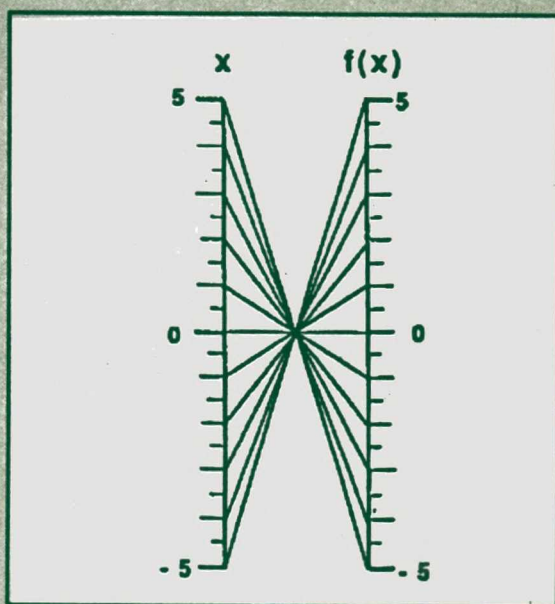


Álgebra História Representação



Abraham Arcavi

Volume 2

Conselho Editorial

Angela Valadares Dutra de Souza Campos

Anna Averbuch

Circe Navarro Vital Brazil

Estela Kaufman Fainguelernt

Franca Cohen Gottlieb

Hernando Bedoya Rodriguez

Janete Bolite Frant

João Bosco Pitombeira de Carvalho

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

Moema Lavínia Mariani de Sá Carvalho

Paulo Afonso Lopes da Silva

Série Reflexões em Educação Matemática

MEM/USU

Álgebra História Representação

Abraham Arcavi

- Weizmann Institute of Science Israel
- Mestrado em Educação Matemática
Universidade Santa Úrsula

ÍNDICE

Apresentação	9
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES:	
O CASO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS	11
Avaliação das Necessidades	12
Conhecimento Histórico Prévio	12
Definições	13
Reconhecimento (Identificação)	14
Os objetivos do Curso	15
Descrição dos Materiais	16
Os Pitagóricos	16
Euclides e Os Elementos	17
Os Irracionais no Século XVI e no Século XVII	17
R. Bombelli - N. Saunderson	18
Dedekind e a Definição dos Números Irracionais	19
Implementação	20
O Ponto de Vista dos Professores	20
Dificuldades e Realizações dos Professores	22
Epílogo	24
Referências Bibliográficas	24

TALVEZ UM PROFESSOR DE MATEMÁTICA POSSA SE	
BENEFICIAR DO ESTUDO DA HISTÓRIA DA	
MATEMÁTICA	25
Introdução	25
O Curso e Seus Materiais	27
1. F. Viète (1540-1603)	28
2. Contradições que surgiram da utilização dos números negativos (Século XVII)	29
3. N. Saunderson (1682-1739) - como um exemplo da didática do século XVIII	30
4. Leonard Euler - como outro exemplo didático	30
5. W. Frend (1757-1841) e sua oposição aos números negativos	31
6. G. Peacock (1791-1858) - uma tentativa de formalização	32
7. A Entrada Formal dos Números Negativos na Matemática	32
O WorkShop e Alguns Resultados	33
História	35
Didática	35

Matemática	35
Epílogo	35
Referências Bibliográficas	36

O SENTIDO DO SÍMBOLO

ATRIBUINDO UM SENTIDO INFORMAL À MATEMÁTICA

FORMAL	38
Prólogo	38
Motivação	38
O Que é Sentido do Símbolo? Uma Primeira Etapa.	39
Comportamento # 1	40
Familiarizando-se Com Os Símbolos	40
Afinal, para que servem os amigos?	41
Quando os amigos não são tão amigáveis	44
Comportamento # 2	47
Além das Manipulações: Lendo Através Dos Símbolos	47
Lendo em vez de manipular	48
Lendo e manipulando	48
A leitura como objetivo da manipulação	49
A leitura para a razoabilidade	49
Comportamento # 3	51
Arquitetando Expressões Simbólicas	51
Comportamento #4	52
Expressões Equivalentes para Significados Não-Equivalentes	52
Comportamento #5	53
A Escolha dos Símbolos	53
Comportamento #6	55
Habilidades Flexíveis de Manipulações Algébricas	55
Circularidade	55
“Gestalt”	55
Alvos Formais	56
Comportamento #7	57
Símbolos em Retrospectiva	57
Comportamento #8	59
Símbolos em contexto	59
O Que é Sentido do Símbolo?	62
Uma Segunda Rodada	62
Sobre a incompletude do catálogo	63
Um catálogo por si mesmo não é suficiente	63
Implicações Educativas	65

Epílogo	70
Referências Bibliográficas	72
UMA REPRESENTAÇÃO PARALELA DAS FUNÇÕES	
LINEARES: O MICROMUNDO P.A.R.	75
Sumário	75
Introdução	75
Eixos Paralelos de Representação — P.A.R.	76
Inclinação ou Coeficiente Angular	77
Ponto Fixo	78
Função Inversa	78
O Foco	79
O Micromundo	79
1. Justaposição de representações	79
2. Superposição de gráficos	80
3. Mudanças	80
4. Controlando algumas possibilidades da forma gráfica	80
5. Controle da Velocidade	80
6. Variedade de Funções	80
O potencial didático do micromundo P.A.R.	80
Conclusão	84
Referências Bibliográficas	84
ALGUNS DADOS SOBRE ABRAHAM ARCAVI	85

Apresentação

É com enorme prazer e com a certeza de estarmos contribuindo para o prosseguimento das discussões em Educação Matemática que trazemos para vocês o segundo volume de nossa **Série Reflexões em Educação Matemática**.

Esta publicação nasce das reflexões e atividades propostas pelo Prof. Dr. Abraham Arcavi nos dois seminários oferecidos no Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula, o primeiro foi “O Ensino/Aprendizagem de Álgebra” e o segundo foi “Issues of Representations”.

Os Seminários do Prof. Arcavi trouxeram uma série de questionamentos sobre as diferentes formas de representação usadas na Matemática, suas particularidades, diferenças, e funcionalidade. Iniciou com uma série de exercícios tradicionais e inovadores, abordados de maneira completamente inovadora, desafiadora, estabelecendo relações entre as diferentes abordagens.

Os Seminários do Prof. Arcavi se caracterizaram pela coerência do seu discurso com a sua práxis. Ele não é do tipo que nos diz “sejam construtivistas, inovadores, trabalhem em grupo, aprendam a ouvir seus alunos, a conversar, dialogar e aprender com seus alunos; criem uma comunidade intelectual cooperativa”, enquanto oferece um curso exatamente ao contrário. Ele adota a concepção construtivista e é um inovador. Criou um ambiente de sala de aula que favoreceu o trabalhar em grupo, cooperativamente, na construção do conhecimento; soube ouvir e parar para compreender todas as perguntas, todas as falas de seus alunos e mais do que isto as respeitou e as valorizou. Na opinião do aluno Paulo, “Arcavi é um professor que está além do intra e do interdisciplinar, ele é transdisciplinar” e na opinião dos outros participantes “Arcavi é uma pessoa simples, carinhosa, e apaixonante”.

Por isso, não é possível reduzir os cursos a estes poucos artigos. O que pretendemos com esta publicação é divulgar e criar oportunidades

para que as pessoas que participaram do curso e outras que queiram interagir conosco possam dar continuidade aos estudos ou iniciá-los por aqui.

Estela Kaufman Fainguelernt
Diretora de Pós-Graduação

Franca Cohen Gottlieb
Assessora da Direção

Janete Bolite Frant
Coordenadora do Mestrado em Ed. Matemática

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES: O CASO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Abraham Arcavi,
Maxim Bruckheimer,
Ruth Ben-Avi
The Weizman Institute of Science-Israel

Descrevemos uma abordagem para a utilização da história da Matemática para cursos de professores em formação e em exercício [Arcavi, Bruckheimer e Ben-Avi (1982)], abordagem esta caracterizada basicamente pelo seguinte:

a) Relevância

Os tópicos cuja história é estudada são os que estão ligados diretamente ao currículo que o professor deve ensinar ou que irá ensinar. Além disso, o tratamento dos tópicos é projetado e desenvolvido com base nas necessidades específicas dos professores.

b) Fontes Primárias

Os materiais utilizados são, fundamentalmente, fontes primárias (diretas) e documentos históricos.

c) Aprendizagem Ativa

O material foi preparado no formato de Fichas de Atividades (de caráter modular). Os participantes devem ler as fontes originais e trabalhar de forma independente (ou em pequenos grupos) sob alguma orientação através de questões, exercícios e problemas preparados especialmente para cada fonte histórica.

d) História Conceitual

A história é relacionada à evolução de um conceito, às diferentes abordagens utilizadas pelos matemáticos no passado, suas dificuldades, sua criatividade matemática até o estágio de formalização. Uma pequena dose de fatos, datas, biografias e curiosidades aparece ocasionalmente.

A descrição de um curso sobre a História dos Números Negativos e sua implementação foram relatados por Arcavi et al., [1982]. Usando a mesma abordagem, desenvolvemos e implementamos um curso sobre a História dos Números Irracionais, baseado no que foi estabelecido como necessidades de uma população alvo.

Avaliação das Necessidades

Tendo em mente nossa necessidade de relevância do curso, foi elaborada uma avaliação do conhecimento prévio dos professores, das concepções e concepções errôneas sobre os irracionais que anteceda e acompanhe o desenvolvimento do curso. A seguir, discutiremos alguns dos resultados desta avaliação e o seu papel na formulação dos objetivos do curso, como do próprio curso.

Conhecimento Histórico Prévio

A grande maioria dos professores (participantes de um extenso programa de treinamento de professores em exercício, durante o verão, sobre o currículo nacional de Matemática para crianças do segundo segmento das escolas de Israel, $N=84$) tinha pouco ou nenhum conhecimento da História da Matemática. Isto tornou-se evidente através de um questionário que foi aplicado aos participantes. Por meio dele verificou-se que 83% dos que responderam declararam que nunca haviam aprendido História da Matemática e que estavam interessados num curso sobre o tema, caso fosse oferecido. Isto sugere que a História pode ser um atraente e adequado veículo através do qual muitos tópicos da Matemática podem ser aprendidos, re-aprendidos e enriquecidos, sem o sentimento negativo de “*déjà vu*”. Além disso, mais especificamente, fizemos as seguintes questões para um grupo menor de professores ($N=56$):

Na sua opinião, quando foi a primeira vez que o conceito de irracionalidade surgiu?

- a) Antes da Era Cristã (Babilônios, Gregos, etc.)
- b) No início da Idade Média (Hindus, Árabes)
- c) Entre 1300-1600 (Europeus)
- d) Entre 1600-1800 (Europeus)
- e) Entre 1800-1900 (Europeus)

Esta questão foi respondida corretamente (item a) por cerca de 70% dos participantes. Parecia que o “quando” era bem conhecido, mas pouquíssimos professores também sabiam dizer “como”. Isto tornou-se ainda mais evidente nas discussões seguintes, em que solicitamos que os professores ordenassem cronologicamente o surgimento de três conceitos: números negativos, frações decimais e números irracionais. Cerca de 55% dos professores indicaram que as frações decimais precederam os números irracionais (e um adicional de 10% não sabia responder). Isto não é apenas uma indicação da falta de conhecimento histórico sobre o desenvolvimento, relativamente recente, dos decimais mas também que a origem do conceito de irracionalidade, embora associado (pela maioria dos professores) com os gregos, é concebida como algo intimamente relacionado às frações e aos decimais, e não como algo relacionado a conceitos geométricos (segmentos mensuráveis e incomensuráveis) como ocorreu historicamente. A origem histórica dos irracionais em geral e as suas conexões com a Geometria, em particular, podem fornecer uma compreensão significativa e valiosa do conceito como também indicar algumas idéias para a introdução deste tópico em sala de aula.

Definições

A seguinte questão foi apresentada aos 56 professores em exercício:

“Você conhece alguma definição matemática dos números irracionais? Sim/Não.

Caso afirmativo, qual?”

Mais de 2/3 dos professores responderam afirmativamente, apresentando uma das definições apresentadas nos livros didáticos que eles utilizam:

“Um número que não pode ser expresso como um quociente entre dois inteiros” ou

“Um número cuja parte decimal não é periódica e possui uma quantidade infinita de dígitos.”

Apenas dois professores mencionaram, por exemplo, a definição por meio de cortes de Dedekind. De modo a evitar impressões incorretas, queremos alertar que a questão acima não indica que tivéssemos a expectativa de que os professores do segundo segmento se lembrassem

dos detalhes de uma definição formal (nem isto foi solicitado), mas que havia a expectativa deles estarem conscientes de que:

- (a) a descrição e a introdução de alguns conceitos como são formulados em livros didáticos do segundo segmento não são definições matemáticas formais, e
- (b) que esta definição existe.

Também esperávamos que eles apreciassem que a primeira definição é orientada por considerações didáticas e pode ser justificada em termos da relativa imaturidade matemática da maior parte da população deste segmento escolar.

Com isto concluímos que seria desejável que os materiais induzissem à busca de uma definição matemática formal dos irracionais, motivando a necessidade de tal definição. Chegar-se-ia assim a uma visão adequada do que seja atividade matemática. Os alunos dos cursos secundários e universitários geralmente são apresentados às definições matemáticas de forma totalmente divorciada do contexto que lhes deu origem e que poderia contribuir para sensação da necessidade lógica de tais definições. A História parece ser um meio natural para fomentar este sentimento, pois “A História da Matemática é uma fonte repleta de exemplos mostrando os modos pelos quais as gerações anteriores vivenciaram e descobriram a necessidade de estruturas matemáticas formais.” [Meserve, 1983]

Reconhecimento (Identificação)

A seguinte questão foi aplicada a 60 professores de várias escolas secundárias.

Indique os irracionais entre os seguintes números.

- | | |
|------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\sqrt{26}$ | (e) p |
| (b) $-7/3$ | (f) $\sqrt{2}/\sqrt{8}$ |
| (c) $1,010010001\dots$ | (g) $(\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1)$ |
| (d) $22/7$ | |

Cerca de 60% das respostas continham dois ou mais erros. O erro mais frequente foi indicar $22/7$ como irracional. Isto sugere que, para

esta população, uma das fontes de confusão entre números racionais e irracionais é o uso comum de uma aproximação racional de um irracional como se fosse o próprio irracional. Embora esta seja a forma pela qual resolvemos muitos problemas (por exemplo quando medidas estão envolvidas) a diferenciação da natureza destes dois números deveria estar clara - principalmente para os professores.

Os objetivos do Curso

As respostas às questões acima indicaram os principais problemas a serem enfocados pelos materiais do curso: o conceito de irracionalidade oriundo da Geometria e a manutenção desta conexão (irracional/geometria) até que os números irracionais fossem reconhecidos como números; os números irracionais passando para os domínios da Aritmética e da Álgebra; aproximações racionais dos irracionais; diferentes tipos de números irracionais e a necessidade “moderna” de uma definição matemática formal dos irracionais (e dos reais, em geral).

Portanto, nosso primeiro objetivo era fortalecer (aprendizagem, reelaboração e/ou enriquecimento) o conhecimento matemático relacionado ao conceito de irracionais.

Além disso, a História fornece um ambiente muito fértil no qual outros objetivos do ensino-aprendizagem podem ser perseguidos. Por exemplo, fornecer aos professores uma apreciação sobre a diferença entre as necessidades da Matemática (pura) em oposição as necessidades da Didática, mostrando onde o currículo precisa ajustar-se e comprometer-se (como no caso da definição dos irracionais) e um embasamento para discussões sobre o assunto.

Um outro objetivo está relacionado ao trabalho através de questões, exercícios e problemas envolvendo fontes primárias. A meta desta forma de trabalho é o desenvolvimento e a melhoria da habilidade de leitura matemática, que geralmente é um objetivo negligenciado nos programas de formação de professores.

Por último, mas não menos importante, o contexto histórico pode promover a criação de uma imagem mais razoável da Matemática e da atividade matemática enquanto um empreendimento humano, criativo e dinâmico em oposição à visão mais comum da Matemática como “gotas de conhecimentos e idéias prontas caídas do céu (ou sabe-se lá vindas de onde...)”. A história dos irracionais possui exemplos interessantes para

ilustrar este ponto de vista. Por exemplo, a irracionalidade destruindo toda a visão pitagórica de mundo; a discussão do século XVI se os irracionais seriam (ou não) números “verdadeiros”, etc.

Descrição dos Materiais

Os materiais do curso consistem de uma sequência de Fichas de Trabalho nas quais uma introdução biográfica-cronológica estabelece o cenário histórico da fonte analisada. Existem duas versões: uma em hebraico e outra em inglês. A leitura da fonte histórica é seguida pelo levantamento de questões, exercícios e problemas elaborados para ajudar a compreensão e interpretação do texto e da Matemática explícita ou implicitamente envolvida. (Para uma descrição completa de um referencial geral para elaboração/projeto de atividades de aprendizagem sobre fontes primárias, veja Arcavi, in press).

Para cada Ficha de Trabalho, existe uma Ficha de Respostas com soluções detalhadas das questões apresentadas como também materiais históricos suplementares para enriquecer as respostas. Em seguida, descreveremos a sequência modular das Fichas de Trabalho sobre os irracionais.

Os Pitagóricos

Na primeira parte, as Fichas de Trabalho apresentam um pouco da Filosofia Pitagórica e também alguns dos tópicos de seu Mundo Matemático, tais como: números figurados, propriedades do pentágono e a mensurabilidade dos segmentos de reta. Os dois últimos tópicos são necessários para a segunda parte da Ficha de Trabalho [construído em torno de Baron, 1974] em que são descritos a descoberta dos segmentos incomensuráveis e a crise subsequente na Matemática Pitagórica.

Uma das tarefas nesta Ficha de Trabalho é refazer a prova de que a diagonal do quadrado é incomensurável com seu lado (comparado a: “ $\sqrt{2}$ é irracional”). Outro exercício lida com a construção dos lados de quadrados de áreas: 3, 5, ..., 17 que são incomensuráveis com o lado do quadrado de área 1, mas construídos sobre ele; e isto é complementado pela discussão sobre as provas das irracionalidades de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$.

Finalmente, a Ficha de Trabalho apresenta uma segunda teoria sobre a descoberta da incomensurabilidade dos segmentos de reta. Esta teoria [von Fritz, 1945] defende que o contexto da descoberta foi o lado

e a diagonal de um pentágono regular e não o lado e a diagonal de um quadrado. Os professores são levados a descobrir por si mesmos que o número irracional envolvido neste caso é a seção áurea. A Ficha de Trabalho contém ainda informações históricas e matemáticas sobre as seções áureas.

Euclides e Os Elementos

A próxima etapa de nossa história é a “legitimização da incomensurabilidade” na Geometria. Isto é ilustrado através de um extrato do livro Os Elementos de Euclides. A Ficha de Trabalho começa com uma breve introdução sobre Os Elementos e a importância desta obra prima na história da Matemática. O trecho do Livro X fornece a definição das grandezas mensuráveis e das incomensuráveis e dos segmentos de reta mensuráveis no quadrado e nos segmentos de reta irracionais. Os exercícios foram elaborados para orientar os professores:

- na identificação e construção de exemplos das várias definições;
- na análise da “verdade” e no estabelecimento de exemplos (ou contra-exemplos) de determinadas sentenças que conectam algumas das definições;
- na construção de diagramas conectando as definições;
- na percepção de que a diagonal do quadrado de área 1 pode ser um segmento de reta racional de acordo com a definição de Euclides.

Finalmente, é apresentado um teorema sobre a incomensurabilidade de grandezas (Livro X, 16) e a tarefa consiste da reescritura do teorema, traduzindo-o para nossa notação moderna.

Os Irracionais no Século XVI e no Século XVII

O salto de quase 2.000 anos pode ser justificado pela escassez de fontes históricas que possam oferecer algo novo e relevante ao desenvolvimento dos irracionais. Entretanto, não podemos simplesmente saltar inteiramente um período tão longo. Então, em nossas Oficinas, por exemplo, consideramos uma interessante fonte hebraica de Maimonides (1135-1204), um dos maiores rabinos de todos os tempos, tradutor, filósofo,

físico e astrônomo. Em seu comentário para o Mishnah (Eruvin), ele discute a natureza da razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. Ele afirma resumidamente, que a essência daquela razão é desconhecida e pode ser concebida apenas por aproximações, e então, ele fornece o valor de $22/7$ como um valor aproximado.

A problemática envolvendo a natureza dos números irracionais tornou-se mais difundida após as frações decimais terem sido desenvolvidas no século XVI por Simon Stevin (1548-1620) e outros, e este é o tema desta Ficha de Trabalho.

Argumentos a favor e contra a aceitação dos números irracionais são fornecidos para serem lidos, compreendidos e discutidos através de questões. Por exemplo, a Ficha de Trabalho fornece trechos do livro *Arithmetica Integra* (1544) de Stifel, como aparece em Kline [1972] e Tropfke [1902], onde o autor afirma que os irracionais são úteis quando “os números racionais falham”. Mas outras considerações “nos impelem a não aceitar que estes números irracionais sejam números de fato” Eles “escapam perpetuamente” e permanecem “por detrás de um tipo de nuvem indefinida” (enquanto tentamos usar representações decimais). A Ficha de Trabalho também fornece extratos do livro *Arithmetica* de Stevin (1585) com comentários de Girard (como eles aparecem em Klein [1968]), contendo outros argumentos sobre a natureza dos números irracionais. A Ficha de Soluções é enriquecida com um parágrafo do artigo de Peletier: “Os números irracionais são números ou não, e de que tipo?” [Klein, 1968].

R. Bombelli - N. Saunderson

Uma vez que o conflito sobre a natureza dos irracionais tenha sido contornado, mas não extinto, na ausência de definição matemática, a próxima etapa é a das aproximações dos irracionais (algébricos) por racionais. Deve ser apontado também que outros matemáticos também trataram desta questão antes deste período.

Nestas duas Fichas de Trabalho, dois métodos diferentes de aproximação são respectivamente discutidos. O primeiro, tomado do livro *Algebra* de Bombelli (1579), tem sido interpretado usando o que mais tarde seria chamado de frações contínuas. Deve-se antes procurar colocar os escritos retóricos e sincopados de Bombelli na notação simbólica moderna. Desta forma, a Ficha de Trabalho começa com a orientação para a criação de um “dicionário” com este objetivo. As questões poste-

riores foram elaboradas para auxiliarem na compreensão do método de aproximação do caso particular fornecido ($\sqrt{13}$) e na tentativa de aplicá-lo a outro caso, e finalmente discutir sua generalidade e outras questões matemáticas relacionadas.

A Ficha de Trabalho sobre Saunderson fornece o algoritmo conhecido de encontrar raízes quadradas e sua justificativa. O parágrafo foi retirado de seu livro *Os Elementos da Álgebra* (1741).

Após se ter discutido estas duas Fichas de Trabalho passamos a outros estágios da História com os vários grupos de professores que trabalharam nesta sequência. Por exemplo:

- a racionalidade ou irracionalidade de alguns números dados (o caso de π e a prova de Lambert de sua irracionalidade em 1766);
- a existência de irracionais algébricos e transcendentais assim como casos especiais, como a prova de Linderman da transcendência de π em 1882; a existência de números cuja transcendência ainda não foi provada, e casos semelhantes.

Estes tópicos não são tratados em Fichas de Trabalho separadas porque elas requerem um background matemático mais amplo do que a maioria de nossos professores do segundo segmento do primeiro grau possui.

Dedekind e a Definição dos Números Irracionais

Tendo mostrado como os irracionais perpassam extensivamente pela Matemática, ainda está faltando o capítulo final da nossa história - a “*legitimização*” final dos números irracionais. Portanto, a etapa seguinte é fornecer uma definição matemática formal dos irracionais.

Nesta Ficha de Trabalho fornecemos o desenvolvimento original que parece ser mais fácil do que a sua elaboração apresentada em muitos livros posteriores. A razão disto talvez esteja no fato de Dedekind (1831-1916) nos informar como ele sentia a necessidade de uma definição formal e como desenvolveu a idéia usando uma analogia geométrica. Então ele prossegue, dando a definição de um modo puramente formal, juntamente com a definição das operações. [Dedekind, 1963] Baseado nestas definições, um dos exercícios é provar que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Os estágios da história dos números irracionais representados nestas Fichas de Trabalho, estão longe de estarem completos. Há, certamente, futuras Fichas de Trabalho que poderão ser adicionadas, mas as que aqui foram apresentadas fornecem, do nosso ponto de vista, as principais idéias no desenvolvimento deste conceito e que refletem o referencial geral descrito por Harnik [1986]:

- um estágio preliminar (“Um novo conceito nasce da necessidade. No início, ele geralmente é vago e até mesmo os inventores do conceito podem se sentir desconfortáveis com ele”);
- um estágio de familiarização (“O conceito é usado repetidas vezes, aumentando a confiança em sua validade até que seja inteiramente compreendido”); e
- um estágio de axiomatização (“O conceito atinge o status de uma definição matemática formal”).

Implementação

Os materiais descritos anteriormente foram implementados em Workshops (Oficinas) e Cursos do tipo Aprendizagem Ativa e também através de Cursos por Correspondência. Foi realizada uma análise das experiências de implementação, tanto para corrigir possíveis falhas ou lacunas nos materiais como uma contribuição para sua melhoria subsequente, como também para obter um feedback, principalmente qualitativo, mas também quantitativo, sobre se os objetivos foram atingidos e em que medida. A seguir apresentaremos alguns dos resultados obtidos.

O Ponto de Vista dos Professores

Uma das maneiras de avaliar os materiais foi indagar dos professores sobre “O que eles sentiam que tinham aprendido?”. Fizemos as seguintes perguntas aos professores:

“O que você aprendeu nas Oficinas (ou Cursos) do ponto de vista da

(a) História; (b) Didática e (c) Matemática?”

Esta questão foi respondida extensivamente por quase todos os participantes, em cada experiência de implementação.

(a) *História*

As respostas podem ser classificadas em duas categorias: aquelas que enumeraram nomes de matemáticos ou a história de um tópico em geral ou na citação de detalhes específicos, e aquelas que expressaram que eles se tornaram conscientes da natureza evolutiva e dinâmica da Matemática, como a principal contribuição do material.

(b) *Didática*

Muitas pessoas indicaram que elas aprenderam “novas maneiras de explicar as coisas”. E, também (como foi o caso da sequência de Fichas de Trabalho sobre os Números Negativos) que a diferença entre a Matemática pura e a Didática da Matemática tornou-se mais clara.

(c) *Matemática*

A resposta mais comum sob este quesito estava relacionada à definição formal dos números irracionais. Um comentário repetido quase por todos a este respeito foi que eles aprenderam sobre “maneiras de definir conceitos claramente baseados em conceitos anteriores”. Muitos professores também listaram vários tópicos matemáticos específicos.

Outra forma de entender quais os pontos de vista dos professores foi solicitar que eles caracterizassem o potencial dos materiais. A seguinte questão foi feita àqueles grupos que trabalharam em ambas as sequências de Fichas de Trabalho sobre Números Irracionais e Números Negativos, durante os Cursos de Correspondência (professores em exercício, $N = 15$) ou num curso universitário (professores em formação, $N=13$).

Tem sido proposta a introdução de sequências de Fichas de Trabalho sobre números negativos e números irracionais nos cursos das instituições de formação e treinamento de professores. Como você, agora, está familiarizado com o material, gostaríamos de saber sua opinião. Portanto, a seguir, listamos os objetivos dos materiais de aprendizagem. Solicitamos que você marque numa escala de 1 a 10 (menor valor: 1; maior valor: 10) os seguintes aspectos:

- a *importância* de cada objetivo na formação e treinamento de professores, e
- a *contribuição* das seqüências no desenvolvimento daquele objetivo.

Objetivos

1. Aprofundar o conhecimento matemático.
2. Enriquecer as experiências didáticas.
3. Treinar a leitura de textos matemáticos.
4. Aprofundar a consciência da matemática enquanto objeto em desenvolvimento.
5. Discutir tópicos matemáticos de forma interessante.
6. Aprender sobre o desenvolvimento histórico de um tópico.
7. Aprender através da história sobre matemáticos e seus trabalhos.
8. Gostar de “fazer” Matemática.

O quadro geral que emerge da análise das respostas das questões citadas anteriormente indica claramente que os professores sentem que se beneficiaram com os materiais no sentido dos objetivos que orientaram sua elaboração.

Dificuldades e Realizações dos Professores

Nosso primeiro objetivo era fortalecer o conhecimento matemático relacionado ao conceito de irracionais. Como vimos na análise das necessidades, muitos professores em formação não reconheceram satisfatoriamente números irracionais. Um quadro semelhante emergiu de um pré-teste dado a professores em exercício que vieram a trabalhar com o material. O resultado da questão de reconhecimento no pós-teste (após ter trabalhado com a seqüência de números irracionais) foi de que quase todos os professores responderam à questão corretamente. O único erro persistente foi que alguns ainda pensavam que $22/7$ fosse um irracional.

Embora pareça razoável concluir que os materiais contribuíram no reconhecimento dos números irracionais, ainda é surpreendente que, ao final, ainda exista alguma confusão do número irracional particular (π) com uma de suas aproximações racionais ($22/7$). Podemos especular se isto é uma indicação de uma confusão geral entre um irracional e sua

aproximação racional ou alguma coisa em particular ligando π e $22/7$. Então, por exemplo, se na Ficha de Trabalho sobre Bombelli considerarmos 3,6060... como uma aproximação de $\sqrt{13}$, os professores também considerariam este valor como um número irracional? Infelizmente nós pensamos nesta questão tarde demais. Desejamos investigá-la com outra população de professores no futuro.

Outro objetivo importante foi o de melhorar as habilidades de leitura matemática. Para verificar se atingirmos este objetivo, dois extratos não muito conhecidos foram cuidadosamente selecionados de acordo com os seguintes critérios:

- eles foram tirados de fontes históricas primárias e seriam, portanto, semelhantes àqueles utilizados nas Fichas de Trabalho.
- ambos seriam sobre o mesmo tópico: irracionais.

O primeiro foi extraído do livro *A Treatise of Algebra* de MacLaurin (1748) que trata da questão da definição de irracionalidade e o segundo do livro *Algebra, An Elementary Text Book* de Chrystal (1886) tratando da definição de números surdos (irracionais). Na seleção destes trechos (e das questões subsequentes que nós preparamos para testar sua compreensão) para pré e pós testes respectivamente, consultamos especialistas. Isto indicou que o primeiro trecho (com as questões que nós, então, elaboramos) era mais fácil do que o segundo, além do fato de que a definição de números surdos não estar incluída nas Fichas de Trabalho e nem ser de uso comum atualmente. Então, nós escolhemos o primeiro trecho para o pré-teste e o segundo para o pós-teste. As questões relativas a definição ou a propriedade dada no parágrafo exigia do respondente a indicação se uma determinada sentença apresentada seria verdadeira ou falsa.

As respostas após o curso estavam bem mais justificadas. Em particular, poucos não responderam às questões. E embora o segundo trecho fosse maior, mais difícil e tivesse mais questões a serem respondidas, a taxa de bom desempenho foi decididamente mais elevada. Isto é uma indicação clara de que o *design* dos materiais (leitura de fonte histórica levantando questões para serem trabalhadas ativamente) é um contexto altamente adequado para a prática e para o desenvolvimento da habilidade de *leitura matemática*.

Epílogo

Os materiais de aprendizagem sobre a história conceitual dos conceitos matemáticos projetados como orientação de estudos individuais (ou em pequenos grupos) em Fichas de Trabalho da forma descrita neste artigo parecem ser uma abordagem muito adequada para atingir os principais objetivos dos programas de formação e de treinamento de professores em serviço. Do nosso ponto de vista, outros materiais deste tipo devem ser desenvolvidos futuramente de modo a criar uma rica e diversificada fonte da qual os formadores de professores poderão ser capazes de escolher os materiais mais adequados, de acordo com suas necessidades.

Referências Bibliográficas

- ARCAVI, A. Using historical materials in the mathematic classroom. Arithmetic Teacher em impressão.
- ARCAVI, A., BRUKHEIMER, M., and BEN-ZOI, R., May be a Mathematics Teacher can Profit from the Study of the History of Mathematics. For the Learning of Mathematics, 1982, 3 (1) pp. 30-37. em impressão.
- BARON, M.E. Greek Mathematics (AM.289 CI). The Opéns University Press, 1974, pp. 23-24.
- DEDEKIND, R., Essays on the Theory of Numbers. Dover, 1963.
- HARNIK, V., Infinitesimals from Leibniz to Robinson: time to bring them back to school. The Mathematical Intelligencer, 1986, 8(2). pp. 41-47, 63.
- KLEIN, J., Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra M.I.T. Press, 1968.
- KLINE, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. oxford U.P., 1972, p.271.
- MESERVE, B. The History of Mathematics as a Pedagogical Tool. In Zweng M. (ed) Proceedings of the 4th ICME. Burkhauser, 1983, pp. 398-400.
- SAUNDERSON, N., The Elments of Algebra.. Vol. 1. Cambridge University Press, 1741.
- TROIKE, J., Geshichte der Elementarmathematik. Vol. 1. Verlag von Veit & Co., 1902, p. 161.
- FRITZ von, K., The discovery of incommensurability by Hipassus of Metapontum. Annals of Mathematics, 1945, 46(6), pp. 242-264.

TALVEZ UM PROFESSOR DE MATEMÁTICA POSSA SE BENEFICIAR DO ESTUDO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Abraham Arcavi,
Maxim Bruckheimer,
Ruth Ben-Avi
The Weizman Institute of Science - Israel

Introdução

“Nunca, na história da matemática, tão poucos deveram tanto a tantos.” (pedindo desculpas a Churchill). *Tantos* antecipa o caso da história da matemática e o seu valor na educação matemática para alunos e, especialmente, para professores de matemática. Através do século XX, os relatórios [MAA, 1935; Ministry of Education, UK, 1958; entre outros] e autores individuais [por exemplo, Barwell, 1913; Jones, 1969; Shevchenko, 1975; Grattan-Guinness, 1978; Rogers, 1980; Struik, 1980] sugerem *tantas* e várias influências positivas possíveis sobre as atitudes, compreensão, etc.

Em geral, nas discussões do tipo mencionado, como nas discussões gerais de quase qualquer “caso” educacional, a influência do que quer que desejemos comentar (no nosso caso, a influência da história da matemática), depende não apenas do objeto em si, mas de muitas outras variáveis que raramente são consideradas explicitamente.

O caso da história da matemática tem que ser colocado cuidadosamente dentro de um contexto particular em termos de variáveis tais como: público-alvo, seu background matemático, as fontes consultadas, a abordagem utilizada, os tópicos específicos, etc. Se, em outro contexto, as variáveis não forem idênticas, e elas nunca o são, o caso deverá ser recolocado com possíveis modificações.

Freudenthal (1981) menciona explicitamente algumas destas variáveis. Nosso objetivo é nos referir a alguns aspectos de seus argumentos, no processo de descrever uma experiência de “fazer” história da mate-

mática com professores em exercício. Os professores (como público-alvo) são nossa primeira variável na experiência em pauta. Eles eram, na maioria, professores do segundo segmento do primeiro grau, cujo background matemático raramente se estendia além das fronteiras do currículo que devem ensinar.

Freudenthal fez as seguintes considerações:

1. *A História é melhor estudada diretamente através das fontes históricas do que através da leitura e cópia do que outros tenham lido e copiado anteriormente.*
2. *O modo mais apropriado de aprender e de ensinar a história da Matemática é através de seminários e não através de cursos [expositivos].*
3. *Eu considero a história da ciência como um conhecimento integrado e não como itens armazenados em compartimentos bem separados, cada qual rotulado e aberto apenas quando o "horário" anuncia a história do tema em questão.*
4. *O argumento mais próximo a disposição - e o mais frequentemente escutado - é que o conhecimento da história de uma área específica auxilia a compreensão da própria área em questão. Eu duvido disto, pelo menos no que se refere à matemática.*

Tomamos as duas considerações iniciais de Freudenthal como axiomáticas em nossa situação particular, isto é, como duas variáveis conscientemente selecionadas. ("Seminários" pode ter diferentes conotações: em nosso contexto o seminário toma a forma de uma oficina onde os participantes estão ativos e produzindo quase todo o tempo, como será descrito mais adiante).

A terceira consideração corresponde no nosso contexto ao seguinte. A abordagem não era cronológica, nem biográfica (sobre matemáticos); nosso objetivo era criar/estabelecer um quadro (uma panorâmica) do desenvolvimento de um tópico relevante ao professor, e durante este

processo surgiriam matemáticos, datas, etc., que sejam subsidiários ao estudo da história matemática. Esta foi nossa conclusão ao considerar uma variável adicional: o objetivo de todo o exercício. Nós não esperávamos neste estágio, nem talvez em outro estágio qualquer, que os professores concluíssem os trabalhos e saíssem ensinando história da matemática, mas o que de fato esperávamos faz parte da descrição a seguir.

Este artigo tenciona discordar da quarta consideração de Freudenthal. Não há dúvida de que esta consideração é seriamente dependente das variáveis, e nós descreveremos adiante uma situação em que esta dúvida levantada por Freudenthal mostra-se completamente infundada. Mas isto não pode ser feito apenas usando argumentos gerais, mas apenas pela descrição de um curso, de seus materiais e de seus resultados. O valor desta descrição está no fato de que outros que estejam interessados possam, então, desenvolver e planejar seus próprios cursos adequados as suas variáveis selecionadas e valorizadas.

O Curso e Seus Materiais

O material para um workshop para professores de dois dias sobre o desenvolvimento conceitual dos números negativos foi criado como uma série de Fichas de Trabalho cujo formato geral segue o seguinte modelo:

- Uma breve introdução biográfica-cronológica de modo a estabelecer o ambiente do cenário histórico.
- Uma fonte histórica; tão primária quanto possível.
- Levantamento de questões sobre o material consultado (fonte histórica) e sobre as consequências matemáticas daquele.

Para cada Ficha de Trabalho foi preparado um extenso folheto com discussões/soluções contendo soluções escritas detalhadas das questões e materiais adicionais (outras fontes) e background, quando apropriados para complementar e completar a informação histórico-conceitual.

As séries de Fichas de Trabalho consistem de um texto introdutório, sete Fichas de Trabalho e uma Ficha de Síntese/Conclusões. O tempo relativamente curto disponível para a oficina e o formato da atividade, relativamente demorado (duas variáveis adicionais) implicaram numa

seleção muito cuidadosa do material.

Em particular, como o início da história dos números negativos e as fontes originais disponíveis são consideravelmente escassas, decidimos introduzir o tema usando uma fonte secundária [Bell, 1940] que resumia compactadamente a história dos números negativos. O objetivo específico da Ficha Introdutória é duplo:

- fornecer aos professores, que não sabiam quase nada sobre o tópico (veja resultados dos pré-testes adiante), alguma orientação; isto é, um referencial no qual iniciar o trabalho, e
- estabelecer alguns dos estágios do desenvolvimento dos números negativos não tratados nas Fichas de Trabalho.

Foi dado tempo para leitura da Ficha Introdutória e então, ela foi discutida. As sete Fichas de Trabalho que se seguiram estão descritas brevemente abaixo.

1. F. Viète (1540-1603), como um exemplo de

- i) subtração e das leis dos sinais, mas apenas naqueles casos em que todas as expressões envolvidas são positivas,
- ii) o completo não reconhecimento das quantidades negativas.

A fonte primária sobre a qual esta Ficha de Trabalho foi baseada, foi retirada do livro *In Artem Analyticem Isagoge* (1591) como citado (em tradução) por Struik (1969). Devido à dificuldade da leitura das fontes históricas em geral, e a linguagem não familiar das fontes históricas antigas em particular, as primeiras questões desta e de outras Fichas de Trabalho são dedicadas geralmente a compelir os professores à leitura. Neste caso, é solicitado aos professores a tradução da matemática do texto de Viète para um simbolismo matemático moderno. Aqui, como um subproduto, o professor é encorajado a praticar a leitura da matemática numa situação que está parcialmente a seu favor: a linguagem não é familiar, mas o conteúdo, quando “traduzido”, é conhecido. Então, um possível bônus, que nós ainda não avaliamos seriamente pode ser a melhoria da “alfabetização” matemática do professor.

2. Contradições que surgiram da utilização dos números negativos (Século XVII)

Neste caso não fornecemos fontes primárias mas citamos duas famosas contradições apresentadas por Cantor (1901). Uma delas é atribuída a Arnauld (1612-1694) entre outros:

Na relação $(-1/1) = (1/-1)$ existe uma contradição aparente em relação ao conceito de razão. Não é razoável que a razão entre um número menor e um número maior (-1 para 1) seja a mesma que a razão entre um número maior e um número menor (1 para -1).

A segunda contradição, atribuída a Wallis (1616-1703) entre outros, é a seguinte:

Se extendermos a sequência de desigualdades

$$\dots < 1/3 < 1/2 < 1/1$$

para a direita, obtemos:

$$\dots < 1/3 < 1/2 < 1/1 < 1/0 < 1/-1 < \dots$$

mas disto “concluímos” que os negativos, que são menores do que zero também são maiores que o infinito.

Solicitamos aos professores que expliquem estes paradoxos.

Para responder ao paradoxo de Wallis, o folheto de discussões/soluções inclui uma seção do livro de Euler *Vollständige Anleitung zur Differenzial = Rechnung* (uma tradução em alemão do original publicado em latim em 1790), na qual Euler (1707-1783) refuta este argumento considerando a sequência

$$\dots 1/9, 1/4, 1/1, 1/0, 1/1, 1/4, 1/9 \dots$$

cujo termo geral é $1/n^2$ e disto “seguramente ninguém poderá sustentar que eles (os termos a direita de $1/0$) sejam maiores do que o infinito”.

É interessante notar que Euler não fez nada mais do que refutar a sugestão de que os números negativos são maiores do que infinito mostrando que o mesmo argumento leva a uma conclusão absurda. Os professores participantes do workshop tiveram muitas dificuldades em contra-argumentar Arnauld e Wallis, e na discussão nós começamos a perceber a principal fonte objetiva desta dificuldade, ou seja, a ausência de uma definição formal dos números negativos. Esta questão converteu-se no tema sempre presente durante a oficina até chegarmos à Ficha de Trabalho 7, onde os professores começaram a sentir que uma definição estava começando a ser esboçada.

3. N. Saunderson (1682-1739) - como um exemplo da didática do século XVIII

Saunderson foi essencialmente um professor universitário. Escolhemos um parágrafo lidando com a multiplicação dos números negativos de seu livro, publicado postumamente, *The Elements of Algebra* (1741). Sua estratégia didática é o que podemos chamar atualmente de uma extensão dos padrões observados nos números positivos para os números negativos.

Ocorrem interessantes discussões, e uma das questões que abordamos foi a distinção entre definições e suposições, que não estão diferenciadas no texto. Isto encaminhou-se para uma discussão sobre o problema da prova na ausência de uma definição básica.

4. Leonard Euler - como outro exemplo didático

Nós selecionamos uma seção da versão inglesa de seu livro *Elements of Algebra* (1828, Quarta Edição). Entre outras coisas, a Ficha de Trabalho solicita que o professor compare e confronte a abordagem de Euler com a abordagem de Saunderson, ambas pertencentes ao período em que os números negativos eram usados livremente, mas antes deles terem sido definidos.

A prova de Euler de que o produto de dois números negativos é positivo era típico desta época:

33. Permanece ainda resolver o caso em que $-$ é multiplicado por $-$; ou por exemplo, $-a$ por $-b$. É evidente, a primeira vista, que em relação as letras, que o produto será ab ; mas é duvidoso se o sinal $+$ ou o sinal $-$ deva ser colocado a sua frente; tudo o que nós sabemos é que deve ser um ou outro destes sinais. Agora, eu afirmo que não pode ser $-$; pois $-a$ por $+b$ resulta em $-ab$; e $-a$ por $-b$ não pode produzir o mesmo resultado que $-a$ por $+b$; mas deve produzir um resultado contrário, isto é, $+ab$; consequentemente, nós temos a seguinte regra: $-$ multiplicado por $-$ produz $+$, isto é, o mesmo que $+$ multiplicado por $+$.

O folheto de discussões/soluções inclui um comentário devastador de D.E. Smith (1900) (não dirigido a Euler, é claro...):

... Estas coisas são facilmente explicadas, mas as “provas” dos livros-texto da última geração devem ser, agora, descartadas.

Uma destas provas favoritas era a seguinte: Como multiplicar $-b$ por $+a$ produz $-ab$; portanto se o sinal do multiplicador for modificado, é claro que o sinal do resultado também deve ser alterado. Enquanto prova, isto é a mesma coisa que dizer o seguinte: Se A, que é um homem branco, calça sapatos pretos, então, B, que é um homem negro, deve usar sapatos da cor oposta.

5. W. Frend (1757-1841) e sua oposição aos números negativos

Esta Ficha de Atividade foi selecionada para representar a decadente, mas ainda presente, oposição ao uso total dos números negativos no início do século XIX. Frend era essencialmente um professor, entretanto, ele rejeita fortemente em seu livro *The Principles of Algebra* (1796) a utilização de exemplos não matemáticos para justificar os números negativos:

... O primeiro erro no ensino dos princípios da álgebra obviamente está na leitura atenta de algumas páginas da primeira parte da *Algebra* de MacLaurin. Os números estão divididos em dois tipos, positivos e negativos; e é feita uma tentativa de explicar a natureza dos números negativos através de alusões a livro de débitos e outros ofícios. Ora, quando uma pessoa não consegue explicar os princípios de uma ciência sem fazer referência a metáforas, a probabilidade é que ela nunca tenha pensado acuradamente sobre o tema...

Solicitamos aos professores que respondam a Frend neste ponto e em outros envolvendo sua oposição aos negativos. Também citamos uma breve seção de seu tratamento das equações quadráticas, em que ele divide o tópico num número de casos devido a sua rejeição às raízes negativas. Pedimos aos professores que expliquem a sua abordagem e comentem sobre as suas possíveis vantagens ou desvantagens.

O folheto de discussões/soluções inclui citações de dois matemáticos consideravelmente bem mais famosos, que podem ser usadas como base para réplica dos argumentos de Frend. A primeira foi retirada do livro *A Budget of Paradoxes* de Morgan (1872). A segunda é de um período bem posterior: a elegante discussão de Whitehead em seu livro

Introduction to Mathematics (sem data). É claro que não esperamos que os professores argumentem neste nível, mas uma vez que eles tenham chegado, por suas próprios meios, a uma resposta, a comparação com as respostas dadas pelos “mestres” da matemática possui um significado bem mais forte.

6. G. Peacock (1791-1858) - uma tentativa de formalização

Peacock começou um período que levou à definição matemática formal dos números negativos, e seu trabalho era também uma resposta aos rejeitadores. Ele, aparentemente, foi o primeiro a formular o *princípio de permanência das formas equivalentes* (uma estratégia didática significativa em sua época), que formou a base de sua extensão da álgebra aritmética para a álgebra simbólica, a última sendo, entre outras coisas, a discussão da extensão da aritmética para os números negativos. A Ficha de Trabalho está baseada em extratos de seus livros *Arithmetical Algebra* (1842) e *Symbolical Algebra* (1845). A abordagem é extremamente próxima de alguns tratamentos da escola moderna do tema: uma discussão interessante é encontrada em Klein (sem data) e nós a fornecemos no folheto de discussões/soluções.

7. A Entrada Formal dos Números Negativos na Matemática

Esta Ficha de Trabalho não está baseada sobre materiais históricos mas nela desenvolveu-se, por meio de uma cuidadosa sequência estruturada de questões orientadoras, uma definição de números inteiros como pares ordenados de números naturais. A matemática aqui é bastante formal, exceto devido a apartes didáticos e históricos ocasionais. Sem dúvida, o formalismo alcançado nesta Ficha é apropriado para um curso universitário de matemática pura. A resposta dos professores foi extremamente interessante: devido ao preâmbulo histórico e a discussão explícita sobre as lacunas das abordagens anteriores e tentativas de definição dos números negativos (e as operações binárias correspondentes), os professores não apenas acharam esta Ficha fácil (dentro de suas habilidades) mas atendendo em muito às suas necessidades e expectativas (a seu gosto). Havia uma apreciação bastante evidente da necessidade e do papel da definição.

A Ficha Final tencionava servir tanto como uma revisão como um alerta contra o uso acrítico de fontes históricas secundárias. Citamos Kline (1972, p: 592-593) e solicitamos que os professores expressassem sua opinião e crítica sobre o resumo de Kline do estado do conhecimento dos números negativos no século XVIII e início do século XIX. Finalmente foi formulada a questão a seguir, de modo a resumir todas as Fichas de Trabalho e estabelecer um quadro geral.

Nestas Fichas de Trabalho, encontramos os nomes de vários matemáticos conhecidos e desconhecidos que estão ligados à história dos números negativos. Além disso, aprendemos as abordagens e as visões deste conceito. Na seguinte tabela você encontrará estes matemáticos e uma sugestão de divisão em estágios do desenvolvimento deste conceito.

Ao término da Ficha Final é dada uma listagem dos matemáticos citados nas fichas anteriores com uma breve descrição dos itens por eles abordados e um gráfico mostrando a época em que eles viveram.

O Workshop e Alguns Resultados

O workshop foi dirigido por dois tutores. Os professores trabalharam em grupos ou individualmente, conforme desejassem. Os tutores “interferiram” com questões suplementares a indivíduos ou a grupos de acordo com seu progresso (ou ausência de progresso). Eles todos respondiam às questões que eram frequentes. Geralmente, após cada Ficha de Trabalho, realizava-se uma discussão coletiva orientada pelos tutores sobre as soluções, observando apropriadamente até onde tínhamos chegado e para onde pretendíamos prosseguir. Após as discussões, era distribuído o folheto de soluções/discussões que tinha sido preparado, tanto para fornecer as informações adicionais nele contidas como para registrar detalhadamente a atividade.

A série de Fichas de Trabalho, os resumos e discussões verbais e os folhetos de discussões/soluções construíram, reunidos, a história do conceito, suas dificuldades, seus pontos cegos, as diferentes abordagens adotadas, etc. Como vimos anteriormente, a atenção também estava dirigida às implicações didáticas e aos conceitos lógicos tais como definições, suposições, provas, etc.

Cerca de 50 professores participaram dos dois dias de trabalho. De modo a não nos determos apenas em nossa avaliação subjetiva da oficina, também preparamos dois questionários, um para o início e um para o final dos trabalhos.

Os questionários foram elaborados de modo a fornecer informações sobre:

- a. conhecimento prévio do assunto.
- b. a importância que os professores atribuíam a história da matemática, tanto para si mesmos quanto para seus alunos, antes e depois dos trabalhos.
- c. as visões sobre a utilidade/validade da oficina.

Uma análise das respostas dos dois questionários forneceu as seguintes informações:

- a. a maioria (cerca de 80%) não conhecia nada de antemão sobre o desenvolvimento do conceito de números negativos. Além disto, a maioria deles era de opinião que a definição matemática precedeu o uso livre dos números negativos. Nós tomamos isto como um possível indicador do quadro impróprio que muitos professores de matemática possuem do tópico em questão como também da natureza da atividade matemática.
- b. Houve um significativo aumento da importância atribuída à história da matemática após a oficina, comparada com a importância atribuída no início.
- c. Quando solicitamos que escolhessem possíveis áreas em que a história da matemática pudesse contribuir, os seguintes tópicos foram indicados pela grande maioria dos participantes:
 - apresentar a matemática como uma matéria em desenvolvimento e dinâmica.
 - alargar e aprofundar o conhecimento sobre certos tópicos;
 - aumentar o interesse dos alunos;
 - ajudar o professor a compreender melhor os erros e os conceitos errôneos dos alunos em certos tópicos.

Em resposta à seguinte questão aberta:

O que você aprendeu nos últimos dois dias do ponto de vista da:

(a) história, (b) didática e (c) matemática?
obtivemos as seguintes respostas:

História

- Eu aprendi sobre o desenvolvimento dos naturais para os números inteiros, mas eu nunca imaginei que tivesse havido tantos argumentos e batalhas, mesmo quando o reconhecimento da necessidade de extensão já tinha sido reconhecida.

- Uma ilustração fascinante do fato de que, em muitos casos, a utilização do conceito precedeu de muito a possibilidade do pensamento humano definir estes conceitos de forma correta.

Didática

- Eu recebi uma fundamentação para a visão de que nenhuma resposta do aluno deva ser depreciada ou desvalorizada, mas que devemos relacioná-las todas, pensar sobre as mesmas e descobrir o que as fundamenta ou provoca.

- Tornou-se claro para mim que devemos saber distinguir a didática da matemática da matemática pura.

Matemática

- A definição dos números negativos.

- A importância das definições, provas e da estrutura matemática.

- Parece-me que a minha compreensão sobre os números negativos foi ampliada.

Epílogo

Esperamos que tenhamos conseguido demonstrar, em primeiro lugar que o quarto comentário de Freudenthal no qual ele *duvida de que o conhecimento da história de uma área específica auxilie a compreensão do próprio conteúdo tratado* possa ser questionado.

Ambas as avaliações objetivas, e as evidências subjetivas de nossas observações, mostram bastante claramente que os participantes de nossa

oficina apreciaram a sétima Ficha de Trabalho com uma apreciação da necessidade lógico-matemática de uma definição adequada dos números negativos. Além disso, eles estavam num estado mental favorável para desenvolver e compreender a definição formal, e tinham a habilidade de desenvolvê-la por si mesmos em resposta às questões orientadoras. Não há nenhuma dúvida de que a definição dos números negativos pode ser ensinada aos professores sem o preâmbulo histórico, mas igualmente também não existe dúvida, partindo de nossas observações, de que esta experiência é muito mais significativa quando precedida por algumas das tentativas históricas, seus fracassos, suas controvérsias e suas batalhas. Além disso, o trabalho histórico possui subprodutos mais gerais. Ele modificou as concepções dos participantes sobre a atividade matemática: ele removeu a áurea de alguma coisa absoluta e divina. Ele também forneceu um ambiente adequado e interessante no qual se discuta a didática do conceito, tanto formalmente quanto informalmente. Estamos convencidos de que todos os participantes iriam concordar com Whitehead:

A idéia de números positivos e negativos foi praticamente a mais extraordinária das sutilezas matemáticas.

Na verdade, como dissemos no início, isto tudo depende das variáveis escolhidas e valorizadas. A história da matemática não é útil ou inútil, relevante ou irrelevante para alguma coisa ou para nada: tudo depende do significado que se atribui ao termo, e como ele é colocado em prática.

Referências Bibliográficas

- BARWELL, M., The Advisibility of Including some Instruction in the School Course on the History of mathematics. The Mathematical Gazette, 7, 1913, pp.72-79.
- BELL, E.T., The development of mathematics. McGraw-hill, 1945.
- CANTOR, M., Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik. Teubner, 1901.
- DELANEY, R.A., An Anecdotal and Historica Approach to Mathematics. Unpublished doctoral dissertation, 1980.
- FREUDENTHAL, H., Should a Mathematics Teacher know something about the History of Mathematics ? For the Learning of Mathematics. 2, 1981, pp. 30-33.
- GRANTAN-GUINNESS, I., On the Relevance of the History of Mathematics to

- Mathematical Education. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology*, 9, 1978, pp. 275-285.
- JOHNSON C.S and BYARS J.A., Trends in Content Programs for Preservice Secondary Mathematics Teachers. *American Mathematical Monthly*, 84, 1977, pp. 561-566.
- JONES P., The History of Mathematics as a Teaching Tool. In: NCTM, *Historical Topics for the Mathematics Classroom*: 31st Yearbook, 1969.
- KLEIN, F., *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis*. Dover, n.d.
- KLINE, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*. O.U.P., 1972.
- MAA (Mathematical Association of America), *Report on the Training of Teachers of Mathematics*. *American mathematical Monthly*, 42, 1935.
- McBRIDE, C.C. & ROLLINS, J.H., The Effects of History of Mathematics on Attitudes towards Mathematics of College Algebra Students. *Journal of Research in Mathematics Education*, 8, 1977, pp. 57-61.
- Ministry of Education, Pamphlet N° 36. H.M.S.O., London, 1958
- ROGERS, L., Newsletter of the ISGHPM (International Study Group on the Relationship between the History and Pedagogy of Mathematics), 1980.
- SHEVCHENKO, I.N., Elements of the Historical Approach in Teaching Mathematics. *Soviet. Studies in Mathematical Education*. 12., 1975, pp. 91-139.
- SMITH, D.E., *The teaching of elementary mathematics*. MacMillan Co., 1900.
- STRUİK, D.J., *A source book in mathematics 1200-1800*, Harvard, Mass., 1969.
- STRUİK, D.J., Why study the History of Mathematics ? *The Journal of Undergraduate Mathematics and its Applications (UMAP)*, 1, 1980, pp. 3-28.

O SENTIDO DO SÍMBOLO

Atribuindo Um Sentido Informal À Matemática Formal

Abrahan Arcavi
Weizmann Institute of Science - Israel

Prólogo

Irineo Funes, o “memorioso”, foi criado pela fantástica paleta de Borges. Ele tinha uma extraordinária memória retentiva, ele era capaz de memorizar **tudo**, sejam as formas das nuvens de sudoeste ao entardecer de 30 de Abril de 1882, ou todas as palavras em Inglês, Francês, Português e Latim. Cada uma de suas experiências era completamente e cuidadosamente registrada em sua memória infinita. Em certa ocasião ele pensou em reduzir cada dia passado de sua vida a setenta mil lembranças que seriam referidas por números. Duas considerações o dissuadiram: a tarefa era interminável e fútil. Ao final da história, a tragédia real de Funes é revelada. Ele era incapaz de idéias gerais, platônicas. Por exemplo, era difícil para ele compreender que o nome genérico “cão” incluísse tantos indivíduos de diversas formas e tamanhos. Além disso, ele também era perturbado pelo fato de que o cachorro visto lateralmente, e acuradamente memorizado, às 3 h 14 min daquela tarde fosse o mesmo cachorro que ele viu de frente às 3 h 15 min. Precisamente porque Funes tinha uma memória assim tão monumental, ele era incapaz de pensar, porque, afirma Borges:

“Pensar es olvidar diferencias, es generalizar, abstraer” (1989).

Motivação

É amplamente difundido e aceito que a execução correta das operações aritméticas não deve ser o foco solitário do ensino e aprendizagem da aritmética. O conhecimento de quando usar uma equação e temas como “senso numérico” estão recebendo atualmente uma atenção crescente. Em termos gerais, “senso numérico” (NCTM, 1989; Sowder e Schappelle, 1989; Sowder, 1992) pode ser descrito como uma sensibi-

lidade “não algorítmica” em relação aos números; uma compreensão profunda de sua natureza e da natureza das operações, uma necessidade de examinar a razoabilidade dos resultados; uma sensibilidade para os efeitos relativos das operações com números, uma sensibilidade para as ordens de magnitude e a liberdade de reinventar modos de operar com os números diferentes da repetição mecânica daquilo que está sendo ensinado e memorizado.

Existiria um paralelo com a álgebra ? Será que a comunidade de educação matemática também não considera as manipulações simbólicas como a questão central no ensino da álgebra? A resposta parece ser afirmativa especialmente à luz do surgimento dos manipuladores simbólicos e em parte devido a muitos estudantes do segundo grau atribuírem pouco significado aos símbolos literais, mesmo após muitos anos de ensino. Até mesmo aqueles estudantes que executam a manipulação das técnicas algébricas com êxito, freqüentemente não vêem a álgebra como um instrumento para compreensão, expressão e comunicação de generalizações, um instrumento revelador das estruturas, de estabelecimento de conexões e de formulação de argumentações matemáticas (provas). O ensino nem sempre oferece oportunidades para os estudantes não apenas memorizarem, mas também para “esquecer” as leis e os detalhes e serem capazes de ver através deles de modo a pensar, abstrair, generalizar e planejar estratégias de solução. Portanto, parece razoável tentarmos desenvolver uma descrição de uma noção paralela àquela do “senso numérico” da aritmética: a idéia de “sentido do símbolo”¹

O Que é Sentido do símbolo? Uma Primeira Etapa.

Comparada à atenção que tem sido dada ao “sentido do símbolo”, existe muito pouco na literatura sobre “sentido do símbolo”. Uma exceção surpreendente é Fey (1990). Ele não tenta definir “sentido do símbolo” diretamente, mas lista “um conjunto razoável de objetivos para ensinar” que inclui os “seguintes temas básicos”:

“habilidade de explorar - correr os olhos sobre uma expressão algébrica para fazer estimativas brutas dos padrões que emergirão numa representação numérica ou gráfica...”

¹ Através deste artigo, a palavra símbolos será utilizada significando símbolos literais como usados na álgebra do segundo grau.

“habilidade de fazer comparações conscientes das ordens de magnitude para funções com leis do tipo n , n^2 , n^3 , ..., e n^k ...”

“habilidade de explorar rapidamente uma tabela de valores de uma função ou um gráfico ou de interpretar verbalmente condições expressas, de identificar a forma adequada de uma lei algébrica que expresse determinado padrão...”

“habilidade de inspecionar operações algébricas e prever a forma do resultado ou, como na estimativa aritmética, de inspecionar o resultado e julgar a possibilidade de que tenha sido executada corretamente...”

habilidade de determinar qual entre várias formas equivalentes pode ser mais apropriada para responder questões particulares...”

Neste artigo, tentaremos ampliar as situações acima tanto quantitativa quanto qualitativamente. Como Fey, não tentaremos definir “sentido do símbolo” - uma tarefa demasiadamente complicada. Acreditamos que o “senso numérico” tem sido mais vivamente e amplamente discutido (por exemplo, Sowder e Schappelle, 1989), e mesmo assim uma definição tem se mostrado ser extremamente esquivada. Portanto, iremos nos concentrar na descrição e discussão de comportamentos que ilustrem o que acreditamos serem exemplos de sentido do símbolo.

Um alerta metodológico: Como não pretendemos, nem aqui nem no restante deste artigo, descrever uma pesquisa baseada na cognição de estudantes e modos de aprendizagem, podemos nos permitir ser indulgentes com as interpretações dos dados anedotais que fornecemos. Desta forma, propomos dispensar os riscos de má interpretação (seja pela supervalorização ou seja pela desconsideração) dos comentários dos estudantes. Apresentamos os exemplos como meras ilustrações de instâncias nas quais, do nosso ponto de vista, está presente uma sensibilidade simbólica.

Comportamento # 1

Familiarizando-se Com Os Símbolos

Defendemos que ter sentido do símbolo deve incluir uma sensibilidade intuitiva para quando usar os símbolos no processo de resolução de

um problema, e inversamente, quando abandonar um tratamento simbólico para usar instrumentos melhores.

Afinal, para que servem os amigos?

A seguir descrevemos o desenvolvimento de uma aula que temos repetido várias vezes. Começamos introduzindo quadrados mágicos três x três, e então, apresentamos o seguinte exercício:

“Complete as casas vazias para obter um quadrado mágico com soma 9.”

	3	
2		1

Prosseguimos, então, com o seguinte exercício: Fazer o mesmo mas com soma 6.

	2	
1		5

Este exercício introduz números negativos como soluções legítimas. Então, dependendo da turma, nós apresentamos mais um ou dois

quadrados mágicos simples, antes de prosseguir com o seguinte: Solicitamos que o quadrado mágico tenha soma 8.

	4	
2		2

Como os exemplos anteriores funcionaram tão esplendidamente, este, que não funciona, torna-se uma surpresa. Após verificarem suas contas aritméticas mais de uma vez, ou então, partir de uma casa diferente, alguns estudantes começam a sugerir que se trata de “uma missão impossível”; outros continuam fazendo suas contas aritméticas orientados por uma certeza implícita de que eles devem ter cometido algum erro. Uma vez que todos os estudantes tenham se convencido de que não existe solução, segue-se, então, a questão natural:

“Por que os outros funcionaram e este não?”

Obviamente, isto deve depender dos dados, e os estudantes sugerem muitas conjecturas. Por exemplo, o último quadrado mágico não funciona porque a soma solicitada é exatamente a soma dos três números. Discussões e conjecturas, exemplos e contra-exemplos deixam poucos estudantes não envolvidos.² Na maioria dos casos, ou é necessário um longo período de tempo antes que alguém timidamente sugira o uso da álgebra, ou nós temos que sugerir diretamente seu uso (por exemplo, perguntando “Que instrumentos nós temos a nossa disposição nesta situação para verificar ou refutar as conjecturas?”). Em muitas ocasiões, após a álgebra ser mencionada, um céptico normalmente indaga “como as letras poderiam nos ajudar aqui?”.

Afirmaríamos que indivíduos que sabem como executar as manipulações algébricas, mas não consideram a possível relevância dos sím-

² A dinâmica destes diálogos geralmente é interessante e rica, mas isto não é o tema deste artigo.

bolos para revelar a estrutura do problema que despertou nossa curiosidade, não desenvolveram integralmente seu sentido do símbolo. Ter sentido do símbolo inclui a relevante evocação da álgebra; ou em outras palavras, ter símbolos prontamente disponíveis como possíveis instrumentos de atribuição de sentido.

Uma indicação adicional da falta de sentido do símbolo foi percebida quando, no processo de resolver o problema algebricamente, alguns estudantes eram inicialmente incapazes de reconhecer a solução mesmo quando se defrontavam com ela. Por exemplo, em certa ocasião, no processo de completar o quadrado mágico “geral” chegamos ao seguinte estágio:

2 S-b-c		1 S-a-b
3 b+c-a	b	4
<u>a</u>		<u>c</u>

Onde **a**, **b**, e **c** são os números dados, e **S** a soma desejada.

Completar a primeira casa (1) envolve a percepção de que seu conteúdo deve ser expresso em termos de **S**, **a** e **b**. Alguns estudantes iniciantes em álgebra podem sentir-se induzidos a introduzir uma nova variável, ou porque eles não estejam inteiramente conscientes do que eles estão procurando ou porque eles não tenham ainda experiência suficiente sobre como os símbolos expressam relações. Neste ponto, as casas indicadas por 1, 2 e 3, foram completadas sem problemas, e a casa 4 foi completada pela soma da coluna, obtendo-se **a+b-c**. Neste momento, alguém percebe que a expressão para a soma da linha do meio é **3b** e não contém **S**. Demora-se um pouco para que alguém na turma perceba que se nós desejamos que a soma seja **S**, então **S=3b**, o que expressa precisamente a condição procurada.

Desta forma, nós gostaríamos que o sentido do símbolo incluísse a introdução de símbolos quando for apropriado e o reconhecimento do

significado da solução simbólica. Talvez quiséssemos incluir um pouco mais do que isto, também. Mesmo quando os símbolos são usados, e a solução que eles fornecem seja reconhecida, seria desejável que os estudantes apreciassem o “poder dos símbolos”: apenas com o uso dos símbolos uma conjectura ou um argumento podem ser conclusivamente aceitos ou invalidados.

Outro exemplo simples e claro disto é o seguinte: Considere um retângulo qualquer. O que acontece a sua área se uma de suas dimensões for aumentada em 10% e a outra diminuída em 10% ? A reação inicial dos estudantes inclui: “não existe mudança nenhuma” (provavelmente devido a “compensação”); “a mudança depende de qual dimensão é aumentada e qual é diminuída”. Cálculos numéricos simples mostram que existe uma diminuição aparente em todos os casos, mas é apenas quando nós recorremos aos símbolos que o resultado se torna óbvio e conclusivo. Se a e b são as dimensões originais, então a área do novo retângulo será ou $1,1a \times 0,9b$ ou $0,9a \times 1,1b$, precisamente, $0,99ab$, em ambos os casos. De modo magnificamente conciso, os símbolos expressam todo o cenário do problema: Primeiramente, a área sempre diminui; segundo, ela sempre diminui de 1%, e terceiro, o resultado é independente de qual dimensão é aumentada e qual é diminuída.

Gostaríamos que os estudantes “vissem” a solução simbólica e ficassem convencidos com ela, mesmo quando ela contradiz nossas intuições iniciais sobre o problema. Os especialistas que almejamos, olhariam $0,99ab$ não apenas como a solução, mas também como intrinsecamente “trazendo” sua explicação. Então, nós defendemos que o sentido do símbolo deveria incluir, além da evocação relevante de símbolos e seu uso adequado, a apreciação da elegância, sua concisão, sua comunicabilidade e o poder dos símbolos para expor e provar interrelações de uma maneira que a aritmética não consegue.

Quando os amigos não são tão amigáveis

Se o sentido do símbolo requer que nós evoquemos símbolos quando eles forem adequados ou indispensáveis, então o sentido do símbolo requer também que abandonemos os símbolos quando estivermos nos afofando em suas manipulações técnicas.

Consideremos dois exemplos:

“Para que valores de “a”, o par de equações:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 0 \\(x-a)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

possui : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 soluções ?”³

Como mencionamos antes, problemas deste tipo que são expressos em termos algébricos, “convidam” ou induzem, bastante fortemente, a uma solução algébrica. Portanto, não é surpreendente que muitos estudantes mergulhem em manipulações algébricas sem (ou a despeito de) perceberem que a manipulação algébrica poderá ser bastante laboriosa e propensa a erros. A decisão de descartar a quase inevitável tentação inicial de proceder principalmente simbolicamente, em favor de pesquisar por outras abordagens, requer um saudável mistura de “controle” com sentido do símbolo.

Resumidamente, controle seria:

Uma categoria de comportamento que lida com o modo como os indivíduos usam a informação potencialmente a sua disposição. Ela focaliza-se sobre as principais decisões sobre o que fazer num problema, decisões que em si mesmas ou de si mesmas podem “encaminhar ou quebrar” uma tentativa de resolver um problema. Comportamentos de interesse incluem preparação de planos, seleção de objetivos e subobjetivos, monitoração e avaliação das soluções conforme elas evoluem, e revisar ou abandonar os planos quando as avaliações indicarem que estas ações devam ser tomadas.” (Schoenfeld, 1985, ênfase nossa).

Em nosso exemplo, a decisão administrativa de mudar um curso de ação envolve mais do que isto: ela também é motivada e dirigida por um senso

³ Este problema é tomado emprestado das aulas de resolução de Problemas Matemáticos de Alan Schoenfeld.

estético, de elegância, eficiência, como também por uma apreciação (ou mesmo crença) de que o trabalho matemático envolve muito mais do que o estoicismo de embarcar em manipulações simbólicas cabeludas. A idéia é desenvolver reações do tipo: “isto envolve um trabalho muito difícil, técnico e desinteressante; deve haver outra abordagem.”

A outra abordagem pode emergir da visão do problema de outros pontos de vista ou através de mudanças de representação. Neste caso, um gráfico cartesiano e as subsequentes considerações geométricas sugerem outra maneira de olhar o problema: o número de interseções entre as duas diagonais do plano cartesiano (dadas por $x^2 - y^2 = 0$, precisamente $y = \pm x$) e uma família de círculos com raio unitário e cujos centros estejam sobre o eixo das abscissas. (dados pela equação $(x - a)^2 + y^2 = 1$). Nesta perspectiva, a solução é mais elegante e bem mais fácil, sem nenhum excesso algébrico.

Considerações similares para abandonar as manipulações algébricas em favor de outras representações podem ser feitas quando resolvemos, por exemplo, $|x - 2| > |x - 6|$. O tratamento algébrico desta inequação envolve um uso pesado de conectivos lógicos, muito trabalho técnico e uma alta probabilidade de cometer erros. Em vez de se lançar aos símbolos, agir com sentido do símbolo implicaria em “descobrir” significados: $|x - 2|$ é a distância de qualquer número x a 2; então o que o problema quer é descobrir quais números cuja distância a 2 é maior de sua distância a 6. Um simples diagrama de linha, ou uma simples abordagem verbal pode resolver este problema. Outra abordagem possível é considerar $|x - 6|$ e $|x - 2|$ como funções de x , em cujo caso a solução do problema também é imediata a partir dos correspondentes gráficos cartesianos (Friedlander e Hadas, 1988).

Nos dois exemplos anteriores, o sentido do símbolo implicaria a sensibilidade premonitória de que a persistência com uma solução simbólica provocaria um trabalho talvez desnecessariamente árduo. Além disso, ele incluiria a tendência de tentar outros modos de representar o problema, na crença de que abordagens mais elegantes e diretas possam existir e devam ser consideradas. Em outras palavras, o sentido do símbolo incluiria a sensibilidade para perceber quando devem ser evocados símbolos e também para quando abandoná-los.

Comportamento # 2

Além das Manipulações: Lendo Através Dos Símbolos

Resolver equações algébricas simples não requer muito mais do que manipulações padronizadas para fornecer o resultado desejado, e a única “leitura” significativa requisitada é atribuir um significado a resposta na forma $x = \dots$.

De fato, de um certo ponto de vista, esta é a potencialidade dos símbolos, eles nos permitem nos isolarmos, e até mesmo “esquecermos”, seus referentes de modo a produzir resultados eficientemente. Alfred North Whitehead (1911) enfatizou a “enorme importância de uma boa notação” e a natureza do simbolismo na matemática:

“... com auxílio do simbolismo, podemos fazer transições no raciocínio quase mecanicamente com os olhos, o que de outra maneira exigiria a atuação das altas faculdades do cérebro. É uma afirmação profundamente errônea, repetida por todos os livros didáticos e por pessoas eminentes quando eles estão fazendo discursos, que deveríamos cultivar o hábito de pensar naquilo que estamos fazendo. É exatamente o caso oposto. A civilização avança ampliando o número de operações importantes que podemos executar sem pensar sobre as mesmas. As operações de pensamento são como investidas da cavalaria numa batalha - elas são estritamente limitadas em número, elas requerem cavalos descansados, e apenas devem ser feitas em momentos decisivos.” (Whitehead, 1911).

Entretanto, nós acreditamos que Whitehead também teria concordado com Freudenthal (1983) quando afirma:

“Eu tenho observado, não apenas em outras pessoas, mas também em mim mesmo... que fontes de visualização podem ser bloqueados por automatismos. Alguém finalmente domina uma atividade tão perfeitamente que as questões do **como** e **porquê** não são mais formuladas, não podem mais ser formuladas, e não são mais nem sequer compreendidas como questões

significativas e relevantes.”

Interromper um procedimento simbólico mecânico de modo a inspecioná-lo e reconectá-lo a seus significados subjacentes, poderia ser, usando a terminologia de Freudenthal, um bom exercício de “desbloqueio”.

Lendo em vez de manipular

Por exemplo, enquanto simplificava uma equação linear de modo a obter uma solução, uma estudante chegou ao seguinte:

$$3x + 5 = 4x$$

Em vez de proceder mecanicamente, especificamente “subtraindo $3x$ de ambos os lados da equação”, ela parou e mudou para uma abordagem diferente: leitura simbólica. Ela observou que de modo a obter $4x$ do lado direito da equação a partir dos $3x$ do lado esquerdo, precisamos adicionar $1x$, portanto a quantidade real acrescida (5) deve ser o valor de $1x$. Mesmo apesar do método padrão e do dela serem matematicamente indistinguíveis, psicologicamente existe uma diferença sutil mas importante. Sugerimos que interromper uma rotina quase automática de modo a ler e perceber uma relação simbólica como neste caso, é uma instância pequena mas extremamente saudável de sentido do símbolo.

Lendo e manipulando

As soluções das equações algébricas simples, como geralmente expostas nos textos padronizados e como usualmente ensinados nas salas de aula, automaticamente levantam um “instinto” para a manipulação técnica. Portanto, é necessário uma certa maturidade para, ao se deparar com a equação $\frac{2x+3}{4x+6} = 2$, “defender-se” do instinto de começara resolvê-

la e, pelo contrário, tentar ler o significado contido nos símbolos. Neste caso, deveríamos notar que independentemente do valor de x , como o numerador é metade do denominador, esta equação não pode ter uma solução. Acreditamos que esta inspeção *a priori* dos símbolos com a expectativa de adquirir uma sensibilidade maior em relação ao problema e seu significado, é outra instância de sentido do símbolo.

Um de nossos estudantes foi ainda mais longe. Após perceber, como acima, que não havia nenhuma solução, ele afirmou: “O.K., então este problema não tem solução, mas o que acontece se eu “resolvê-lo” mes-

mo assim?" Provavelmente este estudante, para quem resolver significava aplicar os procedimentos mecânicos e chegando a forma $x=...$, parecia estar expressando sua necessidade de ver como a álgebra expressa a ausência de solução. Infelizmente, neste caso, a álgebra não é muito esclarecedora: a manipulação algébrica fornece, sem protestos, o resultado $x = -1 \frac{1}{2}$. Nosso estudante ficou confuso com a contradição, e demorou algum tempo para superá-la. Quando ele substituiu $x = -1 \frac{1}{2}$ na equação, ele percebeu que este valor é o único que não é permitido substituir, e então confirmou que sua sensibilidade estava correta. Ele não falou muito sobre isto, mas nós sugerimos que ele estava aprendendo algo sobre a "linguagem dos símbolos" e sobre como pode ser enganador usá-los simplesmente sem um mínimo de razoabilidade.

A leitura como objetivo da manipulação

Existem situações em que a leitura através dos símbolos é essencial. Por exemplo: "O que você pode dizer sobre os números resultantes da diferença entre a terceira potência de um número inteiro e o próprio número $[n^3 - n]$?" (Este problema foi extraído de Fischbein e Kedem, 1982). Usando uma heurística padrão de Pólya de considerar casos especiais, podemos notar que os números obtidos são sempre múltiplos de 6. Símbolos são necessários para provarmos que isto é verdadeiro. Entretanto, uma mera manipulação algébrica, por exemplo, a fatorização de $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$ por si mesma não ajuda muito. Apenas através da leitura dos significados dos símbolos, percebendo que o lado direito representa o produto de três inteiros consecutivos, e que portanto, pelo menos um deles deve ser par e que um deles deve ser múltiplo de 3, o argumento da prova estará completado.

Os exemplos acima ilustram um aspecto do sentido do símbolo que consiste da procura do significado simbólico, seja porque ele é essencial a resolução do problema, ou meramente porque traz novas maneiras de ver o problema.

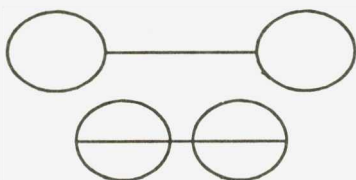
A leitura para a razoabilidade

Como um exemplo deste aspecto, nós re-examinamos um dos problemas clássicos da literatura da pesquisa em educação matemática: o problema dos estudantes e dos professores.

“Escreva usando as variáveis E e P representando a seguinte sentença: Existem seis vezes mais estudantes do que professores nesta universidade.”
(vide, por exemplo, Clement, 1982).

As descobertas de Clement (1982) mostram que mais de 30% dos 150 calouros de engenharia que responderam ao teste falharam ao tentar resolver o problema corretamente. A resposta errada típica registrada foi $6E = P$. Estas descobertas são consistentes com outros estudos que investigaram os modos como os estudantes resolvem este problema.

Nós sugerimos que, pelo menos para alguns estudantes, este erro não é uma manifestação de uma profunda concepção errônea sobre o conceito de variável, como não é uma concepção errônea profunda acreditar que os dois segmentos paralelos na seguinte figura tenham comprimentos diferentes.



Na figura, os círculos atuam como um quadro pictórico de referência desviante que influencia fortemente nossa percepção dos comprimentos de dois segmentos. Similarmente, como o próprio Clements destaca, no problema dos estudantes e dos professores, existe um lingüístico, isto é, a ordem das palavras chave (seis vezes mais estudantes do que professores) que pode influenciar nosso senso para uma tradução termo-a-termo, conduzindo a $6E = P$. Então, neste caso nós não acreditamos que ter sentido do símbolo necessariamente implica evitar o erro. Muitos estudantes e mesmo professores podem cair nas armadilhas lingüísticas enquanto constróem um modelo simbólico para problemas deste tipo e cometerem o “erro reverso”. O que acreditamos é que, neste caso, o sentido do símbolo poderia consistir de desenvolver o hábito saudável de releitura e verificação (isto é, por simples substituição) da razoabilidade da expressão simbólica que construímos. Estar conscientes e alertas de que podemos ser uma vítima de “ilusões simbólicas” pode não evitar uma concepção errônea, mas pode reforçar a necessidade de checar e então, superá-la.

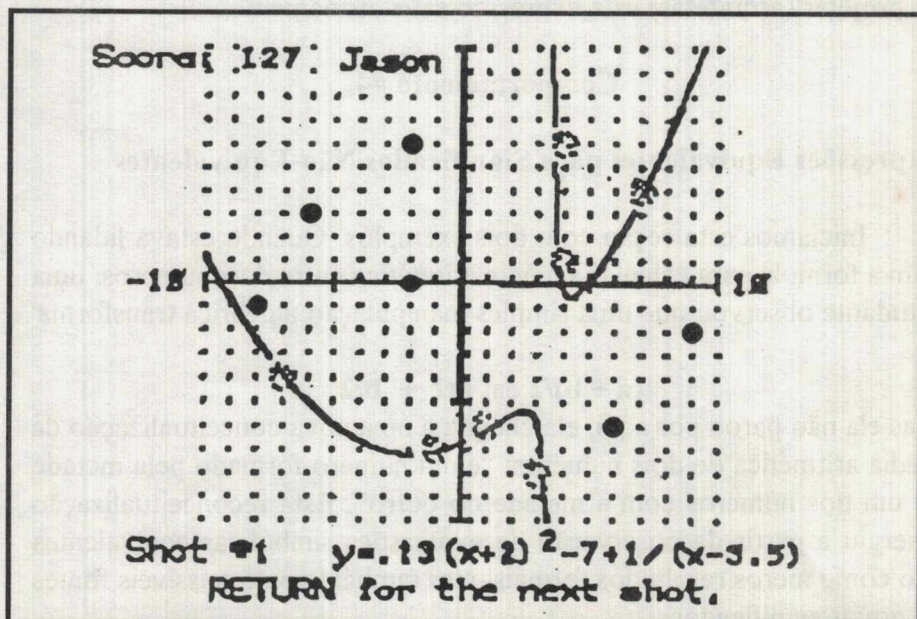
Comportamento # 3

Arquitetando Expressões Simbólicas

O jogo de computador *Green Globes* (Glóbulos Verdes) de Dugdale & Kibbey (1986) consiste de uma tela exibindo uma rede cartesiana com “glóbulos” espalhados aleatoriamente. O objetivo do jogo é fornecer uma função em sua forma algébrica cujo gráfico passará pela maior quantidade possível de glóbulos na rede. O jogador tem que imaginar o gráfico desejado, cuja correspondente forma algébrica tem que ser “projetada”, pois esta é a única maneira que o computador traçará o gráfico. Dugdale (1993) relatou um exemplo do interessante comportamento de um estudante com este jogo. De modo a aumentar a quantidade de glóbulos atingidos pelo gráfico, o estudante modificou uma função quadrática simples para a seguinte maneira:

$$y = 0,13(x + 2)^2 - 7 + \frac{1}{x - 3,5}$$

O gráfico obtido (Dugdale, 1993) mostra uma cópia da tela.



Acrescentando o termo racional $1/(x-3,5)$ à função $y = 0,13(x + 2)^2 - 7$ cujo gráfico primeiro foi encarado como uma parábola, o estudante revelou um considerável sentido do símbolo. Ele foi capaz de arquitetar uma expressão algébrica para um gráfico que ele queria que fosse uma parábola em quase todas as regiões, mas que se comportasse como uma reta vertical numa certa vizinhança desejada. Desta forma, ele adicionou um termo racional que não afeta significativamente o gráfico original (parábola) exceto quando x está próximo de 3,5, mas que na vizinhança de sua descontinuidade, o gráfico “quebra” e “salta” atingindo mais três glóbulos extras.

Encaramos este raciocínio como exibindo um nível cognitivo mais elevado de sentido do símbolo do que aquele apresentado no Comportamento #2. Naquele caso, nós sugerimos que, dados os símbolos, o sentido do símbolo deveria incluir a “leitura” dos significados a partir deles. Agora, propomos que o sentido do símbolo também inclui: primeiramente, uma apreciação de que uma expressão simbólica *ad hoc* pode ser criada para um propósito desejado, e de que podemos projetá-la (arquitetá-la); segundo, e mais especialmente, a percepção de que uma expressão, com certas características (neste caso, um termo racional) é o que é necessário; e finalmente, o sentido do símbolo deveria incluir a habilidade de projetar (arquitetar) esta expressão satisfatoriamente.

Comportamento #4

Expressões Equivalentes para Significados Não-Equivalentes

Iniciamos esta seção com dois exemplos. Quando estava lidando com a fórmula para calcular a média aritmética entre dois números, uma estudante observou que uma simples manipulação algébrica transforma

$$(a + b)/2 \text{ em } a/2 + b/2.$$

Mas ela não parou por aqui, ela chegou a uma nova conceitualização da média aritmética de dois números: “é um número formado pela metade de um dos números com a metade do outro”. Esta reconceitualização emergiu a partir da observação de expressões simbólicas equivalentes não como meros resultados formais, mas também como possíveis fontes de novos significados.

O seguinte caso é outro exemplo de um comportamento semelhante. “Tome um número ímpar, calcule seu quadrado e subtraia uma unidade. O que pode ser dito sobre os números resultantes?” O problema pode ser representado como se segue $(2n - 1)^2 - 1$. Podemos prosseguir chegando a forma equivalente $4n^2 - 4n$ de modo a chegar a alguma conclusão geral. A primeira vista, a conclusão é que o número resultante é um múltiplo de 4. Entretanto, reorganizando os símbolos, obtemos primeiramente $4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$, e se agora tentarmos ler os símbolos, poderemos perceber que o resultado é sempre múltiplo de 8 (pois como n e $n-1$ são inteiros consecutivos e um deles é par). Reorganizações posteriores dos símbolos revelam ainda mais. Se nós escrevermos $4n(n - 1)$ como $8n(n - 1)$, não apenas é mais evidente que os números resultantes

²serão múltiplos de 8, mas também que eles são múltiplos de oito muito especiais: aqueles em que o outro fator é um número triangular.

Estes dois exemplos, partilham uma “história” comum. Ambos adquiriram significados mais ricos emergentes de expressões equivalentes decorrentes de manipulações simbólicas. Nós sugerimos que a sensibilidade e a confiança nos símbolos que orientam a pesquisa de novos aspectos dos significados originais constituem outra faceta do sentido do símbolo.

Comportamento #5

A Escolha dos Símbolos

Quando traduzimos uma situação em símbolos, um dos primeiros passos é escolher o que representar e como. Esta escolha, como veremos nos seguintes exemplos, pode ter efeitos cruciais no processo de resolução e sobre seus resultados.

Primeiro, considere o último exemplo da seção anterior. Se o dado apresentado - número ímpar - fosse representado por n em vez de $2n-1$, a expressão obtida seria $n^2 - 1$. Embora a escolha de variável seja certamente legítima, as descobertas resultantes parecem ser bem menos informativas. Se então, fatorássemos $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, seríamos capazes então de ler a partir desta expressão que o número resultante é sempre o produto de dois números pares consecutivos. Um destes números é múlti-

plo de 4, assim podemos concluir que o resultado é um múltiplo de 8. Entretanto, quais múltiplos de oito são obtidos não está claro. A escolha de $2n - 1$ para representar um número ímpar, ao contrário de n , exhibe mais a escolha do símbolo construída a partir da informação dada, e então o resultado final pode exibir mais aspectos da estrutura da situação.

Outros exemplos simples de escolhas alternativas de variáveis são: escolher a representação da soma de dois números negativos como $a+b$ ou como $-a-b$ (dependendo de se nós selecionamos a e b para representar números negativos ou naturais), ou decidir representar um número racional como a ou como p/q (onde p e q são números naturais). O sentido do símbolo nos ajuda a fazer a escolha apropriada levando em consideração os objetivos do problema.

A escolha de símbolos pode não apenas obscurecer parte da situação, como no primeiro exemplo acima, mas ela pode impedir completamente a resolução. Considere o seguinte problema:

João foi ao banco para descontar um cheque num total inferior a \$100. O caixa confundiu os centavos com os reais (por exemplo se o cheque era de \$19,45, ele pagou a João \$45,19). João pegou o dinheiro e após gastar \$3,50, ele percebeu que ele tinha exatamente o dobro da quantidade escrita no cheque. De quanto era o cheque afinal de contas? (SNARK, 1977).

Se nós escolhermos representar a quantidade do cheque como x , qualquer progresso é extremamente duvidoso. Por outro lado, se nós representarmos cada um dos quatro dígitos como uma variável, as coisas se tornarão rapidamente muito complicadas. A escolha ótima parece então representar os reais por uma variável e os centavos por outra, cada variável sendo um número de dois dígitos.

Não desejamos concluir que uma escolha inadequada de variáveis no início de um processo de resolução de problemas necessariamente implica falta de sentido do símbolo, mas o que gostaríamos de esperar é a consciência de pelo menos três questões. Primeiramente, a liberdade de representar o problema como desejarmos. Mesmo quando os símbolos representam o mesmo “tipo” de número, pode haver diferentes modos de escolhê-los. Por exemplo, três inteiros consecutivos podem ser representados como $n, n+1, n+2$ ou $n-1, n, n+1$ ou como $n-2, n-1, n$. A

escolha pode muito bem simplificar os cálculos, se não o próprio resultado final. Segundo, a percepção de que a escolha inicial dos símbolos não é definitiva e que o problema pode ser **re-representado** se desejarmos ou se a escolha inicial se mostrar improdutiva. Terceiro, em alguns casos, como em nosso primeiro exemplo, nós gostaríamos de também de incluir no sentido do símbolo alguma sensibilidade premonitória para uma escolha ótima de símbolos.

Comportamento #6

Habilidades Flexíveis de Manipulações Algébricas

Mesmo naqueles contextos em que concordamos integralmente com Whitehead de que devemos esquecer o significado e sermos capazes de executar as manipulações mecanicamente, ainda deveria existir um sentido do símbolo “técnico” ou “formal” orientador no controle do trabalho. A manipulação correta dos símbolos consiste em muito mais do que uma obediência cega às regras: existem muitos aspectos em dar sentido aos símbolos, mesmo quando nós racionalmente e razoavelmente esquecemos ou ignoramos seus referentes. Por exemplo: a percepção de uma circularidade potencial na manipulação simbólica, o ponto de vista “gestalt” de algumas expressões simbólicas, e manipulações dirigidas na direção de “alvos” formais.

Circularidade

Por circularidade queremos nos referir ao processo de manipulação simbólica que resulta numa identidade óbvia ou tautológica, que é desinformativa e improdutiva. A habilidade de antecipar tal circularidade é uma manifestação de sentido do símbolo, e quando a circularidade não é antecipada, o sentido do símbolo pode prevenir a paralisia, isto é, ele poderia desencadear uma resposta natural de procura por outras abordagens. Veja, por exemplo, a citação de Wenger (1987) abaixo:

“Gestalt”

Ter um ponto de vista de “gestalt” é sentir os símbolos não apenas como uma concatenação de letras, mas ser capaz de discernir sua forma, como, por exemplo, em Wenger (1987):

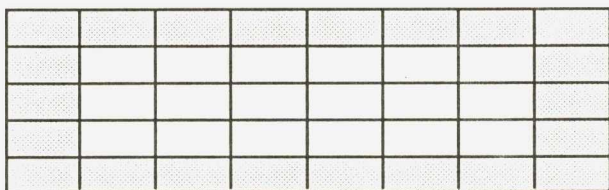
“Se você puder encontrar seu caminho no intricado dos símbolos, o seu problema está essencialmente resolvido. Por exemplo, considere a equação em v a seguir: $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$. O que você precisa perceber que ela é uma equação linear em v , da forma: $av = b + cv$. logo sua solução é da forma $v = \frac{b}{a-c}$

com $a \neq c$. A complicação das expressões representadas por a , b e c não altera a solução.. Apesar disto, os estudantes consistentemente possuem grandes dificuldades com tais problemas. Eles freqüentemente executam transformações legais nas equações, mas obtêm como resultado equações ainda mais difíceis de serem manipuladas; eles perambulam em “círculos” e após três ou quatro manipulações recriam uma equação que eles já tinham obtido (muitas vezes, a própria original)... Observe que nestes exemplos, os estudantes algumas vezes executam as manipulações corretamente...”

A primeira parte da citação acima é um exemplo do que chamamos de “gestalt”; as considerações da segunda parte estão relacionadas à circularidade. No mesmo parágrafo Wenger também afirma que os estudantes “freqüentemente parecem escolher seu próximo movimento quase aleatoriamente, em vez de com um propósito específico em mente”. Esta observação nos leva a subseção seguinte.

Alvos Formais

“Um retângulo (o termo inclui um quadrado) é desenhado sobre um papel quadriculado como mostra a figura e as suas casas das bordas perimetrais são sombreadas.



Neste caso, o número de casas sombreadas na borda não é igual ao número de casas não sombreadas em seu interior. É possível desenhar um retângulo de modo que a quantidade de casas sombreadas (na borda)

seja igual a quantidade de casas brancas (no interior)? [Problema 87 de Longley-Cook, 1965 como ele aparece em Gardner, 1983].”

A seguir descrevemos como um matemático procedeu. Ele partiu igualando $2a+2(b-2)$, o número total de casas na borda, a $ab-[2a+2(b-2)]$, o número de casas no interior. Após reduzir os termos, ele obteve a equação $ab-4a-4b-8=0$ (1). Esta expressão lhe sugeriu procurar por uma possível fatorização, a partir da qual pudesse ler facilmente todos os possíveis valores inteiros de a e de b . Sua primeira tentativa forneceu $a(b-4) - 4(b-2) = 0$, mas a fatorização não pôde ser completada. Entretanto, ele percebeu que se ele transformasse $(b-2)$ em $(b-4)$ a fatorização poderia ser completada. Ele fez isto adicionando 16 a ambos os lados da equação (1) chegando, então, a: $(b-4)(a-4) = 8$, da qual ele obteve os únicos dois retângulos que resolvem o problema, a saber: 6×8 e 5×12 .

Esta solução ilustra sentido do símbolo em dois estágios: primeiro o matemático vislumbrou um alvo simbólico e sua forma que é fácil de manipular e interpretar. Em seguida, ele objetivamente escolheu as manipulações formais necessárias para atingir alvo selecionado.

Comportamento #7

Símbolos em Retrospectiva

Numa turma de alunos no nível de graduação, observamos uma solução muito diferente para o problema do retângulo anterior. Após muitos estudantes passarem algum tempo “maltratando” os símbolos sem fazer nenhum progresso, alguém apresentou a solução que descrevemos anteriormente. Neste ponto, uma matemática que estava observando aquela turma, decidiu apresentar a sua solução que (surpreendentemente?) não fazia uso de símbolos. De acordo com o seu próprio testemunho, sua inspiração foi proveniente de sua experiência com Origami, a Arte Japonesa de Dobrar Papéis. Ela mentalmente “dobrou” uma linha da borda do retângulo sobre a linha interior imediatamente adjacente, e desta forma, o número de casas nas linhas interior e da borda coincidiam, exceto por duas casas extras na borda (vértices). Repetindo o mesmo procedimento com a outra linha da borda, acrescentam-se mais duas casas extras da borda. Então, ela dobrou as duas colunas da borda (sem as casas das quinas já dobradas) obtendo mais quatro casas extras de borda,

totalizando 8 casas (duas casas extras para cada quina). Agora, de modo que o número total de casas no interior seja o mesmo que na borda, tudo que ela precisava era “casar” estas 8 casas extras com as casas do interior. Para este objetivo, ela precisava 8 casas interiores (ainda não casadas) formassem um retângulo. E existem apenas duas possibilidades: 1×8 e 2×4 . Desdobrando o origami em cada um destes casos, ela obteve os dois retângulos originais que o problema pedia. A descrição verbal pode ser um pouco laboriosa mas se torna muito clara quando fazemos a dobradura concretamente. Esta é uma solução muito engenhosa e bonita por si mesma: completamente geral, sem qualquer símbolo, e visualmente apelativa.

Um dos estudantes da turma percebeu um aspecto interessante e surpreendente desta solução alternativa: mesmo apesar de não usar qualquer símbolo, ela está intimamente relacionada à solução algébrica previamente apresentada naquela turma (e descrita no comportamento #6). Este estudante remarcou que quando resolvemos uma equação algébrica que modela um problema, nos distanciamos dos significados dos símbolos e de seus referentes. Os passos intermediários, geralmente não são considerados tendo significado com referência a situação, eles são manipulações bastante mecânicas (e desta forma, eficientes) na direção da solução. Entretanto, neste caso, a solução simbólica e origâmica possuem um significativo ponto de contato. Na solução algébrica, o 8 parece emergir como um mero artefato da manipulação simbólica no processo de atingir o alvo formal: a equação fatorizada $(b-4)(a-4)=8$. Entretanto, a posteriori, a solução origâmica nos fornece um significado ao 8, e a toda equação.

Quando nós resolvemos um problema construindo um modelo matemático de uma situação, símbolos e significados estão geralmente conectados no início (quando o modelo é estabelecido) e no final (para interpretar os resultados em termos da situação modelada). Nos passos intermediários, nós geralmente progredimos executando derivações formais cujos significados, em termos da situação, são desconsiderados. Estamos sugerindo que os símbolos “falam mais forte” para este estudante, porque ele foi capaz de reconhecer um significado nas etapas intermediárias da resolução, onde não é nem necessário, nem usual, fazer isto. Acreditamos que este comportamentô é uma instância muito especial de sentido do símbolo.

Comportamento #8

Símbolos em contexto

Considere, por exemplo, o caso da relação linear geral $y = mx + b$. Mesmo apesar de x, y (as variáveis) e m, b (os parâmetros) *representarem* números, os tipos de objetos matemáticos que obtemos fazendo substituições nos mesmos são muito diferentes. Em termos do plano Cartesiano, escolher valores numéricos para x e y , fixa um ponto do conjunto de todos os pontos, e valores numéricos para m e b fixam uma reta do conjunto de todas as retas. Então, $y = b$ pode ser interpretado de duas maneiras diferentes, dependendo do contexto. Se é o resultado de substituir $x = 0$ em $y = mx + b$, então o que obtemos é a ordenada (ou uma família de ordenadas) correspondente àquele valor de x , isto é, o ponto onde uma reta (da forma $y = mx + b$) intercepta o eixo das ordenadas. Mas se, por outro lado, $y = b$ é obtido como resultado de substituir $m = 0$ em $y = mx + b$, o que obtemos é a família de retas de inclinação zero.⁴

Nesta seção, nós queremos sugerir que um componente desejável do sentido do símbolo consiste do reconhecimento “*in-situ*” e operativo dos diferentes (mesmo que similares) papéis que os símbolos podem desempenhar na álgebra de segundo e terceiro graus. Este reconhecimento traz em suas entranhas a capacidade de selecionar dentro das multiplicidades de significados que os símbolos podem ter dependendo do contexto, e a habilidade de manipular objetos matemáticos diferentes e processos envolvidos (Sfard, 1992; Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi, 1993).

Apresentamos a seguir dois exemplos com estudantes do primeiro ano secundário que solicitaram ajuda com seu trabalho de casa. Em ambos os casos os estudantes estavam confundidos pelos significados contextuais dos símbolos. No primeiro caso, a estudante foi capaz de resolver suas dificuldades, valendo-se de seu senso comum aplicado aos símbolos. No segundo caso, a situação foi menos afortunada.

⁴O uso cuidadoso da notação de conjuntos exigiria para o primeiro caso $\{(x, y)/x=0, y=b\}$ enquanto para o segundo caso seria $\{(x, y) / y=b\}$.

No primeiro caso, o problema era: “Encontre as coordenadas do centro do círculo que passa pelos pontos (a,b) , $(-a,b)$ e $(0,0)$ ”. Podemos argumentar que neste problema o primeiro passo sensível seria “ver” os três pontos por detrás destes símbolos, sua localização, sua simetria, etc e então, iríamos abandonar temporariamente os símbolos em favor de uma abordagem gráfica que ajudará a encontrar parte da solução: o centro do círculo tem que estar sobre o eixo dos y . Nossa estudante não procedeu graficamente, ela permaneceu com os símbolos. Ela inicialmente teve alguma dificuldade em escrever as equações relevantes porque ela estava acostumada ao uso padrão de letras a e b usado na equação geral do círculo na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, com a qual ela estava familiarizada (a e b seriam as coordenadas do centro, enquanto que neste caso, elas são as coordenadas de pontos sobre o círculo). Entretanto, ela superou esta dificuldade e escreveu as três equações seguintes, com (m, n) sendo as coordenadas para o centro que ela estava procurando:

$$\begin{aligned}(a - m)^2 + (b - n)^2 &= r^2 \\ (-a - m)^2 + (b - n)^2 &= r^2 \\ m^2 + n^2 &= r^2\end{aligned}$$

Então, ela igualou a primeira e a segunda equação, cancelou os termos e obteve $am = 0$. Ela sabia que esta equação implicava que ou $m = 0$ ou $a = 0$, mas ela não sabia qual destes resultados era o que ela estava procurando. O esforço devotado à manipulação algébrica parece ter feito ela esquecer o significado dos símbolos ou talvez qual era o propósito de resolver a equação. De modo a resolver o impasse, ela decidiu checar as implicações de ambas as possibilidades. Após um momento, ela percebeu que se $a = 0$ não haveria círculo algum (os três pontos estariam sobre uma mesma reta: o eixo dos y) e então, ela também se lembrou que a tinha sido dado no problema como um ponto geral, e portanto ela não estava em posição de determinar seu valor. Então, ela concluiu corretamente que $m = 0$ seria o resultado procurado, e que isto significava que o centro do círculo estava em algum lugar sobre o eixo dos y .

Esta história parece sugerir que o sentido do símbolo não implica necessariamente um reconhecimento imediato dos papéis dos símbolos: em algumas situações este reconhecimento pode ser bastante difícil para os estudantes. Mas o sentido do símbolo pode se manifestar na

engenhosidade e senso comum que podem ajudar os estudantes a reconhecer erros e começar a esclarecer as confusões. Como no caso da ilustração simbólica (descrita no comportamento #2), o sentido do símbolo deve incluir também a engenhosidade para conseguir sair das confusões através da seleção de instrumentos que se tenha disponíveis para readquirir o significado simbólico.

A seguinte história é um exemplo de uma instância menos afortunada em que um estudante não foi capaz de dar algum sentido aos diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar. O problema retirado de seu livro didático (Resnick, 1991) era: “Nas seguintes expressões, encontre, se possível, um número que quando substituído em d , faça com que obtenha uma função linear”.

Doze expressões se seguem a este enunciado geral, e o último era o seguinte:

$$y = \frac{(x^2 - 4)}{(d - 2)}$$

Desde que se tenha uma clara distinção entre os diferentes papéis dos símbolos, o problema é resolvido diretamente: não importa que valores substituamos em d (e certamente não 2), esta expressão nunca se tornará uma função linear. Ficamos surpresos com o que este estudante fez. Exibindo uma visão de “gestalt” (como descrito no comportamento #6), ele decompôs $x^2 - 4$ em $(x + 2)(x - 2)$, porque ele percebeu que $x - 2$ e $d - 2$ podiam ser cancelados fazendo $x = d$ (com $d \neq 2$) para obter uma função linear, $y = x + 2$. Neste caso, seu sentido do símbolo técnico (em outras situações saudável) que lhe permitiu vislumbrar o cancelamento, interferiu com a distinção entre os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar. Ele não duvidou da legitimidade de sua ação, nem obteve um feedback imediato do próprio problema para alertá-lo que alguma coisa estava errada, muito ao contrário, ele parecia satisfeito em ter alcançado o objetivo que o problema solicitava. Então, ele não questionou o significado (ou ausência de significado) de sua ação. Nossa reação naquele momento também não foi muito afortunada e não conseguimos chamar sua atenção para o que ele tinha feito. Pode ser que as sutilezas envolvidas na passagem *ilegal* $d = x$ estavam além da capacidade que ele tinha naquele momento.

O Que é Sentido do símbolo?

Uma Segunda Rodada

Inspecionar os aspectos comum entre os comportamentos anteriores, pode ser que nos leve a uma posição melhor para tentar caracterizar sentido do símbolo. Em geral, diríamos que o sentido do símbolo é uma “sensibilidade” complexa e multifacetada para com os símbolos. Parafraseando uma das definições fornecidas pelo Dicionário Inglês da Enciclopédia de Oxford para a palavra “senso”, o sentido do símbolo seria uma apreciação rápida e acurada, compreensão ou instinto em relação aos símbolos.

Acompanhando as histórias anteriores, o sentido do símbolo incluiria:

- Uma compreensão e uma sensibilidade estética do poder dos símbolos: como e quando os símbolos podem e devem ser usados de modo a exibirem relações, generalizações e provas que, de outro modo, estariam escondidas e invisíveis.
- Uma sensibilidade para quando abandonar os símbolos em favor de outras abordagens de modo a fazer progressos num problema, ou de modo a encontrar uma solução ou representação mais fácil e mais elegante.
- Uma habilidade de manipulação e de leitura das expressões simbólicas como dois aspectos complementares na resolução de problemas algébricos. De um lado, a desvinculação do significado necessária à manipulações acoplada com uma visão de “gestalt” das expressões simbólicas torna o manuseio dos símbolos relativamente rápido e eficiente. Por outro lado, a leitura das expressões simbólicas buscando seus significados pode acrescentar níveis de conexões e de razoabilidade aos resultados.
- A consciência de que podemos satisfatoriamente construir relações simbólicas que expressem determinadas informações verbais ou gráficas necessárias ao progresso da resolução do problema, e a habilidade de “construir” tais expressões.
- A habilidade de selecionar uma representação simbólica possível para um problema, e, se necessário, de ter a coragem, primeiro, de reconhecer e assumir nossa insatisfação com aquela escolha, e segundo, estar aberto à procura de uma representação melhor para substituí-la.

A percepção da necessidade constante de verificar os significados simbólicos enquanto resolvemos um problema, e de comparar e confrontar estes significados com nossas próprias intuições ou com os resultados esperados para aquele problema.

Sensibilidade para os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar em diferentes contextos.

Neste ponto, gostaríamos de discorrer sobre duas importantes limitações da caracterização acima de sentido do símbolo: primeiramente, o “catálogo” acima está longe de ser exaustivo, e segundo, existe muito mais acerca de sentido do símbolo do que um catálogo independentemente do quanto completo ele possa estar.

Sobre a incompletude do catálogo

Coletamos exemplos em nossa própria experiência de observarmos informalmente estudantes e professores fazendo álgebra, e acreditamos que a coleção possa ser útil como um primeiro passo no sentido de descrever o sentido do símbolo. Nós (professores, educadores matemáticos, e pesquisadores) podemos usá-la não apenas como está, mas principalmente como um modo de despertar nossa consciência sobre comportamentos semelhantes relacionados aos vários aspectos do sentido do símbolo. Então, ele pode servir como um trampolim prancheta para futuras observações. Reafirmamos que o trabalho no sentido de uma “definição” satisfatória do sentido do símbolo pode interligar idéias filosóficas e teóricas com observações empíricas detalhadas de comportamentos mais ou menos tarimbados. Não há nenhuma dúvida de que a observação cuidadosa dos comportamentos de resolução de problemas irá melhorar e ampliar nossas descrições.

Um catálogo por si mesmo não é suficiente

Não desejamos dar a impressão de que definir sentido do símbolo seja simplesmente uma questão de ampliar um catálogo. Apesar de ser muito tentador ter uma lista compreensiva de verificação para avaliar a ausência ou presença de sentido do símbolo, isto seria demasiado simplista. Sentido do símbolo envolve complexidades e sutilezas das quais podemos não estar totalmente conscientes. Nós sugerimos, como um ponto de partida, apontar algumas destas complexidades.

Por exemplo:

- Aspectos diferentes de sentido do símbolo podem interagir entre si de muitas maneiras, não necessariamente positivamente. Por exemplo, uma visão global (e portanto saudável) dos símbolos em $y = \frac{x^2 - 4}{d-2}$ fez com que um estudante simplificasse e concluísse que a linearidade desta função ocorre quando $x = d$.

- Existem ocasiões em que os estudantes que não parecem agir conforme os comportamentos “esperados” ou “corretos”, são de fato capazes de superar suas dificuldades com os símbolos e podem fazer isto através da re-seleção de quaisquer instrumentos que lhes estejam disponíveis. Deste modo, o estudante que poderíamos considerar que não apresentasse sentido do símbolo ao lidar com os símbolos para encontrar as coordenadas do centro de um círculo que passa pelos pontos $(0, 0)$, (a, b) e $(-a, b)$ (em vez de usar considerações gráficas), pode, de fato, mostrar considerável sentido do símbolo ao lidar, a sua maneira, com $ma = 0$.

- Um catálogo para o sentido do símbolo é inevitavelmente incompleto porque os estudantes terão pouca sensibilidade para uma representação (em nosso caso - símbolos) isoladamente, se eles não forem capazes de flexivelmente traduzir os significados daqueles símbolos sobre outras representações. E vice-versa, ir e voltar entre diferentes representações resultará na melhor compreensão de cada representação em particular. O sentido do símbolo irá se desenvolver e mudar através da alimentação e interação com outros sentidos, como senso numérico, pensamento visual, senso funcional e senso gráfico.

Estas e outras facetas potenciais do sentido do símbolo precisam ser levadas em consideração além de uma simples ampliação de uma lista.

Considerando a natureza interna do sentido do símbolo como uma sensibilidade, pode ser ilustrativo fazer uma analogia com o significado “fisiológico” da palavra sentido, como está indicado no Dicionário Inglês Enciclopédico Oxford: “qualquer uma das faculdades corporais especiais pelas quais a sensação é erigida”. Podemos fazer uma adaptação

disto para o sentido do símbolo como: “qualquer uma das faculdades matemáticas especiais por meio das quais o significado é erigido”. Seria um objetivo desejável para a educação matemática nutrir o sentido do símbolo para se tornar uma parte indivisível de nosso kit de instrumentos matemáticos, de modo semelhante ao modo como nossos sentidos fisiológicos são parte integral de nosso ser biológico. A analogia sugere que o sentido do símbolo deve tornar-se parte de nós mesmos, pronto para ser colocado em ação quase ao nível do reflexo. Mas também, do mesmo modo que quando nossos sentidos falham, tendemos a desenvolver substitutos, nosso sentido do símbolo tenderia a desenvolver modos de superar os “fracassos” (por exemplo, a consciência de superar por quaisquer meios as situações envolvendo “ilusões simbólicas”).

Finalmente, sugerimos colocar a questão: “O que é sentido do símbolo?” no amplo contexto do pensamento e aprendizagem da matemática. O sentido do símbolo é o componente algébrico de um tema mais amplo: construção de senso matemático. A construção de significado na, e com a, matemática parece ser o objetivo mais amplo para a maior parte, senão a totalidade, da educação matemática, como está refletido no espírito das diretrizes do NCTM. Isto implica a significação de todas as atividades em que nos engajamos, o poder que nos fornece compreender e manipular as situações, e a utilidade dos instrumentos matemáticos para fazer progressos na matemática e além dela.

Implicações Educativas

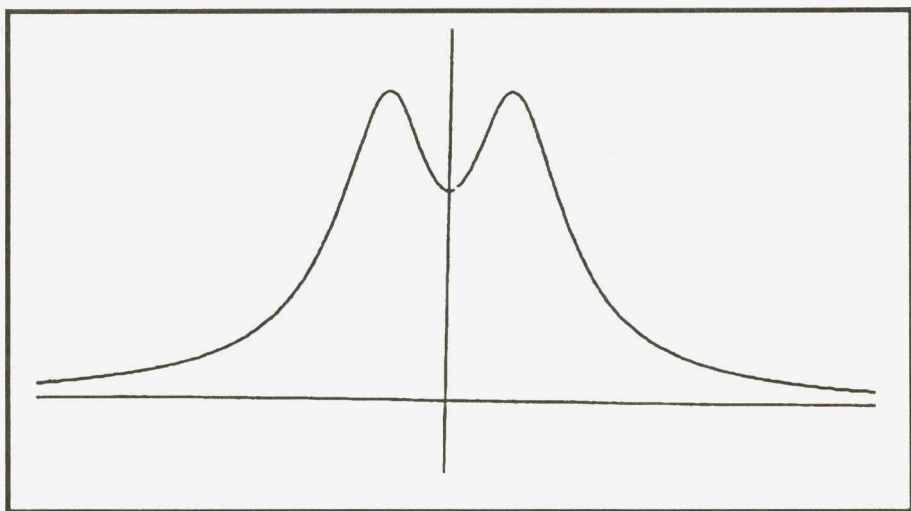
Pode ser presunçoso descrever ou prescrever implicações instrucionais emplumadas de uma idéia ainda não totalmente desenvolvida tal como o sentido do símbolo. Entretanto, pode-se argumentar que mesmo se uma caracterização mais satisfatória do sentido do símbolo for formulada, ainda precisaremos de algumas respostas a muitas questões abertas de modo a discutir suas implicações instrucionais. Algumas das questões abertas não são triviais de todo: Como as pessoas adquirem sentido do símbolo? Qual o conhecimento subjacente necessário? Qual o papel das manipulações técnicas dos símbolos? O exercício de repetição e prática precedem, são concomitantes, ou impedem o desenvolvimento do sentido do símbolo? O sentido do símbolo é uma postura de especialistas ou pode ser esperada de novatos também, e em que medida? E assim por diante.

Apesar e a despeito dos elementos desconhecidos, acreditamos que estamos num ponto em que as discussões sobre as implicações instrucionais podem e devem ser iniciadas. A seguir, sugerimos algumas implicações que podem ser derivadas a partir de nossas descrições.

(1) Começamos supondo que o sentido do símbolo está no âmago do que significa ser competente em álgebra e o ensino da álgebra deve ser gerido em sua direção. Enquanto pode ser fácil compreender e aceitar (mesmo se freqüentemente esquecido) que ser competente em aritmética inclui muito mais do que executar os algoritmos computacionais rapidamente, quando chegamos à álgebra é mais comum encontrarmos a crença de que saber as regras de manipulação formais seja um objetivo central na álgebra. Portanto, sugerimos que uma primeira implicação (provavelmente óbvia, mas mesmo assim crucial) para o ensino, é que as manipulações simbólicas devem ser ensinadas em contextos ricos que forneçam oportunidades de aprendizagem de quando e como usar estas manipulações.

(2) Dando prosseguimento, nos referimos aos modos pelos quais podemos atrelar a tecnologia a serviço do desenvolvimento de tarefas e problemas que, nas mãos de um professor habilidoso, tenham o potencial para promover o sentido do símbolo. Estas tarefas devem basear-se sobre o poder computacional que libera os recursos mentais para desenvolver e enriquecer significados e conexões. Considere, por exemplo, o seguinte problema, que normalmente não é encontrado nos livros didáticos.

“Ajudado por uma calculadora gráfica ou um instrumento gráfico, encontre a expressão algébrica para a função do seguinte gráfico”⁵



⁵ Outra versão deste problema inclui números específicos sobre os eixos.

Esta tarefa não é fácil, e muitos estudantes (e professores) se rebelam contra a mesma porque não existe nenhuma rotina prontamente disponível com a qual iniciar sua resolução. Ao tentarem construir uma expressão simbólica para a função, muitas questões são levantadas. A função pode ser um polinômio? Por que não? É uma função racional? Se for, qual a potência do denominador e do numerador? Dado que a função está definida sobre todo o domínio real, o que isto significa em termos de seu denominador? Em que a simetria do gráfico afeta a escolha das funções? Uma vez que a forma geral da curva seja deslumbrada, que parâmetros devem ser modificados de modo a encaixá-la mais precisamente no gráfico? E assim por diante.

Em nossa experiência, este projeto mantém professores experientes ocupados por cerca de uma hora e meia, durante a qual as tecnologias gráficas são usadas para verificar as expressões conjecturadas e então, para serem ajustadas. Diferentes tipos de conhecimento, incluindo conhecimento informal, estão envolvidos de modos surpreendentes. Convidamos os leitores a trabalharem um pouco sobre este problema e para observarem quantas facetas de seu próprio sentido do símbolo ele estimula. Sugerimos que mais tarefas desta natureza devam ser desenvolvidas e exploradas.

(3) Não desejamos que o exposto anteriormente implique que o que precisamos fazer seja dispensar o currículo tradicional completamente para nos concentrarmos sobre a criação de novas tarefas ou problemas que façam uso de tecnologias. Em vez disto, acreditamos que, apesar de serem necessários novas tarefas e novos problemas, eles em si mesmos não incorporarão o sentido do símbolo. Não importa o quão interessante ou inovadora uma tarefa possa parecer, será a atividade em que o estudante é levado a se engajar que determinará se ela suporta a construção do sentido do símbolo. E vice-versa, uma tarefa aparentemente tradicional ou mesmo maçante pode ser uma fonte potencial de discussões repletas de insights. Por exemplo, considere um dos problemas mencionados anteriormente que certamente é bem tradicional: “Encontre as coordenadas do centro da circunferência que passa pelos pontos (a, b) , $(-a, b)$ e $(0, 0)$ ”. Entretanto, ao invés de deixar os estudantes saltarem imediatamente sobre as equações e manipulá-las, um professor pode dirigir a atividade no sentido de coletivamente fazer algumas atividades de construção

de significado, por exemplo, desenhando um esboço cartesiano. Tal atividade pode promover discussões durante as quais os estudantes possam revelar aspectos implícitos do problema que não serão aparentes se tudo que eles fizerem for manipular as equações para obter uma solução. Por exemplo, durante a discussão, eles podem descobrir que:

- Devido a simetria, parece que o centro deve estar em algum lugar sobre o eixo das ordenadas, especificando melhor que a abscissa do centro é zero. (Esta hipótese pode ser confirmada com base em algum conhecimento geométrico relacionado a bissetores perpendiculares, se a turma possuir este conhecimento).
- As coordenadas do centro dependem tanto de **a** quanto de **b**. Os estudantes podem ser convidados a brincar com diferentes valores para adquirir uma intuição sobre a natureza desta dependência. Pode ser notado, por exemplo, que enquanto o sinal de **a** é irrelevante, o sinal de **b** irá determinar o sinal da ordenada do centro. Além disso, tentativas de desenhar o círculo indicam que para pequenos valores absolutos de **b**, o valor absoluto da ordenada do centro (e o raio) serão maiores, e vice-versa. (A dependência é do tipo inversa).

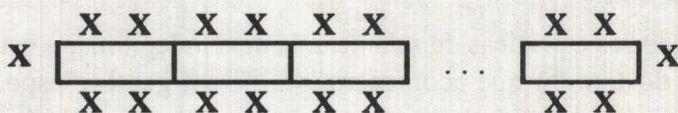
Estas descobertas de construção do sentido do símbolo informais são muito informativas da natureza da resposta do problema. Tendo este conhecimento informal como âncora, o resultado da manipulação algébrica, neste caso: $y_c = \frac{(a^2 + b^2)}{2b}$ torna-se mais significativo, e os estudan

tes terão *a priori* um certo senso sobre sua razoabilidade, contra o qual ele poderá ser confrontado e verificado. Então, uma tarefa, que poderia ter sido principalmente técnica pode tornar-se um ambiente no qual aspectos do sentido do símbolo sejam desenvolvidos, devido ao tipo de atividade em que o estudante foi envolvido.

(4) O simbolismo algébrico poderia ser introduzido desde o início em situações onde os estudantes possam apreciar quão poderosos os símbolos podem ser em expressar generalizações e justificativas de fenômenos aritméticos (Friedlander et al., 1989; Hershkowitz e Arcavi, 1990). Ao

exporem a estrutura, os símbolos algébricos não são introduzidos como entidades formais e sem significados com as quais jogar, mas como modos poderosos de resolver e compreender problemas, e de nos comunicarmos sobre os mesmos. O seguinte problema (adaptado de Gamoran, 1990), é um exemplo de toda uma classe de situações, que podem ser apresentadas bem inicialmente nas aulas de álgebra.

“No seguinte arranjo de n mesas, x indica uma cadeira para uma única pessoa e “...” indica um número variável de mesas.



Quantas pessoas podem se sentar neste arranjo?”

Uma possível maneira de resolver este problema é observá-lo como um problema de perímetro, então o número de assentos seria $2(2n) + 2 \times 1$, precisamente $4n + 2$. Outra maneira poderia ser contar o número de assentos nas mesas em que apenas 4 pessoas podem se sentar ($n - 2$) e então acrescentar os 10 assentos adicionais para os dois extremos, gerando $4(n - 2) + 10$.

Poderíamos colocar a questão inversa, precisamente, qual seria a maneira com que foram contados os assentos, se a expressão resultante fosse $5n - (n - 2)$? Então, além de expressar o modelo simbólico para o problema, nós podemos capitalizar sobre as diferentes soluções e caminhar na direção contrária, partindo da expressão simbólica para a reconstrução (usando a expressão não reduzida) do modo pelo qual contagem foi efetuada. Este tipo de atividade pode ser muito reveladora sobre a objetividade das manipulações e sobre a invariância da expressão final, independentemente do modo que executemos a contagem. Em suma, em tarefas desta natureza, as manipulações estão a serviço da estrutura e dos significados.

(5) Um hábito que os professores podem estabelecer é a análise “post-mortem” das soluções do problema que pode ser útil no monitoramento

da utilização dos automatismos. Em tais discussões é comum encontrarmos abordagens alternativas (e não únicas) para resolver problemas. A inspeção cuidadosa destas alternativas geralmente são úteis ao estabelecermos conexões entre a abordagem simbólica e as outras abordagens. Foi durante uma destas discussões que um estudante, após ter visto a solução simbólica e a origâmica para o problema das casas da borda do retângulo, atribuiu significado a cada passo formal na manipulação algébrica de modo a conectar as duas resoluções diferentes. Nós sugerimos que uma implicação instrucional para fomentar o desenvolvimento do sentido do símbolo seria fornecer oportunidades de estabelecer estas conexões ou de ver outras pessoas as estabelecendo.

(6) Os diálogos e práticas de sala de aula devem legitimar e estimular as questões do tipo “o que aconteceria se...” em geral, e especialmente relativas ao papel dos símbolos e seus papéis. Por exemplo: “ $y = mx + b$ é a expressão geral de uma função linear. Você pode dar algum significado à substituição de x e y , para obter,, digamos, $2 = m3 + b$?” Questões deste tipo, se permitidas e freqüentemente levantadas, podem auxiliar os estudantes a considerar os símbolos como entidades que podem ser o objeto de sua permanente re-inspeção, e não apenas entidades governadas por regras arbitrariamente impostas de cima para baixo.

Finalmente, ao invés de continuar ampliando uma coleção *prêt à porter* de implicações instrucionais, gostaríamos de concluir com um convite: se criarmos e trabalharmos sobre problemas do tipo descrito acima (tanto em salas de aula quanto na formação de professores) promovendo práticas apropriadas de pensamento e de discussão, iremos aguçar nosso sentido do que seja sentido do símbolo e o que ele deve constituir. Mais ainda, seremos capazes de coletar mais conclusões para o ensino que decorram das observações de nossos próprios ambientes educacionais.

Epílogo

“Uma vez lidei com um homem que fazia seu escritório em seu apartamento. Ele tinha uma grande clientela. Ele vivia no quarto andar de um prédio de apartamentos, e o acesso ao seu aparta-

mento era feito por uma porta nos fundos no andar térreo adjacente a uma área de estacionamento. Esta porta normalmente estava fechada. Ora, a maneira de subir ao seu apartamento era a seguinte. Após telefonar-lhe pouco antes do encontro, você estacionava seu carro no estacionamento e tocava a buzina. O homem iria, então, chegar até a sua janela dos fundos e desceria uma chave até o térreo numa longa corda. Você abriria a porta com a chave, subiria até seu apartamento e lhe devolveria a chave. Este procedimento me parecia altamente excêntrico e misterioso. Um dia, lhe pedi que me explicasse o que estava acontecendo.

“Por que você simplesmente não instala um interfone elétrico de modo que você possa apertar um botão em seu apartamento e então a porta se abriria?”

“Mas já existe um interfone elétrico na portaria”, ele afirmou.

“Santo Deus! por que você não o utiliza?”

“Eu lhe conto. A cerca de dez anos atrás, minha esposa e eu nos divorciamos. Isto foi uma situação desagradável, e por meses e meses após o divórcio, ela me cercava provocando problemas. Um dia eu simplesmente decidi que quando alguém tocasse o interfone, eu simplesmente o ignoraria. Mas, é claro, eu tinha que achar um modo de meus clientes me visitarem. Assim, chegamos a este arranjo; não é realmente nada misterioso”.

“Mas ela ainda o cerca e lhe provoca problemas?”

“Não. Ela morreu há cinco anos!”

* * *

“Formalismo, no sentido em que eu ainda uso o termo, é a condição onde a ação se separou do significado integrador e tomou lugar insensatamente ao longo de alguma direção pré-estabelecida!”

* * *

“Ao longo dos tempos, os matemáticos tem lutado para restaurar o pensamento e o significado ao ensino da matemática, para fornecer alternativas para o modo formal e ritualístico de aprendizagem na maioria das salas de aula, mas a despeito das novas teorias, novas aplicações, novos cursos, novos instrumentos, a batalha nunca é vencida. A guerra contra a ação formal, impensada é perpétua”.

* * *

“Eu não quero dizer que o formalismo seja uma substância material que reside na atmosfera e que pode nos infectar, ... Eu uso o termo formalismo apenas de modo a chamar a atenção para uma tendência natural da forma e da função saírem do equilíbrio ou serem separadas. Não podemos prevenir sua separação e provavelmente não tentaríamos fazer isto, mas devemos estar conscientes deste processo, de modo que possamos instituir contramedidas quando isto sair fora de controle.”

(todas as citações deste epílogo foram extraídas de Davis e Hersh, 1986)

Agradecimentos: Eu estou grato a Maxim Bruckheimer e David Wheeler por sua leitura rigorosa dos primeiros manuscritos deste artigo e por seus comentários que me ajudaram a melhorá-lo significativamente. Eu também agradeço a Ruhama Even, Barbara Fresko, Alex Friedlander, Nurit Hadas, Rina Hershkowitz, James Kaput, Anna Sfard, e Michal Yerushalmy por seus comentários realmente úteis.

Referências Bibliográficas

- BORGES, J.L., 1989. “Funes el Memorioso”. In Borges, J.L., Ficciones. Decimosexta reimpresión. Alianza Editorial, madrid, pp. 121-132.
- CLEMENT, J., 1982. “Álgebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception”. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 13(1), pp. 16-30.
- DAVIS, P.J. and R. Hersh, 1986. Descartes’ Dream - The World According to Mathematics. Harcourt Brace jovanovich, Publishers, San Diego, Boston, New York, pp. 283, 287, 289.
- DUGDALE, S. and D. Kibbey, 1986. Green Globbs and Graphing Equations [A computer based instructional package]. Sunburst Communications, Pleasantville, NY.
- DUGDALE, S., 1993. “Functions and Graphs - Perspectives on Student Thinking”. In Romberg, T.A., E. Fennema and T.P. Carpenter (Eds.) Integrating Research on the Graphical Representation of Functions. L. Erlbaum Associates, Inc.

- FEY, J., 1990. "Quantity". In Steen, L.A. (Ed). *On the Shoulders of Giants. new Approaches to Numeracy*. National Academy Press. Washington, D.C., pp. 61-94.
- FISCHBEIN, E. and I. KEDEM, 1982. "Proof and certitude in the development of mathematical thinking". In Vermandel, A. (Ed.). *proceedings of the 6th International Conference on the Psychology of Mathematics (PME 6)*. Antwerp, pp. 128-131.
- FREUDENTHAL, H., 1983. *The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel, p. 469.
- FRIEDLANDER, A. and N. Hadas, 1988. "Teaching Absolute value Spirally". In Coxford A.F. and A.P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra, K-12*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA., pp. 212-220.
- FRIEDLANDER, A., R. HERSHKOWITZ and A., ARCAVI, 1989. "Incipient algebraic thinking in pre-algebra students". *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics (PME 13)*. Paris, France, Vol. 1 pp. 283-290.
- HERSHKOWITZ, R., and A. ARCAVI, 1990. "The interplay between student behaviors and the mathematical structure of problem situations - issues and examples". *Proceedings of the 14th Conference on the Psychology of Mathematics (PME 14)*, México, Vol. II, 193-200.
- GAMORAN, M., 1990. "Strategies and Representations: How to Serve Dinner for a Thousand". Unpublished manuscript available from the author at EMST, School of Education, university of California at Berkeley, CA 94720, USA.
- GARDNER, M. 1983. *Wheels. Life and Other Mathematical Amusements*. W.H. Freeman and Company. NY.
- LONGLEY-COOK, L.H. *Fun with Brain Puzzlers*. Fawcett, 1965. (As quoted in Gardner, M., 1983. *Wheels. Life and other Mathematical Amusements*. Freeman and Co., pp. 10-18.)
- MOSCHOKOVICH, J., A.H. SCHOENFELD, and A. ARCAVI, 1993. "Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them". in Romberg, T.A., E. Fennema and T.P. Carpenter (Eds.). *Integrating Research on the Graphical Representations of Functions*. I. Erlbaum Associates, Inc. hillsdale, NJ, pp. 69-100.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), 1989. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston, VA. pp. 36-37.
- RESNICK, Z., 1991. *Functions (Hebrew Textbook from The Mathematical Chapters*

- Series for 9th grades). The Departamente of Science Teaching. The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, p. 151.
- SCHOENFELD, A.H., 1985. mathematical Problem Solving. Academic Prees. Inc., p. 27.
- SFARD, A., 1992. Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification - The Case of Function". In Harel, G. and E. Dubinsky (Eds.). The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (MAA Notes, Vol. 25), Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 261-289.
- SNARK, 1977. Revista de Juegos y Entretenimientos. Ano II. Número 7, Homo Ludens SRL, Buenos Aires, Argentina, p. 5.
- SOWDER, J., 1992. "Estimation and Number Sense". In Grouws. D.A. (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Company, New York, pp. 371-389.
- SOWDER, J., 1989. Estabilishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference. Center for Research in mathematics and Science Education. College of Sciences, San Diego State University.
- WENGER, R.H., 1987. "Cognitive Science and Algebra Learning". In Schoenfeld, A.H. (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education. L. Érlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ, pp. 217-251.
- WHITEHEAD, A.N., 1911. An Introduction to Mathematics. Williams & Norgate, London, p. 59-60.

UMA REPRESENTAÇÃO PARALELA DAS FUNÇÕES LINEARES: O MICROMUNDO P.A.R.

Abraham Arcavi e Rafi Nachmias

Sumário

Neste artigo descrevemos uma forma não convencional de representar funções graficamente: os Eixos Paralelos de Representação (P.A.R.). O P.A.R. consiste de dois eixos paralelos verticais, o eixo da esquerda representa o domínio e o da direita o contra-domínio. O gráfico fica representado através de um feixe de segmentos que ligam números do domínio a números no contra-domínio. Descrevemos também um micromundo criado para apoiar a exploração de funções lineares. Este ambiente libera o estudante de tediosas calculeiras e desenhos e permite que eles se concentrem em tópicos matemáticos de nível superior. Esses tópicos são discutidos e o potencial didático do P.A.R. é ilustrado.

Introdução

A competência de pensar matematicamente, em geral, envolve a habilidade de poder pensar em termos de diferentes sistemas de representação (Dickson 1985). O computador é um instrumento inovador capaz de favorecer a habilidade de interrelacionar múltiplas representações (Pea 1987) e na última década vários softwares foram desenvolvidos com esta finalidade para o ensino de Matemática (Dugdale, 1982; Schoenfeld, no prelo) e de ciências (Mintz, Nachmias e Chen, 1986).

Neste artigo, apresentaremos o micromundo elaborado para a exploração das múltiplas representações de um conceito central em Matemática e Ciências— o conceito de função. A representação simbólica e gráfica foi introduzida enquanto os alunos aprendiam o conceito de função. Cada uma dessas representações traz embutida um aspecto diferente deste conceito. Para o conceito de função a representação gráfica predominante é a cartesiana. Nossa proposta é de se considerar a introdução de uma nova representação gráfica, via microcomputador,— A Representação de Eixos Paralelos (Parallel Axes Representation — P.A.R.). (Parker, 1969; Woodrow, 1970; Brieske, 1973; Friedlander, Rosen e Bruckenheim, 1982)

Neste artigo descreveremos o P.A.R. para funções lineares, introduziremos então o micromundo desenvolvido para facilitar sua exploração e finalmente, ilustraremos o potencial pedagógico de sua utilização.

Eixos Paralelos de Representação — P.A.R.

O P.A.R. consiste de dois eixos verticais (retas numeradas). O eixo da esquerda é usado para representar o domínio e o da direita o contra-domínio. O par ordenado $(x, f(x))$ é representado pelo segmento que une a abscissa x à sua imagem $f(x)$, este segmento é chamado de *linha de ligação*. Uma linha de ligação é no P.A.R. o que é um ponto no plano cartesiano, isto é, ambos representam a informação sobre o par abscissa—ordenada. Logo, uma função que é representada no plano cartesiano por um conjunto de pontos (em geral, uma curva), toma a forma de um feixe de linhas de ligação no P.A.R..

A figura 1 mostra a representação da função $f(x) = 2x - 1$, no P.A.R. Elegendo-se uma linha de ligação e seguindo sua trajetória podemos ler do gráfico, por exemplo, que a imagem do 0 é -1, a imagem de 3 é 5, etc...

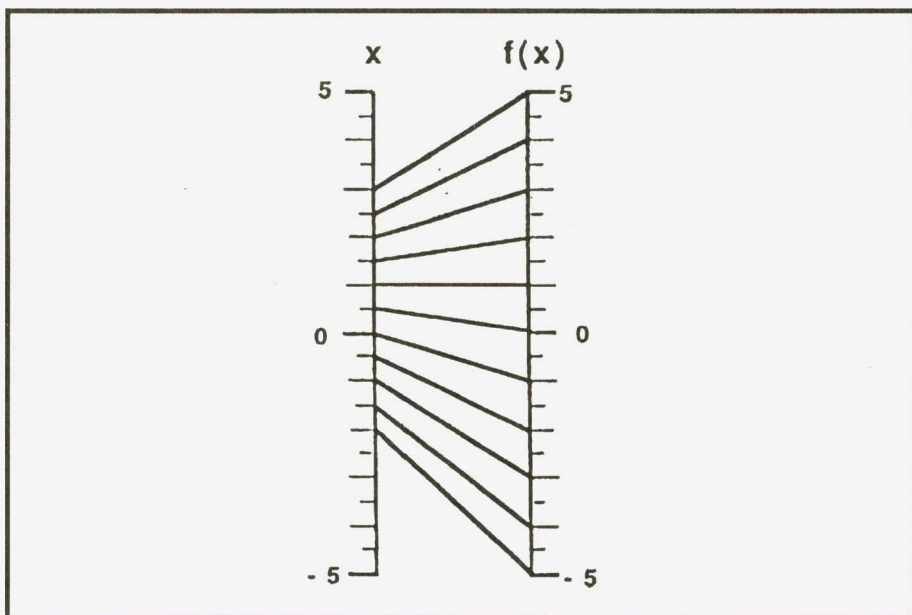


Figura 1. Gráfico P.A.R. de $f(x) = 2x - 1$

Vejamos agora vários aspectos das funções lineares no P.A.R.

Inclinação ou Coeficiente Angular

Na representação cartesiana, o parâmetro m da função linear $f(x) = mx + b$, geralmente chamado de inclinação ou coeficiente angular, pode ser obtido calculando-se a razão entre “o que está na vertical e o que está na horizontal”. Isto é $[f(x_2) - f(x_1)] / (x_2 - x_1)$ onde os pares ordenados $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ são representados como as coordenadas de quaisquer dois pontos sobre a reta. Visualmente, o coeficiente angular pode ser observado pela inclinação da reta em relação ao eixo x .

No P.A.R. o efeito visual do coeficiente linear pode ser observado pela “expansão” ou “contração” das linhas de ligação chegando no contra-domínio. Por exemplo, no gráfico de $f(x) = 2x - 1$ (Figura 1), a imagem de qualquer intervalo do domínio tem o dobro do comprimento original. Quando $m = 1/3$ a imagem de qualquer intervalo do domínio tem $1/3$ do comprimento original (Veja Figura 2).

Observe que o gráfico de $f(x) = -x$ (Figura 3) é um exemplo do efeito “reverso” quando m é negativo.

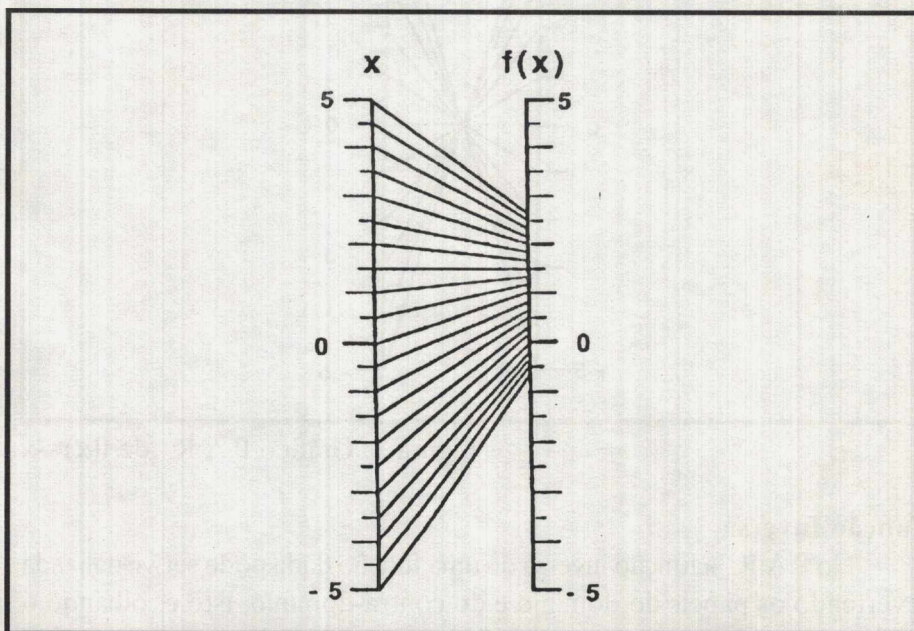


Figura 2. Gráfico P.A.R. de $f(x) = 1/3x + 1$

Ponto Fixo

O par (x, x) é em geral chamado de ponto fixo de uma função. Algebricamente, no caso da função linear, este ponto pode ser encontrado resolvendo-se o sistema de equações lineares $f(x)=x$ e $f(x)=mx+b$ (cujas solução é $x=b/(1-m)$). No plano cartesiano, o ponto fixo é representado pelo ponto de interseção da função linear com a reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

No P.A.R., o ponto fixo é representado por uma linha de ligação perpendicular a ambos os eixos (deveríamos nos referir a “linha de ligação fixa”). Em particular, no caso das funções lineares (exceto para $m=1$), existe sempre uma única linha de ligação fixa, que pode ser facilmente visualizada (veja figuras 1, 2 e 3).

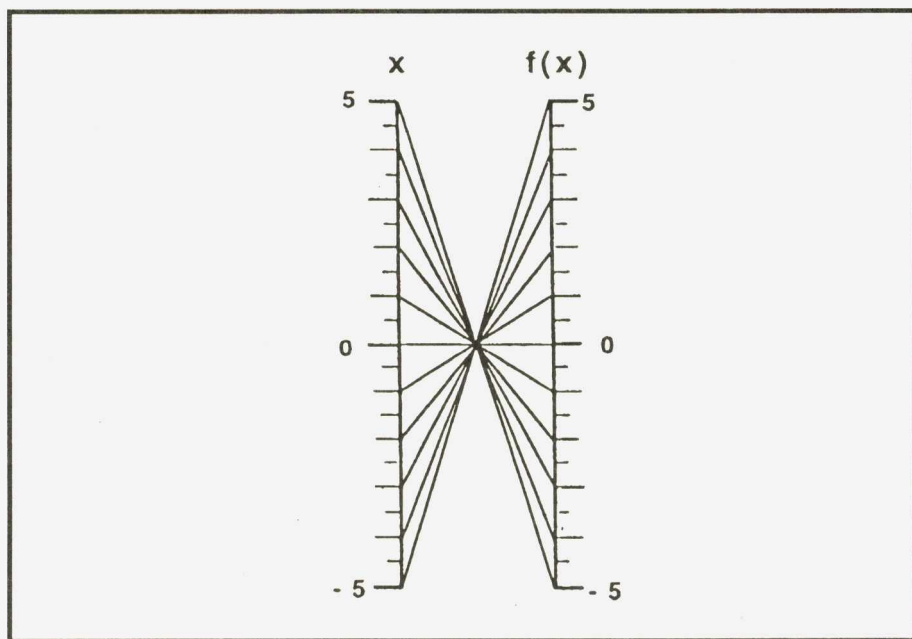


Figura 3. Gráfico P.A.R. de $f(x)=-x$

Função Inversa

No P.A.R. a função inversa de uma função dada pode ser visualizada revertendo os papéis do domínio e do contra-domínio, isto é, olhando o gráfico da direita para a esquerda, ou em outras palavras revertendo a “direção” da linha de ligação.

O Foco

Na representação de $f(x)=-x$ (Figura 3) vemos que todas as linhas de ligação se interceptam num único ponto, localizado entre os dois eixos. Pode ser provado que para qualquer função linear (exceto $m=1$), as linhas de ligação (prolongadas quando necessário) se interceptam em um único ponto que chamamos foco. E também, cada foco define uma única função linear. Portanto, no P.A.R. , podemos representar uma função linear apenas através de seu foco.

O Micromundo

Nesta seção descreveremos o micromundo desenvolvido para explorarmos a representação P.A.R. .Este micromundo oferece duas ferramentas para os usuários: algébrica e gráfica. Liberando o usuário de trabalhos tediosos e de longa duração, este micromundo pode ser usado para explorar e analisar tópicos mais avançados inerentes a esta representação, comparando e contrastando com outras representações. Este ambiente computacional tem a capacidade de representar uma função dada em forma algébrica graficamente no plano cartesiano e no P.A.R. A seguir apresentaremos algumas das possibilidades deste ambiente.

1. Justaposição de representações.

Uma tela típica engloba três janelas principais, uma para cada representação: algébrica, cartesiana e P.A.R. (veja Figura 4).

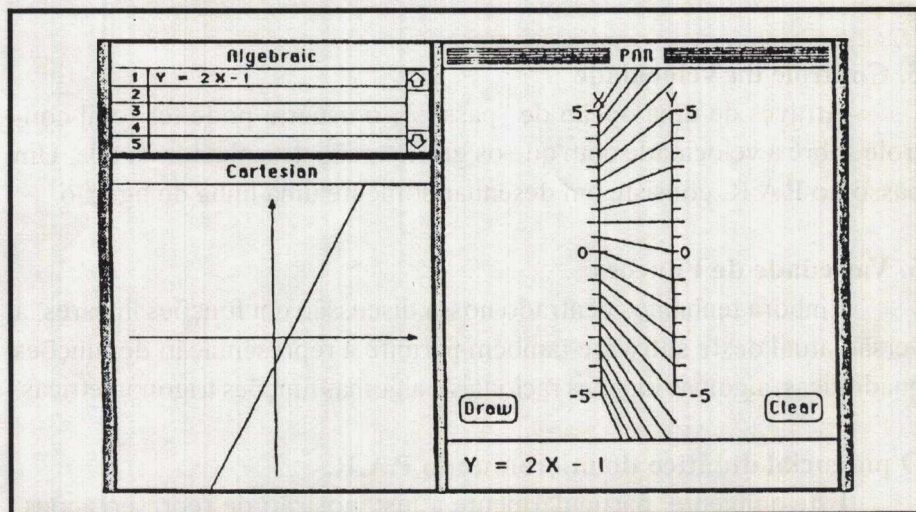


Figura 4: Tela Típica do micromundo P.A.R.

2. Superposição de gráficos

É possível fazer gráficos de diferentes funções simultaneamente. Uma lista contendo as funções em forma algébrica aparecerá na janela algébrica, o que permite que o usuário saiba de quais funções estão sendo traçados gráficos. Ressaltando uma das funções na forma algébrica, automaticamente, ela será ressaltada nas outras duas formas.

3. Mudanças

O usuário pode dar a função na forma algébrica ou na P.A.R. e o programa imediatamente a transfere para as outras representações. O usuário pode entrar uma função algebricamente, colocando e clicando o mouse para cima ou para baixo dos parâmetros que ele deseja aumentar ou diminuir respectivamente. Na forma P.A.R. basta apontar o mouse no local do foco e clicar.

4. Controlando algumas possibilidades da forma gráfica

As funções lineares podem aparecer com ou sem foco. Além disso, existe a opção de esconder o feixe de segmentos e mostrar apenas o foco. Outras possibilidades gráficas, tais como, precisão decimal, escala dos eixos e densidade do feixe de segmentos podem ser facilmente controladas através de um menu de escolhas.

5. Controle da Velocidade

Através de uma opção de “passos”, o usuário pode ter total controle sobre a velocidade com que os gráficos são desenhados na tela. Um passo no P.A.R. consiste em desenhar somente uma linha de ligação

6. Variedade de Funções

Embora tenhamos centrado nossa discussão em funções lineares, a versão atual deste software também permite a representação de funções quadráticas, algumas funções racionais e algumas funções trigonométricas.

O potencial didático do micromundo P.A.R.

Este ambiente, particularmente a justaposição de representações, capacita os estudantes para investigarem as representações gráficas no

P.A.R. e compará-las com as representações no plano cartesiano. A seguir mostraremos como tal comparação destaca diferentes aspectos de um mesmo conceito. Apontaremos tais aspectos.

- Fazer o gráfico de uma função no P.A.R. implica em destacar o aspecto da funcionalidade, tornando visualmente explícitos os elementos relacionados pela função. Este aspecto fica de certa forma escondido na representação cartesiana, na qual, para vermos os elementos relacionados por uma função precisamos ir e voltar da curva para os eixos usando como auxílio um conjunto de retas perpendiculares.

- O efeito visual do coeficiente angular m de $f(x)=mx+b$ é representado no plano cartesiano como “a inclinação é a razão entre o vertical e o horizontal”, que é percebido muito diferentemente do efeito visual de m no P.A.R. Já no P.A.R. uma forma de visualizar m é como a direção na qual o feixe de segmentos se abre, fecha ou se corta. Em outras palavras, o P.A.R. destaca o significado algébrico de m como um fator multiplicativo de x , ao contrário da representação cartesiana que reforça o aspecto de razão do conceito.

- No P.A.R., a representação gráfica de m pode também ser visualizada como o local do foco em relação aos eixos. Por exemplo, em $f(x)=2x-1$, como 2 multiplica x , o feixe de segmentos abre em direção ao eixo- y . Portanto o foco estará a esquerda do eixo- x . Numa situação em sala de aula, esta observação pode trazer imediatamente várias questões para serem investigadas. Por exemplo: Quão longe para a direita encontrar-se-á o foco se mudarmos o coeficiente angular de 2 para 3, por quê?; Que funções lineares terão seu foco à direita do eixo- y ? e assim por diante.

- O micromundo tem uma opção que permite esconder as linhas de ligação enquanto preserva o foco. Desta forma a função é representada no P.A.R. por um único ponto. Isto pode parecer apenas um atributo técnico entretanto pode trazer importantes implicações na aprendizagem. Este ambiente foi desenvolvido para ser um apoio visual apontando na direção de tornar a função linear (e não apenas alguns pares relacionados por ela) o objeto de estudo, conceitualizando-a como uma entidade sobre a qual podemos operar. Isto também nos permite facilitar a visualização de uma família de funções lineares. (Veja Figura 5)

- O ambiente P.A.R. permite a comparação entre duas representações gráficas de várias maneiras, por exemplo, na Figura 6 vemos como

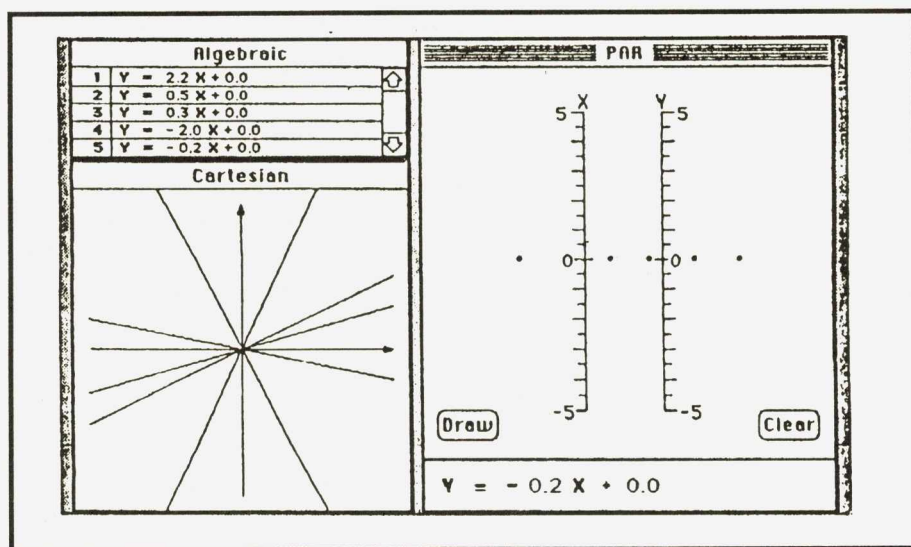


Figura 5 Representações de $f(x)=mx$

o par ordenado pertencente a duas funções distintas é representado graficamente; em outras palavras ela mostra a solução gráfica de um sistema linear de duas equações. Na representação cartesiana, a solução é o ponto interseção de duas retas, no P.A.R. é a linha de ligação comum a dois feixes de segmentos (veja Figura 6)

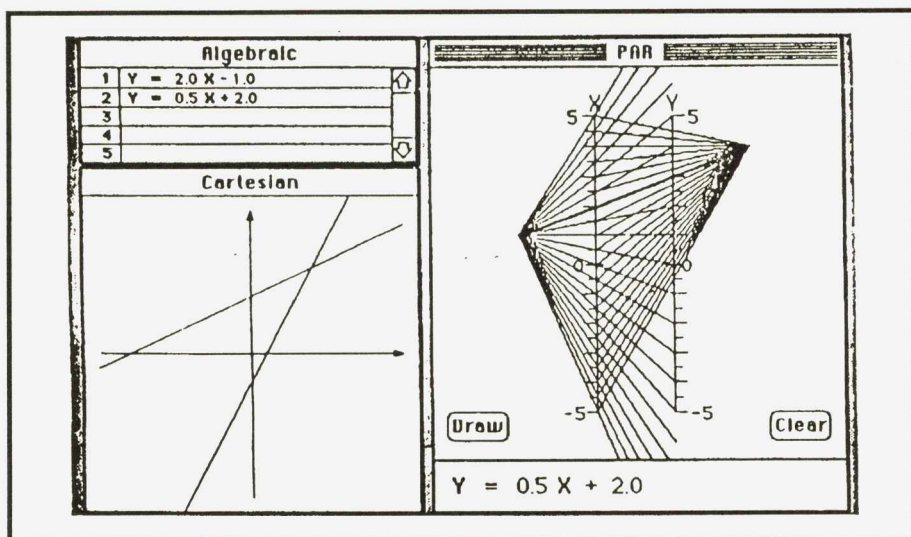


Figura 6. Solução de duas equações lineares.

No P.A.R. podemos chegar à solução de modos alternativos: Podemos requerer os gráficos das duas funções na opção “só foco” então o segmento que une dois focos representa a solução (veja Figura 7a). Esta maneira nos leva a aprofundar as questões de investigação, por exemplo, como encontrar outras funções que tenham a mesma solução ? ; Qual será o significado da representação P.A.R. de dois focos ligados por um segmento que não intercepta os eixos ? (Veja Figura 7b)

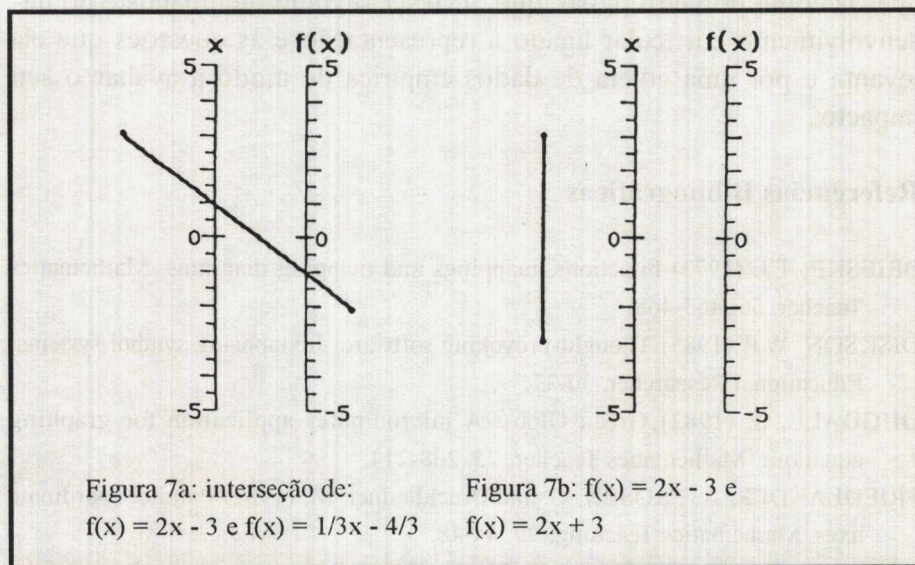


Figura 7. Solução de duas equações lineares usando somente os focos.

Os exemplos acima ilustram uma possível direção para explorar o potencial educacional deste ambiente. Nós não estamos propondo que os estudantes devam mudar e usar frequentemente o P.A.R. nem que a representação seja útil, ao contrário, nós pensamos que os estudantes que explorem o P.A.R. ficarão engajados em “fazer” Matemática. Além disso, pode-se tornar mais claro para os estudantes que o estudo da função linear no plano cartesiano é apenas um caminho de ver este conceito e não o conceito em si. Isso pode levar a acreditar que diferentes representações nos mostrem um conceito de ângulos diferentes, destacando alguns de seus aspectos e escondendo outro. Portanto os estudantes devem ter a oportunidade de estarem explicitamente à frente de questões que eles raramente encontram nas atividades padrão de Matemática.

Conclusão

Neste artigo descrevemos alguns aspectos do ambiente P.A.R. e seu potencial didático. Entretanto estamos conscientes que o desenvolver de um software educativo é sempre acompanhado por grandes promessas que em geral não são realizadas nas mãos dos “verdadeiros” usuários. Por isso, vemos o desenvolvimento deste ambiente computacional apenas como primeiro passo, que deve ser seguido de um ajuste no desenvolvimento curricular ligado à representação e às questões que ela levanta e por uma coleta de dados empírica de modo a avaliar o seu impacto.

Referências Bibliográficas

- BRIESKE, T.J. (1973) Functions, mappings and mapping diagrams. *Mathematics Teacher*, 66: 463-468.
- DISKSON, W.P. (1985) Thought-provoking software: Juxtaposing symbol systems. *Educational Researcher*, 30-37.
- DUGDALE, S. (1982) Green Globbs: A micromputer application for graphing equations. *Mathematics Teacher*, 75: 208-214.
- FRIEDLANDER, A. ; ROSEN, G. and Bruckheimer, M. (1982) Parallel coordinate axes. *Mathematics Teaching*, 99: 44-48.
- MINTZ, R., NACHMIAS, R. and CHEN, D. (1986) Computerized simulation of the ecological system: A multi-dimensional dynamic representation, in Crookal, D. (ed.) *Simulation/Gaming - State of the Art in the Late 1980's*. Proceedings of the 17th Annual International Conference of the Simulation and Gaming Association, University of Toulon, France, pp. 165-168.
- PEA, R. (1987) Cognitive technologies for mathematics education. In Schoenfeld, A.H. *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, N.J., Erlbaum.
- PARKER, J. (1969) Graphs and relations. *Mathematics Teaching*, 47: 38-43.
- SCHOENFELD, A.h. (In press) Mathematics, technology and higher-order thinking. To appear in Nickerson, R.S. and Zodiates, P.P (Eds.) *Technology and Education in 2020* (Tentative title). Hillsdale, NJ, Erlbaum.
- WOODROW, D. (1970) Linear graphs. *Mathematics Teaching*, 52: 14-19.

ALGUNS DADOS SOBRE ABRAHAM ARCAVI

- Nasceu na Argentina em 7 de Dezembro de 1951.
- Fez seus estudos em Buenos Aires onde, em 1976, obteve a licenciatura em Matemática Aplicada no Centro de Altos Estudios em Ciências Exatas.
- Em 19 de Outubro de 1978 emigrou para Israel.
- É casado e tem dois filhos.
- Em 1981 obteve o grau de Mestre (M.Sc.) pelo Weizmann Institute of Science
- Em 1986 obteve o grau de Doutor (Ph.D.) pelo Weizmann Institute of Science.
- Desde 1988 é Consultente em tempo parcial da Escola da Educação da Universidade de Tel Aviv, Israel, no Knowledge Technology Lab.
- De 1985 a 1986 foi estagiário de Pós-Doutoramento no Department of Mathematical Sciences, Ball State University, Muncie, Indiana, USA.
- De 1986 a 1988 foi estagiário de Pós-doutoramento na Division of Education in Mathematics, Science and Technology (EMST) na School of Education da Universidade da Califórnia em Berkeley, USA.
- Desde 1988 é cientista do Weizmann Institute of Science, em Rehovot, Israel, onde trabalha no Department of Science Teaching (Departamento de Ensino de Ciências).
- Desde 1987 faz conferências em Israel, nos USA, no Uruguai e Colômbia.
- De 1974 a 1976 foi professor de Matemática no Instituto de Educação de Adultos em Buenos Aires, Argentina.
- De 1976 a 1978 foi professor de Matemática e coordenador da escola Isrealense anexa à Embaixada de Israel em Buenos Aires, Argentina.
- De 1979 a 1983 foi professor de Matemática em cursos extracurriculares para alunos mais dotados de escolas do 2º grau, no Centro de Atividades para Jovens, no Instituto Weizmann, Israel.
- Desde 1983 trabalha na implementação da preparação de material didático.
- Em 1988 desenvolve “software” para Educação Matemática.

- Já deu mais de 10 conferências fora de Israel, inclusive no Brasil.
- Tem mais de 15 publicações em revistas israelenses e estrangeiras
- É professor visitante do Curso de Mestrado em Educação Matemática na Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, Brasil.

IMPRESSO NA
GRÁFICA BOTÂNICA EDITORA LTDA.
RUA GONÇALVES, 158
TEL.: 502-1325