



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



Ruth Micaely de Figueiredo Gomes

Uma Proposta de Ensino de Matrizes usando Recursos Tecnológicos

Campina Grande - PB

Agosto/2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Ruth Micaely de Figueiredo Gomes

Uma Proposta de Ensino de Matrizes usando Recursos Tecnológicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo

Campina Grande - PB

Agosto/2024

G633p Gomes, Ruth Micaely de Figueiredo.
Uma proposta de ensino de matrizes usando recursos tecnológicos /
Ruth Micaely de Figueiredo Gomes. – Campina Grande, 2024.
170 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo".
Referências.

1. Matrizes - Matemática. 2. Sequências Didáticas. 3. Recursos
Tecnológicos. 4. Ensino de Matemática. I. Bernardo, Leomaques Francisco
Silva. II. Título.

CDU 512.643:37(043)

Ruth Micaely de Figueiredo Gomes

Uma Proposta de Ensino de Matrizes usando Recursos Tecnológicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 02 de agosto de 2024:

Documento assinado digitalmente
gov.br LEOMAQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO
Data: 28/08/2024 12:30:58-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br MARIA JOSEANE FELIPE GUEDES MACEDO
Data: 28/08/2024 20:31:13-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Dra. Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo
Membro externo - UFERSA

Documento assinado digitalmente
gov.br LUIZ ANTONIO DA SILVA MEDEIROS
Data: 28/08/2024 12:49:17-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Àquela que me ofereceu colo nos momentos difíceis e celebrou cada conquista como se fosse sua. Seu apoio foi essencial para a realização deste trabalho.

Agradecimentos

Antes de tudo, a Deus, por me conceder força, sabedoria e perseverança para concluir esta etapa.

Em minha trajetória rumo ao título de Mestre em Matemática, fui agraciada com o apoio, incentivo e torcida de pessoas que se tornaram pilares em minha vida, tanto aquelas que já me acompanhavam quanto as que cruzaram meu caminho e conquistaram meu carinho e respeito. Cada uma delas possui um valor inestimável em minha jornada.

Agradeço de modo especial a cada pessoa que me amparou em cada passo desta jornada, me inspirando, me motivando e me impulsionando a alcançar este sonho. Tenha a certeza que sua luz me guiou nos momentos de dúvida e sua força me sustentou nos desafios. Que a vida lhe retribua em dobro toda a bondade que me dedicou.

À minha família, em nome da minha mãe, meu porto seguro e fonte inesgotável de amor e incentivo, que sempre valorizou a educação e me incentivou a buscar meus sonhos, agradeço por compreender a minha ausência e por me apoiar incondicionalmente nesta jornada. Sem a senhora, esta conquista não seria possível.

Aos meus amigos, os garotinhos Geovane Tavares e Tiago Melo, minha profunda gratidão por toda a força, apoio e amizade incondicional que me ofereceram ao longo desse período. Agradeço por cada conhecimento compartilhado, por cada hora de estudo em sua companhia, que tornaram essa caminhada mais leve e enriquecedora. Vocês são verdadeiros amigos e companheiros, e levarei essa amizade para sempre em meu coração.

Aos meus colegas da turma PROFMAT UFCG 2022, minha sincera gratidão pela amizade, companheirismo e aprendizado compartilhado. Juntos, superamos desafios, trocamos experiências e construímos laços que levarei para sempre. Cada um de vocês contribuiu para meu crescimento profissional e pessoal, tornando essa jornada inesquecível. Em nome da querida presidente de turma, Silvana, meu profundo agradecimento por sua liderança, dedicação e proatividade. Sua capacidade de tomar a frente e resolver as questões da turma com eficiência foi fundamental para o nosso sucesso. Sua energia contagiante e seu comprometimento com o bem-estar de todos os colegas são exemplos a serem seguidos. Aqui também quero mencionar o meu amigo Geovane, meu profundo agradecimento por sua generosidade e disposição em compartilhar seu tempo e conhecimento conosco. Sua iniciativa em organizar grupos de estudos e web-conferências, mesmo durante as noites e finais de semana, foi fundamental para o nosso aprendizado e crescimento. Sua dedicação e comprometimento com a turma são admiráveis e merecem todo o meu reconhecimento.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFCG vinculados ao PROF-

MAT, meu profundo agradecimento pela dedicação, conhecimento e paixão pela matemática que nos transmitiram durante essa jornada. Suas aulas, orientações e incentivos foram fundamentais para o meu desenvolvimento profissional e pessoal. Agradeço por compartilharem conosco suas experiências, desafios e conquistas, nos inspirando a seguir em frente e a buscar sempre o melhor.

À coordenação do curso, em especial ao Prof. Dr. Romildo, que nos guiou com sabedoria e dedicação durante dois anos, e à Prof. Dra. Deise, que assumiu a coordenação este ano. Agradeço pela organização, suporte e incentivo oferecidos ao longo do curso, que foram fundamentais para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

Ao meu querido orientador, Dr. Leomaques, meu profundo agradecimento pela orientação, paciência e confiança depositada em mim durante todo o desenvolvimento desta dissertação. Sua expertise, conhecimento e paixão pelo ensino de matemática foram fontes de inspiração e motivação para mim. Agradeço pelas discussões enriquecedoras, pelos conselhos sábios e pelo apoio constante que me permitiram superar os desafios e alcançar este objetivo. Sou eternamente grata por sua orientação e amizade.

Aos professores Luiz Antônio e Joseane, membros da banca examinadora, meu sincero agradecimento por aceitarem o convite para avaliar este trabalho.

À secretária Isabela e à querida Aninha, em nome de todos os funcionários da UAMat, meu sincero agradecimento pela dedicação, profissionalismo e gentileza. Vocês foram peças fundamentais para o bom funcionamento do curso, sempre dispostas a ajudar e a nos proporcionar um cafezinho. Agradeço pela paciência, atenção e carinho com que nos trataram, tornando nossa experiência no PROFMAT ainda mais especial.

Aos meus companheiros de viagem, que compartilharam comigo as angústias, as lutas, as superações, os cafés da manhã, as madrugadas e as noites de sexta-feira durante os muitos quilômetros percorridos: no primeiro ano, Tiago Melo, João Evayr e Lucivaldo, vocês foram meus parceiros de angústias, lutas e superação. Compartilhamos cafés da manhã nas madrugadas, noites de sexta-feira e muitos quilômetros de estrada, transformando a distância em momentos de aprendizado e amizade; no segundo ano, Márcia e Filipe, se juntaram a mim e Tiago Melo, trazendo novas perspectivas e energias. Juntos, enfrentamos os desafios com bom humor e perseverança, fortalecendo ainda mais os laços que nos uniram. A todos vocês, meu sincero agradecimento por cada palavra de incentivo, cada abraço amigo e cada momento de alegria compartilhado. Vocês tornaram essa jornada mais leve e significativa, e levarei cada um de vocês com carinho em meu coração.

À equipe gestora e professores da EREM Normal Estadual Professora Ione de Goes Barros, em especial à Gestora Edjane Gomes, meu sincero agradecimento pelo apoio e compreensão durante toda a minha trajetória no PROFMAT. Agradeço à Edjane Gomes por sua solicitude e incentivo, que foram fundamentais para que eu pudesse concii-

liar minhas responsabilidades profissionais com os estudos. Aos amigos do Laboratório de Matemática, meu profundo agradecimento por sua amizade, seu companheirismo seu apoio e seu incentivo. Em nome de Marcinha, que foi quem me “empurrou” para fazer a inscrição do ENA, agradeço a todos vocês.

Aos meus queridos alunos, que com entusiasmo e curiosidade aceitaram participar da eletiva e contribuir com a pesquisa, meu sincero agradecimento. Sua participação ativa, suas ideias e questionamentos foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço pela confiança depositada em mim e pela oportunidade de aprender e crescer juntos nesta jornada. Vocês são a razão de ser do meu trabalho como professora, e sou grata por tê-los como alunos.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, meu profundo agradecimento por idealizar e proporcionar o PROFMAT, um programa que tem transformado a vida de tantos professores de Matemática em todo o país. Agradeço pela oportunidade de aprimorar meus conhecimentos, ampliar minha visão sobre a Matemática e me conectar com outros profissionais apaixonados pela área.

*“A tarefa não é tanto
ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda
pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”
(Arthur Schopenhauer)*

Resumo

Neste trabalho pretendeu-se explorar a importância e a eficácia dos Recursos Tecnológicos no Ensino de Matrizes através de Sequências Didáticas. A motivação do nosso estudo partiu de ver tamanha relevância desse conteúdo no Ensino de Matemática e da inquietação, enquanto professora da Educação Básica, da não obrigatoriedade deste conteúdo no contexto da Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Deste modo, surgiu como problema norteador: Como o uso de recursos tecnológicos através de sequências didáticas podem favorecer o ensino e a aprendizagem de matrizes no ensino médio? Delimitou-se como objetivo principal analisar o impacto do uso de recursos tecnológicos através de sequências didáticas no ensino e na aprendizagem de matrizes, utilizando ferramentas tecnológicas modernas para facilitar o aprendizado. A metodologia de trabalho envolveu a criação de sequências didáticas que integrou o uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) para ensinar o conceito de matrizes. As sequências didáticas foram projetadas para serem interativas, envolventes e centradas no aluno, promovendo um ambiente de aprendizado ativo. A proposta foi implementada em uma disciplina eletiva do ensino médio em uma turma de 2º ano, permitindo flexibilidade no currículo e abordagem pedagógica. Espera-se que a implementação dessa proposta não só melhore a compreensão dos alunos sobre matrizes, mas também desenvolva suas habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas. Além disso, o uso de TDICs pode preparar os alunos para o mundo digital e aumentar sua competência digital. Desta forma, destacamos o papel fundamental que a Tecnologia pode desempenhar na melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Matrizes. Sequências Didáticas. Recursos Tecnológicos.

Abstract

This work intended to explore the importance and effectiveness of Technological Resources in Matrices Teaching through Didactic Sequences. The motivation for our study came from seeing such relevance of this content in Mathematics Teaching and from the concern, as a Basic Education teacher, to see the non-obligation of this content in the context of the National Common Curricular Base – BNCC. Thus, the guiding problem emerged: How can the use of technological resources through didactic sequences favor the teaching and learning of matrices in high school? The main objective was to analyze the impact of the use of technological resources through didactic sequences in teaching and learning matrices, using modern technological tools to facilitate learning. The work methodology involved the creation of didactic sequences that integrated the use of Digital Information and Communication Technologies (TDICs) to teach the concept of matrices. The teaching sequences are designed to be interactive, engaging and student-centered, promoting an active learning environment. The proposal was implemented in a high school elective course in a 2nd year class, allowing flexibility in the curriculum and pedagogical approach. It is expected that the implementation of this proposal will not only improve students' understanding of matrices, but also develop their critical thinking and problem-solving skills. Furthermore, the use of TDICs can prepare students for the digital world and increase their digital competence. In this way, we highlight the fundamental role that Technology can play in improving the teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Matrices. Didactic Sequences. Technological Resources.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Página do capítulo Fang Cheng (“Matrizes retangulares”) do livro Jiu Zhang Suan Shu.	24
Figura 2 – Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)	29
Figura 3 – James Joseph Sylvester (1814 - 1897)	30
Figura 4 – Arthur Cayley (1821-1895)	30
Figura 5 – Azul	122
Figura 6 – Violeta	122
Figura 7 – Vermelho	122
Figura 8 – Material didático de apoio do grupo Azul	126
Figura 9 – Material didático de apoio do grupo Azul Marinho	127
Figura 10 – Material didático de apoio do grupo Vermelho	128
Figura 11 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 2	132
Figura 12 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 2	133
Figura 13 – Material didático de apoio do grupo Verde Bandeira - SD 2	134
Figura 14 – Material didático de apoio do grupo Verde Bandeira - SD 2	135
Figura 15 – Material didático de apoio do grupo Azul - SD 2	136
Figura 16 – Material didático de apoio do grupo Azul - SD 2	137
Figura 17 – Material didático de apoio do grupo Violeta - SD 3	141
Figura 18 – Material didático de apoio do grupo Violeta - SD 3	141
Figura 19 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 3	142
Figura 20 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 3	143
Figura 21 – Material didático de apoio do grupo Azul Marinho - SD 3	144
Figura 22 – Material didático de apoio do grupo Azul Marinho - SD 3	144
Figura 23 – Em sua opinião, o uso de recursos tecnológicos contribuiu para o seu aprendizado de matrizes?	146
Figura 24 – Em comparação com aulas tradicionais de matemática, você acredita que o uso de recursos tecnológicos tornou as aulas de matrizes mais:	148
Figura 25 – O uso de planilhas eletrônicas para representar e manipular matrizes foi útil para você?	150
Figura 26 – Você já tinha algum conhecimento sobre o GeoGebra antes dos encontros?	152
Figura 27 – Alguns comentários sobre a disciplina eletiva	155

Lista de tabelas

Tabela 1 – Sequência Didática 4 proposta por Zabala	64
Tabela 2 – Vendas de livros de uma editora	123
Tabela 3 – Medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas – 2008 a 2020 .	130
Tabela 4 – Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 – 2022).	139
Tabela 5 – Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 – 2022).	139

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	20
1.1.1	Objetivo Geral	20
1.1.2	Objetivos Específicos	20
1.2	Organização	21
2	UM POUCO DA EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS MATRIZES	23
2.1	Origem das Matrizes	23
2.2	Primeiros Desenvolvimentos	28
2.3	Reconhecimento da Importância das Matrizes	33
3	MATRIZES	35
3.1	Matrizes Especiais	35
3.2	Igualdade	37
3.3	Adição	37
3.4	Produto de número por matriz	39
3.5	Produto de matrizes	40
3.6	Matriz transposta	42
3.7	Matrizes inversíveis	44
4	TDICS: CONCEITO E APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO	45
4.1	Uma análise comparativa: Tecnologia, TICs e TDICs	45
4.2	A influência das Tecnologias Digitais na educação	47
4.3	TDICs no Ensino de Matemática	53
4.3.1	Transformações no Ensino de Matemática	53
4.3.2	O Papel das Tecnologias no Ensino de Matemática	55
4.3.3	Softwares e o Ensino de Matemática	57
5	SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS	62
5.1	Sequência Didática 1 - Da teoria à prática: Explorando a introdução às matrizes e sua aplicação em planilhas eletrônicas	65
5.2	Sequência Didática 2 - Tipos de Matrizes: Uma abordagem didática com enfoque em tecnologia e aplicações práticas	78
5.3	Sequência Didática 3 - Operações Matriciais com GeoGebra e Planilhas Eletrônicas	92

6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	120
6.1	Metodologia	120
6.2	Apresentação e aplicação da Situação-problema 2 da primeira SD	123
6.2.1	Situação-problema 2: Vendas de livros no primeiro trimestre do ano	123
6.3	Apresentação e aplicação da Situação-problema 3 da segunda SD	129
6.3.1	Situação-problema 3: Medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas de 2008 a 2020	130
6.4	Apresentação e aplicação da Situação-problema 4 da terceira SD	138
6.4.1	Situação-problema 4: Transplante de órgãos realizados no Brasil nos anos de 2021 e 2022	138
6.5	Análise dos Resultados – Parte 1 do Questionário	145
6.6	Análise dos Resultados - Parte 2 do Questionário	149
6.6.1	Avaliação Específica: Planilhas Eletrônicas	149
6.6.2	Avaliação Específica: Geogebra	151
6.7	Impacto do uso de Planilhas Eletrônicas e do GeoGebra no Ensino de Matrizes	154
6.8	Análise dos Resultados - Parte 3 do Questionário	154
6.9	Análise dos Resultados - Parte 4 do Questionário	155
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	157
	REFERÊNCIAS	160
	APÊNDICES	165
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA EXPERIÊNCIA DOS ALUNOS COM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS	166

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina fundamental na Educação, ela fornece aos alunos habilidades essenciais que são aplicáveis em uma variedade de campos. Um dos tópicos importantes no Currículo de Matemática é o estudo de matrizes. O Ensino de matrizes é uma ferramenta importante que permite aos alunos resolver sistemas de equações lineares, desenvolver habilidades como o raciocínio lógico, a abstração, a interpretação e a resolução de problemas. No entanto, muitos estudantes apresentam dificuldades em compreender e aplicar esse conteúdo, seja pela sua complexidade, pela falta de motivação ou pelo método tradicional de ensino.

Nesse contexto, surge a necessidade de buscar novas estratégias pedagógicas que possam facilitar o aprendizado dos alunos e tornar o ensino de matrizes mais dinâmico, significativo e contextualizado. Uma dessas estratégias é o uso de recursos tecnológicos que podem oferecer diferentes formas de representação, manipulação e exploração desse conteúdo, além de possibilitar a interação, a colaboração e o feedback entre os alunos e o professor. Como afirma Ludvig (2016, p. 2),

uma das maneiras mais eficazes de motivar os alunos que realmente querem construir conhecimento e desenvolver uma aprendizagem significativa é a utilização de metodologias que permitam o aprendente a manipular e construir os conceitos estudados, quando por meio dessa prática, ele possa vir a fazer relações e buscar aplicações dos conteúdos estudados em seu cotidiano.

Contudo, a eficácia desses recursos tecnológicos no ensino de matrizes ainda não foi totalmente explorada, uma vez que ela depende de vários fatores, como a qualidade do recurso tecnológico, a maneira como é integrado ao currículo e ao ensino, e a capacidade do professor de usá-lo efetivamente. Além disso, diferentes alunos podem responder de maneira distinta à tecnologia, dependendo de seus estilos de aprendizagens individuais.

Outra estratégia que pode contribuir para o aprendizado de matrizes é a utilização de Sequências Didáticas, que são conjuntos de atividades planejadas e articuladas com um objetivo comum, seguindo uma progressão lógica e coerente. As Sequências Didáticas podem favorecer a construção do conhecimento dos alunos, partindo dos seus saberes prévios, passando por situações desafiadoras e chegando a uma síntese conceitual.

A problemática que norteia esta pesquisa é: como o uso de recursos tecnológicos através de Sequências Didáticas podem favorecer o ensino e a aprendizagem de matrizes no ensino médio? A justificativa da pesquisa se baseia na relevância do tema para a Educação Matemática; na escassez desse tema no contexto da Base Nacional Comum

Curricular (BNCC), tendo em vista que esse conteúdo tão importante, especialmente para os discentes que pretendem seguir na área das exatas, foi basicamente excluído da BNCC bem como do Organizador Curricular do Estado de Pernambuco; na possibilidade de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de matrizes.

A BNCC é um documento que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. A BNCC é norteada por dez competências gerais, que são habilidades que os alunos devem desenvolver para serem cidadãos críticos e aptos para o mundo do trabalho. A segunda competência geral da BNCC diz respeito à “curiosidade intelectual”. Essa competência destaca a importância de despertar e desenvolver a curiosidade dos alunos, de modo que eles sejam capazes de investigar, refletir e resolver problemas. Conforme detalhado no documento, o estudante deve:

exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

A habilidade de criar soluções, bem como a de resolver e formular problemas é um aspecto fundamental da competência geral da curiosidade intelectual. Essa destreza permite que os alunos reconheçam problemas em diversas situações da vida cotidiana, desenvolvam soluções criativas para esses e formulem novos problemas a partir de suas observações e experiências.

Nessa perspectiva, o ensino de matrizes pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade outrora citada, pois permite que os alunos representem dados de forma organizada e eficiente, encontrem soluções de sistemas lineares de forma rápida e precisa e desenvolvam raciocínio lógico e pensamento crítico. Além disso, pode ser um importante instrumento para a promoção da curiosidade intelectual e do desenvolvimento de habilidades essenciais no cotidiano dos discentes.

Explorar e questionar são aspectos fundamentais do Ensino de Matemática e de suas várias perspectivas. O uso de tecnologias digitais é uma abordagem que nos permite construir uma nova visão, procurando caminhos, estratégias e ferramentas para aprimorar o ensino. Na função do educador, o estímulo ao uso de tecnologias digitais deve ser uma ferramenta essencial para fazer com que os discentes tomem apreço pela Matemática.

Apoiar-se em documentos norteadores nos permite trilhar alguns caminhos que podem levar o aluno a construir uma base sólida. A Matemática é uma disciplina dinâmica

e desafiadora, e é nosso papel como educadores facilitar a jornada de aprendizado por meio da integração eficaz da tecnologia.

A BNCC enfatiza que o uso das tecnologias no ambiente escolar amplia as alternativas de experiências, facilitando a aprendizagem. Isso ocorre porque as tecnologias podem estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico, a formulação, o teste de conjecturas e a construção de argumentações. Nos textos introdutórios da BNCC, é notável o apelo à inclusão das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na intersecção do aprendizado de disciplinas tradicionais, como Português e Matemática.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) conceituam a tecnologia como a transformação da ciência em força produtiva ou mediação do conhecimento científico. Elas destacam que a tecnologia está marcada, desde sua origem, pelas relações sociais que a levaram a ser produzida (BRASIL, 2018). Os documentos oficiais apontam que o uso das tecnologias no ensino de matemática pode trazer diversos benefícios para os estudantes. No entanto, é importante que os professores estejam preparados para utilizar as tecnologias de forma eficaz, selecionando softwares adequados e desenvolvendo atividades que sejam significativas para os estudantes.

Explorar estratégias didáticas eficazes para o ensino de Matemática é algo desejável, e a utilização das Tecnologias da Informação pode ser uma abordagem interessante para aprimorar a aprendizagem dos alunos (MORAN; MASSETO; BEHRENS, 2012).

A BNCC, em relação ao ensino da Matemática, prevê como uma de suas competências: “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados e problemas” (BRASIL, 2018, p. 538). Desta forma, incluir o registro computacional como um meio possível de utilização na abordagem de conteúdos matemáticos, evidencia o reconhecimento e a validade dessa estratégia de ensino.

A presença de tecnologia na educação é um aspecto que acompanha a evolução do ensino. Esses recursos, que foram criados para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem, estão cada vez mais presentes em diversas áreas do conhecimento. Com a crescente familiaridade dos alunos com as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), torna-se essencial integrá-las ao ambiente escolar. Isso reflete a necessidade de um novo modelo de escola que reconheça e utilize a tecnologia como uma ferramenta valiosa para a formação dos alunos.

O uso adequado do computador nas aulas de Matemática proporciona um ambiente inovador e potencializa tanto o ensino quanto a aprendizagem. É crucial que o educador seja inovador, procurando métodos pedagógicos que se adequem à realidade do estudante. Existem inúmeros recursos disponíveis na internet que o professor pode utilizar para gerenciar suas aulas, como softwares e outros recursos (apresentações,

simulações, plataformas e fóruns) que podem enriquecer o ensino e a aprendizagem.

De acordo com Weiss e Cruz (1999, p. 39),

os softwares educativos possibilitam atividades que despertam a percepção visual, a organização espacial e temporal, o raciocínio lógico matemático, estimulando à curiosidade, a criatividade, a imaginação desenvolvendo a autonomia e a interpretação.

Os softwares nas aulas de Matemática devem ser vistos como um recurso complementar, oferecendo uma abordagem distinta para o ensino e a aprendizagem, incentivando os alunos a construir seu próprio conhecimento. Isso dá ao aluno uma perspectiva investigativa, ajudando-os a buscar informações e comparar soluções de problemas. Nesse processo, o professor se torna um facilitador, em vez de uma figura tradicionalista.

Como ferramenta de interlocução, utilizaremos a metodologia de Sequências Didáticas que é um caminho que possibilita, aos nossos alunos, organizar o processo de aprendizagem de forma clara, desenvolver habilidades de modo gradual, conseguir desenvolver a compreensão de maneira mais profunda, promover a construção do conhecimento com mais autonomia, permitindo que eles construam seu conhecimento de forma estruturada e significativa.

A aplicação das Sequências Didáticas se dará por meio de uma Disciplina Eletiva, visando uma complementação de conteúdo. Com a nova reorganização curricular do Estado de Pernambuco alguns conteúdos foram excluídos da grade, e uma solução para amenizar as perdas é introduzir uma disciplina optativa com uma ementa contemplando o que foi retirado. As Disciplinas Eletivas no Novo Ensino Médio são componentes-chave dos itinerários formativos. Isso implica que, além de selecionar um itinerário, o aluno terá a oportunidade de fazer escolhas adicionais dentro dele, personalizando ainda mais sua trajetória educacional.

As disciplinas eletivas não são obrigatórias, o que significa que a escola tem a liberdade de decidir quais Eletivas serão oferecidas e, entre essas opções, o estudante fará sua escolha. Não há uma lista predefinida de todas as possíveis disciplinas eletivas. Isso se deve ao fato de que essas componentes são destinadas a aprofundar o conhecimento, tornando as temáticas e, conseqüentemente, as possibilidades praticamente ilimitadas.

Enquanto professora de Matemática da Educação Básica, percebo quão grande é o prejuízo para os alunos a retirada desse tão importante tópico, uma vez que ele permite que eles desenvolvam habilidades matemáticas importantes e as usem para resolver problemas reais fazendo com que compreendam o mundo ao seu redor. Ademais, esse componente curricular tem diversas aplicações, não somente na Matemática, mas em outras áreas do conhecimento, a exemplo das Engenharias, Computação, Economia, dentre outras áreas, além de ser um pré-requisito para muitos cursos de graduação.

Por outro lado, analisando a Matriz de referência de Matemática do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) do ensino médio, podemos destacar o descritor “D31 - Determinar a solução de um sistema linear associando-o à uma matriz” (BRASIL, 2022, p. 9). O SAEB é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) realizar um diagnóstico da Educação básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante. Por meio de testes e questionários, aplicados a cada dois anos na rede pública e em uma amostra da rede privada, o SAEB reflete os níveis de aprendizagem demonstrados pelos estudantes avaliados. Os resultados permitem que as escolas e as redes municipais e estaduais de ensino avaliem a qualidade da Educação ofertada.

Essa avaliação externa possui escalas de proficiência que possibilitam a determinação dos níveis de aprendizado dos estudantes com base nos resultados obtidos na aplicação do teste. As escalas de proficiência do SAEB podem ser visualizadas como régua que permitem aferir as habilidades dominadas pelos alunos do nível mais baixo para o mais alto, de forma contínua. Essas escalas foram divididas em níveis, que indicam o que os alunos que se encontram em determinado nível sabem ou são capazes de fazer.

Observando as escalas de proficiência de Matemática do 3º ano do ensino médio (BRASIL, 2020), podemos destacar algumas habilidades referentes ao tema aqui abordado e o nível (os níveis variam do 1 ao 10) na qual se encontram:

- Determinar a solução de um sistema de duas equações lineares – Nível 4 (Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325);
- Determinar a solução de um sistema de três equações sendo uma com uma incógnita, outra com duas e a terceira com três incógnitas – Nível 5 (Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350);
- Resolver problemas envolvendo um sistema linear, dadas duas equações a duas incógnitas - Nível 7 (Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400);
- Reconhecer um sistema de equações associado a uma matriz - Nível 8 (Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425);
- Determinar a solução de um sistema de três equações lineares, a três incógnitas, apresentado na forma matricial escalonada - Nível 10 (Desempenho maior ou igual a 450).

Em resumo, podemos evidenciar que o ensino de matrizes no ensino médio é crucial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas dos alunos em preparação para avaliações como o SAEB.

Por conseguinte, o intuito dessa Eletiva é trabalhar matrizes usando tecnologias digitais, integradas às Sequências Didáticas, com atividades contextualizadas e aplicações. A ideia de planejar ações de ensino com base em textos cuidadosamente organizados em torno desse objeto de aprendizagem se alinha às expectativas criadas em relação às novas atitudes também esperadas dos alunos.

Portanto, essa proposta de dissertação visa investigar como o uso de recursos tecnológicos através de Sequências Didáticas pode contribuir para o ensino e a aprendizagem das matrizes no ensino médio. Para isso, pretende-se realizar uma pesquisa-ação¹ com uma turma de Eletiva do Ensino Médio de uma escola pública, aplicando e avaliando uma Sequência Didática sobre matrizes que envolva diferentes recursos tecnológicos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar o impacto do uso de recursos tecnológicos através de Sequências Didáticas no ensino e na aprendizagem de matrizes.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento histórico e bibliográfico sobre as Matrizes, sobre o Ensino de Matrizes usando recursos tecnológicos e sobre Sequências Didáticas;
- Identificar os principais recursos tecnológicos disponíveis para o Ensino de Matrizes;
- Propor Sequências Didáticas que integrem os recursos tecnológicos ao conteúdo de matrizes;
- Aplicar as sequências didáticas em uma Disciplina Eletiva no 2º ano do Ensino Médio;
- Avaliar os resultados obtidos em termos de desempenho, interesse e satisfação dos alunos.

¹ De acordo com Barros e Lehfel'd (2014), a pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é desenvolvida e realizada com intensa associação com uma ação ou com uma realização de um problema coletivo no qual os pesquisadores e os participantes da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo e participativo.

1.2 Organização

Visando alcançar os objetivos delineados na Seção 1.1, este trabalho estrutura-se em sete capítulos. No Capítulo 1, exploramos a relevância do ensino de matrizes na Educação Básica, enfatizando a necessidade de inovar as estratégias pedagógicas. Investigamos como a combinação de recursos tecnológicos e Sequências Didáticas pode otimizar o aprendizado de matrizes, alinhando-se às competências da BNCC e explorando o potencial da tecnologia no ensino da matemática. Adicionalmente, apresentamos o problema de pesquisa, seus objetivos e a estrutura geral do trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos um breve histórico do desenvolvimento do conceito de matrizes, desde suas raízes na antiga China até a formalização da teoria no século XIX. Exploramos como a necessidade de lidar com sistemas de equações lineares e a manipulação de tabelas numéricas impulsionaram a criação e o desenvolvimento das matrizes. Além disso, destacamos as contribuições de matemáticos notáveis, como Gottfried Wilhelm Leibniz, Joseph-Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, James Joseph Sylvester e Arthur Cayley, que estabeleceram as bases da teoria das matrizes e suas aplicações.

No Capítulo 3 são apresentadas as definições formais de matrizes, seus elementos, linhas e colunas, bem como a notação matemática utilizada para representá-las. São explorados os diferentes tipos de matrizes, como matrizes quadradas, diagonais, identidade, nulas, triangulares, linha e coluna, e suas propriedades específicas. O capítulo aborda as operações fundamentais com matrizes, incluindo adição, subtração, multiplicação por escalar, multiplicação entre matrizes e transposição, com algumas demonstrações.

No Capítulo 4 exploramos o impacto das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação, com foco no Ensino de Matemática. Apresentamos uma análise comparativa entre tecnologia, TICs e TDICs, destacando as características e aplicações de cada uma no contexto educacional. Discutimos a influência das TDICs na transformação das práticas pedagógicas, na personalização do ensino e na promoção da aprendizagem ativa e colaborativa. Nesse capítulo também abordamos o papel das TDICs no Ensino de Matemática, com ênfase no uso de softwares como planilhas eletrônicas e GeoGebra para a visualização, manipulação e resolução de problemas envolvendo matrizes.

No Capítulo 5 propomos as Sequências Didáticas para o ensino de matrizes utilizando ferramentas como planilhas eletrônicas e o software GeoGebra. Mostramos elas detalhadas em etapas, com objetivos, recursos e procedimentos metodológicos bem definidos, incluindo a avaliação e sugestões para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem.

No Capítulo 6 trazemos os resultados da aplicação das Sequências Didáticas propos-

tas no capítulo anterior, analisando o desempenho dos alunos e o impacto das TDICs no processo de ensino-aprendizagem de matrizes. Discutiremos os desafios e as potencialidades do uso de tecnologias digitais com base na análise dos dados coletados e nas observações realizadas durante a aplicação. Além disso, serão apresentadas as percepções dos alunos sobre a experiência de aprendizado com o uso de TDICs e suas contribuições para a compreensão do conteúdo de matrizes.

No Capítulo 7, consolidamos os principais resultados e conclusões deste trabalho, refletindo sobre o percurso da pesquisa e as diversas contribuições da metodologia adotada. A partir dessa análise, delineamos as potencialidades e direções para futuras investigações, reconhecendo também as limitações inerentes ao nosso estudo.

2 UM POUCO DA EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS MATRIZES

As matrizes representam uma das ferramentas mais versáteis na matemática moderna, uma vez que são usadas em uma ampla gama de aplicações: desde a resolução de sistemas de equações lineares até a representação de transformações lineares e a modelagem de redes complexas. No entanto, apesar de sua tamanha importância na matemática contemporânea e em campos relacionados, a teoria das matrizes é um desenvolvimento relativamente recente na história da Matemática.

A história das matrizes é interessante, pois reflete a evolução do pensamento matemático em resposta a desafios práticos e teóricos. As matrizes surgiram de uma necessidade de lidar com múltiplas equações lineares de uma maneira sistemática. No entanto, ao longo do tempo, os matemáticos começaram a reconhecer que as matrizes tinham propriedades e estruturas interessantes por si só, levando ao desenvolvimento de uma teoria de matrizes robusta.

Exploraremos a origem das matrizes, seu desenvolvimento inicial e como elas foram gradualmente reconhecidas como um campo importante da Matemática. Também discutiremos como as matrizes foram aplicadas em diferentes contextos e como elas se tornaram uma ferramenta indispensável na Matemática moderna.

2.1 Origem das Matrizes

Embora as matrizes como as conhecemos hoje tenham sido formalmente introduzidas no século XIX, a ideia de organizar números ou quantidades em uma grade retangular remonta a tempos antigos. Os babilônios, por exemplo, usavam tábuas de argila para registrar tabelas de multiplicação, que são essencialmente matrizes unidimensionais (GONÇALVES, 2022).

Bernardes e Roque (2016, p. 2) afirmam que: “ao comparar a ordem de exposição de alguns conceitos matemáticos com a ordem com a qual os mesmos surgiram na história, é comum se deparar com uma inversão. O conceito de matriz surgiu depois das noções de determinantes, sistemas lineares [...]”. Os determinantes, que são números associados a matrizes quadradas, foram usados inicialmente para resolver sistemas de equações lineares.

Na China, entre os séculos II a.C. e I a.C., uma coleção de textos foi compilada no livro *Jiu Zhang Suan Shu*, que provavelmente foi escrito por vários autores, com o objetivo de organizar o conhecimento matemático da época. *Jiu* e *Zhang* são tra-

duzidos como “nove capítulos”, e *Suan* e *Shu* como “aritmética”. No entanto, esses termos provavelmente teriam um significado mais próximo de “a arte dos números” ou “procedimentos de cálculo”. Hoje em dia, esse livro é comumente conhecido como “Os nove capítulos da arte matemática”.

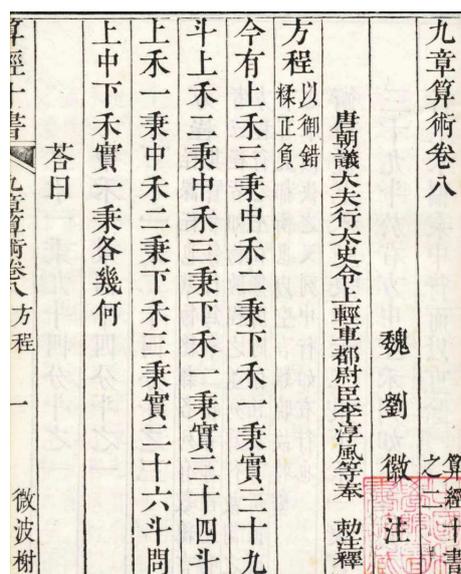
Segundo Dante (2020), esse livro contém 246 problemas práticos, destinados a apresentar métodos para resolver uma variedade de problemas matemáticos do cotidiano, bem como aqueles relacionados à engenharia, topografia, comércio e tributação. Devido à qualidade dos exemplos, a obra teve um papel crucial no desenvolvimento subsequente da Matemática na China.

Se a matemática chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática, mas a cultura chinesa foi seriamente prejudicada por quebras abruptas. Em 213 a.C., por exemplo, o imperador da china mandou queimar livros (BOYER, 1996, p. 135).

Um dos problemas apresentados na obra citada anteriormente é traduzido para o português a seguir (DANTE, 2020):

“Existem três tipos de milho, dos quais três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro somam 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo?”

Figura 1 – Página do capítulo Fang Cheng (“Matrizes retangulares”) do livro Jiu Zhang Suan Shu.



Fonte: (DANTE, 2020)

No livro referido, os dados contidos nesse problema são organizados, como podemos observar a seguir, dispostos da direita para a esquerda, conforme a cultura oriental:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 26 & 34 & 39 \\ \hline \end{array}$$

Os chineses apreciavam o uso de diagramas e a representação do problema mencionado através de um sistema de equações lineares simultâneas era construída por meio de matrizes (na época, conhecidas simplesmente como quadrados), conforme descrito por Boyer (1996):

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \quad (2.1)$$

Em seguida, efetuavam-se operações sobre colunas na matriz

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 26 & 34 & 39 \\ \hline \end{array} \quad \text{para reduzi-la a} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 5 & 2 \\ \hline 36 & 1 & 1 \\ \hline 99 & 24 & 39 \\ \hline \end{array}$$

A segunda forma representava as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de z , y e x (BOYER, 1996).

Vejam as operações que podemos realizar para obter a matriz reduzida. Antes de efetuarmos, vamos escrever o sistema (2.1) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Daí, realiza-se as operações entre as linhas da matriz (2.2):

- i.* Deve-se multiplicar todos os termos da segunda linha (2 3 1 34) pelo primeiro termo da primeira linha. Obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 6 & 9 & 6 & 102 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

ii. Deve-se subtrair de cada elemento da segunda linha os seus respectivos valores localizados na primeira linha ($6 - 3 = 3; 9 - 2 = 7; 3 - 1 = 2; 102 - 39 = 63$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 3 & 7 & 2 & 63 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

iii. Repete-se o 2º passo até que o primeiro elemento da segunda linha seja nulo ($3 - 3 = 0; 7 - 2 = 5; 2 - 1 = 1; 63 - 39 = 24$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

iv. Repete-se 1º e o 2º passo entre as linhas 1 e 3, para que seja encontrado o valor nulo para o primeiro elemento da terceira linha ($3 \cdot 1 = 3; 3 \cdot 2 = 6; 3 \cdot 3 = 9; 3 \cdot 26 = 78$); ($3 - 3 = 0; 6 - 2 = 4; 9 - 1 = 8; 78 - 39 = 39$).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{pmatrix}.$$

v. Multiplica-se a segunda linha por 4 e a terceira por 5, em seguida subtrai-se a segunda linha da terceira ($20 - 20 = 0; 40 - 4 = 36; 195 - 96 = 99$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{pmatrix}.$$

De sorte, com essa matriz, obtemos o sistema que representa as equações que nos fornece a solução do problema apresentado:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ + 5y + z = 24 \\ + + 36z = 99 \end{cases}.$$

Dessa forma, podemos observar que os chineses, há mais de dois milênios, já utilizavam organizações em linhas e colunas com o propósito de coletar dados de um problema. No entanto, a representação de conjuntos de números na forma de matrizes, como fizemos para a resolução, só surgiu no século XIX (DANTE, 2020).

Na Europa, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz trabalhou com determinantes no século XVII, embora ele não tenha desenvolvido uma teoria abrangente.

De acordo com Boyer (1996), é atribuída a Leibniz a primeira referência no Ocidente ao método de determinantes. Em correspondências enviadas a L'Hospital em 1693, Leibniz mencionou que, de vez em quando, ele empregava números para representar linhas e colunas em um conjunto de equações simultâneas, como podemos observar a seguir:

$$\begin{array}{l} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 31y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} 1_0 + 1_1x + 1_2y = 0 \\ 2_0 + 2_1x + 2_2y = 0 \\ 3_0 + 3_1x + 3_2y = 0 \end{array}$$

Escrevíamos isso como:

$$\begin{array}{l} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{array} .$$

Se as equações são consistentes então,

$$\begin{array}{l} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 \end{array} = \begin{array}{l} 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 \end{array}$$

que equivale ao enunciado moderno:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Essa antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada em 1850 e teve que ser redescoberta mais de meio século depois (BOYER, 1996, p. 279).

Joseph-Louis Lagrange, um matemático da Revolução Francesa, fez contribuições significativas para o desenvolvimento da teoria das matrizes. Ele trabalhou com o estudo de determinantes e, inconscientemente, usou matrizes em seu trabalho. Segundo Strang (2005), a noção de matriz foi usada implicitamente pela primeira vez por Lagrange quando ele reduziu a caracterização dos máximos e mínimos de uma função real de várias variáveis ao estudo do sinal da forma quadrática associada à matriz das segundas derivadas dessa função.

Conforme Boyer (1996), é a ele que devemos, principalmente, as representações simplificadas para calcular a área de um triângulo e o volume de um tetraedro, dadas respectivamente por:

$$\frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Esses resultados foram apresentados de maneira diferente em um artigo chamado “*Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*”, que foi apresentado em 1773 e publicado em 1775. Como percebemos, foi no século XVIII, que os matemáticos europeus começaram a estudar os determinantes de maneira mais sistemática.

Todavia, foi somente no século posterior que o matemático britânico Arthur Cayley introduziu a ideia de uma matriz como uma entidade matemática em si. Isso significa que, até então, as matrizes não eram tratadas como objetos matemáticos com propriedades próprias e uma teoria desenvolvida em torno delas. Com Cayley, as matrizes começaram a ser vistas e estudadas como objetos matemáticos autônomos, com suas próprias regras e teorias

Desde então, as matrizes têm desempenhado um papel cada vez mais importante na Matemática e em suas aplicações, com novos aspectos de sua teoria e novos usos sendo descobertos até hoje.

2.2 Primeiros Desenvolvimentos

Os primeiros desenvolvimentos significativos na teoria das matrizes ocorreram no século XIX, quando os matemáticos começaram a explorar as propriedades das matrizes além de sua relação com os determinantes.

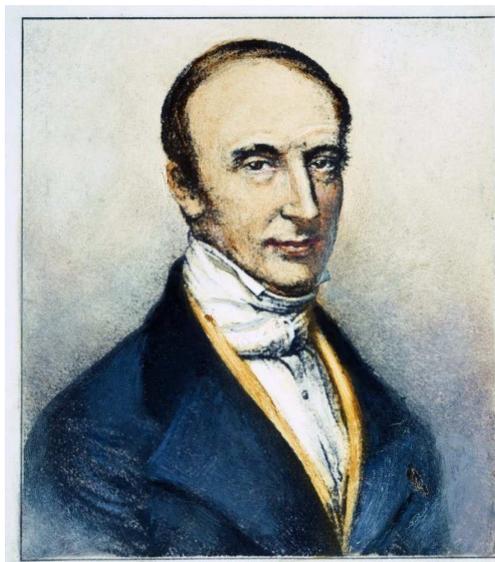
O matemático francês Augustin-Louis Cauchy fez contribuições significativas para a teoria das matrizes durante este período. Em 1826, ele introduziu o termo “tableau” para descrever o que agora chamamos de matriz. Cauchy usou esses “tableaux” para representar sistemas de equações lineares e desenvolveu métodos para manipulá-los.

No entanto, foi o matemático britânico James Joseph Sylvester quem cunhou o termo “matriz” em 1850, em um artigo publicado na “*Philosophical Magazine*”. Sylvester reconheceu que as matrizes tinham uma estrutura e propriedades interessantes por si só, além de sua utilidade na resolução de sistemas de equações lineares:

[...] um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isso não representará em si um determinante, mas é, por assim dizer, uma **Matriz** da qual podemos formar vários sistemas de determinantes fixando um número p , e selecionando à vontade p linhas e p colunas, os quadrados correspondentes aos quais podem ser denominados determinantes de p -ésima ordem (BREWSTER et al., 1850, p. 369, grifo nosso, tradução nossa).

Arthur Cayley, outro matemático britânico, no ano de 1858, em seu trabalho seminal intitulado “*A Memoir on the Theory of Matrices*”, também apresentou sua definição de matrizes:

Figura 2 – Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Fonte: (AMAZON.COM, 2024)

O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas neste tratado, considero apenas matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz usado sem qualificação deve ser entendido como significando uma matriz quadrada; neste sentido restrito, um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

é dito ser uma matriz. A noção de tal matriz surge naturalmente de uma notação abreviada para um conjunto de equações lineares, ou seja, as equações

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

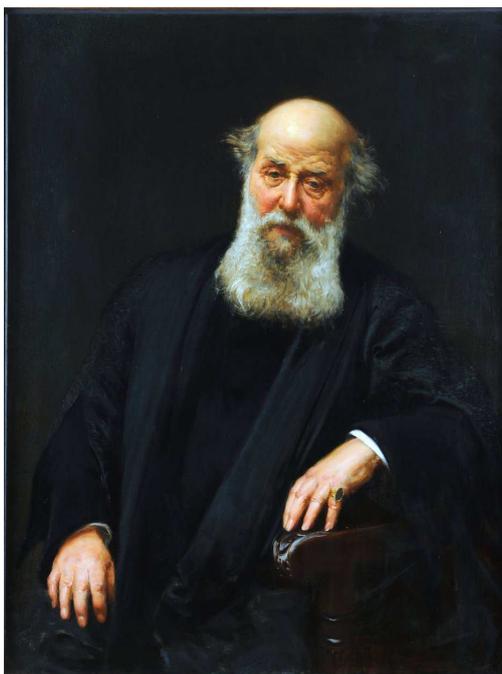
podem ser representadas de forma mais simples por

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

e a consideração de tal sistema de equações leva à maioria das noções fundamentais na teoria das matrizes (CAYLEY, 1858, p. 17, tradução nossa).

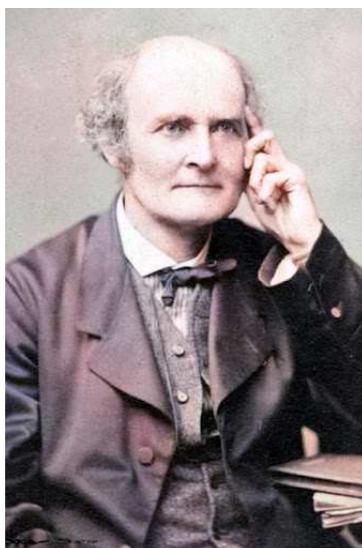
Como podemos perceber, Cayley (1858) lançou as bases para a teoria das matrizes, além de descrevê-las como um arranjo retangular de números em linhas e colunas, prefigurando a definição formal que utilizamos hoje. Para representar esses arranjos,

Figura 3 – James Joseph Sylvester (1814 - 1897)



Fonte: (MEISTERDRUCKE.IE, 2024)

Figura 4 – Arthur Cayley (1821-1895)



Fonte: (SCIHIBLOG, 2018)

empregou uma notação simples com parênteses e, que embora rudimentar em comparação com a utilizada atualmente, desempenhou um papel fundamental no avanço da álgebra matricial.

Além disso, esse matemático reconheceu a importância das matrizes na representação dos coeficientes de sistemas de equações lineares, onde cada linha da matriz

correspondia a uma equação e cada coluna a uma variável. Ele tratou as matrizes como objetos matemáticos independentes em vez de meras ferramentas auxiliares para resolver sistemas de equações lineares.

2. A notação

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right) (x, y, z)$$

representa o conjunto de funções lineares

$$((a, b, c)(x, y, z), (a', b', c')(x, y, z), (a'', b'', c'')(x, y, z)),$$

de modo que chamando-as de (X, Y, Z) , temos

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right) (x, y, z)$$

e, como observado acima, esta fórmula leva à maioria das noções fundamentais da teoria(CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa).

Antes de definir as operações, ele introduziu as definições de matriz nula e matriz unidade (identidade). Por conseguinte, observou que a adição ou subtração da matriz nula a qualquer outra matriz não altera o valor da matriz original, similarmente à propriedade do zero na álgebra convencional. Já a matriz identidade desempenha um papel análogo ao do número 1 na álgebra comum, pois a multiplicação de qualquer matriz pela matriz identidade (da mesma ordem) resulta na própria matriz original.

Cayley (1858) aborda a adição de matrizes de maneira concisa e direta, apresentando a regra a partir de um exemplo com sistemas de equações lineares e demonstrando que, ao somarmos duas equações lineares, os coeficientes das incógnitas na equação resultante são a soma dos coeficientes correspondentes nas equações originais. A partir dessa observação, ele generaliza a regra para a adição de matrizes e destaca que a subtração de matrizes segue o mesmo princípio:

4. As equações

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right) (x, y, z),$$

$$(X', Y', Z') = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right) (x, y, z)$$

dão

$$(X + X', Y + Y', Z + Z') = \left(\begin{array}{ccc} a + \alpha, & b + \beta, & c + \gamma \\ a' + \alpha', & b' + \beta', & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'', & b'' + \beta'', & c'' + \gamma'' \end{array} \right) (x, y, z)$$

e isso leva a

$$\left(\begin{array}{ccc} a + \alpha, & b + \beta, & c + \gamma \\ a' + \alpha', & b' + \beta', & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'', & b'' + \beta'', & c'' + \gamma'' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right)$$

como a regra para a adição de matrizes; a subtração delas é, obviamente, semelhante (CAYLEY, 1858, p. 19, tradução nossa).

Além da adição, o autor introduziu a multiplicação de matrizes, referindo-se a ela como “composição”. Ele destacou que a ordem das matrizes na multiplicação é importante, ou seja, a operação não é comutativa. A partir de um exemplo com três matrizes, ele generalizou a regra para a multiplicação de matrizes, explicando que qualquer termo da matriz composta é obtido combinando a linha correspondente da primeira matriz sucessivamente com as várias colunas da segunda matriz.

11. As equações

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} (\xi, \eta, \zeta),$$

dão

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &= \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} (\xi, \eta, \zeta) = \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} (\xi, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

e daí, substituindo a matriz

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

por seu valor, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \right) = \\ & \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \right) = \\ & = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como a regra para a multiplicação ou composição de duas matrizes. Deve-se observar que a operação não é comutativa; as matrizes componentes podem ser distinguidas como a primeira ou mais distante matriz componente e a segunda ou mais próxima matriz componente, e a regra de composição é a seguinte: qualquer termo da matriz composta é obtido combinando a linha correspondente da primeira ou mais distante matriz componente sucessivamente com as várias colunas da segunda ou mais próxima matriz componente (CAYLEY, 1858, p. 20-21, tradução nossa).

A abordagem de Cayley para as operações matriciais foi fundamental para estabelecer a álgebra de matrizes como uma disciplina matemática independente. Seu trabalho sistematizou operações que são agora fundamentais na álgebra linear, e muitas das propriedades e teoremas que ele identificou continuam a serem utilizados amplamente hoje.

Como podemos observar, Arthur Cayley revolucionou o entendimento sobre matrizes, transformando-as de simples ferramentas para solucionar problemas específicos em objetos matemáticos complexos, dotados de uma rica teoria própria, influenciando profundamente o desenvolvimento da Matemática moderna. Ele também mencionou algumas aplicações das matrizes, especialmente em resolver sistemas de equações lineares e em transformações lineares, destacando a importância prática de sua teoria.

Esses primeiros desenvolvimentos lançaram as bases para a teoria moderna das matrizes. Eles abriram o caminho para a exploração de conceitos mais avançados, como autovalores e autovetores, e a aplicação de matrizes em áreas como física e engenharia.

2.3 Reconhecimento da Importância das Matrizes

O reconhecimento da importância das matrizes na Matemática e em outras áreas do conhecimento não foi imediato. Inicialmente eram vistas como ferramentas para resolver sistemas de equações e calcular determinantes. No entanto, à medida que os matemáticos exploravam mais profundamente suas propriedades, começaram a perceber que as matrizes tinham seu valor intrínseco e potencial e, este, foi gradativamente revelado com o aprofundamento das pesquisas. Desde então as matrizes passaram a ser estudadas como um objeto matemático independente, com aplicações em diversas áreas.

Arthur Cayley, matemático britânico cujo trabalho pioneiro já foi mencionado, foi um dos primeiros a reconhecer esse potencial. Seu estudo seminal sobre matrizes, publicado em 1858, as tratou como entidades matemáticas independentes, explorando suas propriedades algébricas e introduzindo o conceito de representação de transformações lineares, fundamental na álgebra linear.

A partir daí a importância das matrizes cresceu exponencialmente, tornando-se essenciais em áreas como física teórica, estatística, economia, ciência da computação e engenharia. Atualmente, são reconhecidas como uma das estruturas matemáticas mais fundamentais, presentes em cursos de matemática em todo o mundo e objeto de pesquisa contínua. Segundo Costa e Lopes (2015),

os estudos de matrizes se justificam por contribuir com os avanços científicos e tecnológicos, destacando-se nos campos mais variados como: na engenharia, na informática, na administração, na economia, [...]. O ensino de matrizes traz consigo as ideias de estrutura, além

de constituir uma ferramenta que auxilia na resolução dos sistemas lineares. Sendo muito útil no ensino de Matemática de nível básico como um importante instrumento, tanto no uso em seu cotidiano quanto na Álgebra Linear estudada na Matemática do ensino superior (COSTA; LOPES, 2015, p. 3).

A história das matrizes é um testemunho da evolução do pensamento matemático. De uma modesta origem como ferramenta para resolver equações, elas cresceram em importância e complexidade, tornando-se pilares da matemática moderna. São parte indispensável de diversas áreas, modelando sistemas físicos, analisando redes complexas, processando imagens digitais e muito mais. A teoria das matrizes permanece um campo ativo de pesquisa, com novos resultados e aplicações sendo descobertos regularmente. Nessa perspectiva, Silva (2021) afirma que

a Álgebra Linear é, um dos mais velhos ramos da Matemática e, ao mesmo tempo, um dos mais novos. [...] devido à disponibilidade de computadores e calculadoras de grande manuseio, a Álgebra Linear tem emergido como pré-requisito para muitas áreas de aplicações. Como se pode observar, tais aplicações estendem desde tópicos como Programação linear geométrica, até Tomografia Computadorizada. Dessa forma, é possível perceber o quão importante e atual é o estudo deste ramo da Matemática, sendo necessário então que seu ensino esteja sempre em aperfeiçoamento (SILVA, 2021, p. 11).

Contudo, um dos aspectos mais impressionantes dessa abordagem histórica é a maneira como fica exemplificada a beleza e a elegância da Matemática. Essa trajetória exemplifica como ideias simples podem ser combinadas e generalizadas de maneiras surpreendentes para resolver problemas complexos. As matrizes são um lembrete de que, mesmo em um campo tão antigo quanto a Matemática, sempre há novas ideias a serem descobertas e novos caminhos a serem explorados.

Ao analisarmos o contexto histórico das matrizes, percebemos o percurso através da evolução do pensamento matemático, ilustrando como a Matemática continua a se desenvolver e a se adaptar para enfrentar novos desafios.

3 MATRIZES

Neste capítulo, estabeleceremos algumas definições de matrizes. Todas as definições e propriedades que serão apresentadas a seguir são baseadas nas obras dos autores: BOLDRINI et al. (1980), IEZZI e HAZZAN (2004), LIMA et al. (2005) e STEINBRUCH e WINTERLE (1987).

Definição 1. *Uma matriz $m \times n$ é uma lista de números a_{ij} , com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz M é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i -ésima linha com a j -ésima coluna:*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Para denotar uma matriz usamos uma letra maiúscula; quando quisermos especificar a ordem de uma matriz M (isto é, o número de linhas e de colunas, respectivamente), escreveremos $M_{m \times n}$.

Uma matriz M de ordem $m \times n$ também pode ser indicada por:
 $M = [a_{ij}]$; $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou simplesmente $M = [a_{ij}]_{m \times n}$.

3.1 Matrizes Especiais

A seguir apresentaremos alguns tipos de matrizes.

- i. **matriz linha** é toda matriz de ordem $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha:

$$\left[a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n} \right].$$

- ii. **matriz coluna** é toda matriz de ordem $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

iii. **matriz nula** é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

iv. **matriz quadrada de ordem n** é toda matriz de ordem $n \times n$, isto é, uma matriz que tem igual número de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chama-se **diagonal principal** de uma matriz de ordem n o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, isto é,

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}.$$

Chama-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a $n + 1$, isto é,

$$\{a_{ij} | i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}.$$

v. **matriz diagonal** é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

vi. **matriz identidade de ordem n** é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é, cujos elementos são $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$.

Indica-se a matriz identidade de ordem n por I_n . Assim,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

vii. **matriz triangular superior** de ordem n é toda matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$. Assim

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

viii. **matriz triangular inferior** de ordem n é toda matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$. Assim

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

A seguir apresentaremos algumas operações e propriedades envolvendo matrizes.

3.2 Igualdade

Definição 2. Duas matrizes, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Isso significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser de mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais).

3.3 Adição

Definição 3. Dadas duas matrizes, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chama-se **soma** de A mais B , denotado por $A + B$, a matriz cuja ij -ésima entrada s_{ij} é dado por $a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j . Isso significa que a soma de duas matrizes A e B de ordem $m \times n$ é uma matriz C de mesma ordem em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B .

Teorema 1. A adição de matrizes de ordem $m \times n$ apresenta as seguintes propriedades:

- (1) é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ quaisquer que sejam A , B , e C de ordem $m \times n$;

- (2) é comutativa: $A + B = B + A$ quaisquer que sejam A e B , de ordem $m \times n$;
- (3) tem elemento neutro: existe uma matriz M tal que $A + M = A$ qualquer que seja A de ordem $m \times n$. Essa matriz M será denotada por 0 ;
- (4) todo elemento tem simétrico: para todo A de ordem $m \times n$: existe A' tal que $A + A' = 0$.

Demonstração 1.

- (1) Fazendo $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$, temos para todo i e todo j :

$$x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij}.$$

- (2) Fazendo $A + B = X$ e $B + A = Y$, temos para cada i e cada j :

$$x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = y_{ij}.$$

- (3) Impondo $A + M = A$, resulta:

$$a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \implies m_{ij} = 0 \implies M = 0$$

isto é, o elemento neutro é a matriz nula de ordem $m \times n$.

- (4) Impondo $A + A' = M = 0$, resulta:

$$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \implies a'_{ij} = -a_{ij} \forall i, \forall j$$

isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesma ordem que A , na qual cada elemento é simétrico do correspondente em A .

■

Definição 4. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **oposta de A** a matriz A' tal que $A + A' = 0$. Denotamos por $-A$ a matriz oposta de A .

Definição 5. Dadas duas matrizes, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chama-se **diferença** $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B .

3.4 Produto de número por matriz

Definição 6. Dado um número α e uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se **produto** de α por A , a matriz $\alpha \cdot A$ cujo ij -ésimo elemento é $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ para cada i e cada j . Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número α é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por α .

Teorema 2. O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

$$(1) \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A;$$

$$(2) \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B;$$

$$(3) (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A;$$

$$(4) 1 \cdot A = A.$$

em que A e B são matrizes quaisquer de ordem $m \times n$ e α e β são números reais quaisquer.

Demonstração 2.

(1) Seja a matriz $A = [a_{ij}]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha \cdot (\beta \cdot [a_{ij}]) = \alpha \cdot [\beta \cdot (a_{ij})] = [\alpha \cdot \beta \cdot (a_{ij})] = (\alpha \cdot \beta) \cdot [a_{ij}].$$

Analogamente,

$$\beta \cdot (\alpha \cdot [a_{ij}]) = \beta \cdot [\alpha \cdot (a_{ij})] = [\beta \cdot \alpha \cdot (a_{ij})] = [\alpha \cdot \beta \cdot (a_{ij})] = (\alpha \cdot \beta) \cdot [a_{ij}].$$

(2) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot ([a_{ij}] + [b_{ij}]) &= \alpha \cdot [a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha \cdot (a_{ij} + b_{ij})] = \\ &= [\alpha \cdot a_{ij} + \alpha \cdot b_{ij}] = [\alpha \cdot a_{ij}] + [\alpha \cdot b_{ij}] = \alpha \cdot [a_{ij}] + \alpha \cdot [b_{ij}]. \end{aligned}$$

(3) Seja a matriz $A = [a_{ij}]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot [a_{ij}] &= [(\alpha + \beta) \cdot (a_{ij})] = \\ &= [\alpha \cdot (a_{ij}) + \beta \cdot (a_{ij})] = [\alpha \cdot (a_{ij})] + [\beta \cdot (a_{ij})]. \end{aligned}$$

(4) Seja a matriz $A = [a_{ij}]$, então

$$1 \cdot [a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}].$$

■

3.5 Produto de matrizes

Definição 7. Dadas duas matrizes, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, chama-se produto AB a matriz $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Observação 1.

- A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B , pois A é de ordem $m \times n$ e B é de ordem $n \times p$;
- A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B , pois $C = AB$ é de ordem $m \times p$;
- Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte:

(1º) toma-se a linha i da matriz A :

$$\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \cdots \quad a_{in}}$$

(2º) toma-se a coluna k da matriz B :

$$\boxed{\begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array}}$$

(3º) coloca-se a linha i de A na "vertical" ao lado da coluna k de B :

$$\begin{array}{|c|} \hline a_{i1} \\ \hline a_{i2} \\ \hline a_{i3} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{in} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline b_{1k} \\ \hline b_{2k} \\ \hline b_{3k} \\ \hline \vdots \\ \hline b_{nk} \\ \hline \end{array}$$

(4º) calculam-se os produtos dos elementos que ficaram lado a lado:

$$\begin{array}{c} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{i3} \cdot b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{array}$$

(5^o) somam-se esses produtos, obtendo c_{ik} .

Teorema 3. Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, então $AI_n = A$ e $I_m A = A$.

Demonstração 3.

(I) Sendo $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ e $B = AI_n = [b_{ij}]_{m \times n}$, temos:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + \dots + a_{ii}\delta_{ij} + \dots + a_{in}\delta_{nj} = \\ &= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 + \dots + a_{ii} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ii} \end{aligned}$$

para todos i e j , então $A \cdot I_n = A$.

(II) Analogamente, prova-se que $I_m A = A$. ■

Teorema 4. A multiplicação de matrizes apresenta as seguintes propriedades:

- (1) é associativa: $(AB)C = A(BC)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ e $C = [c_{kl}]_{p \times r}$;
- (2) é distributiva à direita em relação à adição: $(A + B)C = AC + BC$ quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{jk}]_{n \times p}$;
- (3) é distributiva à esquerda: $C(A + B) = CA + CB$ quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{jk}]_{p \times m}$;
- (4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$.

Demonstração 4.

(1) Fazendo $D = AB = [d_{ik}]_{m \times p}$, $E = (AB)C = [e_{il}]_{m \times r}$ e $F = BC = [f_{jl}]_{n \times r}$, temos:

$$e_{il} = \sum_{k=1}^p d_{ik} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_{jl}
\end{aligned}$$

então $(AB)C = A(BC)$.

(2) Fazendo $D = (A + B)C = [d_{ik}]_{m \times p}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{ik} &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) = \\
&= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot c_{jk}
\end{aligned}$$

então $(A + B)C = AC + BC$.

(3) Análoga a (2).

(4) Fazendo $C = kA = [c_{ij}]_{m \times n}$, $D = kB = [d_{jk}]_{n \times p}$ e $E = AB = [e_{ik}]_{m \times p}$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot b_{jk} &= \sum_{j=1}^n (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} = k \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \\
\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot d_{jk} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jk}) = k \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}
\end{aligned}$$

então $(kA)B = A(kB)$.

■

3.6 Matriz transposta

Definição 8. Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** a matriz $A^t = [a'_{ji}]_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j . Isso significa que, a matriz A^t se obtém da matriz A permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice.

Teorema 5. A matriz transposta apresenta as seguintes propriedades:

(1) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$;

(2) Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(3) Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$;

(4) Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times p}$, então $(AB)^t = B^t A^t$.

Demonstração 5.

(1) Fazendo $(A^t)^t = [a''_{ij}]_{m \times n}$, resulta

$$a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij} \text{ para todos } i, j.$$

(2) Fazendo $A + B = C = [c_{ij}]_{m \times n}$ e $(A + B)^t = C^t = [c'_{ji}]_{n \times m}$, temos

$$c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

(3) Fazendo $(kA)^t = [a''_{ji}]_{n \times m}$, resulta

$$a''_{ji} = ka_{ij} = ka'_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

(4) Fazendo $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$ e $(AB)^t = C^t = [c'_{ki}]_{p \times m}$, resulta

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^n b'_{kj} \cdot a'_{ji}.$$

■

Definição 9. Chama-se **matriz simétrica** toda matriz quadrada A , de ordem n , tal que

$$A^t = A.$$

Decorre da definição que, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz simétrica, temos

$$a_{ij} = a_{ji}; \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Definição 10. Chama-se **matriz antissimétrica** toda matriz quadrada A , de ordem n , tal que

$$A^t = -A.$$

Decorre da definição que, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz simétrica, temos:

$$a_{ij} = -a_{ji}; \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Observação 2. As matrizes antissimétricas têm diagonal nula.

3.7 Matrizes inversíveis

Definição 11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é **matriz inversível** se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.*

Teorema 6. *Se A é inversível, então é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.*

Demonstração 6. *Admitamos que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Temos:*

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

■

Definição 12. *Dada uma matriz inversível A , chama-se **inversa de A** a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

É evidente que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n , pois A^{-1} comuta com A .

4 TDICs: Conceito e Aplicações na Educação

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) emergiram como agentes impulsionadores de mudanças significativas no cenário educacional, redefinindo tanto os processos de ensino quanto os paradigmas de aprendizagem. Este capítulo se dedica a explorar o impacto transformador dessas tecnologias na educação, com um foco particular no ensino e aprendizagem de matemática, especificamente no estudo das matrizes.

A integração das TDICs na educação oferece oportunidades sem precedentes para repensar a forma como os conceitos matemáticos são apresentados, compreendidos e aplicados. Ao alavancar ferramentas digitais como as planilhas eletrônicas e o GeoGebra, podemos criar ambientes de aprendizagem dinâmicos e interativos que estimulam a curiosidade, a investigação e a colaboração entre os estudantes.

Este capítulo buscará não apenas examinar os benefícios concretos que as TDICs oferecem para o ensino de matemática, mas também explorar estratégias eficazes para a integração dessas tecnologias no currículo escolar. O objetivo é fornecer algumas diretrizes para educadores interessados em promover a inovação e a melhoria no ensino-aprendizagem de matemática através do uso criativo e significativo das TDICs.

4.1 Uma análise comparativa: Tecnologia, TICs e TDICs

No mundo dinâmico da educação, as tecnologias assumem um papel cada vez mais notório, moldando o cenário educacional e abrindo portas para um ensino inovador e produtivo. Para um melhor desenvolvimento deste trabalho, surge a necessidade de compreendermos as nuances dos termos “Tecnologia”, “TICs” e “TDICs”. Nesse sentido, Corrêa e Brandemberg (2021, p.4) tecem uma valiosa abordagem sobre suas definições, características e aplicações no contexto educacional.

As tecnologias, como bem definem os autores, são frutos da engenhosidade humana, nascidas da necessidade de solucionar problemas e desafios do cotidiano, acompanham a humanidade desde a pré-história. Da roda ao arco e flecha, do lápis e papel à caneta, do rádio à televisão, do computador à internet, a inventividade humana se manifesta em ferramentas que moldam nossa realidade. Essa trajetória evolutiva se estende até os dias atuais, com o surgimento de computadores, internet, smartphones e outros dispositivos digitais e, provavelmente, têm desempenhado um papel na transformação

de certas práticas sociais, por exemplo a forma como nos comunicamos, socializamos, organizamos, mobilizamos e aprendemos.

Lalueza et al. (2010) afirmam que:

A tecnologia contribui para orientar o desenvolvimento humano, pois opera na zona de desenvolvimento proximal de cada indivíduo por meio da internalização das habilidades cognitivas requeridas pelos sistemas de ferramentas correspondentes a cada momento histórico. Assim, cada cultura se caracteriza por gerar contextos de atividades mediados por sistemas de ferramentas, os quais promovem práticas que supõem maneiras particulares de pensar e de organizar a mente (LALUEZA et al., 2010, p. 51).

De acordo com Corrêa e Brandemberg (2021, p.5) , as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) abrangem uma gama de dispositivos eletrônicos e tecnológicos que possibilitam a troca de informações e a comunicação entre pessoas. Essa categoria engloba desde meios tradicionais como rádio, televisão e jornal até ferramentas mais recentes como computadores, internet, tablets e smartphones. A principal função das TICs reside na sua capacidade de informar e conectar indivíduos e comunidades, promovendo o fluxo de dados e a interação social.

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, também chamadas de Tecnologias Digitais (TDs), representam a evolução das TICs, marcadas pela convergência entre o mundo físico e o digital. Conforme Corrêa e Brandemberg (2021) , as TDICs se caracterizam por dispositivos que permitem a navegação na internet.

O termo “digital” deriva do latim “digitus”, que significa “dedo”, e faz referência à nossa capacidade de acessar um universo de informações ao toque dos dedos (CORRÊA; BRANDEMBERG, 2021, p.5) . Essa definição se aplica a alguns aspectos das TDICs:

- **Sinal digital:** a recepção de informações ocorre de forma digital, em vez de analógica, permitindo maior precisão e confiabilidade na transmissão de dados.
- **Linguagem binária:** as TDICs convertem qualquer tipo de informação em números, utilizando o sistema binário de representação (0 e 1), a linguagem compreendida pelos dispositivos digitais.

Ao discutirmos as TDs e seu impacto na sociedade atual, especialmente na educação e no ensino de Matemática, é fundamental reconhecer que as TDICs englobam um conjunto de ferramentas que não apenas facilitam a comunicação entre indivíduos, mas também permitem uma interação ativa com a tecnologia. Diferente das TICs, que tradicionalmente se focavam em aspectos de comunicação, as TDICs ampliam esse conceito ao integrar recursos que possibilitam o aprendizado, a investigação e a exploração por meio dessas tecnologias, como o uso de inteligência artificial e softwares de geometria e álgebra dinâmica.

As Tecnologias, TICs e TDICs representam marcos na história da humanidade, moldando nossa forma de comunicar, aprender e interagir com o mundo. Compreender as nuances entre esses conceitos é fundamental para definirmos qual deles é o mais ideal para o desenvolvimento do nosso trabalho. Neste sentido, é cabível aproveitarmos ao máximo o potencial transformador dos recursos digitais na educação para promover um ensino de Matemática mais engajador, produtivo e acessível a todos.

4.2 A influência das Tecnologias Digitais na educação

A educação do século XXI se caracteriza por um cenário em constante transformação, impulsionado pelas inovações tecnológicas que redefinem a forma como aprendemos, ensinamos e nos relacionamos com o conhecimento. Nesse contexto, essa pesquisa se propõe a analisar a influência abrangente das TDs na educação, explorando seus impactos, desafios e oportunidades, além de apresentar práticas pedagógicas inovadoras que otimizam seu uso em prol da aprendizagem eficaz.

Primeiramente, nunca antes na história o acesso à informação foi tão vasto e instantâneo. A internet, juntamente com as ferramentas digitais, disponibiliza aos estudantes uma infinidade de recursos educacionais. As TDs, através de softwares de aprendizagem adaptativos e plataformas de ensino online, possibilitam que os estudantes progridam em seu próprio ritmo e permitem a personalização do ensino, adaptando o conteúdo e a abordagem pedagógica às necessidades individuais de cada estudante.

De acordo com Moran (2018),

a personalização (aprendizagem adaptada aos ritmos e necessidades de cada pessoa) é cada vez mais importante e viável. Cada estudante, de forma mais direta ou indireta, procura respostas para suas inquietações mais profundas e as pode relacionar com seu projeto de vida e sua visão de futuro. É importante aprender a relacionar melhor o que está disperso, a aprofundar as informações relevantes, a tecer costuras mais complexas, a navegar entre as muitas redes, grupos e ideias com as quais convivemos. Num mundo tão agitado, de múltiplas linguagens, telas e efervescências aprender a desenvolver roteiros individualizados de acordo com as necessidades e expectativas é cada vez mais importante e viável (MORAN, 2018, p. 3).

Além do acesso facilitado ao conhecimento, as TDICs revolucionam a educação ao possibilitar a personalização da aprendizagem em diversos níveis, através de plataformas adaptativas, softwares de reconhecimento de fala, realidade virtual e aumentada, entre outras ferramentas. De acordo com Lamattina (2023), as TDs permitem que o ensino seja adaptado às necessidades individuais de cada aluno, identificando seu estilo de aprendizagem, dificuldades específicas e áreas de interesse. Essa abordagem centrada no aluno não só intensifica consideravelmente a motivação e o envolvimento,

mas também resulta em melhorias notáveis nos resultados acadêmicos, incluindo uma maior retenção de conhecimento e um desempenho superior em avaliações. Como consequência, as TDICs promovem uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

Limeira (2020, p. 2) afirma que “os avanços tecnológicos vivenciados nos últimos anos têm influenciado de forma significativa a área da educação”. Nesse sentido, é essencial que percebamos as TDs como parceiras e, que em conjunto com o saber científico, elas oferecem aos estudantes processos de ensino mais envolventes, interessantes e capazes de promover aprendizados mais relevantes.

As tecnologias digitais atraem a atenção dos alunos, pois elas fazem parte do cotidiano, dentro e fora da escola, sendo utilizadas, muitas vezes, por tempo indeterminado sem o controle dos pais e/ ou responsáveis. Levá-las para sala de aula é uma das possibilidades de ensinar aos alunos o uso adequado das mesmas, bem como mostrar as opções de utilização para construir conhecimento e melhorar o desenvolvimento cognitivo (LIMEIRA, 2020, p. 4).

As TDICs, conforme definido por Takahashi (2000), são um conjunto de recursos digitais, apoiados em hardware (equipamentos físicos) e software (produtos lógicos), que visam tratar, organizar e disseminar as informações através de variadas formas. Elas englobam uma variedade de ferramentas e plataformas digitais que facilitam a comunicação e a propagação de informações. Limeira (2020) exemplifica que todas as ferramentas tecnológicas digitais que utilizamos para fins de criação, publicação e consumo de informação, além dos diversos componentes físicos e suas soluções que utilizamos para nos comunicar, são exemplos de TDs.

Limeira (2020, p. 7) salienta que “o uso de tecnologias é uma realidade em grande parte das instituições de ensino brasileiras, e apesar da grande possibilidade de auxiliar no aprendizado dos alunos, nem todos acreditam que estas tenham impacto positivo na educação”. A escola, com uma postura inicialmente conservadora, demorou a reconhecer a inevitabilidade das TDs em seu cotidiano, resistindo à sua integração. Essa resistência se baseava em receios sobre o impacto das TDICs na aprendizagem, sem que houvesse uma investigação profunda sobre seus reais efeitos e como elas poderiam ser utilizadas de forma organizada para o desenvolvimento dos alunos.

Chaves (1998) aponta que:

As escolas, enquanto instituições sociais, são muito conservadoras, resistindo sempre, às vezes com rigor, mesmo às mais tímidas tentativas de mudança de ordem estabelecidas. Especialmente quando se trata da introdução de inovações tecnológicas, a escola encontra as mais variadas maneiras de resistir (CHAVES, 1998, p. 48).

A revolução provocada pelas TDICs no panorama educacional brasileiro, abriram portas para um ensino e aprendizagem mais dinâmicos e inclusivos. Desde os primórdios do século XXI, o país vivenciou uma trajetória notável na integração de TDs ao

ambiente educacional. Essa jornada proporcionou acesso a recursos e ferramentas antes inimagináveis para muitos estudantes e educadores, impulsionando a democratização do conhecimento e a equidade educacional.

A partir dos anos 2000, com a tecnologia acelerada, o uso da lousa digital, da gamificação e pelo uso de smartphones, tablets e computadores em sala de aula se apresentaram como instrumentos com a finalidade de ofertar maior dinamicidade para o processo ensino aprendizagem e até mesmo no engajamento dos discentes nesse processo (AULER; PIOVEZANA, 2022, p. 7).

Em um mundo moldado pela tecnologia digital, a educação se reinventa, abrindo um leque de possibilidades para transformar as práticas pedagógicas e impulsionar o aprendizado. As ferramentas digitais transcendem os limites da sala de aula tradicional, convidando os estudantes a assumirem o papel principal em sua jornada de conhecimento. Através delas, a exploração, a experimentação, a criação, a resolução de problemas, a colaboração e a comunicação se tornam elementos essenciais para a construção do saber.

Essa transformação é especialmente relevante quando consideramos que a atual geração de estudantes já nasce imersa em um ambiente tecnológico. Como destacam Amorim et al. (2016), essa inserção da tecnologia na educação torna-se cada vez mais indissociável, uma vez que os alunos ingressam nas salas de aula já equipados com smartphones, tablets, notebooks e outros dispositivos eletrônicos (RODRIGUES; MAIA; CASTRO, 2023, p. 2).

A inserção da tecnologia na educação é indiscutivelmente relevante, especialmente considerando a atual geração de estudantes, que desde cedo estão imersos em um ambiente tecnológico. Conforme apontado por Amorim et al. (2016), a separação entre tecnologia e educação torna-se cada vez mais complexa, uma vez que os alunos ingressam nas salas de aula já equipados com smartphones, tablets, notebooks e outros dispositivos eletrônicos (RODRIGUES; MAIA; CASTRO, 2023, p. 2).

Sob essa ótica, é notável que a globalização está cada vez mais presente e as TDICs fazem parte do dia a dia dos estudantes, um reflexo típico da sociedade moderna. Nesse contexto, a capacidade de incorporar o valor educacional dessas tecnologias nos planos de ensino como um meio de apoiar tanto o ensino quanto a aprendizagem e a construção do conhecimento pelos alunos é essencial. Isso rompe com a abordagem de ensino convencional, onde o aluno é meramente um observador e o professor é o transmissor de informações. Além de permitir uma maior proximidade com a realidade do aluno, facilitando a compreensão dos conhecimentos adquiridos.

Lopes et al. (2018, p.4) “percebe que o uso de recursos tecnológicos favorece ao aluno a capacidade de resolução de problemas de ordem mais complexa, da mesma forma que

possibilita uma aplicabilidade prática do conhecimento adquirido, interagindo por meio virtual com conceitos não tangíveis no cotidiano”.

Pesquisas confirmam que a colaboração e a comunicação por meio das TDICs têm um impacto considerável no aumento do ânimo e da participação, além de preparar os alunos para um futuro marcado pela cooperação e pelo trabalho em equipe em ambientes virtuais. As TDICs, portanto, não apenas ampliam o acesso à informação, mas também transformam a forma como os estudantes aprendem e interagem, preparando-os para uma vida profissional e social marcada pela colaboração, pela comunicação e pela construção coletiva do conhecimento.

Castells (2017, p. 88) aponta que,

[...] o cerne da transformação que estamos vivendo na revolução atual refere-se às tecnologias de processamento de informação e da comunicação. A tecnologia da informação é para esta revolução o que as novas fontes de energia foram para as revoluções industriais sucessivas, do motor a vapor à eletricidade, aos combustíveis fósseis e até mesmo à energia nuclear, visto que a geração e a distribuição de energia foram o elemento principal na base da revolução industrial.

Quando implementadas de maneira estratégica e integradas ao currículo, as TDICs têm o potencial de criar ambientes de aprendizado mais dinâmicos e participativos, enriquecendo a experiência educacional dos alunos. A escolha adequada das ferramentas digitais, juntamente com a orientação ativa dos educadores, é fundamental para a eficácia dessas tecnologias como recursos pedagógicos.

Na busca por uma melhoria na educação oferecida aos discentes, novas diretrizes sobre o uso de recursos digitais têm surgido para apoiar o progresso do aprendizado. Documentos essenciais para o sistema educacional brasileiro têm estabelecido o uso de tecnologias como suporte ao ensino. Entre estes, podemos mencionar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que definiu em uma de suas dez competências gerais:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

A implementação pedagógica das TDs na educação envolve a adoção de práticas e abordagens inovadoras que utilizam o potencial das tecnologias para estimular o engajamento dos alunos e aprimorar os resultados de aprendizagem. Recentemente, tornou-se evidente que “aulas sem inovações não despertam mais o interesse dos discentes de forma contínua, por isso, existe a necessidade de inserir novas metodologias de ensino nesse processo” (ALVES; CARNEIRO; CARNEIRO, 2022, p. 7).

Sabemos que no cenário da era digital, a necessidade de atualizar os métodos de ensino e aprendizagem é mais premente do que nunca. Os modelos educacionais tradicionais, que são centrados no professor e baseados em aulas expositivas, estão se tornando progressivamente obsoletos diante das demandas de um mundo em constante evolução. A modernização do processo educacional deve englobar o desenvolvimento de habilidades do século XXI, como a alfabetização digital, o pensamento computacional e a inteligência emocional.

Igualmente, as TDs podem ser empregadas para fomentar a aprendizagem ativa, onde se motiva os discentes a participarem de forma proativa do seu processo de aprendizado, construindo seu próprio conhecimento por meio de experiências práticas e colaborativas, pois os estudantes, enquanto indivíduos do século XXI, requerem metodologias de ensino mais interativas, métodos mais inventivos e estratégias que promovam a participação ativa e a liderança no processo de aprendizado. Para Kenski (2007),

Educação e tecnologia são indissociáveis, e para que ocorra essa integração, é preciso que conhecimentos, valores, hábitos, atitudes e comportamentos do grupo sejam ensinados e aprendidos, ou seja, que se utilize a educação para ensinar sobre as tecnologias que estão na base da identidade e da ação do grupo e que se faça uso delas para ensinar as bases dessa educação (KENSKI, 2007, p. 43).

Ao integrar ferramentas tecnológicas digitais na sala de aula, os educadores têm a capacidade de criar ambientes de aprendizagem mais dinâmicos e envolventes, por conseguinte, os recursos digitais proporcionam novas maneiras de apresentar informações, explorar conceitos e colaborar com colegas. Isso não apenas estimula a curiosidade dos alunos, mas também promove a autonomia e amplia suas habilidades de resolução de problemas. Conforme o marco político da Unesco de 2008,

Para viver, aprender e trabalhar bem em uma sociedade cada vez mais complexa, rica em informação e baseada em conhecimento, os alunos e professores devem usar a tecnologia de forma efetiva, pois em um ambiente educacional qualificado, a tecnologia pode permitir que os alunos se tornem: usuários qualificados das tecnologias da informação; pessoas que buscam, analisam e avaliam a informação; solucionadores de problemas e tomadores de decisões; usuários criativos e efetivos de ferramentas de produtividade; comunicadores, colaboradores, editores e produtores; cidadãos informados, responsáveis e que oferecem contribuições” (UNESCO, 2008, p. 3).

Para desbloquear todo o potencial das TDICs no campo educacional, é imprescindível uma revisão abrangente dos currículos, das metodologias de ensino e dos métodos de avaliação dos alunos. A incorporação das TDICs no ambiente educacional demanda uma estratégia holística, que não se limite apenas aos aspectos tecnológicos, mas que também leve em consideração os aspectos pedagógicos, sociais e éticos. Neste contexto, torna-se essencial o investimento em infraestrutura tecnológica, na formação

continuada dos professores e no desenvolvimento de conteúdos educacionais digitais (LIMEIRA, 2020).

A integração das TDICs na educação requer a implementação de políticas públicas que não apenas estimulem sua adoção, mas também garantam uma inclusão digital efetiva, como ressalta Maia e Barreto (2012). No Brasil, ainda há uma disparidade significativa no acesso à internet e aos dispositivos digitais, especialmente em regiões rurais e comunidades de baixa renda. Diante disso, é imperativo que se invista não apenas na expansão da infraestrutura tecnológica, mas também na capacitação dos professores e no desenvolvimento de conteúdos educacionais digitais acessíveis e de alta qualidade, conforme apontado por Almeida e Valente (2012). Somente assim poderemos assegurar que todos os estudantes tenham igualdade de oportunidades no acesso ao conhecimento e ao aprendizado digital.

No documento do marco político de 2008, a Unesco salienta que com o uso eficiente da tecnologia na educação, os alunos podem desenvolver habilidades avançadas, enquanto os professores criam oportunidades de aprendizado e comunicação e para tanto a sua preparação é indispensável.

Por intermédio do uso corrente e efetivo da tecnologia no processo de escolarização, os alunos têm a chance de adquirir complexas capacidades em tecnologia, sob orientação do principal agente, que é o professor. Em sala de aula, ele é responsável por estabelecer o ambiente e preparar as oportunidades de aprendizagem que facilitem o uso da tecnologia pelo aluno para aprender e se comunicar. Consequentemente, é essencial que todos os professores estejam preparados para oferecer essas possibilidades aos alunos (UNESCO, 2008, p. 3).

Incorporar recursos digitais na educação não é uma mera questão de acompanhar as tendências, mas sim uma oportunidade de construir um futuro educacional mais inovador, inclusivo e eficiente. Através de um esforço conjunto de governos, escolas, professores e comunidade, podemos garantir que as TDICs sejam ferramentas importantes para o desenvolvimento integral dos alunos. As TDs transformaram a sociedade moderna e seu impacto na educação é cada vez mais significativo. Ao longo da história, as TDICs percorreram um longo caminho, desde as ferramentas rudimentares até as tecnologias avançadas de hoje.

Apesar dos desafios educacionais existentes, as TDICs surgem como uma solução promissora quando implementadas corretamente. Elas oferecem benefícios como inovação no ensino, aprendizado personalizado, aumento da motivação, acesso a recursos educacionais online, desenvolvimento de habilidades digitais e versatilidade disciplinar. Portanto, essas ferramentas são importantes aliadas da educação, no sentido de promover um aprendizado mais envolvente, motivador e eficaz, e de preparar os estudantes para suas vidas pessoais e futuras carreiras.

4.3 TDICs no Ensino de Matemática

A incorporação das TDICs no ensino de matemática tem sido uma transformação fundamental no cenário educacional contemporâneo. A interseção entre a tecnologia e a matemática oferece oportunidades únicas para promover uma aprendizagem mais dinâmica e participativa. Ao integrar ferramentas digitais no ensino, podemos explorar novos métodos para abordar conceitos matemáticos complexos, tornando o processo de aprendizagem mais acessível para os alunos. A seguir, exploraremos o papel das TDICs no ensino de matemática, destacando os benefícios, desafios e oportunidades que essa integração oferece para o desenvolvimento do pensamento crítico, resolução de problemas e alfabetização digital dos estudantes.

4.3.1 Transformações no Ensino de Matemática

Em meio a um cenário educacional que se transforma continuamente, o currículo de Matemática tem experimentado uma série de mudanças didático-pedagógicas. Essas mudanças estão impactando diretamente a maneira como a matéria é ensinada e aprendida, tornando o ensino de Matemática um campo dinâmico e em constante evolução. Pereira, Costa e Alves (2019, p. 10), ressaltam que “o docente precisa ter a preocupação em ensinar Matemática utilizando ferramentas didáticas que tornem o aprendizado prazeroso e significativo para os aprendizes”. Diante dessa realidade, é essencial que os professores reavaliem os paradigmas que orientam o planejamento de suas aulas. Eles precisam estar abertos a novas ideias e abordagens para tornar as aulas mais modernas e eficazes.

Para facilitar efetivamente o aprendizado matemático de seus alunos, é vital que os educadores tenham confiança nas abordagens e estratégias de ensino que optam por utilizar. Isso significa que eles precisam estar bem versados nas últimas pesquisas e desenvolvimentos no campo da educação matemática. Além disso, eles precisam ser capazes de adaptar essas estratégias às necessidades individuais de seus alunos, levando em consideração fatores como estilo de aprendizagem, nível de habilidade e interesses pessoais.

O professor no processo de ensino aprendizagem promove duas condições para aprendizagem, quando o conteúdo a ser ensinado é potencialmente revelador, e quando incentiva a criança a relacionar o material de maneira consistente e não arbitrária. Isso significa a adequação de sua formação continuada para acompanhar o processo que determinará a teoria sobre sua prática (CRUZ, 2023, p. 48).

Para tanto, é fundamental que os professores estejam em constante processo de atualização e participem de treinamentos específicos voltados para o ensino dessa disciplina. Isso pode envolver a participação em workshops e seminários, a leitura de

revistas e livros especializados, e a colaboração com outros profissionais da área. Ao se manterem atualizados, os professores podem garantir que estão oferecendo aos seus alunos o melhor ensino possível.

Historicamente, o ensino e a aprendizagem da Matemática têm sido vistos como desafiantes e pouco atrativos para os alunos. As aulas tradicionais de Matemática, muitas vezes, não conseguem despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes, levando alguns especialistas a classificá-las como obsoletas e ineficientes. De acordo com D’ambrosio (2009), professores que insistem em adotar uma abordagem puramente transmissiva do conhecimento estão destinados ao fracasso. Neste sentido, Pontes et al. (2018) defende o seguinte:

A matemática ensinada nas escolas e a realidade do mundo atual caminham em sentidos antagônicos, em uma verdadeira desarmonia. Enquanto a humanidade aprecia o aparecimento de novas tecnologias, a matemática continua sendo digerida nos mesmos moldes do início do século XX. As práticas de ensino adotadas no processo de ensino e aprendizagem de matemática não têm o caráter dinâmico e inovador, professor e aprendiz não ouçam refutar as “verdades” apresentadas em seus tópicos, por acreditar que são procedimentos usuais para alcançar o sucesso na escola. A sociedade da informação e a caracterização e mecanismos de transmissão do conhecimento, além dos muros da escola, exigirão uma mudança profunda ou até a extinção dos sistemas de ensino tradicionais que conhecemos (PONTES et al., 2018, p. 2).

Nesse contexto, emergem diversas tendências metodológicas em Educação Matemática, propondo alternativas para aprimorar os processos de ensino e aprendizagem. Estratégias como o uso de jogos e materiais concretos, a resolução de problemas, a modelagem matemática e a utilização de tecnologias digitais da informação e comunicação têm se mostrado eficazes em tornar as aulas de Matemática mais interativas e envolventes. Dias et al. (2022), acerca dessas tendências, relata que

apresentam pontos interessantes que podem contribuir para um ensino mais significativo, mais prazeroso, mais perto da realidade do aluno. Todavia até que os professores, ou quem sabe até mesmo o aluno, consigam enxergar a riqueza desses métodos de ensino, há um longo caminho a ser percorrido, afinal não podemos deixar de considerar que por mais que a formação docente no Brasil tenha melhorado de forma significativa, ainda há muitos profissionais da educação totalmente alheios a essa nova realidade (DIAS et al., 2022, p. 12).

No campo da educação matemática, existem inúmeros recursos disponíveis, como TDs, que podem ser essenciais para aproximar os alunos do conhecimento, tornando-o mais alinhado com as realidades com as quais interagem diariamente, levando em conta que “o uso dos recursos tecnológicos nas aulas de matemática tem assumido um papel diferenciado nos processos de ensino e aprendizagem” (QUARTIERI; CRUZ, 2018, p.

60). A matemática contemporânea, diferentemente da versão mais antiga, permite aos alunos identificar e resolver problemas atuais. Portanto, é impraticável manter a estrutura tradicional da matemática, que cansa os alunos ao forçá-los a absorver conhecimentos que não são úteis em seu contexto social.

Embora a Matemática esteja intrinsecamente relacionada a várias atividades do dia a dia, sua importância nem sempre é reconhecida pelos alunos no ambiente escolar. Essa desconexão com a vida real, aliada a outros fatores, contribui para a visão negativa que muitos estudantes têm em relação à disciplina, dificultando seu processo de aprendizagem. Portanto, é importante que os professores façam um esforço consciente para tornar a Matemática relevante para seus alunos, mostrando-lhes como ela se aplica a situações do mundo real e como pode ser usada para resolver problemas práticos. Ao fazer isso, eles podem ajudar a mudar a percepção dos alunos sobre a Matemática e tornar o aprendizado dessa disciplina uma experiência mais positiva e gratificante.

4.3.2 O Papel das Tecnologias no Ensino de Matemática

O ensino de matemática é fundamental para o desenvolvimento cognitivo e analítico dos estudantes, e as tecnologias têm desempenhado um papel crescente nesse processo educacional. Nesta seção, exploraremos a maneira como as tecnologias têm impactado e transformado o ensino de matemática. Examinaremos como ferramentas digitais, tais como softwares interativos, aplicativos móveis e recursos online, podem ser incorporadas pelos educadores para melhorar a compreensão, a prática e a aplicação dos conceitos matemáticos, proporcionando uma experiência de aprendizado mais atrativa para os alunos.

Sabemos que a Didática da Matemática tem sido objeto de estudo há décadas, com um enfoque especial nas últimas cinco, enquanto as questões sobre o uso de tecnologias sempre estiveram presentes. Neto et al. (2001) ressaltam que não se trata de descartar os recursos tradicionais, como livros didáticos, quadro e lápis. Esses recursos são úteis para demonstrar teoremas e soluções, mas podem ser limitados em outras situações matemáticas que exigem uma abordagem mais interativa ou visual.

O uso de tecnologias no ensino vem sendo questão de debate por um longo período. Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam o recurso das tecnologias da informação como uma das estratégias para a prática da matemática em sala de aula: “o trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as.” (BRASIL, 1997, p. 35).

Todavia,

as tecnologias no ensino da matemática não podem ser encaradas como uma fórmula milagrosa que irá fazer nosso aprendiz assimilar os conteúdos, isso vai depender de como utilizamos a ferramenta. Devemos com o auxílio das tecnologias minimizar as características do ensino tradicional onde o professor é o detentor do conhecimento e o estudante é um ser passivo diante de sua aprendizagem, contudo queremos que seu uso sirva para o surgimento de uma nova relação entre professor e estudante (PEREIRA; COSTA; ALVES, 2019, p. 10).

Borba e Villarreal (2005) destacam a grande contribuição dos softwares pela sua capacidade visual. Eles tornam as informações paramétricas visíveis através de representações instigantes e interessantes, como aponta Javaroni (2007). Isso significa que os softwares podem ajudar a tornar os conceitos matemáticos mais tangíveis e compreensíveis para os alunos, permitindo-lhes ver e manipular os conceitos de maneira que não seria possível com os métodos tradicionais.

Ainda nessa visão, Bona (2009) acrescenta e discorre que

Os softwares educativos podem compor o ensino de matemática, bem como em outras disciplinas, uma vez que possibilita a criação de um conjunto de situações, procedimentos e representações simbólicas. Tais recursos possuem potencial para atender boa parte dos conteúdos. Estas ferramentas permitem auxiliar aos alunos para que deem novos significados às tarefas de ensino e ao professor a oportunidade para planejar, de forma inovadora, as atividades que atendem aos objetivos do ensino (BONA, 2009, p. 36).

A integração das TDICs nas aulas de matemática emerge como uma forte possibilidade de ferramenta pedagógica para auxiliar os docentes e promover a aprendizagem dos alunos. Essas ferramentas tecnológicas permitem minimizar desafios comuns no ensino de matemática, como a dificuldade de visualização e compreensão de conceitos abstratos, e despertam maior interesse nos alunos ao tornar o aprendizado mais interativo e envolvente.

Nesse sentido, Oliveira (2021) afirma que

Matemática, como se sabe e como exposto aqui, é o componente curricular em que os alunos apresentam mais dificuldade na aprendizagem dos conteúdos, logo fazer uso de um software que mostre ao aluno que aquele conteúdo pode sim ser compreendido por ele, torna-se bem significativo, além de atrair, divertir, ainda leva o aluno a querer aprender mais. Assim, percebe-se que o componente de Matemática, com o uso da tecnologia, será mais compreendido pelos alunos. (OLIVEIRA, 2021, p. 12)

Segundo Filho, Paiva e Cavalcante (2020), o aprendizado da Matemática envolve criar estratégias que permitam aos alunos atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas, superando métodos baseados apenas no desenvolvimento de habilidades. Isso significa que o ensino de matemática deve ir além da mera transmissão de

fórmulas e procedimentos, para ajudar os alunos a entender os conceitos subjacentes e a aplicá-los em contextos do mundo real.

No vasto cenário do século atual, a tecnologia digital emergiu como uma força transformadora, redefinindo múltiplos aspectos de nossas vidas diárias. Deste modo, torna-se inadmissível que os alunos aprendam matemática de forma decorativa e desvinculada da vida real. As práticas tradicionais, embora ainda presentes, não atendem às expectativas dos alunos nativos da era digital nem contribuem para seu desenvolvimento pessoal e profissional. Os educadores, atuando como investigadores de suas próprias metodologias, necessitam explorar novas interpretações para os conteúdos, fundamentando-se no progresso tecnológico e em suas implementações contemporâneas.

Conforme Araújo e Santos (2014),

A cada dia as tecnologias digitais vão se tornando rotineiras no ambiente escolar e é necessário que o professor esteja apto a utilizá-las de maneira correta. Quando começa a utilizar as tais tecnologias, o docente tem um sentimento de medo que é comum e normal, pois estão experimentando novas situações que não estão acostumados, diferentes das encontradas no ensino tradicional e de seu cotidiano. (ARAÚJO; SANTOS, 2014, p. 12)

Desse modo, é notório que a apropriação das TDICs no contexto educacional tem o potencial de transformar o conceito e a prática de ensino e aprendizagem da matemática. É por meio dessas ferramentas, com mediações eficazes, que as potencialidades da aprendizagem matemática se destacam. É inegável que as TDICs podem ajudar a tornar o ensino de matemática mais relevante e atrativo para os alunos, ao mesmo tempo que fornecem aos professores novas maneiras de apresentar e explorar conceitos matemáticos. Ao adotar essas tecnologias, os educadores podem ajudar a preparar os alunos para um mundo cada vez mais digital e baseado em dados, onde a matemática desempenha um papel fundamental.

4.3.3 Softwares e o Ensino de Matemática

Softwares educacionais no ensino de Matemática surgiram como ferramentas imprescindíveis, oferecendo novas abordagens e recursos interativos para engajar os discentes e aprimorar sua compreensão dos conceitos matemáticos. O interesse pelos softwares é mencionado por Hoyles e Noss (2003) por seu potencial transformador para o aprendizado matemático e engajamento dos alunos. Por meio desse engajamento, é possível permitir algumas percepções sobre as ideias e práticas dos alunos, pois, ao explorar e resolver problemas, seus pensamentos tornam-se visíveis e progressivamente moldados por suas interações com a ferramenta.

Nesta subseção, vamos ponderar o impacto positivo que alguns softwares podem promover no ensino de matemática, destacando suas funcionalidades, benefícios e potencialidades para enriquecer a experiência de aprendizagem dos estudantes. Ao analisar o papel dessas ferramentas no contexto educacional contemporâneo, podemos compreender melhor como elas têm contribuído com o ensino da matemática.

Planilhas Eletrônicas

Desde sua popularização nas décadas de 1970 e 1980, as planilhas eletrônicas têm se mostrado ferramentas úteis não apenas para organizar dados e calcular valores, mas também como recursos pedagógicos essenciais, especialmente no ensino de matemática. Sua capacidade diversificada permite explorar uma variedade de conceitos matemáticos de forma dinâmica e interativa, além do mais elas representam um recurso computacional fundamental, caracterizado por suas interfaces compostas por grades que organizam dados em linhas, colunas e células. Nestas células, dados são inseridos para execução de cálculos, sejam simples ou complexos, por meio de fórmulas previamente estabelecidas, proporcionando uma gama de aplicações que vão desde cálculos básicos até análises estatísticas detalhadas.

Borges (2023) menciona que

a planilha eletrônica é descrita como um tipo de programa com composição de uma representação matricial com linhas e colunas que dá a possibilidade de registrar, calcular e apresentar informações. A disponibilidade e o potencial de diversos recursos, que a planilha eletrônica apresenta, podem ser utilizados nas mais diversas aplicações para a sociedade. (BORGES, 2023, p. 14)

No âmbito educacional, especialmente no ensino de matemática, as planilhas eletrônicas desempenham um papel significativo. Elas oferecem uma abordagem prática e interativa para explorar conceitos matemáticos complexos, tornando o aprendizado mais intuitivo para os alunos. Sua utilização promove não apenas o desenvolvimento de habilidades computacionais, mas também habilidades analíticas e de resolução de problemas. Flores (2013) defende que esses recursos tecnológicos apresentam potencial para o fomento da criatividade e para a construção do conhecimento matemático a partir da visualização e da manipulação de dados.

Dentro da nossa realidade, é comum encontrar duas plataformas amplamente utilizadas: o Microsoft Excel e o LibreOffice Calc. Enquanto o Excel é mais difundido, o Calc é adotado em ambientes educacionais públicos devido à preferência por softwares livres, conforme legislação específica. Além disso, a disponibilidade de planilhas eletrônicas online, como as do Google e do Excel online, amplia ainda mais o acesso a essas ferramentas.

Valente (1993) ressalta a importância de utilizar o computador como um instrumento educativo, enfatizando a necessidade de um planejamento cuidadoso e direcionamento de conteúdos para alcançar resultados eficazes. Nesse sentido, esses recursos oferecem uma plataforma flexível e adaptável, capaz de atender às necessidades de diferentes estilos de aprendizado e níveis de capacidade dos estudantes, auxiliando na análise e solução de problemas complexos que envolvem matrizes. Por conseguinte, os alunos podem explorar diferentes cenários, modificar valores e observar como essas mudanças afetam os resultados. Isso promove o pensamento crítico, a experimentação ativa e a tomada de decisões, habilidades essenciais não apenas para o sucesso acadêmico, mas também para a vida cotidiana.

A BNCC reconhece o valor das planilhas eletrônicas como instrumentos educacionais eficazes. Ao integrar tecnologias digitais, como planilhas, no ensino de matemática, a BNCC busca promover uma educação mais contextualizada e adaptada aos desafios do século XXI. A BNCC enfatiza a importância de desenvolver habilidades digitais desde cedo, preparando os alunos para enfrentar os desafios de um mundo cada vez mais tecnológico.

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e **planilhas eletrônicas**, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, 2018, p. 528, grifo nosso)

Prosseguindo com a discussão, ainda é importante destacar que

a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, **planilhas eletrônicas** e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 272, grifo nosso)

A inserção das planilhas eletrônicas no ensino de matemática é respaldada por estudos, como o dos autores Coxford, Shulte et al. (1999), que destacam sua eficácia como instrumentos de ensino, proporcionando aos alunos uma experiência significativa no processo de aprendizagem da matemática. Ademais, por meio do uso desses recursos tecnológicos, os professores podem implementar práticas pedagógicas inovadoras que

estimulem a investigação, a colaboração e a construção do conhecimento pelos alunos. Essas ferramentas não apenas facilitam a compreensão de conceitos abstratos, como matrizes, mas também promovem a autonomia do aluno, permitindo que eles assumam um papel ativo em seu próprio processo de aprendizado.

Um dos campos da matemática em que as planilhas eletrônicas têm um impacto significativo é o estudo de matrizes. As matrizes, como sabemos, são amplamente aplicadas em diversas áreas, desde a resolução de sistemas lineares até a computação gráfica. Ao utilizar planilhas eletrônicas para manipular matrizes, os alunos podem visualizar facilmente matrizes de diferentes ordens e tipos, além de operações como adição, multiplicação, inversão e determinante, compreendendo intuitivamente os conceitos fundamentais por trás dessas operações.

Em resumo, as planilhas eletrônicas representam um software que se conecta efetivamente com a matemática, oferecendo uma variedade de funcionalidades que tornam a aula mais interativa e prática para explorar conceitos complexos, como matrizes. Ao alinhar-se com as diretrizes da BNCC, os educadores podem aproveitar todo o potencial desses recursos tecnológicos para promover um ensino matemático de qualidade, aumentando assim o interesse dos alunos pela matéria e, conseqüentemente, atingindo o objetivo desejado.

GeoGebra

O GeoGebra, baseado na linguagem de programação Java e disponível gratuitamente, rapidamente se tornou um recurso indispensável para o ensino de matemática em todos os níveis, integrando geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em uma plataforma única e acessível (GEOGEBRA, 2024). Originado em 2001 como parte do trabalho de mestrado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria, continuou a ser desenvolvido durante seu pós-doutorado, o que facilitou sua difusão nas comunidades acadêmicas (BENTO et al., 2012).

Além de estar disponível para download gratuito em computadores com vários sistemas operacionais, esse aplicativo pode ser instalado em dispositivos móveis ou acessado online através do site geogebra.org. Real (2017) destaca que o GeoGebra é uma ferramenta de fácil utilização que permite aos usuários entender as construções geométricas desenvolvidas, consolidando seus conhecimentos anteriores e incentivando a descoberta de novos conceitos. Borba, Silva e Gadanidis (2020) ressaltam que este software tem sido uma tecnologia revolucionária na educação matemática ao longo dos anos, explorando vários conceitos e ideias.

Em consonância com essa visão, Rodrigues, Maia e Castro (2023) destacam que

A integração de softwares educacionais, como o GeoGebra, demons-

tra como as TDICs podem aprimorar significativamente o ensino de disciplinas como a Matemática, oferecendo representações dinâmicas e interativas que transcendem as limitações das abordagens estáticas. Essas ferramentas modernas são recursos valiosos para educadores que desejam criar experiências de aprendizagem mais eficazes e motivadoras para seus alunos. (RODRIGUES; MAIA; CASTRO, 2023, p. 8)

Nesse cenário, o uso de softwares educacionais tem sido uma opção valiosa para diversificar as práticas pedagógicas e oferecer novas abordagens de conteúdo. O Geogebra fornece ferramentas visuais importantes para representações gráficas, além de promover o questionamento, a argumentação, a experimentação e a dedução, auxiliando na construção do conhecimento. O uso do computador no ensino da matemática dá aos alunos a confiança para criar e resolver situações matemáticas, desenvolvendo sua autonomia (D'AMBRÓSIO, 1997).

Para o professor, esse software é uma ferramenta flexível que permite a apresentação dos conteúdos matemáticos de várias maneiras, facilitando a compreensão de conceitos através da exploração e visualização em duas ou três dimensões. A capacidade de visualização oferecida pelo software ajuda o aluno a desenvolver a demonstração informal, tornando o aprendizado mais relevante.

Além de seu enorme potencial pedagógico, essa plataforma oferece fácil acesso ao software, sendo gratuito e disponível na internet. Portanto, torna-se viável utilizar essa tecnologia como um recurso de ampliação do processo de ensino-aprendizagem nos conteúdos de matemática, atendendo às necessidades dos alunos. O uso do GeoGebra durante as aulas de matemática amplia as possibilidades de participação dos estudantes e modifica o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem, desde que o professor esteja apto a utilizar adequadamente o software e disponha de tempo para preparar atividades relevantes (MAIA; GONDIM; VASCONCELOS, 2023).

Deste modo, conclui-se que esse software educativo é uma inovação importante e de grande utilidade no ensino de matemática, uma vez que proporciona aos professores e alunos um método eficaz para explorar conceitos matemáticos de maneira interativa e cativante. Seu uso favorece uma abordagem mais dinâmica e expressiva do ensino de geometria e álgebra, auxiliando no desenvolvimento de habilidades cognitivas e metacognitivas dos alunos.

5 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Uma sequência didática (SD) é uma metodologia de ensino que se refere a uma série de atividades planejadas de forma sequencial e sistematizada, com o objetivo de ensinar um determinado conteúdo ou habilidade aos alunos. Além disso, essa prática envolve a seleção de recursos, a organização das atividades e a definição de estratégias de ensino que visam alcançar os objetivos educacionais estabelecidos. Assim como outras metodologias de ensino, uma SD é uma abordagem sistemática e planejada para facilitar a aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Zabala (2015) define as sequências didáticas (SDs) como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 2015, p. 18). Ademais, “uma sequência didática envolve etapas interligadas, mas disjuntas, que tem como objetivo principal conduzir os alunos para uma aprendizagem efetiva, gerando significado para eles” (SOUZA, 2023, p. 75).

Inspirados nas ideias do autor, propomos uma abordagem para a construção de SDs que se baseia em quatro princípios fundamentais:

1. **Objetivo:** O ponto de partida de qualquer SD é a definição de um objetivo claro e específico, que represente o que se espera que os alunos aprendam ao final da sequência. Esse objetivo deve ser desafiador, mas alcançável, e estar alinhado com os currículos e diretrizes educacionais.
2. **Conteúdo:** O conteúdo a ser abordado deve ser cuidadosamente selecionado, considerando sua relevância para o aprendizado e sua conexão com o mundo real. É importante que seja apresentado de forma organizada e progressiva, permitindo que os alunos construam seus conhecimentos de forma gradual.
3. **Metodologia:** A escolha da metodologia adequada é crucial para o sucesso da SD. Diversas metodologias podem ser utilizadas, como a problematização, a investigação, a descoberta guiada e o trabalho em equipe. A metodologia escolhida deve ser compatível com o objetivo definido, com o conteúdo a ser abordado e com as características dos discentes.
4. **Avaliação:** A avaliação é um componente essencial das SDs, pois permite acompanhar o progresso dos alunos e identificar suas dificuldades e necessidades. A avaliação deve ser contínua e diversificada, utilizando diferentes instrumentos e técnicas de avaliação.

No que diz respeito à abordagem construtivista, Zabala (2015) valoriza a participação ativa do aluno na construção do conhecimento. Destaca que, a aprendizagem é um processo pessoal no qual os alunos constroem significados com a ajuda de outros. Os professores desempenham um papel crucial ao detectar conflitos, motivar os alunos e propor desafios relevantes. Esse processo não apenas ensina conteúdos, mas também promove habilidades de aprendizagem e autoimagem positiva. Ao entender esses princípios, uma série de perguntas permite avaliar e melhorar as estratégias de ensino, focando na validade das SDs e buscando maneiras de fortalecer ou complementar as atividades existentes:

Na sequência didática existem atividades:

- a) que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
- b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meninos e as meninas?
- c) que possamos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno?
- d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir?
- e) que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
- f) que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
- g) que estimulem a autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
- h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens? (ZABALA, 2015, p. 63).

Para o nosso trabalho, utilizamos como referência a sequência didática quatro proposta por Zabala (2015), uma vez que “esta sequência, comparada com as outras, é a que apresenta uma maior variedade de atividades, o que logicamente lhe permite satisfazer a totalidade dos condicionantes, a fim de que as aprendizagens sejam as mais significativas possível” (ZABALA, 2015, p. 75).

Na unidade (sequência) 4 - vemos que em praticamente todas as atividades que formam a sequência aparecem conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Neste caso, os alunos controlam o ritmo da sequência; atuando constantemente e utilizando uma série de técnicas e habilidades: diálogo, debate, trabalho em pequenos grupos, pesquisa bibliográfica, etc. Ao mesmo tempo, encontram-se diante de uma série de conflitos pessoais e grupais de sociabilidade que é preciso resolver, o que implica que devam ir aprendendo a “ser” de uma determinada maneira: tolerantes, cooperativos, respeitosos, rigorosos, etc (ZABALA, 2015, p. 61).

Na Tabela 1 a seguir, veremos o modelo de sequência no qual nos baseamos.

Tabela 1 – Sequência Didática 4 proposta por Zabala

1. Apresentação por parte do professor ou da professora de uma situação problemática relacionada com um tema.	O professor ou a professora desenvolve um tema em torno de um fato ou acontecimento, destacando os aspectos problemáticos e os que são desconhecidos para os alunos.
2. Proposição de problemas ou questões.	Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, expõem as respostas intuitivas ou suposições sobre cada um dos problemas e situações propostos.
3. Proposta das fontes de informação.	Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, propõem as fontes de informações mais apropriadas para cada uma das questões: o próprio professor, uma pesquisa bibliográfica, uma experiência, uma observação, uma entrevista, um trabalho de campo.
4. Busca de informação.	Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, realizam a coleta dos dados que as diferentes fontes lhes proporcionaram. A seguir selecionam e classificam estes dados.
5. Elaboração das conclusões.	Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, elaboram as conclusões que se referem às questões e aos problemas propostos.
6. Generalização das conclusões e síntese.	Com as contribuições do grupo e as conclusões obtidas, o professor ou a professora estabelece as leis, os modelos e os princípios que se deduzem do trabalho realizado.
7. Exercícios de memorização.	Os meninos e meninas, individualmente, realizam exercícios de memorização que lhes permitam lembrar dos resultados das conclusões, da generalização e da síntese.
8. Prova ou exame.	Na classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.
9. Avaliação.	A partir das observações que o professor fez ao longo da unidade e a partir do resultado da prova, este comunica aos alunos a avaliação das aprendizagens realizadas.

Fonte: (ZABALA, 2015)

Ao adotar essa abordagem construtivista e utilizar a sequência didática como ferramenta pedagógica, os professores podem transformar o ensino de matemática em uma experiência enriquecedora para os alunos, capacitando-os não apenas a compreender os conceitos matemáticos, mas também a aplicá-los em contextos diversos e a desenvolver habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e comunicação matemática.

O ensino de matemática, especialmente no que tange à disciplina de matrizes, exige

estratégias eficazes que promovam a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de habilidades essenciais para os alunos. Nesse contexto, as SDs se configuram como ferramentas fundamentais para o planejamento e organização do ensino, possibilitando a articulação de diferentes elementos pedagógicos em um processo sistemático e reflexivo.

Este estudo tem como objetivo principal demonstrar a efetividade das SDs aliada aos recursos tecnológicos como meio eficiente para a aplicação dos conteúdos de matemática no ensino básico, com ênfase no ensino de matrizes. Para tal, propomos a utilização de SDs em uma disciplina eletiva no Ensino Médio, buscando aprimorar o processo de aprendizagem e torná-lo mais dinâmico e engajador.

As SDs propostas neste trabalho podem ser aplicadas tanto individualmente quanto em grupo, preferencialmente no Laboratório de Informática, a fim de facilitar o acesso dos alunos aos recursos tecnológicos necessários. As seções seguintes apresentarão as sequências em detalhes, incluindo seus objetivos, atividades, recursos utilizados e estratégias de avaliação.

5.1 Sequência Didática 1 - Da teoria à prática: Explorando a introdução às matrizes e sua aplicação em planilhas eletrônicas

Nesta seção apresentaremos uma sugestão de SD destinada ao professor de Matemática que atua no Ensino Médio e deseja trabalhar a introdução do conteúdo de matrizes de maneira inovadora. Apresentaremos um planejamento estruturado e abrangente, propondo, inicialmente, a utilização de uma situação-problema para despertar a curiosidade dos alunos e proporcionar uma visão contextualizada do desenvolvimento do tema. Em seguida apontaremos uma breve relação das planilhas eletrônicas com matrizes a fim de demonstrar a relevância prática do conteúdo e a possibilidade de utilizar ferramentas digitais para auxiliar na aprendizagem.

Dando continuidade, esta SD traz a exploração de matrizes e planilhas eletrônicas em conjunto, visando mostrar que é uma ótima estratégia para aprofundar o conhecimento dos alunos e promover a interação com os softwares. Para finalizar, aprofundamos o conceito de matriz, sua representação genérica e um breve contexto histórico. Essas etapas são fundamentais para consolidar o conhecimento básico e enriquecer a experiência de aprendizagem.

A proposta de trabalho em grupo para essa SD é especialmente adequada, pois estimula a colaboração, o intercâmbio de ideias e a divisão de tarefas, além de promover o desenvolvimento de habilidades interpessoais essenciais.

Vale salientar que, a maioria das atividades descritas envolvem o uso de planilhas

eletrônicas em um ambiente de laboratório de informática. A seguir, serão vistos detalhes sobre como a SD será desenvolvida em cada encontro, bem como orientações aos professores sobre como aplicá-la ou adaptá-la às suas turmas.

Recursos Didáticos:

- Quadro branco, pincel e apagador;
- Notebook e projetor (opcional);
- Laboratório de informática;
- Computadores com acesso a planilhas eletrônicas;
- Materiais de apoio (cópias de atividades, lápis, borracha, caneta, apostilas, etc.).

Tempo pedagógico: aproximadamente oito aulas de 50 minutos cada, sendo divididas do seguinte modo:

- Etapa 1: duas aulas;
- Etapa 2: duas aulas;
- Etapa 3: duas aulas;
- Etapa 4: duas aulas.

Público-alvo: estudantes do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Objetivos da Sequência Didática:

- **Objetivo Geral:** introduzir a abordagem sobre matrizes, explorando conceitos iniciais, aplicações e a conexão com as planilhas eletrônicas.
- **Objetivos Específicos:**
 - Representar matrizes em planilhas eletrônicas;
 - Compreender e aplicar o conceito de matriz;
 - Resolver problemas envolvendo matrizes, planilhas e cálculo de médias;
 - Relacionar matrizes com situações-problema do cotidiano;
 - Dominar a definição formal de matriz e sua representação genérica;
 - Descobrir um pouco da história das matrizes e suas origens;
 - Trabalhar em equipe de forma colaborativa e eficiente.

Procedimentos metodológicos

Agora, vamos descrever as etapas necessárias para a implementação dos procedimentos metodológicos adotados na Sequência Didática 1.

Etapas 1

Nesta primeira etapa, a professora inicia a aula com a apresentação da SD aos estudantes, mostrando os objetivos a serem contemplados, o assunto que será abordado e o processo a ser realizado em cada etapa. Após essa explanação, divide a turma em grupos com, no máximo, 5 pessoas. Em seguida, introduz o conteúdo apresentando matrizes como representações matemáticas de tabelas numéricas que auxiliam na resolução e análise de sistemas lineares e, além disso, observa que o estudo de matrizes ajuda a entender as relações entre números em linhas e colunas; também ressalta que no campo da tecnologia, matrizes são essenciais para o desenvolvimento de animações computacionais, programação e resolução de dispositivos digitais como televisores, monitores e câmeras.

Logo após, apresenta uma situação-problema sobre a organização, em linhas e colunas, das notas de um boletim, propondo aos grupos completarem uma a tabela organizando as notas de um determinado aluno.

Por fim, faz uma breve introdução ao software de planilhas eletrônicas a ser utilizado, destacando como elas podem ser utilizadas para representar e manipular matrizes, apresentando exemplos práticos de como organizar dados em planilhas e realizar cálculos simples usando funções matemáticas.

Etapas 2

Nesta etapa, a professora propõe um conjunto de questões que envolvam o conceito inicial de matrizes, a representação em planilhas eletrônicas e o cálculo de média usando o software. Os grupos devem explorar as funcionalidades das planilhas eletrônicas na manipulação de matrizes e a realização dos cálculos necessários para solucionar as questões propostas. Neste momento, os grupos são incentivados a trabalharem juntos, compartilhando conhecimentos e buscando soluções para as questões.

Etapas 3

Neste momento é feita uma apresentação da definição formal de uma matriz, dos seus elementos, das linhas e colunas, utilizando linguagem clara e acessível aos alunos. Em seguida, uma explanação sobre a notação genérica para representar uma matriz, utilizando índices para identificar cada elemento. É importante ensinar aos alunos a lerem e interpretarem a notação corretamente, reconhecendo as dimensões da matriz e a posição de cada elemento. Por fim, é proposto um breve resumo da história das matrizes, destacando suas origens e os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

Etapas 4

Nesta última etapa, a docente faz uma breve revisão dos principais conceitos abordados ao longo da sequência didática (representação genérica e definição de matriz, elementos de uma matriz, identificação dos elementos de uma matriz (linha e coluna) e notação), reforçando o aprendizado dos alunos. Em seguida, promove um momento de reflexão sobre os aprendizados, incentivando os estudantes a compartilharem suas experiências e dificuldades e, finalizando, com incentivo para os grupos apresentarem as soluções das questões que exploraram. Utilizando as planilhas eletrônicas, é solicitado que os estudantes demonstrem os resultados, no intuito de promover a discussão entre os grupos, debater diferentes estratégias de resolução e reforçar os conceitos aprendidos.

Avaliação

A avaliação pode ser realizada por meio da observação da participação dos alunos nas atividades em grupo e individuais, avaliando seu nível de compreensão, engajamento e interesse no tema, além de uma análise dos trabalhos realizados, verificando se os conceitos foram assimilados e aplicados corretamente, identificando pontos fortes e áreas que precisam de aprimoramento.

Sugestões de Melhorias:

- **Variabilidade de níveis de dificuldade:** ofereça questões com diferentes níveis de dificuldade para atender às necessidades de todos os alunos.
- **Orientação e suporte:** forneça orientação e suporte aos grupos durante a resolução das questões, esclarecendo dúvidas e incentivando a colaboração.
- **Discussão em grupo:** promova discussões em grupo sobre as soluções encontradas, permitindo que os discentes compartilhem seus conhecimentos e aprendam uns com os outros.

A seguir, será apresentada a Sequência Didática 1, que foi elaborada com o objetivo de abordar os conceitos iniciais de matrizes por meio de recursos tecnológicos. Essa sequência foi planejada para promover uma compreensão mais aprofundada do tema, utilizando ferramentas digitais que facilitam a visualização e manipulação dos conteúdos.

MATRIZES: CONCEITOS INICIAIS

Introdução

As matrizes podem ser entendidas como representações matemáticas de tabelas numéricas. A associação de matrizes e determinantes a sistemas lineares auxilia não apenas a resolução dos sistemas como permite a discussão da quantidade de soluções sem a necessidade de resolvê-los.

Tabelas são muito utilizadas no dia a dia, inclusive em meios eletrônicos, pois elas facilitam a organização, a leitura e a interpretação de dados. Em Matemática, podemos relacionar tabelas a matrizes, e o estudo desse tipo de representação contribui para que compreendamos as relações entre os números dispostos em linhas e colunas.

As matrizes são bastante utilizadas no campo da tecnologia, em especial, no desenvolvimento de animações por meio de computação gráfica e no trabalho com programação. Além disso, a resolução de televisores e monitores, bem como a de câmeras digitais, é um dos exemplos de aplicação envolvendo cálculos matriciais.

Organização das notas¹

Em muitas escolas do Ensino Básico, bem como em cursos do Ensino Superior, é comum a atribuição de notas para a avaliação da aprendizagem. Essas notas podem ser atribuídas a provas, trabalhos, desempenho nas aulas ou outras dinâmicas praticadas no método de avaliação da escola.

Normalmente, as notas seguem uma escala com números (por exemplo, de 0 a 10 ou de 0 a 100) ou com letras (como de A a F) e existe um valor mínimo estabelecido pela escola, que é conhecido como média. Muitas vezes essa média corresponde a uma porcentagem mínima a ser atingida; por exemplo, obter 50% de uma escala de 0 a 10 significa ter nota mínima 5, ou 60% de uma escala de A a F significa ter nota mínima C.

Figura 1: Modelo de um boletim.

BOLETIM ESCOLAR		ESTUDANTE			
		[Campo para Nome]			
		[Campo para Turma]			
NOTAS					
BIMESTRE		1º	2º	3º	4º
	Língua Portuguesa e suas Tecnologias	[]	[]	[]	[]
	Matemática e suas Tecnologias	[]	[]	[]	[]
	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	[]	[]	[]	[]
	Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	[]	[]	[]	[]
COMENTÁRIOS		[Área para comentários]			

Fonte: Autoria própria.

¹ Situação-problema retirada do livro “Matemática em contexto” (DANTE, 2020) com adaptações.

Considere uma escola em que as notas das provas obedecem à escala numérica de 0 a 10 e que, em determinado período, foram feitas três provas em cada matéria.

Para visualizar e analisar as notas que tirou, Mickael vai organizá-las em linhas e colunas, formando uma tabela. Ele fez as avaliações 1, 2 e 3 e tirou, respectivamente, 8, 9 e 10 em Língua Portuguesa, 9, 7 e 10 em Ciências Humanas e 8, 8 e 9 em Ciências da Natureza.

Questão 1. Complete a tabela abaixo organizando as notas de Mickael.

Tabela 1: Notas de Mickael.

Avaliação	Avaliação 1	Avaliação 2	Avaliação 3
Disciplina			
Língua Portuguesa			
Ciências Humanas			
Ciências da Natureza			

Fonte: DANTE (2020).

Em Matemática, tabelas que apresentam dados (também chamados elementos ou termos) dispostos em **linhas** (filas horizontais) e **colunas** (filas verticais) podem ser organizadas em matrizes. Esses elementos, que geralmente são números, ficam entre parênteses ou entre colchetes. Vejamos como podemos representar a matriz correspondente aos dados numéricos da tabela que você representou.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{ linhas} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{ linhas}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \text{ colunas} \quad \quad \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \text{ colunas}$$

PENSANDO ALÉM...

Como seria a matriz associada à tabela caso as linhas da tabela fossem as colunas e as colunas fossem as linhas?

Planilhas eletrônicas e Matrizes

Softwares de **planilha eletrônica**² são ferramentas que permitem aos usuários organizar, formatar e calcular dados com fórmulas usando um sistema de células dividido em linhas e colunas. Eles são amplamente utilizados em muitos campos para registrar dados, realizar cálculos financeiros, criar gráficos, e até mesmo programar.

Em um software de planilha eletrônica, você pode criar tabelas que organizam automaticamente os dados inseridos, realizar cálculos complexos com fórmulas, criar gráficos a partir dos dados inseridos, e muito mais. As planilhas eletrônicas, como por exemplo o Microsoft Excel, têm uma relação direta com as matrizes matemáticas. Ambas são organizadas em linhas e colunas e permitem a manipulação de dados de maneira estruturada.

² Informações obtidas no endereço eletrônico: <https://ebaonline.com.br/blog/o-que-e-para-que-serve-excel>.

Vejam os alguns dos aspectos em que podemos relacionar as matrizes com as planilhas eletrônicas:

- **Organização de Dados:** tanto as matrizes quanto as planilhas organizam os dados em um formato de grade, com linhas e colunas. Cada **célula** em uma planilha corresponde a um **elemento** em uma matriz;
- **Operações:** as operações que você pode realizar em matrizes, como adição, subtração e multiplicação, podem ser realizadas em planilhas usando fórmulas;
- **Referência de Células:** em uma matriz, um elemento é referenciado por sua posição na linha e na coluna. Da mesma forma, em uma planilha, uma célula é referenciada por sua coluna (**indicada por letras**) e sua linha (**indicada por números**);
- **Manipulação de Dados:** assim como as matrizes, as planilhas permitem a manipulação de dados. Você pode alterar os valores das células, realizar cálculos e analisar os dados.

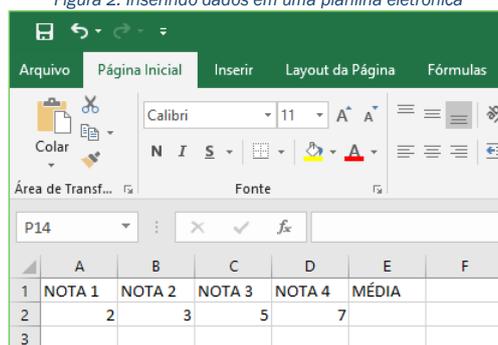
Portanto, se você entender como as matrizes funcionam, você terá uma base sólida para trabalhar com planilhas eletrônicas e vice-versa. As habilidades que você desenvolve ao trabalhar com um podem ser facilmente transferidas para o outro.

Já vimos que um software de planilha eletrônica nos permite realizar uma variedade de cálculos, isso inclui o cálculo de médias. A média, como bem sabemos, é a soma de um conjunto de números dividida pela quantidade de números no conjunto. No Excel, por exemplo, você pode calcular a média de um conjunto de números usando a função **=MÉDIA**.

Calcular a média em uma planilha eletrônica como o Excel é bastante simples. Observemos um passo a passo:

1. Insira seus dados em uma coluna ou linha da planilha;

Figura 2: Inserindo dados em uma planilha eletrônica



	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7		
3						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel

2. Selecione a célula onde você deseja que a média apareça;

Figura 3: Selecionando uma célula em uma planilha eletrônica.

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7		
3						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

3. Digite =MÉDIA(;

Figura 4: Aprendendo a calcular a média aritmética em uma planilha eletrônica.

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7	=MÉDIA(
3						
4						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

4. Selecione o intervalo de células que contém os dados para os quais você deseja calcular a média. Por exemplo, se seus dados estão nas células A2 a D2, você digita A2:D2;

Figura 5: Selecionando as células para obter a média.

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7	=MÉDIA(A2:D2	
3						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

5. Feche o parêntese e pressione Enter.

A média dos números no intervalo de células selecionado será calculada e exibida na célula que você selecionou no passo 2.

Figura 6: Exibição da média, já calculada, na célula selecionada.

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7	4,25	
3						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

Observação: o Excel ignora as células vazias ou contendo texto ao calcular a média.

Questão 2. Vamos voltar ao boletim de Mickael e calcular suas médias, em cada uma das disciplinas, usando o que aprendemos sobre “cálculo de médias em planilhas eletrônicas”. Para isso precisamos, antes de tudo, inserir os dados do boletim em uma planilha eletrônica.

Questão 3. Em qual disciplina Mickael teve o melhor desempenho nessas três avaliações? Justifique.

Questão 4. As notas de Sara nas mesmas avaliações foram 7, 5 e 8 em Língua Portuguesa, 6, 6 e 6 em Ciências Humanas e 9, 7 e 8 em Ciências da Natureza. Represente, na planilha eletrônica, a tabela dessas notas e calcule as médias de Sara.

Questão 5. Agora, represente abaixo a matriz correspondente às notas e às médias de Sara.

Explorando as matrizes

Muitas empresas possuem uma vasta quantidade de informações sobre clientes, potenciais clientes, vendas, compras, marketing, interesses de grupos, entre outros. No entanto, essas informações não teriam utilidade se não fossem organizadas de forma lógica ou se não pudessem ser recuperadas e correlacionadas facilmente.

A organização dessas informações é realizada por meio de um banco de dados, que pode ser compreendido como um conjunto de dados e tabelas inter-relacionados. E, como observamos em situações anteriores, tais tabelas podem ser vinculadas a **matrizes**.

Antes de definirmos formalmente o que são matrizes, vamos investigar mais uma situação-problema³.

Vendas de livros no primeiro trimestre do ano

Em uma editora, a venda de livros de aventura, romance e ficção no primeiro trimestre de um ano foi organizada em uma tabela. Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, pode ser associada a uma **matriz 3×3** (lemos: matriz três por três).

³ Situação-problema retirada do livro “Matemática em contexto” (DANTE, 2020) com adaptações.

Tabela 2: Vendas de livros de uma editora

Gênero \ Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Aventura	20 000	31 000	40 000
Romance	15 000	19 000	25 000
Ficção	16 000	20 000	28 000

Fonte: DANTE, 2020.

Matriz associada à tabela de vendas de livros: $\begin{pmatrix} 20\ 000 & 31\ 000 & 40\ 000 \\ 15\ 000 & 19\ 000 & 25\ 000 \\ 16\ 000 & 20\ 000 & 28\ 000 \end{pmatrix}$

Agora, percebamos que se desejarmos descobrir:

- o número de livros de aventura vendidos em fevereiro, simplesmente consultamos o número na primeira linha e na segunda coluna da matriz;
- o número de livros de romance vendidos em janeiro, simplesmente consultamos o número na segunda linha e na primeira coluna da matriz;
- o número de livros de ficção vendidos em março, simplesmente consultamos o número na terceira linha e na terceira coluna da matriz.

Usando as planilhas eletrônicas, você pode somar facilmente o conteúdo de várias células usando a função **SOMA**. Vejamos como proceder:

1. Insira os números que você deseja somar em células individuais na planilha;
2. Clique na célula onde você deseja que o resultado da soma apareça;
3. Digite =SOMA(;
4. Selecione as células que contêm os números que você deseja somar. Por exemplo, se seus números estão nas células A1 até A4, você digitaria A1:A4;
5. Feche o parêntese e pressione Enter.

Deste modo, a planilha somará os números nas células que você selecionou e exibirá o resultado na célula que você escolheu para a soma.

Vamos praticar!

Questão 6. Insira, na planilha eletrônica, os dados apresentados na tabela que representa a venda de livros.

Questão 7. Obtenha, usando a função =SOMA, a quantidade de livros vendidos em janeiro.

Questão 8. Agora, obtenha a quantidade de livros vendidos de cada gênero no primeiro trimestre.

Questão 9. Quantos livros a editora vendeu no primeiro trimestre? Explique como você obteve essa resposta.

Definição formal de uma matriz

Sejam m e n dois números inteiros maiores do que ou iguais a 1.

Definição: uma matriz $m \times n$ (lemos: matriz m por n) é toda tabela formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

A **ordem** de uma matriz é uma descrição do número de linhas e colunas que ela possui. É geralmente expressa na forma " $m \times n$ ", dizemos que uma matriz é de ordem $m \times n$, onde " m " é o **número de linhas** e " n " é o **número de colunas**.

Observação: A ordem de uma matriz é importante porque determina as operações que podem ser realizadas com a matriz. Por exemplo, mais adiante, veremos que para adicionar ou subtrair duas matrizes, elas devem ter a mesma ordem. Para multiplicar duas matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

Analisemos alguns exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×2 (lemos: dois por dois), pois tem 2 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 3 \\ 4 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3 (lemos: dois por três), pois tem 2 linhas e 3 colunas.

c) $(-2 \ 0 \ 3)$ é uma matriz de ordem 1×3 .

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 4×1 .

Representação genérica de uma matriz

Para nomearmos uma matriz, geralmente utilizamos uma letra em maiúscula e, para representarmos um elemento específico dessa matriz, usamos uma letra em minúscula acompanhada de dois índices: o primeiro índice indica a linha onde o elemento está localizado e o segundo indica a coluna na qual o elemento se encontra. Por exemplo, um elemento genérico de uma matriz A é representado por a_{ij} ,

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ com } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ e } i, j \in \mathbb{N}.$$

(Lemos: matriz A dos elementos a_{ij} , do tipo $m \times n$.)

Essa matriz pode ser representada, genericamente, da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

O elemento a_{13} (lemos: a um três), por exemplo, tem $i = 1$ e $j = 3$, ou seja, ele está localizado na primeira linha e na terceira coluna.

Exemplo:

Acompanhe como escrever a matriz $M = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Como a matriz M é de ordem 3×3 , ela deve ter 3 linhas e 3 colunas tal que:

- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$;
- $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Dessa forma, temos a matriz de ordem 3×3 : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Um pouco da história das matrizes

Na China⁴, entre os séculos II a.C. e I a.C., diversos textos foram reunidos no livro *Jiuzhang suanshu*, provavelmente de diversos autores, para organizar conhecimentos matemáticos. *Jiu* e *zhang* são traduzidos como “nove capítulos”, e *suán* e *shu* como “aritmética”; porém, esses termos provavelmente teriam como significado algo próximo de “a arte dos números” ou “procedimentos de cálculo”. Atualmente, esse livro é popularmente conhecido como *Os nove capítulos da arte matemática*.

Nesse livro, foram organizados 246 problemas práticos, com o objetivo de apresentar métodos de resolução de problemas diversos da Matemática do dia a dia, bem como da engenharia, da topografia, do comércio e da tributação. Pela qualidade de exemplos, a obra teve papel fundamental no desenvolvimento posterior da Matemática na China.

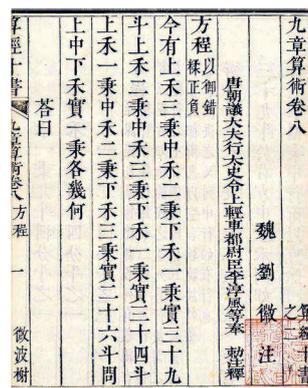
Um dos problemas dessa obra é apresentado a seguir, traduzido para o português.

“Existem três tipos de milho, dos quais três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro somam 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo?”

No livro referido, os dados contidos nesse problema são apresentados organizados como a seguir, dispostos da direita para a esquerda, conforme a cultura oriental.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Figura 7: Página do capítulo Fang Cheng (“Matrizes retangulares”) do livro *Jiuzhang suanshu*.



Fonte: Google Images.

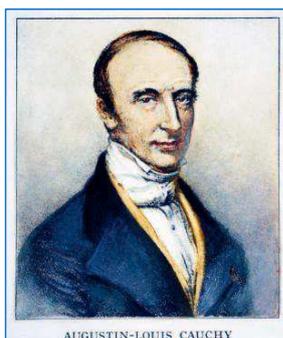
⁴ De acordo com BOYER (1996).

Dessa forma, podemos observar que os chineses, há mais de dois milênios, já utilizavam organizações em linhas e colunas com o propósito de coletar dados de um problema. No entanto, a representação de conjuntos de números na forma de matrizes só surgiu no século XIX.

Em 1826, o matemático Augustin-Louis Cauchy foi o primeiro a dar um nome às matrizes, chamando-as de "tableaux" (tabela, em francês). No entanto, no século XIX, os matemáticos ingleses Arthur Cayley e James Joseph Sylvester deram um impulso significativo ao desenvolvimento das matrizes.

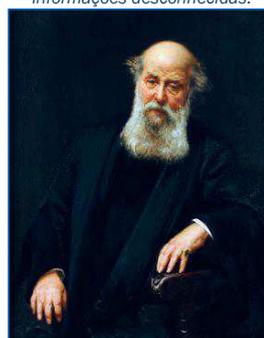
Cayley foi o primeiro a usar o termo "matriz" e a desenvolver uma teoria geral das matrizes. Sylvester desenvolveu o conceito de produto de matrizes e mostrou como as matrizes podem ser usadas para representar transformações lineares. Um século após as matrizes se tornaram uma ferramenta fundamental em matemática, física, engenharia e outras áreas.

Figura 8: Augustin-Louis Cauchy, século XIX (litografia). Demais informações desconhecidas.



Fonte: Google Images.

Figura 9: James Joseph Sylvester, século XIX (óleo sobre tela de 112 cm x 3 86 cm). Demais informações desconhecidas.



Fonte: Google Images.

Referências

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

FERREIRA, Fabrício Eduardo; SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ser protagonista: matemática e suas tecnologias: pensamento computacional e fluxogramas: ensino médio** - 1. Ed. - São Paulo: Edições SM, 2020.

O que é uma planilha eletrônica?. Escola Britânica de Artes criativas & Tecnologia, 2016. Disponível em: <https://ebaonline.com.br/blog/o-que-e-para-que-serve-excel>. Acesso em: 01 de março de 2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio**. - 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

5.2 Sequência Didática 2 - Tipos de Matrizes: Uma abordagem didática com enfoque em tecnologia e aplicações práticas

Nesta seção, a SD que iremos apresentar, com foco no tema “Tipos de Matrizes”, destinada aos professores de Matemática que desejam trabalhar o tema, demonstra um planejamento estruturado e abrangente, capaz de conduzir os estudantes a um aprendizado significativo. As atividades propostas exploram diferentes tipos de matrizes, desde conceitos básicos até aplicações práticas, utilizando recursos variados e promovendo a participação ativa dos alunos.

A introdução do tema traz uma abordagem contextualizada, através de uma situação-problema relacionada a imagens digitais, conecta o conteúdo à realidade dos alunos e desperta seu interesse. Em seguida, aborda alguns dos principais conceitos relacionados às matrizes, incluindo diagonais, tipos de matrizes, igualdade de matrizes, transposta e matriz simétrica.

A proposta de atividades em grupo, resolução de problemas e utilização de planilhas eletrônicas promove o aprendizado ativo e colaborativo, além de desenvolver habilidades como trabalho em equipe, comunicação e resolução de problemas. A utilização de imagens e de planilhas eletrônicas contribui para tornar as aulas mais dinâmicas e facilitar a assimilação dos conceitos.

É importante destacar que a maioria das atividades propostas requer o uso de planilhas eletrônicas em um laboratório de informática. Posteriormente, serão apresentados detalhes sobre como a SD será implementada em cada etapa, além de diretrizes para os professores sobre como aplicá-la ou ajustá-la às necessidades de suas turmas.

Recursos Didáticos:

- Quadro branco, pincel e apagador;
- Notebook e projetor (opcional);
- Laboratório de informática;
- Computadores com acesso a planilhas eletrônicas;
- Materiais de apoio (cópias de atividades, lápis, borracha, caneta, apostilas, etc.).

Tempo pedagógico: aproximadamente oito aulas de 50 minutos cada, sendo divididas do seguinte modo:

- Etapa 1: uma aula;
- Etapa 2: três aulas;

- Etapa 3: três aulas;
- Etapa 4: uma aula.

Público-alvo: Estudantes do 2º ou 3º ano do ensino médio.

Objetivos da Sequência Didática:

- **Objetivo Geral:** Promover uma compreensão aprofundada e aplicada sobre os tipos de matrizes, através de uma abordagem contextualizada e intrigante que envolve o uso de imagens digitais, a exploração de conceitos fundamentais e tipos de matrizes, a resolução colaborativa de problemas utilizando planilhas eletrônicas.
- **Objetivos Específicos:**
 - Relacionar o conceito de matriz com imagens digitais, utilizando exemplos concretos e explorando a aplicação dessa ferramenta na área de processamento de imagens;
 - Identificar e diferenciar os diferentes tipos de diagonais presentes em uma matriz;
 - Classificar e caracterizar os diversos tipos de matrizes explorando suas propriedades e representações;
 - Resolver problemas envolvendo a representação de matrizes, utilizando planilhas eletrônicas como ferramenta auxiliar;
 - Aplicar as definições e conceitos aprendidos sobre matrizes na resolução de problemas práticos e desafiadores, individualmente e em grupo;
 - Definir o conceito de igualdade entre matrizes de forma precisa e rigorosa;
 - Compreender o conceito de matriz transposta e realizar a transposição de matrizes de forma correta, utilizando exemplos e diagramas;
 - Identificar e caracterizar matrizes simétricas;
 - Resolver problemas que envolvam os conceitos de igualdade, transposta e matriz simétrica, demonstrando domínio e aplicação prática dos conhecimentos aprendidos;
 - Utilizar o comando “=TRANSPOR” em planilhas eletrônicas para realizar a transposta de matrizes de forma eficiente e automatizada;
 - Aplicar exercícios desafiadores que integrem os diferentes conceitos aprendidos sobre matrizes, elevando o nível de dificuldade e estimulando o raciocínio crítico dos alunos;

- o Desenvolver habilidades de trabalho em equipe, colaboração, comunicação e resolução de conflitos através da dinâmica de trabalho em grupo.

Procedimentos metodológicos:

Etapa 1

Na etapa inicial, a professora introduz a SD, delineando os objetivos, o tema central e a metodologia de cada fase. Após essa apresentação, a turma é organizada em grupos de até cinco integrantes. Dando seguimento, a professora inicia a exposição do conteúdo, apresentando as matrizes quadradas e um texto que desperta a curiosidade e o interesse dos alunos, conectando o tema com a realidade; o texto relaciona as imagens digitais com as matrizes quadradas demonstrando a aplicabilidade do conteúdo. Finalizando, propõe questões interpretativas e contextualizadas relacionadas ao que foi abordado.

Etapa 2

Nesta etapa, a SD apresenta os tipos de diagonais (principal e secundária) e discute os diferentes tipos de matrizes (quadrada, identidade, nula, diagonal, triangular linha e coluna), propõe a resolução de questões, com e sem o apoio de tecnologias digitais, relacionadas ao tema com o intuito de desenvolver a percepção espacial e o raciocínio lógico dos alunos.

Etapa 3

Neste momento, a professora traz uma definição clara e precisa da igualdade de matrizes, garantindo que os alunos compreendam o conceito de forma correta. Logo após, apresenta a definição da transposta de uma matriz de forma didática para facilitar a compreensão desse conceito, além disso explora o conceito de matriz simétrica com exemplos. Para que os conceitos estudados sejam consolidados, propõe a resolução de questões envolvendo igualdade, transposta e matriz simétrica e, sugere a utilização do comando “=TRANSPOR” em planilhas eletrônicas para que sejam desenvolvidas habilidades digitais e os estudantes se familiarizem com ferramentas úteis.

Etapa 4

Na fase final, a professora recapitula os principais conceitos explorados na sequência didática, consolidando o aprendizado. Em seguida, conduz uma reflexão sobre as aprendizagens, convidando os alunos a compartilharem suas vivências e desafios. Para finalizar, os grupos apresentam suas soluções para as questões investigadas, utilizando, quando necessário, planilhas eletrônicas para exibir os resultados. O objetivo é fomentar a discussão entre os grupos, analisar diferentes estratégias de resolução e solidificar os conhecimentos adquiridos.

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua e abrangente, através do acompanhamento minucioso da participação dos alunos nas atividades propostas, tanto em grupo quanto

individualmente. Serão levados em conta a compreensão dos conceitos apresentados, o envolvimento nas discussões e o entusiasmo demonstrado pelo tema. Adicionalmente, os trabalhos realizados serão examinados detalhadamente, buscando verificar a correta absorção e aplicação do conhecimento, identificando os pontos positivos de cada aluno e os aspectos que demandam maior atenção e desenvolvimento.

Sugestões de Melhorias

- **Levantamento de hipóteses:** incentive os alunos a levantarem hipóteses sobre como as imagens são formadas por matrizes antes da revelação.
- **Demonstração prática:** apresente uma simulação simples de como uma imagem é convertida em matriz e vice-versa, utilizando softwares ou ferramentas online.
- **Atividades interativas:** crie atividades interativas, como jogos ou quizzes, para revisar os conceitos de forma lúdica e engajadora.

Recomendamos a implementação dessa SD com as devidas adaptações ao contexto da turma e da escola, com o acompanhamento e avaliação constante do professor para garantir o sucesso do processo de ensino e aprendizagem.

A seguir, apresentaremos a segunda sequência didática, que tem como objetivo ampliar a compreensão dos alunos sobre os diversos tipos de matrizes existentes, suas propriedades e aplicações práticas. A SD 2 dará continuidade ao trabalho iniciado na primeira sequência, aprofundando os conhecimentos dos alunos sobre matrizes e ampliando suas possibilidades de aplicação.

MATRIZES: ALGUNS TIPOS

Introdução

Anteriormente, estudamos os conceitos iniciais de matrizes e sua generalização. Nessa aula, veremos que nem todas as matrizes são iguais. Existem vários tipos de matrizes, cada uma com suas próprias propriedades e características únicas, que recebem nomes especiais.

A seguir, exploraremos alguns dos tipos mais comuns de matrizes, incluindo matrizes quadradas, diagonais, identidade, nulas, simétricas, entre outras, e discutiremos suas propriedades e aplicações.

Matriz quadrada

Uma matriz de ordem $m \times n$ é denominada **matriz quadrada** quando a quantidade de linhas é igual a de colunas, isto é, $m = n$. Nesse caso, dizemos que a matriz é quadrada de ordem $n \times n$ ou, simplesmente, matriz quadrada de ordem n . Indicamos essa matriz por A_n .

Quantos *pixels*?¹

Você já deve ter ouvido falar em resoluções *HD*, *Full HD*, *4K* e afins. Mas, afinal, o que é resolução? Qual a diferença entre essas resoluções? Existe uma relação entre a resolução da imagem e o tamanho da tela?

Toda imagem que aparece na tela dos dispositivos eletrônicos é dividida em milhares ou milhões de minúsculos pontos luminosos chamados *pixels*. Talvez você consiga vê-los se aproximar bem os olhos de um televisor ou monitor, principalmente os maiores, mas são praticamente imperceptíveis na tela de *smartphones*, *tablets* ou *smartwatches*. A imagem é formada porque eles são dispostos em linhas e colunas justapostas e podem assumir diferentes cores, em diferentes tonalidades.

Por convenção popular, a resolução nada mais é do que a quantidade de *pixels* em cada linha e em cada coluna da tela, por exemplo, uma imagem exibida com resolução 1920×1080 , também conhecida por *Full HD*, é formada por 2073600 *pixels*. Por conveniência, o primeiro número indica a quantidade de colunas. A posição de um *pixel* na imagem permite que ele seja codificado por uma descrição exata e minuciosa de sua localização e uma intensidade de cor, possibilitando que sejam realizadas, por exemplo, alterações e que haja o reconhecimento de padrões nesse tipo de imagem.

¹ Situação-problema retirada do livro “Diálogo: Matemática e suas tecnologias” (TEIXEIRA, 2020).

Em relação às cores, duas representações são frequentemente utilizadas para um *pixel*. Uma delas é o sistema RGB, cuja combinação em diferentes intensidades resulta em outra cor do espectro luminoso, com variações entre o preto (ausência de cor) e o branco (intensidade máxima). A outra representação corresponde à escala de cinza. Em ambos os casos, a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255.

No sistema RGB, a cor **verde** é codificada por três números: "(0, 255, 0)", indicando não haver contribuição alguma das cores vermelha e azul, estando na intensidade máxima da cor verde.

Na escala de **cinza**, no sistema RGB, o código 0 é utilizado para a cor preta e o 255, para a cor branca, sendo que qualquer número inteiro nesse intervalo corresponde a determinado tom de cinza.

No sistema RGB, a cor **branca** é representada pelos números "(255, 255, 255)". Já a cor preta é representada pelos números "(0, 0, 0)".

Questão 1. Cite alguns aparelhos que geram imagens digitais.

Veja o significado e a tradução de algumas abreviaturas:

Pixel: *picture element*, do inglês, elemento de imagem.

Full HD: *full high definition*, do inglês, alta definição completa.
PPI: *pixel per inches*, do inglês, *pixels* por polegadas.

RGB: *red, green, blue*, do inglês, vermelho, verde, azul.

Questão 2. Como os *pixels* são dispostos na composição de uma imagem digital? De que modo participam da constituição da imagem?

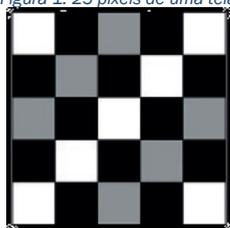
Questão 3. Conhecendo o número de linhas e de colunas de *pixels* em uma imagem, que procedimento pode ser realizado para determinar a quantidade de *pixels* que compõe essa imagem?

Questão 4. Pesquise sobre as demais resoluções citadas no início do texto (HD e 4K) e calcule a quantidade de *pixels* que forma uma imagem em cada uma delas.

Questão 5. Escreva semelhanças e diferenças entre o sistema RGB e a escala de cinza.

Questão 6. (Fatec-SP) Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel* na tela. Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada *pixel*, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255). Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.

Figura 1: 25 pixels de uma tela.



Fonte 1: Fatec-SP.

Pixel: menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir uma cor.

A matriz numérica que corresponde às cores da figura apresentada é dada por:

$$\begin{pmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{pmatrix}.$$

Seja $M = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte maneira:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 127, & \text{se } i > j \\ 255, & \text{se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela. Represente a matriz M abaixo:

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela:

- i. terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.
- ii. terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.
- iii. terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.
- iv. terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.
- v. terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.

Diagonais de uma matriz

Em uma matriz quadrada de ordem n , os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ constituem a **diagonal principal** da matriz (são os elementos a_{ij} com $i = j$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 13 \\ 2 & 0 & 4 \\ 10 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal

A outra diagonal da matriz quadrada, que vai do último elemento da 1ª linha até o 1º elemento da última linha, é chamada de **diagonal secundária** da matriz (são os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$).

Observação: O **traço** de uma matriz quadrada de ordem n é a soma de todos os elementos da **diagonal principal**:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}.$$

Algumas matrizes quadradas, por suas características, recebem denominações especiais: matriz triangular, matriz diagonal e matriz identidade. A seguir, vamos estudar as características de cada uma delas.

Matriz triangular

Matriz triangular é a matriz quadrada de ordem n cujos elementos, acima ou abaixo da diagonal principal, são todos nulos. Nesse tipo de matriz,

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i < j \text{ ou } a_{ij} = 0 \text{ para } i > j.$$

Exemplos:

i. Matriz triangular de ordem 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz triangular de ordem 3.

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Observação: Toda matriz triangular cujos elementos nulos estão abaixo da diagonal principal chama-se **matriz triangular superior**, e toda matriz triangular cujos elementos nulos estão acima da diagonal principal chama-se **matriz triangular inferior**.

Matriz diagonal

Matriz diagonal é a matriz quadrada de ordem n cujos elementos que não estão na diagonal principal são todos nulos, ou seja, na matriz diagonal $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplos:

i. Matriz diagonal de ordem 2.

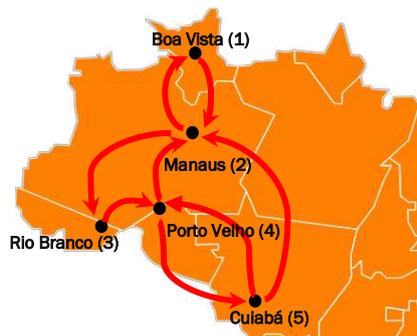
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz diagonal de ordem 3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Questão 7. O mapa apresenta as rotas, indicadas pelas setas vermelhas, oferecidas por uma companhia aérea que atua em certa região do Brasil².

Figura 2: Rotas aéreas.



Fonte: Google imagens com adaptações.

a) Escreva a matriz $C = (c_{ij})_{5 \times 5}$, tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j \text{ e se } i = j \\ 0, & \text{se não existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j \end{cases}$$

b) Thayná pretende fazer uma viagem de Rio Branco a Boa Vista. Sabendo que a passagem para cada percurso custa R\$ 210,00, qual é o menor custo para uma viagem de ida e volta de Rio Branco a Boa Vista? Por quê?

c) A matriz C é uma matriz triangular? É uma matriz diagonal?

d) Represente a matriz do item a) em uma planilha eletrônica.

Matriz identidade

Matriz identidade é a matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais, iguais a 0. A matriz identidade de ordem n é indicada por I_n .

² Situação-problema retirada do livro "Diálogo: Matemática e suas tecnologias" (TEIXEIRA, 2020) com adaptações.

Em linguagem matricial podemos dizer que na matriz identidade, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

Exemplos:

i. Matriz identidade de ordem 2.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz identidade de ordem 3.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

Matriz nula é aquela em que todos os elementos são iguais a zero. A matriz nula de ordem $m \times n$ é indicada por $0_{m \times n}$. A matriz quadrada nula de ordem n é indicada por 0_n .

Exemplos:

i. Matriz nula de ordem 2.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz nula de ordem 2×3 .

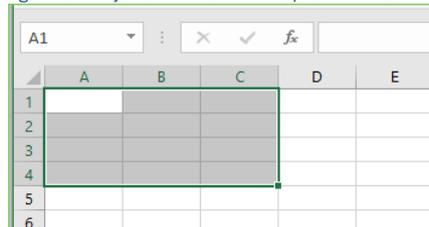
$$0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Você sabia?

Em uma planilha eletrônica podemos colocar todos os elementos de uma matriz nula ao mesmo tempo. Por exemplo, se quisermos representar uma matriz $0_{4 \times 3}$ através de uma tabela, basta seguirmos estes passos:

i. selecionamos 4 linhas e 3 colunas;

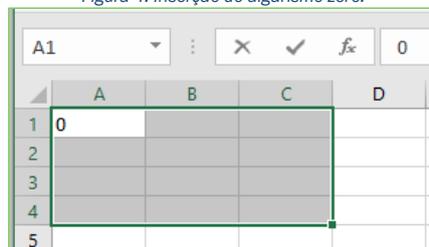
Figura 3: Seleção de células em uma planilha eletrônica.



Fonte: Elaborada pela autora no excel.

ii. inserimos o algarismo 0 (zero) na barra de fórmulas;

Figura 4: Inserção do algarismo zero.



Fonte: Elaborada pela autora no excel.

iii. e por fim teclamos “CTRL+SHIFT+ENTER”.

Figura 5: Preenchimento de todas as células selecionadas com o algarismo zero.

	A	B	C	D
1	0	0	0	
2	0	0	0	
3	0	0	0	
4	0	0	0	
5				

Fonte: Elaborada pela autora no excel.

Questão 8. Agora faça você mesmo!

Represente na planilha eletrônica uma matriz nula de ordem 4×5 , por exemplo.

Matriz linha e matriz coluna

As matrizes que têm apenas uma linha ou apenas uma coluna recebem, respectivamente, os nomes **matriz linha** e **matriz coluna**. De modo geral, uma matriz do tipo:

$1 \times n$ é chamada **matriz linha**;
 $m \times 1$ é chamada **matriz coluna**.

Exemplos:

i. Matriz linha de ordem 1×3 .

$$(-2 \ 0 \ 3)$$

ii. Matriz coluna de ordem 4×1 .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

É possível obter uma matriz linha ou coluna que seja uma matriz nula? Dê um exemplo.

Igualdade de matrizes

Dadas as matrizes A e B , dizemos que essas matrizes são iguais ($A = B$) se, e somente se, elas **possuem a mesma ordem** e os **elementos** que **ocupam a mesma posição** em ambas (elementos correspondentes) são **iguais**. De maneira simbólica, temos:

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Se existir pelo menos um elemento a_{ij} , tal que $a_{ij} \neq b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, então $A \neq B$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

As matrizes A e B são iguais, pois são de mesma ordem (2×2) e os elementos correspondentes são iguais.

Observação: Se duas matrizes A e B têm ordens diferentes, então $A \neq B$.

Questão 9. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

- Toda matriz quadrada nula é triangular.
- A matriz identidade é um exemplo de matriz diagonal.
- Toda matriz quadrada é triangular superior.
- Quando pelo menos um elemento da matriz é igual a 0, então a matriz é denominada nula.
- O traço da matriz identidade é numericamente igual à sua ordem.

Entre em www.kahoot.it e use o pin abaixo.

PIN do jogo:



Transposta de uma matriz

Chama-se **matriz transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, e indica-se por A^t a matriz do tipo $n \times m$ que tem as colunas ordenadamente iguais às linhas de A .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Observação: Note que:

- A ordem de A é 2×3 e a de A^t é 3×2 ;
- A 1ª linha de A corresponde à 1ª coluna de A^t ;
- A 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de A^t .

Matriz simétrica

Matriz simétrica é uma matriz quadrada A , em que $A = A^t$. Em uma matriz simétrica $A = (a_{ij})_n$, temos $a_{ij} = a_{ji}$ para qualquer i e j , com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$. Dessa maneira, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplos:

- i. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica, pois $A = A^t$.
- ii. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica, pois $B = B^t$.

Questão 10. A Olimpíada é um dos maiores eventos esportivos da atualidade. Nela, participam atletas de diversas nacionalidades, os quais se reúnem a cada quatro anos em uma cidade escolhida como sede para a disputa dos jogos³. Veja na tabela abaixo a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas.

Medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas - 2008 a 2020			
Olimpíada	Quantidade de medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
Tóquio (2020)	7	6	8
Rio (2016)	7	6	6
Londres (2012)	3	5	9
Pequim (2008)	3	4	10

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro. O Brasil nos jogos. Disponível em: <<https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas>>. Acesso em: 04 mar. 2024.

- a) Escreva uma matriz A que represente as informações da tabela.

- b) Escreva a matriz A^t .

³ Situação-problema retirada do livro "Matemática interligada" ANDRADE (2020) com adaptações.

c) As linhas da matriz A apresentam as mesmas informações das linhas da matriz A^t ? Por quê?

d) Na matriz A^t , o que representam as:

- colunas?

- linhas?

e) Construa abaixo uma tabela com base em A^t .

--

f) Agora, vamos obter a matriz transposta usando uma planilha eletrônica. Para isso, siga as instruções: digite a tabela dada na planilha; selecione a quantidade de linhas e colunas da matriz A^t ; na barra de fórmulas insira o comando “=TRANSPOR(intervalo das células da matriz original)”; pressionar “CTRL+SHIFT+ENTER”.

Referências

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica/obra coletiva**; editora responsável. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio**. - 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo: matemática e suas tecnologias: Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. - 1. Ed. - São Paulo: Moderna, 2020.

5.3 Sequência Didática 3 - Operações Matriciais com GeoGebra e Planilhas Eletrônicas

Esta sequência didática, com foco nas operações com matrizes, promete um processo de aprendizagem empolgante para os alunos, guiando-os desde a introdução dos conceitos até a resolução de problemas complexos, utilizando ferramentas digitais como o GeoGebra e planilhas eletrônicas. Através de atividades diversificadas, trabalho em equipe e situações-problema, os estudantes poderão desenvolver habilidades matemáticas essenciais, para aprimorar seu raciocínio lógico e criatividade.

Inicialmente, será apresentada uma situação-problema real e contextualizada que envolva operações com matrizes. Em seguida, será promovida uma discussão em grupo sobre a situação-problema, incentivando a exploração de diferentes abordagens e soluções. Paralelamente, será realizada uma breve introdução à interface do GeoGebra, destacando as ferramentas essenciais para representações matemáticas.

Logo após, a SD apresentará o conceito de matriz oposta e das propriedades da adição de matrizes, definirá a subtração de matrizes, relacionando-a com a adição de matrizes opostas e fará a proposta da resolução de questões envolvendo adição e subtração de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações.

Dando continuidade, será apresentada uma nova situação-problema que envolva a multiplicação de uma matriz por um número real, a definição da multiplicação de uma matriz por um número real e a exposição das propriedades da multiplicação de uma matriz por um número real.

Finalmente, introduzirá a multiplicação de matrizes através de situação-problema antes da definição do produto entre matrizes, além de sugerir a resolução de questões envolvendo a multiplicação de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações.

Vale ressaltar que a maioria das atividades propostas nesta SD demanda a utilização do GeoGebra e de Planilhas eletrônicas, preferencialmente em um laboratório de informática equipado. A seguir, serão detalhadas as etapas de implementação da SD, fornecendo aos professores orientações claras sobre como aplicar as atividades e adaptá-las às necessidades específicas de suas turmas.

Recursos Didáticos:

- Quadro branco, pincel e apagador;
- Notebook e projetor (opcional);
- Laboratório de informática;

- Computadores com acesso ao GeoGebra e a planilhas eletrônicas;
- Materiais de apoio (cópias de atividades, lápis, borracha, caneta, apostilas, etc.).

Tempo pedagógico: aproximadamente oito aulas de 50 minutos cada, sendo divididas do seguinte modo:

- Etapa 1: uma aula;
- Etapa 2: duas aulas;
- Etapa 3: duas aulas;
- Etapa 4: duas aulas;
- Etapa 5: uma aula.

Público-alvo: Estudantes do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Objetivos da Sequência Didática:

- **Objetivo Geral:** Desenvolver o conhecimento e a compreensão dos alunos sobre as operações com matrizes, utilizando o GeoGebra e planilhas eletrônicas como ferramentas para a exploração, resolução de problemas e aprimoramento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da capacidade de resolução de problemas.
- **Objetivos Específicos:**
 - Definir e aplicar os conceitos de matriz oposta, adição, subtração, multiplicação de uma matriz por um número real e multiplicação de matrizes;
 - Resolver problemas envolvendo operações com matrizes de forma eficiente e criativa;
 - Utilizar o GeoGebra e planilhas eletrônicas como ferramentas para representar, manipular e visualizar operações com matrizes;
 - Desenvolver habilidades de trabalho em equipe, comunicação e colaboração na resolução de problemas matemáticos;
 - Aprimorar o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas complexos.

Procedimentos metodológicos

A metodologia desta SD se baseia na abordagem construtivista, priorizando a aprendizagem ativa dos alunos. As atividades propostas incentivam a investigação, a exploração, a experimentação e a resolução de problemas reais e contextualizados, utilizando recursos tecnológicos como ferramentas de apoio ao aprendizado.

Etapa 1

Nesta etapa inicial, a professora apresenta uma situação-problema real e contextualizada que envolve operações com matrizes, despertando a curiosidade e o interesse dos alunos pelo tema; pode-se promover uma discussão em grupo sobre a situação-problema, buscando diferentes abordagens e soluções, utilizando questionamentos como: "Que tipo de informação as matrizes podem representar nesse caso?", "Como podemos utilizar as matrizes para resolver o problema?". Logo após, apresenta uma breve introdução à interface do GeoGebra, demonstrando as ferramentas básicas para representações matemáticas.

Etapa 2

Neste momento, apresenta o conceito de matriz oposta de forma clara e concisa, utilizando exemplos para facilitar a compreensão; expõe as propriedades da adição de matrizes, como a propriedade comutativa, associativa, distributiva e elemento neutro, utilizando exemplos práticos e demonstrações matemáticas. Em seguida, define a subtração de matrizes, relacionando-a com a adição de matrizes opostas e propõe a resolução de questões envolvendo adição e subtração de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações. Logo após, pede-se a resolução de questões que combinem adição e subtração de matrizes, incentivando os alunos a explorarem diferentes estratégias e soluções.

Etapa 3

Nesta terceira etapa, a professora apresenta uma nova situação-problema que envolva a multiplicação de uma matriz por um número real, conectando o conceito à realidade e despertando a curiosidade dos alunos. A seguir, define a multiplicação de uma matriz por um número real, utilizando exemplos para facilitar a compreensão; além disso, expõe as propriedades da multiplicação de uma matriz por um número real. Neste momento, pode-se fazer alguns questionamentos aos alunos, tais como: "Imagine que você precisa ajustar a luminosidade de uma imagem digital representada por uma matriz. Como a multiplicação de uma matriz por um número real pode auxiliar nesse processo?", "Uma empresa analisa os custos de produção de diferentes produtos representados por matrizes. Como podemos utilizar a multiplicação de uma matriz por um número real para analisar o aumento ou a diminuição desses custos?".

Dando continuidade, a professora ensina aos alunos como utilizar o GeoGebra para facilitar a visualização e o cálculo da multiplicação de uma matriz por um número real. Isto pode envolver a criação de objetos matemáticos (matrizes) e o uso de comandos

específicos do software.

Etapa 4

Nesta etapa, traz uma situação-problema que envolva a multiplicação de matrizes, conectando o conceito à realidade e despertando a curiosidade dos alunos. Dando continuidade, define o produto entre matrizes de forma clara e concisa, apresenta o algoritmo da multiplicação de matrizes passo a passo, utilizando exemplos práticos e faz a exposição das propriedades da multiplicação de matrizes. Por fim, sugere a resolução de questões envolvendo a multiplicação de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações e incentivando os alunos a explorarem diferentes estratégias e soluções.

Etapa 5

Nesta etapa culminante, será apresentada uma situação-problema complexa que demanda a aplicação integrada dos diversos conceitos explorados sobre operações com matrizes, desafiando os alunos a mobilizarem seus conhecimentos de forma criativa e eficaz. Cada grupo será convidado a apresentar sua solução para a turma, fomentando uma rica discussão sobre as diferentes estratégias utilizadas, os resultados obtidos e os aprendizados decorrentes. Ao final, será promovido um momento de reflexão individual e coletiva sobre o processo de aprendizagem vivenciado ao longo da SD, incentivando os alunos a compartilharem os desafios enfrentados, as habilidades desenvolvidas e os conhecimentos adquiridos, consolidando assim a experiência e o aprendizado.

Avaliação

O processo avaliativo será contínuo e formativo, acompanhando o desenvolvimento dos alunos em cada etapa da SD. Serão utilizados diferentes instrumentos e estratégias para verificar o alcance dos objetivos de aprendizagem, considerando as individualidades e o progresso de cada estudante. Na terceira sequência didática, as atividades propostas visam à integração das competências desenvolvidas nos dois softwares, bem como à consolidação dos conteúdos abordados nas sequências anteriores. A avaliação, portanto, será mais abrangente, contemplando a complexidade das atividades propostas.

• Instrumentos de Avaliação:

1. **Observação Participativa:** o professor observará a participação dos alunos nas atividades em grupo e individuais, avaliando:
 - o Engajamento e colaboração nas discussões e resolução de problemas;
 - o Compreensão e aplicação dos conceitos de matrizes;
 - o Utilização do GeoGebra e planilhas eletrônicas como ferramentas de apoio;
 - o Comunicação clara e concisa das ideias e soluções;
 - o Raciocínio lógico e crítico na abordagem dos problemas.

2. **Avaliação dos trabalhos em grupo:** serão analisados os trabalhos realizados pelos grupos, considerando:
 - o Coerência e correção das soluções apresentadas;
 - o Criatividade e originalidade na resolução dos problemas;
 - o Organização e clareza na apresentação dos resultados;
 - o Utilização adequada do GeoGebra e planilhas eletrônicas.
 3. **Avaliação Individual:** serão aplicadas atividades individuais, como testes, exercícios e resolução de problemas, para verificar:
 - o Domínio dos conceitos e operações com matrizes;
 - o Capacidade de resolver problemas em diferentes contextos;
 - o Habilidade em utilizar o GeoGebra e planilhas eletrônicas;
 - o Raciocínio lógico e crítico na resolução de problemas.
 4. **Autoavaliação e Reflexão:** os alunos serão incentivados a realizar autoavaliações e reflexões sobre seu próprio aprendizado, considerando:
 - o Desafios enfrentados e superados;
 - o Habilidades desenvolvidas;
 - o Conhecimentos adquiridos;
 - o Estratégias de estudo e resolução de problemas.
- **CrITÉrios de Avaliação:**
 - o **Compreensão dos Conceitos:** demonstrar compreensão dos conceitos de matrizes e suas operações, aplicando-os corretamente na resolução de problemas;
 - o **Resolução de Problemas:** apresentar soluções coerentes e eficazes para problemas envolvendo matrizes em diferentes contextos.
 - o **Utilização de Ferramentas:** utilizar o GeoGebra e planilhas eletrônicas de forma adequada para auxiliar na resolução de problemas.
 - o **Trabalho em Equipe:** colaborar efetivamente com os colegas, participando ativamente das discussões e contribuindo para a resolução dos problemas.
 - o **Comunicação:** expressar ideias e soluções de forma clara, concisa e organizada, utilizando linguagem matemática adequada.
 - o **Raciocínio Lógico e Crítico:** demonstrar capacidade de analisar, interpretar e resolver problemas, utilizando o raciocínio lógico e crítico.

Ao longo da SD, o professor fornecerá feedback individual e coletivo aos alunos, destacando os pontos positivos e as áreas que necessitam de aprimoramento. O acompa-

nhamento individualizado permitirá identificar as dificuldades de cada aluno e oferecer suporte adequado para o seu desenvolvimento.

O professor poderá adaptar os instrumentos e critérios de avaliação de acordo com as necessidades e características de cada turma, garantindo que o processo avaliativo seja justo, transparente e contribua para o aprendizado de todos os estudantes.

Sugestões de Melhorias:

- **Incluir atividades de pesquisa:** Incentivar os alunos a pesquisarem sobre aplicações práticas das operações com matrizes em diferentes áreas do conhecimento, como engenharia, física, economia e computação.
- **Promover debates:** Estimular debates em sala de aula sobre os conceitos de matrizes e suas implicações no mundo real.
- **Utilizar diferentes recursos didáticos:** Além do GeoGebra e das planilhas eletrônicas, explorar outros recursos didáticos, como vídeos, simulações e jogos educativos, para tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo.
- **Propor atividades de avaliação:** Criar atividades de avaliação diversificadas para verificar o aprendizado dos alunos e identificar pontos que precisam ser reavaliados.

Sugerimos que o professor personalize a implementação da SD, levando em consideração o nível de conhecimento prévio, as necessidades específicas e os interesses de cada turma. É fundamental realizar uma avaliação contínua da efetividade das atividades, adaptando-as e ajustando-as sempre que necessário, a fim de garantir uma melhor experiência de aprendizado para todos os alunos.

A seguir, será apresentada a terceira e última sequência didática, trazendo ferramentas tecnológicas como o GeoGebra e planilhas eletrônicas. A SD 3 tem como objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos nas sequências anteriores e preparar os alunos para a aplicação das matrizes.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

PARTE I

Hoje, vamos começar a aprender sobre as operações com matrizes: adição e subtração. Essas operações são fundamentais para entender como podemos manipular as estruturas matriciais e para resolver problemas do mundo real.

Adição e subtração de matrizes

Adição de matrizes

O direito igualitário ao voto entre homens e mulheres no Brasil é uma conquista que as mulheres obtiveram com muita luta ao longo de nossa história. Para elas, o direito de votar e de receber votos foi instituído apenas a partir de 1932. Contudo, percebe-se ainda a necessidade de um avanço significativo na participação das mulheres na composição dos políticos eleitos no Brasil.

Observe a quantidade de homens e de mulheres eleitos deputados federais e senadores da república no Brasil nas últimas duas eleições para tais cargos¹.

Tabela 1: Quantidade de candidatos eleitos para a Câmara Federal do Brasil por gênero.

Ano da Eleição	Gênero	
	Feminino	Masculino
2018	77	436
2022	91	422

Fonte: TSE

Tabela 2: Quantidade de candidatos eleitos para o Senado Federal do Brasil por gênero.

Ano da Eleição	Gênero	
	Feminino	Masculino
2018	7	47
2022	4	23

Fonte: TSE

Com base nas tabelas, podemos construir as matrizes $A = \begin{pmatrix} 77 & 436 \\ 91 & 422 \end{pmatrix}$, para a Câmara Federal, e $B = \begin{pmatrix} 7 & 47 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}$, para o Senado Federal. Ao adicionarmos os elementos de mesma posição nas matrizes A e B, obtemos uma matriz que representa o total de candidatos eleitos por sexo no Brasil para a Câmara Federal e para o Senado Federal nos anos de 2018 e 2022.

$$\begin{pmatrix} 77 & 436 \\ 91 & 422 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 47 \\ 4 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77+7 & 436+47 \\ 91+4 & 422+23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 483 \\ 95 & 445 \end{pmatrix}.$$

¹ Exemplo retirado do livro “Diálogo: Matemática e suas tecnologias” (TEIXEIRA, 2020) com adaptações.

Ao adicionarmos os elementos correspondentes das matrizes A e B , estamos adicionando essas matrizes, ou seja, calculando $A + B$.

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$. A soma $A + B$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

GeoGebra

O *GeoGebra* é um software matemático gratuito e de código aberto desenvolvido por Markus Hohenwarter, em sua tese de doutorado no ano de 2001 na Universidade de Salzburgo, Áustria. Ele o criou com o objetivo de obter uma ferramenta adequada ao ensino de Matemática, combinando entes geométricos aos algébricos (daí vem o nome: *GeoGebra* = **Ge**ometria e **Ál**gebra)².

Esse software de Geometria Dinâmica nos permite explorar conceitos matemáticos de forma interativa e visual. Ele combina geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos e estatística em uma única plataforma, tornando-o uma ferramenta fundamental para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Principais Recursos

- **Construções geométricas:** Criar pontos, retas, segmentos, polígonos, círculos e outras formas geométricas com precisão e facilidade.
- **Manipulação dinâmica:** Arrastar e soltar objetos para observar como suas propriedades mudam em tempo real.
- **Cálculos e medidas:** Realizar cálculos matemáticos, visualizar medidas de ângulos e distâncias, e explorar relações geométricas.
- **Gráficos e funções:** Criar e visualizar gráficos de funções, explorar equações e desigualdades, e analisar o comportamento de funções.

Interface³

A **interface** do *GeoGebra* ao ser carregado apresenta a seguinte configuração padrão:

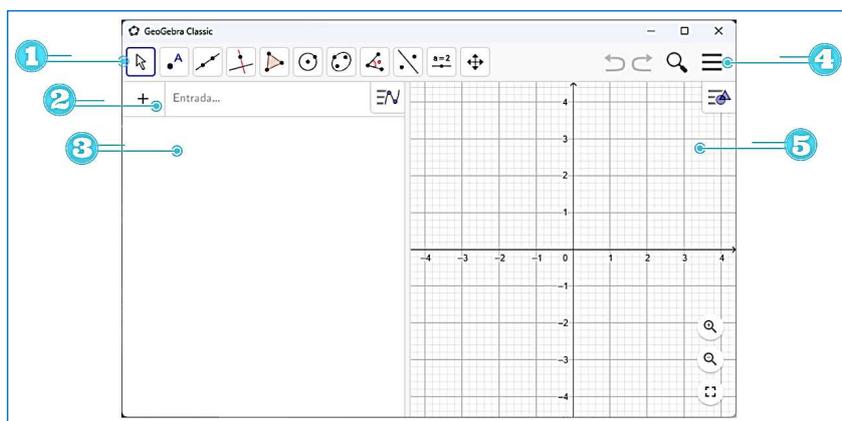
1. **Barra de Ferramentas:** A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.
2. **Entrada:** Campo de entrada para digitação de comandos.
3. **Janela de Álgebra:** Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

² Informações obtidas no endereço eletrônico: <https://docente.ifrn.edu.br/thiagopardo/atividades/tutorial-do-geogebra/view>.

³ Informações obtidas no endereço eletrônico: <https://ogeogebra.com.br/>.

4. **Barra de Menus:** A barra de menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.
5. **Janela de Visualização:** Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.

Figura 1: Interface do GeoGebra

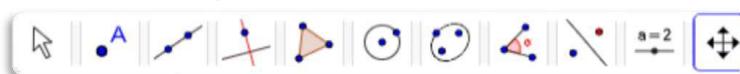


Fonte: A autoria própria.

Barra de ferramentas

A **Barra de Ferramentas** do *GeoGebra*, localizada na parte superior da interface, é a porta de entrada para um mundo de possibilidades matemáticas. Composta por onze conjuntos de ícones intuitivos, ela oferece as ferramentas essenciais para você construir, manipular e explorar objetos geométricos com maestria.

Figura 2: Barra de Ferramentas do GeoGebra.



Fonte: A autoria própria.

Vamos entender um pouco sobre os ícones da barra de ferramentas.

▪ **Mover**

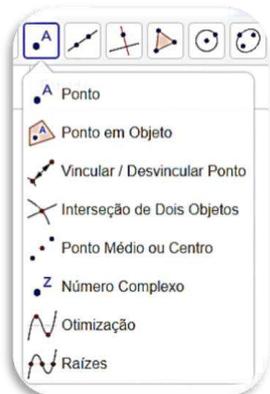
Figura 3: 1º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Ponto**

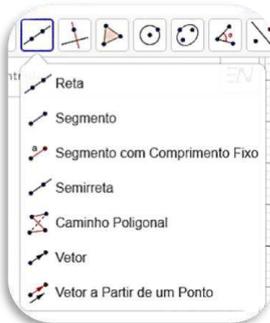
Figura 4: 2º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Linhas retas**

Figura 5: 3º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Posições relativas**

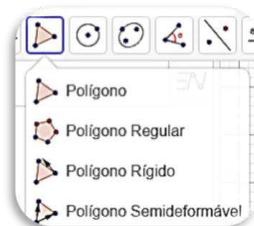
Figura 6: 4º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Polígonos**

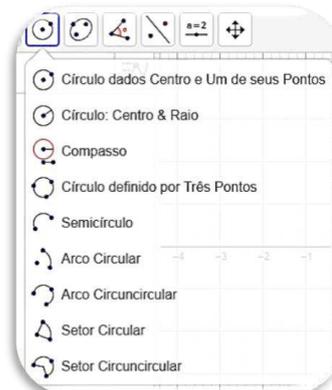
Figura 7: 5º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Formas circulares**

Figura 8: 6º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Cônicas**

Figura 9: 7º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Ângulos e medidas**

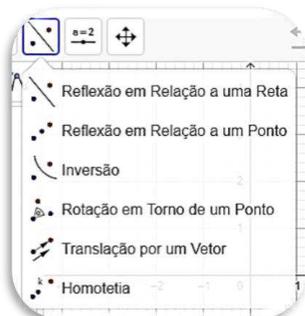
Figura 10: 8º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Transformações**

Figura 11: 9º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Controle**

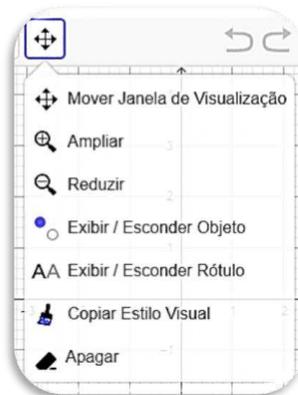
Figura 12: 10º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

▪ **Visualização**

Figura 13: 11º ícone da barra de ferramentas.



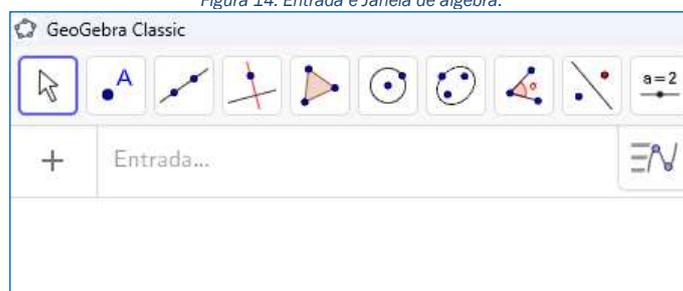
Fonte: Autoria própria.

Agora que já conhecemos um pouco sobre o *GeoGebra*, vamos aprender como ele pode nos auxiliar calculando e verificando os resultados das operações com matrizes. Vejamos um passo a passo de como proceder.

Para inserir uma matriz dois por dois no *GeoGebra*, siga estas etapas:

- i. Abra o software *GeoGebra*.
- ii. Deixe o eixo e a janela de álgebra aparecendo.

Figura 14: Entrada e Janela de álgebra.



Fonte: Autoria própria.

- iii. Vamos fazer o que se pede.
Seja A uma matriz quadrada de ordem 2. Digite na janela de entrada:

$$A = \{\{1,2\},\{3,5\}\}$$

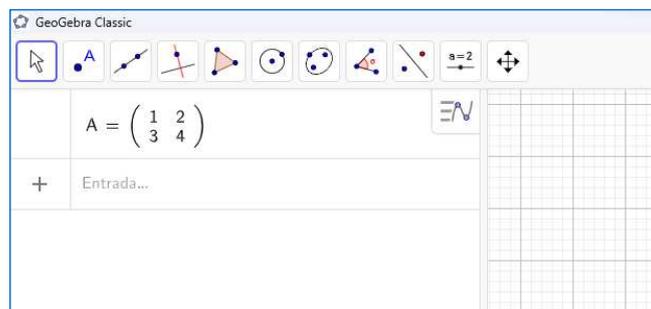
Explicação:

- Cada linha da matriz deve ser colocada entre chaves. Para separar cada uma delas usamos uma vírgula.
- Cada elemento da matriz deve ser separado por uma vírgula.

Resultado:

A matriz será inserida na página em branco, conforme o exemplo abaixo.

Figura 15: Visualização da matriz na janela de álgebra.



Fonte: Autoria própria.

Atenção: a matriz só apareceu na janela de álgebra. Não se preocupe, mais adiante, vamos fazer com que ela apareça também na janela de visualização, no formato de texto.

Questão 1. A empresa de telefonia fixa de Marcos oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J , F e M indicam, respectivamente, as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende quatro bairros nos meses de janeiro, fevereiro e março. Em cada uma delas, as linhas indicam os tipos de plano I e II (de cima para baixo) e as colunas, os bairros A, B, C e D (da esquerda para a direita)⁴.

$$J = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

- a) Insira as matrizes J , M e F no *GeoGebra*.
- b) Calcule, com a ajuda do *Geogebra*, a matriz $T_{2 \times 4}$ que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado.
- c) Em qual bairro foram vendidas mais unidades do plano I? E do plano II?

Matriz oposta

Observe a adição das matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-2) & -3 + 3 \\ -2 + 2 & 0 + 0 & 5 + (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nesse caso, como $A + B$ resulta em uma matriz nula, dizemos que B é a matriz oposta de A , e vice-versa.

Dada uma matriz A , denominamos **matriz oposta** de A , indicada por $-A$, a matriz cuja adição à A resulta em uma matriz nula de mesma ordem, ou seja, $A_{m \times n} + (-A_{m \times n}) = 0_{m \times n}$. Nas matrizes A e $-A$, os elementos correspondentes são opostos.

⁴ Situação-problema retirada do livro "Diálogo: Matemática e suas tecnologias" (TEIXEIRA, 2020) com adaptações.

Propriedades da adição de matrizes

A **adição de matrizes** tem as mesmas propriedades básicas da adição de números reais, uma vez que foi definida por meio da adição de seus elementos correspondentes. Assim, considerando A , B e C matrizes de mesma ordem $m \times n$, temos:

- **propriedade comutativa:** $A + B = B + A$;
- **propriedade associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- **elemento neutro:** $A + 0 = A$;
- **elemento oposto:** $A + (-A) = 0$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, denominamos **diferença entre A e B** , indicada por $A - B$, a matriz C obtida ao calcularmos a adição de A com o oposto de B , ou seja, $A - B = A + (-B) = C$.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, segue que:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + (-3) & 3 + (-3) \\ -5 + (-2) & 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, com $A - B = C$, temos que $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$. Assim, também podemos calcular $A - B$ subtraindo de cada elemento de A o elemento correspondente de B .

Exemplo: Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}$, temos:

$$A - B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 - 3 & 5 - 5 & 8 - 0 \\ 9 - 2 & 4 - (-3) & -1 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

Questão 2: Observe a previsão de temperatura para algumas cidades pernambucanas:

Tabela 3: Previsão de temperatura mínima para janeiro de 2024.

Cidade	Dia				
	11	12	13	14	15
Afogados da Ingazeira	23° C	23° C	23° C	22° C	22° C
São José do Egito	23° C	22° C	22° C	22° C	22° C
Serra Talhada	24° C	23° C	23° C	23° C	23° C
Tabira	23° C	23° C	23° C	22° C	22° C

Fonte: <<http://tempo.cptec.inpe.br>>. Acesso em: 09 de jan. 2024.

Tabela 4: Previsão de temperatura máxima para janeiro de 2024.

Cidade \ Dia	11	12	13	14	15
Afogados da Ingazeira	32° C	32° C	34° C	35° C	34° C
São José do Egito	32° C	32° C	33° C	33° C	33° C
Serra Talhada	32° C	32° C	33° C	34° C	34° C
Tabira	33° C	33° C	34° C	35° C	34° C

Fonte: <<http://tempo.cptec.inpe.br>>. Acesso em: 09 de jan. 2024.

a) Insira no *GeoGebra* as matrizes M e N que apresentam, respectivamente, as temperaturas mínimas e máximas segundo o dia e a cidade.

b) Verifique, utilizando o *GeoGebra*, por qual das matrizes a seguir é dada a variação de temperatura de cada dia:

- $A = M + N$
- $B = N - M$
- $C = M - N$

c) Escreva a matriz encontrada no item b.

d) Para qual cidade estava prevista a maior variação de temperatura em 14 de janeiro de 2024? E a menor?

e) Em qual dia Afogados da Ingazeira apresentou a maior previsão de variação de temperatura?

Questão 3. Junte-se a um colega e estabeleçam quatro matrizes, A , B , C e O , de mesma ordem, e verifiquem **numericamente** a validade das seguintes propriedades.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $A + (-A) = 0$

Você já ouviu falar em transplante de órgãos?

É uma intervenção cirúrgica que envolve a substituição de um órgão (como coração, pulmão, rim, pâncreas, fígado) ou tecido (como medula óssea, ossos, córneas) de um paciente doente (receptor) por um órgão ou tecido saudável de um doador, que pode estar vivo ou morto⁵.

Esses procedimentos são recomendados para condições graves e irreversíveis, quando todas as outras formas de tratamento falharam em restaurar a saúde. Os transplantes mais frequentes envolvem o coração, fígado, pulmão, rim, córnea ou medula óssea. A maneira como o transplante é realizado depende da parte doada, seja um órgão, tecido ou células.

No Brasil, o Sistema Nacional de Transplantes (SNT), cuja função central é desempenhada pelo Ministério da Saúde, é responsável pela regulamentação, controle e supervisão do processo de doação e transplante realizado no país. O Brasil tem o maior programa público de transplante de órgãos, tecidos e células do mundo, garantido a toda a população através do SUS⁶.

⁵ Transplante: quando é indicado, como é feito, recuperação (e outras dúvidas) - Tua Saúde (tuasaude.com).

⁶ Sistema Nacional de Transplantes – Ministério da Saúde (www.gov.br).

Questão 4. Analise a seguir algumas informações sobre doação de órgãos no Brasil.

Tabela 5: Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 – 2022).

Região \ Ano	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	26	0	53	26	229
2022	32	0	55	44	232

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tabela 6: Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 – 2022).

Região \ Ano	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	112	0	351	501	1094
2022	115	4	358	578	1107

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

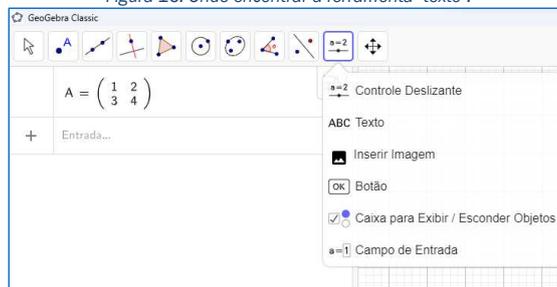
Para calcularmos o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, podemos usar matrizes.

- a) Inicialmente, represente no *GeoGebra* cada tabela por meio de uma matriz.
- b) Calcule o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, usando matrizes.

c) Vamos agora visualizar a representação textual das matrizes construídas na tela de trabalho do software. Para isso, siga os passos abaixo:

- i. Usando a ferramenta "texto", clique na área de trabalho.

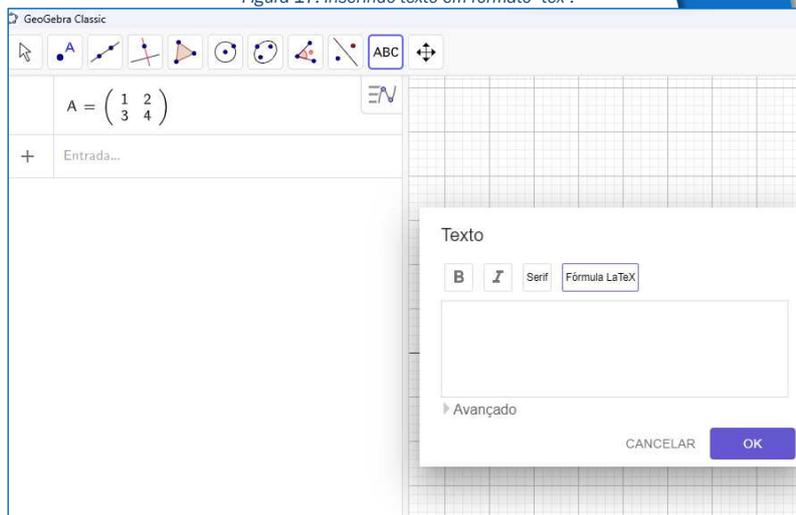
Figura 16: Onde encontrar a ferramenta "texto".



Fonte: Autoria própria.

ii. Na caixa que se abre, escolha a opção "Latex".

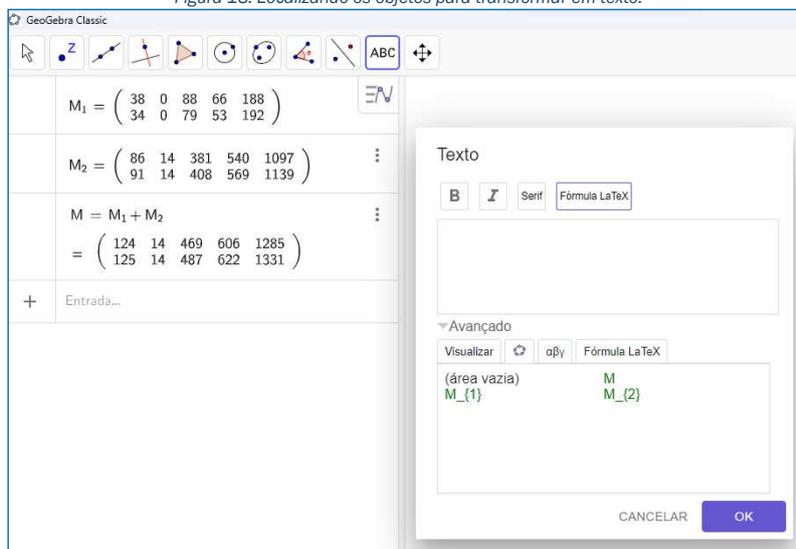
Figura 17: Inserindo texto em formato "tex".



Fonte: Autoria própria.

iii. Escolha a opção "Avançado" e clique na aba que contém a logo do software.

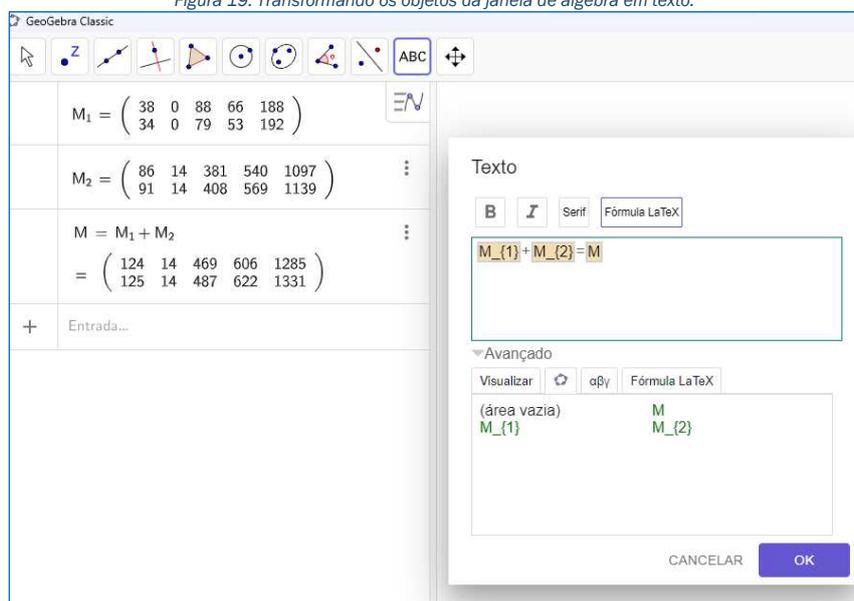
Figura 18: Localizando os objetos para transformar em texto.



Fonte: Autoria própria.

- iv. Em seguida, reproduza os passos descritos abaixo:
 - a) Clique no objeto que representa a matriz do total de transplantes de coração;
 - b) Digite o símbolo de adição (+);
 - c) Clique no objeto que representa a matriz do total de transplantes do fígado;
 - d) Digite o sinal de igual (=);
 - e) Clique no objeto que representa a adição das duas matrizes anteriores.

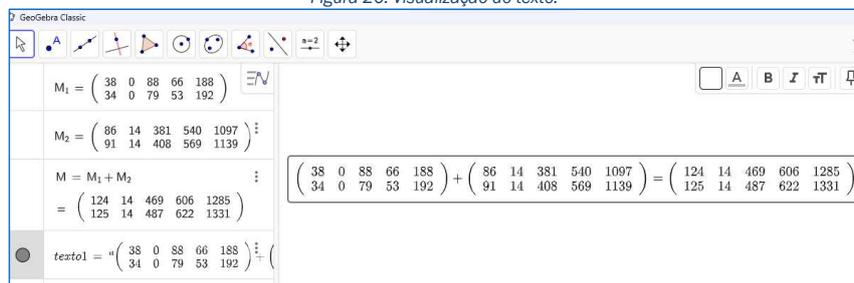
Figura 19: Transformando os objetos da janela de álgebra em texto.



Fonte: Autoria própria.

- v. Agora clique em OK. Esconda os eixos da tela e a malha quadriculada para uma visualização melhor.

Figura 20: Visualização do texto.



Fonte: Autoria própria.

d) Em relação à matriz $A + B$, qual é o elemento da segunda linha e terceira coluna? O que ele indica?

Questão 5. Leia, a seguir, parte de uma reportagem de 28 de novembro de 2023.

Brasil acumula 1,91 milhão de novos postos de trabalho gerados em 2023

No Brasil, já são 1,91 milhão de empregos formais gerados em 2023. A variação em onze meses é positiva nos cinco grandes setores da economia e em todas as 27 unidades da Federação. Segundo dados do Novo Caged, divulgados nesta quinta-feira, 28 de dezembro, o mês de novembro registrou um saldo positivo de 130.097 postos de trabalho com carteira assinada, resultante de 1.86 milhão de admissões e 1,73 milhão de desligamentos. Com isso, o estoque total recuperado para o Caged foi de 44.358.892 postos de trabalho formais.

O maior crescimento do emprego formal, em novembro, ocorreu no setor de Serviços, com um saldo de 92,6 mil postos, com destaque para a área de “Informação, comunicação e atividades financeiras, imobiliárias, profissionais e administrativas”, que teve saldo positivo de 62,4 mil empregos. [...]

BRASIL, Brasil acumula 1,91 milhão de novos postos de trabalho gerados em 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/12/brasil-acumula-1-91-milhao-de-novos-postos-de-trabalho-gerados-em-2023>. Acesso em: 09 de jan. 2024.

Agora, analise as informações abaixo.

Tabela 7: Contratações no setor de serviços de algumas regiões metropolitanas brasileiras, 5º bimestre de 2023.

Região Metropolitana \ Mês	Setembro	Outubro
Belém	4982	4982
Curitiba	25957	27917
Recife	11696	10960
Rio de Janeiro	41433	42924

Fonte: Novo Caged (gov.br).

Tabela 8: Demissões no setor de serviços de algumas regiões metropolitanas brasileiras, 5º bimestre de 2023.

Região Metropolitana \ Mês	Setembro	Outubro
Belém	4770	4312
Curitiba	25971	24807
Recife	9044	9150
Rio de Janeiro	36659	36087

Fonte: Novo Caged (gov.br).

Junte-se a um colega e pesquisem como representar essas duas tabelas por meio de matrizes e calcular a diferença entre elas usando uma planilha eletrônica. Em seguida, elaborem um texto explicando os procedimentos realizados e o que representam os elementos da matriz correspondente à diferença obtida com base no contexto apresentado.

Referências

BRASIL, **Brasil acumula 1,91 milhão de novos postos de trabalho gerados em 2023**. Disponível em: <https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/12/brasil-acumula-1-91-milhao-de-novos-postos-de-trabalho-gerados-em-2023>. Acesso em: 09 de jan. 2024.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

O **Geogebra**. Disponível em: <https://ogeogebra.com.br/site/>. Acesso em: 06 de mar. 2024.

Previsão de Tempo - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos - INPE. Disponível em: <http://tempo.cptec.inpe.br/>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio**. - 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo: matemática e suas tecnologias: Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. - 1. Ed. - São Paulo: Moderna, 2020.

Transplante: quando é indicado, como é feito, recuperação (e outras dúvidas). Disponível em: <https://www.tuasaude.com/transplante/>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tutorial do GeoGebra – Thiago Pardo (ifrn.edu.br). Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/thiagopardo/atividades/tutorial-do-geogebra/view>. Acesso em: 05 de mar. 2024.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

PARTE II

Hoje, vamos continuar aprendendo sobre as operações com matrizes: multiplicação de matrizes por um número real e multiplicação entre matrizes.

Multiplicação de uma matriz por um número real

Uma livraria fez uma doação para as bibliotecas de duas escolas de determinada cidade. Os títulos foram selecionados de acordo com a faixa etária, visando atender a estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF I), dos anos finais do Ensino Fundamental (EF II) e do Ensino Médio (EM)¹.

Observe o número de livros doados para as bibliotecas.

Tabela 1: Livros doados para as Bibliotecas.

Autor \ Segmento	EF I	EF II	EM
AI	60	105	129
AB	112	170	220

Fonte: BONJORNO (2020).

Em parceria com a livraria que fez a doação dos livros para as bibliotecas, uma gráfica doou cadernos para as duas escolas próximas a essas bibliotecas. Para cada exemplar de livro doado, essa gráfica doou dois cadernos.

Nessa doação, os exemplares eram livros de autores internacionais (AI) e livros de autores brasileiros (AB).

Observe uma maneira de calcular o número de cadernos doados por essa gráfica.

Tabela 2: Cadernos doados pela gráfica, de acordo com o total de livros.

Autor \ Segmento	EF I	EF II	EM
AI	$60 \cdot 2 = 120$	$105 \cdot 2 = 210$	$129 \cdot 2 = 258$
AB	$112 \cdot 2 = 224$	$170 \cdot 2 = 340$	$220 \cdot 2 = 440$

Fonte: BONJORNO (2020).

Perceba que esse cálculo equivale a multiplicar por 2 cada elemento da matriz que representa o número de livros doados para as bibliotecas. Assim, temos:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 60 & 105 & 129 \\ 112 & 170 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 60 & 2 \cdot 105 & 2 \cdot 129 \\ 2 \cdot 112 & 2 \cdot 170 & 2 \cdot 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 210 & 258 \\ 224 & 340 & 440 \end{pmatrix}.$$

¹ Situação-problema retirada do livro "Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas" (BONJORNO, 2020) com adaptações.

Adicionando os elementos da última matriz (**lembra como podemos fazer isso através de uma planilha eletrônica?**), temos a quantidade de cadernos doados pela gráfica, ou seja, 1592 cadernos.

De modo geral, definimos:

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k , o produto de k por A , indicado por $k \cdot A$, é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ou seja, para multiplicar um número real por uma matriz, multiplicamos esse número por todos os elementos da matriz, e o resultado será uma matriz de mesma ordem.

Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e α e β números reais, valem as propriedades:

- 1ª propriedade: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 2ª propriedade: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 3ª propriedade: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- 4ª propriedade: $1 \cdot A = A$.

Atividade

Para a atividade proposta a seguir, você vai usar alguns conceitos que já foram abordados anteriormente. É importante lembrar de: lei de formação de uma matriz, matriz identidade e matriz transposta.

Questão 1. Considerando a matriz identidade I_4 e a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, tal que:

$$a_{ij} = 2i - j,$$

determine:

a) $I_4 + A$

b) $3A^t - I_4$

Atenção! Podemos usar o *GeoGebra* para resolver as operações. É importante usar o que aprendemos antes nas aulas sobre adição e subtração de matrizes. O tutorial para a multiplicação de uma matriz por um número real está abaixo.

Para multiplicar um número real por uma matriz no *GeoGebra*, você pode seguir os passos abaixo:

- i. Abra o *GeoGebra* e clique em “Álgebra” no painel à esquerda.
- ii. No campo de entrada, digite a matriz que você deseja multiplicar. Por exemplo, para criar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, você pode digitar $A=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ e pressione Enter.
- iii. Em seguida, digite o número real que você deseja multiplicar pela matriz. Por exemplo, se você quiser multiplicar a matriz por 3, você pode digitar $n=3$ e pressione Enter.
- iv. Agora, para multiplicar o número real pela matriz, digite $B=n \cdot A$ e pressione Enter. A matriz resultante será exibida no painel “Álgebra”.

Questão 2. Crie duas matrizes A e B de mesma ordem e verifique, usando o *Geogebra*, se a igualdade matricial é verdadeira ou falsa.

- a) $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$
- b) $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$
- c) $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$
- d) $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$
- e) $-1 \cdot (-B) = B$

Questão 3. (GOMES, 2024) Cauã Deyvid é um engenheiro civil e está trabalhando em um projeto de construção de um prédio. Cauã obteve uma matriz que representa a quantidade de materiais de construção necessários para cada andar do prédio. No entanto, devido a um aumento no orçamento, Cauã agora tem que aumentar a quantidade de materiais de construção em 50%.

A matriz original de materiais de construção é a seguinte:

$$M = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 180 & 130 \\ 110 & 210 & 140 \end{pmatrix}.$$

Onde cada linha representa um andar do prédio e cada coluna representa um tipo diferente de material de construção (por exemplo, concreto, aço e madeira).

- a) Como ele pode usar a multiplicação de matriz por um número real para calcular a nova quantidade de materiais de construção necessários para cada andar do prédio?

- b) Calcule a nova quantidade de materiais de construção necessários para cada andar do prédio.

Multiplicação de matrizes

Acompanhe a seguinte situação.

Um projeto desenvolvido por uma escola busca identificar a Pegada Hídrica das frutas consumidas com maior frequência na merenda em determinado mês. A seguir, são apresentadas informações da Pegada Hídrica de duas frutas e a quantidade de quilogramas dessas frutas consumidas em uma escola em cada semana de um mês².

A Pegada Hídrica do produto corresponde à quantidade de água consumida ou poluída em todas as etapas do processo de sua produção e pode ser medida em litro por quilograma (L/kg).

Tabela 3: Pegada Hídrica da banana e da laranja.

Fruta	Banana	Laranja
Pegada Hídrica (L/kg)	790	560

Fonte: PRODUCT gallery. Water footprint network.

Tabela 4: Consumo de banana e de laranja na escola, em quilogramas, em cada semana do mês.

Fruta \ Semana	I	II	III	IV
Banana	20	15	10	15
Laranja	10	30	20	15

Fonte: SOUZA (2020) com adaptações.

Qual foi a quantidade de água utilizada ou poluída na produção dessas frutas consumidas em cada semana do mês nessa escola?

Para calcular essa quantidade de água, podemos considerar a Pegada Hídrica de cada fruta e a quantidade de cada fruta consumida por semana:

- **semana I:** $790 \cdot 20 + 560 \cdot 10 = 15800 + 5600 = 21400$, ou seja, 21 400 L;
- **semana II:** $790 \cdot 15 + 560 \cdot 30 = 11850 + 16800 = 28650$, ou seja, 28 650 L;
- **semana III:** $790 \cdot 10 + 560 \cdot 20 = 7900 + 11200 = 19100$, ou seja, 19 100 L;
- **semana IV:** $790 \cdot 15 + 560 \cdot 15 = 11850 + 8400 = 20250$, ou seja, 20 250 L.

Agora, observe como podemos utilizar a multiplicação de matrizes para representar essa resolução. Representamos as tabelas 3 e 4 por meio das matrizes A e B , respectivamente. Os resultados obtidos anteriormente podem ser registrados em uma matriz C , correspondente ao produto da matriz A pela matriz B , nessa ordem.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 790 & 560 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 & 15 \\ 10 & 30 & 20 & 15 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 21400 & 28650 & 19100 & 20250 \end{pmatrix}}_{C=A \cdot B}$$

² Situação-problema retirada do livro "Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio" (SOUZA, 2020).

Para refletir!

O que indicam os elementos da matriz C obtida?

O produto de duas matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $n \times p$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times p$, tal que c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i de A e da coluna j de B e adicionando as parcelas correspondentes aos produtos obtidos.

O produto AB de matrizes existe se, e somente se, a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B . Além disso, a matriz C correspondente ao produto AB tem a mesma quantidade de linhas de A e de colunas de B .

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Questão 4. (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Alpha, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Alpha o nome de um espião codificado na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A , de ordem 5×1 , formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

- a) DIEGO
- b) SHUME
- c) SADAN
- d) RENAN
- e) RAMON

De acordo com as informações do enunciado, devemos calcular o produto $C \cdot A$.

Faça o procedimento manualmente, em seguida, verifique o resultado utilizando o *GeoGebra* e conclua a resolução.

Questão 5. Veja parte da tabela de classificação da série A do campeonato pernambucano de futebol, de 2024, em determinada rodada³.

Tabela 5: Classificação do Campeonato Pernambucano de Futebol de 2024 na 9ª rodada.

Time \ Resultado	Vitórias	Empates	Derrotas
Sport	7	0	2
Retrô	6	2	1
Náutico	6	2	1
Santa Cruz	6	1	2
Central	3	3	3

Fonte: <https://ge.globo.com/pe/futebol/campeonato-pernambucano/>.

Note que a quantidade de vitórias, empates e derrotas de cada time pode ser representada pela matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos três pontos para vitória, um para empate e zero para derrota, formando a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determine a matriz C que fornece o total de pontos de cada time até essa rodada.

³ Situação-problema adaptada do livro “#Contato Matemática” (SOUZA, 2016).

b) Qual foi a pontuação obtida pelo Sport? E pelo Santa Cruz?

Questão 6. (GOMES, 2024) Nikole é uma gerente de uma rede de cinemas. Cada cinema tem um número diferente de salas e cada sala tem um número diferente de assentos. Ela tem uma matriz A que representa o número de salas em cada cinema e uma matriz B que representa o número de assentos em cada sala.

A matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Onde cada linha representa um cinema (por exemplo, cinema de Caruaru; cinema de Recife; cinema de Serra Talhada) e cada coluna representa o tipo de sala (por exemplo, sala normal e sala VIP).

A matriz B é dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 120 & 200 \\ 150 & 250 \end{pmatrix}$$

Onde cada linha representa o tipo de sala e cada coluna representa o número de assentos (por exemplo, assentos normais e assentos reclináveis).

a) Como Nikole pode usar a multiplicação de matrizes para calcular o número total de assentos em cada tipo de sala em cada cinema?

b) Obtenha, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o número total de assentos em cada tipo de sala em cada cinema.

Referências

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**. - 1. Ed. - São Paulo: Editora FTD, 2020.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio**. - 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo: matemática e suas tecnologias: Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. - 1. Ed. - São Paulo: Moderna, 2020.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem como objetivo central examinar criticamente alguns problemas abordados nas sequências didáticas implementadas na eletiva, com foco no uso de recursos tecnológicos no ensino de matrizes. A partir dessa análise, busca-se identificar os pontos fortes e fracos das estratégias adotadas, bem como suas implicações para o aprendizado dos alunos. Além disso, serão apresentados e discutidos os resultados do questionário aplicado, visando complementar a análise das sequências didáticas e aprofundar a compreensão sobre a percepção dos estudantes em relação ao uso de tecnologias no estudo de matrizes.

A análise das sequências didáticas será realizada sob a luz da literatura sobre o ensino de matemática e o uso de tecnologias na educação, buscando compreender como as escolhas metodológicas e os recursos tecnológicos utilizados impactaram a aprendizagem dos alunos. As respostas dos alunos aos questionários serão analisadas para identificar as principais dificuldades e facilidades encontradas durante o processo de aprendizagem, bem como para avaliar a efetividade das sequências didáticas e dos recursos tecnológicos utilizados.

Os resultados do questionário serão analisados tanto quantitativamente, por meio de estatísticas descritivas, quanto qualitativamente, através da análise de conteúdo das respostas abertas. Espera-se que a análise conjunta das sequências didáticas e dos resultados do questionário forneça um panorama abrangente sobre a experiência de ensino e aprendizagem de matrizes mediada por tecnologias na eletiva, contribuindo para a reflexão sobre o papel das tecnologias no ensino de matemática e para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficazes.

A discussão proposta neste capítulo visa contribuir para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino de matrizes, oferecendo subsídios para a elaboração de sequências didáticas mais eficazes e o uso mais eficiente dos recursos tecnológicos disponíveis. Espera-se que os resultados apresentados possam fomentar a reflexão sobre o papel da tecnologia no ensino de matemática e inspirar novas pesquisas e práticas inovadoras nesse campo.

6.1 Metodologia

Nesta seção, detalhamos os procedimentos metodológicos que nortearam nossa pesquisa, detalhando os procedimentos adotados para a coleta e análise dos dados, bem como as considerações éticas envolvidas no processo. A pesquisa se caracteriza como

qualitativa e participante, desenvolvida em ambiente de sala de aula, com o objetivo de investigar o impacto da integração de recursos tecnológicos no ensino de matrizes, à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Organizador Curricular de Pernambuco.

A pesquisa foi estruturada em três etapas principais:

1. **Levantamento Bibliográfico:** realizou-se uma revisão da literatura sobre o tema, abrangendo livros, artigos científicos, dissertações e teses, a fim de fundamentar teoricamente a investigação;
2. **Elaboração das Sequências Didáticas e do Plano para a disciplina Eletiva:** foram elaboradas sequências didáticas que visavam integrar o uso de recursos tecnológicos no ensino de matrizes, buscando contemplar e complementar as habilidades da BNCC e do Organizador Curricular de Pernambuco. Além disso, foi elaborado um plano para a disciplina eletiva, por meio da qual a metodologia de ensino seria implementada;
3. **Aplicação, análise e discussão dos resultados:** as sequências didáticas elaboradas foram aplicadas em uma turma de eletiva do 2º ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio Normal Estadual Professora Ione de Góes Barros, localizada no município de Afogados da Ingazeira – PE. Os resultados obtidos foram analisados e discutidos, com ênfase nos aspectos qualitativos relacionados ao desenvolvimento das sequências e à interação dos alunos com os recursos tecnológicos.

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, embora que, em alguns momentos, vamos quantificar algumas informações coletadas do questionário e esses dados obtidos serão traduzidos numericamente em percentuais. Assim, podemos fazer algumas análises simples dos dados o que nos permitirá interpretar e compreender de forma mais objetiva as respostas do grupo. Nesse sentido, a coleta e análise dos dados foram realizadas com o intuito de aprofundar a compreensão sobre o impacto da integração de recursos tecnológicos no ensino de matrizes, considerando as particularidades do contexto escolar e as percepções dos alunos.

A turma foi dividida em grupos de, no máximo, cinco estudantes, identificados por cores. A impressão do material didático foi estrategicamente planejada para realçar as cores de cada grupo, facilitando a identificação visual e agilizando a organização no início de cada encontro. A divisão dos grupos foi mantida durante toda a aplicação das sequências didáticas, a fim de facilitar o acompanhamento do desempenho individual e coletivo dos alunos.

Alguns exemplos do material disponibilizado em cores diferentes:

Figura 5 – Azul



Fonte: Autoria própria

Figura 6 – Violeta



Fonte: Autoria própria

Figura 7 – Vermelho



Fonte: Autoria própria

Os dados foram coletados por meio da observação participante, da análise documental e de questionários. A observação participante permitiu acompanhar de perto o desenvolvimento das sequências didáticas, registrando as interações dos alunos com os recursos tecnológicos e entre si. A análise documental contemplou a análise dos materiais produzidos pelos alunos durante as atividades, como apresentações e resoluções de problemas.

Ao término da intervenção, foi aplicado um questionário com o propósito de coletar dados qualitativos sobre as percepções dos alunos acerca da experiência vivenciada. De um total de 35 alunos matriculados, 17 contribuíram com a pesquisa respondendo ao instrumento.

Os dados coletados foram analisados por meio da técnica de análise de conteúdo, que consiste na identificação, categorização e interpretação dos temas e padrões emergentes nos dados. A análise de conteúdo foi realizada de forma sistemática e rigorosa, buscando garantir a validade e a confiabilidade dos resultados.

Os participantes foram informados sobre os objetivos e procedimentos da pesquisa, bem como sobre seus direitos de participação e sigilo. A identidade dos participantes foi preservada, sendo utilizados nomes fictícios ou códigos para garantir o anonimato.

O nosso trabalho apresenta algumas limitações, como o número reduzido de participantes e a especificidade do contexto escolar em que foi realizada. Os resultados obtidos não podem ser generalizados para outras realidades, mas podem contribuir para a compreensão do fenômeno investigado e para o desenvolvimento de novas pesquisas na área.

Dessa forma, a metodologia empregada na pesquisa buscou garantir o rigor científico e a relevância dos resultados obtidos. A abordagem qualitativa permitiu aprofundar a compreensão sobre o impacto da integração de recursos tecnológicos no ensino de matrizes, considerando as particularidades do contexto escolar e as percepções dos alunos. As considerações éticas foram observadas em todas as etapas da pesquisa, garantindo a proteção dos participantes e a integridade dos dados coletados.

6.2 Apresentação e aplicação da Situação-problema 2 da primeira SD

A educação matemática contemporânea enfrenta o desafio de tornar conceitos abstratos acessíveis e relevantes para os estudantes. Diante disso, a integração de recursos tecnológicos tem se mostrado uma abordagem eficaz, proporcionando novas formas de engajamento e entendimento. A situação-problema que analisaremos a seguir explora o uso de planilhas eletrônicas no ensino de matrizes, demonstrando como essa ferramenta pode ser utilizada para desenvolver competências e habilidades matemáticas de maneira prática e interativa.

6.2.1 Situação-problema 2: Vendas de livros no primeiro trimestre do ano

O problema apresentado aborda o uso de matrizes para organizar e analisar dados de vendas de livros de uma editora durante o primeiro trimestre do ano. A tabela mostra a quantidade de livros vendidos em três gêneros (aventura, romance e ficção) ao longo de três meses (janeiro, fevereiro e março). Vejamos:

Situação-problema 2: *Em uma editora, a venda de livros de aventura, romance e ficção no primeiro trimestre de um ano foi organizada em uma tabela. Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, pode ser associada a uma matriz 3×3 (**lemos: matriz três por três**)¹.*

Tabela 2 – Vendas de livros de uma editora

Gênero/Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Aventura	20000	31000	40000
Romance	15000	19000	25000
Ficção	16000	20000	28000

Fonte: (DANTE, 2020, com adaptações.)

A tabela é representada como uma matriz 3×3 , onde cada elemento da matriz corresponde à quantidade de livros de um determinado gênero vendidos em um determinado mês. Por exemplo, o elemento na primeira linha e segunda coluna representa a quantidade de livros de aventura vendidos em fevereiro:

$$\text{Matriz associada à tabela 2: } \begin{pmatrix} 20000 & 31000 & 40000 \\ 15000 & 19000 & 25000 \\ 16000 & 20000 & 28000 \end{pmatrix}.$$

¹ Situação-problema retirada do livro “Matemática em contexto” (DANTE, 2020) com adaptações.

Agora, percebamos que se desejarmos descobrir:

- o número de livros de aventura vendidos em fevereiro, simplesmente consultamos o número na primeira linha e na segunda coluna da matriz;
- o número de livros de romance vendidos em janeiro, simplesmente consultamos o número na segunda linha e na primeira coluna da matriz;
- o número de livros de ficção vendidos em março, simplesmente consultamos o número na terceira linha e na terceira coluna da matriz.

O texto explica como usar planilhas eletrônicas para realizar cálculos com os dados da tabela, como somar a quantidade de livros vendidos em um determinado mês ou de um determinado gênero. Logo após, apresentamos algumas questões para praticar o uso de planilhas eletrônicas na análise dos dados:

Usando as planilhas eletrônicas, você pode somar facilmente o conteúdo de várias células usando a função **SOMA**. Vejamos como proceder:

1. Insira os números que você deseja somar em células individuais na planilha;
2. Clique na célula onde você deseja que o resultado da soma apareça;
3. Digite **=SOMA(**;
4. Selecione as células que contêm os números que você deseja somar. Por exemplo, se seus números estão nas células **A1** até **A4**, você digitaria **A1:A4**;
5. Feche o parêntese e pressione **Enter**.

Deste modo, a planilha somará os números nas células que você selecionou e exibirá o resultado na célula que você escolheu para a soma.

Vamos praticar!

Questão 6. Insira, na planilha eletrônica, os dados apresentados na tabela que representa a venda de livros.

Questão 7. Obtenha, usando a função **=SOMA**, a quantidade de livros vendidos em janeiro.

Questão 8. Agora, obtenha a quantidade de livros vendidos de cada gênero no primeiro trimestre.

Questão 9. Quantos livros a editora vendeu no primeiro trimestre? Explique como você obteve essa resposta.

As Questões 6 a 9, nesta sequência didática, estavam relacionadas à situação-problema da venda de livros. A Questão 6 solicita a inserção dos dados da tabela

de vendas em uma planilha eletrônica, estabelecendo a base para as análises subsequentes. A próxima questão propõe o uso da função SOMA para calcular a quantidade total de livros vendidos em janeiro, ou seja, o aluno deve perceber que para obter o resultado ele precisa somar os valores da primeira coluna da matriz (tabela).

A Questão 8 busca a quantidade de livros vendidos de cada gênero ao longo do trimestre, significando que, para a essa solução, os estudantes devem somar os valores de cada linha da matriz. Por fim, questiona a quantidade total de livros vendidos pela editora no primeiro trimestre; incentivando, implicitamente, o uso da função SOMA para calcular o resultado a partir dos dados da planilha e solicita uma justificativa do procedimento de obtenção do resultado.

Em resumo, a situação-problema explora a relação entre tabelas e matrizes, mostrando como a organização de dados em uma estrutura matricial facilita a consulta e a análise de informações, especialmente quando combinada com o uso de planilhas eletrônicas. Além do mais, está alinhada com as competências propostas pela BNCC para o Ensino Médio, especialmente no que se refere ao uso de matemática e tecnologia na resolução de problemas. Aqui podemos mencionar as Competências Gerais 2, 4 e 5 e as Competências Específicas de Matemática e suas tecnologias 1, 3 e 4.

Análise das respostas do grupo Azul

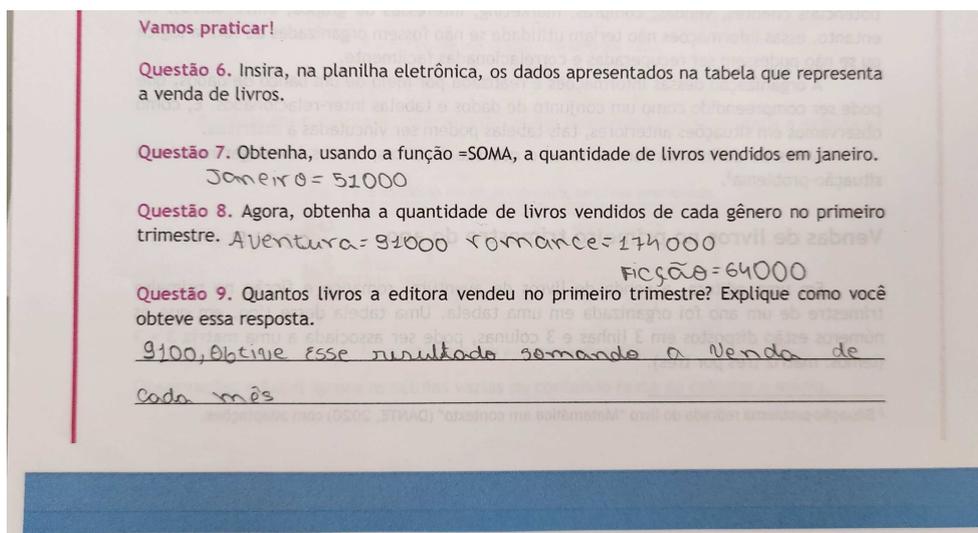
Analisando as respostas desse grupo, podemos observar alguns aspectos interessantes em relação à sua compreensão e abordagem da sequência didática. Observou-se que este grupo demonstrou maior facilidade na manipulação dos dados em planilha eletrônica e na aplicação da função SOMA, indicando um domínio mais sólido dos conceitos matemáticos envolvidos. No entanto, algumas dificuldades foram identificadas na interpretação do contexto do problema, especialmente na questão 9, que exigia uma análise mais aprofundada dos resultados obtidos. A seguir, detalharemos os principais pontos observados em cada questão, buscando identificar os pontos fortes e as áreas que necessitam de maior atenção por parte do grupo.

Na primeira questão relacionada à situação-problema, o grupo insere corretamente os dados na planilha eletrônica. Posteriormente, responde corretamente ao próximo item, o que indica que os alunos desse grupo utilizaram a função =SOMA adequadamente para calcular a quantidade de livros vendidos em janeiro, somando 20.000 (Aventura), 15.000 (Romance) e 16.000 (Ficção), totalizando 51.000.

Já na terceira questão observamos que a resposta está parcialmente correta. A soma das vendas de livros de aventura está correta, com 20.000 em janeiro, 31.000 em fevereiro e 40.000 em março, resultando em um total de 91.000. No entanto, a soma das vendas de livros de romance está incorreta. A soma correta deveria ser

$$15.000 \text{ (janeiro)} + 19.000 \text{ (fevereiro)} + 25.000 \text{ (março)} = 59.000.$$

Figura 8 – Material didático de apoio do grupo Azul



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

A soma das vendas de livros de ficção está correta, com 16.000 em janeiro, 20.000 em fevereiro e 28.000 em março, totalizando 64.000.

Na última questão, o grupo responde: “9100, obtive esse resultado somando a venda de cada mês”. O que indica que a resposta está incorreta. Uma vez que, a soma correta das vendas totais no primeiro trimestre deve ser:

$$51.000 \text{ (janeiro)} + 70.000 \text{ (fevereiro)} + 93.000 \text{ (março)} = 214.000.$$

O valor fornecido (9.100) não corresponde ao cálculo correto. O erro pode ter surgido de uma má interpretação ou um cálculo errado, evidenciando a necessidade de uma revisão mais cuidadosa dos procedimentos de soma.

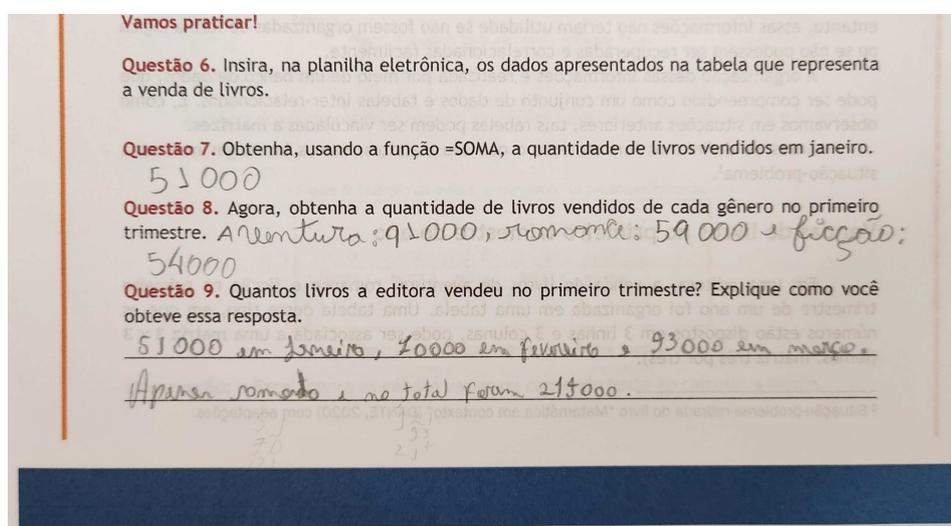
Esse grupo demonstrou uma compreensão parcial dos conceitos e habilidades exigidas para resolver a situação-problema proposta. O desempenho do grupo mostra que, apesar de ter uma compreensão básica sobre a inserção de dados e o uso da função SOMA em planilhas eletrônicas, há falhas significativas na verificação e interpretação dos resultados. Os alunos foram alertados quanto a verificação dos cálculos, especialmente quando se trata de somas mais complexas (Questões 8 e 9); como também na melhoria da interpretação dos dados e resultados obtidos, assegurando que a soma final reflète corretamente os valores apresentados.

Análise das respostas do grupo Azul Marinho

A análise das respostas do grupo marinho revela um perfil distinto em relação ao grupo azul, com particularidades que merecem atenção. Este grupo demonstrou uma abordagem mais cautelosa e reflexiva na resolução das questões, buscando explorar

diferentes caminhos e estratégias. Observou-se que este grupo apresentou um pouco de dificuldade na manipulação dos dados em planilha eletrônica e na aplicação da função SOMA, evidenciando a necessidade de um reforço nos conceitos matemáticos básicos. No entanto, surpreenderam positivamente na interpretação do contexto do problema, especialmente na Questão 9, demonstrando um senso crítico apurado e a capacidade de relacionar os resultados obtidos com a situação-problema apresentada. A seguir, detalharemos os principais pontos observados em cada questão, buscando identificar as potencialidades do grupo e os aspectos que demandam maior atenção para o desenvolvimento de suas habilidades.

Figura 9 – Material didático de apoio do grupo Azul Marinho



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

O grupo desenvolve bem as Questões 6 e 7, haja vista que faz a inserção correta dos dados na planilha e traz o resultado correto da quantidade de livros vendidos em janeiro. Utilizou a função =SOMA corretamente para calcular a quantidade de livros vendidos em janeiro, somando 20.000 (Aventura), 15.000 (Romance) e 16.000 (Ficção), resultando em 51.000, apesar de um pouco de resistência.

Na Questão 8, o grupo responde: “Aventura = 91000, Romance = 59000, Ficção = 54000”. O que mostra que a resposta está parcialmente correta. A soma das vendas de livros de aventura está correta, totalizando 91.000. A soma das vendas de livros de romance também está correta, resultando em 59.000. No entanto, a soma das vendas de livros de ficção está incorreta. A soma correta deveria ser:

$$16.000 \text{ (janeiro)} + 20.000 \text{ (fevereiro)} + 28.000 \text{ (março)} = 64.000.$$

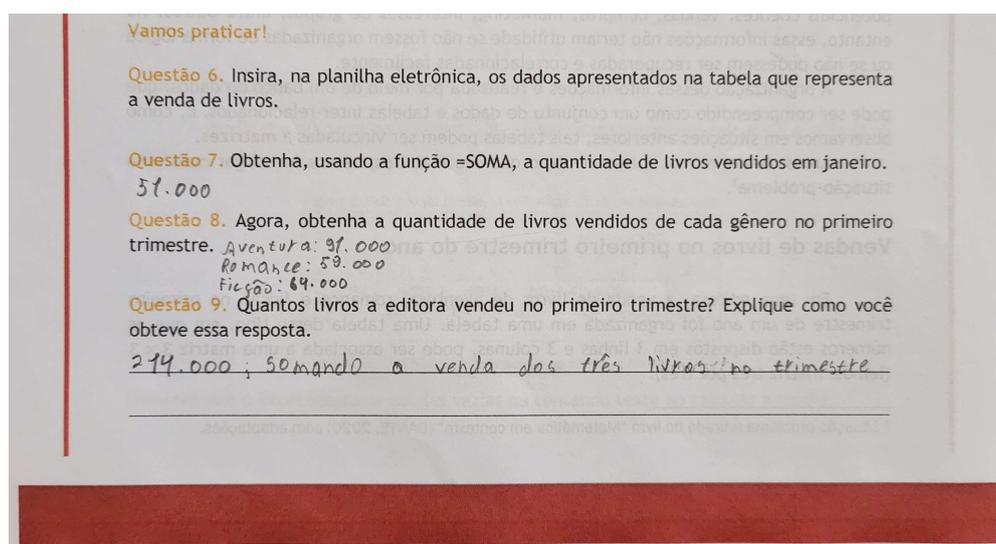
A equipe calculou corretamente o total de livros vendidos no primeiro trimestre, somando as vendas de cada mês ($51.000 + 70.000 + 93.000 = 214.000$). A explicação

do grupo nessa última questão é clara e demonstra uma boa interpretação. O desempenho dos componentes, de modo geral, mostra uma compreensão sólida das operações básicas necessárias para resolver a situação problema. Apesar da resistência de usar a função SOMA para obter os resultados, o grupo demonstra conhecimento sobre o seu uso, embora tenha cometido um pequeno erro em um dos cálculos da Questão 8, possivelmente por falta de atenção. Quando questionados sobre o procedimento realizado para obter a resposta, os estudantes relataram ter feito as operações matemáticas mentalmente, o que explicaria o leve erro.

Análise das respostas do grupo Vermelho

Analisando as respostas do grupo vermelho, identificamos que houve um bom entendimento do processo de inserção de dados em planilhas e do uso da função SOMA para obter resultados específicos, como a quantidade total de livros vendidos em um período. O grupo demonstrou capacidade de realizar cálculos e apresentar os resultados de forma clara. No entanto, a explicação na Questão 9, embora correta, poderia ser mais detalhada, indicando a soma dos valores de cada gênero no primeiro trimestre para chegar ao total de livros vendidos. A seguir, detalharemos os principais pontos observados em cada questão, buscando identificar as potencialidades do grupo e os aspectos que podem ser aprimorados para um entendimento mais completo da análise de dados.

Figura 10 – Material didático de apoio do grupo Vermelho



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Na Questão 6 o grupo vermelho demonstrou proficiência na inserção dos dados da tabela em uma planilha eletrônica, organizando-os de forma clara e precisa. Essa etapa

é fundamental para a análise subsequente dos dados, evidenciando o entendimento dos componentes sobre a importância da organização e estruturação das informações.

No item posterior, os alunos compreenderam corretamente o objetivo da questão, que era calcular o total de livros vendidos em janeiro. Utilizaram a função SOMA de forma adequada, selecionando a coluna correspondente aos valores de vendas de janeiro e obtendo o resultado correto. Essa resposta demonstrou familiaridade com as funções básicas de planilhas eletrônicas e a capacidade de aplicar conhecimentos matemáticos em situações práticas.

O grupo novamente demonstrou domínio da função SOMA, aplicando-a para calcular o total de livros de cada gênero vendidos no primeiro trimestre: Aventura = 91000, Romance = 59000 e Ficção = 64000. A seleção correta das células por linha e a obtenção do resultado correto indicam um bom entendimento da aplicação da função em diferentes contextos e com diferentes intervalos de dados.

Na última questão, embora o grupo tenha acertado a resposta (214000), a explicação exigia um pouco mais de detalhes. A resposta indica que o grupo compreendeu que a soma dos valores de cada gênero resulta no total de livros vendidos no trimestre, mas não explicitou como essa soma foi realizada. Uma explicação mais detalhada poderia incluir a soma dos valores do determinado intervalo de dados.

Concluimos que o grupo vermelho demonstrou um bom entendimento dos conceitos básicos de manipulação de dados em planilhas eletrônicas e da função SOMA. No entanto, havia espaço para aprimorar a capacidade de explicar os resultados obtidos de forma mais detalhada e completa, o que evidenciaria o raciocínio por trás dos cálculos realizados. No geral, o grupo demonstrou um bom entendimento e boa interpretação da situação-problema, além de um potencial para aprofundar seus conhecimentos em futuras atividades.

6.3 Apresentação e aplicação da Situação-problema 3 da segunda SD

Os Jogos Olímpicos, ápice do esporte mundial, congregam atletas de diversas nacionalidades em busca da glória olímpica. Esta situação-problema visa mostrar o desempenho do Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas (2008-2020) em termos de medalhas conquistadas, utilizando a representação matricial para organizar e interpretar os dados. A abordagem inclui a construção de matrizes, a aplicação da transposição e a utilização de ferramentas tecnológicas para manipulação de dados, destacando a importância da matemática na análise de eventos esportivos.

6.3.1 Situação-problema 3: Medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas de 2008 a 2020

A situação-problema apresentada está na Questão 10 da Sequência Didática 2 e explora o conceito de matrizes e sua transposta, utilizando os dados de medalhas olímpicas do Brasil como contexto. A questão está dividida em vários itens, que envolvem a criação e manipulação de matrizes. A tabela traz a distribuição de medalhas (ouro, prata e bronze) nas últimas quatro edições dos Jogos Olímpicos:

Situação-problema 3: *A Olimpíada é um dos maiores eventos esportivos da atualidade. Dela, participam atletas de diversas nacionalidades, os quais se reúnem a cada quatro anos em uma cidade escolhida como sede para a disputa dos jogos. Veja na tabela abaixo a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas*².

Tabela 3 – Medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas – 2008 a 2020

Olimpíada	Quantidade de medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
Tóquio (2020)	7	6	8
Rio (2016)	7	6	6
Londres (2012)	3	5	9
Pequim (2008)	3	4	10

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro.

- Escreva uma matriz A que represente as informações da tabela.
- Escreva a matriz A^t .
- As linhas da matriz A apresentam as mesmas informações das linhas da matriz A^t ? Por quê?
- Na matriz A^t , o que representam as:
 - colunas?
 - linhas?
- Construa abaixo uma tabela com base em A^t .
- Agora, vamos obter a matriz transposta usando uma planilha eletrônica. Para isso, siga as instruções: digite a tabela dada na planilha; selecione a quantidade de linhas e colunas da matriz A^t ; na barra de fórmulas insira o comando “=TRANSPOSOR(intervalo das células da matriz original)”; pressionar “CTRL+SHIFT+ENTER”.

Essa questão requer que os alunos desenvolvam as habilidades de representação de dados em formato de matriz, transposição de matriz, interpretação de dados repre-

² Situação-problema retirada do livro “Matemática interligada” ANDRADE (2020) com adaptações.

sentados em tabelas e matrizes e uso de planilhas eletrônicas para manipulação de dados.

Fazendo a análise item a item, podemos observar o seguinte: no item (a), o aluno é instigado a traduzir dados tabulares para a linguagem matricial, exercitando a conversão de informações textuais em estruturas matemáticas e consolidando a compreensão da matriz como ferramenta essencial na organização de dados. O item (b) introduz o conceito de transposição de matrizes, desafiando o aluno a relacionar a matriz original com sua transposta e a manipular dados em diferentes formatos. No item (c), a reflexão sobre as diferenças estruturais e interpretativas entre matriz e transposta aprofunda a compreensão da mudança de perspectiva proporcionada pela transposição, evidenciando a importância da análise crítica dos dados.

O item (d) reforça o entendimento da transposição e sua influência na representação dos dados, avaliando a capacidade do aluno de interpretar a nova configuração resultante. No item (e), o aluno aprimora a habilidade de leitura e interpretação de matrizes transpostas, traduzindo-as de volta para o formato tabular, facilitando a visualização e análise dos dados e confirmando a compreensão da estrutura e significado da matriz transposta. Por fim, o item (f) integra conhecimentos matemáticos com ferramentas tecnológicas, demonstrando a aplicação prática de planilhas eletrônicas na manipulação de matrizes e ensinando métodos eficientes para a realização de operações, preparando o aluno para o uso da tecnologia na análise de dados em contextos reais.

Em síntese, a questão apresentada explora o conceito de matrizes e sua transposta no contexto do desempenho olímpico do Brasil, aprofundando a compreensão da organização e interpretação de dados. Ao manipular matrizes, o aluno desenvolve habilidades de análise e visualização de informações, consolidando o aprendizado de conceitos matemáticos abstratos em um cenário prático. A integração de ferramentas tecnológicas, como planilhas eletrônicas, amplia ainda mais o potencial de aplicação desses conhecimentos.

Essa abordagem está alinhada com as competências propostas pela BNCC para o Ensino Médio, especialmente no que diz respeito ao uso de Matemática e Tecnologia na Resolução de Problemas. Podemos destacar as Competências Gerais 2, 4 e 5, além das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 3 e 4. Assim como na situação-problema analisada na primeira SD, essa questão promove a aplicação prática de conhecimentos matemáticos e tecnológicos, preparando os alunos para enfrentar desafios reais com habilidades analíticas e tecnológicas aprimoradas.

Análise das respostas do grupo Vermelho

Ao examinarmos as resoluções do grupo, notamos que os componentes demonstraram um bom entendimento dos conceitos de matrizes e suas transpostas, aplicando-os

corretamente à análise de dados sobre medalhas olímpicas. A interpretação dos resultados foi precisa e bem fundamentada, evidenciando a capacidade de extrair informações relevantes a partir da organização dos dados em formato matricial. A seguir, apresentamos uma análise detalhada de cada item, destacando os acertos do grupo e os pontos que merecem atenção para aprimorar o aprendizado.

Figura 11 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 2

Questão 10. A Olimpíada é um dos maiores eventos esportivos da atualidade. Dela, participam atletas de diversas nacionalidades, os quais se reúnem a cada quatro anos em uma cidade escolhida como sede para a disputa dos jogos³. Veja na tabela abaixo a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas.

Olimpíada	Quantidade de medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
Tóquio (2020)	7	6	8
Rio (2016)	7	6	6
Londres (2012)	3	5	9
Pequim (2008)	3	4	10

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro. O Brasil nos jogos. Disponível em: <<https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas>>. Acesso em: 04 mar. 2024.

a) Escreva uma matriz A que represente as informações da tabela.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Escreva a matriz A^t .

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

³ Situação-problema retirada do livro "Matemática interligada" ANDRADE (2020) com adaptações.

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

No item (a), a matriz A foi corretamente elaborada, representando a quantidade de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas pelo Brasil em cada Olimpíada. No item seguinte, a matriz transposta A^t também foi escrita corretamente, invertendo as linhas e colunas da matriz A .

Figura 12 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 2

c) As linhas da matriz A apresentam as mesmas informações das linhas da matriz A^t ? Por quê?
 Não, pois as linhas de A^t são as informações da coluna A .

d) Na matriz A^t , o que representam as:

- colunas?
 as capitais onde as olimpíadas foram feitas
- linhas?
 o nível das medalhas

e) Construa abaixo uma tabela com base em A^t .

7	7	3	3
6	6	5	4
8	6	9	10

f) Agora, vamos obter a matriz transposta usando uma planilha eletrônica. Para isso, siga as instruções: digite a tabela dada na planilha; selecione a quantidade de linhas e colunas da matriz A^t ; na barra de fórmulas insira o comando "=TRANSPOSI(intervalo das células da matriz original)"; pressionar "CTRL+SHIFT+ENTER".

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

A resposta do item (c) está correta e bem justificada. As linhas da matriz original (A) representam a quantidade de medalhas conquistadas em cada Olimpíada, enquanto as linhas da matriz A^t representam a quantidade de cada tipo de medalha (ouro, prata e bronze). Essa inversão ocorre porque as informações que eram representadas nas colunas da matriz original passam a ser representadas nas linhas da matriz transposta.

No item (d), a resposta está correta. As colunas da matriz A^t representam as cidades onde as Olimpíadas foram realizadas, e as linhas representam os tipos de medalha (ouro, prata e bronze). A palavra “nível” utilizada na resposta dos estudantes pode ser substituída por “tipo” para maior clareza.

Analisando o item (e), observamos que a tabela foi construída corretamente com base na matriz transposta A^t , apresentando os dados de forma precisa. No entanto, para facilitar a leitura e organização, seria benéfico que os alunos tivessem adicionado informações sobre o que cada linha e coluna representam.

Finalmente, no item (f), houve alguma dificuldade em seguir as instruções para obter a matriz transposta em uma planilha eletrônica. Os alunos solicitaram bastante auxílio da professora, mas no final conseguiram realizar o procedimento com sucesso.

Dessa forma, concluímos que a equipe demonstrou um bom entendimento do conceito de matrizes e suas transpostas, aplicando-os corretamente à análise de dados da questão. A resolução dos itens (a), (b), (c) e (d) foi precisa e bem fundamentada, evidenciando a compreensão da relação entre as linhas e colunas das matrizes originais e transpostas. Alertamos para a construção da tabela no item (e) que foi correta, embora a inclusão de rótulos para linhas e colunas teria aprimorado a clareza da apresentação

dos dados. No item (f), a dificuldade em utilizar a planilha eletrônica para obter a matriz transposta indica a necessidade de maior familiaridade com essa ferramenta, mas o sucesso final demonstra a capacidade de superar desafios e aprender com o processo.

De modo geral, o desempenho do grupo foi satisfatório, com alguns pontos a serem aprimorados para um domínio completo do tema. O aprofundamento do conhecimento sobre planilhas eletrônicas e a atenção aos detalhes na apresentação de dados podem fortalecer ainda mais as habilidades do grupo em atividades futuras.

Análise das respostas do grupo Verde Bandeira

A análise das respostas desse grupo revela um bom desempenho, com uma boa compreensão dos conceitos de matrizes e transpostas. No entanto, algumas áreas, como a interpretação da relação entre matrizes originais e suas transpostas, requerem atenção para um aprendizado mais completo. A seguir, exploraremos os detalhes de suas respostas, destacando seus pontos fortes e identificando oportunidades de aprimoramento.

Figura 13 – Material didático de apoio do grupo Verde Bandeira - SD 2

Questão 10. A Olimpíada é um dos maiores eventos esportivos da atualidade. Dela, participam atletas de diversas nacionalidades, os quais se reúnem a cada quatro anos em uma cidade escolhida como sede para a disputa dos jogos³. Veja na tabela abaixo a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas.

Olimpíada	Quantidade de medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
Tóquio (2020)	7	6	8
Rio (2016)	7	6	6
Londres (2012)	3	5	9
Pequim (2008)	3	4	10

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro. O Brasil nos Jogos. Disponível em: <<https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas>>. Acesso em: 04 mar. 2024.

a) Escreva uma matriz A que represente as informações da tabela.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Escreva a matriz A^t .

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

³ Situação-problema retirada do livro "Matemática interligada" ANDRADE (2020) com adaptações.

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Na análise da resolução do item (a), observamos que a matriz A foi corretamente elaborada, representando a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil em cada Olimpíada. No item (b), a matriz transposta A^t também foi escrita corretamente, invertendo as linhas e colunas da matriz A .

Figura 14 – Material didático de apoio do grupo Verde Bandeira - SD 2

c) As linhas da matriz A apresentam as mesmas informações das linhas da matriz A^t ? Por quê?

Sim, porque os números não mudam de posição.

d) Na matriz A^t , o que representam as:

- colunas?
CIDADES ESCOLHIDAS PARA SEDER OS JOGOS OLÍMPICOS.
- linhas?
AS QUANTIDADES DAS MEDALHAS.

e) Construa abaixo uma tabela com base em A^t .

7	2	3	3
6	6	5	4
8	6	9	10

f) Agora, vamos obter a matriz transposta usando uma planilha eletrônica. Para isso, siga as instruções: digite a tabela dada na planilha; selecione a quantidade de linhas e colunas da matriz A^t ; na barra de fórmulas insira o comando “=TRANSPOR(intervalo das células da matriz original)”;

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

No entanto, no item (c), a resposta apresenta um equívoco. As linhas da matriz A e A^t não contêm as mesmas informações e os alunos responderam que “*sim, porque os números não mudam de posição*”. Todavia, em A , cada linha representa uma edição dos Jogos Olímpicos, enquanto em A^t , cada linha representa um tipo de medalha. Em contraste, a resposta do item (d) está correta. O grupo identificou que as colunas representam as cidades-sede dos Jogos Olímpicos, enquanto as linhas representam os tipos de medalhas. Essa discrepância entre as respostas dos itens (c) e (d) levanta a questão se houve um mal-entendido entre os membros do grupo ou um erro de interpretação no item (c).

Em conclusão, o grupo verde demonstrou um bom domínio dos conceitos de matrizes e transpostas. No entanto, a inconsistência na interpretação da relação entre matrizes originais e suas transpostas indica a necessidade de um aprofundamento nesse tópico específico. A compreensão dessa relação é fundamental para explorar diferentes perspectivas dos dados e extrair informações mais completas.

Além disso, a ausência de rótulos e legendas na tabela construída e a necessidade de auxílio na manipulação de planilhas eletrônicas sugerem que o grupo pode aprimorar suas habilidades de organização e apresentação de dados, bem como sua autonomia na utilização de ferramentas tecnológicas.

Em geral, o desempenho do grupo verde foi positivo, demonstrando potencial para um aprendizado ainda mais sólido e completo. Com atenção aos pontos de melhoria identificados, o grupo tem potencial para consolidar seus conhecimentos e aprimorar

suas habilidades na análise e interpretação de dados utilizando matrizes e suas transpostas.

Análise dos Resultados do grupo Azul

A análise das respostas desse grupo mostra um sólido domínio dos conceitos de matrizes e transpostas, com excelente desempenho na interpretação e aplicação desses conceitos para analisar os dados da questão. No entanto, um pequeno deslize na construção da tabela final destaca a importância da atenção aos detalhes na organização e apresentação de dados. A seguir, exploraremos os detalhes de suas respostas, evidenciando seus acertos e identificando os aspectos onde podem melhorar.

Na verificação da resposta do item (a), identificamos que a matriz A foi escrita corretamente. No item (b), a matriz transposta A^t também foi elaborada de forma precisa, invertendo as linhas e colunas da matriz A .

Na resposta do item (c), o grupo demonstrou um entendimento sólido do conceito de matriz transposta, reconhecendo que as informações contidas nas linhas das matrizes A e A^t são distintas. Essa compreensão também se refletiu na resposta correta do item (d).

Figura 15 – Material didático de apoio do grupo Azul - SD 2

Questão 10. A Olimpíada é um dos maiores eventos esportivos da atualidade. Dela, participam atletas de diversas nacionalidades, os quais se reúnem a cada quatro anos em uma cidade escolhida como sede para a disputa dos jogos³. Veja na tabela abaixo a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas.

Olimpíada	Quantidade de medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
Tóquio (2020)	7	6	8
Rio (2016)	7	6	6
Londres (2012)	3	5	9
Pequim (2008)	3	4	10

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro. O Brasil nos Jogos. Disponível em: <<https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas>>. Acesso em: 04 mar. 2024.

a) Escreva uma matriz A que represente as informações da tabela.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

b) Escreva a matriz A^t .

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

³ Situação-problema retirada do livro "Matemática Interligada" ANDRADE (2020) com adaptações.

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Contudo, no item (e), a tabela construída com base em A^t apresenta um equívoco, pois os valores inseridos não correspondem aos da matriz A^t e nem aos dados originais.

Em conversa com o grupo, eles afirmaram ter interpretado que o item (e) solicitava a criação de uma tabela com valores arbitrários, o que não era o caso.

Figura 16 – Material didático de apoio do grupo Azul - SD 2

c) As linhas da matriz A apresentam as mesmas informações das linhas da matriz A^t ? Por quê?
Não, pois as informações foram invertidas entre linhas e colunas.

d) Na matriz A^t , o que representam as:

- colunas?
As cidades calculadas para as disputas das vagas.
- linhas?
As cidades.

e) Construa abaixo uma tabela com base em A^t :

8	9	5	6
20	12	3	4
26	7	2	28
19	22	15	2

f) Agora, vamos obter a matriz transposta usando uma planilha eletrônica. Para isso, siga as instruções: digite a tabela dada na planilha; selecione a quantidade de linhas e colunas da matriz A^t ; na barra de fórmulas insira o comando “=TRANSPOR(intervalo das células da matriz original)”; pressionar “CTRL+SHIFT+ENTER”.

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Por fim, no item (f), assim como os outros grupos, o grupo azul necessitou de auxílio da professora ou de colegas para finalizar a tarefa.

De modo geral, o grupo azul demonstrou um excelente domínio dos conceitos de matrizes e transpostas, aplicando-os corretamente à resolução da questão. A compreensão da relação entre matrizes originais e suas transpostas foi evidente nas respostas precisas e fundamentadas.

No entanto, o equívoco na construção da tabela no item (e) destaca a importância da leitura atenta e da compreensão completa dos enunciados. A interpretação errônea do enunciado levou o grupo a inserir valores arbitrários na tabela, o que comprometeu a precisão dos resultados.

Apesar desse deslize, o desempenho geral da equipe foi notável, evidenciando um sólido aprendizado e grande potencial para aprofundar seus conhecimentos. A autonomia na resolução da maioria dos itens e a busca por auxílio quando necessário demonstram uma postura proativa e colaborativa, essencial para o sucesso em atividades futuras.

6.4 Apresentação e aplicação da Situação-problema 4 da terceira SD

Nesta seção, apresentaremos a análise de uma situação-problema envolvendo operações com matrizes e transplantes de órgãos. Empregamos o software GeoGebra para manipular e visualizar as matrizes, enquanto a linguagem \LaTeX garante a representação textual precisa e formal dos resultados. Exploramos o potencial combinado de matrizes, GeoGebra e \LaTeX para interpretar e comunicar dados sobre transplantes de coração e fígado no Brasil nos anos de 2021 e 2022.

6.4.1 Situação-problema 4: Transplante de órgãos realizados no Brasil nos anos de 2021 e 2022

Inicialmente, a questão contextualiza o tema dos transplantes de órgãos, explicando o procedimento e o papel do Sistema Nacional de Transplantes no Brasil:

Você já ouviu falar em transplante de órgãos?

*É uma intervenção cirúrgica que envolve a substituição de um órgão (como coração, pulmão, rim, pâncreas, fígado) ou tecido (como medula óssea, ossos, córneas) de um paciente doente (receptor) por um órgão ou tecido saudável de um doador, que pode estar vivo ou morto*³.

Segundo o website “Tua Saúde”, esses procedimentos são recomendados para condições graves e irreversíveis, quando todas as outras formas de tratamento falharam em restaurar a saúde. Os transplantes mais frequentes envolvem o coração, fígado, pulmão, rim, córnea ou medula óssea. A maneira como o transplante é realizado depende da parte doada, seja um órgão, tecido ou células.

*No Brasil, o Sistema Nacional de Transplantes (SNT), cuja função central é desempenhada pelo Ministério da Saúde, é responsável pela regulamentação, controle e supervisão do processo de doação e transplante realizado no país. O Brasil tem o maior programa público de transplante de órgãos, tecidos e células do mundo, garantido a toda a população através do SUS*⁴.

Em seguida, são apresentadas duas tabelas com dados de transplantes de coração e fígado por região do Brasil em 2021 e 2022:

³ Transplante: quando é indicado, como é feito, recuperação (e outras dúvidas) - Tua Saúde (tua-saude.com).

⁴ Sistema Nacional de Transplantes — Ministério da Saúde (www.gov.br).

Tabela 4 – Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 – 2022).

Ano/Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	26	0	53	26	229
2022	32	0	55	44	232

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tabela 5 – Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 – 2022).

Ano/Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	112	0	351	501	1094
2022	115	4	358	578	1107

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Para calcularmos o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, podemos usar matrizes.

- a) Inicialmente, represente no GeoGebra cada tabela por meio de uma matriz.*
- b) Calcule o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, usando matrizes.*
- c) Vamos agora visualizar a representação textual das matrizes construídas na tela de trabalho do software.*
- d) Em relação à matriz $A+B$, qual é o elemento da segunda linha e terceira coluna? O que ele indica?*

No item (a), solicitamos que os estudantes representassem os dados da tabela por meio de matrizes no software GeoGebra. Como sugestão, indicamos a matriz A para representar os transplantes de coração e a matriz B para representar os transplantes de fígado. Alguns grupos usaram C para representar a matriz referente ao transplante de coração e F para representar a matriz relacionada ao transplante de fígado.

No item seguinte, solicitamos a soma dessas matrizes ($T = A + B$) para obtenção do total de transplantes de ambos os órgãos por região e ano.

Nesse item (b), é importante que os alunos percebam, através da análise da matriz T , que a região Sudeste lidera o número de transplantes de coração e fígado, seguida pelas regiões Sul e Nordeste. As regiões Centro-Oeste e Norte apresentam um número significativamente menor de transplantes. Essa análise dos dados de transplantes de coração e fígado no Brasil mostra uma distribuição desigual entre as regiões do país. A região Sudeste concentra a maior parte dos procedimentos, enquanto as regiões Norte e Centro-Oeste apresentam um número reduzido de transplantes.

Já no item (c), o intuito era que os alunos representassem as operações em formato \LaTeX usando o GeoGebra, visualizassem a soma das duas matrizes e, posteriormente, o resultado. Para a realização desse procedimento foi disponibilizado um tutorial no material didático de apoio.

Por fim, no item (d), é solicitado que os estudantes identifiquem um elemento específico em uma matriz e interpretem seu significado no contexto da questão:

Em relação a esse item, é esperado que os discentes respondam que o elemento da segunda linha e terceira coluna representa o total de transplantes de coração e fígado realizados na região Nordeste no ano de 2022. Ou seja, esse valor indica a quantidade total de procedimentos realizados nessa região específica naquele ano.

Essa questão oferece uma visão abrangente sobre a situação dos transplantes de órgãos no Brasil, fornecendo uma base sólida para investigações e discussões em grupo sobre políticas de saúde e estratégias de melhoria. Não realizamos essa discussão por causa do tempo limitado. Por outro lado, essa situação-problema pode ser relacionada a várias competências gerais da BNCC: Conhecimento; Pensamento científico, crítico e criativo; Comunicação; Argumentação e Cultura Digital. Além dessas, destacamos as específicas de Matemática para o Ensino Médio: 1, 2, 3 e 4.

Análise das respostas do grupo Violeta

Ao averiguarmos o desempenho desse grupo nessa questão, entendemos que, no geral, demonstraram domínio sobre os conceitos e as ferramentas abordados na questão. A representação das tabelas em matrizes no GeoGebra (item a) e o cálculo da matriz total de transplantes (item b) foram realizados corretamente, evidenciando a compreensão das operações com matrizes.

A equipe também demonstrou proficiência no uso do GeoGebra ao seguir o tutorial para a representação visual das matrizes (item c). No entanto, no item (d), apesar de identificar corretamente o valor do elemento na segunda linha e terceira coluna como 413, a interpretação apresenta imprecisões. O grupo descreveu o valor como a soma de transplantes de rins e coração, quando na verdade se refere à soma de transplantes de fígado e coração no Nordeste em 2022. A ordem da resposta também poderia ser aprimorada, priorizando a identificação do valor antes de sua interpretação.

Figura 17 – Material didático de apoio do grupo Violeta - SD 3

Questão 4. Analise a seguir algumas informações sobre doação de órgãos no Brasil.

Tabela 5: Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 - 2022).

Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	26	0	53	26	229
2022	32	0	55	44	232

Fonte: <https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tabela 6: Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 - 2022).

Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	112	0	351	501	1094
2022	115	4	358	578	1107

Fonte: <https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Para calcularmos o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, podemos usar matrizes.

a) Inicialmente, represente no GeoGebra cada tabela por meio de uma matriz.

b) Calcule o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, usando matrizes.

$$M = \begin{pmatrix} 138 & 0 & 507 & 527 & 1323 \\ 152 & 4 & 362 & 622 & 1233 \end{pmatrix}$$

c) Vamos agora visualizar a representação textual das matrizes construídas na tela de trabalho do software. Para isso, siga os passos abaixo:

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Figura 18 – Material didático de apoio do grupo Violeta - SD 3

d) Em relação à matriz $A + B$, qual é o elemento da segunda linha e terceira coluna? O que ele indica?

a soma da quantidade de trans e coração em zona do nordeste 513

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Apesar dessa imprecisão, a resposta do grupo Violeta demonstra um bom entendimento geral dos conceitos e ferramentas abordados na questão, com destaque para a correta manipulação das matrizes e a proficiência no uso do GeoGebra.

Análise das respostas do grupo Vermelho

Na análise das respostas desse grupo, para essa questão, averiguamos que, no item (a), a equipe representou corretamente as tabelas no GeoGebra, identificando as matrizes C e F para representar os transplantes de coração e fígado, respectivamente. No item (b), o grupo prosseguiu com sucesso, calculando a matriz T, que representa a

soma dos transplantes de ambos os órgãos por região e ano.

Figura 19 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 3

Questão 4. Analise a seguir algumas informações sobre doação de órgãos no Brasil.

Tabela 5: Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 - 2022).

Região \ Ano	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	26	0	53	26	229
2022	32	0	55	44	232

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tabela 6: Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 - 2022).

Região \ Ano	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	112	0	351	501	1094
2022	115	4	358	578	1107

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Para calcularmos o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, podemos usar matrizes.

a) Inicialmente, represente no GeoGebra cada tabela por meio de uma matriz.

b) Calcule o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, usando matrizes.

$$T = \begin{pmatrix} 138 & 0 & 404 & 527 & 1321 \\ 197 & 4 & 413 & 622 & 1333 \end{pmatrix}$$

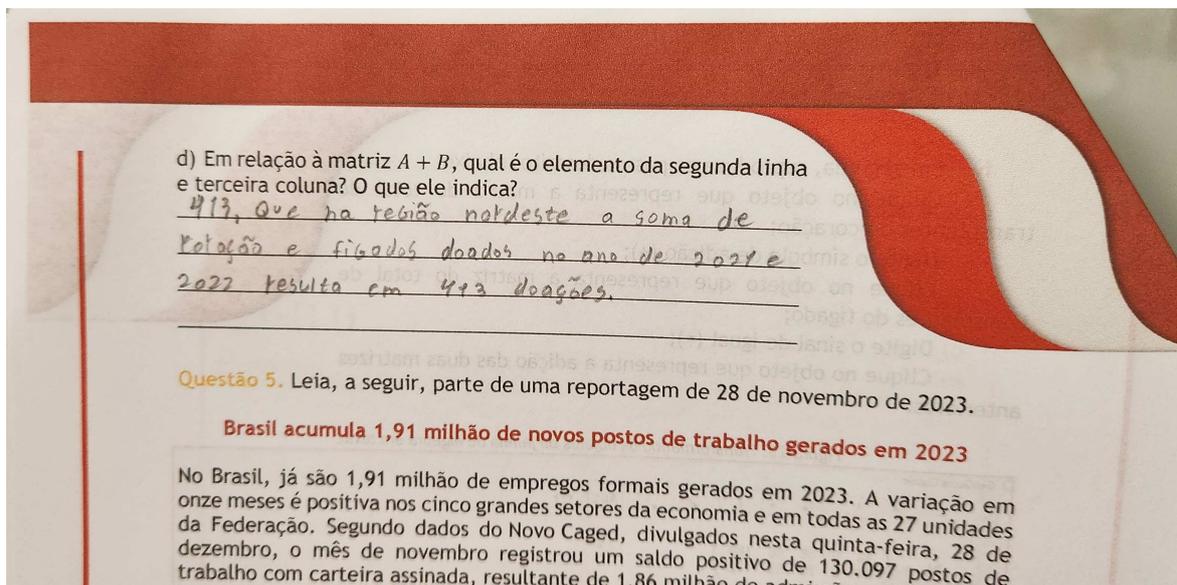
c) Vamos agora visualizar a representação textual das matrizes construídas na tela de trabalho do software. Para isso, siga os passos abaixo:

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

No item (c), os alunos não demonstraram dificuldade com o GeoGebra ao gerar a representação textual das matrizes C, F e T, reconhecendo a utilidade dessa representação para uma visualização mais clara e organizada dos dados.

No entanto, no item (d), apesar de identificarem corretamente o valor 413 na segunda linha e terceira coluna da matriz $(A + B)$, a interpretação desse valor foi equivocada. O valor 413 não representa a soma de transplantes de coração e fígado no Nordeste ao longo de dois anos (2021 e 2022), mas sim o total de transplantes desses órgãos realizados apenas no ano de 2022 na região Nordeste. Esse equívoco na interpretação destaca a importância de analisar cuidadosamente os dados e realizar uma leitura mais atenta da questão.

Figura 20 – Material didático de apoio do grupo Vermelho - SD 3



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Em resumo, os componentes dessa equipe mostraram domínio das ferramentas e conceitos, mas apresentaram uma pequena falha na interpretação do resultado final, evidenciando a importância de uma análise cuidadosa dos dados em cada etapa do processo.

Análise das respostas do grupo Azul Marinho

Acompanhando o desempenho desse grupo no desenvolvimento dessa questão, observamos que, no item (a), a equipe demonstrou compreensão do conceito de representar dados em forma de matriz, nomeando corretamente as matrizes C (transplantes de coração) e F (transplantes de fígado). No entanto, houve alguma dificuldade na utilização da notação padrão de colchetes para representar matrizes no GeoGebra, indicando a necessidade de aprimorar a familiaridade com a ferramenta.

No item (b), a equipe calculou corretamente a matriz resultante da soma de C e F, demonstrando domínio da operação de soma de matrizes e sua aplicação no contexto do problema. Já no item (c), a equipe demonstrou maior desenvoltura no uso do GeoGebra em relação ao item (a), seguindo o tutorial e realizando a representação textual das matrizes com sucesso.

Figura 21 – Material didático de apoio do grupo Azul Marinho - SD 3

Questão 4. Analise a seguir algumas informações sobre doação de órgãos no Brasil.

Tabela 5: Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 - 2022).

Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	26	0	53	26	229
2022	32	0	55	44	232

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tabela 6: Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 - 2022).

Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	112	0	351	501	1094
2022	115	4	358	578	1107

Fonte: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Para calcularmos o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, podemos usar matrizes.

a) Inicialmente, represente no GeoGebra cada tabela por meio de uma matriz.

b) Calcule o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, usando matrizes.

$$\begin{pmatrix} 138 & 0 & 404 & 527 & 1333 \\ 147 & 4 & 413 & 622 & 1339 \end{pmatrix}$$

c) Vamos agora visualizar a representação textual das matrizes construídas na tela de trabalho do software. Para isso, siga os passos abaixo:

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

No item (d), embora tenha identificado corretamente o valor 413 na segunda linha e terceira coluna da matriz resultante, a equipe interpretou incorretamente seu significado. O valor representa o total de transplantes de coração e fígado (e não todos os tipos de transplantes) realizados na região Nordeste em 2022. Essa imprecisão, também observada em outras equipes, sugere a necessidade de reforçar a interpretação dos elementos das matrizes e sua relação com o contexto do problema.

Figura 22 – Material didático de apoio do grupo Azul Marinho - SD 3

d) Em relação à matriz $A + B$, qual é o elemento da segunda linha e terceira coluna? O que ele indica?

413. A soma dos transplantes no nordeste no ano de 2022.

Questão 5. Leia, a seguir, parte de uma reportagem de 28 de novembro de 2023.

Brasil acumula 1.91 milhão de novos...

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Desse modo, chegamos a conclusão que a equipe compreendeu os conceitos de matrizes e operações, mas necessita aprimorar a familiaridade com a notação no GeoGebra

e a interpretação dos resultados no contexto do problema. O erro no item (d), comum a outras equipes, evidencia a importância de reforçar a interpretação no que diz respeito à relação entre os elementos das matrizes e os dados específicos do problema em questão.

6.5 Análise dos Resultados – Parte 1 do Questionário

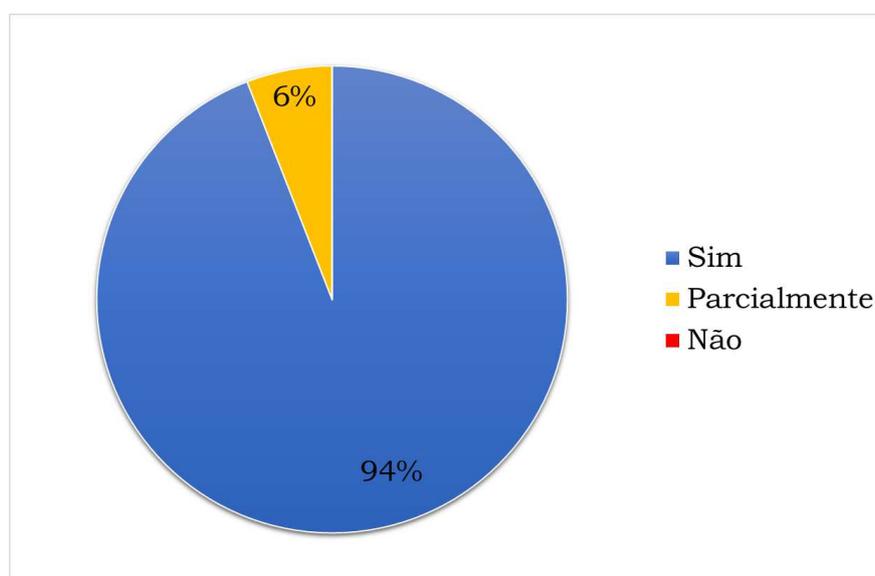
A primeira parte do questionário busca entender a percepção dos alunos sobre o uso de tecnologias no aprendizado de matrizes. As perguntas exploram se a tecnologia teve um impacto positivo ou negativo no aprendizado, como ela auxiliou ou não os alunos e como a experiência se compara com as aulas tradicionais. Além disso, o questionário investiga se os alunos recomendariam o uso de tecnologia para ensinar outros tópicos de matemática. Analisaremos as respostas para identificar os pontos fortes e fracos do uso de tecnologia no ensino de matrizes e como essa experiência pode ser aprimorada e expandida para outros tópicos da matemática. Nesta primeira seção, a pesquisa buscou responder às seguintes perguntas:

- Em sua opinião, o uso de recursos tecnológicos contribuiu para o seu aprendizado de matrizes?;
- Se sim, de que forma os recursos tecnológicos auxiliaram no seu aprendizado?
Explique em detalhes;
- Se não, por que você considera que os recursos tecnológicos não contribuíram para o seu aprendizado? *Explique em detalhes;*
- Em comparação com aulas tradicionais de matemática, você acredita que o uso de recursos tecnológicos tornou as aulas de matrizes mais:
 - Interessantes
 - Motivadoras
 - Engajadoras
 - Difíceis
 - Desmotivadoras
- Você recomendaria o uso de recursos tecnológicos para o ensino de outros conteúdos de matemática?

Analisamos as respostas dos alunos, categorizando as respostas da primeira pergunta e verificando se há alguma relação com as respostas das perguntas seguintes.

Em seguida, fizemos a análise das respostas abertas para identificar os principais pontos levantados pelos alunos. O resultado do primeiro questionamento está expresso no gráfico a seguir:

Figura 23 – Em sua opinião, o uso de recursos tecnológicos contribuiu para o seu aprendizado de matrizes?



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

A pergunta em questão buscou investigar a percepção dos alunos sobre a contribuição dos recursos tecnológicos no aprendizado de matrizes. Os resultados obtidos, com base em 17 respostas, demonstram uma predominância da opinião de que a tecnologia exerce um papel positivo nesse processo.

A expressiva maioria (94,1%) que reconhece a contribuição positiva da tecnologia no aprendizado de matrizes corrobora a literatura existente sobre o tema, que aponta para o potencial das tecnologias digitais no ensino de matemática. No entanto, é importante ressaltar que a pequena parcela (5,9%) que considera a contribuição da tecnologia apenas parcial sugere que seu uso não é uma solução mágica para todos os desafios do ensino de matrizes. Fatores como a qualidade dos recursos tecnológicos e as características individuais dos alunos podem influenciar os resultados.

Aqui destacamos a pesquisa de Rodrigues, Maia e Castro (2023), onde evidencia que a utilização de recursos tecnológicos no ensino de Matemática tem se mostrado eficaz ao potencializar o aprendizado, aumentar o engajamento dos alunos e impactar positivamente na compreensão dos conceitos matemáticos. Os benefícios proporcionados por essas ferramentas não apenas enriquecem a experiência educacional, mas

também abrem novos horizontes para o futuro da educação, oferecendo uma abordagem mais dinâmica e eficiente no processo de ensino-aprendizagem (RODRIGUES; MAIA; CASTRO, 2023).

As respostas abertas, que tinham relação com a primeira resposta, revelam que os estudantes valorizam a praticidade proporcionada pelas ferramentas tecnológicas, como calculadoras, que auxiliam em cálculos complexos e agilizam o processo de aprendizagem. Além disso, alguns estudantes mencionaram que a tecnologia torna as aulas mais interessantes e dinâmicas, o que pode contribuir para um maior engajamento e motivação.

A análise das respostas dos estudantes revela os seguintes temas principais sobre como os recursos tecnológicos auxiliaram no aprendizado de matrizes.

- **Praticidade, Agilidade e Desempenho:** alguns respondentes destacaram a praticidade e agilidade proporcionadas pelos recursos tecnológicos além da contribuição desses para o desempenho, como exemplificado pela resposta: “*são extremamente práticos, por exemplo em cálculos grandes o uso da calculadora auxilia demais, praticidade e melhor desempenho durante as aulas*”. Além disso, mencionaram a facilitação nos cálculos e a rapidez na execução das atividades;
- **Facilitação do Aprendizado:** os recursos tecnológicos foram reconhecidos por facilitar o aprendizado de matrizes, como indicado nas citações: “*facilitando os cálculos das matrizes*” e “*fica bem melhor de aprender, facilita de um certo modo*”;
- **Interatividade:** a promoção de um ambiente de aprendizado mais interativo também foi destacada: “*auxiliam de forma mais interativa e rápida durante a aula*”.

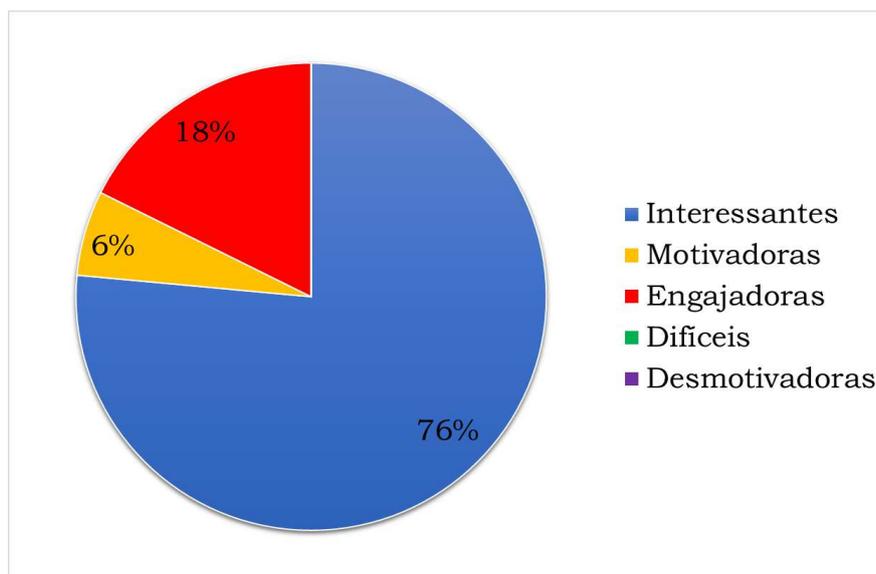
É importante observar que um estudante mencionou que a tecnologia pode ser um obstáculo para aqueles que não possuem conhecimentos básicos de informática: “*se você não souber o básico da computação, provavelmente irá sentir dificuldades*”, o que sugere que a implementação de recursos tecnológicos no ensino deve ser acompanhada de medidas para garantir que todos os alunos tenham acesso e condições de utilizá-los de forma eficaz.

Agora, trazemos o resultados da pergunta seguinte, que buscou investigar a percepção dos alunos em relação ao uso de recursos tecnológicos no ensino de matrizes, comparando-o com o método tradicional. Os resultados revelaram uma predominância da opinião de que as aulas se tornaram mais interessantes (76,5%) com a incorporação da tecnologia.

Esse dado sugere que a utilização de ferramentas digitais, como softwares de visualização, plataformas interativas e aplicativos educacionais, tem o potencial de despertar

o interesse dos estudantes e torná-los mais receptivos ao conteúdo. Corroborando essa perspectiva, Moran (2015) mostra que as tecnologias digitais oferecem inúmeras possibilidades para tornar o aprendizado mais dinâmico e envolvente, o que pode ser especialmente relevante em temas abstratos como matrizes.

Figura 24 – Em comparação com aulas tradicionais de matemática, você acredita que o uso de recursos tecnológicos tornou as aulas de matrizes mais:



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Além do aumento do interesse, a pesquisa também apontou um crescimento na percepção de que as aulas se tornaram mais engajadoras (17,6%). Isso indica que os recursos tecnológicos podem contribuir para uma maior participação ativa dos alunos, incentivando-os a explorar o conteúdo de forma autônoma e colaborativa. É importante destacar que nenhum dos participantes considerou as aulas mais difíceis ou desmotivadoras com o uso da tecnologia. Esse resultado indica que a utilização de recursos tecnológicos não prejudicou a compreensão do conteúdo e nem diminuiu o interesse dos alunos. Pelo contrário, a tecnologia parece ter facilitado o aprendizado e tornado as aulas mais atrativas.

Finalizando essa primeira parte do questionário, destacamos a unanimidade na recomendação do uso de tecnologia para outros conteúdos de matemática, o que reforça a percepção positiva dos estudantes em relação ao uso de ferramentas tecnológicas no ensino.

6.6 Análise dos Resultados - Parte 2 do Questionário

A segunda parte do nosso questionário investigou a experiência e a percepção dos estudantes em relação ao uso de duas ferramentas digitais específicas - planilhas eletrônicas e o software GeoGebra - no aprendizado de matrizes. A pesquisa foi conduzida com perguntas abertas e fechadas, abordando a experiência prévia dos participantes com as ferramentas, a utilidade percebida, as contribuições para o aprendizado e as dificuldades encontradas. A seguir, detalharemos alguns resultados sobre o uso de cada software especificamente.

6.6.1 Avaliação Específica: Planilhas Eletrônicas

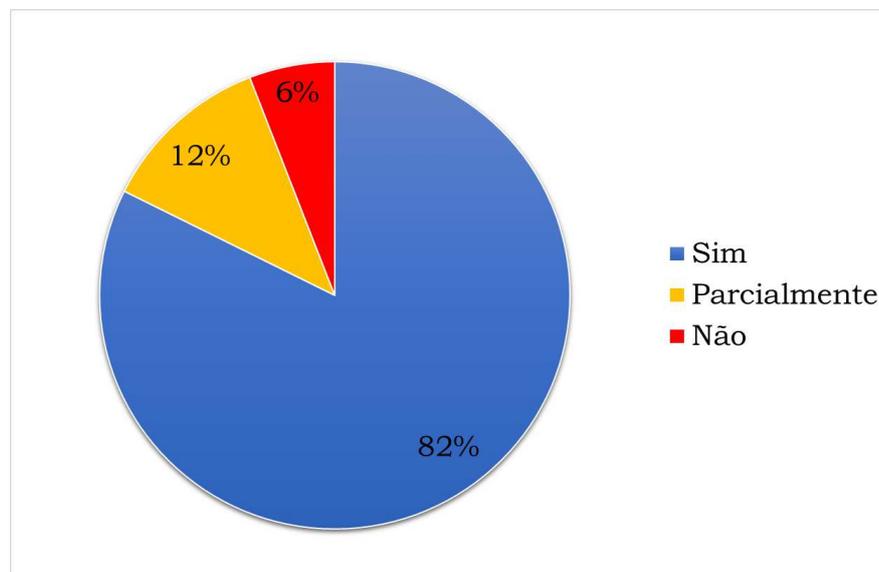
As perguntas sobre a experiência dos alunos no uso de planilhas eletrônicas para o ensino de matrizes foram as seguintes:

- Antes dos encontros, você já tinha experiência com planilhas eletrônicas (para organizar dados, criar tabelas e realizar cálculos)?
- O uso de planilhas eletrônicas para representar e manipular matrizes foi útil para você?
- De que forma o uso de planilhas eletrônicas contribuiu para o seu aprendizado de matrizes? *Explique em detalhes;*
- Você teve alguma dificuldade em utilizar as planilhas eletrônicas?
- Se sim, quais dificuldades você enfrentou? *Explique em detalhes.*

Analisamos as respostas para cada pergunta, com foco nas perguntas discursivas, para entender a percepção dos alunos sobre o uso de planilhas eletrônicas no aprendizado de matrizes. A pesquisa revela que 41,2% dos estudantes possuía um conhecimento parcial de planilhas eletrônicas antes dos encontros, enquanto outros 41,2% não tinham nenhuma experiência. Apenas 17,6% dos estudantes relataram ter experiência prévia com planilhas eletrônicas.

Apesar da falta de familiaridade de alguns estudantes com planilhas eletrônicas, a maioria considerou o uso delas útil para o aprendizado de matrizes (82%). Apenas 5% dos estudantes não acharam o uso de planilhas útil e 12% consideraram parcialmente útil.

Figura 25 – O uso de planilhas eletrônicas para representar e manipular matrizes foi útil para você?



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

A expressiva maioria que considerou o uso de planilhas eletrônicas útil sugere que essa ferramenta computacional oferece recursos que facilitam o trabalho com matrizes, uma vez que permitem a organização de dados em formato tabular, o que se alinha naturalmente à estrutura de uma matriz. Além disso, esse recurso dispõe de funções e operações matemáticas que podem ser aplicadas diretamente às células, agilizando cálculos e manipulações matriciais.

Vale ressaltar que 11,8% dos respondentes indicaram que a utilidade das planilhas eletrônicas é parcial. Essa parcela pode representar usuários que reconhecem o potencial do software, mas encontram limitações em determinados contextos ou funcionalidades. A pequena porcentagem de participantes não encontrou utilidade nas planilhas. Essa percepção pode estar relacionada à falta de familiaridade com a ferramenta e suas funções.

Quanto a percepção dos discentes sobre o uso de planilhas eletrônicas no aprendizado de matrizes, observamos que as respostas dos alunos demonstram que o uso de planilhas eletrônicas facilitou o aprendizado de matrizes de diversas formas:

- **Visualização e organização:** as planilhas auxiliaram na visualização e organização dos dados, tornando os cálculos mais compreensíveis.

“uma forma de fazer com mais organização”

“me ajudou a entender como elas são organizadas e realizadas”

- **Facilidade nos cálculos:** as planilhas simplificaram os cálculos com matrizes, tornando o processo mais fácil e rápido.

*“foi muito mais fácil de entender os cálculos e sobre o assunto.”
“mostrando uma forma mais fácil de fazer o cálculo”*

- **Aprendizado mais rápido e interessante:** o uso de planilhas tornou o aprendizado mais eficiente e dinâmico, permitindo que os alunos visualizassem os resultados de forma imediata e compreendessem os conceitos de forma mais intuitiva.

“A visualização dos resultados imediatos na forma de tabelas facilitou minha compreensão dos conceitos relacionados a matrizes.”

- **Suporte e exibição aprimorados:** as planilhas ofereceram um suporte adicional aos alunos, exibindo os dados de maneira clara e facilitando a compreensão dos conceitos.

“foi mais fácil pra mim aprender, já que tem um suporte e exibição melhor”

Quanto as dificuldades no uso de planilhas eletrônicas, alguns estudantes mencionaram dificuldades em utilizá-las, principalmente relacionadas aos seguintes aspectos:

- **Encontrar as ferramentas corretas:** a interface da planilha eletrônica pode ser complexa para alguns usuários, dificultando a localização das ferramentas necessárias.

“achar as ferramentas corretas”

- **Usar algumas funções do aplicativo:** as diversas funções disponíveis nas planilhas eletrônicas podem ser um desafio para alguns alunos, exigindo um tempo de adaptação e aprendizado.

“somente algumas funções do aplicativo”

É importante notar que apenas dois alunos mencionaram dificuldades, e estas foram pontuais e relacionadas ao uso do aplicativo, não ao conceito de matrizes em si. Deste modo, a pesquisa demonstra que o uso de planilhas eletrônicas pode ser um recurso útil no ensino de matrizes, facilitando o aprendizado e tornando-o mais interessante para os alunos. No entanto, é fundamental oferecer suporte adequado aos estudantes para que eles superem as dificuldades iniciais com a ferramenta.

6.6.2 Avaliação Específica: Geogebra

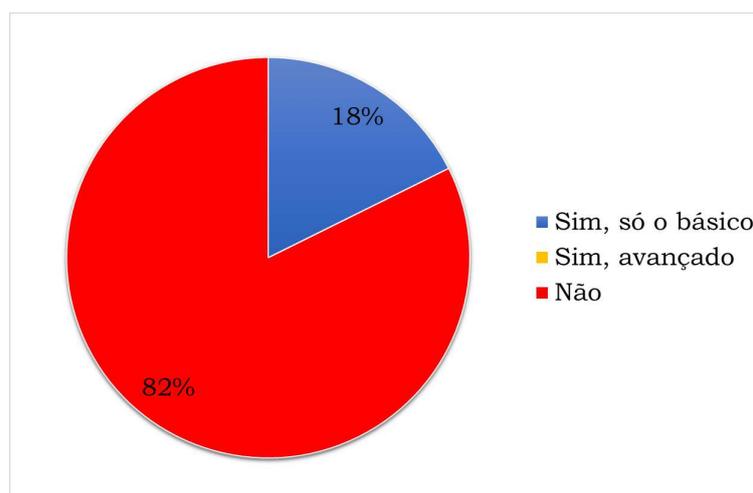
Nesta seção, buscamos entender como o software GeoGebra pode auxiliar no aprendizado de matrizes. Para isso, investigamos o conhecimento prévio dos participantes

sobre o GeoGebra e como a utilização da ferramenta impactou a compreensão de conceitos e operações com matrizes. As perguntas a seguir exploraram a percepção dos participantes sobre a utilidade do GeoGebra, os benefícios específicos para o aprendizado de matrizes e as eventuais dificuldades encontradas durante o uso do software:

- Você já tinha algum conhecimento sobre o GeoGebra antes dos encontros?
- O uso do Geogebra para visualizar conceitos de matrizes e realizar operações matriciais foi útil para você?
- De que forma o uso do Geogebra contribuiu para o seu aprendizado de matrizes?
Explique em detalhes;
- Você teve alguma dificuldade em utilizar o Geogebra?
- Se sim, quais dificuldades você enfrentou?

A análise das respostas a estas perguntas nos permitirá traçar um panorama da experiência dos estudantes com o *GeoGebra* e avaliar a eficiência da ferramenta como recurso didático no ensino de matrizes. De acordo com a primeira pergunta, a maioria dos estudantes (82%), como podemos ver no gráfico da Figura 26, relatou não possuir conhecimento prévio sobre o *GeoGebra* antes dos encontros. No entanto, analisando uma outra pergunta, notamos que a grande maioria (88%) considerou o uso do software útil para visualizar conceitos de matrizes e realizar operações com matrizes.

Figura 26 – Você já tinha algum conhecimento sobre o GeoGebra antes dos encontros?



Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

As respostas sobre como o GeoGebra contribuiu para o aprendizado de matrizes foram diversas, mas podemos destacar alguns pontos em comum:

- **Praticidade e facilidade:** o software foi mencionado por diversos estudantes como uma ferramenta que facilita a compreensão e o trabalho com matrizes, tornando o aprendizado mais prático.

“por conta da praticidade, e é muito mais fácil.”

“com isso ficou fácil resolver as atividades.”

“facilitando os cálculos.”

- **Auxílio e compreensão:** a possibilidade de auxiliar na compreensão do conteúdo de matrizes foi apontada como um fator importante.

“ajudou e me ensinou bastante sobre matrizes.”

“me ajudou a compreender melhor.”

- **Aprendizado e descoberta:** alguns estudantes mencionaram que o GeoGebra proporcionou um aprendizado mais completo e até mesmo a descoberta de novos conceitos.

“contribuiu em todos os aspectos.”

“explica muita coisa nova.”

Alguns estudantes (29%) relataram ter enfrentado algum obstáculo. No entanto, esse fator não impediu que os estudantes se beneficiassem do uso da ferramenta. As dificuldades relatadas foram:

- **Uso das ferramentas:** a familiarização com as ferramentas do software foi um desafio para alguns.

“uso das ferramentas.”

“não sabia mexer.”

- **Funções específicas:** alguns estudantes tiveram dificuldades com funções específicas do aplicativo.

“só algumas funções do aplicativo.”

- **Adaptação ao uso do software:** uma estudante mencionou a dificuldade em utilizar o software devido ao costume de realizar atividades manualmente.

“Passar corretamente o que se pedia nas atividades, pois estou acostumada a fazer atividades manual.”

Os resultados desta seção do questionário sugerem que o uso do GeoGebra pode ter um impacto positivo no aprendizado de matrizes, mesmo para estudantes que não possuem conhecimento prévio sobre o software. A visualização e a interação proporcionadas pelo GeoGebra parecem facilitar a compreensão dos conceitos e tornar o aprendizado mais significativo. As dificuldades relatadas foram pontuais e não impediram que os estudantes se beneficiassem do uso da ferramenta.

6.7 Impacto do uso de Planilhas Eletrônicas e do GeoGebra no Ensino de Matrizes

De modo geral, a análise dos resultados da parte 2 do questionário indica que a maioria dos estudantes considerou o uso de Planilhas eletrônicas e do GeoGebra útil para o aprendizado de matrizes. A experiência prévia com planilhas eletrônicas era mais comum do que com o GeoGebra, o que sugere que a familiaridade com uma ferramenta pode influenciar a percepção de sua utilidade.

As dificuldades relatadas pelos estudantes foram mais frequentes no uso do GeoGebra, o que pode ser atribuído à falta de familiaridade com a ferramenta. No entanto, a maioria dos participantes não relatou dificuldades significativas no uso de nenhuma das ferramentas.

Os estudantes destacaram a praticidade do GeoGebra e a facilidade de visualização dos conceitos de matrizes como contribuições importantes para o aprendizado. Nas planilhas eletrônicas, a organização dos dados e a facilidade de realizar cálculos foram mencionadas como fatores que auxiliaram na compreensão do conteúdo.

Este estudo de caso contribui para a compreensão do papel das tecnologias digitais no ensino de matemática, em particular no aprendizado de matrizes. Os resultados sugerem que tanto o GeoGebra quanto as planilhas eletrônicas podem ser ferramentas importantes para o ensino e o aprendizado, desde que os estudantes recebam o suporte adequado para superar as dificuldades iniciais de adaptação.

6.8 Análise dos Resultados - Parte 3 do Questionário

A Seção 3 do questionário aplicado investigou a percepção dos alunos sobre as atividades propostas em sequências didáticas e o trabalho em equipe. A maioria dos alunos (76%) considerou as atividades interessantes e desafiadoras, e a maioria afirmou que elas contribuíram para o aprendizado de matrizes (94%).

Todos os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar em equipe e a maioria relatou que essa experiência contribuiu para o seu aprendizado (88%), destacando a colaboração e o compartilhamento de conhecimento como fatores positivos. A professora foi avaliada positivamente por todos os alunos, sendo considerada clara e disponível para tirar dúvidas.

A maioria dos respondentes recomendaria a disciplina eletiva para outros alunos, indicando que a disciplina foi bem recebida. As justificativas para a recomendação mencionam o caráter interessante e relevante do assunto, a abordagem interativa e a facilidade de aprendizado. Um aluno, entretanto, afirmou que não recomendaria a disciplina, justificando que “*não é algo que realmente me interessei*”.

Em essência, a Seção 3 do questionário revela que a aplicação de sequências didáticas explorando o tema de matrizes foi eficaz em promover o aprendizado e o interesse dos alunos, proporcionando atividades interessantes e desafiadoras. O trabalho em equipe também foi apontado como um fator positivo, promovendo a colaboração e o aprendizado entre os alunos. As respostas à avaliação indicam que a aplicação das Sequências Didáticas cumpriu seus objetivos e foi bem-sucedida em despertar o interesse dos alunos pelo tema abordado.

6.9 Análise dos Resultados - Parte 4 do Questionário

A partir dos comentários tecidos nesta parte do questionário, que visa avaliar a experiência de aprendizado com sequências didáticas e recursos tecnológicos no ensino de matrizes, podemos observar um *feedback* majoritariamente positivo. Os participantes expressaram aprovação quanto à proposta e aos recursos utilizados, destacando a experiência positiva e recomendando a atividade para outros alunos: “*a experiência que tive foi muito boa, recomendo para outras pessoas*”.

Alguns participantes mencionaram a importância de ter um horário dedicado ao tema e como a eletiva contribuiu para o aprendizado sobre matrizes: “*A eletiva é ótima para quem quer aprender sobre Matrizes e é sempre bom ter um horário dedicado apenas aquele tema*”. As tecnologias utilizadas foram elogiadas por enriquecer o aprendizado e complementar o ensino de matemática, sendo consideradas promissoras e fundamentais para a educação.

Figura 27 – Alguns comentários sobre a disciplina eletiva

Parte 4: Comentários Adicionais

Escreva livremente seus comentários, sugestões ou críticas sobre a proposta apresentada para o ensino de matrizes e o uso de recursos tecnológicos.

17 respostas

interessante e pratica

achei bem interessante, foi diferente do que imaginei o conteúdo e os recursos ajudaram muito.

Gostei muito dessas eletiva e recomendo para demais alunos.

o uso de recursos tecnológico são realmente importantes para o aprendizado do aluno e podem ser muito promissor para o desenvolvimento de atividades. Acho que como aluna as tecnologias são fundamentais para a educação.

O uso dos recursos tecnológicos é altamente positivo no ensino, pois complementa e enriquece o aprendizado de matemática.

Fonte: Dados da Pesquisa (2024)

Com base nos comentários, podemos concluir que a experiência geral foi positiva. Os alunos parecem ter apreciado a oportunidade de aprender sobre matrizes em um espaço especialmente designado para isso. Eles elogiaram a qualidade do ensino e a utilidade dos recursos tecnológicos no aprendizado. Além disso, os comentários sugerem que os alunos não apenas entenderam o conteúdo, mas também acharam a experiência interessante e enriquecedora. A falta de críticas negativas e a recomendação da eletiva para outros alunos também indicam satisfação. Portanto, a conclusão é que a abordagem de ensino foi eficaz e bem recebida pelos alunos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de Matemática na Educação Básica enfrenta o desafio de tornar conceitos abstratos acessíveis e relevantes para os estudantes, preparando-os para os desafios do século XXI. Nesse contexto, diversas metodologias de ensino têm sido exploradas, buscando promover uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento de habilidades essenciais. A busca por abordagens inovadoras que estimulem o interesse e a participação ativa dos alunos tem levado à incorporação de recursos tecnológicos e à experimentação de novas práticas pedagógicas. A aprendizagem expressiva, que se caracteriza pela construção do conhecimento de forma contextualizada e relevante para o aluno, tem se tornado um objetivo central no ensino de Matemática.

Neste trabalho, investigamos o impacto do uso de recursos tecnológicos, como planilhas eletrônicas e o software GeoGebra, no ensino e aprendizagem de matrizes no Ensino Médio, utilizando Sequências Didáticas. As planilhas eletrônicas se mostraram extremamente úteis para organizar e manipular dados, tornando mais fácil a visualização e realização de cálculos com matrizes. O GeoGebra, por sua vez, proporcionou um ambiente interativo para a exploração de conceitos geométricos e algébricos, permitindo que os alunos visualizassem as operações com matrizes de forma elegante.

A metodologia de sequências didáticas, utilizada como base para a organização das aulas, contribuiu para o desenvolvimento de um aprendizado mais estruturado e significativo. As atividades propostas, que envolveram a resolução de problemas contextualizados e o uso de tecnologias, estimularam a participação ativa dos alunos e a construção do conhecimento de forma colaborativa.

A pesquisa, realizada por meio de uma disciplina eletiva na qual as sequências didáticas foram aplicadas a alunos do 2º ano, buscou promover um aprendizado mais dinâmico e relevante. A análise dos dados coletados, juntamente com as percepções dos alunos, permitiu a obtenção de resultados que contribuíram para uma melhor compreensão do uso de tecnologias no ensino de matemática. A aplicação de questionários, as observações diretas e a análise das produções dos alunos permitiram uma triangulação de dados, enriquecendo a pesquisa. Os relatos dos alunos sugerem que o uso das tecnologias possibilitou um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e interativo, o que contribuiu para um maior engajamento e motivação durante as aulas.

No entanto, é importante destacar que a implementação de tecnologias no ensino de matemática não está isenta de desafios. A necessidade de formação continuada dos professores para o uso efetivo dessas ferramentas e o acesso equitativo a recursos tecnológicos de qualidade são aspectos cruciais a serem considerados. A presente pesquisa,

embora não tenha como foco a análise do impacto da formação docente, reconhece a importância deste fator e sugere que seja explorado em estudos futuros, especialmente considerando que nem todos os profissionais possuem o desenvolvimento necessário para utilizar essa metodologia.

As limitações desta pesquisa, como o número reduzido de participantes e a especificidade do contexto escolar, também devem ser consideradas. A amostra limitada dificulta a generalização dos resultados, e a análise realizada em um contexto escolar específico pode não refletir a realidade de outras instituições. Pesquisas futuras com amostras mais amplas e diversificadas, abrangendo diferentes contextos escolares e regiões, poderiam fornecer uma visão mais abrangente sobre a eficácia das tecnologias no ensino de matrizes.

Apesar dessas limitações, os resultados obtidos neste estudo apontam para o potencial das tecnologias digitais como ferramentas valiosas para o aprimoramento do ensino de matrizes. As sequências didáticas elaboradas e aplicadas na disciplina eletiva demonstraram ser uma estratégia eficaz para promover o aprendizado e o engajamento dos alunos, utilizando os softwares de forma integrada e contextualizada.

Sugere-se que pesquisas futuras ampliem o escopo de investigação, explorando não apenas o impacto da formação continuada de professores, mas também a efetividade de diferentes recursos tecnológicos no ensino de matemática que possam enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, a exploração da aplicabilidade das sequências didáticas em diferentes contextos escolares e com amostras mais amplas continua sendo fundamental para a compreensão do potencial dessa metodologia. A padronização dos recursos tecnológicos utilizados em pesquisas futuras, aliada à diversificação das ferramentas investigadas, permitiria uma comparação mais precisa e abrangente entre diferentes estudos e metodologias, contribuindo para a construção de um conhecimento mais sólido e aplicável sobre o uso de tecnologias no ensino de matemática.

Em síntese, este trabalho evidencia que a integração de tecnologias digitais no ensino de matrizes, por meio de sequências didáticas bem planejadas, pode ser uma estratégia promissora para o desenvolvimento de um aprendizado significativo e engajador. As ferramentas digitais, como planilhas eletrônicas e o GeoGebra, oferecem recursos visuais e interativos que facilitam a compreensão e aplicação dos conceitos de matrizes, tornando o aprendizado mais dinâmico e relevante para os estudantes.

Portanto, almejamos que esta proposta contribua significativamente para a adoção da Metodologia de Sequências Didáticas, aliada à integração de recursos tecnológicos, por parte dos professores de matemática. As sequências didáticas aqui sugeridas podem servir como guia prático para o trabalho docente com o tema de matrizes, além de inspirar e orientar futuras pesquisas na área. Acreditamos que a disseminação e o

aprimoramento dessas práticas pedagógicas inovadoras podem impulsionar a qualidade do ensino de matemática, tornando-o mais atrativo, eficaz e relevante para os alunos.

Referências

- ALMEIDA, M. E. B. d.; VALENTE, J. A. Integração currículo e tecnologias e a produção de narrativas digitais. *Currículo sem fronteiras*, v. 12, n. 3, p. 57–82, 2012. Citado na página 52.
- ALVES, D. M.; CARNEIRO, R. d. S.; CARNEIRO, R. d. S. Gamificação no ensino de matemática: uma proposta para o uso de jogos digitais nas aulas como motivadores da aprendizagem. *Revista Docência e Cibercultura*, v. 6, n. 3, p. 146–164, 2022. Citado na página 50.
- AMAZON.COM. *Imagem de Augustin-Louis Cauchy*. 2024. Acesso em 10 de janeiro de 2024. Disponível em: <<https://www.amazon.com/-/es/Augustin-Louis-1789-1857-matem%C3%A1tico-litograf%C3%ADa-francesa/dp/B07CG7W1MG>>. Citado na página 29.
- ARAÚJO, A. J. S.; SANTOS, R. S. D. *O uso de tecnologias digitais no ensino da matemática*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2014. Citado na página 57.
- AULER, S. M.; PIOVEZANA, L. As tidcs na educação escolar. *TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO: PESQUISAS EM INOVAÇÕES TECNOLÓGICAS-VOLUME 3*, Editora Científica Digital, v. 3, n. 1, p. 57–73, 2022. Citado na página 49.
- BARROS, A. J. d. S.; LEHFELD, N. A. d. S. *Fundamentos de metodologia científica. reimpr.* [S.l.]: São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014. Citado na página 20.
- BENTO, M. M. et al. Educação tecnológica: Software geogebra, uma ferramenta a favor do ensino e aprendizado da matemática. 2012. Citado na página 60.
- BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 16, n. 31, p. 01–19, 2016. Citado na página 23.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. [S.l.]: Harbra, São Paulo, 3ª edição., 1980. Citado na página 35.
- BONA, B. d. O. Análise de softwares educativos para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. *Experiências em ensino de ciências*, v. 4, n. 1, p. 29–50, 2009. Citado na página 56.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 39. Citado na página 56.
- BORBA, M. d. C.; SILVA, R. S. R. d.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. [S.l.]: –3 ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020. Citado na página 60.

- BORGES, R. d. S. L. A utilização de planilhas eletrônicas como instrumento didático no processo de ensino e aprendizagem da matemática: uma análise bibliográfica. Universidade Federal da Paraíba, 2023. Citado na página 58.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. [S.l.]: Tradução: Elza F. Gomide. 2ª ed. - São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 27.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. [S.l.]: Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEC. v. 3, 1997. Citado na página 55.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 nov 2023. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 50 e 59.
- BRASIL, C. N. d. E. C. Diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio. Brasília. 2018. Citado na página 17.
- BRASIL, I. N. d. E. e. P. E. A. T. I. Escalas de proficiência do saeb. Brasília, DF: INEP. 2020. Citado na página 19.
- BRASIL, I. N. d. E. e. P. E. A. T. I. Matrizes de referência de matemática do saeb – bncc. Brasília, DF: INEP. 2022. Citado na página 19.
- BREWSTER, D. et al. *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*. [S.l.]: Richard Taylor, Red Lion Court, Fleet Street, impressores e editores da Universidade de Londres, 1850. v. 37. Citado na página 28.
- CASTELLS, M. *O poder da comunicação*. [S.l.]: 2a. ed. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra, 2017. Citado na página 50.
- CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 148, p. 17–37, 1858. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 32.
- CHAVES, E. O. Tecnologia e educação: o futuro da escola na sociedade da informação. *Campinas: Mindware Editora*, p. 1–194, 1998. Citado na página 48.
- CORRÊA, J. N. P.; BRANDEMBERG, J. C. Tecnologias digitais da informação e comunicação no ensino de matemática em tempos de pandemia: desafios e possibilidades. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 8, n. 22, p. 34–54, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- COSTA, A. B.; LOPES, T. B. Uma proposta de modelagem matemática no ensino-aprendizagem de matrizes. *I JEM*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. et al. As idéias da álgebra. *São Paulo: Atual*, 1999. Citado na página 59.
- CRUZ, K. R. D. Uso de tecnologias digitais no ensino de matemática: desafios em tempos de crise de covid-19. *Rebena-Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem*, v. 6, p. 42–55, 2023. Citado na página 53.

- D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: 17 ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. Citado na página 54.
- DANTE, L. R. *Matemática em contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares*. [S.l.]: 1. ed. São Paulo: Ática, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 123.
- DIAS, T. J. F. et al. Tendências metodológicas em educação matemática: uma revisão de literatura. *Research, Society and Development*, v. 11, n. 6, p. e36411629362–e36411629362, 2022. Citado na página 54.
- D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. *Temas e Debates. SBEM. Ano II N*, v. 2, p. 15–19, 1997. Citado na página 61.
- FILHO, J. L. C.; PAIVA, C. G. de; CAVALCANTE, M. S. A. As tecnologias da informação e comunicação no ensino da matemática. 2020. Citado na página 56.
- FLORES, J. B. O uso de planilhas eletrônicas nas aulas de matemática no ensino fundamental. *Caderno de Estudos Tecnológicos*, v. 1, n. 1, 2013. Citado na página 58.
- GEOGEBRA. *GeoGebra – Aplicativos Matemáticos*. 2024. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 12 mar 2024. Citado na página 60.
- GONÇALVES, C. Uma tabuada de 4 mil anos. *Revista Ciência Hoje. Ed. 384*, 2022. Citado na página 23.
- HOYLES, C.; NOSS, R. What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Second international handbook of mathematics education*, Springer, p. 323–349, 2003. Citado na página 57.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. [S.l.]: 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004. Citado na página 35.
- JAVARONI, S. L. Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2007. Citado na página 56.
- KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. [S.l.]: 3. ed. Campinas: Papirus editora, 2007. Citado na página 51.
- LALUEZA, J. L. et al. As tecnologias da informação e da comunicação e os processos de desenvolvimento e socialização. In: *Psicologia da educação virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 47–65. Citado na página 46.
- LAMATTINA, A. d. A. *Educação 4.0 [livro eletrônico] : transformando o ensino na era digital*. [S.l.]: .– Formiga, MG : Editora Union, 2023. Citado na página 47.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2005. v. 3. Citado na página 35.

LIMEIRA, L. G. d. S. A utilização das tdics como estratégia de ensino e seus desafios ao processo de aprendizagem. Universidade de Passo Fundo, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 52.

LOPES, A. M. et al. Utilização das tdic no ensino de matemática na educação básica. *CIET:EnPED*, 2018. ISSN 2316-8722. Disponível em: <<https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/725>>. Citado na página 49.

LUDVIG, I. R. *INFORMÁTICA: UMA FERRAMENTA PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. 2016. Acesso em: 22 de novembro de 2023. Citado na página 15.

MAIA, D. L.; BARRETO, M. C. Tecnologias digitais na educação: uma análise das políticas públicas brasileiras. *Educação, Formação e Tecnologias*, scielo, v. 05, p. 47 – 61, 06 2012. ISSN 1646-933x. Disponível em: <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1646-933x2012000100005&nrm=iso>. Citado na página 52.

MAIA, L. E. d. O.; GONDIM, R. d. S.; VASCONCELOS, F. H. L. Utilização do geogebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 10, n. 1, p. 31–51, 2023. Citado na página 61.

MEISTERDRUCKE.IE. *James Joseph Sylvester, Savilian Professor of Geometry (meisterdrucke.ie)*. 2024. Acesso em 10 de janeiro de 2024. Disponível em: <<https://www.meisterdrucke.ie/fine-art-prints/English-School/449554/James-Joseph-Sylvester,-Savilian-Professor-of-Geometry-.html>>. Citado na página 30.

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, p. 02–25, 2018. Citado na página 47.

MORAN, J. M.; MASSETO, M. T.; BEHRENS, M. A. L. *Novas tecnologias e mediações pedagógicas*. [S.l.]: Campinas, SP. Papirus, 2012. Citado na página 17.

NETO, H. B. et al. A sequência de fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas. *Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação–EPENN*, v. 15, 2001. Citado na página 55.

OLIVEIRA, E. R. d. *O uso da tecnologia no ensino da matemática contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau*. Dissertação (Mestrado), 2021. Citado na página 56.

PEREIRA, C. C. M.; COSTA, A. C.; ALVES, F. J. d. C. *O uso de Tecnologias no Ensino de Matemática*. [S.l.]: Volume 2, Universidade do Estado do Pará, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA), 2019. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.

PONTES, E. A. S. et al. Abordagens imprescindíveis no ensino contextualizado de matemática nas séries iniciais da educação básica. *RACE-Revista de Administração do Cesmac*, v. 1, p. 3–15, 2018. Citado na página 54.

- QUARTIERI, M. T.; CRUZ, R. P. da. Tecnologias digitais em aulas de matemática. *Ensino e Tecnologia em Revista*, v. 2, n. 1, p. 56–70, 2018. Citado na página 54.
- REAL, L. P. V. *Transformações geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica. 2017. 244 f. Dissertação (Mestrado)*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017. Citado na página 60.
- RODRIGUES, I. A. d. A.; MAIA, D. L.; CASTRO, R. L. d. O papel das tdcis na compreensão e motivação dos alunos do 8º ano em matemática. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, v. 9, n. 8, p. 2335–2352, 2023. Citado 5 vezes nas páginas 49, 60, 61, 146 e 147.
- SCIHIBLOG. *Arthur Cayley e seu amor pela matemática pura | SciHi Blog*. 2018. Acesso em 10 de janeiro de 2024. Disponível em: <http://scih.org/arthur-cayley-pure-mathematics/#google_vignette>. Citado na página 30.
- SILVA, F. G. d. S. *Matrizes e algumas aplicações*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Universidade Regional do Cariri - URCA, 2021. Citado na página 34.
- SOUZA, B. V. d. *Problemas do 2º grau: Uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2023. Citado na página 62.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. [S.l.]: - 2.ed. - São Paulo : McGraw-HiU, 1987. Citado na página 35.
- STRANG, G. *Álgebra linear e suas aplicações - Tradução da 4ª edição norte-americana*. [S.l.]: Cengage Learning, 2005. Citado na página 27.
- TAKAHASHI, T. *Sociedade da informação no Brasil: livro verde*. [S.l.]: Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), 2000. Citado na página 48.
- UNESCO. *Padrões de competências em TIC para professores: marco político*. [S.l.]: Paris: UNESCO, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- VALENTE, J. Diferentes usos do computador na educação. *Em aberto*, v. 12, n. 57, 1993. Citado na página 59.
- WEISS, A. M. L.; CRUZ, M. L. R. M. d. *A informática e os problemas escolares de aprendizagem*. [S.l.]: Rio de Janeiro: DPA, 2ª edição., 1999. Citado na página 18.
- ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 62, 63 e 64.

Apêndices

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DA EXPERIÊNCIA DOS ALUNOS COM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Questionário para Avaliação de aplicação de Sequências Didáticas com Recursos Tecnológicos no Ensino de Matrizes

Prezado Estudante,

Agradecemos por sua participação neste questionário!

Este questionário tem como objetivo avaliar a experiência de aprendizado com as sequências didáticas que você participou, utilizando recursos tecnológicos no ensino de matrizes.

Sua participação neste questionário é fundamental para a realização de uma pesquisa sobre o ensino de matrizes. Suas respostas serão anônimas e utilizadas apenas para fins de pesquisa.

Responda às questões com sinceridade e o máximo de detalhes possível.

[Faça login no Google](#) para salvar o que você já preencheu. [Saiba mais](#)

[Próxima](#) [Limpar formulário](#)

Questionário para Avaliação de aplicação de Sequências Didáticas com Recursos Tecnológicos no Ensino de Matrizes

Faça login no Google para salvar o que você já preencheu. Saiba mais

* Indica uma pergunta obrigatória

Parte 1: Avaliação Geral

Em sua opinião, o uso de recursos tecnológicos contribuiu para o seu aprendizado de matrizes? *

- Sim
- Parcialmente
- Não

Se sim, de que forma os recursos tecnológicos auxiliaram no seu aprendizado? Explique em detalhes

Sua resposta

Se não, por que você considera que os recursos tecnológicos não contribuíram para o seu aprendizado? Explique em detalhes

Sua resposta

Em comparação com aulas tradicionais de matemática, você acredita que o uso de recursos tecnológicos tornou as aulas de matrizes mais: *

- Interessantes
- Motivadoras
- Engajadoras
- Difíceis
- Desmotivadoras
- Outro: _____

Você recomendaria o uso de recursos tecnológicos para o ensino de outros conteúdos de matemática? *

- Sim
- Não

Voltar

Próxima

Limpar formulário

Planilhas Eletrônicas

Antes dos encontros, você já tinha experiência com planilhas eletrônicas (para organizar dados, criar tabelas e realizar cálculos)? *

- Sim
- Parcialmente
- Não

O uso de planilhas eletrônicas para representar e manipular matrizes foi útil para você? *

- Sim
- Parcialmente
- Não

De que forma o uso de planilhas eletrônicas contribuiu para o seu aprendizado de matrizes? *Explique em detalhes* *

Sua resposta

Você teve alguma dificuldade em utilizar as planilhas eletrônicas? *

- Sim
- Não

Se sim, quais dificuldades você enfrentou? *Explique em detalhes*

Sua resposta

Voltar

Próxima

Limpar formulário

Geogebra

Você já tinha algum conhecimento sobre o GeoGebra antes dos encontros? *

Sim, só o básico

Sim, avançado

Não

O uso do Geogebra para visualizar conceitos de matrizes e realizar operações matriciais foi útil para você? *

Sim

Parcialmente

Não

De que forma o uso do Geogebra contribuiu para o seu aprendizado de matrizes? Explique em detalhes *

Sua resposta

Você teve alguma dificuldade em utilizar o Geogebra? *

Sim

Não

Se sim, quais dificuldades você enfrentou?

Sua resposta

[Voltar](#) [Próxima](#) [Limpar formulário](#)

Parte 3: Avaliação da Sequência Didática

As atividades propostas nos encontros foram interessantes e desafiadoras? *

Sim

Parcialmente

Não

As atividades propostas nos encontros contribuíram para o seu aprendizado de matrizes? *

Sim

Parcialmente

Não

Você teve a oportunidade de trabalhar em equipe durante as atividades propostas no curso? *

Sim

Não

Se sim, o trabalho em equipe contribuiu para o seu aprendizado? *

Sim

Parcialmente

Não

Explique em detalhes como o trabalho em equipe contribuiu para o seu aprendizado (positivamente ou negativamente). *

Sua resposta

A professora foi clara e disponível para tirar suas dúvidas durante as aulas? *

Sim

Não

Você recomendaria essa disciplina eletiva para outros alunos? Justifique sua resposta. *

Sua resposta

[Voltar](#) [Próxima](#) [Limpar formulário](#)

Parte 4: Comentários Adicionais

Escreva livremente seus comentários, sugestões ou críticas sobre a proposta apresentada para o ensino de matrizes e o uso de recursos tecnológicos. *

Sua resposta