UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA

JOÉBIO DÁRLON HENRIQUES DE LIMA COSTA

O USO DO GEOGEBRA NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Cuité
2025

JOÉBIO DÁRLON HENRIQUES DE LIMA COSTA

O USO DO GEOGEBRA NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato da Silva Ignácio

Cuité

2025

C837u Costa, Joébio Dárlon Henriques de Lima.

O uso do GeoGebra nos problemas de otimização matemática. / Joébio Dárlon Henriques de Lima Costa. - Cuité, 2025.
40 f.: il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2025.
"Orientação: Prof. Dr. Renato da Silva Ignácio".

Referências.
1. Matemática. 2. Matemática aplicada. 3. GeoGebra. 4. GeoGebra - software. 5. Resolução de problemas. 6. Matemática – ensino médio. 7. Centro de Educação e Saúde. I. Ignácio, Renato da Silva. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO Msc. Jesiel Ferreira Gomes - CRB-15/256

JOÉBIO DÁRLON HENRIQUES DE LIMA COSTA

O USO DO GEOGEBRA NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado em: 09 de abril de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
RENATO DA SILVA IGNACIO
Data: 16/05/2025 11:41:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Renato da Silva Ignácio, Doutorado (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Glageane da Silva Souza

Glageane da Silva Souza, Doutorado (Examinador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Wellison Gomes Casado, Mestre (Examinador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico este trabalho aos meus pais e toda a minha família que me apoiaram sempre com amor, e a todos que passaram por minha formação. Muita admiração e gratidão por seu apoio, carinho e presença ao longo do período de elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças de ter continuado mesmo com muitas dificuldades e barreiras, agradeço também a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação, seja colegas ou professores.

Agradeço a minha família e a minha namorada, por me apoiarem sempre nessa caminhada com muito incentivo e palavras confortantes.

Também ao professor Orientador Dr. Renato da Silva Ignácio, por me orientar e por ter contribuído muito para o meu crescimento educacional.

Agradeço aos professores Wellisson e Glageane por serem membros da banca e fazerem parte da minha história.

A Universidade Federal de Campina Grande, pela oportunidade de realização do curso.

RESUMO

COSTA, Joébio. **O uso do GeoGebra nos problemas de otimização matemática.** 2025 Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2025.

A matemática aplicada é um ramo da matemática que faz a utilização de ferramentas matemáticas para a melhor resolução de tais problemas, mas que é pouco explorada ou mesmo não vista por professores do ensino médio. A otimização matemática, por exemplo, que tem uma vasta aplicabilidade seja na economia, na agricultura, nas engenharias, nos transportes, resumindo, em tudo ela se encaixa, e que pode ser apresentada para o ensino médio. Dentre estes, destacam-se a otimização de funções quadráticas, funções discretas, algumas funções contínuas, além de aplicações da desigualdade das médias. Ainda, outra ferramenta com acesso gratuito que é pouca utilizada por professores e que pode ser usada tanto em computadores quanto em mobile é o software GeoGebra, ferramenta gráfica e que tem uma vasta aplicabilidade. Assim, este presente trabalho tem o objetivo de mostrar o que é a otimização matemática e problemas que envolvem o uso da mesma com a aplicabilidade do GeoGebra como principal ferramenta.

Palavras-chave: GeoGebra, Resolução de Problemas, Ensino médio.

ABSTRACT

COSTA,JOÉBIO, **O uso do GeoGebra nos problemas de otimização matemática.** 2025. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Centro de Educação e Saúde, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2025.

Applied mathematics is a branch of mathematics that uses mathematical tools to better solve such problems, but which is little explored or even not seen by high school teachers. Mathematical optimization, for example, which has wide applicability whether in economics, agriculture, engineering, transport, in short, it fits into everything, and can be presented for high school. Among these, the optimization of quadratic functions, discrete functions, some continuous functions, as well as applications of the inequality of means stand out. Yet another tool with free access that is rarely used by teachers and that can be used on both computers and mobile phones is the GeoGebra software, a graphical tool that has wide applicability. Thus, this present work aims to show what mathematical optimization is and problems that involve its use with the applicability of GeoGebra as the main tool.

Keywords: GeoGebra, Resolution, High school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios, sempre nos perguntamos “qual o caminho mais curto?”, “qual o formato para construir uma casa em que gastará menos material?”, “como cercar um terreno em que gastará menos cerca e com a maior área?”, com essas e outras perguntas surgiu o ramo da matemática chamado otimização matemática.

Esses problemas de otimização matemática são de grande importância na área que são aplicados, pois são adversidades que envolvem o nosso cotidiano e, além disso, os métodos de resolução desses problemas tem grande acervo de recursos dependendo da complexidade de cada problema.

Tais problemas de otimização matemática têm grande aplicabilidade, além de contribuir em diversas áreas fazendo a resolução de problemas como na administração, na economia, nas engenharias diversas, na logística, em diversas áreas da ciência, na agricultura e, além de tudo, elas podem serem trabalhadas no Ensino Médio, em que também é muito visto questões dessa natureza no Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM).

Um dos recursos tecnológicos que podemos citar pode ser o GeoGebra, que é um aplicativo computacional gráfico livre que pode ser usado tanto em computadores quanto em celulares, que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface gráfica, sendo uma ferramenta que pode ser usada em sala de aula ou em casa, pois é acessível para a maioria das pessoas por ser uma ferramenta gratuita o contrário do por exemplo o antigo software Cabri que era pago, porem mesmo tendo tantas qualidades ainda pouco utilizada por professores de matemática em aulas.

Assim, o presente trabalho busca apresentar alternativas didáticas para o estudo de conceitos matemáticos a partir de problemas de otimização matemática, utilizando o software GeoGebra como um recurso didático e mostrar um tema de muitos que podem ser explorados com essa ferramenta.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Primeiramente vamos definir o que é otimização matemática, para Hortêncio (2020) a otimização é o estudo de problemas em que se busca maximizar ou minimizar uma função, através da escolha de variáveis considerando um conjunto de restrições. Ou seja, ela usa ferramentas matemáticas para resolver um dado problema.

Segundo Santos. Daiana (2024), os problemas de otimização matemática surgiram no século XX no qual a teoria moderna de otimização começou a ser formalizada. Inicialmente, com contribuições de nomes como Fermat e Euler, e depois com destaque para os trabalhos de Karush-Kuhn-Tucker, que estabeleceram as condições necessárias e suficientes para otimalidade em problemas de programação não linear (Karush, 1939), conhecidas como “Condições de Kuhn-Tucker”. Décadas mais tarde, algoritmos numéricos eficientes foram desenvolvidos, como o método de gradiente descendente e o método de Newton-Raphson, permitindo a resolução de problemas de grande escala.

Para Meneghetti, (2022), otimização Matemática ou Programação Matemática é a área da Matemática Aplicada que estuda métodos e algoritmos para resolver problemas do tipo: “Dada uma função real, de variáveis reais, determinar os valores das variáveis para os quais a função assume seu maior valor (máximo) ou o seu menor valor (mínimo), sujeito a eventuais restrições”.

A otimização matemática vem ganhando cada vez mais espaço em todas as áreas, como na área da matemática, resolvendo problemas que não seriam possíveis sem ela e também como Hortêncio, 2020 fala que a otimização tem ganhado cada vez mais espaço no mundo empresarial como uma ferramenta fundamental para encontrar boas soluções para problemas complexos. Sua aplicação é extensa, incluindo diversos campos como logística de transportes, produção de bens, serviços hospitalares e alocação de equipes. Ou seja, não é só no mundo da matemática, mas também presente em nossas vidas.

Com o avanço tecnológico e a constante aplicações de softwares educativos, houve uma “estimulo” na maneira de pensar sobre as aulas de matemática. Para Kenski (2003), as novas tecnologias têm alterado nossas maneiras de pensar e de agir. Em que a educação escolar vem enfrentando uma disputa em se obter a atenção do aluno no sentido de estar perdendo para outros meios mais dinâmicos e mais atraentes do que a prática executada e vivenciada na sala de aula. Com isso o professor e exigido que desenvolva novas metodologias de ensino para que prendam o aluno de melhor forma e que provoque a construção de conhecimentos, estimulação e criação do próprio aluno em sala.

O software GeoGebra e uma ferramenta matemática bastante versátil e agradável, pois além de possui um acesso gratuito ela combina vários assuntos da matemática como o: álgebra, geometria, estatística, tabelas e gráficos em uma só aplicação. Esse programa foi desenvolvido na Áustria em

2001 por Markus Hohenwarter. É essencial no ensino matemático, assim afirma Diniz (apud Caires, 2011), quando relata que o GeoGebra unifica, em uma só plataforma, um sistema de geometria dinâmico (Dynamic Geometry System – DGS) com um sistema de computação algébrica (Computer Algebric System – CAS).

3. DESENVOLVIMENTO
3.1. PROBLEMA

Uma empresa de laticínios é responsável por toda a cadeia de produção de leite até chegar ao consumidor e deseja diminuir os custos. O que ela deve fazer?

O custo de produção de leite é calculado dividindo o custo total pela quantidade de leite produzida e a eficiência na produção de leite pode ser obtida reduzindo gastos ou aumentando a produção sem aumentar os custos. A região em que o leite é produzido, a raça e genética da pecuária leiteira também influencia na eficiência da produção de leite e o processo de produção de outros fatores, tais como: Alimentação, como ração concentrada, soja e milho Mão de obra, Saúde animal, Energia elétrica, Fertilizantes e Combustíveis.

São gastos de custeio da atividade leiteira denominados de custo operacional efetivo (COE) que implicam em desembolsos citados acima e outros dessa natureza.

Portanto, a eficiência neste caso pode ser obtida produzindo mais ou custando menos. Optamos, neste trabalho, em encontrar a embalagem que represente o menor custo para a empresa para obter uma melhor eficiência e rentabilidade na atividade leiteira.

A conservação e armazenamento do produto, que é altamente perecível, sempre foi um desafio para a humanidade e por muito tempo o consumo deste alimento foi feito ainda fresco ou em forma de coalhada, queijos, manteiga e outros laticínios. O desenvolvimento das técnicas de processamento que possibilitaram uma maior durabilidade do alimento ocorreram durante a Revolução Industrial na Europa, sendo que o problema e a possibilidade de levar o leite fresco das zonas rurais para as grandes cidades tornou-se uma realidade.

As primeiras embalagens de leite criadas que se possui conhecimento eram feitas de porcelana. A fabricação demorada e artesanal, a pouca resistência do material e o custo alto foram fatores decisivos para a substituição das embalagens de porcelana por garrafas de vidro para armazenar o leite. A venda do alimento em garrafa de vidro utilizada era retornável e a base de troca dos cascos ou vasilhames vazios por outros cheios, como é feito hoje com os refrigerantes. A higienização das garrafas implicava na validade do leite que, mesmo sem abrir a embalagem, não passava de alguns dias e já se tornava imprópria para o consumo.

Os saquinhos de plásticos também são usados para armazenar o leite devido ao baixíssimo custo da embalagem, isso porque os sacos de leite consomem menos água e energia na produção, além de gerar menos gases de efeito estufa. Porém, para manter as qualidades nutritivas do leite, essa embalagem exige que o transporte ocorra em caminhões refrigerados, e nos supermercados e padarias, precisam também manter o leite sob refrigeração e, mesmo nestas condições e sem ser aberto a validade do produto, não ultrapassa três ou quatro dias.

Para solucionar o problema, a indústria láctea passou a usar as embalagens cartonadas ou caixinhas de longa vida que permitem armazenar o leite, sem refrigeração nenhuma, por até seis meses, sem risco de qualquer tipo de contaminação. E, por serem totalmente assépticas, essas embalagens garantem total segurança para o consumo do leite sem comprometer a sua qualidade nutritiva e sabor. A facilidade de serem transportadas é outra vantagem deste tipo de embalagem, já que podem ser organizadas em grandes fardos. No entanto, as embalagens cartonadas exigem uma grande quantidade de água para serem produzidas.

As embalagens de leite de longa vida são compostas por seis camadas de diferentes materiais, como plástico, papel e alumínio, que protegem o alimento e, por isso, o formato da embalagem implica em gastar mais ou menos material.

Qual o formato de embalagem para um litro de leite gasta menos material para ser produzido?

Esta questão envolve conhecimentos das figuras geométricas espaciais e suas planificações, uma vez que o propósito é encontrar a embalagem que utiliza a menor quantidade de papel cartonado.

A seguir vamos considerar algumas figuras geométricas e suas respectivas planificações como possíveis formatos para as embalagens de leite de longa vida.

3.1.1. HIPÓTESE 1: EMBALAGEM DE LEITE EM FORMATO DE CUBO.

Nesta situação hipotética de embalagem é preciso saber mais sobre esta figura.

1. O que é um cubo?" Guzman (2022), define o cubo como um objeto sólido tridimensional delimitado por seis faces quadradas. Três dessas faces se encontram em cada vértice. O cubo também é definido como um hexaedro, ou seja, um sólido com seis faces. Os cubos são um tipo de prismas quadrados.

2. Como medir um cubo? temos várias medidas no cubo como altura, largura e comprimento e com elas pode-se calcular as seguintes grandezas geométricas: perímetro, sendo o comprimento de cada contorno do cubo, área usando a fórmula $AS = 6a^2$, podendo também calcular a diagonal do cubo com a fórmula $D = \sqrt{3}a$, e , da mesma forma, podem calcular o seu volume utilizando a fórmula $V=a^3$ sendo essas as principais fórmulas do cubo.

3. Como calcular o volume de um cubo? O volume de um cubo por ser uma figura tridimensional, ou seja, que tem 3 dimensões, consegue calcular o volume fazendo a multiplicação da altura do comprimento e da largura e, como se trata de um cubo que possui todos os lados iguais, temos que pode ser calculado multiplicando os comprimentos de suas três dimensões, resultando na fórmula $V=a^3$.

4. Como se chegou a este modelo matemático? Segundo, DEURSEN (2017), Com o início da era das grandes navegações, intelectuais renascentistas começaram a discutir formas de unificar as medidas, e alguns deles se baseiam em textos antigos – de persas, egípcios e até da Bíblia, mas teve resistência da população. Mas, tudo isso começou a mudar em 1670, quando o padre Gabriel Mouton, de Lyon, criou uma unidade de medida baseada no segmento de um meridiano da Terra. Em 1790, quando a Revolução Francesa derrubou os privilégios feudais, uma comissão científica partiu dos cálculos de Mouton para alcançar um padrão definitivo. Após uma década de trabalho, o metro foi definido e, a partir dele, nasceram o quilo e o litro. Atualmente, temos pelo Sistema Internacional de Unidades, a unidade-padrão de volume é o metro cúbico. Utilizamos uma unidade cúbica porque o volume é tridimensional, ou seja, envolve comprimento, largura, altura e tem-se seus múltiplos.

3.1.1.1. MONTAGEM DE UM CUBO COM O AUXILIO DO *GEOGEBRA*

Um cubo contendo 1 litro de leite, ou seja, 1000 cm^3 de capacidade deve possuir lados iguais a 10, como mostra o cálculo abaixo:

$$v= L^3$$

$$1000= L^3$$

$$L =\sqrt[3]{1000}$$

$$L = 10 \text{ cm}$$

Agora, para fazermos um cubo com o auxílio do GeoGebra vamos fazer o seguinte passo a passo:

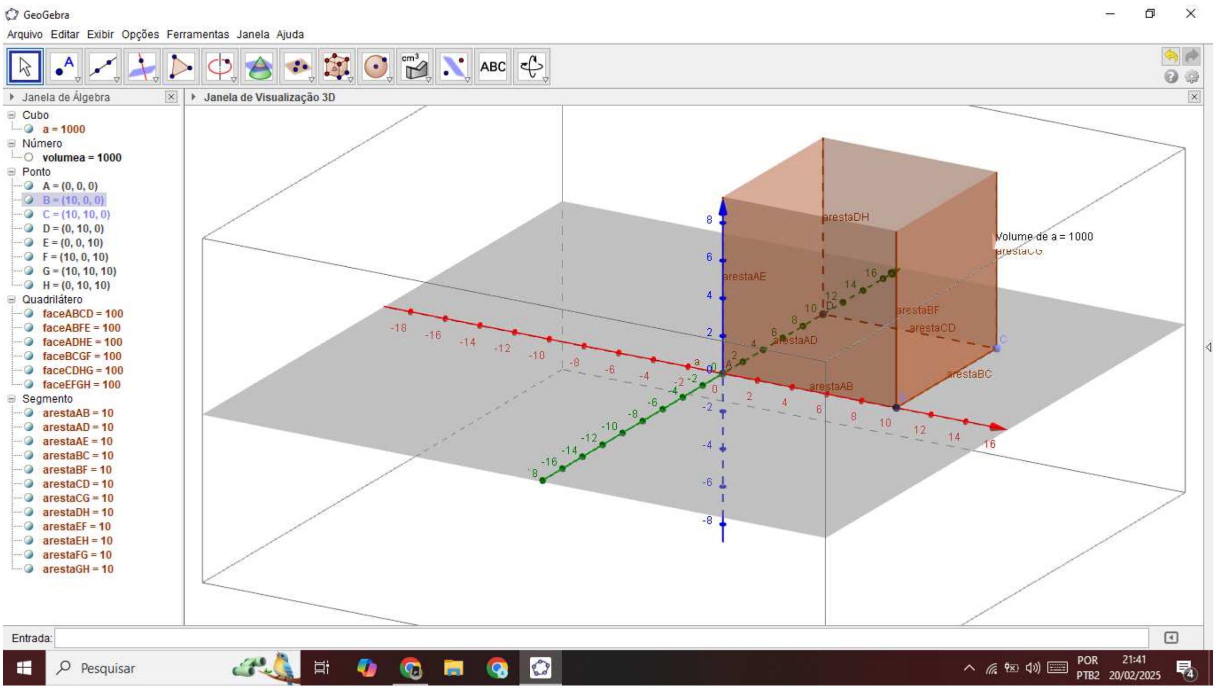
A. Escolhemos a ferramenta cubo e selecionamos dois pontos que podem ser o A = (0,0) e B = (0,10).

B. Depois, com a ferramenta de volume, mede-se o volume do mesmo e ver que é igual ao esperado como podemos ver na Figura **1**.

C. Com a ajuda da ferramenta de planificação, abre-se o cubo.

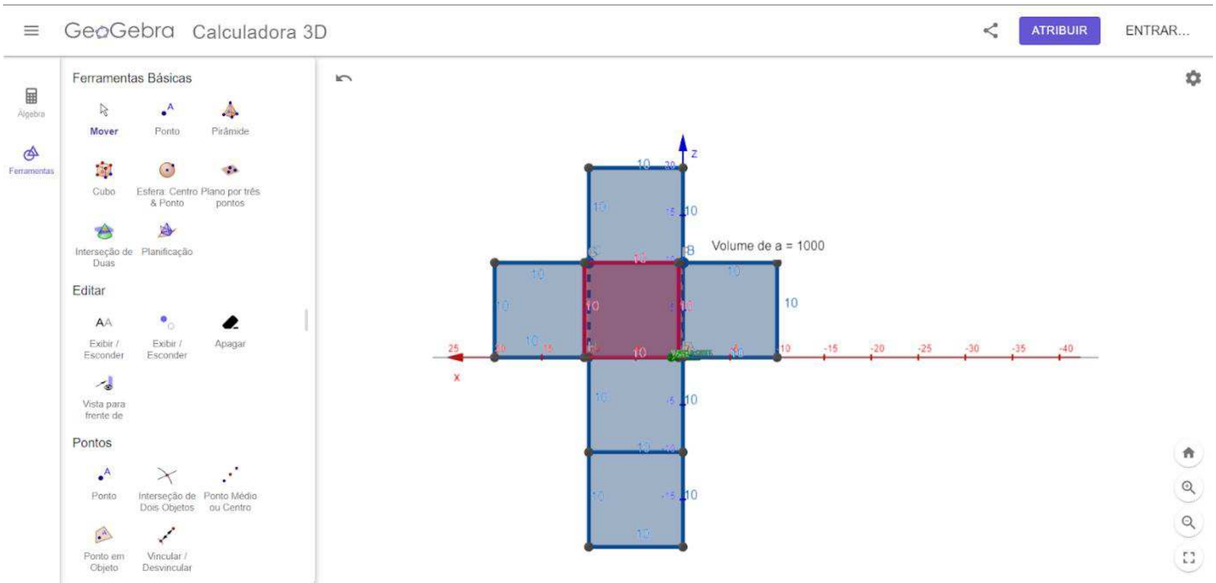
D. Por fim, com a ferramenta perímetro, mede-se os lados do cubo e soma-os como no cálculo mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

Figura 1- Cubo e seu volume



Fonte: O Autor, 2025.

Figura 2 - Cubo planificado e calculado o seu perímetro



Fonte: O Autor, 2025.

Logo após, para calcularmos o seu perímetro precisamos somá-lo totalmente sem repeti-lo.

P= 19x10

P = 190 cm

Com isso, temos o perímetro de um cubo de 1 litro igual a 190 cm.

3.1.2. HIPÓTESE 2: EMBALAGEM DE LEITE EM FORMATO DE PARALELEPÍPEDO

1. O que é um Paralelepípedo? para Oliveira (2017) O paralelepípedo é um sólido geométrico bastante presente no nosso cotidiano, sendo assim chamado por possuir faces formadas por paralelogramos. "Para que um sólido geométrico seja considerado paralelepípedo, ele precisa possuir faces formadas por paralelogramo e é composto por 8 vértices, 12 arestas e 6 faces.
2. Como medir um Paralelepípedo? Oliveira v(2017) diz que o paralelepípedo possui as seguintes medidas como altura, diagonal, largura, comprimento, volume, área e perímetro

3. Como calcular o volume de um Paralelepípedo? Oliveira (2017)

mostra que para calcular o volume de um paralelepípedo, multiplica o comprimento, a largura e a altura do sólido geométrico. A fórmula é: V = CxLxH.

4. Como se chegou a este modelo matemático? Clarin (2014) fala que a história da figura geométrica paralelepípedo está relacionada com o uso de pedras de paralelepípedo como lastro de navios que transportavam grãos da Grã-Bretanha para a Europa, a partir do meio do século XIX. Essas pedras eram extraídas de pedreiras da Irlanda e de Gales, e eram colocadas sobre um leito de areia e terra, surgindo a necessidade de resolver problemas como a construção de casas, construções de ruas dentre outras coisas e, assim, resultou no modelo matemático de volume para saber quantas pedras seriam necessários para aquele problema.

3.1.2.1. MONTAGEM DE UM PARALELEPÍPEDO COM O AUXILIO DO GEOGEBRA

Para que um paralelepípedo contendo 1 litro de leite, ou seja 1000 cm3, vamos considerar um exemplo de um com as dimensões 10x20x5 que multiplicando base x altura x comprimento poderá ser visto que dará o volume desejado como mostra o cálculo abaixo:

$$V = CxLXh$$
$$V = 10x20x5$$
$$V = 1000\ cm^3$$

Para que um paralelepípedo seja criado é preciso, com o auxílio do campo de entrada do GeoGebra, criar os seguintes pontos:

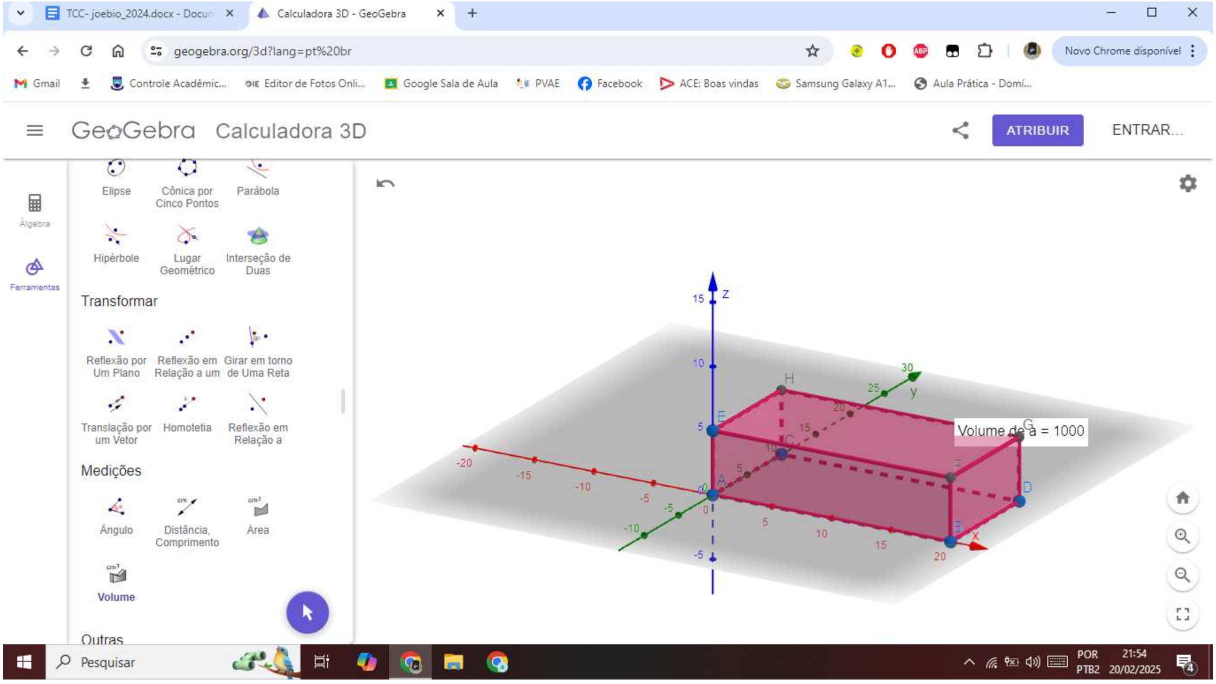
A. Primeiro, é preciso digitar A= (0,0); B = (20,0); C = (0,10); D = (20,10), E = (0,0,5).

B. Em seguida, com o auxílio da ferramenta prisma, clica-se nos pontos A,B,C,D,E e será criado o paralelepípedo como e mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

C. Com o auxílio da ferramenta de planificação da figura, a sua planificação será feita como mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

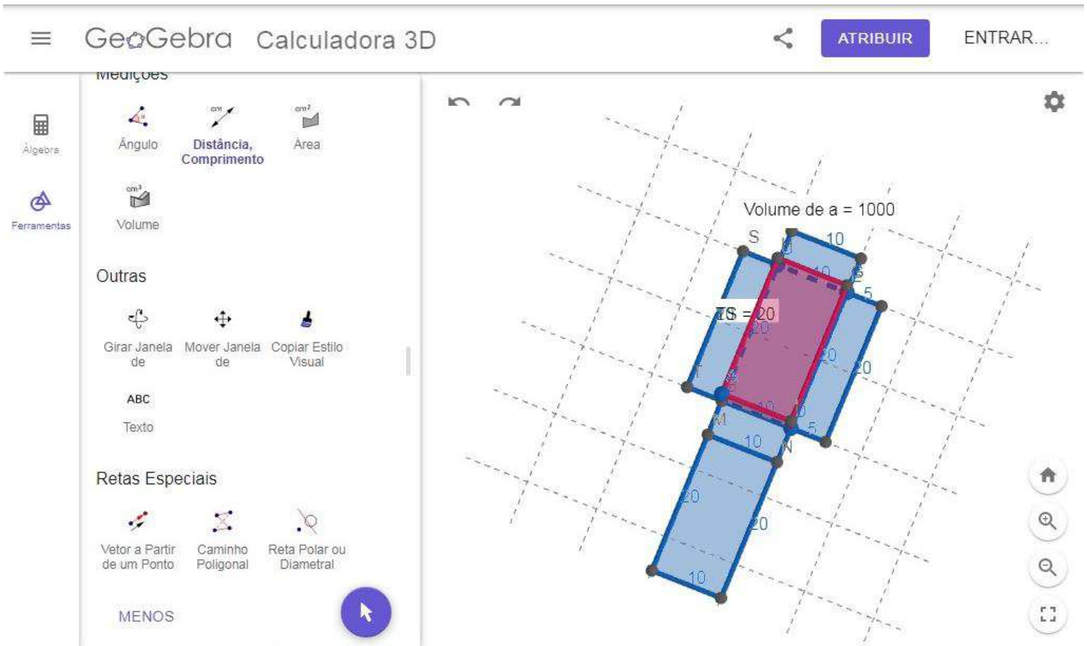
D. Depois, com a ajuda da ferramenta perímetro, medimos e somamos como mostrado no cálculo abaixo:

Figura 3 - Paralelepípedo e seu volume



Fonte: O Autor, 2025.

Figura 4 - Paralelepípedo planificado e calculado o seu perímetro.



Fonte: O Autor, 2025.

Para calcularmos o seu perímetro precisamos somá-lo totalmente sem repeti-lo.

$$P = 10+5+5+5+10+5+20+20+20+20+5+10+5+5+5+10+20+20+10$$

$$P = 210 \text{ cm}$$

com isso para que um paralelepípedo contenha um litro de leite ele terá que ter um perímetro igual a 210 cm.

3.1.3. HIPÓTESE 3: EMBALAGEM DE LEITE EM FORMATO DE CILINDRO

1. O que é um cilindro? Caiusca(2019) , fala que um cilindro é um sólido geométrico com duas bases circulares paralelas e uma face lateral curva. É um corpo redondo, juntamente com a esfera e o cone, por ter superfícies curvas e ser construído a partir da rotação de uma figura plana em torno do seu eixo
2. Como medir um cilindro? o cilindro por ser uma figura geométrica tridimensional é possível medir sua altura, seu diâmetro, sua área e seu volume.
3. Como calcular o volume de um cilindro? Pamula (2024) diz que cilindro oco, também chamado de casca cilíndrica, é uma região tridimensional delimitada por dois cilindros circulares retos com o mesmo eixo e duas bases anulares paralelas perpendiculares ao eixo comum dos cilindros. assim para calcularmos o volume de um cilindro qualquer precisamos de seu raio e de sua altura com isso, multiplique a área da base pelo valor da altura. A fórmula é $V = \pi{\cdot}r2{\cdot}h$, onde r é o raio da base e h é a altura.
4. Como se chegou a este modelo matemático? Costa (2016) fala que origem de cilindro está num vocábulo grego que remetia para rolo, termo que começou a ser usado no sentido matemático. Mas a história desta palavra não ficou por aqui: foi deslizando até à Renascença, altura em que encontrou outros sentidos. com o passar dos anos começou a ser cada vez mais usado em nossos cotidianos seja em garrafas, baldes dentre outras coisas e surgiu o questionamento de qual a quantidade de certo material aquele cilindro conseguiria conter, e com isso surgiu o conceito de volume cilíndrico.

3.1.3.1. MONTAGEM DE UM CILINDRO COM O AUXILIO DO GEOGEBRA

Para que um cilindro contenha 1 litro de leite vamos utilizar a seguinte formula:

- $V = 1000$ e $h= 1000/\pi r^2$

$$V = \pi r^2 h \text{ implica que } 1000 = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi r^2+2r\pi h \text{ implica } A = 2\pi r^2+2r\pi\ 1000/\pi r^2$$

$$A = 2\pi r^2+ 2000/r$$

derivando temos

$$4\pi r^3 - 2000/r^2$$

Agora vamos achar a área mínima para que o cilindro consiga compor 1 litro de leite com isso temos:

Area mínima e igual:

$$4\pi r^3 + 2000 = 0$$

Logo

$$r^3 = 2000/4\pi$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{500}{4\pi}} = 2{,}526$$

$$h = 1000/\pi(2{,}525)^2 = 49.8$$

com isso o cilindro precisa ter 2,526 de raio e 49.8 de altura para que o ele consiga compor 1 litro de leite e ter um melhor aproveitamento de material.

Para criar um cilindro e sua planificação precisamos fazer o seguinte passo a passo:

A. Criar dois pontos no eixo x com as seguintes coordenadas: A = (0,0) e B = (49.8)

B. Com o auxílio da ferramenta cilindro, clica-se nos pontos A e B produzidos anteriormente, de onde será aberto uma aba na qual pede-se o raio do cilindro, que será de 2.526 cm. Dessa forma, o cilindro esperado será criado.

C. Em seguida, com a ferramenta volume, mede-se o cilindro para conferir a medida de volume esperada de 1000 cm^3.

D. Depois é elaborado, com o auxílio do campo de entrada do GeoGebra, os pontos: C = (x(A),$\boldsymbol{\pi}$*2.526,0); D = (x(B),$\boldsymbol{\pi}$*2.526,0); E = (x(A),-$\boldsymbol{\pi}$*2.526,0); F = (x(B),$\boldsymbol{\pi}$*2.526,0)

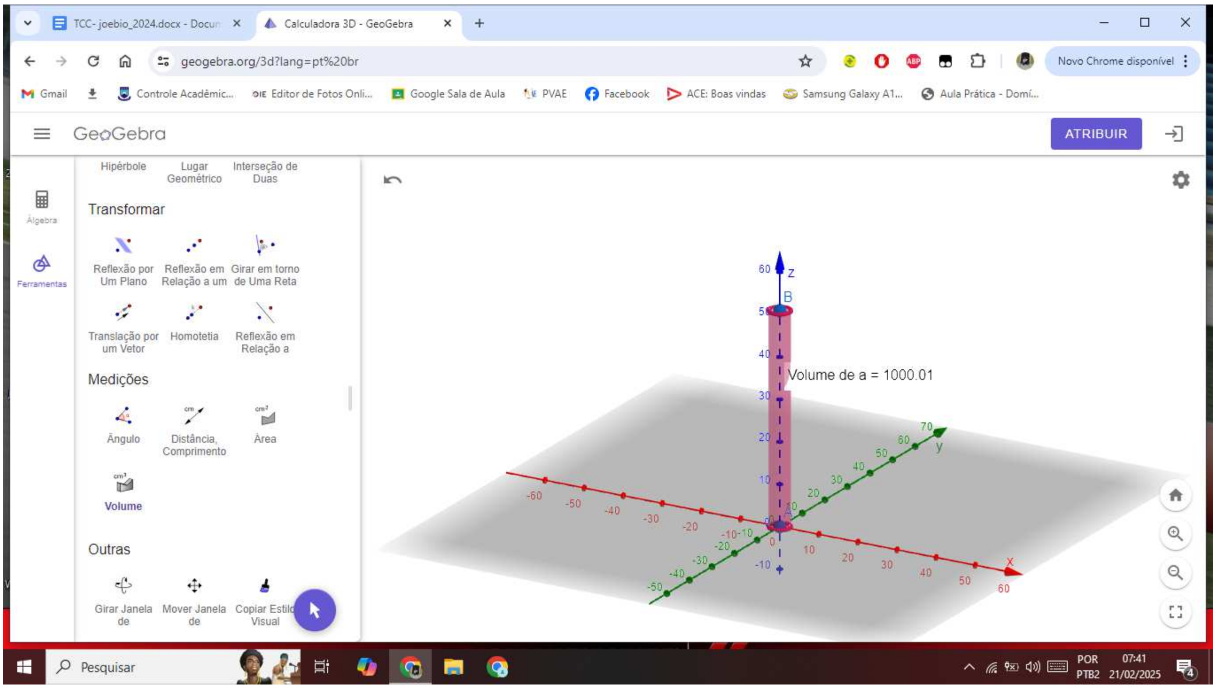
E. No campo de entrada, cria-se o polígono e digita-se o nome dado ao polígono, assim, será gerado e planificado o centro do cilindro.

F. Depois, cria-se os pontos: G = (x(A)- 2.526,$\boldsymbol{\pi}$*2.5,0)e H = (x(B)+ 2.526,$\boldsymbol{\pi}$*2.526,0) e é criado o cilindro como mostrado na figura 5.

G. Com o auxílio da ferramenta de perímetro, mede-se os lados como mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e para saber o perímetro total soma-se todos os lados para obtermos o perímetro desejado mostrado no cálculo abaixo:

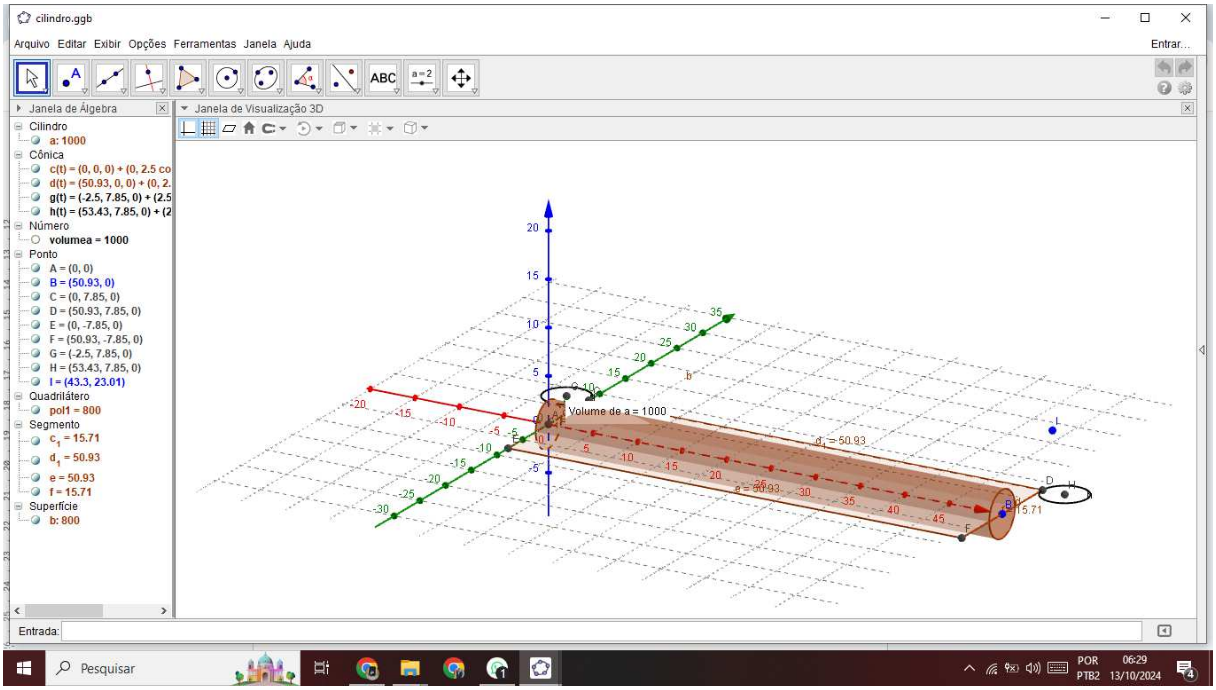
Figura 5 - Cilindro e seu volume

.



Fonte: O Autor, 2025.

Figura 6 - Cilindro planificado e calculado o seu perímetro



Fonte: O Autor, 2025.

Para calcularmos o seu perímetro precisamos somá-lo totalmente sem repeti-lo.

$$P = 49.8+49.8+15.71+15.71$$

$$P= 131.02 \text{ cm}$$

com isso para que um cilindro contendo um litro de leite ele terá que ter um perímetro igual a 131.02 cm.

3.1.4. HIPÓTESE 4: EMBALAGEM DE LEITE EM FORMATO DE UM TETRAEDRO

1. O que é um Tetraedro? Hugo (2021) define tetraedro como sendo um triângulo poligonal, com 3 faces triangulares iguais. Portanto, se você observar, esta figura geométrica é idêntica a uma pirâmide, ou seja, a base e todos os lados são congruentes, o que o torna regular.
2. Como medir um Tetraedro? o tetraedro é possível calcular sua altura fazendo a distância entre os vértices do tetraedro, podemos medir também a sua área total e sua área e finalmente seu volume pela fórmula V=Ab*h/3.
3. Como calcular o volume de um Tetraedro? Hugo (2021) diz que o volume também pode ser calculado facilmente e há uma fórmula específica para o triângulo, portanto, facilita, e muito, na descoberta do valor. Assim a fórmula de volume de um tetraedro é dada por V=Ab*h/3.
4. Como se chegou a este modelo matemático? o tetraedro é uma figura geométrica muito utilizada desde as antiguidades como podemos citar com as pirâmides do Egito, ainda fazia parte dos sólidos de platão, assim por ser muito utilizado desde as antiguidades até os dias atuais com isso surgiu a pergunta de quanto de espaço aquele ele ocupa assim surgiu o volume do tetraedro dado pela a fórmula V=Ab*h/3.

3.1.4.1. MONTAGEM DE UM TETRAEDRO COM O AUXILIO DO GEOGEBRA

Para que um tetraedro contenha 1 litro de leite, ou seja 1000 cm^3, com o auxílio do GeoGebra é necessário criar seguindo o seguinte passos:

A. criar um ponto A

B. criar um ponto B e colocar um controle deslizante, começando de 1 até 30 e com o incremento de 0,1.

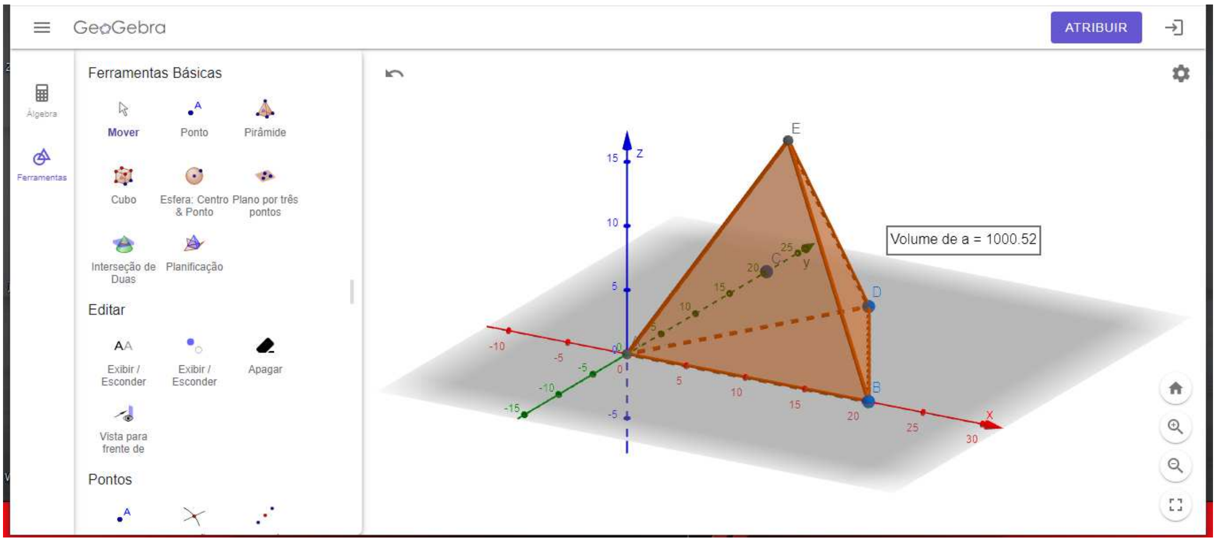
C. Em seguida, clicar na função tetraedro regular.

D. Depois, clica-se na função volume no GeoGebra que vai mostrar o volume do mesmo, no qual é preciso mexer no controle deslizante até achar o volume desejado como mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

E. Com a ferramenta de planificar, após ter encontrado o volume desejado, o tetraedro é planificado como mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

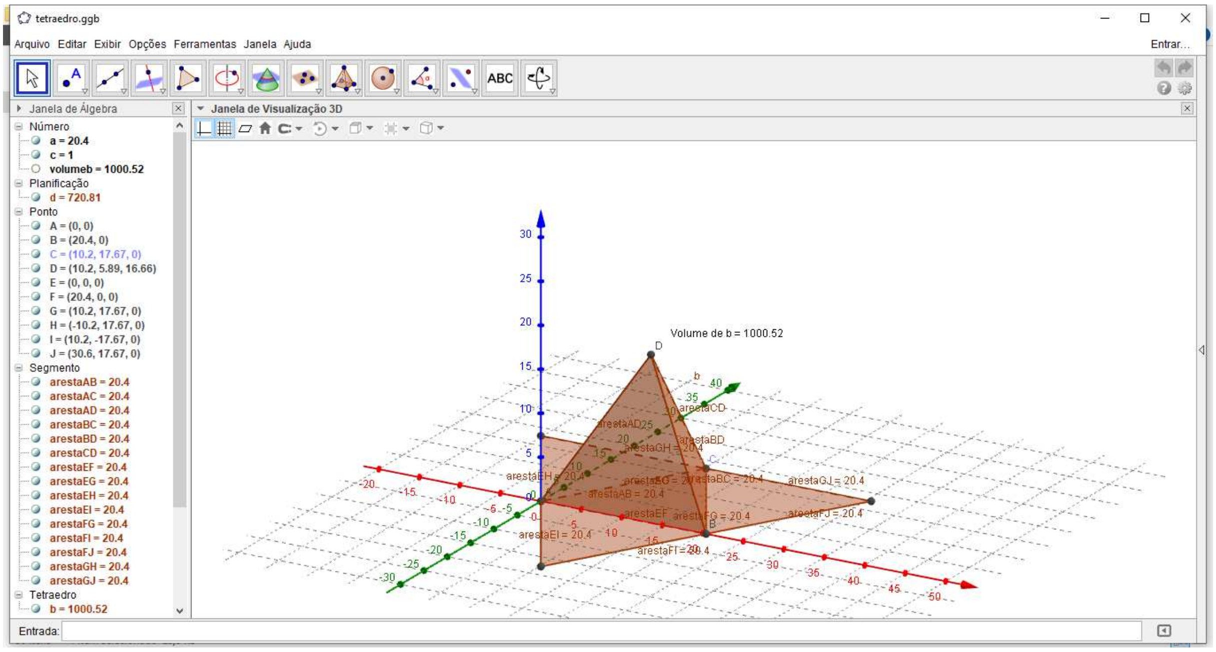
F. Logo após, com a ajuda da ferramenta perímetro, medir os lados acharemos aproximadamente 20.4 cm de comprimento e, dessa forma, será constatado que dará o volume desejado, como mostra a figura abaixo:

Figura 7 - Tetraedro e seu volume



Fonte O Autor, 2025.

Figura 8 - Tetraedro planificado e calculado o seu perímetro



Fonte: O Autor, 2025.

agora como sabemos o perímetro vamos multiplicá-lo pela quantidade de arestas encontradas no tetraedro que dará o resultado do perímetro total do tetraedro como mostrado no cálculo abaixo:

$$P = 9x20,4$$

$$P = 183.6 \text{ cm}$$

Com isso, para que um Tetraedro contenha um litro de leite ele terá que ter um perímetro igual a 183.6 cm.

3.1.5. HIPÓTESE 5: EMBALAGEM DE LEITE EM FORMATO DE UM DODECAEDRO

1. O que é um Dodecaedro? Segundo a Equipe editorial de Conceito (2020) O termo grego "dodekáedros" chegou ao português como dodecaedro. O conceito é usado no campo da geometria para nomear um sólido com doze faces, ou seja, um objeto tridimensional: isto é, um corpo. No caso do dodecaedro, é um poliedro, pois é um sólido com faces planas.

2. Como medir um Dodecaedro? É possível calcular a sua área total considerando a área de cada pentágono que o compõe. A fórmula para calcular a área de um pentágono é A=(a*P)/2.
3. Como calcular o volume de um dodecaedro? Um dodecaedro é uma figura tridimensional regular, então todas as suas faces têm a mesma forma e todos os seus lados têm o mesmo comprimento. Assim, podemos calcular seu volume usando a seguinte fórmula: $v =((10 +7\sqrt{5})/4)a^3$.
4. Como se chegou a este modelo matemático? por ser um dos poliedros de platão além de querer investigá-lo por ter vários lados.

3.1.5.1. MONTAGEM DE UM DODECAEDRO COM O AUXILIO DO GEOGEBRA

Para obtermos um dodecaedro que comporte 1 litro de leite, ou seja 1000 cm^3, usa-se a fórmula de volume do dodecaedro $v = ((10 +7\sqrt{5})/4)a^3$ na qual obtém o resultado esperado como mostrado no cálculo abaixo:

$$v =((10 +7\sqrt{5})/4)a3$$

$$1000 = ((10 +7\sqrt{5})/4)a3$$

$$a = 5.07 \text{ cm}$$

Em seguida, para planificar o dodecaedro, é preciso seguir os seguintes passos com a ajuda do software GeoGebra.

A. Primeiro, seleciona-se dois pontos, nos quais será a medida que obteve-se na conta acima.

B. Após isso, opta-se pela ferramenta do GeoGebra polígono regular, e será colocado no campo no qual pergunta-se quantas vértices terá, que neste caso são 5 vértices.

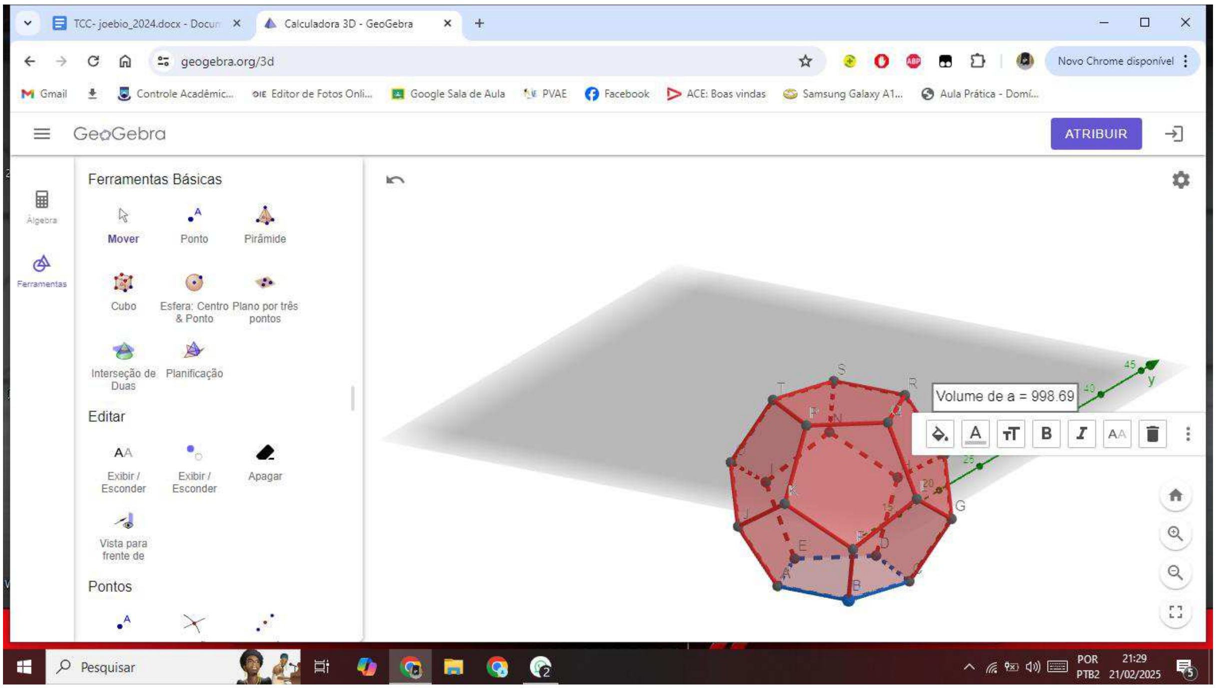
C. Logo depois, opta-se pela janela da álgebra e, no campo de entrada, digita-se dodecaedro e entre parênteses tecla-se o nome do polígono regular gerado anteriormente.

D. Com a ajuda da ferramenta volume, veremos que ele terá a capacidade de 1000 cm^{3}$_{3}$ como visto na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

E. Com o apoio da ferramenta planificação, será planificado o mesmo e para ser contado a quantidade de arestas como visto na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

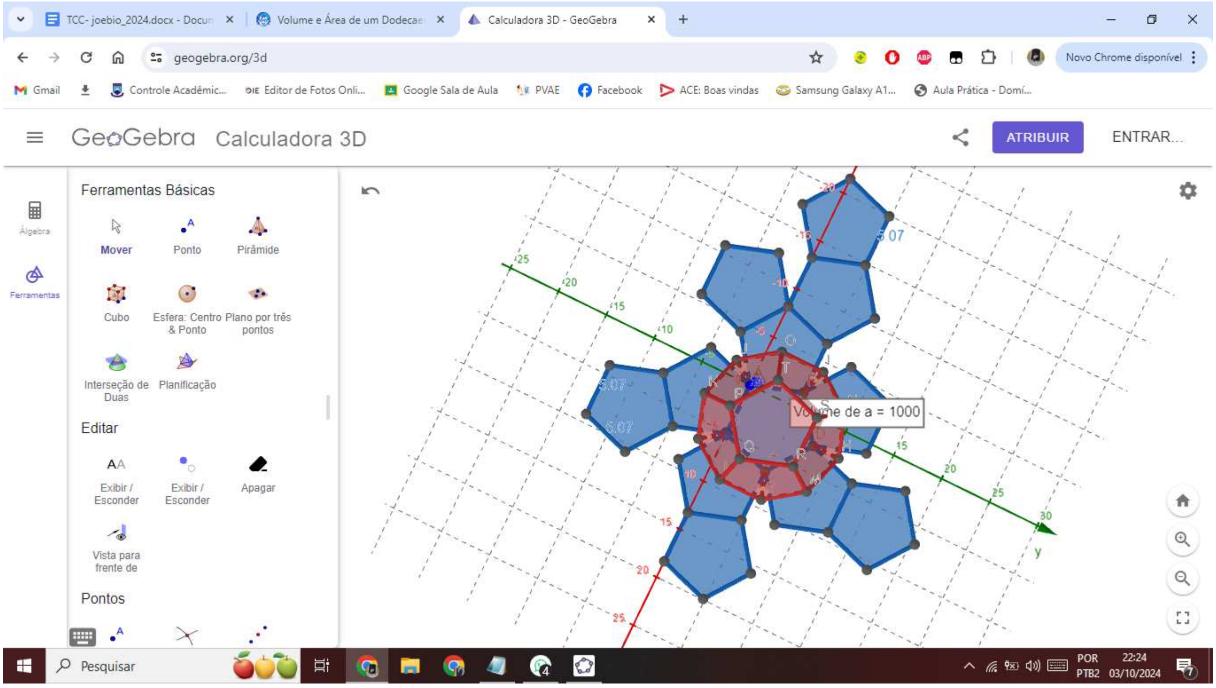
F. Logo após, com a ajuda da ferramenta para medir perímetro medidos vendo que vai dar o resultado 5.07, que multiplicado pelo a quantidade de arestas dará o resultado esperado como mostrado no cálculo abaixo:

Figura 9 - Dodecaedro fechado.



Fonte: O Autor, 2025.

Figura 10 - Dodecaedro planificado e calculado o seu perímetro.



Fonte: O Autor, 2025.

$$P = 30x\ 5{,}07$$

$$P = 152.1 \text{ cm}$$

Com isso, para que um dodecaedro contenha um litro de leite ele terá que ter um perímetro igual a 152.1 cm.

3.2. SITUAÇÃO HIPOTÉTICA:

Considera-se duas situações, a primeira de um caminhão baú com as dimensões: 3 metros de comprimento por 1,90 metros de largura por 2 metros de altura, com a capacidade máxima desprezada, como mostrado na Figura 11. Já na segunda situação é de uma prateleira de mercado padrão com as seguintes dimensões: 2 metros de altura por 91 cm de comprimento por 40 cm de largura, como mostrado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**. De acordo com os dados apresentados, surge a seguinte indagação: qual será a melhor forma de embalagem que irá proporcionar uma melhor otimização do espaço do caminhão baú e na prateleira de mercado?

3.2.1. SITUAÇÃO 1 - CAMINHÃO BAÚ.

primeiro vamos considerar primeiramente o bau convertendo as unidades de metros para cm para facilitar os calculas com isso serão convertidos de 3m x 2m x 1,9m para 3000 cm x 2000 cm x 19000 cm,

Figura 11 - Veículo de transporte modelo HR.

Fonte: https://www.facebook.com/goiaseixos/posts/precisando-de-ba%C3%BA-para-hr-fale-com-a-gente-estamos-com-uma-super-oferta-para-ess/1402427399792659/.

3.2.1.1. COM A FIGURA CUBO:

Para os cálculos de quantas unidades de cubo conseguimos acomodar dentro do baú, com as dimensões informadas acima e com o cubo com as seguintes dimensões do cubo de 10cm x 10 cm x 10 cm, é preciso calcular quantas unidades caberão no comprimento, altura e profundidade.

Para o cálculo necessita-se saber quantas unidades cabem no comprimento 3000 cm:

3000/10 = 300 unidades.

Em seguida, descobre-se quantas unidades cabem na altura de 20000 cm:

2000/10= 200 unidades.

Depois, é preciso saber quantas unidades cabem na profundidade de 1900 cm:

1900/10 = 190 unidades.

Para saber quantas unidades caberão ao todo em um baú com essas dimensões basta multiplicar as unidades do comprimento com as unidades de largura e a altura, que será as unidades suportadas pelo o baú, desconsiderando o peso que o caminhão suporta:

300x190x200 = 11.400.000 convertendo fica 11.400 unidades de cubo que contém 1 litro de leite.

3.2.1.2. COM A FIGURA PARALELEPÍPEDO:

Para os cálculos de quantas unidades conseguimos acomodar dentro do baú, tendo como base a figura de um paralelepípedo (que contém um litro de leite), com as medidas informadas acima das dimensões informadas do baú e tendo que como as dimensões do Paralelepípedo são 10 cm x 20 cm x 5 cm, é necessário calcular quantas unidades caberão no comprimento, altura e profundidade.

Para o cálculo, precisa-se saber quantas unidades cabem no comprimento 3000 cm:

3000/10 = 300 unidades.

Logo após, descobre-se quantas unidades cabem na altura de 20000 cm:

2000/20= 100 unidades.

Em seguida, deve-se saber quantas unidades cabem na profundidade de 1900 cm:

1900/5= 380 unidades.

Por fim, para saber quantas unidades caberão ao todo em um baú com essas dimensões, basta multiplicar as unidades do comprimento com as unidades de largura e a altura, que será as unidades suportadas pelo o baú, desconsiderando o peso que o caminhão suporta:

300x100x380 = 11.400.000 convertendo fica 11.400 unidades de paralelepípedo que contém 1 litro de leite.

3.2.1.3. COM A FIGURA CILINDRO:

Como a figura base é um cilindro e o baú é um paralelepípedo, precisa-se transformar o cilindro em um paralelepípedo para facilitar os cálculos. Assim, considera-se um paralelepípedo com as seguintes dimensões: 49,8 de altura por 5,052 de profundidade e 5,052 de comprimento, logo, como nas figuras anteriores:

Deve-se calcular o comprimento:

3000/5,052 = 593 unidades.

Em seguida, calcula-se a altura:

2000/49,8 = 40 unidades.

Logo após, calcula-se a profundidade:

1900/5,052 = 376 unidades.

Finalmente, é necessário descobrir quantos cilindros cabem dentro do baú exemplificado, de onde basta multiplicar os 3 resultados:

593 x40x376= 8.892.000 ou seja 8.892 unidades de cilindro que contém 1 litro de leite.

3.2.1.4. COM A FIGURA TETRAEDRO:

Considera-se o tetraedro como um cubo, como na figura anterior, para facilitar os cálculos. Mas, para isso, tem de se achar a sua altura, através do uso da seguinte fórmula:

$$h = a\sqrt{6/3}, \text{ onde } a = 20{,}4, \text{ assim:}$$

$$h = 20{,}4\sqrt{6/3}$$

$$h = 16.65 \text{ cm}$$

Dessa forma, o cubo terá as dimensões 16,65x16,65x16,65, com isso, descobre-se quantas unidades cabem dentro do baú exemplificado:

Primeiramente, calcula-se o comprimento:

3000/16,65 = 180 unidades.

Depois, precisa-se calcular a altura:

2000/16.65 = 120 unidades.

Logo em seguida, calcula-se a largura:

1900/16.65 =114 unidades.

Por último, deve-se descobrir quantos cilindros cabem dentro do baú exemplificado, de onde basta multiplicar os 3 resultados:

180x120x114 = 2.462.400 convertendo fica 2.462 unidades de tetraedro que contém 1 litro de leite.

3.2.1.5. COM A FIGURA DODECAEDRO:

Como nas figuras anteriores, considera-se o dodecaedro como um cubo, entretanto, para isso, primeiro deve-se encontrar a altura e largura do dodecaedro, que está ilustrado no tópico acima. Desse modo, com o auxílio das ferramentas dispostas no software GeoGebra, é necessário encontrar uma altura e largura de aproximadamente 11,29 cm. Em vista disso, reconhece-se que o retângulo tem as dimensões de 11,29 de altura por 11,29 comprimento e 11,29 de largura. Sabendo disso, precisa-se calcular quantos dodecaedros cabem dentro do baú exemplificado:

Inicialmente, deve-se calcular o comprimento:

3000/11,29 = 265 unidades

Em seguida, calcula-se a altura:

2000/11,29 = 177 unidades

Logo depois, calcula-se a largura:

1900/11,29 = 168 unidades

Finalmente, para achar quantos dodecaedros cabem no baú, basta multiplicar as 3 dimensões 265x177x168 = 7.880.040 convertendo fica 7.880 unidades de dodecaedros contém 1 litro de leite.

3.2.2. SITUAÇÃO 2 - PRATELEIRA DE SUPERMERCADO

Considerando a prateleira hipotética exemplificada na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, é importante calcular quantas unidades de cada figura contendo 1 litro de leite cabem em cada andar dela, sem sobrepor.

Figura 12 - Prateleira de supermercado

Fonte: https://www.estantecenter.com.br/MLB-3163812734-estante-prateleira-para-itens-pesado-ate-500kg-_JM.

3.2.2.1. COM A FIGURA CUBO:

Tendo como base a figura anterior, fazendo o cálculo de quantas unidades caberão em cada andar dessa prateleira, como também, obtendo como base um cubo com lados iguais a 10 cm e uma prateleira com as dimensões de cada andar sendo 91cm x 40m.

Para o cálculo, é necessário primeiro saber quantas unidades cabem no comprimento de 91 cm:

91/10 = 9.1 ou 9 unidades

Depois, deve-se saber quantas unidades cabem na largura de 40 cm:

40/10 = 4 unidades

Por último, para saber quantas unidades caberão ao todo em cada andar da prateleira, com essas dimensões, basta multiplicar as unidades do comprimento com as unidades de largura, que será as unidades suportadas pelo o baú, descartando o peso que o caminhão suporta:

9x4= 36 unidades.

3.2.2.2. COM A FIGURA PARALELEPIPEDO:

Levando em consideração a figura paralelepipedo, com as seguintes dimensões: 10x20x5 na vertical, assim, poderá ser calculado da seguinte maneira:

Para o cálculo, primeiro deve-se saber quantas unidades cabem no comprimento de 91 cm:

91/10 = 9.1 ou 9 unidades

Em seguida, precisa-se saber quantas unidades cabem na largura de 40 cm:

40/5 = 8 unidades

Por fim, é necessário descobrir quantas unidades cabem em cada andar da prateleira exemplificada, na qual basta apenas multiplicar as 2 dimensões:

9x8= 72 unidades.

3.2.2.3. COM A FIGURA CILINDRO:

Como a figura base é um cilindro e, para facilitar os cálculos, é importante transformar o cilindro em um paralelepípedo. Sendo assim, considera-se que uma figura transformada com as seguintes dimensões: 50,93 de altura por 5 de largura e comprimento, é necessário que:

Inicialmente, precisa-se calcular o comprimento:

91/5,052 = 18 unidades

Logo após, calcula-se a largura:

40/5052= 7 unidades

Finalmente, deve-se descobrir quantos cilindros cabem em cada andar da prateleira exemplificada, na qual basta apenas multiplicar os 2 resultados:

18x7= 126 unidades.

3.2.2.4. COM A FIGURA TETRAEDRO:

Para facilitar os cálculos consideremos o tetraedro como um cubo, mas, para isso, temos que achar a sua altura. Dessa maneira, é preciso utilizar a seguinte fórmula:

$h = a\sqrt{6/3}$, onde a = 20,4, assim:

$$h = 20{,}4\sqrt{6/3}$$

$$h = 16.65$$

Desse modo, o cubo terá as dimensões: 16,65x16,65x16,65, no qual é importante descobrir quantas unidades cabem dentro do baú exemplificado:

Primeiramente, é necessário calcular o comprimento:

91/16,65 = 5.4 ou 5 unidades

Em seguida, precisa-se calcular a profundidade:

40/16.65 = 2.4 ou 2 unidades

Por fim, deve-se descobrir quantos cilindros cabem dentro de cada andar exemplificado, em que basta apenas multiplicar os 2 resultados:

5x2 = 10 unidades.

3.2.2.5. COM A FIGURA DODECAEDRO:

Da mesma forma que foi feito com as figuras anteriores, é importante considerar o dodecaedro como um retângulo. Para isso, primeiro deve-se encontrar a altura e a largura do dodecaedro, que está ilustrado acima, e, logo após, com o auxílio das ferramentas dispostas no software GeoGebra, é preciso encontrar uma altura e largura de aproximadamente 11,29 cm. Com isso, considere o retângulo tendo as dimensões de: 11,29 de altura por 11,29 comprimento e 11,29 de largura, para que assim, calcula-se quantos dodecaedros cabem dentro do baú exemplificado:

Primeiro deve-se calcular o comprimento:

91/11,29 = 8 unidades

Depois, calcula-se a largura:

40/11,29 = 3.5 ou 3 unidades

Por último, para achar quantos dodecaedros cabem em cada andar da prateleira, basta multiplicar as 2 dimensões:

8x3= 24 unidades de dodecaedros contêm 1 litro de leite.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Tabela 1 - Comparação de Perímetros.

Tipo de figuras	Perímetro
Cubo	190 cm
Paralelepípedo	210 cm.
Cilindro	133.28 cm
Tetraedro	183.6 cm
Dodecaedro	152.1 cm

Fonte: O Autor, 2025.

Tabela 2 - Comparação de resultados.

tipo de figura	Caminhão baú	Prateleira
Cubo	11.400 unidades	36 unidades
Paralelepípedo	11.400 unidades	72 unidades
Cilindro	8.892 unidades	126 unidades
Tetraedro	2.462 unidades	10 unidades
Dodecaedro	7.880 unidades	24 unidades

Fonte: O Autor, 2025.

Analisando a Tabela **2** e a Tabela **2** podemos ver a comparação dos resultados obtidos das situações hipotéticas das figuras geométricas e de seus perímetros além disso foi apresentado situações do cotidiano como o carregamento de um caminhão baú e o abastecimento de uma prateleira de supermercado. Dessa forma, foi feita a comparação de embalagens de figuras geométricas contendo 1 litro de leite que possuísse menor perímetro e além disso que tivesse uma melhor otimização de espaço tanto no caminhão baú quanto na prateleira, assim a figura que teve o melhor destaque foi o cilindro possuindo o menor perímetro e tendo a maior quantidade de cilindros na prateleira de Supermecado.

5. CONCLUSÃO

O trabalho “O uso do GeoGebra nos problemas de otimização matemática” teve como principal objetivo mostrar a importância da otimização matemática, por meio de situação hipotética de figuras geométricas que contenham 1 litro de leite, exemplificadas com o auxílio da ferramenta GeoGebra, visto que a otimização matemática está presente no cotidiano, como a simples embalagem de leite mostrada neste trabalho.

Além disso, foi mostrado nesta pesquisa a importância da otimização matemática, que é pouco abordada no ensino médio, mas que é cobrada nos principais exames nacionais (como o ENEM). Portanto, já que a otimização matemática é um assunto visto diariamente, logo, deixa de ser um assunto tradicional e passa a ser um assunto do cotidiano, sendo assim, deve ser mais abordado em sala de aula pelos professores.

Os softwares educacionais como o GeoGebra têm o poder de desempenhar o papel lúdico, didático, além de tornar mais atual o ensino, deixando a construção do conhecimento motivadora, criativa e prazerosa. Essas ferramentas gráficas, que são pouco utilizadas por professores e que, dependendo da trajetória escolar do aluno, poderá facilitá-las para um melhor aprendizado, como nas engenharias ou até mesmo na matemática. Para Assis, (2011) defende que com a introdução do computador como mediador didático, foram desenvolvidos softwares específicos para serem utilizados em contextos de ensino aprendizagem.

Por fim, considerando a motivação para esse estudo, em especial para a otimização matemática com sólidos geométricos com o uso do GeoGebra, percebe-se a relevância da ferramenta GeoGebra para o ensino e desenvolvimento pessoal de alunos e professores, podendo ser abordado na maioria dos anos de escolaridade e em vários assuntos, além dos benefícios que são trazidos para sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico: elaboração de trabalhos na graduação.** São Paulo, SP: Atlas, 2010.

ASSIS, C. C. **Formação continuada para professores de Matemática: integrando softwares educativos à prática docente. In XII Conferência Interamericana de Educação Matemática** –CIAEM, p1-12. Recife, 2011.

BRETAS.A. M. R.**O USO DO SOFTWARE EDUCACIONAL GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO MATEMÁTICO DE QUADRILÁTEROS.** acesso em:https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/23737/1/CT_INTEDUC_II_2020_01.pdf. último acesso: 07 de outubro de 2024.

Caiusca. Alana. **Sólido geométrico pertencente ao grupo dos corpos redondos**. acesso em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/cilindro ultimo acesso: 13 de março de 2025.

CAIRES, V et. al. **Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática:** Avaliação de Usabilidade e de Aprendizado. II ENINED: Encontro Nacional de Informática e Educação, UNIOESTE, Cascavel-PR. p. 408-417, out. 2011.

Calvoso, J. C.Ferramenta **rápida- Planificação de um cilindro no GeoGebra!**. acesso em: https://www.youtube.com/watch?v=Y1-PmgjkdrU. ultimo acesso: 07 de outubro de 2024.

costa. Mafalda Lopes. **Cilindro e uma história de rolos.** acesso em: https://ensina.rtp.pt/artigo/cilindro-e-uma-historia-de-rolos/#:~:text=A%20origem%20de%20cilindro%20est%C3%A1,em%20que%20encontrou%20outros%20sentidos. ultimo acesso: 13 de março de 2025.

estantecenter. **Estante / Prateleira Para Itens Pesado Até 500kg.** acesso em: https://www.estantecenter.com.br/MLB-3163812734-estante-prateleira-para-itens-pesado-ate-500kg-_JM. ultimo acesso: 13 de março de 2025.

FERREIRA, Paulo. A. P. **O USO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E A IMPLEMENTAÇÃO COM O USO DO GEOGEBRA.** acesso em: http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/bitstream/riuea/4283/1/O%20uso%20das%20equa%C3%A7%C3%B5es%20quadr%C3%A1ticas%20em%20problemas%20de%20otimiza%C3%A7%C3%A3o%20e%20a%20implementa%C3%A7%C3%A3o%20com%20o%20uso%20do%20geogebra.pdf. ultimo acesso: 07 de outubro de 2024.

goiaseixos. **facebook Bau HR.** acesso em :https://www.facebook.com/goiaseixos/posts/precisando-de-ba%C3%BA-para-hr-fale-com-a-gente-estamos-com-uma-super-oferta-para-ess/1402427399792659/. último acesso: 13 de março de 2025.

Guzman, J. huera. **Características de um Cubo**. acesso em: https://br.neurochispas.com/geometria/caracteristicas-de-um-cubo/ ultimo acesso: 13 de março de 2025.

Hortencio, H. P. **o que é otimização matemática ?.** acesso em https://pt.linkedin.com/pulse/o-que-%C3%A9-otimiza%C3%A7%C3%A3o-matem%C3%A1tica-hanna-pamplona. ultimo acesso: 07 de outubro de 2024.

Hugo. Vitor. Tetraedro: **O que é, conceito, fórmula, cálculo e composição.** acesso em: https://conhecimentocientifico.r7.com/tetraedro/. ultimo acesso: 13 de março de 2025.

Equipe editorial de Conceito.de. (10 de Setembro de 2020). Dodecaedro - O que é, conceito e definição. Conceito.de. https://conceito.de/dodecaedro. ultimo acesso: 13 de março de 2025.

KENSKI, Vani M. Tecnologias e ensino presencial e a distância. 2 ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

Meneghetti, Marcelo et al. **Otimização X otimização matemática: resultados melhores são resultados ótimos?**.acesso: https://www.zinneke.com.br/otimizacao-x-otimizacao-matematica-resultados-melhores-sao-resultados-otimos#:~:text=Otimiza%C3%A7%C3%A3o%20Matem%C3%A1tica%20ou%20Programa%C3%A7%C3%A3o%20Matem%C3%A1tica,valor%20(m%C3%ADnimo)%2C%20sujeito%20a. último acesso: 07 de outubro de 2024.

Oliveira, R. R. cubo. acesso em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/cubo.htm último acesso: 07 de outubro de 2024.

Oliveira, R. R. **dodecaedro.** acesso em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/dodecaedro.html. último acesso: 07 de outubro de 2024.

Oliveira, R. R. **paralelepípedos.** acesso em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/paralelepipedos.htm. último acesso: 07 de outubro de 2024.

Oliveira, R. R. **cilindro.** acesso em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/cilindro-2.htm#:~:text=O%20cilindro%20%C3%A9%20um%20s%C3%B3lido%20geom%C3%A9trico.,reto%20e%20o%20cilindro%20obl%C3%ADquo. último acesso: 07 de outubro de 2024.

Pamula, Hanna. Calculadora de Volume de Cilindro. acesso em: https://www.omnicalculator.com/pt/matematica/volume-cilindro último acesso: 07 de outubro de 2024.

Piovesan, Armando.Pesquisa exploratória: procedimento metodológico para o estudo de fatores humanos no campo da saúde pública. acesso em:https://www.scielo.br/j/rsp/a/fF44L9rmXt8PVYLNvphJgTd/?format=pdf&lang=pt ultimo acesso: 13 de março de 2025.

Rizzo. M. L. A. tetraedro regular. acesso em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/tetraedro-regular-1.htm#:~:text=A%20altura%20do%20tetraedro%20regular,da%20base%20e%20a%20altura. ultimo acesso: 07 de outubro de 2024.

Rocha, alan. M. Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio.acesso em:https://repositorio.bc.ufg.br/tedeserver/api/core/bitstreams/e7c71c77-6605-4d4b-a716-ab6c82df54e8/content. ultimo acesso: 07 de outubro de 2024.

Santos, D. O.uma introdução à otimização. acesso em: https://acm-itea.org/otimizacao/#:~:text=No%20entanto%2C%20foi%20apenas%20no,para%20otimalidade%20em%20problemas%20de . ultimo acesso: 07 de outubro de 2024.