

ALGORITMOS DE MÍNIMOS QUADRADOS RÁPIDOS PARA FILTRAGEM E PREDIÇÃO ADAPTATIVA

João Marcos Travassos Romano
Departamento de Comunicações
Faculdade de Engenharia Elétrica
Universidade Estadual de Campinas

Resumo

A recente introdução dos algoritmos de mínimos quadrados rápidos constitui um importante progresso na área de filtros adaptativos, permitindo um processamento rápido e preciso com uma complexidade reduzida. Por outro lado, os problemas de instabilidade numérica característicos destes algoritmos aparecem como o principal obstáculo à sua utilização prática.

Este trabalho tem como objeto rever alguns conceitos básicos de filtragem adaptativa, para apresentar de maneira concisa os princípios e as operações dos algoritmos rápidos. O problema de estabilidade é também brevemente discutido.

I. Introdução

As técnicas utilizadas em Processamento Digital de Sinais caracterizam-se pela flexibilidade e precisão [1]. O desenvolvimento simultâneo da técnica (introdução de processadores de alta velocidade,...) e da teoria (concepção de novas ferramentas e algoritmos,...) torna possível um processamento cada vez mais sofisticado, assim como sua execução em tempo real.

Dentre as operações efetuadas em processamento digital, a filtragem linear é talvez a mais usual e importante, tendo-se tornado um instrumento fundamental em virtude do progresso na área de processadores digitais. Um filtro digital é dito adaptativo quando seus coeficientes, parâmetros que constituem sua função de transferência, evoluem no tempo segundo um critério determinado.

As primeiras aplicações de filtros adaptativos remontam à década de 60 e dizem respeito principalmente aos problemas de equalização em transmissão de dados e de reconhecimento de formas [2]. Atualmente, a filtragem adaptativa encontra interesse em numerosas outras aplicações tais como, a identificação de sistemas, controle de processos, radar e sonar, engenharia biomédica, sismologia, etc. [3].

O estudo do comportamento de um filtro digital adaptativo necessita a análise conjunta de três fatores:

- A estrutura do filtro
- O sinal a ser processado
- O algoritmo de adaptação

Neste trabalho, iremos abordar principalmente os algoritmos de mínimos quadrados rápidos (MQR, em literatura anglo-saxônica "Fast Recursive Least-Square Algorithms" : FRLS), aplicados a filtros de estrutura transversal. Alguns conceitos básicos em filtragem adaptativa serão revistos primeiramente.

II. Filtragem Adaptativa Por Critério de Mínimos Quadrados

O esquema básico de um filtro adaptativo está representado na figura 1. Dado que $H(n)$ representa um filtro transversal, sua função de transferência, num dado instante n , escreve-se sob a forma de um polinômio em z :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N h_i(n) z^{-i}, \quad (1)$$

onde N é a ordem do filtro.

A cada nova entrada $x(n)$, o algoritmo de adaptação fornece um novo conjunto de coeficientes $h_i(n)$, de forma a minimizar um critério sobre o sinal de erro:

$$e(n) = y(n) - H^*(n) X(n) \quad (2)$$

onde:

$$H^*(n) = [h_0(n), h_1(n), \dots, h_N(n)] = \text{Vetor dos coeficientes}$$

$$X^*(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N)] = \text{Vetor de dados}$$

Segundo o critério de mínimos quadrados, o conjunto ótimo de coeficientes $H(n)$ é aquele que minimiza a função:

$$J(n) = \sum_{p=0}^n w^{n-p} e^2(p) \quad (3)$$

onde os dados de entrada são supostos nulos para os instantes $p < 0$. A constante w é um fator de ponderação ($0 < w < 1$) necessário para que o algoritmo possa seguir as variações ocorridas no sinal de entrada.

O problema consiste então em obter o vetor de coeficiente ótimos $H(n)$ que minimiza $J(n)$, ou seja, que fornece uma potência mínima para o sinal de erro $e(p)$ no intervalo de tempo $1 \leq p \leq n$. Como $J(n)$ é uma função quadrática do vetor $H(n)$, ela possui um só ponto de mínimo que pode ser obtido pela anulação do gradiente, ou seja, das derivadas parciais:

$$\frac{\delta J(n)}{\delta h_i(n)} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4)$$

Dando prosseguimento aos cálculos, chega-se a seguinte solução para o vetor $H(n)$:

$$H(n) = (R_N)^{-1}(n) r_{yx}(n) \quad (5)$$

Onde $R_N(n)$ e $r_{yx}(n)$ são obtidos pelas seguintes médias ponderadas:

$$R_N(n) = \sum_{p=1}^n w^{n-p} X(p) X^T(p) \quad (6.a)$$

representando uma estimação da matriz de ordem N de autocorrelação do sinal de entrada, e:

$$r_{yx}(n) = \sum_{p=1}^n w^{n-p} y(p) X(p) \quad (6.b)$$

representando uma estimação do vetor de intercorrelação entre a entrada e o sinal de referência.

O vetor $H(n)$ representa o conjunto de coeficientes que otimiza o critério J para os n valores recebidos dos sinais de entrada e de referência. Num processamento em tempo real, é necessário recalculá-los a cada instante de tempo e a utilização das equações (5) e (6) torna-se impraticável. Vê-se então a necessidade de um processamento adaptativo onde os coeficientes são obtidos por uma relação de recorrência, isto é, dado que:

$$H(n) = (R_N)^{-1}(n) r_{yx}(n) \quad (7.a)$$

$$H(n+1) = (R_N)^{-1}(n+1) r_{yx}(n+1) \quad (7.b)$$

o objetivo é exprimir $H(n+1)$ em função de $H(n)$.

Define-se então o vetor ganho de adaptação, dado por:

$$G(n) = (R_N)^{-1}(n) X(n) \quad (8)$$

A partir desta definição e utilizando o lema de inversão de matrizes [1], chega-se enfim ao procedimento iterativo de mínimos quadrados, que fornece a adaptação dos coeficientes. O algoritmo MQ é constituído pelas três equações seguintes:

* Cálculo do ganho de adaptação:

$$G(n+1) = \frac{1}{w + X^T(n+1) (R_N)^{-1}(n) X(n+1)} (R_N)^{-1}(n) X(n+1) \quad (9)$$

* Cálculo de matriz inversa de autocorrelação:

$$(R_N)^{-1}(n+1) = \frac{1}{w} [(R_N)^{-1}(n) - G(n+1) X^T(n+1) (R_N)^{-1}(n)] \quad (10)$$

* Cálculo dos coeficientes do filtro adaptativo:

$$H(n+1) = H(n) + G(n+1) [y(n+1) - X^T(n+1) H(n)] \quad (11)$$

Este algoritmo, possui um número de multiplicações proporcional ao quadrado da ordem do filtro N^2 , devido às operações matriciais envolvidas. Esta complexidade é demasiado elevada para algumas aplicações em tempo real, daí a necessidade de se buscar algoritmos mais simples.

Uma aproximação para reduzir os cálculos e simplificar a implementação de filtros adaptativos consiste em supor que $x(n)$ é um ruído branco. Desta forma, a matriz de autocorrelação é diagonal e o ganho de adaptação é dado por:

$$G = \mu I_N X(n) \quad (12)$$

Os coeficientes são diretamente calculados pela expressão:

$$H(n+1) = H(n) + \mu X(n) [y(n+1) - X^T(n+1) H(n)] \quad (13)$$

onde μ é uma constante de adaptação escolhida em função da potência de $x(n)$ e da precisão e rapidez de convergência desejadas. A operação (13), com apenas $2N$ multiplicações e $2N$ adições, constitui o algoritmo do gradiente estocástico para um filtro adaptativo de estrutura transversal, visto aqui como uma simplificação da técnica de mínimos quadrados.

Várias modificações podem ser acrescentadas ao algoritmo do gradiente para melhorar seu desempenho, como a introdução de um fator de ponderação ou a utilização de um parâmetro de adaptação $\mu(n)$ variável.

Além de sua simplicidade, o algoritmo do gradiente possui várias vantagens tais como sua robustez em relação ao contexto de utilização, aplica-se aos diversos tipos de estrutura de filtro e apresenta boas propriedades no que diz respeito à estabilidade. Entretanto, existem algumas limitações no desempenho desta classe de algoritmos que não podem ser toleradas em diversas aplicações. Seus principais defeitos são a convergência lenta, em relação à técnica de MQ, e um desempenho dependente das propriedades estatísticas do sinal de entrada. De fato, quanto mais correlacionado for este sinal, pior será o desempenho do gradiente, o que é coerente pois neste caso a hipótese assumida em (12) está longe de ser verificada.

O princípio dos algoritmos MQR está em realizar o critério de mínimos quadrados, apresentando um complexidade de operações proporcional a N e não a N^2 . Estes algoritmos possibilitam o cálculo de $G(n+1)$ em (9) sem cálculos matriciais. Então, eles apresentam o mesmo desempenho e rapidez de

convergência, no sentido de número de iterações necessárias, que os algoritmos MQ, mas são rápidos no sentido de que cada iteração necessita uma quantidade menor de cálculos.

Os algoritmos MQR baseiam-se nos filtros de predição linear progressiva e retrógrada. Assim, antes de apresentá-los, vamos rever alguns pontos básicos sobre o funcionamento de preditores.

III. Predição Linear

Os filtros de predição linear constituem uma classe particular de filtros digitais, caracterizada pelo cálculo de seus coeficientes e pelas estruturas de implementação adotadas. A predição linear é sobretudo uma técnica fundamental de análise de sinal com aplicações nos mais variados campos de processamento de sinais e da análise espectral [5].

Um preditor linear adaptativo pode ser encarado como uma particularização do esquema da figura 1, onde o sinal de referência é a própria entrada. Assim, os coeficientes a_i ($1 \leq i \leq N$) do preditor são aqueles que minimizam a potência do sinal

$$e_a(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) \quad (14)$$

Em outras palavras, trata-se de obter um vetor ótimo A_N dado por:

$$A^* = [a_1, a_2, \dots, a_N] \quad (15)$$

cujas combinação linear com os valores passados $x(n-i)$, $1 \leq i \leq N$, forneça uma estimativa $\hat{x}(n)$ do sinal de entrada. Desta forma, estima-se a informação recebida com a entrada de um novo valor $x(n)$ do sinal de dados.

Por outro lado, em se tratando de um filtro transversal de ordem N , uma nova entrada implica sempre na perda de um dado mais antigo $x(n-N)$. O abandono desta informação pode também ser estimado por um outro filtro dito preditor retrógrado que minimiza o erro:

$$e_b(n) = x(n-N) - \sum_{i=1}^N b_i x(n-N+i) \quad (16)$$

onde B é o vetor de coeficiente ótimos b_i , $1 \leq i \leq N$, que satisfazem o critério estabelecido, isto é, a minimização da potência do sinal de erro $e_b(n)$

Os coeficientes de predição podem também ser obtidos de maneira adaptativa, a partir dos erros obtidos a cada instante de tempo pelas expressões:

$$e_a(n) = x(n) - A^*(n-1) X(n-1) \quad (17.a)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - B^*(n-1) X(n) \quad (17.b)$$

Recalcula-se então os coeficientes de predição, utilizando o ganho de adaptação definido como o produto entre a matriz de autocorrelação inversa e o vetor de dados $X(n)$.

$$A(n) = A(n-1) + G(n-1) e_a(n) \quad (18.a)$$

$$B(n) = B(n-1) + G(n) e_b(n) \quad (18.b)$$

Enfim, se introduzirmos os coeficientes já recalculados $A(n)$ e $B(n)$ nas expressões (27) obtemos os erros de predição ditos "a posteriori", dados por:

$$e_a(n) = x(n) - A^*(n) X(n-1) \quad (19.a)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - B^*(n) X(n) \quad (19.b)$$

Os coeficientes de predição progressiva e retrógrada e os erros "a priori" e "a posteriori", apresentados brevemente nesta seção, constituem os parâmetros básicos dos algoritmos MQR, que serão apresentados em seguida.

IV. Os Algoritmos de Mínimos Quadrados Rápidos (MQR)

Formalmente, os algoritmos rápidos baseiam-se no fato de que o vetor de dados $X(p)$ possui a propriedade de deslocamento, isto é, o novo vetor $X(p+1)$ é obtido a partir de $X(p)$ pelo simples deslocamento de seus elementos e introdução do novo valor $X(p+1)$, tal como mostram as expressões abaixo.

$$X^*(p) = [x(p), x(p-1), \dots, x(p-N)] \quad (20)$$

$$X^*(p+1) = [x(p+1), x(p), x(p-1), \dots, x(p-N)]$$

Levando-se em conta esta importante propriedade, é possível calcular o ganho de adaptação, tal que definido em (14), com uma quantidade de cálculos reduzida, proporcional a N . A primeira versão dos algoritmos rápidos foi assim deduzida na referência [6]. Esta propriedade é característica de filtros de estrutura transversal, cuja busca dos coeficientes ótimos nos leva a um sistema de equações lineares. De uma maneira mais intuitiva, pode-se também justificar a redução de complexidade pelo fato de que toda a informação contida na matriz inversa de autocorrelação, que intervém no cálculo do ganho de adaptação, pode ser obtida através do conjunto de erros e de coeficientes de predição linear. Então, num contexto adaptativo, é mais simples calcular iterativamente estes coeficientes e a partir deles obter o ganho de adaptação, do que calcular a matriz inversa de autocorrelação pela equação (16). Os algoritmos rápidos se dividem em dois grupos, os que baseiam os cálculos sobre os erros de predição a priori e os que utilizam os erros a posteriori. Iremos mostrar em seguida os algoritmos MQR-1, do primeiro tipo, também chamado FK ("Fast Kalman, referência [6]) e MQR-2, do segundo tipo, dito FAEST ("Fast a posteriori estimation sequential technique", referência [7]). Uma outra versão, próxima do FAEST, é o algoritmo FTF ("Fast transversal filter", referência [8]).

TABELA - 1
ALGORITMO DE MÍNIMOS QUADRADOS RÁPIDO - MQR 1
quantidade disponíveis no instante n

. vetor de coeficientes de filtro adaptativo : $H(n)$
 . vetor de coeficientes de predição progressiva: $A(n)$
 . vetor de coeficientes de predição retrógrada : $B(n)$
 . vetor de dados : $X(n)$
 . vetor de ganho de adaptação : $G(n)$
 . erro de predição acumulado : $E_a(n)$

novos dados no instante (n+1)

. Dado recebido : $x(n+1)$
 . Sinal de referência : $y(n+1)$

cálculo de novo ganho de adaptação

. erro de predição progressiva : $e_a(n+1) = x(n+1) - A^*(n) X(n)$
 . cálculos dos coeficientes de predição progressiva : $A(n+1) = A(n) + G(n) e_a(n+1)$
 . erro de predição progressiva a posteriori: $\hat{e}_a(n+1) = x(n+1) - A^*(n+1) X(n)$
 . erro de predição progressiva acumulado: $E_a(n+1) = w E_a(n) + e_a(n+1) E_a(n+1)$
 . ganho de adaptação intermediária:

$$G_a(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ G(n) \end{bmatrix} + \frac{e_a(n+1)}{E_a(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ -A(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(n+1) \\ m(n+1) \end{bmatrix}$$

. erro de predição retrógrada : $e_b(n+1) = x(n+1-N) - B^*(n) X(n+1)$
 . ganho de adaptação : $G(n+1) = \frac{1}{1-m(n+1) e_b(n+1)} [H(n+1) + m(n+1) B(n)]$
 . coeficientes de predição retrógrada: $B(n+1) = B(n) + G(n+1) e_b(n+1)$

operações do filtro adaptativo

. cálculo do sinal de erro: $e(n+1) = y(n+1) - H^*(n) X(n+1)$
 . cálculo dos novos coeficientes: $H(n+1) = H(n) + G(n+1) e(n+1)$

Nº de multiplicações: $10N + 4$

Nº de divisões : 2

V. DESEMPENHO E ESTABILIDADE

O desempenho da figura-2 mostra a superioridade dos algoritmos MQR em relação ao gradiente para uma aplicação interessante de preditores adaptativos, a localização de frequências. Nesse caso, o sinal de entrada é:

$$x(n) = \sin(2\pi \cdot 0,1n) + \sin(2\pi \cdot 0,15n) + b(n) \quad (21)$$

onde $b(n)$ é um ruído branco de potência 10^{-6} . A figura 2 mostra a evolução dos coeficientes de predição, no caso um filtro de quarta ordem, e dos respectivos zeros do preditor. Temos primeiro (fig. 2-A) o algoritmo do gradiente e, no segundo caso, a aplicação do algoritmo MQR-1.

Para este tipo de sinal, pode-se mostrar que os coeficientes ótimos devem ser tais que os zeros do preditor situem-se sobre o círculo unitário do plano z , na posição relativa às frequências de

TABELA 2
ALGORITMOS DE MÍNIMOS QUADRADOS RÁPIDO MQR-2
quantidade disponível no instante n

. vetor de coeficientes do filtro adaptativo : $H(n)$
 . vetor de coeficientes de predição progressiva : $A(n)$
 . vetor de coeficientes de predição retrógrada : $B(n)$
 . vetor de dados : $X(n)$
 . vetor de ganho de adaptação : $G'(n)$
 . erros de predição acumulados : $E_a(n)$ e $E_b(n)$
 . fator de proporcionalidade entre os erros de predição : $\alpha(n)$

novos dados no instante (n+1)

. dado recebido : $x(n+1)$.sinal de referência : $y(n+1)$

cálculo do novo ganho de adaptação

. erro de predição progressiva : $e_a(n+1) = x(n+1) - A^*(n) X(n)$
 . erro de predição prog. a posteriori : $\hat{e}_a(n+1) = w e_a(n+1) / \alpha(n)$
 . coeficientes de predição progressiva : $A(n+1) = A(n) + G(n) e_a(n+1) w^{-1}$
 . erro de predição acumulado : $E_a(n+1) = w E_a(n) + e_a(n+1) E_a(n+1)$
 . ganho de adaptação intermediário:

$$G'_a(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ G'(n) \end{bmatrix} + \frac{e_a(n+1)}{E_a(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ -A(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'(n+1) \\ m'(n+1) \end{bmatrix}$$

. erro de predição retrógrada : $e_b(n+1) = m(n+1) E_b(n)$
 . ganho de adaptação : $G'(n+1) = H'(n+1) + m'(n+1) B(n)$
 . fator de proporcionalidade intermediário: $\alpha_1(n+1) = \alpha(n) + \frac{(e_a(n+1))^2}{E_a(n)}$
 . fator de prop. entre erros de predição : $\alpha(n+1) = \alpha_1(n+1) - m'(n+1) e_b(n+1)$
 . erro de predição retrógrada a posteriori: $\hat{e}_b(n+1) = w e_b(n+1) / \alpha(n+1)$
 . erro de pred. retrógrada acumulado: $E_b(n+1) = w E_b(n) + e_b(n+1) E_b(n+1)$
 . Coeficientes de predição retrógrada: $B(n+1) = B(n) + w^{-1} G'(n+1) \hat{e}_b(n+1)$

operações do filtro adaptativo

. cálculo do sinal do erro : $e(n+1) = y(n+1) - H^*(n) X(n+1)$
 . cálculo do erro a posteriori : $\hat{e}(n+1) = e(n+1) / w \alpha(n+1)$
 . cálculo dos novos coeficientes : $H(n+1) = H(n) + G'(n) w^{-1} \hat{e}(n+1)$

Nº de multiplicações : $7N + 11$

Nº de divisões : 2

entrada [9]; estas posições estão indicadas pelos pontos A, A', B e B'.

Verifica-se então que, após 1000 iterações, o algoritmo com $\mu = 0,01$ não converge para os bons valores, mas indica a suposta presença de uma única frequência de valor intermediário. De fato as simulações efetuadas mostram que, nestas condições, o algoritmo do gradiente necessita cerca de 1000 iterações para atingir os valores ótimos.

Por outro lado o algoritmo MQR-1 converge com cerca de 700 iterações, utilizando-se um fator de ponderação $w = 1 - \mu = 0,99$, de maneira a que os dois algoritmos tenham condições semelhantes de funcionamento [4].

De fato, o processamento de sinais senoidais torna-se delicado para algoritmos do tipo gradiente, devido ao fato de ser um sinal que possui uma elevada correlação.

O problema crítico dos algoritmos MQR, que constitui a principal dificuldade para sua aplicação prática, é a instabilidade apresentada devido à precisão finita dos cálculos efetuados em processadores.

Basicamente, os algoritmos MQR possuem três ciclos de adaptações onde o cálculo do ganho efetua a ligação entre os cálculos dos coeficientes de predição progressiva e retrógrada. A estimação desses últimos é muito sensível aos erros de arredondamento, inevitáveis no processamento dos cálculos, que acabam por provocar uma divergência no algoritmo [10].

De fato, supondo-se que um erro de arredondamento $\Delta B(n)$ é somado ao vetor de coeficientes retrógrados $B(n)$, teremos aproximadamente no instante $(n+1)$ [11]:

$$\Delta B(n+1) = \{I_n [1 + m(n+1) e_a(n+1)] - G(n+1) X^*(n+1)\} \Delta B(n) - \Delta B^*(n) m(n+1) X(n+1) \quad (22)$$

Então, se $\Delta B(n)$ é uma variável aleatória de média zero, como é o caso nas operações de arredondamento, a média de $\Delta B(n+1)$ não será nula, devido ao termo $\Delta B(n) \Delta B^*(n)$ de média positiva. Após diversas iterações, este efeito provoca uma divergência no cálculo de $B(n)$ e, em consequência, do algoritmo.

Encontra-se na literatura várias publicações sobre métodos de estabilização destes algoritmos. Alguns são baseados em reinicializações periódicas ou na utilização de variáveis de controle [11,12]. Outros de maior interesse prático, propõem métodos para fazer funcionar o algoritmo sem interrupções; pode-se citar por exemplo as recentes referências [13], [14] e [15].

Existe outro problema capaz de provocar a instabilidade dos algoritmos MQR e que é bem menos citado na literatura. A variável $E_a(n)$, que exprime o erro de predição acumulado é dada por:

$$E_a(n+1) = wE_a(n) + e_a(n+1) e_a(n+1) \quad (23)$$

Logo, se os erros de predição tornam-se pequenos ou nulos, o que é o caso por exemplo para sinais senoidais, $E_a(n)$ tenderá também a zero, para $w < 1$. Como esta variável é usada como divisor no cálculo do ganho, ela não pode ser nula e no caso de implementação em microprocessadores onde a dinâmica das variáveis é limitada, ela deve ser superior a um limite determinado.

Uma solução simples mas eficaz em vários casos é a introdução de uma constante, dita de estabilização, na expressão (23), de forma que ela se torna:

$$E_a(n+1) = wE_a(n) + e_a(n+1) e_a(n+1) + C \quad (24)$$

e o erro acumulado mantém-se acima de um limite:

$$E_a(n+1) > \frac{C}{1-w} \quad (25)$$

A introdução desta constante provoca evidentemente uma perturbação no algoritmo e seu valor deve ser escolhido, para cada caso particular, de maneira que o algoritmo não perca suas propriedades de optimalidade.

Enfim, pode-se dizer que o teste final para todas suas técnicas de estabilização já propostas é a experiência prática e em tempo real. Encontra-se na literatura trabalhos sobre a implementação dos algoritmos MQR em aritmética inteira [16] e a referência [17] descreve uma experiência onde este algoritmo é aplicado em tempo real no caso de predição de sinais senoidais em meio ruidoso, neste trabalho utiliza-se a constante de estabilização descrita acima e um fator de ponderação na adaptação dos coeficientes como meio de evitar a divergência devida aos erros de arredondamento.

VI. CONCLUSÃO

Apresentamos neste artigo um breve estudo sobre os algoritmos de mínimos quadrados rápidos. O enfoque dado foi de natureza intuitiva, com a intenção de colocar alguns conceitos básicos, tais como filtragem ótima e predição linear, e de apresentar o conjunto de operações para dois tipos desses algoritmos. Para um tratamento matemático mais detalhado do assunto, o leitor pode consultar várias das referências citadas abaixo. O problema de estabilidade destes algoritmos, que vem sendo objeto de diversas publicações recentes, também foi sucintamente discutido.

A possibilidade de dispor de algoritmos de alto desempenho, com uma complexidade proporcional à ordem do filtro, abre perspectivas interessantes em várias áreas do processamento digital. Os recentes estudos sobre o problema da estabilidade e o aparecimento dos primeiros resultados em tempo real levam a crer que, tanto no campo da pesquisa como da indústria, deverá ser importante o impacto desta nova geração de algoritmos adaptativos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Bellanger, "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis", Marcel Dekker, New York, 1987
- [2] C. Cowan and P. Grant, "Adaptive Filters", Prentice Hall, New Jersey, 1985
- [3] B. Widrow and S. D. Stearns, "Adaptive Signal Processing", Prentice Hall, New Jersey, 1985
- [4] O. Macchi et M. Bellanger, "Le Point sur le Filtrage Adaptatif Transverse", Onzieme Colloque GRETSI, Nice, Junho 1987
- [5] J. Mackoul "Linear Prediction: A Tutorial Review", Proceedings of IEEE, vol. 63, nº 4, Abril 1975, pp. 561-580
- [6] L. Ljung, M. Morf and D. Falconer, "Fast Calculation of gain Matrices for Recursive Estimation Schemes", Int. J. Control, 1978, vol 27, nº 1, pp. 1-19
- [7] G. Carayannis, D. Manolakis and N. Kalouptsidis, "A fast Sequential Algorithm for Least-Square Filtering and Prediction", IEEE Trans, on ASSP, vol. 31, nº 6, Dec 1986, pp 1394-1402.

- [8] J. Cioffi and T. Kailath, "Fast Recursive Least Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering", IEEE Trans on ASSP, vol. 32, n° 2, April 1984, pp. 304-337
- [9] J. M. Travassos-Romano and M. Bellanger, "Zeros and Poles of Linear Prediction Filters", Proceedings of EUSIPCO-86, Haia, Sept. 86, pp 123-126.
- [10] M. Bellanger, "Engineering Aspects of Fast Least Squares Algorithms in Transversal Adaptive Filters", Proceedings of ICASSP-87, Dallas, Abril 1987.
- [11] P. Fabre and G. Gueguen, "Fast Recursive Least Squares Algorithms: Preventing Divergence", Procs. of ICASSP-84, San Diego, pp. 1149-1152
- [12] D. Lin, "On Digital Implementation of the Fast Kalman Algorithms", IEEE Trans. on ASSP, vol. 32, n° 5, Out. 1984, pp. 998-1005
- [13] J. L. Botto "Stabilization of FLS Transversal Filters", Procs. of ICASSP-87, Dallas, Abril 1987.
- [14] D. T. Stock and T. Kailath, "Numerically Stable Fast RLS Transversal Filters", Procs. of ICASSP-88, New York, Abril 1988, pp. 1369-1373
- [15] A. Benallal and A. Gilloire, "A New Method to Stabilize Fast RLS Algorithms Based on a First-Order Model of the Propagation of Numerical Errors", Procs. of ICASSP-88, New York, Abril 1988, pp. 1373-1377.
- [16] R. Alcantara, J. Prado and C. Gueguen, "Fixed Point Implementation of Fast Kalman Algorithms Using a TMS 32010 Microprocessor", Procs. of EUSIPCO-86, Haia, pp. 1335-1338
- [17] J.M. Travassos-Romano et J. Strub, "Implantation en Temps Réel d'un Algorithme des Moindres Carrés Rapide Sur Microprocesseur de Traitement du Signal", a ser publicado na revista "Traitement du Signal" - 1988.

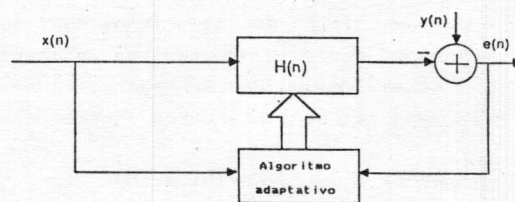


figura 1: Esquema de um filtro adaptativo

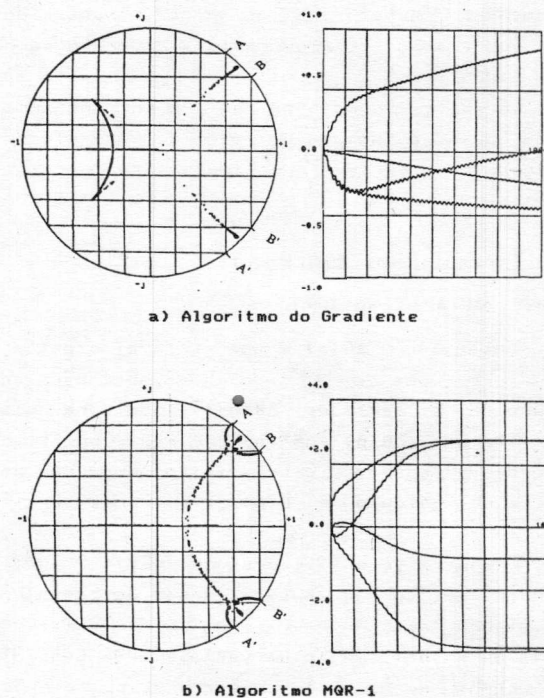


figura 2: Evolução dos zeros e dos coeficientes de um preditor adaptativo em presença de sinais senoidais.