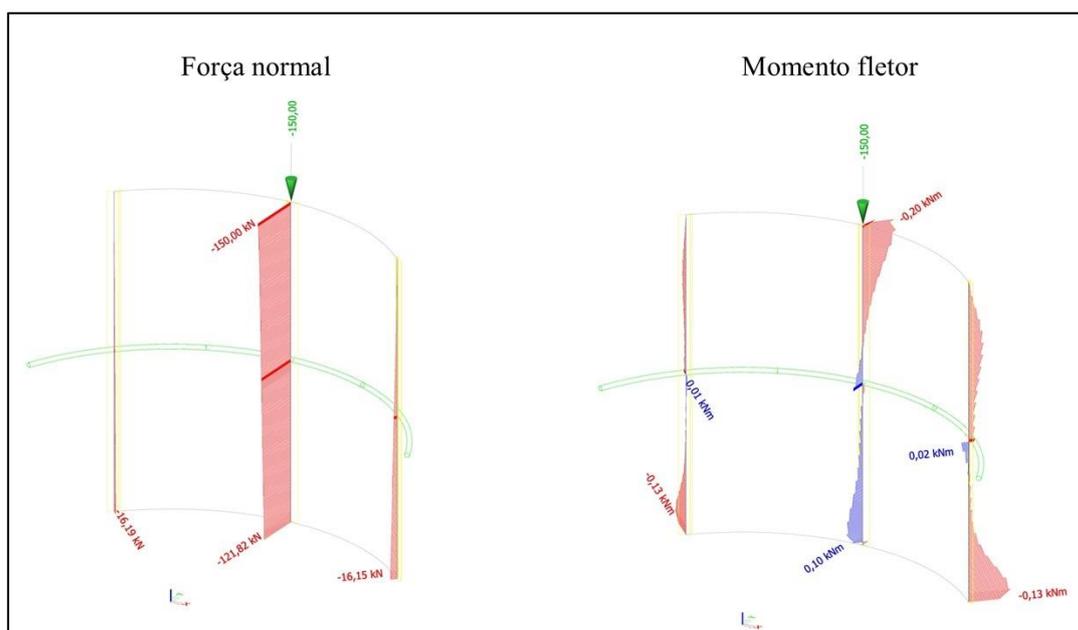
os anéis de vento estavam nessa região, eles não contribuíram com o aumento da estabilidade. Para que contribuíssem, os anéis deveriam estar onde os deslocamentos fossem maiores, aumentando assim a rigidez e estabilidade do modelo.

Figura 59 Esforços atuantes nos montantes dos modelos sem anel de vento



Fonte: Autor

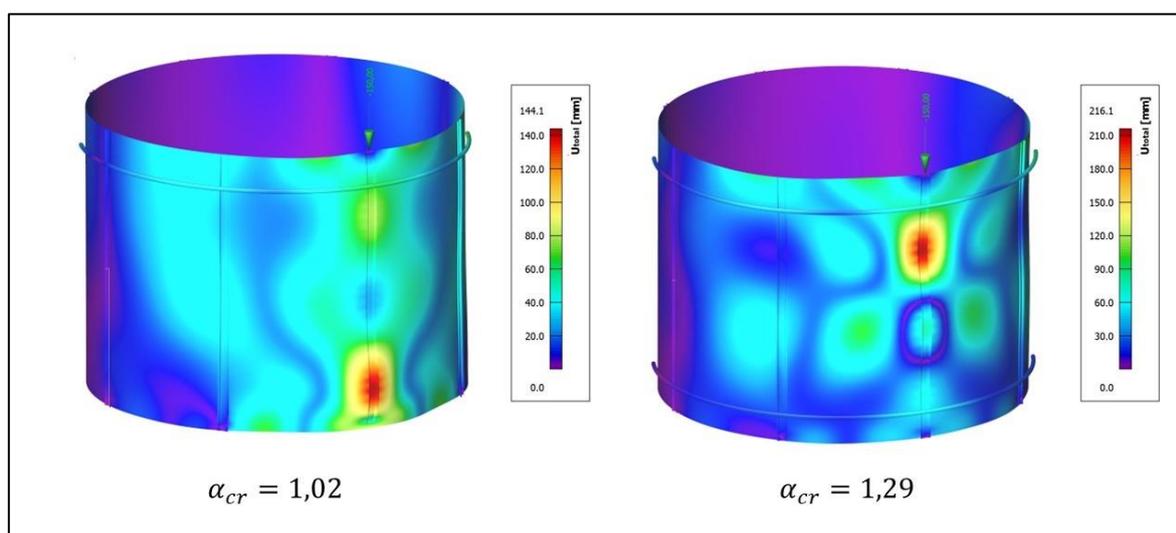
Figura 60 Esforços atuantes nos montantes dos modelos com anel de vento



Fonte: Autor

Para demonstrar o efeito dos anéis de vento reposicionados no aumento da estabilidade, foram empregados anéis de vento nas posições onde ocorreram os maiores deslocamentos e momentos fletores. A Figura (61) apresenta os resultados das análises de estabilidade linear dos modelos com os anéis de vento reposicionados. No modelo à esquerda, no qual consta um anel de vento na parte superior do silo, o fator de carga foi igual a 1,02, enquanto no modelo à direita, onde constam dois anéis de vento, um localizado na parte superior e outro na inferior, o fator de carga foi igual a 1,29. Ao comparar os resultados dessas análises com o modelo sem anéis de vento da Figura (52), observa-se que o primeiro modelo foi 27,5%, enquanto o segundo foi 61,25%.

Figura 61 Análise de flambagem linear do modelo com anéis de vento reposicionados



Fonte: Autor

#### 5.4.3 Resistência à instabilidade dos montantes

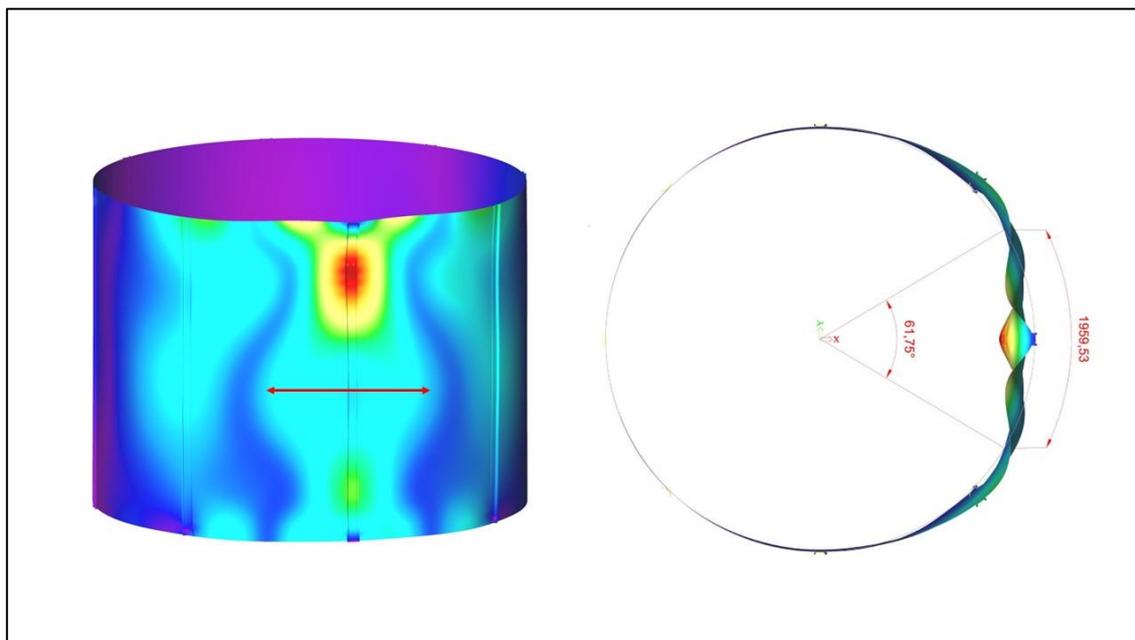
A seguir, são apresentados os resultados do cálculo da rigidez à flexão da chapa corrugada do modelo de silo analisado. Na Tabela (13), estão ilustrados os valores da rigidez à flexão  $K$  calculados utilizando a equação (38) da norma europeia EN 1993-4-1:2007:A1(2017) e pelo método dos elementos finitos.

Tabela 13 Valores da rigidez à flexão da chapa corrugada

K (kN/cm) Rodrigues (2019)	K (kN/cm) ECB+01	K (kN/cm) ECB+02	K (kN/cm) MEF 01	K (kN/cm) MEF 02
0,0256	0,0236	0,0742	0,0253	0,0821

Na Figura (62), é ilustrado o comprimento de meia-onda do modo de flambagem calculado na análise de flambagem linear do silo modelado com elementos de casca ortotrópica, sem anéis de vento. Observa-se que, ao longo da altura se desenvolveram-se vários comprimentos de meia-onda na direção circunferencial; entretanto, foi empregado o maior comprimento, igual a 1959,53 mm. Esse comprimento de arco foi empregado no modelo ECB+02, portanto,  $2d_s = 1959,53 \text{ mm}$  ou  $d_s = 979,76 \text{ mm}$ . No modelo MEF02, o arco foi modelado com o comprimento  $2d_s$ , com o espaçamento entre montante tendo sido igual ao encontrado no modelo, ou seja, 1428,59 mm. Neste modelo, para que a deformação fosse semelhante à encontrada na LBA, foram aplicados apoios com deslocamentos iguais a zero. Na extremidade da meia-onda mostrada na Figura (62), os deslocamentos em z foram restringidos, conforme ilustrado na Figura (21).

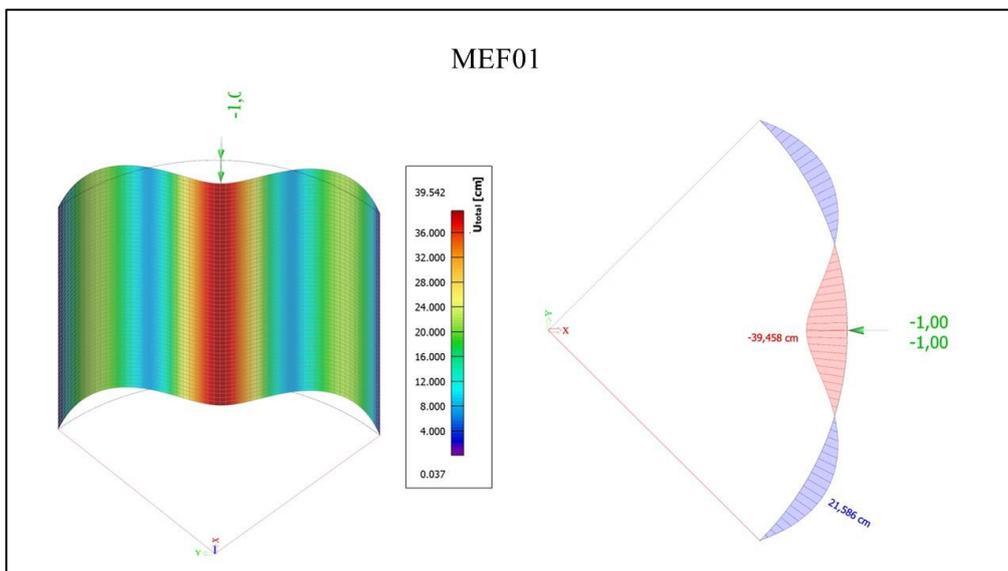
Figura 62 Comprimento do arco empregado no modelo ECB+02



Fonte: Autor

Na Figura (63), são apresentados os cálculos dos deslocamentos dos modelos MEF01 para o carregamento linear uniformemente distribuído igual a 1,0 kN/cm. Para esse modelo, o deslocamento na direção da aplicação da carga foi igual a 39,458 cm. Com a equação (84), determinou-se a rigidez à flexão da chapa, a qual foi igual a  $K = 1/39,458 = 0,0253 \text{ kN/cm}^2$ .

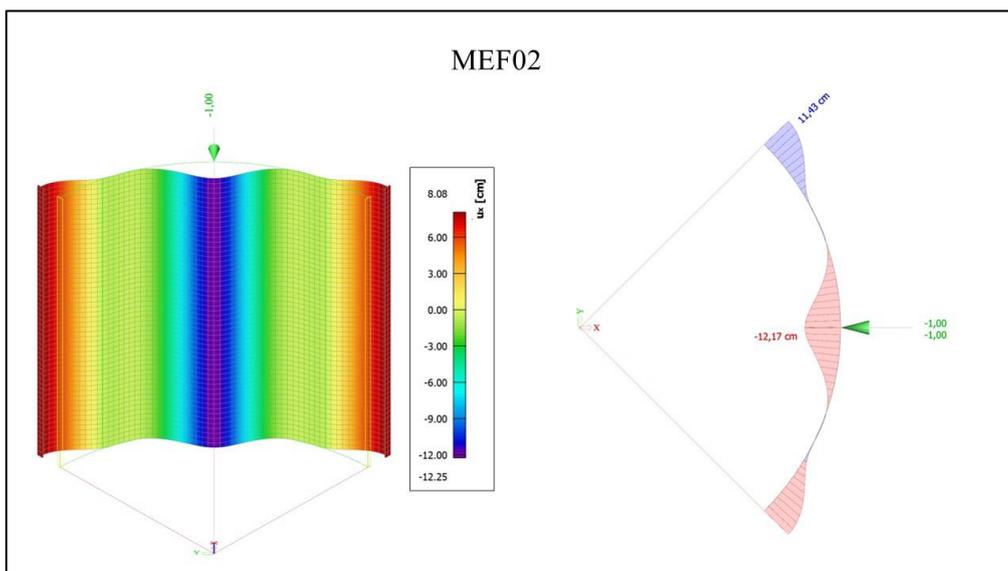
Figura 63 Cálculo dos deslocamentos do modelo MEF01



Fonte: Autor

Na Figura (64), são apresentados os cálculos dos deslocamentos do modelo MEF01 para o carregamento linear uniformemente distribuído igual a 1,0 kN/cm. Para esse modelo, o deslocamento na direção da aplicação da carga foi igual a 12,17 cm. Utilizando a equação (84), determinou-se a rigidez à flexão da chapa, a qual foi igual a  $K = 1/12,17 = 0,0821 \text{ kN/cm}^2$ .

Figura 64 Cálculo dos deslocamentos do modelo MEF02



Fonte: Autor

Na Tabela (13), a rigidez K calculada com o modelo de Rodrigues (2019) apresentou valores negativos. Comparado ao modelo MEF01, o módulo desse valor foi 1,18% maior. O modelo ECB+01 teve um valor de K 6,72% menor que o do modelo MEF01. Os valores de K calculados pelos modelos analíticos e numéricos, ECB+02 e MEF02, apresentaram os maiores valores de K. Os modelos ECB+01 e MEF01, os quais foram calculados conforme a metodologia empregada pela norma Eurocode, produziram valores menores em comparação com os modelos ECB+02 e MEF02. A rigidez da chapa corrugada é influenciada pelo comprimento de meia-onda na circunferência e pela condição de contorno aplicada. Durante a análise de flambagem linear do modelo de silo estudado, observa-se que os montantes próximos ao montante que foi aplicado a carga se deslocaram radialmente, conforme ilustrado na Figura (62). O mesmo comportamento foi observado por Iwicki *et al.* (2017) e (2019), para os silos que se encontram na faixa 2 (range 2). Para essa faixa, o modelo de seção do silo que obteve os melhores ajustes ao modelo completo foi o StripFix. Por essa razão, neste trabalho, optou-se por empregar a mesma condição de contorno do modelo StripFix na extremidade do modelo MEF02.

Rejowski *et al.* (2023), ao realizarem ensaios experimentais e simulações de silos metálicos de chapas corrugadas, observaram que o comprimento de meia-onda na direção circunferencial, tanto do modelo experimental quanto do modelo numérico, foi menor do que os comprimentos de meia-onda produzidos pelo modelo baseado na norma europeia. Os autores também observaram que o modo de flambagem, previsto pelo modelo da norma Eurocode, difere do encontrado na análise de flambagem linear.

A Tabela (14) apresenta os valores últimos da resistência à instabilidade medidos experimentalmente por Rodrigues (2019), além dos fatores de redução associados à flambagem global ( $\chi = N_{Exp}/P_y$ ).  $P_y$  é a força resistente ao escoamento ( $P_y = A_g f_y$ ) calculada em função de tensão de escoamento e área de seção transversal do montante.

Tabela 14 Cargas e fatores de redução experimental do modelo ensaiado por Rodrigues (2019)

Nº STF	N <sub>Exp</sub> (kN)	$\chi_{Exp}$
2	67,17	0,561
4	75,82	0,633
3	76,96	0,643
6	74,40	0,621
8	63,75	0,532

5	89,03	0,744
7	77,76	0,650
<b>Média</b>	<b>74,98</b>	<b>0,623</b>

A Tabela (15) apresenta os valores característicos ( $N_{c,Rk}$ ) e de projeto da resistência à instabilidade global dos montantes ( $N_{c,Rd}$ ), os valores das cargas críticas de flambagem elástica ( $N_{cr}$ ), assim como os valores dos fatores de redução associados à flambagem global ( $\chi$ ). Os valores da carga crítica foram calculados com o emprego da equação (38), onde foram empregados os valores do K que se encontram na Tabela (13). A resistência à instabilidade global foi calculada utilizando tanto o método descrito na norma brasileira NBR 14762:2010 quanto na norma europeia EN 1993-4-1:2007:A1(2017).

Ao analisar a Tabela (15), observa-se que os valores de carga crítica de flambagem elástica calculados com o coeficiente K do modelo ECB+02 foi 6,99% maior do que os resultados calculados na análise de flambagem linear (LBA) em elementos finitos. Já a carga crítica calculada com o coeficiente K do modelo MEF02 foi 12,54% maior que o encontrado na LBA.

Na Tabela (15), ao examinar a resistência à instabilidade calculada com base nos valores de carga crítica resultante da LBA, observa-se que o valor da resistência à instabilidade, determinado utilizando a NBR 14762:2010 foi 5,16% superior ao observado experimentalmente por Rodrigues (2019). Utilizando o método da EN 1993-4-1:2007:A1(2017), a diferença foi 0,84% inferior aos resultados observados experimentalmente por Rodrigues (2019). O valor de projeto da resistência à instabilidade, calculado pelo método da NBR 14762:2010, o qual é minorado pelo coeficiente igual a 1,2, previu 85,71% dos resultados experimentais, enquanto o método da EN 1993-4-1:2007:A1(2017) previu 71,42% dos resultados experimentais da Tabela (14) produzidos por Rodrigues (2019).

Tabela 15 Resistencia à instabilidade global dos montantes

Modelo	NBR 14762:2010				prEN 1993-4-1:2007/A1(2017)		
	$N_{cr}$ (kN)	$\chi_{NBR}$	$N_{c,Rk}$ (kN)	$N_{c,Rd}$ (kN)	$\chi_{EN}$	$N_{c,Rk}$ (kN)	$N_{c,Rd}$ (kN)
LBA ( $\alpha_{cr} = 0,8$ )	120,00	0,659	78,85	65,71	0,621	74,35	67,59
Rodrigues (2019)	75,41	0,515	61,6	51,33	0,490	48,66	44,24
ECB+01	72,41	0,501	59,93	49,94	0,477	57,09	51,90

ECB+02	128,39	0,677	81,03	67,53	0,638	76,33	69,39
MEF 01	74,97	0,513	61,36	51,13	0,488	58,43	53,12
MEF 02	135,05	0,690	82,61	68,84	0,649	77,76	70,69

## 6 CONCLUSÕES

- Para modelos de costados de silos com 4,55 m de diâmetro, o método b) foi mais preciso que o método a). Este último, baseado na teoria de Donnell-Mushtari-Vlasov, não é recomendada para análise de silos com pequenos diâmetros, por produzir resultados superestimados da carga crítica de flambagem;
- O silo com 10,0 m de diâmetro e chapa 101,6x11 teve espaçamentos entre montantes maiores do que o espaçamento máximo ( $d_s > d_{s,máx}$ ). Entretanto, nessa condição, o método b) não obteve resultados precisos, isso demonstra que o modelo para o cálculo da rigidez K sugerido pela norma EN precisa de ajustes;
- Os silos com diâmetros iguais a 10,0 e 14,55 m tiveram modos de flambagem semelhantes ao de casca ortotrópica, com o número de meias-ondas na direção circunferencial sendo inferior ao número de montantes;
- Entre os modelos analíticos empregados para analisar silos com diâmetros iguais a 4,55, 10,0 e 14,55 m, o modelo de Sanders para pequenas deformações e rotações não lineares foi o mais preciso;
- Para modelos com diâmetros de 10,0 e 14,55 m, os métodos de Sanders e o método a) do Eurocode produziram resultados semelhantes. No entanto, recomenda-se usar o método a) pela sua maior simplicidade;
- Ao aplicar os métodos a) e de Sanders ao modelo de silo SL535, verificou-se que o fator de carga produzido pelo método a) para o silo analisado foi 22,0% menor do que o fator de carga resultante das análises de flambagem linear em elementos finitos;
- As análises de flambagem linear em elementos finitos do modelo de silo SL535, mostraram que os fatores de carga na combinação 02 (pressões horizontais e de atrito) foram 2,25 vezes maiores do que na combinação 01 (apenas pressões de atrito);
- O modelo de casca ortotrópica utilizado para modelar o silo sem anéis de vento estudado por Rodrigues (2019), produziu resultados precisos quando comparados com as análises do modelo 3D.
- Ao conduzir análises de flambagem linear nos modelos de silos com anéis de vento, conforme estudado por Rodrigues (2019), verificou-se que a utilização desses elementos não resultou em aumento nos valores dos fatores de carga;

- A rigidez à flexão da chapa corrugada, calculada utilizando as equações recomendadas pela Eurocode e por Rodrigues (2019), resultou em cargas críticas de flambagem inferiores às encontradas pelo método dos elementos finitos.
- O método da norma europeia EN 1993-4-1:2007:A1(2017) empregado para calcular a resistência à instabilidade global dos montantes do silo estudado por Rodrigues (2019) foi mais preciso do que o método recomendado pela norma brasileira NBR 14762:2010.

## 7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para pesquisas futuras, sugere-se os seguintes temas:

- Realizar análises de estabilidade com não linearidade geométricas, de materiais e com imperfeições iniciais, para comparar com os valores experimentais de instabilidade global de painéis de silos com chapas corrugadas e reforçados com montantes;
- Avaliar numericamente e experimentalmente a influência da rigidez dos grãos no aumento da estabilidade dos silos com chapas corrugadas e reforçados com montantes;
- Para silos com espaçamento entre montantes inferiores ao espaçamento máximo (classificados pelo método (a)), avaliar quanto que a chapa corrugada contribui com a resistência à compressão juntamente com os montantes;
- Validar modelos para o cálculo dos fatores de redução associados à flambagem global de silos com chapas corrugadas e reforçados com montantes, com base em ensaios experimentais.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- BARUCH, M.; SINGER, J. Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydrostatic pressure. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 5, n. 1, p. 23-27, 1963.
- BLOCK, D. L.; CARD, M. F.; MIKULAS J. R., et al. Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. **National Aeronautics and Space Administration**, 1965.
- BODNER, S. R. General instability of a ring-stiffened, circular cylindrical shell under hydrostatic pressure. **Journal of Applied Mechanics**, v.24, n.2, p.269-277, 1957.
- BROLLIAR, R. H.; DICKSON, J. N. The general instability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression and lateral pressure. **National Aeronautics and Space Administration**, 1969.
- CARD, M.F.; JONES, R.M. Experimental and theoretical results for buckling of eccentrically stiffened cylinders. **National Aeronautics and Space Administration**, 1966.
- CEN - European Committee of Standardization. **EN 1993 - 4- 1: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 4-1: Silos**. Brussels: CEN, 2007b.
- CEN - European Committee of Standardization. **EN 1993 - 4- 1: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 4-1:A1 Silos**. Brussels: CEN, 2017.
- CEN - European Committee of Standardization. **prEN 1993 - 1- 6: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-6: Strength and Stability of Shell Structures**. Brussels: CEN, 2023.
- CEN - European Committee of Standardization. **prEN 1993 - 4- 1: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 4-1: Silos**. Brussels: CEN, 2024.
- CHEN, L.; ROTTER, J. M. (2012) Buckling of anchored cylindrical shells of uniform thickness under wind load. **Engineering Structures**, v.41, p.199-208, 2012.
- GAMBHIR, M.L. **Stability analysis and design of structures**. Springer Science & Business Media, 2013.
- HILBURGER, M. W. Buckling of thin-walled circular cylinders. **National Aeronautics and Space Administration**, 2020.

- HOTALA, E. **Buckling of cylindrical steel shell under local meridional load**. NSCC 2001 9th Nordic Steel Construction Conference, Mäkeläinen P, Kesti J et al.(eds). Helsinki, Finland. p.213-220, 2001.
- HOTALA, E. **Stability of cylindrical steel shells under local axial compression**. Proceedings “European Workshop on Thin-Walled Steel Structures. p. 26-27, 1996.
- HOTALA, E.; SKOTNY, L. Experimental investigations on the stability of stiffened cylindrical shells of steel silos. **Journal of Constructional Steel Research**, v.96, p.81-94, 2014.
- HOUGHTON, D. S.; JOHNS, D. J. A comparison of the characteristic equations in the theory of circular cylindrical shells. **Aeronautical Quarterly**, v. 12, n. 3, p. 228-236, 1961.
- IWICKI, P.; REJOWSKI, K.; TEJCHMAN, J. Simplified numerical model for global stability of corrugated silos with vertical stiffeners. **Journal of Constructional Steel Research**, v.138, p.93-116, 2017.
- IWICKI, P.; REJOWSKI, K.; TEJCHMAN, J. Determination of buckling strength of silos composed of corrugated walls and thin-walled columns using simplified wall segment models. **Thin-Walled Structures**, v.135, p.414-436, 2019.
- IWICKI, P.; SONDEJ, M.; TEJCHMAN, J. Application of linear buckling sensitivity analysis to economic design of cylindrical steel silos composed of corrugated sheets and columns. **Engineering Failure Analysis**, v.70, p. 105-121, 2016.
- IWICKI, P.; WÓJCIK, M.; TEJCHMAN, J. Failure of cylindrical steel silos composed of corrugated sheets and columns and repair methods using a sensitivity analysis. **Engineering Failure Analysis**, v. 18, n. 8, p. 2064-2083, 2011.
- JONES, R. M. **Buckling of bars, plates, and shells**. Bull Ridge Corporation, 2006.
- LOPES NETO, J. P.; NASCIMENTO, J. W. B.; FANK, M. Z. Forças verticais e de atrito em silos cilíndricos com fundo plano. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v.18, n.6, p.652–657, 2014.
- MARCINOWSKI, J. Flexural buckling resistance of stiffeners reinforcing wall of a steel silo. **Civil and Environmental Engineering Reports**. v.33, n.3, p. 89-98, 2023.
- MUSA, A. E. S.; AL-SHUGAA, M. A.; AL-GAHTANI, H. J. An equivalent imperfection-based FE simulation of the stability of dented cylindrical shells accounting for unintended

- imperfections. **Thin-Walled Structures**, v.158, n.107159, 2021.
- NEMETH, M. P. Buckling analysis for stiffened anisotropic circular cylinders based on Sanders nonlinear shell theory. **National Aeronautics and Space Administration**, 2014.
- REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade estrutural**. Portugal: McGraw-Hill, 2001.
- REJOWSKI, K.; IWICKI, P.; TEJCHMAN, J.; WÓJCIK, M. Buckling resistance of a metal column in a corrugated sheet silo-experiments and non-linear stability calculations. **Thin-Walled Structures**, v.182, 110206, 2023.
- RODRIGUES, A. C. A. **Estudo da instabilidade das colunas (montantes) de silos metálicos cilíndricos de chapas onduladas**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo.
- ROTTER, J. M. **The practical design of shell structures exploiting different methods of analysis**. In: *Shell Structures: Theory and Applications*, Eds W. Pietraszkiewicz & C. Szymczak, London: Taylor and Francis 2005.
- SANDERS JR, L. Nonlinear theories for thin shells. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 21, n. 1, p. 21-36, 1963.
- SONDEJ, M.; IWICKI, P.; TEJCHMAN, J.; WÓJCIK, M. Critical assessment of Eurocode approach to stability of metal cylindrical silos with corrugated walls and vertical stiffeners. **Thin-Walled Structures**, v. 95, p. 335-346, 2015.
- VAN DER NEUT, A. The general instability of stiffened cylindrical shells under axial compression. **National Aeronautical Research Institute**. v.23, p.S57-S84, 1947.
- WÓJCIK, M.; IWICKI, P.; TEJCHMAN, J. 3D buckling analysis of a cylindrical metal bin composed of corrugated sheets strengthened by vertical stiffeners. **Thin-Walled Structures**, v. 49, n. 8, p. 947-963, 2011.
- WÓJCIK, M.; TEJCHMAN, J. Buckling analyses of metal cylindrical silos containing bulk solids during filling. **Particulate Science and Technology**, v. 34, n. 4, p. 461-469, 2016.

## ANEXO A

A seguir é apresentado a planilha desenvolvida no software Smath para o cálculo da carga crítica de flambagem do modelo de silo SL535 com o emprego do método a) (casca ortotrópica).

**Cálculo de instabilidade global de silos metálicos de chapas corrugadas reforçados com montantes - método a) casca ortotrópica (DMV)**

**Dados entrada dos montantes:**

$$DADOS := \begin{bmatrix} \text{"Cálculos"} & \text{"Perfil"} & \text{"As"} & \text{"Is"} & \text{"es"} & \text{"Its"} & \text{"tch"} \\ 1 & \text{"C1,5"} & 347 & 1,773 \cdot 10^5 & 31,85 & 300 & 0,75 \\ 2 & \text{"C2,0"} & 462 & 2,364 \cdot 10^5 & 32,1 & 600 & 0,75 \\ 3 & \text{"C2,5"} & 578 & 2,956 \cdot 10^5 & 32,35 & 1200 & 0,75 \\ 4 & \text{"C4,0"} & 924 & 4,813 \cdot 10^5 & 33,2 & 4900 & 0,75 \\ 5 & \text{"V4,0"} & 1492 & 2,065 \cdot 10^6 & 48,8 & 8000 & 0,75 \end{bmatrix}$$

$n := \text{rows}(DADOS) - 1 = 5$

```
for i ∈ [1..n]
  Asi := DADOS i + 1 3
  Isi := DADOS i + 1 4
  esi := DADOS i + 1 5
  Itsi := DADOS i + 1 6
  tchi := DADOS i + 1 7
```

**Dados entrada dos anéis de vento:**

$$A_r := 0 \quad I_r := 0 \quad d_r := 1800 \quad e_r := 0 \quad I_{tr} := 0$$

**Propriedades mecânica dos materiais**

$$E := 210 \frac{N}{mm^2} \quad \nu := 0,3 \quad G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 80,77 \frac{N}{mm^2}$$

**Dimensões da geometria do silo, espaçamento entre montantes, e número de montantes**

$$D := 5350 \text{ mm} \quad h_s := 17620 \text{ mm} \quad n_{STF} := 18 \quad d_s := \frac{D \cdot \pi}{n_{STF}} = 933,751 \text{ mm} \quad r := \frac{D}{2} = 2675 \text{ mm}$$

**Geometria do perfil de corrugação da chapa:**

$$l := 76 \text{ mm} \quad d_{cr} := 18 \text{ mm}$$

**Rigidez de membrana da chapa:**

$$\text{for } i \in [1..n]$$

$$C\phi_{1i} := E \cdot \frac{2 \cdot (t_{ch_i})^3}{3 \cdot d_{cr}^2}$$

$$C\theta_{1i} := \left( E \cdot t_{ch_i} \cdot \left( 1 + \frac{\pi^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right) \right)$$

$$C\phi\theta_{1i} := \frac{G \cdot t_{ch_i}}{\left( 1 + \frac{\pi^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)}$$

**Rigidez a flexão da chapa:**

$$\text{for } i \in [1..n]$$

$$D\phi_{1i} := \frac{E \cdot t_{ch_i}^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{\pi^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)}$$

$$D\theta_{1i} := E \cdot \frac{t_{ch_i} \cdot d_{cr}^2}{8} \cdot \left( 1 + \frac{\pi^2 \cdot d_{cr}^2}{8 \cdot l^2} \right)$$

$$D\phi\theta_{1i} := \frac{G \cdot t_{ch_i}^3}{12} \cdot \left( 1 + \frac{\pi^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)$$

$$C\phi = [0,1823 \ 0,1823 \ 0,1823 \ 0,1823 \ 0,1823]$$

$$C\theta = [179,2991 \ 179,2991 \ 179,2991 \ 179,2991 \ 179,2991]$$

$$C\phi\theta = [53,212 \ 53,212 \ 53,212 \ 53,212 \ 53,212]$$

$$D\phi = [7,1266 \ 7,1266 \ 7,1266 \ 7,1266 \ 7,1266]$$

$$D\theta = [6820,1813 \ 6820,1813 \ 6820,1813 \ 6820,1813 \ 6820,1813]$$

$$D\phi\theta = [3,2326 \ 3,2326 \ 3,2326 \ 3,2326 \ 3,2326]$$

## Rigidez distribuída do costado do silo

for  $i \in [1..n]$ 

$$\begin{aligned}
 C_{11} &:= C\phi_i + \frac{E \cdot A_s}{d_s} \\
 C_{12} &:= v \cdot \sqrt{C\phi_i \cdot C\theta_i} \\
 C_{14} &:= \frac{e_s \cdot E \cdot A_s}{(r \cdot d_s)} \\
 C_{44} &:= \frac{\left( D\phi_i + \frac{E \cdot I_s}{d_s} + \frac{E \cdot A_s \cdot e_s^2}{d_s} \right)}{r^2} \\
 C_{45} &:= \frac{v \cdot \sqrt{D\phi_i \cdot D\theta_i}}{r^2} \\
 C_{22} &:= C\theta_i + \frac{E \cdot A_r}{d_r} \\
 C_{33} &:= C\phi\theta_i \\
 C_{25} &:= \frac{e_r \cdot E \cdot A_r}{(r \cdot d_r)} \\
 C_{55} &:= \frac{\left( D\theta_i + \frac{E \cdot I_r}{d_r} + \frac{E \cdot A_r \cdot e_r^2}{d_r} \right)}{r^2} \\
 C_{66} &:= \frac{\left( D\phi\theta_i + 0,5 \cdot \left( \frac{G \cdot I_{ts}}{d_s} + \frac{G \cdot I_{tr}}{d_r} \right) \right)}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$C_{11} = [78,2224 \ 104,0858 \ 130,1741 \ 207,9893 \ 335,7321]$$

$$C_{12} = [1,7151 \ 1,7151 \ 1,7151 \ 1,7151 \ 1,7151]$$

$$C_{14} = [0,9292 \ 1,2468 \ 1,5721 \ 2,5791 \ 6,1214]$$

$$C_{44} = [0,0166 \ 0,0224 \ 0,0283 \ 0,0471 \ 0,1766]$$

$$C_{45} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$C_{22} = [179,2991 \ 179,2991 \ 179,2991 \ 179,2991 \ 179,2991]$$

$$C_{33} = [53,212 \ 53,212 \ 53,212 \ 53,212 \ 53,212]$$

$$C_{55} = [0,001 \ 0,001 \ 0,001 \ 0,001 \ 0,001]$$

$$C_{66} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

```

k := 1
while k ≤ n
  for j ∈ [1..20]
    for i ∈ [1..15]
      lo := eval(hs - (i-1)·1000)
      w := eval( $\frac{\pi \cdot r}{j \cdot l_o}$ )
      A1 := j4 · (w4 · C441k + 2 · w2 · (C451k + C661k) + C551k) + C221k + 2 · j2 · C251k
      A2 := 2 · w2 · (C121k + C331k) · (C221k + j2 · C251k) · (C121k + j2 · w2 · C141k) - (w2 · C111k + C331k) · (C221k + j2 · C251k)2 - w2 · (C221k + w2 · C331k) · (C121k + j2 · w2 · C141k)2
      A3 := (w2 · C111k + C331k) · (C221k + C251k + w2 · C331k) - w2 · (C121k + C331k)2
      nxj i := eval( $\frac{1}{j^2 \cdot w^2} \cdot (A1 + \frac{A2}{A3})$ )
      nxCrk := nx
      trace(nxCr)
      k := k + 1

```

```

k := 1
while k ≤ rows(nxCr)
  nx := nxCrk
  nx,min := min(nx)
  for j ∈ [1..rows(nx)]
    for i ∈ [1..cols(nx)]
      if nxj i = nx,min
        m := j
        n := i
      else
        0
  mCrk := m
  nCrk := n
  nxCr_mink :=  $\frac{d_s \cdot n_{x,min}}{1}$ 
  trace(nxCr_min; mCr; nCr)
  k := k + 1

```

$$n_{xCr\_min} = \begin{bmatrix} 554,63 \\ 637,88 \\ 714,28 \\ 933,92 \\ 1299,19 \end{bmatrix} \quad mCr = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad nCr = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad l_i := \overbrace{h_s - (nCr - 1) \cdot 1000}^{\longrightarrow} = \begin{bmatrix} 16620 \\ 17620 \\ 17620 \\ 17620 \\ 13620 \end{bmatrix}$$

## ANEXO B

A seguir é apresentado a planilha desenvolvida no software Smath para o cálculo da carga crítica de flambagem do modelo de silo SL535 com o emprego do método de Sanders (casca ortotrópica).

**Parametros da equação de Sanders**

$$c_1 := 0 \quad c_2 := 1 \quad c_3 := 0 \quad c_4 := 1$$

**Anéis de contraventamento**

$$A_r := 0 \quad I_r := 0 \quad d_r := 1800 \quad e_r := 0$$

**Material da chapa e montantes**

$$E := 210$$

$$\nu := 0,3$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 80,77$$

**Geometria do silo**

$$D := 5350 \text{ mm}$$

$$n_{STF} := 18$$

$$d_s := \frac{D \cdot \pi}{n_{STF}} = 933,75$$

$$R := \frac{D}{2} = 2675 \text{ mm}$$

**Carregamento aplicado no cilindro**

$$q_{int} := 0 \quad q_{ext} := 0 \quad l_4 := 1 \quad l_3 := 0 \quad N_x := 1 \frac{N}{mm}$$

$$L_1 := l_4 \cdot N_x = 1 \quad L_2 := l_3 \cdot q_{ext} \cdot R = 0 \quad L_3 := 0$$

$$L_{g1} := -q_{int} \cdot \frac{R}{2} = 0 \quad L_{g2} := q_{int} \cdot R = 0 \quad L_{g3} := 0$$

while  $k \leq n_c$

	"STF"	"As (mm <sup>2</sup> )"	"Is (mm <sup>4</sup> )"	"es (mm)"	"Its (mm <sup>4</sup> )"	"tch (mm)"	"dcr (mm)"	"l (mm)"
DADOS :=	"C1,5"	347	177300	31,85	300	0,75	18	76
	"C2"	462	236400	32,1	600	0,75	18	76
	"C2,5"	578	295600	32,35	1200	0,75	18	76
	"C4"	924	481300	33,2	4900	0,75	18	76
	"V4"	1492	2065000	48,8	8000	0,75	18	76

L := 17620

$A_s := \text{DADOS } k + 1 \ 2$

$I_s := \text{DADOS } k + 1 \ 3$

$e_s := \text{DADOS } k + 1 \ 4$

$I_{ts} := \text{DADOS } k + 1 \ 5$

$t_{ch} := \text{DADOS } k + 1 \ 6$

$d_{cr} := \text{DADOS } k + 1 \ 7$

$l := \text{DADOS } k + 1 \ 8$

"Rigidez de membrana da chapa corrugada"

$$C_\phi := E \cdot \frac{2 \cdot t_{ch}^3}{3 \cdot d_{cr}^2}$$

$$C_\theta := E \cdot t_{ch} \cdot \left( 1 + \frac{n^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)$$

$$C_{\phi\theta} := \frac{G \cdot t_{ch}}{\left( 1 + \frac{n^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)}$$

"Rigidez de flexão da chapa corrugada"

$$D_\phi := \frac{E \cdot t_{ch}^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{n^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)}$$

$$D_\theta := E \cdot \frac{t_{ch} \cdot d_{cr}^2}{8} \cdot \left( 1 + \frac{n^2 \cdot d_{cr}^2}{8 \cdot l^2} \right)$$

$$D_{\phi\theta} := \frac{G \cdot t_{ch}^3}{12} \cdot \left( 1 + \frac{n^2 \cdot d_{cr}^2}{4 \cdot l^2} \right)$$

"Rigidez de membrana distribuída"

$$A_{11} := C_\phi + \frac{E \cdot A_s}{d_s}$$

$$A_{12} := \nu \cdot C_\phi$$

$$A_{22} := C_\theta + \frac{E \cdot A_r}{d_r}$$

$$A_{\phi\theta} := C_{\phi\theta}$$

$$A_{21} := A_{12}$$

"Rigidez a flexão distribuída"

$$D_{11} := \left( D_\phi + \frac{E \cdot I_s}{d_s} + \frac{E \cdot A_s \cdot e_s^2}{d_s} \right)$$

$$D_{12} := \nu \cdot D_\phi$$

$$D_{21} := D_{12}$$

$$D_{22} := \left( D_\theta + \frac{E \cdot I_r}{d_r} + \frac{E \cdot A_r \cdot e_r^2}{d_r} \right)$$

continuidade...

```

Dθθ := ( Dθθ + 1/4 * ( G * Izz / dz + G * Izzr / dr ) )
"Rigidez de acoplamento distribuída"
B11 := E * Az * cz / dz
B12 := 0
B21 := B12
B22 := E * Ar * cr / dr
Bθθ := 0
"número de ondas críticas circunferenciais-mcr e número de meia ondas meridionais - mcr"
ncr := 20
ncr := 20
for n ∈ [ 1 .. ncr ]
  for m ∈ [ 1 .. ncr ]
    F1 := eval ( ( L / ( m * n ) ) )
    F2 := eval ( ( n * L / ( m * n * R ) ) )
    K11 := A11 + ( Aθθ - Bθθ * cz / R + Dθθ * cz / ( 4 * R2 - cz / 4 * ( Lθ1 + Lθ2 ) ) * ( F2 )2
    K12 := - ( F2 ) * ( A12 + Aθθ * ( B12 + Bθθ ) * cz / R - Dθθ * 3 * cz / ( 4 * R2 + cz / 4 * ( Lθ1 + Lθ2 ) ) )
    K13 := - ( ( A12 / R + cz * Lθ2 / R ) * ( F1 )2 + B12 - ( Dθθ * cz / R - B12 - 2 * Bθθ ) * ( F2 )2 )
    K22 := ( Aθθ + Bθθ * 3 * cz / R + Dθθ * 9 * cz / ( 4 * R2 ) ) * ( F2 )2 + ( A22 + 2 * B22 * cz / R + D22 * cz / R2 ) * ( F2 )2 - ( cz - cθ ) * Lθ2 / R2 * ( F1 )2 - cz / 4 * ( Lθ1 + Lθ2 )
    K23 := ( F2 ) * ( 1 / R * ( A22 + B22 * cz / R ) * ( F1 )2 + ( B12 + 2 * Bθθ + ( D12 + 3 * Dθθ ) * cz / R ) * ( F2 )2 + ( B22 + D22 * cz / R ) * ( F2 )2 - ( cz - cθ ) * Lθ2 / R * ( F1 )2 * ( F2 )
    K33 := A22 / R2 * ( F1 )4 + 2 / R * ( F1 )2 * ( B12 + B22 * ( F2 )2 ) + ( D12 + 2 * ( D12 + 2 * Dθθ ) * ( F2 )2 + D22 * ( F2 )4 ) - ( F1 )2 * ( Lθ1 + Lθ2 * ( F2 )2 - cz * Lθ2 / R2 * ( F1 )2 )
    G11 := cz / 4 * ( L1 + L2 ) * ( F2 )2
    G12 := cz / 4 * ( L1 + L2 ) * ( F2 )
    G13 := cθ * L2 / R * ( F1 )2
    G22 := ( cz - cθ ) * L2 / R2 * ( F1 )2 + cz / 4 * ( L1 + L2 )
    G23 := ( cz - cθ ) * L2 / R * ( F1 )2 * ( F2 )
    G33 := ( F1 )2 * ( L1 + L2 * ( F2 )2 - cz * L2 / R2 * ( F1 )2 )
    C0 := K33 * ( K11 * K22 - K122 ) + ( K12 * K13 - K11 * K23 ) * K23 + ( K12 * K23 - K22 * K13 ) * K13
    C1 := G11 * ( K22 * K33 - K232 ) + G22 * ( K11 * K33 - K132 ) + G33 * ( K11 * K22 - K122 ) + 2 * G12 * ( K13 * K23 - K12 * K33 ) + 2 * G13 * ( K12 * K23 - K13 * K22 ) + 2 * G23 * ( K12 * K13 - K11 * K23 )
    C2 := K11 * G22 * G33 + K22 * G11 * G33 - 2 * K12 * G12 * G33
    nx := if c1 = 0
      n m
      eval ( C0 / C1 )
    else
      eval ( C2 / ( 2 * C2 - sqrt ( ( C1 / ( 2 * C2 ) )2 - C0 / C2 ) ) )
    nocr := nx
    k
    trace ( nocr )
    k := k + 1

```

```

k := 1
while k ≤ rows(nxCr)
  nx := nxCrk
  nx,min := min(nx)
  for j ∈ [1..rows(nx)]
    for i ∈ [1..cols(nx)]
      if nxj i = nx,min
        m := j
        n := i
      else
        0
  mCrk := m
  nCrk := n
  nxCr_mink := ds · nx,min
  trace(nxCr_min; mCr; nCr)
  k := k + 1

```

$$n_{xCr\_min} = \begin{bmatrix} 493,901 \\ 571,1451 \\ 647,5049 \\ 867,0121 \\ 1292,8324 \end{bmatrix} \quad mCr = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad nCr = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$