



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Micael Silva de Oliveira

Cosmologia e Extensão via Gravidade de Horndeski

Campina Grande, Paraíba, Brasil

7 de abril de 2025

Micael Silva de Oliveira

Cosmologia e Extensão via Gravidade de Horndeski

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Francisco de Assis de Brito
Coorientador: Professor Dr. José André Vieira Campos

Campina Grande, Paraíba, Brasil

7 de abril de 2025

O48c Oliveira, Micael Silva de.
Cosmologia e extensão via gravidade de Horndeski / Micael Silva de
Oliveira. – Campina Grande, 2025.
86 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

“Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, Prof. Dr. José
André Vieira Campos”.

Referências.

1. Cosmologia. 2. Gravidade de Horndeski. 3. Tensão de Hubble.
I. Brito, Francisco de Assis de. II. Campos, José André Vieira.
III. Título.

UFMG/BC

CDU 524.8(043.3)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

MICAEL SILVA DE OLIVEIRA

Cosmologia e Extensão via Gravidade de Horndeski

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 25/02/2025

Francisco de Assis de Brito
Presidente da Comissão e Orientador

José André Vieira Campos
Coorientador

Marcos Antonio Anacleto
Examinador Interno

Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 17/03/2025, às 01:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior, Usuário Externo**, em 17/03/2025, às 08:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **José André Vieira Campos, Usuário Externo**, em 17/03/2025, às 08:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 17/03/2025, às 09:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **5307213** e o código CRC **6A8BD11C**.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 25 DE FEVEREIRO DE 2025

Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e cinco, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **MICAEL SILVA DE OLIVEIRA** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Francisco de Assis de Brito** (Orientador) – Doutor em Física, **José André Vieira Campos** (Coorientador) – Doutor em Física, o professor **Marcos Antonio Anacleto** – Doutor em Física, o professor **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior** – Doutor em Física, sendo o primeiro, o segundo e o terceiro, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o quarto, integrante do corpo docente da Universidade Federal do Vale do São Francisco. HORA DE INÍCIO: **14h00min** – LOCAL: **Auditório da UAF**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Francisco de Assis de Brito**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **MICAEL SILVA DE OLIVEIRA**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado **“Cosmologia e Extensão via Gravidade de Horndeski”**. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a ata, que será submetida à aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 16 de março de 2025.

Francisco de Assis de Brito
Presidente da Comissão e Orientador

José André Vieira Campos
Coorientador

Marcos Antonio Anacleto
Examinador Interno

Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior
Examinador Externo

Micael Silva de Oliveira
Candidato(a)

João Rafael Lucio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **MICAEL SILVA DE OLIVEIRA**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, COORDENADOR(A)**, em 16/03/2025, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MICAEL SILVA DE OLIVEIRA, Usuário Externo**, em 16/03/2025, às 17:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 17/03/2025, às 01:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior, Usuário Externo**, em 17/03/2025, às 08:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **José André Vieira Campos, Usuário Externo**, em 17/03/2025, às 08:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 17/03/2025, às 09:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **5307212** e o código CRC **FD8DF549**.

À minha família.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela oportunidade concedida de trabalharmos juntos, pela excelente orientação, pelas valiosas discussões, sugestões e pelo apoio essencial ao longo de todo o período do mestrado.
- Ao Prof. Dr. José André Vieira Campos pela excelente coorientação, por toda a ajuda concedida, pela paciência, discussões e sugestões durante todo o último ano do mestrado.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação, destacando o Prof. Dr. Marcos Anacleto e o Prof. Dr. João Rafael.
- Aos meus familiares e entes queridos por todo apoio concedido, pela confiança depositada e pelo incentivo atribuído durante toda essa jornada acadêmica.
- Aos colegas e amigos da pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade, destacando Victor Grana, Mariano Marques, Rafaela Laranjeira, Evelin Tatiane, Claricy Paiva, Maria Gabriela, Ana Vitória, Ana Rafaely, Renato Xavier, Victor Hugo e Joaquim Moraes. Além de todas as outras amizades construídas fora da UFCG.
- Aos amigos, colegas e professores da UFAM-ICET que sempre me apoiaram e me incentivaram durante toda a graduação, destacando Rayanne Silva, Laíz Stephane, Pâmela Safne, Sabrina Kato, Ocimara Barbosa, Mariane Fonseca, Jefferson Lima, Maycon de Castro, Victor Grana, Franklin Oliveira e Henrique Barata, além dos professores Lúcio Fábio, Silvina Paola, Alyson Paulo e Marco Aurélio.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Resumo

Este trabalho investiga a gravidade de Horndeski como uma alternativa ao modelo cosmológico padrão (Λ -CDM), com ênfase na mitigação da tensão de Hubble. Inicialmente, abordamos os aspectos conceituais que serviram de base para a formulação da gravidade de Einstein, além de tratarmos tópicos essenciais para a Cosmologia. Posteriormente, apresentamos a gravidade de Horndeski, destacando sua formulação matemática, propriedades teóricas e condições de estabilidade. A parte metodológica inclui a implementação numérica das equações cosmológicas e o ajuste de parâmetros para reproduzir observações recentes. Os resultados mostram que o modelo específico de acoplamento derivativo não-mínimo de Horndeski pode aliviar a tensão de Hubble por meio do ajuste do potencial escalar, mantendo consistência com dados observacionais. A análise da evolução das densidades de energia e do parâmetro de Hubble, juntamente ao estudo das perturbações cosmológicas, reforça a estabilidade e viabilidade do modelo estudado. Portanto, esta dissertação contribui para o estudo da cosmologia teórica, sugerindo novas possibilidades para a exploração de outros setores dessa gravidade modificada em contextos cosmológicos.

Palavras-chave: Cosmologia. Gravidade de Horndeski. Tensão de Hubble.

Abstract

This work investigates Horndeski gravity as an alternative to the standard cosmological model (Λ -CDM), with an emphasis on alleviating the Hubble tension. Initially, we address the conceptual aspects that formed the basis for the formulation of Einstein's gravity, along with essential topics in Cosmology. Subsequently, Horndeski gravity is presented, highlighting its mathematical formulation, theoretical properties, and stability conditions. The methodological approach includes the numerical implementation of cosmological equations and parameter fitting to reproduce recent observational data. The results show that the specific non-minimal derivative coupling model within Horndeski gravity can mitigate the Hubble tension by adjusting the scalar potential while maintaining consistency with observational constraints. The analysis of the evolution of energy densities and the Hubble parameter, along with the study of cosmological perturbations, reinforces the stability and feasibility of the proposed model. Therefore, this dissertation contributes to the study of theoretical cosmology, suggesting new possibilities for exploring other sectors of this modified gravity theory in cosmological and astrophysical contexts.

Keywords: Cosmology. Horndeski Gravity. Hubble Tension.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação das três possibilidades de curvaturas para o Universo, listados acima para diferentes valores de k	29
Figura 2 – Evolução do parâmetro de Hubble normalizado $H(z)/(1+z)$ para do modelo Λ -CDM em função do redshift z	37
Figura 3 – Evolução dos parâmetros de densidade de energia Ω associados a cada constituinte, em função de N para o modelo Λ -CDM.	39
Figura 4 – Evolução do parâmetro de desaceleração para do modelo Λ -CDM em função do redshift z	41
Figura 5 – Evolução da normalização $H(z)/(1+z)^{3/2}$ para cada um dos casos de V_0 . E para comparação, plotamos também a curva do modelo Λ CDM (curva preta).	57
Figura 6 – Evolução do parâmetro de Hubble $H(z)$ em função do redshift z , confrontada com dados observacionais de $H(z)$ provenientes de SNIa, BAO e CC. As curvas foram obtidas para os diferentes valores adotados de V_0 , e a curva preta representa o modelo Λ CDM para comparação.	58
Figura 7 – Evoluções da normalização $H(z)/(1+z)$ correspondentes a cada um dos valores de V_0 adotados. Para comparação, também apresentamos a curva do modelo Λ -CDM (curva preta), juntamente com os dados observacionais de $H(z)$ obtidos pela Colaboração SH0ES e pelas medições de BAO da Colaboração SDSS.	58
Figura 8 – Evolução do parâmetro de Hubble $H(z)$ em função do redshift z , confrontada com dados observacionais de $H(z)$ provenientes de SNIa, BAO e CC. A curva vermelha representa o caso $V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, juntamente às suas respectivas faixas de confiança. A curva preta representa o modelo Λ -CDM para comparação.	59
Figura 9 – Evolução da normalização $H(z)/(1+z)$ correspondente ao caso $V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, juntamente às suas respectivas faixas de confiança. Para comparação, também apresentamos a curva do modelo Λ -CDM (curva preta), juntamente com os dados observacionais de $H(z)$ obtidos pela Colaboração SH0ES e pelas medições de BAO da Colaboração SDSS.	59
Figura 10 – Evolução do quadrado da velocidade de propagação das perturbações escalares c_S^2 , em função do redshift z	61
Figura 11 – Evolução do parâmetro de energia cinética associado às perturbações escalares Q_S , em função do redshift z	62
Figura 12 – Evolução do quadrado da velocidade de propagação das perturbações tensoriais c_T^2 , em função do redshift z	62

Figura 13 – Evolução do parâmetro de energia cinética associado às perturbações tensoriais Q_T , em função do redshift z	63
Figura 14 – Evolução dos parâmetros de densidade de energia Ω associados a cada constituinte, em função de N	64
Figura 15 – Evolução do parâmetro de desaceleração q em função de N	65
Figura 16 – Evolução do parâmetro de da equação de estado ω em função de N . . .	65

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela dos valores estimados dos parâmetros livres do modelo para diferentes casos de V_0	55
--	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	GRAVIDADE DE EINSTEIN	14
2.1	Princípios da Relatividade Geral	14
2.1.1	Princípio da Equivalência Newtoniano	15
2.1.2	Princípio da Equivalência de Einstein	15
2.1.3	Princípio da Covariância Geral	16
2.2	Aspectos da Curvatura	17
2.2.1	Dinâmica da Partícula na Relatividade Geral	17
2.2.2	Tensor de Riemann	20
2.2.3	Tensor de Ricci e Escalar de Ricci	21
2.2.4	Tensor Métrico	21
2.2.5	Identidades de Bianchi e o Tensor de Einstein	22
2.3	Tensor energia-momento	23
2.4	Equações de Campo	25
2.4.1	Ação de Einstein-Hilbert	25
3	TÓPICOS DA COSMOLOGIA	28
3.1	O Princípio Cosmológico e a Métrica	28
3.2	Solução das Equações de Einstein na Métrica FRW	29
3.2.1	Equações de Friedmann	32
3.2.2	Equação da Continuidade	33
3.2.3	Componentes dominantes do Universo	34
3.3	Parâmetros Cosmológicos	36
3.3.1	Parâmetro de Hubble	36
3.3.2	Parâmetro de Densidade de Energia	37
3.3.3	Parâmetro de Desaceleração	40
4	GRAVIDADE DE HORNDESKI NA COSMOLOGIA	42
4.1	A Lagrangeana	42
4.2	Casos Particulares	43
4.3	Equações de Movimento do Background	44
4.4	Perturbações, Instabilidades e Restrições Observacionais	46
4.5	Equações de Campo do Modelo	47
4.6	Dinâmica Cosmológica do Modelo	49

5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	54
5.1	Análises Numérica e Estatística	54
5.2	Tensão de Hubble	56
5.2.1	Mitigando a Tensão de Hubble com o Modelo	56
5.3	Perturbações e Condições de Estabilidade do Modelo	60
5.4	Outros Parâmetros Cosmológicos	63
6	CONCLUSÃO	67
	 APÊNDICES	 69
	APÊNDICE A – CÁLCULO DE ALGUMAS VARIAÇÕES IMPOR-	
	TANTES	70
A.1	Varição de $g_{\mu\nu}$	70
A.2	Varição de $\sqrt{-g}$	70
A.3	Varição de S_M	71
	 APÊNDICE B – CÁLCULO DO TENSOR $H_{\mu\nu}$	 73
B.1	Varição do termo de acoplamento não mínimo com o tensor métrico	73
B.2	Varição do termo de acoplamento não mínimo com o tensor de Einstein	73
	 REFERÊNCIAS	 79

1 Introdução

Observações recentes indicam que o Universo encontra-se em uma fase de expansão acelerada. Tais observações sugerem a existência de uma nova componente cósmica, denominada energia escura, que exerceria uma pressão negativa, capaz de impulsionar essa expansão acelerada. A descoberta dessa aceleração foi inicialmente realizada através de observações de Supernovas tipo Ia (SnIa) [1, 2]. Posteriormente, essa conclusão foi apoiada por outros observáveis cosmológicos, como a Radiação Cósmica de Fundo (CMB) [3], além das Oscilações Acústicas de Bárions (BAOs) [4]. A natureza exata da energia escura permanece como um dos grandes mistérios da física moderna. Contudo, um dos principais candidatos a desempenhar esse papel é a constante cosmológica Λ , introduzida por Einstein¹. Ao considerar este termo cosmológico em conjunto com a Matéria Escura Fria (CDM)² como os principais componentes que dominam o Universo, chega-se ao modelo Λ -CDM, que é atualmente considerado o modelo cosmológico mais completo, sendo amplamente aceito pela comunidade científica.

Nos últimos anos, têm surgido inúmeros estudos sobre teorias de gravidade modificada. Entre as várias alternativas à Relatividade Geral, que mantêm seus princípios fundamentais, mas alteram a ação do campo, duas classes de teorias têm se destacado como as mais investigadas. A primeira, conhecida na literatura como $f(R)$ [5, 6], assume a forma de uma generalização da ação de Einstein-Hilbert, onde a função $f(R)$ é uma função arbitrária do escalar de Ricci R , em vez de apenas R linear, como na Relatividade Geral. A segunda classe de teorias é conhecida como teorias escalar-tensoriais, destacando as teorias de Brans-Dicke [7] como uma das principais alternativas à teoria da Relatividade Geral de Einstein, onde se introduz um campo escalar não minimamente acoplado ao tensor de curvatura. Essa classe de teorias pode ser generalizada pela chamada Gravidade de Horndeski [8], que é a mais geral teoria escalar-tensorial em quatro dimensões, com equações de campo de segunda ordem. Porém, uma questão interessante a se considerar, é a razão pela qual se torna necessário modificar a Relatividade Geral, uma vez que essa teoria tem se mostrado bastante consistente, sendo confirmada por vários experimentos e observações. Um exemplo mais recente e um dos mais importantes, é a detecção das ondas gravitacionais, que foram previstas por Einstein em 1916 e finalmente observadas diretamente em 2015 pela Colaboração *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) e VIRGO [9, 10].

¹ Quando Einstein inseriu essa constante em suas equações, seu objetivo inicial era contrabalancear a gravidade, pois suas equações previam um Universo dinâmico. No entanto, acreditava-se na época que o Universo era estático, e devido a isso, Einstein adicionou o termo Λ , que agiria como uma força repulsiva, equilibrando a atração gravitacional e permitindo assim um Universo estático.

² Do inglês: *Cold Dark Matter*. É classificada como um tipo específico de matéria escura que se move a baixas velocidades (em comparação à velocidade da luz).

Um dos temas mais discutidos no contexto da física contemporânea que tem promovido fortes motivações para estudos além da Relatividade Geral, é a compreensão do chamado setor escuro do Universo, que engloba as chamadas energia escura e a matéria escura, que são as responsáveis, respectivamente, pela atual expansão acelerada do Universo e pelos fenômenos observados nas velocidades de rotação das galáxias [11]. Além disso, existem outras questões em aberto na cosmologia, que são tidas como pendências do modelo Λ -CDM, como o problema da constante cosmológica, associado a uma discrepância significativa³ entre seu valor observacional e o valor teórico previsto pela teoria quântica [12]. E também, uma outra questão mais recente, o problema da tensão de Hubble, que consiste em uma discordância observada entre os valores da constante de Hubble H_0 obtidos por diferentes medições, como as locais, que utilizam SnIa e Cefeidas [1, 13], e as medições globais, que são baseadas em observações da CMB e das BAOs. Sendo assim, modificar ou estender a Relatividade Geral pode abrir novas possibilidades para a cosmologia, permitindo explorar e compreender fenômenos que o modelo atual não consegue explicar completamente.

Sendo assim, motivada pelos problemas apresentados, a exploração de modelos alternativos vem se tornando cada vez mais frequente e considerável, principalmente modelos envolvendo campos escalares dinâmicos como um grau de liberdade extra (teorias escalar-tensoriais). Onde esse campo escalar pode ser introduzido como uma nova componente, assim como os modelos de quintessência [14, 15] e k -essência [16, 17], ou como uma generalização desses modelos, a Teoria de Horndeski, que carrega consigo o princípio de evitar equações de movimento de ordem superior, o que previne instabilidades. O foco da proposta deste trabalho é explorar um dos setores dessa gravidade de Horndeski, nomeado setor John (também conhecido na literatura como modelo de acoplamento derivativo não mínimo do campo escalar com o tensor de Einstein), com investigações voltadas para a cosmologia. Nessa primeira parte do estudo, fazemos uma descrição da matéria escura por meio do campo escalar, assim como realizado em [18], e para isso obtemos a solução das equações de campo dessa gravidade via métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) para uma curvatura plana, no contexto de um universo homogêneo e isotrópico. Solucionamos as equações resultantes numericamente, e a partir disso, direcionamos nossas análises aos observáveis cosmológicos.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos uma revisão sobre a Gravidade de Einstein, abordando os princípios aos quais ela se baseia, além disso, expomos o formalismo no qual ela é construída, destacando seus principais elementos. No capítulo 3 tratamos sobre a Cosmologia, enunciando os pilares do modelo cosmológico padrão, após isso solucionamos as equações de Einstein em uma métrica estabelecida, obtendo as principais equações, além disso abordamos sobre os parâmetros

³ A contribuição da energia de vácuo esperada para Λ no contexto da física de partículas é 10^{121} ordens de magnitude maior do que a observada [12], caracterizando um problema de ajuste fino.

cosmológicos, juntamente às suas discussões para com a cosmologia observacional. No capítulo 4 adentramos aos tópicos referentes à teoria de Horndeski, partindo de uma revisão teórica, mostramos as formas das novas equações de campo do modelo considerado, bem como suas soluções na perspectiva da cosmologia, especificamente no universo FRW plano, exibindo os principais parâmetros inerentes a essa abordagem. No Capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos a partir da implementação do modelo de gravidade de Horndeski, explorando como ajustes nos parâmetros livres podem mitigar a tensão de Hubble. Analisamos numericamente a evolução do parâmetro de Hubble, o comportamento das densidades de energia associadas aos componentes do Universo, além das condições de estabilidade cosmológica.

2 Gravidade de Einstein

A Gravidade de Einstein, amplamente conhecida na literatura como Teoria da Relatividade Geral (TRG), é uma teoria que relaciona o campo gravitacional à curvatura do espaço-tempo em torno de uma região onde haja a presença de matéria e energia. Essa conexão é formalizada através das equações de campo de Einstein, que derivam, em parte, do chamado princípio da equivalência [19]. Esse princípio estabelece que, localmente, os efeitos de um campo gravitacional são indistinguíveis dos efeitos de uma aceleração uniforme, o que implica que a gravidade pode ser vista como a curvatura do espaço-tempo. A importância e as implicações do princípio da equivalência serão melhor exploradas no decorrer deste capítulo.

A TRG descreve os fenômenos gravitacionais utilizando uma sofisticada ferramenta matemática, a geometria diferencial. De acordo com este formalismo, a gravidade não é tratada como uma força convencional como na física newtoniana, mas sim como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Essa curvatura, por sua vez, é determinada pela distribuição de matéria e energia no espaço-tempo. Essa teoria expande os princípios da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) para incluir a dinâmica em espaços-tempo curvos, permitindo que sua aplicação se estenda a quaisquer referenciais, sejam eles inerciais ou não. Ao incorporar o conceito de que o campo gravitacional pode ser interpretado localmente como um referencial não-inercial, a TRG se estabelece como uma teoria abrangente da gravitação, aplicável a vários cenários que vão além das limitações da TRR.

Neste capítulo será desenvolvido um estudo mais detalhado acerca da TRG, onde serão apresentados os principais aspectos que servem como base para o desenvolvimento teórico e compreensão desta teoria, objetivando assim, introduzir o ferramental matemático explorado em partes do texto, além de nos familiarizarmos com conceitos utilizados em seções subsequentes deste trabalho.

2.1 Princípios da Relatividade Geral

Para falarmos sobre a TRG, primeiramente é necessário abordar sobre alguns dos princípios aos quais essa teoria se baseia, principalmente ao citado anteriormente, princípio de equivalência, pois suas consequências formam a base conceitual para compreender a estrutura do espaço-tempo curvo juntamente à sua intrínseca relação com as fontes de campo gravitacional [20].

2.1.1 Princípio da Equivalência Newtoniano

O princípio de equivalência foi um dos principais tópicos que serviram como base para a teoria da gravitacional de Einstein. A equivalência entre a massa inercial e a massa gravitacional segundo a formulação newtoniana, nos mostra experimentalmente que, no vácuo, a trajetória seguida pelos corpos em queda livre não depende da estrutura nem da composição química dos corpos sendo os mesmos suficientemente pequenos para evitar os efeitos da não uniformidade do campo gravitacional [21].

2.1.2 Princípio da Equivalência de Einstein

Em 1908, ao tentar aplicar os princípios de sua recém-formulada teoria da Relatividade Restrita, Einstein percebeu que a mecânica newtoniana não oferecia uma explicação satisfatória para a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, como discutido anteriormente. Durante suas reflexões e investigações sobre a gravitação newtoniana, ele realizou um experimento mental que resultou em uma das mais profundas percepções de sua vida. Esse experimento mental, que ele considerou “o mais feliz de sua vida”, envolvia a ideia de que um corpo em queda livre não sente seu próprio peso.

A partir dessa reflexão, Einstein relatou: “*Esta lei... da igualdade da massa inercial e massa gravitacional foi então percebida por mim com todo o seu significado. Fiquei abismado com sua existência e conjecturei que ela deveria conter a chave para a compreensão da gravitação*” [22, 23]. A partir disso, Einstein formalizou um resultado com os seguintes postulados, descritos por [24]:

Princípio fraco: *Em todos os pontos do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas local, chamado de referencial inercial local, tal que, em uma região suficientemente pequena ao redor do ponto em questão, as leis do movimento tomam a mesma forma que em um sistema inercial cartesiano não acelerado na ausência de qualquer campo gravitacional.*

Este primeiro postulado, conhecido como o princípio da equivalência Fraco, foi posteriormente estendido para incluir não apenas experimentos não gravitacionais, mas também todos os fenômenos físicos, inclusive aqueles que envolvem gravitação. Esse novo princípio ampliado é nomeado princípio da equivalência forte, e pode ser enunciado da seguinte forma:

Princípio forte: *Em todos os pontos do espaço-tempo, mesmo na presença de um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas local, chamado referencial inercial local, tal que, em uma região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, todas as leis da natureza, incluindo as leis gravitacionais, tomam a mesma forma que em um sistema cartesiano não acelerado na ausência de qualquer campo gravitacional.*

O princípio da equivalência forte é o mais geral dos princípios de equivalência, assumindo que os dois princípios anteriores (o princípio da equivalência newtoniano e o princípio da equivalência fraco) são válidos. Além disso, ele afirma que todas as leis da física são as mesmas para qualquer observador, em qualquer ponto do espaço-tempo [25]. De forma mais abrangente, o princípio forte difere do princípio fraco ao incluir experiências gravitacionais no referencial do observador. Isso significa que as leis da física permanecem inalteradas, mesmo quando o corpo de teste produz um campo gravitacional não desprezível.

2.1.3 Princípio da Covariância Geral

De acordo com o princípio anterior, não existe uma forma de distinguir localmente entre um referencial em queda livre em um campo gravitacional uniforme e um referencial inercial e também não há como distinguir entre localmente, estar acelerado e estar em repouso sob ação de um campo gravitacional.

Se um referencial acelerado pode ser descrito como um referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional e se as leis da natureza não se alteram na presença de um campo gravitacional, as equações que regem essa teoria devem ser escritas de uma só forma para todos os observadores, e para isso se torna necessário o uso do formalismo tensorial, que permite expressar as leis físicas de maneira covariante, ou seja, invariantes sob transformações de coordenadas.

Sendo assim, não há motivo para que haja distinção entre referenciais não-inerciais e referenciais inerciais no que diz respeito à descrição da natureza. A partir disso, Einstein generalizou o princípio da relatividade restrita, e ofereceu o princípio da covariância geral como o princípio físico fundamental da TRG e como o responsável por estender o princípio da relatividade restrita ao movimento acelerado [26]. Tal princípio pode ser enunciado da seguinte forma:

Princípio da covariância geral: *As leis da física devem ser expressas de maneira que tenham a mesma forma matemática em qualquer sistema de coordenadas, independentemente do movimento do observador ou do referencial escolhido.*

Dessa forma, se uma equação é válida na TRR, ela deve permanecer válida na TRG, isso significa que as equações válidas no espaço plano de Minkowski (que é o cenário da relatividade restrita) devem ser generalizadas para se aplicarem ao espaço-tempo curvo da relatividade geral, com isso, devem ser escritas fazendo-se as devidas transformações:

- Substitui-se a métrica de Minkowski por uma métrica geral:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}.$$

- Substitui-se as derivadas parciais por derivadas covariantes:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu.$$

Na próxima seção, trataremos sobre a matemática envolvida nos conceitos apresentados até aqui, definindo e obtendo alguns tensores que são utilizados para obtenção das equações de campo de Einstein.

2.2 Aspectos da Curvatura

Nesta seção obteremos a representação matemática para a curva geodésica, onde será visto que esta pode ser obtida a partir do movimento de uma partícula em queda livre imersa em um campo gravitacional, onde veremos também que, a curva geodésica depende de um elemento chamado conexão afim, que é representado exclusivamente por termos geométricos [27]. E além disso, conheceremos melhor alguns tensores que são indispensáveis para a compressão da TRG e obtenção de suas equações.

2.2.1 Dinâmica da Partícula na Relatividade Geral

Considerando uma partícula movendo-se em queda livre em um sistema de coordenadas ξ^α que a acompanha. Sendo assim, esse sistema é localmente inercial e de acordo com o princípio da equivalência, num referencial em queda livre não há aceleração (localmente) [24]. Com isso, a equação de movimento da partícula fica expressa por:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde $d\tau = \frac{ds^2}{c^2}$ é o tempo próprio, ou seja, aquele medido no referencial da partícula, sendo descrito por:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\psi} d\xi^\alpha d\xi^\psi, \quad (2.2)$$

com $\eta_{\alpha\psi}$ sendo o *tensor métrico de Minkowski*.

Considerando um sistema de coordenadas arbitrário x^μ em repouso, submetido a um campo gravitacional, podemos utilizar a regra da cadeia para determinar a dinâmica da partícula vista a partir do referencial x^μ [25], ou seja,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right), \quad (2.3)$$

então,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Desenvolvendo a derivada no tempo, de acordo com a regra do produto de derivadas, teremos:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.5)$$

Multiplicando a equação (2.5) em ambos os lados por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, teremos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.6)$$

e utilizando o tensor de Kronecker, dado por

$$\delta_\mu^\lambda = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha},$$

obtemos a equação simplificada

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \delta_\mu^\lambda + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.7)$$

e aqui, podemos identificar um conceito importante chamado de *conexão afim*. Esse elemento matemático é crucial porque nos ajuda a determinar as trajetórias naturais, ou curvas geodésicas, em um espaço que foi curvado pela presença de um campo gravitacional. Em outras palavras, a conexão afim é como uma ferramenta que nos mostra como os objetos se movem nesse espaço curvo, e ela é definida da seguinte maneira,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.8)$$

Que por sua vez, estabelece uma conexão entre vetores de espaços tangentes definidos em pontos vizinhos e pode ser interpretado como uma correção das equações devido a curvatura do espaço-tempo [28]. Dessa forma, a equação do movimento que buscamos, será dada por

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) obtida acima é denominada *Equação da Geodésica*, e descreve o menor caminho que uma partícula livre percorre em um espaço curvo. Uma vez que as derivadas de primeira ordem comutam, da Equação (2.8), temos que a conexão afim é simétrica com relação aos índices inferiores, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.10)$$

Percebemos ainda, que na equação de movimento (2.9) existe um termo adicional quando é comparada com a equação de movimento escrita a partir do sistema localmente inercial, em (2.1). Isso indica justamente a presença de um campo gravitacional, reafirmando então, que de acordo com a TRG, o campo gravitacional é descrito a partir da curvatura do espaço-tempo.

Agora podemos representar a conexão afim usando a métrica, que é uma maneira de descrever o campo gravitacional. Quando estudamos o movimento de uma partícula livre, como vimos antes, o que determina como a gravidade influencia essa partícula é a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$. Além disso, o tempo próprio, ou seja, o tempo que a partícula vivencia em seu movimento, é determinado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ [24], e pode ser expresso em termos do sistema de coordenadas x^{μ} , ou seja, por meio de (2.2), temos

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\psi} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial \xi^{\psi}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.11)$$

onde o tensor métrico é definido como

$$g_{\mu\nu} = -\eta_{\alpha\psi} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\psi}}{\partial x^{\nu}}. \quad (2.12)$$

Esse tensor é essencial na TRG, pois ele quantifica as distâncias entre pontos e os ângulos entre vetores em um espaço-tempo curvado. Suas componentes estabelecem a geometria do espaço-tempo, descrevendo assim a dinâmica em um campo gravitacional [29]. E ainda nesta seção, trataremos com mais detalhes sua definição e suas propriedades.

Podemos ainda obter uma relação entre o tensor métrico e a conexão afim, sendo na partícula se movendo em queda livre, o campo responsável pela determinação da força é $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, enquanto que o tempo próprio é determinado por $g_{\mu\nu}$ [24]. Com isso, derivamos (2.12) com relação a x^{λ} , isso nos dá

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\psi}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\psi} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\psi}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\psi}, \quad (2.13)$$

onde as seguintes relações são válidas [24],

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \xi^{\psi}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\psi}}{\partial x^{\rho}}. \quad (2.14)$$

Utilizando as relações acima e (2.12), obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} g_{\rho\mu} \quad (2.15)$$

Agora podemos permutar $\mu \leftrightarrow \lambda$, e após algumas manipulações, obtemos a expressão,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\rho\nu}. \quad (2.16)$$

Multiplicando toda a equação acima por $g^{\nu\sigma}$, obtemos

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (2.17)$$

Que expressa a conexão afim em termos do tensor métrico, e nessa forma, é representada pelos *Símbolos de Christoffel*. Esses símbolos caracterizam a conexão que estamos utilizando como a *conexão de Levi-Civita*, que é uma conexão métrica e livre de torção.

Sendo assim, podemos observar que o princípio da equivalência, discutido neste capítulo, conduz a uma dinâmica em que o movimento das partículas é determinado pela geometria do espaço-tempo. Em outras palavras, o conceito de força pode ser substituído pela ideia de que a matéria e a energia dobram e moldam o espaço-tempo ao seu redor, e essa curvatura determina as geodésicas que as partículas de teste devem seguir [21, 24, 30].

Portanto, uma vez definida a métrica, as funções $g_{\mu\nu}$ são determinadas pela solução de um conjunto de equações diferenciais conhecidas como as *Equações de Campo de Einstein*. Essas equações, que discutiremos mais adiante neste capítulo, mostram como a geometria do espaço-tempo está ligada à quantidade de matéria e energia presentes, que são as fontes do campo gravitacional [21, 30].

2.2.2 Tensor de Riemann

Como visto anteriormente no decorrer deste capítulo, na TRG o campo gravitacional é descrito pela curvatura do espaço-tempo, e a quantidade geométrica que determina essa curvatura é o *tensor de Riemann*, que também é usualmente chamado na literatura de *tensor de curvatura*, sendo o mesmo definido da seguinte forma,

$$R^{\alpha}_{\gamma\lambda\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}\Gamma^{\tau}_{\lambda\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\tau}\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}. \quad (2.18)$$

Um fato bastante intuitivo a se considerar sobre este tensor de curvatura é que sua nulidade é uma condição necessária e suficiente para que uma métrica seja plana, ou seja, que o espaço-tempo não esteja curvado, matematicamente expressamos como $R^{\alpha}_{\gamma\lambda\beta} = 0$.

Podemos ainda transformar esse tensor misto, representado pela Equação (2.18), em um tensor totalmente covariante. Para isso, basta multiplicá-lo pela métrica covariante, resultando na seguinte expressão,

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = g_{\sigma\alpha}R^{\alpha}_{\gamma\lambda\beta}. \quad (2.19)$$

Com isso, expressamos o tensor de Riemann abertamente na forma:

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\beta}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \right) + g_{\mu\nu} \left(\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\nu}_{\gamma\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\nu}_{\gamma\beta} \right). \quad (2.20)$$

Esse tensor tem um total de 256 componentes, já que estamos considerando um espaço-tempo de 4 dimensões. No entanto, devido a certas propriedades, o número de componentes independentes é bastante reduzido. Esse número é dado por $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$, o que, para $n = 4$ dimensões, resulta em 20 componentes independentes. Essa redução ocorre devido às várias condições de simetrias que o tensor de Riemann satisfaz, conforme as seguintes propriedades listadas a seguir [31]:

- i) O tensor $R_{\sigma\gamma\lambda\beta}$ é anti-simétrico com relação à troca de índices do primeiro par:

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = -R_{\gamma\sigma\lambda\beta}. \quad (2.21)$$

ii) O tensor $R_{\sigma\gamma\lambda\beta}$ é anti-simétrico com relação à troca de índices do segundo par:

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = -R_{\sigma\gamma\beta\lambda}. \quad (2.22)$$

iii) O tensor $R_{\beta\sigma\lambda\omega}$ é invariante com relação à troca do primeiro par de índices com o segundo:

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = R_{\lambda\beta\sigma\gamma}. \quad (2.23)$$

Destacando ainda, o fato de a conexão ser simétrica, leva à seguinte identidade:

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} + R_{\sigma\beta\gamma\lambda} + R_{\sigma\lambda\beta\gamma} = 0, \quad (2.24)$$

chamada de propriedade da ciclicidade do tensor de Riemann, ou como também é conhecida, primeira identidade de Bianchi.

A seguir, trataremos outros termos que são indispensáveis dentro da TRG, e assim concluiremos essa etapa de definições dos elementos que compõem as equações de campo de Einstein.

2.2.3 Tensor de Ricci e Escalar de Ricci

O tensor de Riemann possibilita definir duas outras quantidades relacionadas à curvatura de uma variedade [31]. Uma delas é um tensor de grande importância na formulação da teoria da gravitação de Einstein, conhecido como *tensor de Ricci*, que é obtido fazendo uma contração do tensor de Riemann com a métrica, sendo expresso da seguinte forma:

$$R_{\sigma\omega} = R_{\sigma\lambda\omega}^{\lambda} = g^{\mu\lambda} R_{\mu\sigma\lambda\omega}, \quad (2.25)$$

que é um tensor simétrico¹, ou seja, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Realizando uma segunda contração com a métrica, obtemos o *escalar de Ricci*, também conhecido como escalar de curvatura, que é expresso da seguinte forma:

$$R = R_{\sigma}^{\sigma} = g^{\sigma\omega} R_{\sigma\omega} = g^{\sigma\omega} g^{\mu\lambda} R_{\mu\sigma\lambda\omega}. \quad (2.26)$$

2.2.4 Tensor Métrico

Um espaço é dito métrico quando é possível definir a distância infinitesimal ds entre dois pontos em função de um tensor covariante simétrico $g_{\mu\nu}$, denominado tensor métrico, que é uma função das coordenadas [32],

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

¹ O tensor de Ricci possui uma importante propriedade de ser o único tensor simétrico que depende de derivadas de primeira e segunda ordem da métrica, sendo linear nos termos de derivadas segunda. Consequentemente o escalar de Ricci é o único escalar que compartilha dessa mesma propriedade [31].

assim como visto na Equação (2.12), onde dx^μ e dx^ν são os diferenciais das coordenadas espaciais e temporais.

O tensor métrico é um tensor de segunda ordem, simétrico, ou seja $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, isso significa que em um espaço-tempo com 4 dimensões ele possui 10 componentes independentes, em vez de 16 que um tensor genérico de segunda ordem teria, e devido a essa simetria², um conjunto de equações envolvendo tal tensor se reduz, o que ameniza a complexidade dos cálculos em suas soluções, bem como veremos no próximo capítulo quando estivermos resolvendo as equações de Einstein.

Também utiliza-se bastante o tensor métrico na definição de vetores e tensores covariantes e contravariantes, permitindo uma operação muito frequente no cálculo tensorial, de “elevar” e “abaixar” índices, tais operações são fundamentais nas transformações de vetores e tensores entre suas formas, assim como destacado pelas relações abaixo,

$$g_{\mu\nu}U^\nu = U_\mu, \quad g^{\mu\nu}U_\nu = U^\mu, \quad g_{\mu\nu}V^{\nu\lambda} = V_\mu^\lambda \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu}V_{\nu\lambda} = V_\lambda^\mu.$$

Pode-se ainda definir um tensor contravariante $g^{\mu\nu}$, denominado tensor métrico inverso, dado pela relação,

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda, \tag{2.27}$$

sendo δ_ν^λ chamado de *delta de Kronecker*, definida por

$$\delta_\nu^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda = \nu \\ 0, & \text{se } \lambda \neq \nu. \end{cases} \tag{2.28}$$

2.2.5 Identidades de Bianchi e o Tensor de Einstein

Ainda discutindo sobre o tensor de curvatura, mostraremos que este obedece as chamadas *identidades de Bianchi*. Essa quantidade se mostrará extremamente importante nas seções seguintes, quando tratarmos sobre as famosas equações de Einstein [20]. Iniciando, temos que a derivada covariante do tensor de curvatura, expresso na forma da equação (2.20), tomada em um ponto onde possamos adotar um referencial inercial tal que as conexões, porém não suas derivadas, sejam nulas, ficará na seguinte forma:

$$\nabla_\tau R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \left(\frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\sigma \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} \right). \tag{2.29}$$

As identidades são obtidas permutando-se o índice da derivada com os dois últimos índices do tensor de curvatura, com isso chegamos à identidade de Bianchi, dada na forma:

$$\nabla_\rho R_{\beta\sigma\lambda\omega} + \nabla_\lambda R_{\beta\sigma\omega\rho} + \nabla_\omega R_{\beta\sigma\rho\lambda} = 0. \tag{2.30}$$

Realizando uma contração com $g^{\sigma\lambda}$, igualmente foi feita para a obtenção do tensor de Ricci anteriormente. No segundo termo, aplica-se a propriedade de anti-simetria em seus

² Essa simetria pode ser melhor observada quando escrevemos $g_{\mu\nu}$ em sua forma matricial, onde teremos que os elementos acima e abaixo da diagonal principal serão iguais.

terceiro e quarto índices, e então contrai-se. Enquanto que no terceiro termo, lembramos que a derivada covariante da métrica é nula devido à compatibilidade métrica na conexão de *Levi-Civita*.

$$\nabla_\tau R_{\gamma\beta} - \nabla_\beta R_{\gamma\tau} + \nabla_\lambda R_{\gamma\beta\tau}^\lambda = 0, \quad (2.31)$$

Contraindo novamente, agora com respeito à $g^{\gamma\beta}$, ficamos com

$$\nabla_\tau R - \nabla_\beta R_\tau^\beta - \nabla_\lambda R_\tau^\lambda = 0$$

$$\nabla_\mu R_\tau^\mu - \frac{1}{2} \nabla_\tau R = 0$$

$$\nabla_\mu \left(R_\tau^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\tau^\mu \right) = 0.$$

Multiplicando os termos por $g^{\tau\nu}$, obtemos por fim,

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.32)$$

A quantidade dentro dos parênteses é denominada *tensor de Einstein*, expresso por,

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

ou seja, a partir do tensor de Ricci, do escalar de Ricci e do tensor métrico, ambos em suas formas contravariantes, podemos então montar um tensor simétrico de segunda ordem com derivada covariante nula, ou seja,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.34)$$

Ainda neste capítulo, veremos de que forma este tensor se relaciona com o tensor energia-momento, que será visto na seção seguinte, onde veremos que esta relação está intrinsecamente ligada com a ideia de Einstein de que a deformação geométrica do espaço-tempo é originada pelas fontes de matéria e energia, o que contribuirá para obtenção das equações dinâmicas do campo gravitacional.

2.3 Tensor energia-momento

Nesta seção, serão apresentados alguns aspectos fundamentais de um elemento central no estudo da TRG, o chamado tensor energia-momento. Neste trabalho nos atentaremos principalmente para sua aplicação na Cosmologia, onde este tensor de segunda ordem descreve as quantidades físicas associadas a um *fluido perfeito*³, que será melhor explorado no próximo capítulo.

³ Um fluido perfeito na TRG é definido como um fluido que não possui viscosidade e nem fluxo de calor [33].

Em um sistema composto por várias partículas, a distribuição de matéria, energia e momento é praticamente contínua. Sendo assim, pode ser descrita por meio de quantidades médias, como densidade de energia, pressão e outras grandezas físicas, que são determinadas pelo tensor energia-momento, denotado por $T_{\mu\nu}$. Isso significa que toda a informação relevante sobre o fluxo de quadrimomento das partículas está contida no tensor energia-momento [21, 30, 33].

Esse objeto possui um total de 16 componentes, e assim como o tensor métrico, devido à simetria em relação a troca de índices ($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$), esse número se reduz a 10 componentes independentes, onde cada componente representa uma quantidade física. A definição de $T^{\mu\nu}$ pode ser resumida da seguinte forma:

- i) T^{00} - Componente temporal: densidade de energia;
- ii) $T^{0i} = T^{i0}$ - Componentes espaço-temporais: densidade de momento = densidade de fluxo de energia;
- iii) T^{ii} - Componentes espaciais (índices de mesmo valor): fluxo da i -ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção i , corresponde a pressão;
- iv) T^{ij} - Componentes espaciais (índices de valores diferentes): densidade de fluxo de i -momento em j -direção.

Além da simetria, o tensor energia-momento de um sistema completo também satisfaz a lei de conservação [24], expressa como,

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.35)$$

No contexto da interação gravitacional, a lei de conservação do tensor energia-momento é satisfeita sob a condição de que a derivada covariante de $T^{\mu\nu}$ seja nula,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.36)$$

onde a quantidade conservada inclui todas as fontes do campo gravitacional considerado.

Como mencionado anteriormente, em cosmologia, o conteúdo de matéria e energia do Universo é considerado um fluido perfeito, conforme veremos a diante. Neste caso, o tensor energia-momento é dado da seguinte forma [21],

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu} p. \quad (2.37)$$

Onde p e ρ representam a pressão e a densidade de energia respectivamente, enquanto que U^{μ} representa a quadri-velocidade do fluido.

2.4 Equações de Campo

Com base no princípio da equivalência, já discutido anteriormente neste capítulo, Einstein concluiu que a gravidade está diretamente relacionada à aceleração dos corpos. Diferentemente da visão de Newton, que a descrevia como uma força, Einstein propôs que a gravidade é uma manifestação da estrutura do espaço-tempo, que é curvado por corpos massivos, determinando sua geometria. E de acordo com a Relatividade Geral, essa geometria de dada região no espaço-tempo determina as geodésicas, que são as trajetórias naturais seguidas pelos corpos. Assim, o movimento dos corpos massivos nessa região é governado pela curvatura do espaço-tempo. Como foi dito de maneira simples em uma curta frase por John Wheeler (1911-2008): “*O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar.*”

Para expressar essa relação matematicamente, Einstein se inspirou na equação de Poisson da mecânica newtoniana, que é utilizada para descrever o potencial gravitacional $\varphi(\vec{r})$ gerado por uma distribuição de massa $\rho(\vec{r})$, essa equação é dada por,

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (2.38)$$

A equação de Poisson é uma equação diferencial de segunda ordem para o potencial gravitacional, que determina as equações de campo na mecânica newtoniana. De maneira análoga, na TRG, o papel do potencial gravitacional é desempenhado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Assim, para formular as equações de campo da TRG, é necessário encontrar uma equação tensorial que relacione as derivadas parciais de segunda ordem do tensor métrico com um termo que envolva a densidade de matéria e energia.

Com base no tensor de Ricci, no escalar de Ricci e no tensor métrico, Einstein formulou o chamado *tensor de Einstein*. Esse tensor é fundamental na TRG e, assim como o tensor energia-momento, possui divergência nula, como visto anteriormente. A partir disso, Einstein postulou a seguinte equação, que relaciona a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria e energia,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e G é a constante gravitacional de Newton. Na subseção que se segue abaixo, obteremos esta mesma equação por meio de um formalismo mais sofisticado.

2.4.1 Ação de Einstein-Hilbert

Para a obtenção das equações de campo de Einstein, dentre as alternativas de dedução, será descrita a abordagem que utiliza o princípio da mínima ação [34]. De acordo com este princípio, a ação S de um sistema é estacionária em relação a pequenas variações

dos elementos dinâmicos do sistema. Isso significa que:

$$\delta S = 0. \quad (2.40)$$

Iniciando então de uma ação total, que é dada pela soma da ação do campo gravitacional S_G com a ação do campo de matéria S_M , ou seja:

$$S_T = S_G + S_M. \quad (2.41)$$

Sendo a ação relacionada à gravidade S_G , em muitas bibliografias, chamada de ação de Einstein-Hilbert, e denotada por S_{EH} [24]. As ações anteriores são definidas da seguinte forma:

$$S_G = -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.42)$$

e

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x, \quad (2.43)$$

onde g representa o determinante do tensor métrico covariante, R é o escalar de Ricci, enquanto que \mathcal{L} é a densidade lagrangiana. O tensor $g_{\mu\nu}$, desempenha o papel de campo dinâmico nas equações de Einstein, por isso, as equações que resultam dessa formulação são chamadas de equações de campo de Einstein [35].

Reescrevendo a equação (2.41), temos

$$S_T = -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x, \quad (2.44)$$

e aplicando o princípio de mínima ação de (2.40), obtemos

$$\delta S_T = \int \left[-\frac{1}{2\kappa} (\delta(\sqrt{-g}R) - 2\kappa\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)) \right] d^4x = 0. \quad (2.45)$$

Desenvolvendo as variações e agrupando alguns termos, chegamos em

$$\delta S_T = \int \left[-\frac{1}{2\kappa} (\delta\sqrt{-g}(R - 2\kappa\mathcal{L}_M) + \sqrt{-g}(\delta R - 2\kappa\delta\mathcal{L}_M)) \right] d^4x = 0. \quad (2.46)$$

Sendo fácil verificar os resultados (esses resultados são obtidos no Apêndice A),

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

e

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Assim, a equação (2.46) fica

$$\delta S_T = \frac{1}{2\kappa} \int \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(2\kappa\mathcal{L}_M - R) - \sqrt{-g}(\delta R - 2\kappa\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}) \right] d^4x = 0, \quad (2.49)$$

lembrando ainda que

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$

logo,

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}.$$

Isso quer dizer que precisamos da variação do tensor de Ricci, o que não será necessário, já que $\delta R_{\mu\nu}$ não contribuirá para (2.49), pois se torna uma integral de superfície, que se anula em todo o espaço [30].

Com isso, a equação (2.49) se torna

$$\delta S_T = \int \frac{1}{2\kappa} \left[\left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - R_{\mu\nu} \right) - \kappa \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4 x = 0. \quad (2.50)$$

Para variações arbitrárias de $\delta g^{\mu\nu}$, o integrando deve ser nulo, e assim obtemos,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \right). \quad (2.51)$$

Sendo o tensor energia-momento definido em termos da densidade lagrangiana e da variação da ação em relação ao tensor métrico, expresso na forma,

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.52)$$

E dessa forma, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

onde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Assim ficamos finalmente com,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Essas são as famosas equações de campo da Relatividade Geral. Essa expressão tensorial representa um conjunto de 16 equações parciais, no entanto, devido às simetrias presentes no tensor de Einstein e no tensor energia-momento, esse número se reduz a um total de 10 equações independentes. Essas equações (2.54), estabelecem uma relação fundamental entre a geometria (lado esquerdo) e o conteúdo de matéria e energia presente no espaço-tempo (lado direito).

3 Tópicos da Cosmologia

A ideia da Cosmologia Padrão é de que o Universo evoluiu de um estado de alta temperatura e densidade que teve início com um evento chamado de *Big-Bang*. O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) nos diz que há aproximadamente 13,8 bilhões de anos, toda a forma de matéria existente estava concentrada em um único lugar do espaço com uma densidade infinita [36]. Tal modelo possui princípios de sustentação, destacando as três principais, temos:

- **Teoria Geral da Relatividade de Einstein:** descreve a gravidade como sendo uma curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria e energia.
- **Princípio Cosmológico:** de forma resumida, trata-se da homogeneidade e isotropia do Universo em largas escalas, que será melhor tratado na Seção seguinte.
- **Postulado de Weyl:** diz sobre as fontes de gravitação poderem ser descritas como um fluido perfeito, que será melhor abordado ao longo deste capítulo.

O primeiro ponto destacado acima foi revisado no capítulo anterior, já os outros dois serão abordados com mais detalhes no decorrer deste capítulo. Também solucionaremos as equações de Einstein usando a métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), obtendo assim as famosas equações de Friedmann, que são essenciais para o estudo da Cosmologia. Além disso, listaremos os chamados parâmetros cosmológicos, evidenciando sua importância dentro da cosmologia observacional.

3.1 O Princípio Cosmológico e a Métrica

Um dos pilares do MCP, como mencionado anteriormente, é o chamado **Princípio Cosmológico**, o qual afirma que o universo em largas escalas é homogêneo e isotrópico. E quando nos referimos a largas escalas, estamos tratando de grandes distâncias, que estão acima de 100 Megaparsec (Mpc)¹. Este princípio nos diz que não existe uma região privilegiada no Universo, pois ele apresenta as mesmas propriedades físicas em todos os pontos (homogeneidade) e em todas as direções (isotropia), e assim para todos os pontos em que olharmos teremos a mesma impressão, de qualquer referencial. Ou de acordo com [21], em cada período, o Universo apresenta o mesmo aspecto em todos os pontos, com exceção das irregularidades locais.

¹ Um parsec (pc) é definido como sendo o cateto adjacente de um segundo de arco quando o cateto oposto vale uma unidade astronômica; mais especificamente $1\text{pc} \sim 3261$ anos-luz (distância que a luz viaja em um ano) logo 1 Mpc corresponde a $30,9 \cdot 10^6$ trilhões de quilômetros.

Considerando agora um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico, podendo se expandir ou se contrair, e assumindo que o componente espacial da métrica pode ser dependente do tempo, temos então que a métrica mais geral que pode ser construída é a métrica FRW, que assume a seguinte forma²,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.1)$$

sendo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ o ângulo sólido, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico e por questão de simplificação das equações futuras, adotaremos $c = 1$. Assim, a métrica FRW expressa em coordenadas esféricas é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.2)$$

onde $a(t)$ representa o chamado fator de escala, que é o responsável pela dinâmica do universo, t é o tempo cósmico, (r, θ, ϕ) são as coordenadas espaciais comoveis, enquanto que k está representando a denominada constante de curvatura, que define a curvatura espacial do Universo, podendo assumir os valores de 0, 1 ou -1 , onde veremos a seguir cada um desses respectivos casos.

- Caso $k = -1$ (**Geometria Hiperbólica**): caracteriza um Universo aberto;
- Caso $k = 1$ (**Geometria Esférica**): descreve um Universo fechado;
- Caso $k = 0$ (**Geometria Plana**): nessa geometria o Universo é denominado plano. Veremos adiante que existem fortes indicações de que essa seja a que mais se aproxima da geometria do nosso Universo atual.

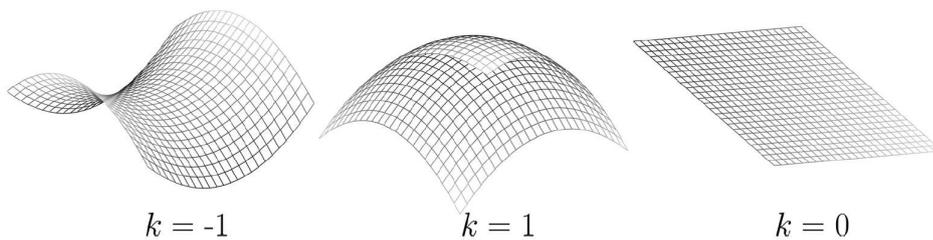


Figura 1 – Representação das três possibilidades de curvaturas para o Universo, listados acima para diferentes valores de k .

Fonte: [37, p. 4]

3.2 Solução das Equações de Einstein na Métrica FRW

Agora, utilizando a métrica FRW apresentada anteriormente e considerando uma geometria plana ($k = 0$), é possível encontrar uma solução para as equações de Einstein.

² Aqui utilizamos a assinatura $(+, -, -, -)$.

Para obter tal solução, partiremos da determinação das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que pode ser escrito na forma matricial, dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Sendo $g_{\mu\nu} = 0 \ \forall \ \mu \neq \nu$ e $g_{\mu\nu} \neq 0 \ \forall \ \mu = \nu$. Assim, destacando os elementos da diagonal principal de $g_{\mu\nu}$, que são os coeficientes não nulos, temos

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{11} &= -\frac{a^2(t)}{(1-kr^2)} \\ g_{22} &= -a^2(t)r^2 \\ g_{33} &= -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Precisamos determinar também as componentes do tensor de Ricci, que vem diretamente do tensor de Riemann definido pela Equação (2.18), representado por

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} \Gamma_{\nu\tau}^{\lambda}, \quad (3.5)$$

onde os Símbolos de Christoffel, também já definidos, são destacados abaixo,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right).$$

Calculamos então seus termos não nulos³, dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}; & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2; & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta; \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}; & \Gamma_{22}^1 &= -r^2(1-kr^2); & \Gamma_{33}^1 &= -r^2 \sin^2 \theta (1-kr^2); \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r^2}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}; \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

³ Para um acompanhamento detalhado de todas as demonstrações, consulte o trabalho [38]. Ou ainda, com cálculos obtendo cada termo dos Símbolos de Christoffel diretamente da equação da geodésica, podem ser encontrados em [39].

Notamos então que apenas os termos da diagonal principal do tensor de Ricci serão diferentes de zero, e calculando-os, teremos como o resultado os seguintes termos,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}; \\
 R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}; \\
 R_{22} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k); \\
 R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k).
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

E conseqüentemente, obtemos o escalar de Ricci, visto na equação (2.26), dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

ou seja,

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}. \tag{3.7}$$

Que assumirá a seguinte forma,

$$R = -\frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \tag{3.8}$$

Um outro termo presente nas equações de Einstein que precisamos calcular as componentes na métrica FRW é o tensor energia-momento, que está relacionado ao conteúdo material do Universo, que pode ser considerado um fluido perfeito, já que estamos considerando escalas acima de 100 Mpc. E como discutido anteriormente na seção (2.3), este tensor terá densidade de energia ρ e pressão p , assumindo a forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p, \tag{3.9}$$

sendo U_μ a quadri-velocidade para um referencial comovel ao fluido, ou seja, um referencial no qual a distância entre dois pontos não muda com a expansão do Universo. Podemos ainda escrever a matriz do tensor energia-momento, dada na forma [24],

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

e tomando o traço de $T_{\mu\nu}$, obtemos

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu = \rho - 3p \tag{3.11}$$

Para a métrica de FRW, utilizando os resultados de $g_{\mu\nu}$, podemos determinar as componentes⁴ não nulas do tensor energia-momento, listadas a seguir,

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho; \\ T_{11} &= \frac{pa^2}{(1-kr^2)}; \\ T_{22} &= pr^2a^2; \\ T_{33} &= pr^2\sin^2\theta a^2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

sendo $T_{00} = \rho g_{00}$, $T_{11} = -pg_{11}$, $T_{22} = -pg_{22}$ e $T_{33} = -pg_{33}$.

Na subseção a seguir, serão utilizados todos os resultados aqui obtidos para então “montarmos” as chamadas *Equações de Friedmann*, que consiste na primeira solução das equações de Einstein considerando o Universo em expansão.

3.2.1 Equações de Friedmann

De modo a facilitar a solução das equações de campo, reescreveremos a equação (2.53) de uma forma mais conveniente, tomando primeiramente o traço em ambos lados e após simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) &= \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\mu &= \kappa T \\ -R &= \kappa T, \end{aligned} \tag{3.13}$$

que ao substituírmos o último resultado da equação (3.13) em (2.53), ficaremos com uma equação equivalente, escrita na forma,

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \tag{3.14}$$

sendo importante destacar que ambas as equações (2.53) e (3.14) possuem o mesmo significado físico, estando apenas escritas de maneiras diferentes.

Como todos os tensores envolvidos nessa solução são diagonais, teremos um total de quatro equações. Contudo, as três equações para as componentes espaciais ($\mu\nu = ii$, $i = 1, 2, 3$) são equivalentes, refletindo o caráter de homogeneidade e isotropia da métrica, sendo assim, teremos apenas duas equações independentes, uma temporal ($\mu\nu = 00$) e outra espacial ($\mu\nu = 11 = 22 = 33$).

⁴ Um maior detalhamento na obtenção dos resultados destacados para o tensor energia-momento, pode ser encontrado no trabalho [40].

Para a parte temporal $\mu\nu = 00$, temos que a equação (3.14) fica dada por

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \quad (3.15)$$

logo, substituindo em (3.15) os devidos resultados obtidos, dados pelas equações (3.4), (3.6) e (3.8), obtemos a primeira equação de Friedmann, escrita na forma,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p). \quad (3.16)$$

Para a parte espacial, tomando⁵ $\mu\nu = 22$, temos que a Equação (3.14) se tornará

$$R_{22} = \kappa \left(T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T \right), \quad (3.17)$$

fazendo as devidas substituições, como realizadas para a parte temporal, chegamos em

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{2}(\rho - p), \quad (3.18)$$

podemos agora substituir (3.16) em (3.18), e assim obter a segunda Equação de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.19)$$

As equações (3.16) e (3.19) são frequentemente chamadas⁶ na literatura, respectivamente, equação da aceleração⁷ e equação de Friedmann. Essas são duas das equações mais importantes dentro Cosmologia, pois descrevem a evolução do fator de escala e a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico, que resultam das equações de Einstein na métrica FRW para o tensor energia momento de um fluido perfeito em um Universo em expansão.

3.2.2 Equação da Continuidade

Derivando a equação de Friedmann (3.19) em relação ao tempo, e substituindo a equação da aceleração (3.16) no resultado da derivação, obtemos o seguinte resultado,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (3.20)$$

que é a chamada equação de continuidade para o fluido cosmológico. Esta equação também pode ser obtida por meio da conservação do tensor energia momento, ou seja,

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad (3.21)$$

⁵ Usaremos convenientemente os valores de $\mu\nu = 22$, a fim de facilitar a manipulação algébrica, sendo evidente que chegaríamos ao mesmo resultado caso usássemos as configurações $\mu\nu = 11$ ou $\mu\nu = 33$.

⁶ Quando nos referirmos ao conjunto dessas duas equações encontradas, usaremos a expressão: equações de Friedmann.

⁷ Podemos observar na equação da aceleração que, se ρ e p são positivos, então a expansão do Universo é desacelerada ($\ddot{a} < 0$) e quando $p < -\frac{\rho}{3}$ a expansão é acelerada ($\ddot{a} > 0$) [41].

onde para o caso $\nu = 0$ resulta exatamente na equação de continuidade expressa em (3.20), enquanto que para o caso $\nu = i$ ($i = 1, 2, 3$), obtemos $\nabla p = 0$, garantindo assim, que a pressão não dependa da posição. De acordo com essa equação, a mudança no volume espacial e o trabalho realizado pela pressão com a expansão, contribuem com a variação da densidade de energia.

Precisamos agora de uma outra equação para fechar o conjunto mínimo de equações necessárias para descrevermos a evolução do Universo. Para isso, utilizamos uma *equação de estado*, que relaciona a pressão e a densidade dos constituintes do Universo, pois com a ideia de sua composição por um fluido perfeito, assume-se que a pressão p é uma função da densidade de energia ρ , e assim define-se a equação de estado da seguinte forma,

$$p = \omega\rho, \quad (3.22)$$

sendo ω um parâmetro constante que pode assumir diferentes valores para fluidos conforme suas características, que por sua vez, determinam as fases do Universo.

Substituindo este resultado na equação de continuidade, obtemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.23)$$

integrando a equação acima com relação ao tempo, obtemos uma solução genérica que representa a relação entre a densidade de energia e o fator de escala, dada na forma,

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega)}. \quad (3.24)$$

Esta é a equação do fluido, que nos permite compreender como se comporta a densidade de alguns fluidos de interesse em Cosmologia.

3.2.3 Componentes dominantes do Universo

Com relação ao parâmetro ω , o mesmo assumirá diferentes valores dependendo de qual seja o componente dominante do Universo, onde temos três exemplos mais comuns de fluidos cosmológicos, são eles: radiação, matéria, e a energia de vácuo. Veremos a seguir cada um desses respectivos casos.

1. **Universo dominado por Radiação:** Se tivermos o caso onde a densidade de energia do Universo é dominada por matéria relativística e radiação, o parâmetro da equação de estado assume o valor $\omega = \frac{1}{3}$. Sendo um gás isotrópico de partículas relativísticas um fluido perfeito, existe um tensor energia momento dado pela equação (3.9), sabemos também que o tensor para o eletromagnetismo pode ser expresso em termos da intensidade de campo, ou seja,

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}. \quad (3.25)$$

tomando o traço deste tensor, teremos

$$T_{\mu}^{\mu} = F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 0, \quad (3.26)$$

e como já visto antes,

$$T = T_{\mu}^{\mu} = 3p_r - \rho_r,$$

então a equação de estado de um gás de fótons para a radiação será,

$$3p_r - \rho_r = 0$$

que nos dá, portanto,

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (3.27)$$

Comparando com a equação de estado definida anteriormente, $p = \omega\rho$, concluímos que para a fase de radiação, teremos o seguinte valor para a constante

$$\omega = \frac{1}{3}.$$

Assim, pela equação (3.24), teremos para este caso,

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\frac{1}{3})} = \rho_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4,$$

e portanto,

$$\rho_r(t) \propto a^{-4}. \quad (3.28)$$

E assim como no caso da matéria, temos também a equação da continuidade para este constituinte, que fica na forma,

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0. \quad (3.29)$$

Essa equação será bastante útil no capítulo deste trabalho, onde fará parte do conjunto de equações cosmológicas que serão resolvidas.

2. **Universo dominado por Matéria:** Considerando a fase dominada por matéria, temos que nesta etapa da expansão, a pressão é nula, logo o parâmetro da equação de estado assume o valor de $\omega = 0$. Assim, a densidade de energia da matéria, de (3.24), possui a forma,

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+0)} = \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3,$$

portanto,

$$\rho_m(t) \propto a^{-3}. \quad (3.30)$$

E a equação da continuidade para a o constituinte de matéria, fica na forma,

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0. \quad (3.31)$$

E claro, essa equação também será utilizada no Capítulo

3. **Universo dominado pela Energia de Vácuo:** Considerando agora um Universo dominado pela energia de vácuo, teremos que o parâmetro da equação de estado será $\omega = -1$, e assim, a densidade de energia para este caso ficará,

$$\rho_{\Lambda}(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1-1)},$$

logo,

$$\rho_{\Lambda}(t) = \text{constante}. \quad (3.32)$$

Com isso, vimos que há três períodos para a evolução do Universo, o primeiro dominado pela radiação, o segundo dominado pela matéria e por último, o período dominado pela constante cosmológica [21].

3.3 Parâmetros Cosmológicos

O desenvolvimento de experimentos relacionados à cosmologia é bastante limitado, restringindo-se às áreas correlacionadas como a física de partículas e a relatividade geral, por exemplo [20]. Nesta seção, estaremos interessados em tratar sobre alguns parâmetros que são essenciais no estudo da Cosmologia.

3.3.1 Parâmetro de Hubble

O parâmetro de Hubble, responsável por medir a taxa de expansão do Universo, é definido da seguinte forma,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.33)$$

De modo em que $H(0) = H_0$ seja seu valor atual, chamado nessas condições, de *constante de Hubble*, que na literatura é comumente expresso em termo do parâmetro adimensional h , ou seja,

$$H_0 = h \cdot 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \quad (3.34)$$

Valor Observacional

A determinação do valor exato de H_0 é fundamental para a elaboração de modelos cosmológicos mais precisos e completos, pois essa constante possui conexão direta com diversas outras grandezas cosmológicas indispensáveis, onde podemos destacar algumas quantidades como: distâncias físicas entre objetos astronômicos, além da densidade de energia, idade e aceleração de expansão do Universo. E de acordo com as observações recentes do satélite Planck, o valor atual de H_0 é estimado para o Universo tardio em $H_0 = (67,40 \pm 0,50) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, com $h = 0,674 \pm 0,5$ [3]. Esse valor foi obtido utilizando medições baseadas no Fundo Cósmico de Micro-ondas (CMB), e podemos observar na Fig. 2 seu comportamento de acordo como o modelo Λ -CDM.

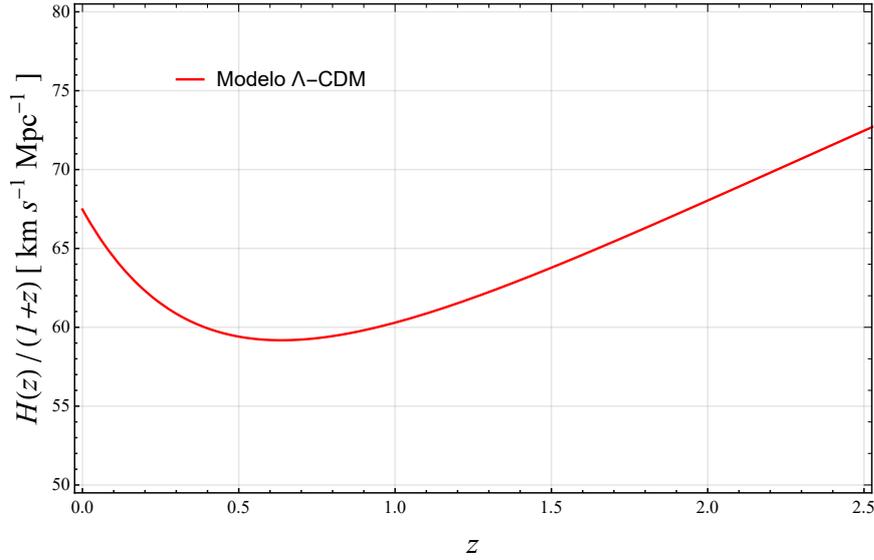


Figura 2 – Evolução do parâmetro de Hubble normalizado $H(z)/(1+z)$ para do modelo Λ -CDM em função do redshift z .

Quando necessário, ao longo deste trabalho, usaremos o valor de H_0 dentro do Modelo Cosmológico Padrão, utilizaremos esse valor descrito acima, mesmo ele não sendo absoluto, pois assim como discutiremos posteriormente, diferentes métodos de investigações sobre o valor dessa constante por meio de observações do Universo primordial e tardio, estão resultando em valores discrepantes para H_0 , essa recente questão é considerada um problema na Cosmologia, sendo conhecida na literatura como a tensão de Hubble.

3.3.2 Parâmetro de Densidade de Energia

Podemos agora escrever as equações de Friedmann em termos do já definido parâmetro de Hubble, e como essas equações estão relacionadas aos componentes do Universo, podemos reescrevê-las na forma,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i - \frac{k}{a^2} \quad (3.35)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} \sum_{i=1}^n (\rho_i + 3p_i). \quad (3.36)$$

com i representando cada componente.

De acordo com observações atuais o Universo é aproximadamente plano [3], e para essa geometria, como explicado antes, a constante de curvatura assume o valor nulo $k = 0$, assim a densidade de energia será crítica, ou seja,

$$\rho_{crit} = \frac{3}{\kappa} H^2, \quad (3.37)$$

que representará a densidade total de energia associada a um Universo plano.

Agora, podemos então definir um parâmetro de grande relevância na cosmologia, o chamado parâmetro de densidade de energia, que é dado pela razão entre a densidade de energia ρ e a densidade de energia crítica ρ_{crit} , o que fornece,

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad (3.38)$$

e assim obtemos

$$\Omega_i = \frac{k}{a^2 H^2} + 1, \quad (3.39)$$

podemos ainda escrever o parâmetro de densidade total da seguinte forma,

$$\Omega_{total} = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad (3.40)$$

ou

$$\Omega_{total} = \frac{\rho_r}{\rho_{crit}} + \frac{\rho_m}{\rho_{crit}} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit}}, \quad (3.41)$$

onde

$$\rho_r = \frac{\rho_{r,0}}{a^4}, \quad \rho_m = \frac{\rho_{m,0}}{a^3} \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}, \quad (3.42)$$

com isso, temos

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \frac{\rho_r}{\rho_{crit}} = \frac{1}{\rho_{crit}} \frac{\rho_{r,0}}{a^4} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4}, \\ \Omega_m &= \frac{\rho_m}{\rho_{crit}} = \frac{1}{\rho_{crit}} \frac{\rho_{m,0}}{a^3} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}, \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit}} = \frac{1}{\rho_{crit}} \rho_{\Lambda,0} = \Omega_{\Lambda,0}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

ou seja,

$$\Omega_{total} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.44)$$

Agora, podemos escrever a equação de Friedmann como,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho_{total} - \frac{k}{a^2} = H_0^2 \Omega_{total} - \frac{k}{a^2} = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (3.45)$$

ou

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} - \frac{k}{a^2 H_0^2} \right), \quad (3.46)$$

sendo

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H_0^2},$$

o parâmetro de densidade de energia associado à curvatura. Sendo assim, chega-se finalmente na equação de Friedmann,

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k \right). \quad (3.47)$$

De modo que, da equação (3.39), teremos

$$\Omega_{total} + \Omega_k = 1. \quad (3.48)$$

Dessa forma, vimos que o parâmetro de densidade de energia relaciona de maneira simples, a constante de curvatura k do espaço-tempo com a distribuição de densidade de energia total do Universo. Logo, analisando (3.48), estabelecemos as seguintes possibilidades para a geometria do Universo, em termos do parâmetro de densidade de energia.

- $\Omega_k = 0 \implies \Omega_{total} = 1 \iff k = 0$: (Universo plano);
- $\Omega_k > 0 \implies \Omega_{total} < 1 \iff k < 0$: (Universo aberto);
- $\Omega_k < 0 \implies \Omega_{total} > 1 \iff k > 0$: (Universo fechado).

Portanto, o parâmetro Ω é considerado uma importante medida indireta da geometria do Universo. E para finalizar, plotamos na Fig. 3 a evolução deste parâmetro de cada constituinte de acordo com o modelo Λ -CDM, com Ω_r , Ω_b , Ω_d , Ω_Λ e $\Omega_b + \Omega_d$ correspondendo às quantidades de densidade de energia da radiação, matéria bariônica, matéria escura, energia escura e a soma de ambas as matérias, respectivamente. Nota-se que a evolução está em termos do tempo de dobramento $N = \ln(a)$, isso devido podermos fazer melhores análises em tempos primordiais, onde a radiação dominava quase que completamente.

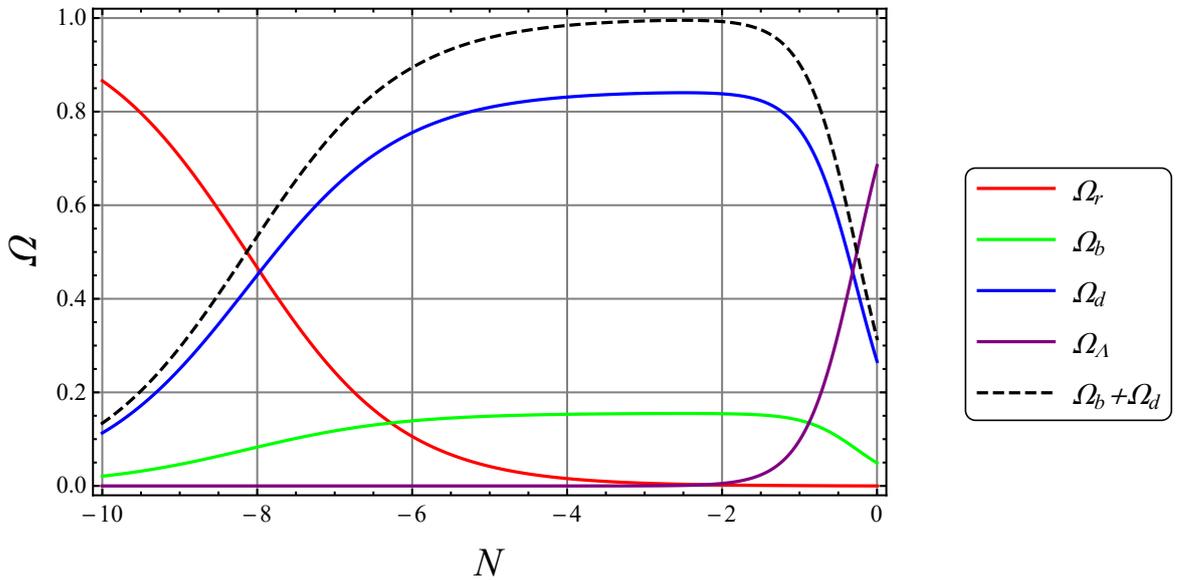


Figura 3 – Evolução dos parâmetros de densidade de energia Ω associados a cada constituinte, em função de N para o modelo Λ -CDM.

Nos gráficos da Fig. 3, podemos visualizar claramente as fases de transição entre as eras de domínio de cada uma das quantidades, como discutido anteriormente, iniciando pelo domínio da radiação, passando pelo domínio da matéria, e finalmente para o Universo recente, a energia escura se destaca como a principal dominante.

3.3.3 Parâmetro de Desaceleração

Analisando a equação da aceleração, observamos que ela permite calcular a variação da taxa de expansão do Universo. Se tivermos $\rho + 3p \geq 0$, teremos a chamada condição de energia forte. Considerando a possibilidade de igualdade, ou seja, $\rho + 3p = 0$, isso resultará em uma evolução cosmológica estacionária, representada por $\ddot{a} = 0$. No caso em que $\rho + 3p > 0$, temos uma evolução cosmológica desacelerada, ou seja, $\ddot{a} < 0$. Por outro lado, violando a condição de energia forte, teremos $\rho + 3p < 0$, o que implica $\ddot{a} > 0$, representando uma expansão acelerada do Universo.

Sobre a aceleração ou desaceleração mencionada, assim como na mecânica, onde a variação da velocidade em relação ao tempo nos dá a aceleração, na cosmologia, a variação do parâmetro de Hubble em relação ao tempo nos fornece o chamado parâmetro de desaceleração q . Embora \ddot{a} seja uma boa estimativa da aceleração do Universo, o parâmetro de desaceleração q é mais comum na literatura. Para obter sua representação matemática, devemos expandir o fator de escala $a(t)$ em uma série de Taylor em torno do tempo atual t_0 , de forma que obtemos

$$a(t) = a_0 + (t - t_0) \dot{a}(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \ddot{a}(t_0) + \dots,$$

que pode ser reescrita como,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots,$$

e assim, o parâmetro de desaceleração fica definido por

$$q = -\frac{\ddot{a}}{H^2 a} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.49)$$

Sendo este, um parâmetro sem dimensões físicas que nos permite classificar a evolução do Universo em três casos, que são: desacelerada ($q > 0$), estática ($q = 0$) ou acelerada ($q < 0$). Podemos ainda representar q em termos do já definido anteriormente, parâmetro de Hubble, para isso tomamos a derivada temporal de H , o que fornece

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2,$$

e dividindo toda a equação por $(-H^2)$, teremos

$$q = -\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (3.50)$$

Podemos também representar q em termo do já definido, parâmetro de densidade de energia, para isso, partiremos da equação da aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p),$$

e dividindo a mesma por $(-H^2)$, obtemos

$$-\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3H^2} \right] (\rho + 3p),$$

onde o termo entre colchetes é justamente o inverso da densidade crítica ρ_{crit} , enquanto que o lado esquerdo representa a desaceleração q , e além disso, podemos novamente usar a equação de estado $p = \omega\rho$, para assim obtermos

$$q = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_{crit}} \right] (\rho + 3\omega\rho),$$

e usando o resultado já obtido para a densidade de energia dado pela equação (3.38), obtemos finalmente

$$q = \frac{1}{2}\Omega(1 + 3\omega). \quad (3.51)$$

Que nos permite portanto, associar a aceleração cósmica do Universo a sua densidade de energia e ao seu componente dominante. E como relação ao valor atual desse parâmetro, estima-se em $q_0 \approx -0.53$ [3], indicando de fato a expansão acelerada do Universo, e a evolução desse parâmetro pode ser visualizada no gráfico da Fig. 2.

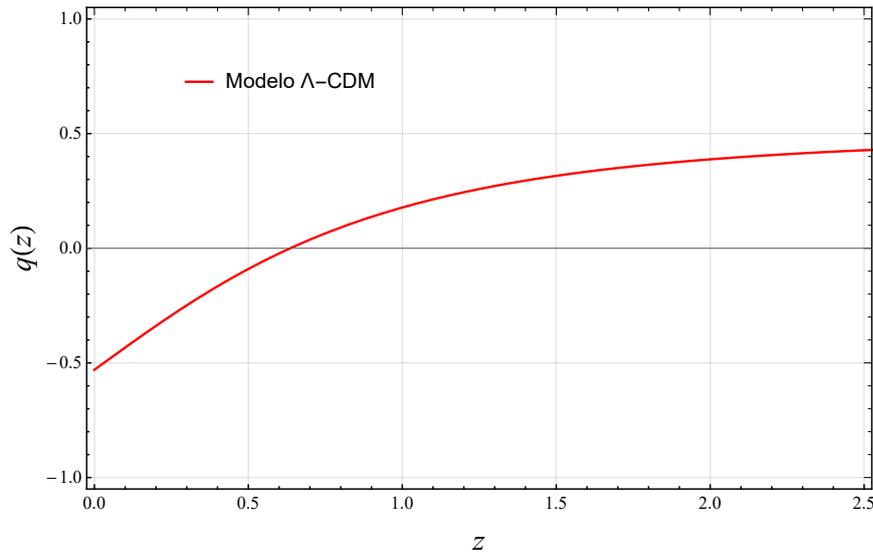


Figura 4 – Evolução do parâmetro de desaceleração para do modelo Λ -CDM em função do redshift z .

4 Gravidade de Horndeski na Cosmologia

Neste capítulo abordaremos sobre a teoria gravitacional de Horndeski, que foi introduzida na literatura em 1974 por Gregory Horndeski [8]. Nos últimos anos, essa teoria tem sido amplamente aplicada em diversos estudos que envolvem gravidade modificada, principalmente em tópicos inseridos na cosmologia. Essa teoria foi redescoberta recentemente no contexto de generalizações de modelos Galileons e corresponde a ação mais geral para uma teoria escalar-tensorial em um espaço-tempo com quatro dimensões, com equações de campo de segunda ordem¹.

Essas características estão de acordo com as teorias de Lovelock [42], que estabelecem que, para modificarmos a gravidade de Einstein mantendo as equações de movimento de segunda ordem em um espaço-tempo de quatro dimensões, é necessário adicionar graus extras de liberdade. O caso mais simples dessa modificação é a adição de um campo escalar não minimamente acoplado aos tensores da curvatura do espaço-tempo, o que leva às teorias de Horndeski [8, 43, 44].

4.1 A Lagrangeana

A teoria de Horndeski é caracterizada pela ação,

$$S_H[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_H[g_{\mu\nu}, \phi], \quad (4.1)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ e \mathcal{L}_H é a lagrangeana de Horndeski [8], dada na forma,

$$\mathcal{L}_H = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i, \quad (4.2)$$

com

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square\phi, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}[(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)], \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - \frac{1}{6}G_{5,X}[(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) \\ & + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \phi)(\nabla^\alpha \nabla_\beta \phi)(\nabla^\beta \nabla_\mu \phi)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aqui, G_i ($i = 2, 3, 4, 5$) são funções arbitrárias do campo escalar ϕ e do seu termo cinético canônico $X \equiv -\frac{1}{2}\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$, com $\square\phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \phi$ e derivadas parciais $G_{j,X}(\phi, X) =$

¹ Garante a ausência de instabilidades dinâmicas.

$\partial G_j(\phi, X)/\partial X$ com $j = 4, 5$, R é o escalar de Ricci e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Dessa forma, a ação completa da teoria de Horndeski é escrita como,

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_H + \mathcal{L}_M), \quad (4.7)$$

com \mathcal{L}_M representando o conteúdo de matéria (e radiação) do Universo, que corresponde a um fluido perfeito com densidade de energia ρ_M e pressão p_M .

4.2 Casos Particulares

A ação de Horndeski apresentada acima (4.7), pode ser escrita para uma grande variedade de modelos de gravidade, a seguir destacamos alguns dos casos mais investigados, sendo $M_{\text{Pl}}^2 = (8\pi G)^{-1}$.

- i) Recupera-se o modelo mais usual da cosmologia, o cenário Λ CDM, definindo as funções G_i da seguinte forma,

$$G_2 = -M_{\text{Pl}}^2 \Lambda, \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \quad \text{e} \quad G_5 = 0, \quad (4.8)$$

o que nos dá a ação,

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_M. \quad (4.9)$$

- ii) O modelo de quintessência pode ser obtido de maneira similar, ajustando somente a função G_2 no caso acima, ou seja,

$$G_2 = X - V(\phi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \quad \text{e} \quad G_5 = 0, \quad (4.10)$$

que nos entrega a ação

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M. \quad (4.11)$$

Já para o modelo κ -essência, que generaliza o modelo anterior, define-se

$$G_2 = P(\phi, X), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \quad \text{e} \quad G_5 = 0, \quad (4.12)$$

onde $P(\phi, X)$ é uma função arbitrária de ϕ e do termo cinético X , e a ação fica

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} P(X, \phi) + S_M. \quad (4.13)$$

- iii) Para a teoria Brans-Dicke, a lagrangeana pode ser obtida da seguinte forma,

$$G_2 = \frac{\omega_{BD} X}{2\phi} - V(\phi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{\phi}{2} \quad \text{e} \quad G_5 = 0, \quad (4.14)$$

o que nos entrega a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\phi R}{2} - \frac{\omega_{BD}}{2\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M, \quad (4.15)$$

onde ω_{BD} é o parâmetro de Brans-Dicke.

iv) Para o caso das teorias $f(R)$, que é caracterizada pela ação

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M, \quad (4.16)$$

em que $f(R)$ é uma função arbitrária do escalar de curvatura R . Nesse caso, temos as seguintes definições para as funções G_i ,

$$G_2 = -\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2}(Rf' - f), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 f' \quad \text{e} \quad G_5 = 0, \quad (4.17)$$

com $f' = \partial f / \partial R$.

4.3 Equações de Movimento do Background

O próximo passo é considerar um universo em expansão descrito pela geometria Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plana, homogênea e isotrópica com o seguinte sistema métrico,

$$ds^2 = -dt + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.18)$$

com isso, as equações de Friedmann assumem a forma [45],

$$\begin{aligned} & 2XG_{2,X} - G_2 + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} - 6H^2G_4 \\ & + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX}) - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} \\ & - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) \\ & - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) = -(\rho_A + \rho_B), \end{aligned} \quad (4.19)$$

e

$$\begin{aligned} & G_2 - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 \\ & - 12H^2XG_{4,X} - 4H\dot{X}G_{4,X} - 8\dot{H}XG_{4,X} \\ & - 8HX\dot{X}G_{4,XX} + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} \\ & + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} \\ & + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} \\ & + 4HX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) \\ & + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} = -(p_A + p_B). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Os subíndices A e B nas densidades e pressões representam dois fluidos perfeitos [45], que em geral são atribuídos às quantidades de matéria e radiação, sendo que ambas as equações (4.19) e (4.20) podem ser escritas em suas formas usuais, da seguinte maneira

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R + \rho_\phi), \quad (4.21)$$

e

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi G(p_M + p_R + p_\phi), \quad (4.22)$$

onde,

$$\begin{aligned} \rho_\phi = & 2XG_{2,X} - G_2 + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} - 6H^2G_4 \\ & + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX} - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} \\ & - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) \\ & - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) + \frac{3H^2}{\kappa^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} p_\phi = & G_2 - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 \\ & - 12H^2XG_{4,X} - 4H\dot{X}G_{4,X} - 8\dot{H}XG_{4,X} \\ & - 8HX\dot{X}G_{4,XX} + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} \\ & + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} \\ & + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} \\ & + 4HX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) \\ & + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} - \frac{1}{\kappa^2}(3H^2 + 2\dot{H}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Variando a ação (4.7) com respeito a ϕ , obtemos a evolução do campo escalar dada na forma [45],

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(a^3 J) = P_\phi \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} J = & \dot{\phi}G_{2,X} + 6HXG_{3,X} - 2\dot{\phi}G_{3,\phi} \\ & + 6H^2\dot{\phi}(G_{4,X} + 2XG_{4,XX}) - 12HXG_{4,\phi X} \\ & + 2H^3X(3G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) \\ & - 6H^2\dot{\phi}(G_{5,\phi} + XG_{5,\phi X}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} P_\phi = & G_{2,\phi} - 2X(G_{3,\phi\phi} + \ddot{\phi}G_{3,\phi X}) \\ & + 6(2H^2 + \dot{H})G_{4,\phi} + 6H(\dot{X} + 2HX)G_{4,\phi X} \\ & - 6H^2XG_{5,\phi\phi} + 2H^3X\dot{\phi}G_{5,\phi X}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Com J e P_ϕ sendo a corrente e a fonte escalar, respectivamente. Nas equações apresentadas acima, os dois fluidos perfeitos satisfazem as seguintes equações de continuidade [45], para a matéria e radiação, respectivamente,

$$\dot{\rho}_M + 3H\rho_M(1 + \omega_M) = 0, \quad (4.28)$$

e

$$\dot{\rho}_R + 3H\rho_R(1 + \omega_R) = 0. \quad (4.29)$$

E por meio disso, com o conjunto de soluções fornecidos por estas equações listadas até agora, é possível obter a evolução de fundo completa do Universo.

4.4 Perturbações, Instabilidades e Restrições Observacionais

Com as equações do fundo cosmológico apresentadas, a ideia seguinte consiste em abordar sobre perturbações [45, 46]. Para nossos propósitos, o interesse está voltado para as perturbações escalares e tensoriais, pois o foco está em tratar as condições de ausência de instabilidades fantasmas e laplacianas, que se forem satisfeitas, garantirá a viabilidade cosmológica do modelo a ser proposto. Particularmente, para que a teoria de Horndeski seja livre das instabilidades laplacianas associadas à velocidade de propagação do campo escalar, devemos ter o seguinte [45],

$$c_S^2 \equiv \frac{3(2w_1^2 w_2 H - w_2^2 w_4 + 4w_1 w_2 \dot{w}_1 - 2w_1^2 \dot{w}_2) - 6w_1^2 [(1 + \omega_A)\rho_A + (1 + \omega_B)\rho_B]}{w_1(4w_1 w_3 + 9w_2^2)} \geq 0. \quad (4.30)$$

Enquanto que para a ausência de instabilidades fantasmas associadas à energia cinética das perturbações escalares, devemos ter [45],

$$Q_S \equiv \frac{w_1(4w_1 w_3 + 9w_2^2)}{3w_2^2} > 0. \quad (4.31)$$

Já para o caso das perturbações tensoriais (ondas gravitacionais), para que não haja instabilidades laplacianas sobre a velocidade de propagação das perturbações tensoriais, deve-se satisfazer

$$c_T^2 \equiv \frac{w_4}{w_1} \geq 0. \quad (4.32)$$

Similarmente, para a ausência de instabilidades fantasmas associadas à energia cinética das perturbações tensoriais, deve-se ter

$$Q_T \equiv \frac{w_1}{4} > 0. \quad (4.33)$$

No formalismo da gravidade de Horndeski aplicado a um fundo cosmológico FRW, esses coeficientes w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são obtidos a partir do Lagrangiano perturbado, sua expressão geral pode ser encontrada em [45], e são dados na seguinte forma

$$w_1 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X}) - 2X(G_{5,X}\dot{\phi}H - G_{5,\phi}), \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} w_2 \equiv & -2G_{3,X}X\dot{\phi} + 4G_4H - 16X^2G_{4,XX}H \\ & + 4(\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 4HG_{4,X})X + 2G_{4,\phi}\dot{\phi} \\ & + 8X^2HG_{5,\phi X} + 2HX(6G_{5,\phi} - 5G_{5,X}\dot{\phi}H) \\ & - 4G_{5,XX}\dot{\phi}X^2H^2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
w_3 \equiv & 3X (G_{2,X} + 2XG_{2,XX}) \\
& + 6X \left(3X\dot{\phi}HG_{3,XX} - G_{3,\phi X}X - G_{3,\phi} + 6H\dot{\phi}G_{3,X} \right) \\
& + 18H \left(4HX^3G_{4,XXX} - 5X\dot{\phi}G_{4,\phi X} + 7HG_{4,XX} \right. \\
& \left. - HG_4 - G_{4,\phi}\dot{\phi} + 16HX^2G_{4,XX} - 2X^2\dot{\phi}G_{4,\phi XX} \right) \\
& + 6H^2X \left(2H\dot{\phi}G_{5,XXX}X^2 - 6X^2G_{5,\phi XX} - 18G_{5,\phi} \right. \\
& \left. + 13XH\dot{\phi}G_{5,XX} - 27G_{5,\phi X}X + 15H\dot{\phi}G_{5,X} \right),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

e

$$w_4 \equiv 2G_4 - 2XG_{5,\phi} - 2XG_{5,X}\ddot{\phi}. \tag{4.37}$$

Um ponto importante sobre a Eq. (4.32) é que a mesma impõe sérias restrições sobre a gravidade de Horndeski, particularmente sobre as funções $G_4(X, \phi)$ e $G_5(X, \phi)$, isso com respeito à velocidade das ondas gravitacionais (c_T), que de acordo com a observação recente da onda gravitacional GW170817 da colaboração LIGO/Virgo [10] e suas contrapartes eletromagnéticas GRB 170817A [47, 48, 49], colocam um limite muito rigoroso em c_T , onde mostraram que a velocidade das ondas gravitacionais no Universo recente, deve satisfazer

$$|c_T^2 - 1| \lesssim 10^{-15}. \tag{4.38}$$

Este limite significa que a velocidade das ondas gravitacionais deve ser praticamente idêntica a de uma onda eletromagnética, ou seja,

$$c_T = c.$$

E o interessante disso, é que a arbitrariedade das funções G_i se reduz drasticamente, em particular os termos $G_4(X, \phi)$ e $G_5(X, \phi)$, que em muitos modelos de Horndeski, o $G_5(X, \phi)$ é simplesmente desconsiderado para a atual expansão acelerada do Universo, bem como os termos proporcionais a $G_{4,X}$, $G_{5,X}$ e $G_{5,\phi}$ [50]. Isso se torna necessário para que tenhamos $c_T^2 = 1$ na Eq. (4.32), no entanto, há limites estabelecidos onde podemos considerar tanto $G_{4,X} \neq 0$, quanto $G_{5,\phi} \neq 0$, e mesmo assim não violar as restrições de c_T , como é mostrado em [51], que também considera um modelo onde há um acoplamento derivativo não mínimo entre o campo escalar e o tensor de Einstein.

4.5 Equações de Campo do Modelo

A ação do modelo estudado neste trabalho é uma subclasse da teoria acima, conhecida como o setor Jhon [52, 53] na linguagem da teoria *Fab Four* (F4) [54, 55, 56] da gravidade de Horndeski, que introduz um acoplamento direto entre a derivada de ϕ e o tensor de Einstein. E inserindo um potencial escalar $V(\phi)$, ficamos com uma ação escrita na forma [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64],

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2}(\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - V(\phi) \right] + S_M[g_{\mu\nu}]. \tag{4.39}$$

Com $\kappa = (16\pi G)^{-1}$, α e η são parâmetros que controlam a intensidade dos acoplamentos, onde α é adimensional e η tem dimensão de $(massa)^{-2}$, enquanto que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. Λ corresponde à constante cosmológica observada, enquanto que S_M é assumida para descrever um fluido perfeito. Observa-se que, ao considerarmos $\alpha = 1$ e $\eta = 0$ na ação acima, recuperamos a teoria usual de Einstein de campos escalares, com a gravidade minimamente acoplada ao campo escalar ϕ com potencial $V(\phi)$. A ação (4.39) desse modelo pode ser encontrada definindo as funções G_i da seguinte forma,

$$\begin{aligned} G_2(\phi, X) &= -2\kappa\Lambda + \alpha X - V(\phi), \\ G_3(\phi, X) &= 0, \\ G_4(\phi, X) &= \kappa, \\ G_5(\phi, X) &= -\frac{1}{2}\eta\phi. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Após isso, aplicamos essas definições na ação total (4.7). Com isso, as equações de campo para essa gravitação podem ser obtidas variando a ação (4.39) em relação à métrica e ao campo escalar, da seguinte forma,

$$E_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \phi]}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{4.41}$$

e

$$E_\phi \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}, \phi]}{\delta \phi}. \tag{4.42}$$

Ambas as equações acima fornecem,

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\alpha}{2\kappa} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right) \\ &\quad - \frac{\eta}{2\kappa} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \right) \\ &\quad - \frac{\eta}{2\kappa} \left(-(\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi)(\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \right) \\ &\quad - \frac{\eta}{2\kappa} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi)(\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\square \phi)^2 + g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi) R^{\lambda\rho} \right), \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$E_\phi = \nabla_\mu [(\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi] - V_\phi. \tag{4.44}$$

Onde $\nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda = \frac{1}{2} (\nabla_\mu \phi R_\nu^\lambda + \nabla_\nu \phi R_\mu^\lambda)$. Dessa maneira, as equações de campo modificadas, ou equações de Einstein-Horndeski, são lidas para $E_{\mu\nu} = 0$ como,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} H_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} T_{\mu\nu}^{(fluido)}. \tag{4.45}$$

Aqui, $H_{\mu\nu}$ pode ser tido como o tensor de Horndeski, podendo assumir a seguinte forma.

$$H_{\mu\nu} = \alpha H_{\mu\nu}^{(1)} + \eta H_{\mu\nu}^{(2)} - g_{\mu\nu} V(\phi), \tag{4.46}$$

que foi escrito dessa forma a fim de facilitar sua visualização, principalmente quando for calculada sua variação. Percebemos que, diferentemente da teoria usual de campos

escalares, aqui o potencial está embutido em $H_{\mu\nu}$ ao invés de $T_{\mu\nu}$, mas como realizado em [57, 59], vimos que $H_{\mu\nu}$ pode ser interpretado como um tensor energia-momento, em que $H_{\mu\nu}^{(1)}$ e $H_{\mu\nu}^{(2)}$ são escritos como,

$$H_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\ & - (\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi)(\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\ & - g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi)(\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 - (\nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi) R^{\lambda\rho} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nesse modelo da Teoria de Horndeski, estamos interessados principalmente no acoplamento não mínimo entre o termo derivativo do campo escalar e o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ [65, 66], que se resume na expressão de $H_{\mu\nu}^{(2)}$, enquanto que o acoplamento com a métrica $g_{\mu\nu}$ fica representado pela expressão de $H_{\mu\nu}^{(1)}$, indicada pela Equação (4.47). No Apêndice B deste trabalho, calculamos detalhadamente cada um desses termos.

Para a equação do campo escalar $E_\phi = 0$, temos

$$\nabla_\mu [(\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi] = V_\phi. \quad (4.49)$$

E destacamos também, como parte das equações de movimento da ação (4.39),

$$\nabla_\mu T^{(fluido)\mu\nu} = 0, \quad (4.50)$$

com

$$T_{\mu\nu}^{(fluido)} = (\rho + p) U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} p,$$

sendo U a quadri-velocidade de um fluido perfeito com pressão p e densidade ρ .

4.6 Dinâmica Cosmológica do Modelo

Seja a métrica plana padrão FRW, dada na forma²

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.51)$$

e como discutido anteriormente, as equações cosmológicas na teoria de Horndeski, satisfazem suas formas usuais expressas em (4.21) e (4.22). Sendo assim, uma opção seria solucionar as equações de Einstein-Horndeski (4.45) e (4.49) via métrica (4.51) desenvolvendo suas componentes temporal e espaciais, porém uma forma mais fácil de obter as equações de Friedmann no contexto de Horndeski, seria simplesmente aplicar as funções

² Por questão de conformidade com as bibliografias que tratam as solução FRW no contexto da gravidade de Horndeski, consideramos aqui a assinatura $(-, +, +, +)$.

G_i definidas em (4.40), diretamente nas equações de fundo (4.19) e (4.20), e com isso, após um desenvolvimento algébrico, obtemos

$$12\kappa H^2 - 9\eta H^2 \dot{\phi}^2 - 2\rho_R - 2\rho_M - 4\kappa\Lambda - \alpha\dot{\phi}^2 - 2V(\phi) = 0, \quad (4.52)$$

isso nos entrega a primeira equação de Friedmann na gravidade de Horndeski, dada por

$$H^2 = \frac{2\rho_M + 2\rho_R + 4\kappa\Lambda + \alpha\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{3(4\kappa - 3\eta\dot{\phi}^2)}. \quad (4.53)$$

Enquanto que para a segunda equação, temos

$$4\kappa(2\dot{H} + 3H^2) = 4\kappa\Lambda - \alpha\dot{\phi}^2 + 2V(\phi) + 2\eta\dot{H}\dot{\phi}^2 + 4\eta H\dot{\phi}\ddot{\phi} + 3\eta H^2\dot{\phi}^2 - 2(p_M + p_R), \quad (4.54)$$

e desse resultado, após algumas manipulações algébricas, é possível obter a segunda equação de Friedmann em Horndeski, escrita como

$$2\dot{H} + 3H^2 = \frac{4\eta H\dot{\phi}\ddot{\phi} - \alpha\dot{\phi}^2 + 2(p_M + p_R) - 4\kappa\Lambda + 2V(\phi)}{4\kappa - \eta\dot{\phi}^2}. \quad (4.55)$$

Partindo da primeira equação de Friedmann (4.53), chega-se facilmente em

$$6\kappa H^2 = \frac{9}{2}H^2\eta\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{\phi}^2 + 2\Lambda\kappa + \rho_R + \rho_M + V(\phi),$$

onde podemos identificar a seguinte equação de densidade de energia para o campo escalar,

$$\rho_\phi = \frac{9}{2}H^2\eta\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (4.56)$$

Essa equação pode ser obtida diretamente de (4.46) fazendo $\mu\nu = 00$, ou de forma mais geral, substituindo as definições de G_i expressas em (4.40) diretamente em (4.23). Como $\kappa = (16\pi G)^{-1}$, escrevemos finalmente

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda + \rho_\phi), \quad (4.57)$$

que se equipara exatamente à forma padrão, sendo possível perceber que nessa equação, a modificação de Horndeski está toda inserida na densidade de energia ρ_ϕ , o que era de se esperar, assim como na teoria comum de campos escalares (ϕ -CDM).

Com isso, fazemos a mesma verificação para a segunda equação de Friedmann (4.55), que após um desenvolvendo algébrico, pode ser escrita como

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{2\kappa} \left[\frac{\alpha\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\eta\dot{\phi}^2}{2} (2\dot{H} + 3H^2) - 2\eta H\dot{\phi}\ddot{\phi} - V(\phi) + p_R - 2\kappa\Lambda \right],$$

e assim, identificamos a equação da pressão do campo escalar, escrita

$$p_\phi = \frac{\alpha\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\eta\dot{\phi}^2}{2} (2\dot{H} + 3H^2) - 2\eta H\dot{\phi}\ddot{\phi} - V(\phi), \quad (4.58)$$

com $\kappa = (16\pi G)^{-1}$, escrevemos

$$2\dot{H} + 3H^2 = -8\pi G(p_M + p_R + p_\Lambda + p_\phi). \quad (4.59)$$

Essas equações serão úteis ao longo deste trabalho, uma vez que, precisamos resolver equações diferenciais envolvendo essas quantidades cosmológicas. Devido a isso, antes de prosseguirmos, tomamos a derivada temporal de ρ_ϕ , obtendo assim sua equação de continuidade, escrita na forma

$$\dot{\rho}_\phi - \phi\ddot{\phi}(\alpha + 9\eta H^2) - 9\eta\dot{\phi}^2 H\dot{H} - \dot{\phi}V_\phi(\phi) = 0. \quad (4.60)$$

Enquanto que as equações diferenciais para as outras componentes, como a matéria e a radiação, que por sua vez satisfazem suas formas usuais, pois a modificação está contida apenas nas componentes do campo escalar, são escritas respectivamente,

$$\dot{\rho}_M + 3H\rho_M = 0 \quad (4.61)$$

e

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = 0. \quad (4.62)$$

Além disso, uma outra importante solução cosmológica, é a equação de movimento para ϕ , obtida diretamente da segunda equação de campo de Einstein-Horndeski (4.49), ou também, por meio da substituição das definições de G_i em (4.25), sendo expressa da seguinte forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{6\eta\dot{\phi}H\dot{H}}{\alpha + 3\eta H^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{\alpha + 3\eta H^2} = 0, \quad (4.63)$$

onde observamos que para $V_\phi = 0$, obtemos exatamente a forma encontrada em [18].

Podemos então escrever as equações para os parâmetros de densidades de energia para cada um dos componentes, que satisfazem

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda + \Omega_\phi = 1, \quad (4.64)$$

onde,

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{6\kappa H^2}, \quad \Omega_R = \frac{\rho_R}{6\kappa H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{6\kappa H^2} = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{6\kappa H^2}, \quad (4.65)$$

essas equações representam as quantidades associadas às densidades relativas de energia da matéria, radiação, energia do vácuo e do campo escalar, respectivamente.

Escrevemos também o parâmetro da equação de estado para o campo escalar ω_ϕ , dado na seguinte forma

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$$

e como já calculamos a pressão e a densidade de energia para ϕ , ficamos com

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 [\alpha - \eta(2\dot{H} + 3H^2)] - 4\eta H\dot{\phi}\ddot{\phi} - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 (\alpha + 9\eta H^2) + 2V(\phi)} \quad (4.66)$$

E para completar nosso conjunto de equações cosmológicas, expressamos também outra importante quantidade, o parâmetro de desaceleração, que indica como a expansão do Universo está acelerando, sendo escrito em termos do próprio parâmetro ω_ϕ , definido anteriormente, dado por

$$q = -1 + \frac{3}{2}(1 + \omega_\phi), \quad (4.67)$$

que após algumas manipulações algébricas, obtemos sua forma mais completa para este modelo, escrita

$$q = \frac{\dot{\phi}^2 (2\alpha - 3\eta\dot{H}) + 6\eta H \dot{\phi}\ddot{\phi} - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2(\alpha + 9\eta H^2) + 2V(\phi)}. \quad (4.68)$$

Introduzimos agora o tempo de dobramento $N = \ln a$, que está relacionado ao redshift z pela relação $N = -\ln(1 + z)$, onde $1 + z = a(t_0)/a(t)$, com t_0 sendo o tempo atual, e $a(t_0) = 1$. Isso torna necessário escrever as equações diferenciais em termos da nova variável N , e para isso tomamos sua derivada

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}(\ln(1 + z)),$$

que dá

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{(1 + z)} \frac{dz}{dt}.$$

Partindo de $1 + z = 1/a(t)$, e usando $H \equiv \dot{a}/a$, é fácil mostrar que

$$\frac{dz}{dt} = -(1 + z)H(z),$$

com isso, temos que

$$\frac{dN}{dt} = H(N),$$

pela da regra da cadeia, podemos reescrever

$$\frac{d}{dt} = \frac{dN}{dt} \frac{d}{dN},$$

e portanto, chegamos finalmente em

$$\frac{d}{dt} = H(N) \frac{d}{dN}. \quad (4.69)$$

Da mesma forma em que vínhamos usando a notação $df(t)/dt = \dot{f}$ para derivadas em t , passamos a usar também uma notação mais simples para derivadas em N , na forma $df(N)/dN = f'$. Com isso, rescrevemos todas as equações diferenciais em função de N , começando pela Eq. (4.53), que ao aplicarmos a relação (4.69), se torna,

$$3H^2(3\eta H \phi'^2 - 4\kappa) + 2\rho_M + 2\rho_R + 4\kappa\Lambda + \alpha H \phi'^2 + 2V(\phi) = 0. \quad (4.70)$$

Aplicando (4.69) às Eqs. (4.61) e (4.62), obtemos respectivamente,

$$\rho'_M + 3\rho_M = 0 \quad (4.71)$$

e

$$\rho'_R + 4\rho_R = 0. \quad (4.72)$$

Destacando as transformações

$$\dot{H} = HH', \quad \dot{\phi} = H\phi' \quad \text{e} \quad \ddot{\phi} = H(H'\phi' + H\phi''),$$

escrevemos as Eqs. (4.60) e (4.63) na notação *prime*, que se tornam, respectivamente,

$$\rho'_\phi - \phi'H(H'\phi' + H\phi'')(\alpha - 9\eta H^2) - 9\eta H^2 H'\phi'^2 + \phi'V(\phi) = 0, \quad (4.73)$$

e

$$H(H'\phi' + H\phi'') + 3H^2\phi' + \frac{6\eta\phi'H^3H'}{\alpha + 3\eta H^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{\alpha + 3\eta H^2} = 0. \quad (4.74)$$

Podemos ainda relacionar as Eqs. (4.73) e (4.74), assim encontramos uma equação com derivada de primeira ordem em ϕ , expressa por

$$(\alpha + 3\eta H^2)\rho'_\phi + 3\phi'^2 H^2 \left[(\alpha + 3\eta H^2)(\alpha + 9\eta H^2) - \eta H H'(\alpha - 9\eta H^2) \right] + 6\eta H^2 \phi' V_\phi(\phi) = 0. \quad (4.75)$$

Um ponto interessante sobre essa expressão (4.75), é que ao reduzirmos a ordem das equações diferenciais em ϕ , conseqüentemente reduzimos a quantidade de condições iniciais, o que é uma vantagem para sua solução numérica e para o próprio modelo, que agora possui uma única condição inicial para o campo escalar.

5 Resultados e Discussões

Neste capítulo, apresentamos e analisamos os resultados obtidos a partir da implementação do modelo estudado de gravidade de Horndeski. Inicialmente, descrevemos os parâmetros e condições iniciais adotados nas análises, justificando suas escolhas com base em trabalhos recentes da literatura e em restrições observacionais. Em seguida, avaliamos como o modelo proposto pode contribuir para o alívio da tensão de Hubble, explorando o ajuste dos parâmetros livres, como α e η , em diferentes cenários de potenciais V_0 . Além disso, discutimos a viabilidade teórica do modelo, analisando as condições de estabilidade cosmológica por meio da evolução dos modos escalares e tensoriais, observando seus comportamentos ao longo do tempo e garantindo a ausência de instabilidades fantasmas e laplacianas. Também investigamos observáveis cosmológicos fundamentais, como o parâmetro de densidade de energia associado a cada componente do Universo, com ênfase nas fases de transição entre os regimes dominados por radiação, matéria e energia escura, além dos parâmetros de desaceleração e o parâmetro da equação de estado.

5.1 Análises Numérica e Estatística

Nesta seção apresentamos as considerações e os procedimentos realizados para as análises numérica e estatística do fundo cosmológico do modelo dado pelas Eqs. (4.40). As equações resultantes desse modelo são resolvidas numericamente, e assim obtemos algumas quantidades relevantes, como o parâmetro de Hubble $H(z)$, parâmetro de densidade de energia Ω . Para a parte numérica, usamos o método de *Runge Kutta* para solucionarmos as equações diferenciais envolvidas. Para a parte estatística, utilizamos a função `NonlinearModelFit` do *Wolfram Mathematica* para buscarmos estimar o melhor ajuste de valores para os parâmetros livres do modelo, confrontando a função de Hubble com dados obtidos por meio de vários métodos de medidas de $H(z)$, como Cronômetro Cósmico - CC, Supernovas do tipo Ia - SNIa e Oscilações Acústicas Bariônicas - BAO. Todos os 57 pontos de $H(z)$ utilizados neste trabalho, foram compilados da Tabela 1 de [67].

Estabelecemos a condição inicial para o campo escalar $\phi_0 = \phi(z=0) = 0.15 M_{\text{Pl}}^2$ e resolvemos numericamente o conjunto de equações diferenciais dadas pelas Eqs. (4.70), (4.71), (4.72) e (4.75). Enquanto que as condições iniciais relacionadas aos valores atuais dos parâmetros de densidade de energia da matéria (bariônica), radiação e energia escura, são definidas para valores das quantidades Ω_i no momento atual $z=0$, sendo dadas respectivamente por: $\Omega_M(0) = 0.049$, $\Omega_R(0) = 9.24 \times 10^{-5}$ e $\Omega_\Lambda(0) = 0.684$ [3]. Em que, consideramos aqui o campo escalar ϕ atuando como matéria escura [18], ou seja, $\Omega_\phi(0) = 0.265$. Para nossas análises, utilizamos um potencial escalar do tipo exponencial,

que foi adotado nesta forma devido sua flexibilidade e uso frequente na literatura de energia escura dinâmica, expresso na forma

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}. \quad (5.1)$$

Em nosso estudo, com ϕ_0 fixo, adotamos alguns valores para o parâmetro V_0 , enquanto que λ é inserido como um dos parâmetros livres do modelo, juntamente a α , η e Λ . Por meio disso, é possível estimar também a constante H_0 , obtendo diferentes valores para diferentes casos de potenciais V_0 . Em relação aos valores adotados para o potencial V_0 , foram considerados quatro casos, sendo eles $V_0 = 3.97 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, $V_0 = 4.15 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, $V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$ e $V_0 = 4.30 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, como destacados na Tabela 1, onde especificamos os resultados obtidos para cada um dos casos analisados, apresentando os valores estimados dos parâmetros livres do modelo com suas respectivas dimensões e escalas recuperadas, mostrando seus valores dentro dos níveis de confiança de 1σ , 2σ e 3σ . Notamos ainda, que não há uma relação direta ou inversamente proporcional entre os valores adotados para V_0 com os suas respectivas quantidades obtidas para H_0 ou para qualquer um dos outros parâmetros, ou seja, o fato de aumentarmos o valor de V_0 , não significa necessariamente que obtemos um valor maior para a taxa de expansão do universo H_0 ou para os parâmetros α , η , λ , além da constante cosmológica Λ .

Potential	Parameter	1σ	2σ	3σ
$V_0 = 3.97 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$	λ	-0.095 ± 0.113	-0.095 ± 0.229	-0.095 ± 0.352
	α	0.922 ± 0.044	0.922 ± 0.090	0.922 ± 0.138
	$\eta [10^{124} M_{\text{Pl}}^{-2}]$	1.062 ± 0.099	1.062 ± 0.202	1.062 ± 0.310
	$\Lambda [10^{-122} M_{\text{Pl}}^2]$	3.337 ± 0.088	3.337 ± 0.178	3.337 ± 0.275
	$H_0 [\text{ km/s/Mpc }]$	$72.784^{+0.484}_{-0.481}$	$72.784^{+0.987}_{-0.974}$	$72.784^{+1.523}_{-1.491}$
$V_0 = 4.15 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$	λ	0.293 ± 0.059	0.293 ± 0.121	0.293 ± 0.186
	α	0.616 ± 0.071	0.616 ± 0.145	0.616 ± 0.223
	$\eta [10^{123} M_{\text{Pl}}^{-2}]$	8.148 ± 0.049	8.148 ± 0.100	8.148 ± 0.154
	$\Lambda [10^{-122} M_{\text{Pl}}^2]$	3.278 ± 0.036	3.278 ± 0.073	3.278 ± 0.112
	$H_0 [\text{ km/s/Mpc }]$	$72.134^{+0.399}_{-0.397}$	$72.134^{+0.813}_{-0.804}$	$72.134^{+1.253}_{-1.232}$
$V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$	λ	1.003 ± 0.036	1.003 ± 0.068	$1.003^{+0.104}_{-0.104}$
	α	0.333 ± 0.059	0.333 ± 0.121	0.333 ± 0.186
	$\eta [10^{124} M_{\text{Pl}}^{-2}]$	2.361 ± 0.179	2.361 ± 0.365	2.361 ± 0.561
	$\Lambda [10^{-122} M_{\text{Pl}}^2]$	3.098 ± 0.030	3.098 ± 0.062	3.098 ± 0.097
	$H_0 [\text{ km/s/Mpc }]$	$70.122^{+0.353}_{-0.351}$	$70.122^{+0.718}_{-0.711}$	$70.122^{+1.107}_{-1.109}$
$V_0 = 4.30 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$	λ	0.341 ± 0.075	$0.341^{+0.153}_{-0.153}$	0.341 ± 0.235
	α	1.927 ± 0.138	1.927 ± 0.281	1.927 ± 0.432
	$\eta [10^{124} M_{\text{Pl}}^{-2}]$	2.677 ± 0.122	2.677 ± 0.248	2.677 ± 0.381
	$\Lambda [10^{-122} M_{\text{Pl}}^2]$	3.308 ± 0.036	3.30 ± 0.074	(3.308 ± 0.114)
	$H_0 [\text{ km/s/Mpc }]$	$72.465^{+0.403}_{-0.400}$	$72.465^{+0.820}_{-0.810}$	$72.465^{+1.264}_{-1.242}$

Tabela 1 – Tabela dos valores estimados dos parâmetros livres do modelo para diferentes casos de V_0 .

5.2 Tensão de Hubble

Uma das principais tensões relacionadas ao Λ CDM diz respeito ao valor atual do parâmetro de Hubble, H_0 . Segundo as medições globais mais recentes da colaboração Planck em 2020, estimou-se $H_0 = (67.40 \pm 0.50) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ com nível de confiança de 68% [3]. Em contraste, as últimas medições locais realizadas pela colaboração SH0ES em 2021, com base nas Supernovas calibradas por cefeidas, forneceram um valor significativamente maior, estimado em $H_0 = (73.04 \pm 1.04) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ com nível de confiança de 68% [68], representando uma discrepância de cerca de 5.0σ entre ambos valores de H_0 [69]. Embora extensas discussões tenham buscado determinar se essa tensão pode ser atribuída a erros sistemáticos não identificados, várias observações com outros métodos alternativos também indicaram uma tensão em H_0 inferido de Λ -CDM [70, 71, 72, 73, 74]. Dessa maneira, cresce a evidência de que a discrepância nos valores de H_0 pode, de fato, ser um indício de física nova além do modelo padrão. Com isso, recentemente tem surgido diversos estudos que de alguma forma tentam solucionar essa questão, utilizando diferentes métodos, onde podemos encontrar um resumo das principais abordagens em [69, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81]. Além disso, como a tensão em H_0 sugere uma expansão mais rápida do universo do que o previsto por Λ CDM, uma abordagem promissora para mitigar essa discrepância envolve o uso de uma teoria de gravidade modificada. Tal teoria deve, qualitativamente, induzir uma redução na intensidade gravitacional durante as épocas intermediárias e tardias da expansão cósmica [82, 83, 84].

Recentemente, vários estudos têm explorado subclasses específicas das teorias de Horndeski com o objetivo de abordar a tensão de Hubble, investigando como essas modificações na gravidade podem ajudar a conciliar medições discrepantes de H_0 [82, 83, 84, 85]. Neste trabalho, investigamos a aplicação da gravidade de Horndeski [8], com ênfase em uma subclasse específica nomeada setor John, com uma abordagem que visa aliviar a tensão em H_0 . Nessa estrutura, consideramos a matéria escura sendo descrita por um campo escalar, conforme discutido em [18]. Essa teoria permite a inclusão de um campo escalar que interage diretamente com a gravidade, oferecendo uma flexibilidade que pode ajustar a dinâmica de expansão do universo em diferentes épocas cosmológicas.

5.2.1 Mitigando a Tensão de Hubble com o Modelo

Nesta seção, introduzimos a análise dos resultados numéricos obtidos para o parâmetro de Hubble, comparando as curvas geradas pelo modelo de Horndeski com o modelo Λ -CDM, como apresentado nos gráficos 5, 6 e 7. A partir dos diferentes valores do potencial V_0 adotados, avaliamos como os melhores ajustes dos parâmetros livres influenciam a taxa de expansão em diferentes redshifts, principalmente em valores de z próximos de zero.

Na Fig. 5, apresentamos a normalização $H(z)/(z+1)^{3/2}$ em função do redshift, analisamos os ajustes dos parâmetros do modelo para diferentes valores de V_0 e os comparamos com o cenário Λ CDM. Essa normalização é particularmente interessante, pois seu comportamento assintótico permite avaliar com maior clareza os valores de $H(z)$ em redshifts elevados, confirmando que o modelo proposto é consistente com observações do universo primordial. Observamos que ambos os modelos tendem a valores muito próximos em redshifts altos ($z \gtrsim 10$). Em particular, os casos $V_0 = 3.97 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$ (curva vermelha) e $V_0 = 4.30 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$ (curva azul) coincidem com o modelo Λ CDM (curva preta) em $z \approx 10$, e deve manter esse comportamento para $z \gg 1$. Por outro lado, para redshifts baixos ($z \lesssim 0.2$), o modelo apresenta variações significativas em $H(z)$ para os diferentes valores de V_0 considerados, indicando que o campo escalar contribui dinamicamente para a expansão acelerada do Universo.

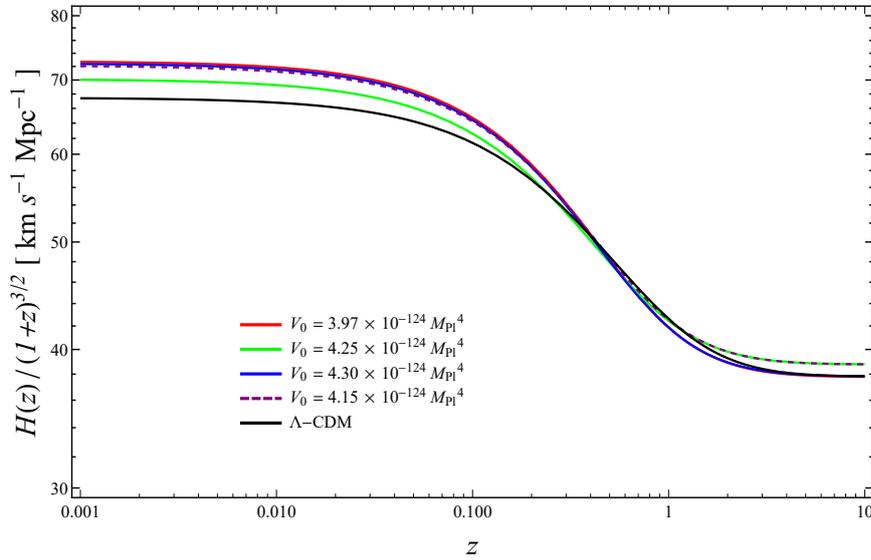


Figura 5 – Evolução da normalização $H(z)/(1+z)^{3/2}$ para cada um dos casos de V_0 . E para comparação, plotamos também a curva do modelo Λ CDM (curva preta).

Além disso, sobre as variações que essas curvas exibem em relação ao modelo padrão no valor de $H(z=0)$, alcançamos $H_0 = (72.78 \pm 0.48) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ com nível de confiança de 68% para o primeiro caso de V_0 . Esse valor, assim com os outros resultados obtidos para a constante de Hubble de cada potencial adotado, fornece um alívio para a tensão em H_0 , enquanto mantém uma consistência com medições globais em redshifts altos. Isso está de acordo com nossos objetivos, pois o interesse principal está em obter variações relevantes de $H(z)$ em redshifts baixos, e juntamente a isso, obter menores variações em redshifts altos e intermediários.

Nos gráficos das Figs. 6 e 7, apresentamos as evoluções de $H(z)$ e sua normalização $H(z)/(z+1)$ como função do redshift para o modelo considerado, e avaliamos os quatro casos de V_0 apresentados da Tabela 1 anteriormente.

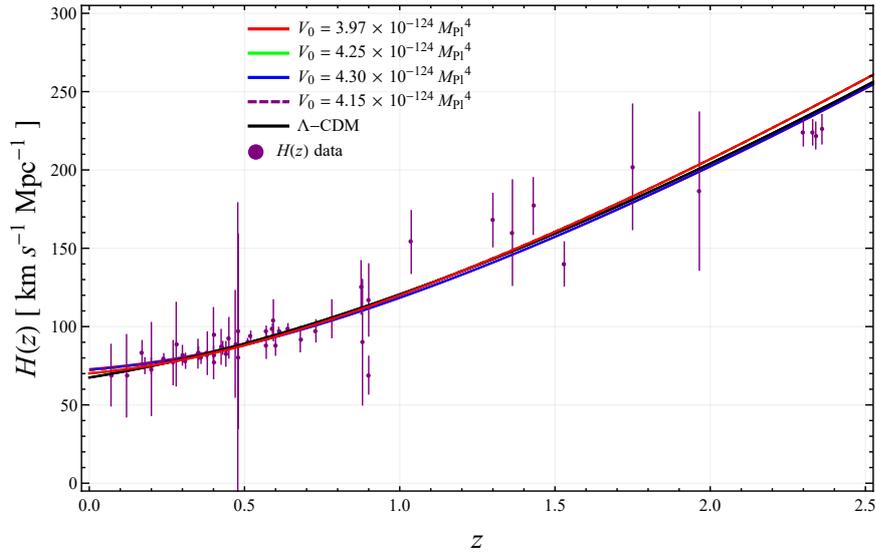


Figura 6 – Evolução do parâmetro de Hubble $H(z)$ em função do redshift z , confrontada com dados observacionais de $H(z)$ provenientes de SNIa, BAO e CC. As curvas foram obtidas para os diferentes valores adotados de V_0 , e a curva preta representa o modelo Λ CDM para comparação.

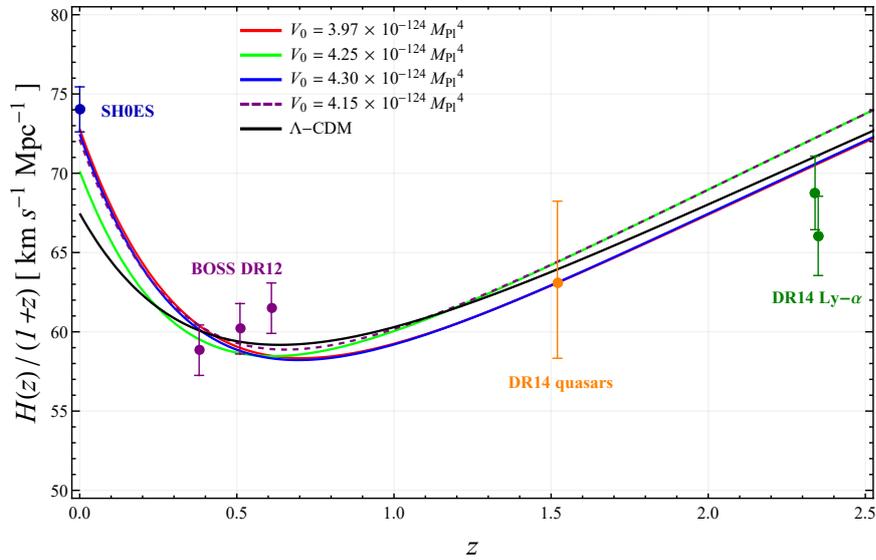


Figura 7 – Evoluções da normalização $H(z)/(1+z)$ correspondentes a cada um dos valores de V_0 adotados. Para comparação, também apresentamos a curva do modelo Λ -CDM (curva preta), juntamente com os dados observacionais de $H(z)$ obtidos pela Colaboração SH0ES e pelas medições de BAO da Colaboração SDSS.

Um ponto interessante ao utilizar essa normalização é a possibilidade de visualizar com maior clareza o comportamento de $H(z)$, extraindo informações importantes sobre alguns de seus valores em redshifts específicos. Por exemplo, essa normalização facilita a identificação dos pontos da transição entre as fases de desaceleração e aceleração do

Universo, que é representada pelo ponto mínimo de cada curva evoluída no gráfico ilustrado na Fig. 7.

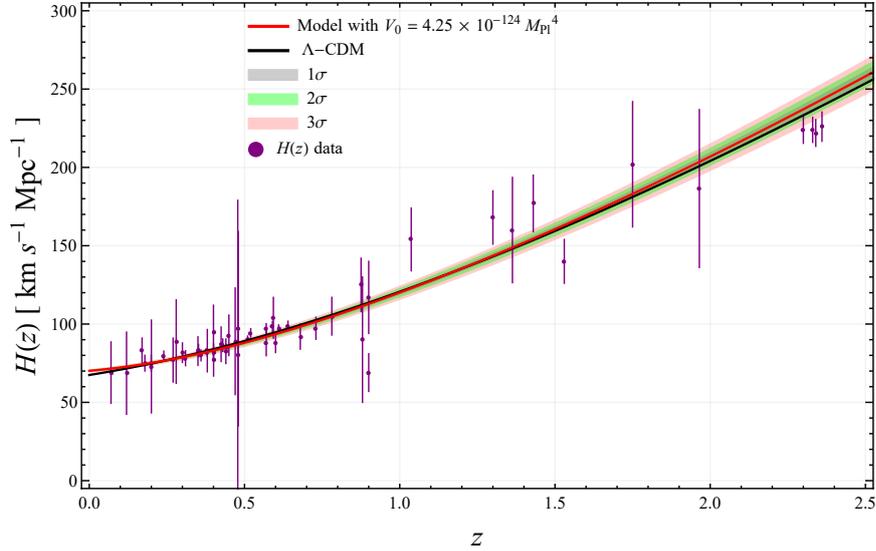


Figura 8 – Evolução do parâmetro de Hubble $H(z)$ em função do redshift z , confrontada com dados observacionais de $H(z)$ provenientes de SNIa, BAO e CC. A curva vermelha representa o caso $V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, juntamente às suas respectivas faixas de confiança. A curva preta representa o modelo Λ -CDM para comparação.

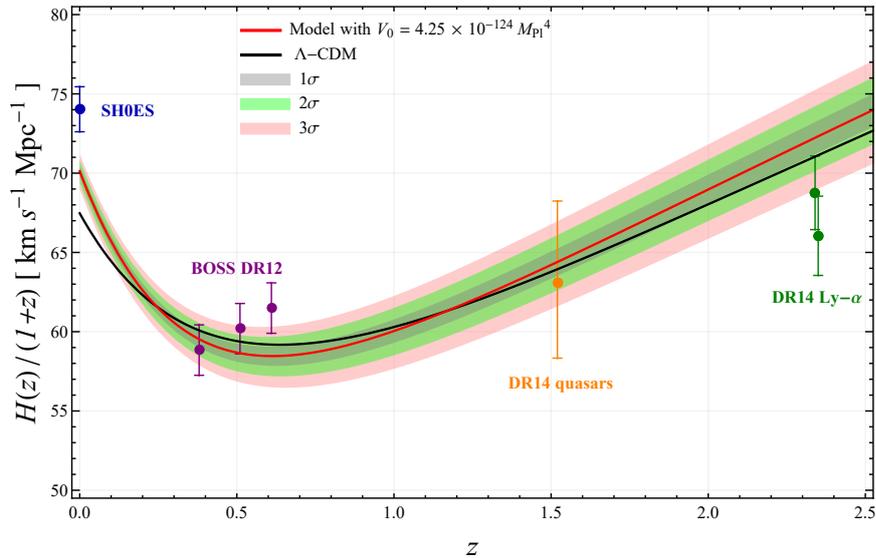


Figura 9 – Evolução da normalização $H(z)/(1+z)$ correspondente ao caso $V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, juntamente às suas respectivas faixas de confiança. Para comparação, também apresentamos a curva do modelo Λ -CDM (curva preta), juntamente com os dados observacionais de $H(z)$ obtidos pela Colaboração SH0ES e pelas medições de BAO da Colaboração SDSS.

Analisando os resultados da Tabela 1, observamos que de forma geral, o caso $V_0 = 4.25 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$ possui os ajustes com margens de erro mais estreitas se comparado aos demais casos de V_0 , refletindo em uma maior precisão estatística, e esse comportamento se traduz em faixas de confiança mais restritas e melhor acentuadas. Com isso, ilustramos este caso de V_0 nas Figs. 8 e 9. Em ambos os gráficos, mostramos as faixas de confiança de 1σ , 2σ e 3σ , com a curva vermelha correspondendo ao caso de V_0 avaliado, juntamente aos seus respectivos valores dos parâmetros livres estimados, sendo $\alpha = 0.333$, $\lambda = 1.003$ e $\eta = 2.361 \times 10^{124} M_{\text{Pl}}^{-2}$.

Comparado com outras abordagens baseadas na gravidade de Horndeski [82, 84, 85], nosso modelo apresenta uma flexibilidade ao ajustar os parâmetros dinâmicos, como V_0 e η , permitindo acomodar melhor as discrepâncias entre medições locais e globais de H_0 . Dessa maneira, os resultados numéricos e estatísticos obtidos indicam que este modelo específico baseado na gravidade de Horndeski, possui um potencial promissor para mitigar a tensão H_0 , conciliando os diferentes regimes observacionais de expansão cósmica.

5.3 Perturbações e Condições de Estabilidade do Modelo

Aplicamos as definições expressas em (4.40) às equações (4.34), (4.35), (4.36) e (4.37), com isso obtemos as equações de w_i para o modelo. Para a equação de w_1 , ficamos com a expressão

$$w_1 = \frac{4\kappa - \eta\dot{\phi}^2}{2} = \frac{4\kappa - \eta\phi'^2 H^2}{2}, \quad (5.2)$$

e sua derivada (na notação *prime*) se torna

$$\dot{w}_1 = Hw_1' = -\eta\phi'H^2(\phi'H' + \phi''H). \quad (5.3)$$

Da mesma forma, obtemos para o termo de w_2 ,

$$w_2 = 4\kappa H - 3\eta\dot{\phi}^2 H = 4\kappa H - 3\eta\phi'^2 H^3, \quad (5.4)$$

com sua derivada

$$\dot{w}_2 = Hw_2' = 4\kappa HH' - 3\eta\phi'H^3(3\phi'H' + 2\phi''H). \quad (5.5)$$

Enquanto que os termos w_3 e w_4 , ficam escritos para o modelo, respectivamente na forma,

$$w_3 = \frac{3}{4}\alpha\dot{\phi}^2 - 18\kappa H^2 + 27\eta\dot{\phi}^2 H^2 = \frac{3}{4}\alpha\phi'^2 H^2 - 18\kappa H^2 + 27\eta\phi'^2 H^4, \quad (5.6)$$

e

$$w_4 = \frac{4\kappa + \eta\dot{\phi}^2}{2} = \frac{4\kappa + \eta\phi'^2 H^2}{2}. \quad (5.7)$$

Podemos agora examinar a estabilidade das soluções obtidas, investigando o quadrado das velocidades das perturbações escalares c_S^2 e tensoriais c_T^2 , além da energia cinética

associada às perturbações escalares Q_S e tensoriais Q_T . E como mencionado anteriormente, para uma dinâmica consistente, livre de instabilidades laplacianas e fantasmas para os modos escalar e tensor, deve-se satisfazer as seguintes condições:

$$c_S^2 \geq 0, \quad Q_S > 0, \quad c_T^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_T > 0. \quad (5.8)$$

E com base nisso, analisamos as evoluções de (4.30), (4.31), (4.32) e (4.33) como função do redshift para a solução de fundo dada pelo modelo (4.40) para o caso $V_0 = 3.97 \times 10^{-124} M_{\text{pl}}^4$.

Como pode ser observado em ambos os gráficos apresentados nas Figs. 10 e 11 abaixo, as condições de estabilidade são satisfeitas em todo o intervalo avaliado, ou seja, as soluções obtidas para o modelo em questão são livres de instabilidades laplacianas e fantasmas para os modos escalares. Como discutido anteriormente, é de costume dentro das teorias de Horndeski desconsiderar as contribuições de $G_5(\phi, X)$, isso devido a não obtermos em geral, uma solução onde c_S^2 seja identicamente 1. No entanto, para o modelo específico que estamos trabalhando, por meio do ajuste dos parâmetros livres e escolhas das condições iniciais, é possível levar c_S^2 a próximo de 0.6 para $z \approx 0$, além de se manter positiva em todo o intervalo de evolução avaliado, como pode ser observado no gráfico da Fig. 10. Com relação à quantidade Q_S , percebe-se que ela também se mantém positiva em todo o intervalo da evolução, com seu menor valor sendo obtido em $Q_S(z = 0) \approx 0.14$, como apresentado no gráfico da Fig. 11, mantendo a consistência com as condições de estabilidade.

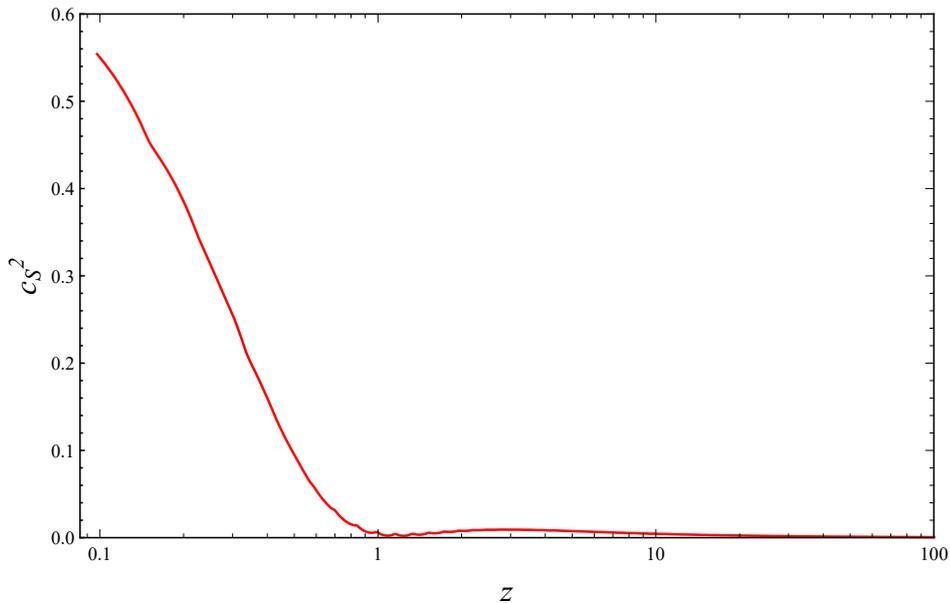


Figura 10 – Evolução do quadrado da velocidade de propagação das perturbações escalares c_S^2 , em função do redshift z .

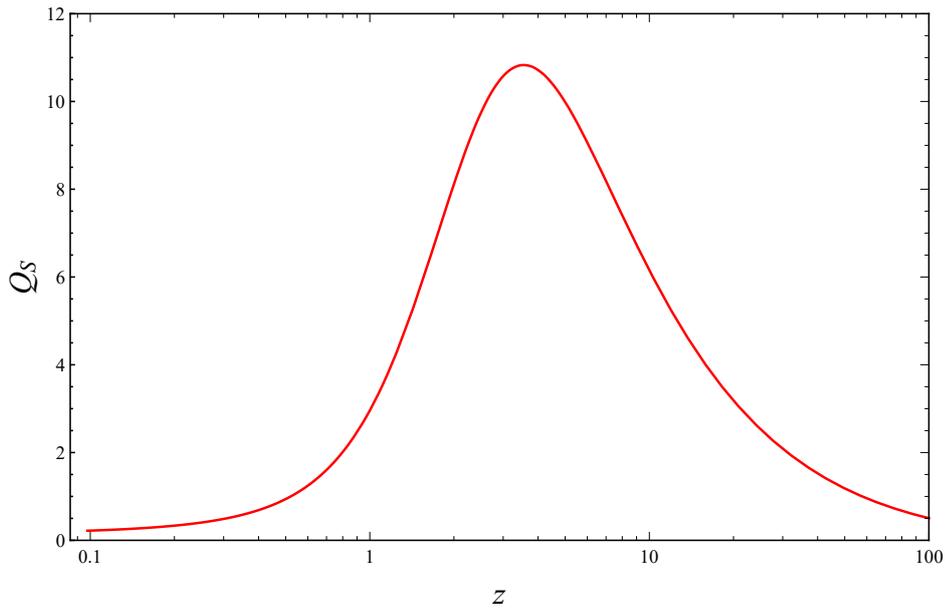


Figura 11 – Evolução do parâmetro de energia cinética associado às perturbações escalares Q_s , em função do redshift z .

Evoluímos também a Eq. (4.32) e avaliamos seu comportamento perante a tais condições, tanto em aspectos da estabilidade quanto da consistência com resultados observacionais das ondas gravitacionais de [10, 48, 49].

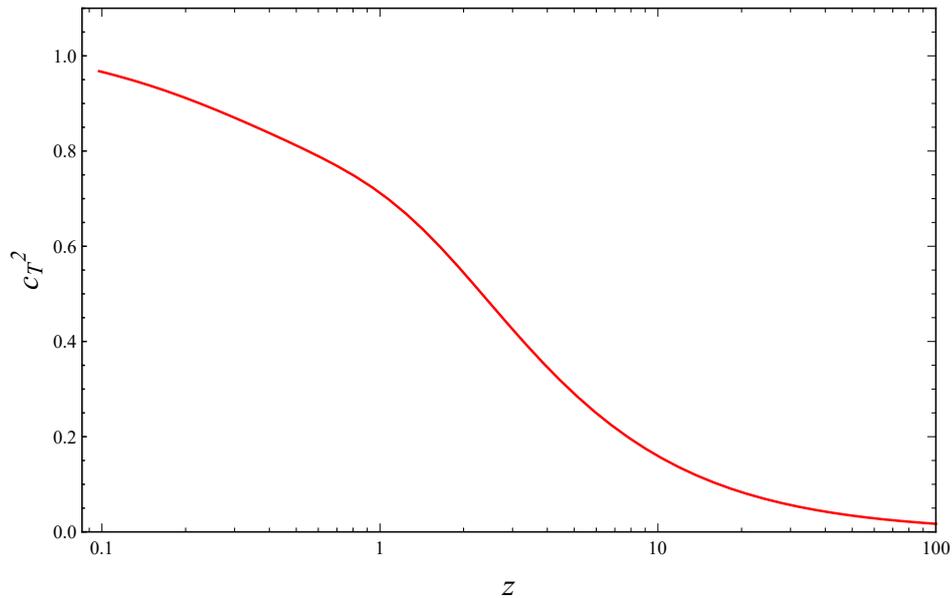


Figura 12 – Evolução do quadrado da velocidade de propagação das perturbações tensoriais c_T^2 , em função do redshift z .

Uma questão muito discutida no âmbito das teorias de Horndeski, é que a velocidade das ondas gravitacionais pode evoluir no tempo para modelos que contêm $G_4(\phi, X)$ e

$G_5(\phi, X)$. Em nosso caso, temos $G_5(\phi, X) = -\eta\phi/2$, o que não garante de imediato uma consistência com a restrição de que a velocidade das ondas gravitacionais seja luminal ($c_T^2 = 1$), e como foi comentado antes, da mesma forma para c_S^2 , conseguimos também tornar $c_T^2 \approx 1$ em $z \approx 0$, além de sempre se manter positiva em todo o intervalo de evolução avaliado, como pode ser observado no gráfico da Fig. 12.

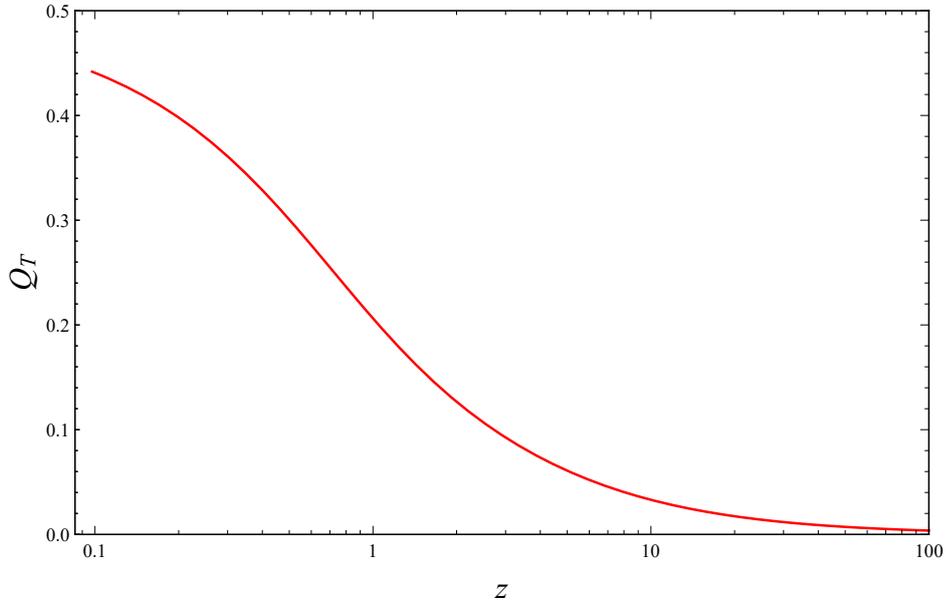


Figura 13 – Evolução do parâmetro de energia cinética associado às perturbações tensoriais Q_T , em função do redshift z .

E finalmente, evoluímos a quantidade Q_T expressa por (4.33) e observamos que também se mantém positiva em todo o intervalo de z avaliado, como podemos visualizar no gráfico da Fig. 13 acima. Sendo assim, concluimos que o modelo em questão, também está livre de instabilidades fantasmas e laplacianas associadas aos modos tensoriais, e portanto, satisfaz todas as condições de estabilidade expressas em (5.8).

5.4 Outros Parâmetros Cosmológicos

Nesta seção, apresentamos uma análise de alguns parâmetros cosmológicos, como os parâmetros de densidade de energia, desaceleração e da equação de estado no contexto da gravidade de Horndeski. Utilizando as soluções numéricas das equações diferenciais que descrevem o modelo, construímos os gráficos correspondentes a cada quantidade analisando o comportamento de cada uma das curvas.

Parâmetro de Densidade de Energia para o Modelo

Para a densidade de energia das componentes consideradas, conforme definidos na equação (4.65), temos na Fig. 14, a comparação da evolução das densidades de energia relativas de cada componente do Universo para um casos de potenciais considerados no modelo, aqui utilizamos o valor $V_0 = 3.97 \times 10^{-124} M_{\text{Pl}}^4$, juntamente aos seus respectivos valores estimados para os outros parâmetros livres, onde todas as densidades envolvidas estão evoluindo no tempo de dobramento $N = \ln(a) = -\ln(z + 1)$. Sendo assim, temos o comportamento para a densidade de energia da radiação (curva vermelha), matéria bariônica (curva verde), matéria escura (curva azul) e constante cosmológica (curva roxa), enquanto que a linha tracejada preta representa a soma da matéria escura com a bariônica.

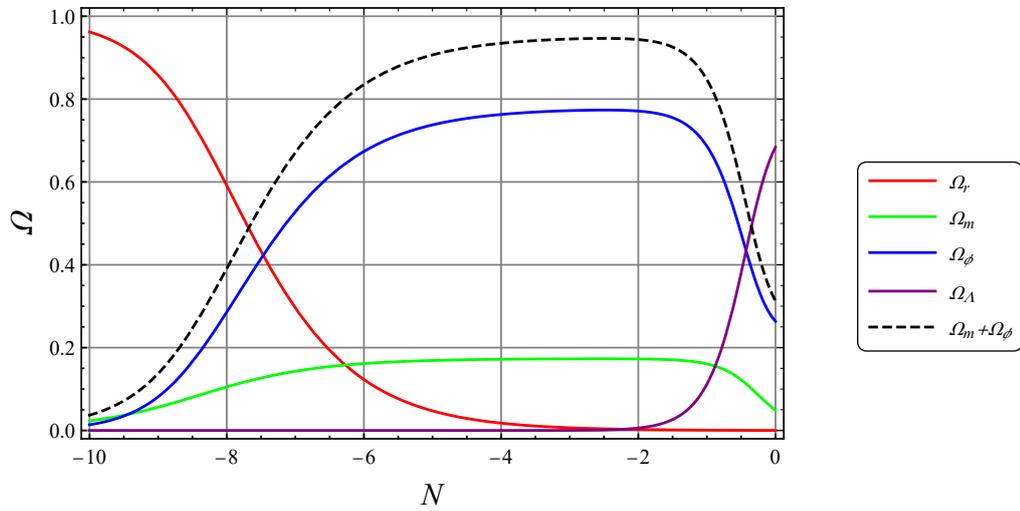


Figura 14 – Evolução dos parâmetros de densidade de energia Ω associados a cada constituinte, em função de N .

Os gráficos das quantidades mostram de forma clara as transições entre as eras de radiação, matéria e energia escura. Observa-se que a radiação domina para altos redshifts ($N \lesssim -7.5$), seguida pela matéria em redshifts intermediários ($-7.5 \lesssim N \lesssim -0.5$), com a matéria bariônica sendo sempre subdominante em relação ao componente da matéria escura, e finalmente a energia escura assume o domínio em redshifts baixos.

Parâmetro de Desaceleração para o Modelo

Completando o estudo desenvolvido até aqui, plotamos um outro observável importante na cosmologia, o parâmetro de desaceleração q . Fazemos as mesmas considerações estabelecidas para os parâmetros livres realizadas para as análises dos Ω_i . Assim como vimos no Capítulo 3, o parâmetro de desaceleração é uma importante quantidade associada à atual expansão acelerada do Universo. Com isso, é interessante analisar o comportamento de sua evolução. Na figura abaixo, plotamos o gráfico de q em função de N para o modelo estudado (linha vermelha). Em relação à sua evolução, observamos que possui

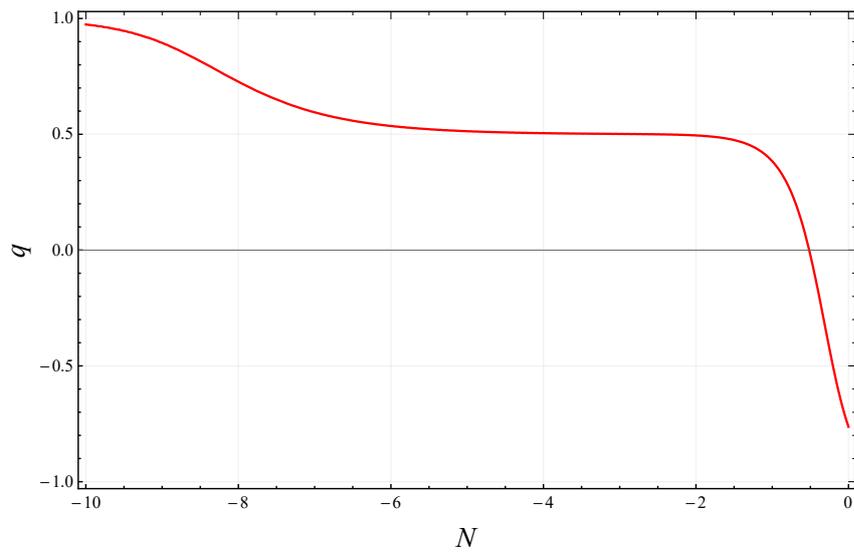


Figura 15 – Evolução do parâmetro de desaceleração q em função de N .

um comportamento de acordo com o esperado, particularmente em pontos específicos, como seu valor atual em $N = 0$, que equivale a $q_0 = q(N = 0) \approx -0.76$, indicando de fato a expansão acelerada. Além disso, em $q(N) = 0 \implies N \approx -0.5$ (transição entre as fases de desaceleração para aceleração), enquanto que em $N \approx 0.4$ (transição do domínio da matéria para energia) temos $q < 0$, indicando que a expansão do Universo já está acelerada, mantendo-se praticamente constante na época de domínio pela matéria.

Parâmetro da Equação de Estado para o Modelo

Aqui, plotamos abaixo, o parâmetro da equação de estado ω em função de $N = -\ln(1+z)$, fazendo as mesmas considerações para os parâmetros livres realizadas para as análises de Ω e q anteriormente.

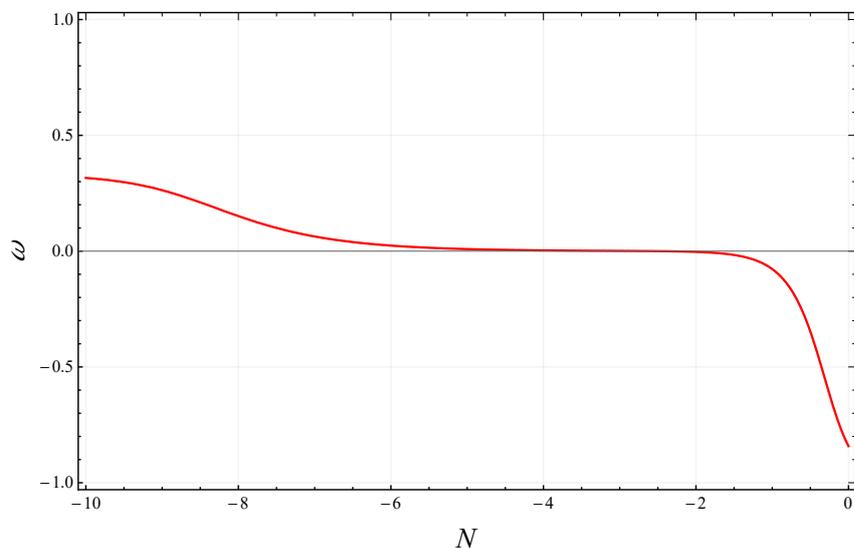


Figura 16 – Evolução do parâmetro de da equação de estado ω em função de N .

Em relação à evolução de ω , observamos que também possui um comportamento de acordo com o esperado, particularmente em pontos e eras específicas, como seu valor atual em $N = 0$, que equivale a $\omega_0 = \omega(N = 0) \approx -0.84$, indicando um valor próximo a -1 (valor de ω para o domínio da energia escura). Além disso, em épocas mais remota, ω se mantém de acordo com as fases de domínio tanto da radiação quanto da matéria.

6 Conclusão

Neste estudo, apresentamos uma investigação voltada para a cosmologia, tratada na perspectiva da gravidade de Horndeski como uma alternativa ao modelo Λ -CDM. No Capítulo 2, foi explorada a gravidade de Einstein, incluindo os fundamentos da Relatividade Geral, obtendo suas equações de campo e destacando seu papel na cosmologia, evidenciando as limitações frente aos desafios observacionais atuais. O Capítulo 3 abordou tópicos essenciais de cosmologia, como a dinâmica de fluidos cosmológicos, o modelo FRW, obtendo as famosas equações de Friedmann do modelo padrão, fornecendo um detalhamento necessário para o estudo de modelos alternativos de gravidade.

No Capítulo 4, introduzimos a gravidade de Horndeski, detalhando sua formulação matemática, suas equações de movimento e as principais vantagens teóricas em relação a outras teorias gravitacionais, mostrando que algumas das principais teorias de gravidade modificada podem ser obtidas diretamente da lagrangeana de Horndeski. Exploramos também as motivações teóricas para o uso dessa gravidade em específico. Além disso, realizamos uma detalhada revisão das instabilidades e perturbações das soluções cosmológicas na teoria de Horndeski, destacando a importância dessa análise na construção de modelos baseados nessa teoria, no que diz respeito à consistência física de modelos frente às observações atuais, como as ondas gravitacionais. Ainda neste capítulo, definimos o modelo tratado, obtendo suas equações de campo correspondentes, bem como suas soluções cosmológicas.

No Capítulo 5 exploramos as soluções cosmológicas do modelo, apresentando as condições de estabilidade para a teoria de Horndeski e verificando a ausência de fantasmas e instabilidades do modelo. Essa abordagem analítica foi essencial para reforçar a viabilidade teórica do modelo, visto que o mesmo satisfaz as condições impostas, mantendo-se consistente em relação às restrições observacionais, como as medições da velocidade de ondas gravitacionais. Nesse capítulo da dissertação, focamos também na investigação da aplicação da gravidade de Horndeski como uma alternativa viável para o alívio da tensão de Hubble, que é um dos desafios mais relevantes na cosmologia contemporânea. A comparação com o modelo Λ -CDM ressaltou o potencial do modelo de Horndeski em reconciliar as discrepâncias observacionais nos valores de H_0 . Além disso, construímos gráficos que ilustraram a evolução das densidades de radiação, matéria e energia escura, destacando as transições entre os regimes dominantes ao longo do tempo cósmico.

Sendo assim, os resultados obtidos apontam que o setor John da gravidade de Horndeski, pode oferecer uma possível solução para a tensão de Hubble, além de abrir possibilidades para investigações mais profundas sobre gravidade modificada no âmbito da

cosmologia e astrofísica, e sua compatibilidade com observações cada vez mais precisas. Portanto, podemos concluir que o modelo baseado na gravidade de Horndeski estudado aqui, apresenta grande potencial como uma alternativa ao paradigma Λ -CDM, o que incentiva pesquisas adicionais que explorem diversos outros setores da gravidade de Horndeski, considerando que a arbitrariedade das funções G_i oferece uma ampla variedade de possibilidades para a construção de modelos.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo de algumas Variações importantes

A.1 Variação de $g_{\mu\nu}$

Da definição de ortogonalidade da métrica, temos a relação

$$g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad (\text{A.1})$$

aplicando a esta expressão o princípio da mínima ação, obtemos

$$\delta(g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Pela regra do produto,

$$\delta g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda}\delta g_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.3})$$

contraíndo com $g_{\lambda\beta}$, ficamos com

$$\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}\delta g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Da Equação (A.1), podemos fazer

$$g^{\nu\lambda}g_{\lambda\beta} = \delta_{\beta}^{\nu},$$

assim,

$$\delta_{\beta}^{\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\beta}g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

ou seja,

$$\delta g_{\mu\beta} = -\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\beta}g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

O resultado expresso pela Equação (A.6) será utilizado no cálculo da variação seguinte.

A.2 Variação de $\sqrt{-g}$

Desenvolvendo a variação de $\sqrt{-g}$, temos

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}(-g)^{-\frac{1}{2}}\delta(-g) \quad (\text{A.7})$$

que se torna,

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g. \quad (\text{A.8})$$

Precisamos então calcular δg , onde o determinante de uma matriz pode ser obtido da expansão de Laplace, assim

$$g = M^{(\mu)\nu} g_{(\mu)\nu}, \quad (\text{A.9})$$

em que $g_{(\mu)\nu}$ são os elementos de uma fila qualquer e $A_{(\mu)\nu}$ são os respectivos cofatores, o índice (μ) indica que não há soma. O cofator é definido da seguinte forma,

$$M^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

logo,

$$g = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu},$$

ou seja,

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.11})$$

Sendo assim, podemos agora calcular de fato a variação de $\sqrt{-g}$ com relação a $g^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Assim, de acordo com a Equação (A.6), teremos portanto,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.12})$$

A.3 Variação de S_M

A ação para o campo de matéria é dada por,

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (\text{A.13})$$

aplicando o princípio variacional, obtemos

$$\delta S_M = \int (\delta\sqrt{-g} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_M) d^4x. \quad (\text{A.14})$$

Variando em relação à métrica $g^{\mu\nu}$, de acordo com o resultado obtido anteriormente em (A.12), temos que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Enquanto que a variação da densidade lagrangiana será simplesmente,

$$\delta \mathcal{L}_M = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as Equações (A.12) e (A.15) na Equação (A.14), obtemos

$$\delta S_M = \int \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) d^4 x, \quad (\text{A.16})$$

que reescrevendo, se torna

$$\delta S_M = \int \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \right] d^4 x, \quad (\text{A.17})$$

ou seja,

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right) d^4 x, \quad (\text{A.18})$$

logo, chegamos finalmente em

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M. \quad (\text{A.19})$$

Que é o resultado utilizado na Seção 2.4.1.

APÊNDICE B – Cálculo do tensor $H_{\mu\nu}$

B.1 Variação do termo de acoplamento não mínimo com o tensor métrico

Variando com respeito à métrica (não carregaremos as constantes), temos

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) &= \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) \\
 &= (\delta\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\
 &= \sqrt{-g}\left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right]\delta g^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.2 Variação do termo de acoplamento não mínimo com o tensor de Einstein

Variando com respeito à métrica (não carregaremos as constantes), temos

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) &= \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) \\
 &= \underbrace{(\delta\sqrt{-g})g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_1} \\
 &\quad + \underbrace{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_2} \\
 &\quad + \underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}\delta g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_3} \\
 &\quad + \underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}\delta G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_4}.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

O primeiro termo é

$$\underbrace{(\delta\sqrt{-g})g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_1} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\delta g^{\mu\nu}$$

O segundo termo é

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\delta_2} &= \sqrt{-g}\delta g^{\lambda\nu}G_\lambda^\mu\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\
 &= \sqrt{-g}G_\nu^\lambda\nabla_\mu\phi\nabla_\lambda\phi\delta g^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

O terceiro termo é idêntico ao segundo

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\kappa}\delta g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi}_{\delta_3} &= \sqrt{-g}\delta g^{\mu\kappa}G_{\kappa}^{\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi \\ &= \sqrt{-g}G_{\mu}^{\lambda}\nabla_{\nu}\phi\nabla_{\lambda}\phi\delta g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\kappa}g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda} + g^{\mu\kappa}\delta g^{\lambda\nu}G_{\kappa\lambda})}_{\delta_2+\delta_3} &= \sqrt{-g}(G_{\nu}^{\lambda}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\lambda}\phi + G_{\mu}^{\lambda}\nabla_{\nu}\phi\nabla_{\lambda}\phi)\delta g^{\mu\nu} \\ &= 2\sqrt{-g}G_{(\mu}^{\lambda}\nabla_{\nu)}\phi\nabla_{\lambda}\phi\delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

em que

$$G_{(\mu}^{\lambda}\nabla_{\nu)}\phi = \frac{1}{2}(G_{\mu}^{\lambda}\nabla_{\nu}\phi + G_{\nu}^{\lambda}\nabla_{\mu}\phi).$$

No último termo temos que variar o tensor de Einstein, que é escrito na forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\delta G_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi &= \underbrace{\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi}_{\delta_{41}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi}_{\delta_{42}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi}_{\delta_{43}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi}_{\delta_{44}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

O próximo passo é calcular cada um desses termos, iniciando pela variação do tensor de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi}_{\delta_{41}} &= \sqrt{-g} [\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda] \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
 &= \sqrt{-g} \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \sqrt{-g} \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
 &= -\sqrt{-g} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) + \sqrt{-g} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\lambda\mu}) \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &= -\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma} \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) + \frac{\sqrt{-g}}{2} \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} \nabla_\mu \delta g_{\sigma\lambda} \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &= \sqrt{-g} g^{\lambda\sigma} \delta g_{\sigma\nu} \nabla_\mu \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) - \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta g_{\mu\nu} \square (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &\quad - \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} \delta g_{\sigma\lambda} \nabla_\mu \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &= \sqrt{-g} [-\delta g^{\sigma\nu} \nabla_\mu \nabla_\sigma (\nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi) + \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \square (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla_\lambda (\nabla^\sigma \phi \nabla^\lambda \phi)] \\
 &= \sqrt{-g} [-\nabla_\sigma \nabla_\mu (\nabla^\sigma \phi \nabla_\nu \phi) + \frac{1}{2} \square (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla_\lambda (\nabla^\sigma \phi \nabla^\lambda \phi)] \delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

As variações da métrica resultam

$$\underbrace{-\frac{1}{2} \sqrt{-g} (\delta g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi}_{\delta_{42} + \delta_{43}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (R \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - R_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi) \delta g^{\mu\nu}. \tag{B.6}$$

Variando $R_{\mu\nu}$ novamente

$$\begin{aligned}
 \underbrace{-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{\delta_{44}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda]\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\nabla_\lambda\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu})\nabla_\lambda\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &\quad - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\lambda\mu})\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu}\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\sigma\nu}\nabla_\mu\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= +\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\sigma\nu}\nabla_\nu\nabla_\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\right]\delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Juntando todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) &= \sqrt{-g}\left[\underbrace{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi}_{\propto\delta_1} + \underbrace{2G_{(\mu}\nabla_{\nu)}\phi\nabla_\lambda\phi}_{\propto(\delta_2+\delta_3)} + \right. \\
 &\quad \underbrace{-\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi}_{\propto\delta_{41}} + \underbrace{\frac{1}{2}\square(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)}_{\propto\delta_{41}} + \underbrace{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda(\nabla^\sigma\phi\nabla^\lambda\phi)}_{\propto\delta_{41}} + \\
 &\quad \underbrace{+\frac{1}{2}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}_{\propto(\delta_{42}+\delta_{43})} - \underbrace{\frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi}_{\propto(\delta_{42}+\delta_{43})} \\
 &\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)}_{\propto\delta_{44}} - \underbrace{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)}_{\propto\delta_{44}}\right]\delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Vamos tomar os termos de derivadas de ordem superior. A partir do terceiro termos de δ_{41} e do segundo termo de δ_{44}

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda(\nabla^\sigma\phi\nabla^\lambda\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi). \tag{B.9}$$

Enquanto que do primeiro e do segundo termo de δ_{41} , juntamente ao primeiro termo de δ_{44} , temos

$$-\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}\square(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) + \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi). \tag{B.10}$$

Abrindo as derivadas de (B.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi) - \nabla_\beta\nabla^\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)] \\
 &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi + \square\phi\square\phi + \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\square\phi \\
 &\quad - \square\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla_\alpha\phi - \nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\nabla_\alpha\phi - \nabla^\alpha\phi\square\nabla_\alpha\phi] \\
 &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\square\phi)^2 - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi + \nabla^\alpha\phi(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\nabla^\beta\phi] \\
 &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\square\phi)^2 - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi - R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi],
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

onde usamos

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi - \nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi = -R_{\alpha\beta}\nabla^\beta\phi. \tag{B.12}$$

Abrindo as derivadas de (B.10), obtemos

$$\begin{aligned}
 & -\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}[\nabla_{(\mu}\phi\nabla_{\nu)}\phi] + \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= -\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\mu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\nu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\phi) + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) + \frac{1}{4}\nabla_\nu\nabla_\mu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - [\nabla_\mu\nabla_\nu\phi] + \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + \frac{1}{2}\nabla_\nu\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &\quad - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla_\mu\phi \\
 &= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - [\nabla_\mu\nabla_\nu\phi] + \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\alpha\nabla_\mu)\nabla_\nu\phi \\
 &\quad + \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi(\nabla_\nu\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\nu)\nabla_\mu\phi \\
 &= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - [\nabla_\mu\nabla_\nu\phi] + \frac{1}{2}R_{\nu\alpha\mu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi \\
 &= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - [\nabla_\mu\nabla_\nu\phi] + R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Substituindo as Eqs. (B.11) e (B.13) na Eq. (B.8), finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
 & -\nabla_\sigma \nabla_{(\mu} \nabla^{\sigma} \phi \nabla_{\nu)} \phi + \frac{1}{2} [\nabla_{(\mu} \phi \nabla_{\nu)} \phi] + \frac{1}{2} \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} (\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi) \\
 &= -\frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu (\nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \phi) - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\nu (\nabla^\alpha \phi \nabla_\mu \phi) + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla^\alpha (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \\
 & \quad + \frac{1}{4} \nabla_\mu \nabla_\nu (\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi) + \frac{1}{4} \nabla_\nu \nabla_\mu (\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi) \\
 &= \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi - [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi] + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \\
 & \quad - \frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \\
 &= \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi - [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi] + \frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\alpha \nabla_\mu) \nabla_\nu \phi \\
 & \quad + \frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi (\nabla_\nu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\nu) \nabla_\mu \phi \\
 &= \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi - [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi] + \frac{1}{2} R_{\nu\alpha\mu\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi + \frac{1}{2} R_{\mu\alpha\nu\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \\
 &= \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi - [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi] + R_{\mu\alpha\nu\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi.
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Podemos reagrupar os termos

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi = -g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi + X G_{\mu\nu}, \tag{B.15}$$

e finalmente obter a variação do termo de acoplamento não mínimo

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R + 2 \nabla_\alpha \phi \nabla_{(\mu} \phi G_{\nu)}^\alpha + \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi R_{\mu\alpha\nu\beta} \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi G_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi (\square \phi) \\
 & \quad \left. + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \nabla^\alpha \nabla^\beta \phi \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 - \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi R^{\alpha\beta} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Referências

- 1 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, n. 3, p. 1009, sep 1998. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/300499>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- 2 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 517, n. 2, p. 565, jun 1999. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/307221>>. Citado na página 11.
- 3 COLLABORATION, P. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, v. 641, p. A6, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado 6 vezes nas páginas 11, 36, 37, 41, 54 e 56.
- 4 EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 633, n. 2, p. 560, November 2005. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/466512>>. Citado na página 11.
- 5 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(r)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, Mar 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451>>. Citado na página 11.
- 6 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(r)$ theories. *Living Reviews in Relativity*, v. 13, n. 1, p. 3, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2010-3>>. Citado na página 11.
- 7 BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 124, p. 925–935, Nov 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>>. Citado na página 11.
- 8 HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 10, n. 6, p. 363–384, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01807638>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 42 e 56.
- 9 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado na página 11.
- 10 COLLABORATION, B. P. A. et al. L. S.; COLLABORATION), V. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, v. 119, n. 16, p. 161101, Oct 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 47 e 62.
- 11 RUBIN, V. C.; JR., W. K. F. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 159, p. 379, Feb 1970. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<https://cir.nii.ac.jp/crid/1360011145623510912>>. Citado na página 12.

- 12 WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>>. Citado na página 12.
- 13 RIESS, A. G. et al. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond λ cdm. *The Astrophysical Journal*, v. 876, n. 1, p. 85, may 2019. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422>>. Citado na página 12.
- 14 WETTERICH, C. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B*, v. 302, n. 4, p. 668–696, 1988. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321388901939>>. Citado na página 12.
- 15 RATRA, B.; PEEBLES, P. J. E. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 37, p. 3406–3427, Jun 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.3406>>. Citado na página 12.
- 16 ARMENDÁRIZ-PICÓN, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. k-inflation. *Physics Letters B*, v. 458, n. 2, p. 209–218, 1999. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399006036>>. Citado na página 12.
- 17 ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. Essentials of k-essence. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 63, p. 103510, Apr 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.103510>>. Citado na página 12.
- 18 RINALDI, M. Mimicking dark matter in horndeski gravity. *Physics of the Dark Universe*, v. 16, p. 14–21, 2017. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686417300080>>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 51, 54 e 56.
- 19 RIBAS, M. de O. Modelos cosmológicos acelerados com campos fermionicos. 2008. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/1884/17908>>. Citado na página 14.
- 20 COLLODEL, L. G. Tópicos de cosmologia. *Apostila destinada ao minicurso de cosmologia, UFPR-PR*, p. 17, 2014. Disponível em: <<https://fisica.ufpr.br/grad/cosmologia.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 14, 22 e 36.
- 21 D'INVEMO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992. ISBN 9780198596530. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/oso/9780198596530.001.0001>>. Citado 5 vezes nas páginas 15, 20, 24, 28 e 36.
- 22 NUSSENZVEIG, H. M. Curso de física básica, vol. 4. *Edgard Bliucher*, 1998. Citado na página 15.
- 23 CASTELLANI, O. C. Discussão dos conceitos de massa inercial e massa gravitacional. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 23, p. 356–359, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172001000300013>>. Citado na página 15.

- 24 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: Wiley, 1972. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=TrhCEQAAQBAJ&lpg=PA1&ots=m3V9p-Cbu6&dq=WEINBERG%2C%20S.%20Gravitation%20and%20Cosmology%3A%20Principles%20and%20Applications%20of%20the%20General%20Theory%20of%20Relativity.%20%5BS.l.%5D%3A%20New%20York%3A%20Wiley%2C%201972.&lr&hl=pt-BR&pg=PA1#v=onepage&q&f=false>>. Citado 7 vezes nas páginas 15, 17, 19, 20, 24, 26 e 31.
- 25 SOUZA, R. C. de. *Modelos cosmológicos pela simetria de Noether*. 88 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/1884/25887>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- 26 NORTON, J. D. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on Progress in Physics*, v. 56, n. 7, p. 791, Jul. 1993. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/56/7/001>>. Citado na página 16.
- 27 AMORIM, L. C. S. *Modelos cosmológicos inflacionários com correções semiclássicas*. 96 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física da Universidade Federal do Paraná, Paraná, Brasil, 2010. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/1884/23948>>. Citado na página 17.
- 28 SANTOS, M. A. dos. *Modelos de campos escalares no estudo da cosmologia inflacionária*. 64 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil, 2014. Disponível em: <<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2021>>. Citado na página 18.
- 29 NASCIMENTO, M. S. P. *Cosmologia inflacionária via campos escalares*. 81 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil, 2010. Disponível em: <<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/8152>>. Citado na página 19.
- 30 CARROLL, S. M. An introduction to general relativity: Spacetime and geometry. *Addison Wesley*, v. 101, p. 102, 2004. Disponível em: <https://fma.if.usp.br/~mlima/teaching/PGF5292_2021/Carroll_SG.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 24 e 27.
- 31 FABRIS, J. C. *Gravitação. 1. ed.* [S.l.]: São Paulo, SP; Editora Livraria da Física, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- 32 SYNGE, J. L.; SCHILD, A. *Tensor Calculus*. Courier Corporation, 1978. v. 5. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8vlGhlxqZjsC&lpg=PA3&ots=8wIidJYfuU&dq=SYNGE%2C%20J.%20L.%3B%20SCHILD%2C%20A.%20Tensor%20calculus.%20%5BS.l.%5D%3A%20Courier%20Corporation%2C%201978.%20v.%205.&lr&hl=pt-BR&pg=PA3#v=onepage&q&f=false>>. Citado na página 21.
- 33 SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2022. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AHtrEAAAQBAJ&lpg=PR9&ots=tznrixyy8L&dq=SCHUTZ%2C%20B.%20A.%20first%20course%20in%20general%20relativity.%20%5BS.l.%5D%3A%20Cambridge%20university%20press,%202022.&lr&hl=pt-BR&pg=PR9#v=onepage&q&f=false>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

- 34 CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PTGdDwAAQBAJ&lpg=PA48&ots=gtNbk5BVAf&dq=CARROLL%2C%20S.%20M.%20Spacetime%20and%20geometry.%20%5BS.I.%5D%3A%20Cambridge%20University%20Press%2C%202019&lr&hl=pt-BR&pg=PA48#v=onepage&q&f=false>>. Citado na página 25.
- 35 RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2003. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UQpREAAAQBAJ>>. Citado na página 26.
- 36 HAWKING, S. W. Uma breve história no tempo. Tradução: COSTA, José Félix Gomes. Lisboa: Editora Gradiva, 1988. Citado na página 28.
- 37 ADERALDO, V. S.; GONÇALVES, V. P. Uma introdução à evolução do universo segundo sua geometria e composição. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0050>>. Citado na página 29.
- 38 SILVA, I. A. *Modelos cosmológicos analíticos via ínflatons assimétricos*. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2020. Mestrado em Física. Disponível em: <<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/28314>>. Citado na página 30.
- 39 RIBEIRO, A. M. *Modelos cosmológicos de energia escura: aspectos teóricos e vínculos observacionais*. 84 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2013. Mestrado em Física. Disponível em: <<https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/932>>. Citado na página 30.
- 40 LIMA, A. d. A. *Teorias clássicas de campos para o eletromagnetismo*. Fortaleza: [s.n.], 2021. 54 p. Bacharelado em Física. Disponível em: <<http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/57599>>. Citado na página 32.
- 41 LARANJEIRA, R. *Estudo de espectros de potências cosmológicos linear da matéria e angular de 21-cm*. 166 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2019. Disponível em: <<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/28329>>. Citado na página 33.
- 42 LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 12, n. 3, p. 498–501, Mar. 1971. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1665613>>. Citado na página 42.
- 43 SANTOS, F. F. Aplicações do setor john da gravidade de horndeski nos cenários de brana negra e relação de viscosidade/entropia, mundo brana e cosmologia. *arXiv preprint*, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/18727>>. Citado na página 42.
- 44 BERTOLDI, G.; BURRINGTON, B. A.; PEET, A. W. Thermodynamics of black branes in asymptotically lifshitz spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 80, n. 12, p. 126004, Dec. 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.126004>>. Citado na página 42.

- 45 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended galileon dark energy models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 02, p. 007, feb 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/02/007>>. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 46.
- 46 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. Cosmology of a covariant galileon field. *Physical Review Letters*, v. 105, n. 11, p. 111301, Sep 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.111301>>. Citado na página 46.
- 47 AL., A. G. et. An ordinary short gamma-ray burst with extraordinary implications: Fermi-gbm detection of grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 848, n. 2, p. L14, Oct 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa8f41>>. Citado na página 47.
- 48 COLLABORATION, B. P. A. et al. L. S.; COLLABORATION), V. Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: Gw170817 and grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 848, n. 2, p. L13, Oct 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 62.
- 49 COLLABORATION, B. P. A. et al. L. S.; COLLABORATION), V. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 848, n. 2, p. L12, Oct 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 62.
- 50 MATSUMOTO, J. Phantom crossing dark energy in horndeski's theory. *Physical Review D*, v. 97, n. 12, p. 123538, Jun 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.123538>>. Citado na página 47.
- 51 GONG, Y.; PAPANTONOPOULOS, E.; YI, Z. Constraints on scalar-tensor theory of gravity by the recent observational results on gravitational waves. *The European Physical Journal C*, v. 78, n. 9, p. 738, Sep 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6227-9>>. Citado na página 47.
- 52 STAROBINSKY, A. A.; SUSHKOV, S. V.; VOLKOV, M. S. The screening horndeski cosmologies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2016, n. 06, p. 007, jun 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/06/007>>. Citado na página 47.
- 53 BRUNETON, J.-P. et al. Fab four: When john and george play gravitation and cosmology. *Advances in Astronomy*, v. 2012, n. 1, p. 430694, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2012/430694>>. Citado na página 47.
- 54 CHARMOUSIS, C. et al. General second-order scalar-tensor theory and self-tuning. *Phys. Rev. Lett.*, v. 108, n. 5, p. 051101, Jan. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.051101>>. Citado na página 47.
- 55 CHARMOUSIS, C. et al. Self-tuning and the derivation of a class of scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, v. 85, n. 10, p. 104040, May 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.104040>>. Citado na página 47.

- 56 SANTOS, F.; BRITO, F. Domain walls in horndeski gravity. *Physics Letters B*, v. 850, p. 138543, 2024. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269324001011>>. Citado na página 47.
- 57 SANTOS, F. F.; NEVES, R. M. P.; BRITO, F. A. Modeling dark sector in horndeski gravity at first-order formalism. *Advances in High Energy Physics*, v. 2019, n. 1, p. 3486805, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2019/3486805>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 49.
- 58 HARKO, T. et al. Cosmological models in modified gravity theories with extended nonminimal derivative couplings. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 4, p. 044019, Feb. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.044019>>. Citado na página 47.
- 59 ANABALON, A.; CISTERNA, A.; OLIVA, J. Asymptotically locally ads and flat black holes in horndeski theory. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 8, p. 084050, Apr. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.084050>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 49.
- 60 CISTERNA, A.; ERICES, C. Asymptotically locally ads and flat black holes in the presence of an electric field in the horndeski scenario. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 8, p. 084038, Apr. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.084038>>. Citado na página 47.
- 61 CISTERNA, A.; DELSATE, T.; RINALDI, M. Neutron stars in general second order scalar-tensor theory: The case of nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 92, p. 044050, Aug 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.044050>>. Citado na página 47.
- 62 CISTERNA, A. et al. Slowly rotating neutron stars in the nonminimal derivative coupling sector of horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 93, p. 084046, Apr 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.084046>>. Citado na página 47.
- 63 BRITO, F. A.; SANTOS, F. F. Black brane in asymptotically lifshitz spacetime and viscosity/entropy ratios in horndeski gravity. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 129, n. 5, p. 50003, Apr. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/129/50003>>. Citado na página 47.
- 64 BRITO, F. A.; SANTOS, F. F. Braneworlds in horndeski gravity. *The European Physical Journal Plus*, v. 137, n. 9, p. 1051, Sep. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03270-w>>. Citado na página 47.
- 65 SARIDAKIS, E. N.; SUSHKOV, S. V. Quintessence and phantom cosmology with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 81, p. 083510, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.083510>>. Citado na página 49.
- 66 KARYDAS, S.; PAPANTONOPOULOS, E.; SARIDAKIS, E. N. Successful higgs inflation from combined nonminimal and derivative couplings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 104, p. 023530, Jul 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.023530>>. Citado na página 49.

- 67 BOUALI, A. et al. Cosmological tests of the osculating barthel–kropina dark energy model. *The European Physical Journal C*, v. 83, n. 2, p. 121, Feb 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11265-9>>. Citado na página 54.
- 68 RIESS, A. G. et al. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ mpc}^{-1}$ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 934, n. 1, p. L7, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac5c5b>>. Citado na página 56.
- 69 ABDALLA, E. et al. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies. *Journal of High Energy Astrophysics*, v. 34, p. 49–211, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jheap.2022.04.002>>. Citado na página 56.
- 70 FREEDMAN, W. L. Measurements of the hubble constant: Tensions in perspective. *The Astrophysical Journal*, v. 919, n. 1, p. 16, Sep. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac0e95>>. Citado na página 56.
- 71 ANAND, G. S. et al. Comparing tip of the red giant branch distance scales: An independent reduction of the carnegie-chicago hubble program and the value of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, v. 932, n. 1, p. 15, Jun. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac68df>>. Citado na página 56.
- 72 JAEGER, T. de et al. A 5 percent measurement of the hubble–lemaître constant from type ii supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 514, n. 3, p. 4620–4628, Jun. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stac1661>>. Citado na página 56.
- 73 PESCE, D. W. et al. The megamaser cosmology project. xiii. combined hubble constant constraints. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 891, n. 1, p. L1, Feb. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab75f0>>. Citado na página 56.
- 74 SHAJIB, A. J. et al. Tdcosmo - xii. improved hubble constant measurement from lensing time delays using spatially resolved stellar kinematics of the lens galaxy. *Astronomy & Astrophysics*, v. 673, p. A9, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202345878>>. Citado na página 56.
- 75 VERDE, L.; TREU, T.; RIESS, A. G. Tensions between the early and late universe. *Nature Astronomy*, v. 3, n. 10, p. 891–895, Oct. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41550-019-0902-0>>. Citado na página 56.
- 76 KNOX, L.; MILLEA, M. Hubble constant hunter’s guide. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 4, p. 043533, Feb. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.043533>>. Citado na página 56.
- 77 VALENTINO, E. D. et al. In the realm of the hubble tension—a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, v. 38, n. 15, p. 153001, Jul. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>>. Citado na página 56.
- 78 PERIVOLAROPOULOS, L.; SKARA, F. Challenges for Λ cdm: An update. *New Astronomy Reviews*, v. 95, p. 101659, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.newar.2022.101659>>. Citado na página 56.

- 79 ZUMALACÁRREGUI, M. Gravity in the era of equality: Towards solutions to the hubble problem without fine-tuned initial conditions. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 2, p. 023523, Jul. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.023523>>. Citado na página 56.
- 80 SHAH, P.; LEMOS, P.; LAHAV, O. A buyer's guide to the hubble constant. *The Astronomy and Astrophysics Review*, v. 29, n. 1, p. 9, Dec. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00159-021-00137-4>>. Citado na página 56.
- 81 SCHÖNEBERG, N. et al. The h_0 olympics: A fair ranking of proposed models. *Physics Reports*, v. 984, p. 1–55, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2022.07.001>>. Citado na página 56.
- 82 PETRONIKOULOU, M.; BASILAKOS, S.; SARIDAKIS, E. N. Alleviating h_0 tension in horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 12, p. 124051, Dec 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.124051>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 60.
- 83 PETRONIKOULOU, M.; SARIDAKIS, E. N. Alleviating the h_0 tension in scalar–tensor and bi-scalar–tensor theories. *Universe*, v. 9, n. 9, p. 397, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/universe9090397>>. Citado na página 56.
- 84 BANERJEE, S.; PETRONIKOULOU, M.; SARIDAKIS, E. N. Alleviating the h_0 tension with new gravitational scalar tensor theories. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 2, p. 024012, Jul 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.108.024012>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 60.
- 85 TIWARI, Y.; GHOSH, B.; JAIN, R. K. Towards a possible solution to the hubble tension with horndeski gravity. *The European Physical Journal C*, v. 84, n. 3, p. 220, Mar 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-12577-0>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 60.