



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Claudiély Teixeira de Souza Guedes

ESTUDO DA MODELAGEM DA EQUAÇÃO DE REDUÇÃO DA VELOCIDADE DE UM PULSAR

Campina Grande, Paraíba, Brasil

30 de dezembro de 2023

Claudiély Teixeira de Souza Guedes

ESTUDO DA MODELAGEM DA EQUAÇÃO DE REDUÇÃO DA VELOCIDADE DE UM PULSAR

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestra em Física.

Orientador: Professor Dr. João Rafael Lucio dos Santos

Campina Grande, Paraíba, Brasil
30 de dezembro de 2023

G924e Guedes, Claudiély Teixeira de Souza.
Estudo da modelagem da equação de redução da velocidade de um pulsar / Claudiély Teixeira de Souza Guedes – Campina Grande, 2023.
59 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos."
Referências.

1. Astrofísica. 2. Estrelas de Nêutrons. 3. Pulsares. 4. Solução de Schwarzschild. 5. Índice de Frenagem. I. Santos, João Rafael Lúcio dos.
II. Título.

CDU 52(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

CLAUDIÉLY TEIXEIRA DE SOUZA GUEDES

Estudo da Modelagem da Equação de Redução de Velocidade de um Pulsar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 24/03/2023

João Rafael Lúcio dos Santos
Presidente da Comissão e Orientador

Amílcar Rabelo de Queiroz
Examinador Interno

Raissa Maria Pimentel Neves
Examinadora Externa



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 28/12/2023, às 10:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **AMILCAR RABELO DE QUEIROZ, PROFESSOR 3 GRAU**, em 28/12/2023, às 16:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

Aos meus pais e avós, e em especial a José Guedes (in memoriam)

Agradecimentos

- A Deus, por ter me preparado e me conduzido por todos os caminhos necessários que me fizeram chegar aqui, sendo minha fortaleza e meu refúgio nos momentos mais difíceis.
- Ao Prof. João Rafael, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- Aos meus pais, Ciéli e Cláudio, pelo apoio, confiança e incentivo, e por serem meu lar.
- Aos meus avós, Nevinha e Tôta, que sempre estiveram ao meu lado, na torcida e dando todo suporte necessário.
- A todos os meus amigos que estiveram comigo e me apoiaram durante todo este período com palavras de incentivo.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*Tudo tem o seu tempo determinado,
e há tempo para todo propósito debaixo do céu.
(Bíblia Sagrada, Eclesiastes 3:1-8)*

Resumo

As estrelas de nêutrons são um entre os possíveis estágios finais da vida de estrelas massivas que pertencem à sequência principal. São pequenas, porém extremamente quentes e densas, apresentam altíssimas gravidades e podem ter campos magnéticos extremos. O desenvolvimento da teoria da relatividade geral foi fundamental para o estudo e compreensão dos objetos em questão, isso porque, seria impossível compreendê-las utilizando a teoria da gravitação clássica de Isaac Newton. A métrica que caracteriza geometricamente as estrelas de nêutrons é inspirada na solução de Schwarzschild para a relatividade geral. Dentro do estudo dos pulsares, é necessário compreender que as estrelas de nêutrons têm rotação composta por duas componentes: uma de corpo sólido e outra de fluido. Desta forma, os fortes campos magnéticos exercem um efeito de desaceleração da taxa de rotação que acontece a partir do momento em que há perda no momento angular da radiação eletromagnética. Assim, o presente trabalho tem como objetivo abordar tópicos da relatividade geral, fazendo uma abordagem acerca das generalidades dos campos escalares reais, e, posteriormente, esse ferramental será aplicado para a caracterização de parâmetros utilizados na descrição de pulsares, mais especificamente no estudo da modelagem da equação índice de frenagem, a fim de obtermos curvas do índice de frenagem em função de tempo. Nestas abordagens esperamos submeter nossas propostas teóricas à dados experimentais.

Palavras-chave: Estrelas de nêutrons, pulsares, solução de Schwarzschild, índice de frenagem.

Abstract

Neutron stars are one of the possible ends of life for massive stars that belong to the main sequence. They are small but extremely hot and dense, have very high gravities and can have extreme magnetic fields. The development of the theory of general relativity was fundamental for the study and understanding of the objects in question, because it would be impossible to understand them using Isaac Newton's classical theory of gravitation. The metric that geometrically characterizes neutron stars is inspired by the Schwarzschild solution for general relativity. Within the study of pulsars, it is necessary to understand that neutron stars have a rotation composed of two components: a solid body and a fluid one. In this way, the strong magnetic fields exert a deceleration effect on the rate of rotation that occurs from the moment there is a loss in the angular momentum of the electromagnetic radiation. Thus, the present work aims to approach general relativity, making an approach about the generalities of real scalar fields, and, later, this tool will be applied for the characterization of parameters used in the description of pulsars, more specifically in the study of the display of the braking index, in order to obtain curves of the braking index as a function of time. In these approaches, we hope to submit our theoretical proposals to experimental data.

Keywords: Neutron stars, pulsars, Schwarzschild solution, braking index.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico do comportamento de uma solução do tipo kink.	20
Figura 2 – Gráfico do comportamento de uma solução do tipo lump.	20
Figura 3 – Ilustração do experimento do elevador de Einstein	30
Figura 4 – Ilustração do ponto de vista de um observador em repouso, a medida em que um feixe de luz atravessa um compartimento acelerado.	31
Figura 5 – Ilustração da trajetória do feixe de luz do ponto de vista de um observador dentro do compartimento	32
Figura 6 – Imagem óptica da galáxia de Andrômeda - representação dos braços espirais.	41
Figura 7 – Diagrama HR	42
Figura 8 – Representação do interior de uma estrela de alta massa no fim da sua vida.	43
Figura 9 – Representação do disco de acreção	44
Figura 10 – Nebulosa de Caranguejo.	45
Figura 11 – Conceção artística de uma estrela de nêutrons.	45
Figura 12 – Registo do sinal do primeiro pulsar descoberto por Jocelyn Bell; os “vales” na linha superior, em novembro de 1967.	48
Figura 13 – Modelo de uma estrela de nêutrons com suas propriedades de um pulsar.	49
Figura 14 – Índice de frenagem em função de t para PSR J1344–3333.	55
Figura 15 – Índice de frenagem a partir da equação de generalização da rotação de um pulsar	56

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	A TEORIA DE CAMPOS	14
2.1	O Formalismo Lagrangiano para uma Teoria de campos clássicos	14
2.1.1	A estabilidade linear	16
2.1.2	Método BPS	17
2.1.3	Carga Topológica	18
2.1.4	Teoria de Campos para dois campos escalares	20
2.1.5	O método da deformação	22
2.1.6	O método da extensão	23
3	GRAVITAÇÃO	25
3.1	A Teoria da Relatividade Restrita	26
3.2	A Teoria da Relatividade Geral	28
3.2.1	O Princípio da Equivalência	29
3.2.2	O Princípio da Relatividade Geral	32
3.3	Equações de Einstein	33
3.4	Derivação das Equações de Einstein	34
3.5	Solução de Schwarzschild	36
4	AS ESTRELAS DE NÊUTRONS	40
4.0.1	O ciclo de vida das Estrelas e as Estrelas de Nêutrons	40
4.1	A Estimativa elementar do equilíbrio e as massas das estrelas de nêutrons	46
4.2	Os pulsares	47
4.2.1	Idade com base no modelo para a desaceleração da rotação de um dipolo canônico	50
4.3	Generalização da equação do decaimento de rotação de um pulsar	52
5	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	59

1 Introdução

Os campos escalares têm a sua dinâmica, seu comportamento e suas interações governadas a partir de uma teoria de campo relativística [1], e são considerados os mais simples encontrados na natureza. A teoria de campo escalar pode ser aplicada para o desenvolvimento de uma física que se volta para o estudo de partículas e campos, e usada para caracterizar o fenômeno de quebra espontânea de simetria.

Tal fenômeno ganha um destaque na física, devido ao surgimento da massa para partículas elementares, e além disso, unifica as interações realizadas por tais partículas, além de poder descrever, a estrutura topológica do universo [2]. Os campos escalares permeiam o espaço-tempo e associam cada ponto desse espaço à uma grandeza física, responsável por possibilitar as interações entre as partículas distintas.

Em sua forma mais abstrata, se apresentam como energia, e, conseqüentemente, quando analisados a partir de altas energias e regimes que se voltam para comportamentos relativísticos, também são matéria. Quando analisados dentro do estudo da física clássica, os campos escalares normalmente são utilizados para representarem, por exemplo, distribuições de temperaturas, campos de pressão (em fluidos), e além disso também estão interligados à energia potencial, seja ela gravitacional ou elétrica.

A partir daí, é possível verificar a infinidade de caminhos que podem ser trilhados a fim de estudar os campos escalares, suas distinções, aplicações e finalidades [3]. Matematicamente, em outras palavras, o campo escalar pode ser definido e delimitado por um conjunto de pontos que estão diretamente associados a uma função escalar do tipo $f(r)$, onde r é a coordenada de posição no espaço.

Através da utilização de formalismos como o lagrangiano e hamiltoniano, inúmeros fenômenos físicos podem ser descritos, desde a interação microscópica entre partículas como também a interação gravitacional existente em larga escala. Mediante sua evolução e descobertas, foi possível utilizá-la como ferramenta para a comprovação da teoria da relatividade de Einstein, e da descrição da evolução do Cosmos.

A interação gravitacional utiliza uma descrição na qual o conceito de força não é utilizado, ou seja, ao invés de agir através de uma força característica, a presença de um campo gravitacional é representada por uma deformação que ocorre na estrutura do espaço-tempo [4]. É importante reforçar que esta deformação preserva o caráter pseudo-Riemanniano do espaço-tempo plano de Minkowski da Relatividade Especial, e a partir daí é possível compreender que o espaço-tempo que não apresenta deformações, não tem a presença de gravitação.

Em outras palavras, supõe-se que a presença de um campo gravitacional produz uma curvatura, mas nenhuma outra deformação no espaço-tempo. Desta forma, uma partícula livre no espaço plano vai sempre seguir uma linha reta, ou seja, uma curva com direção constante, que é conhecida como geodésica, termo muito utilizado para compreender a relatividade geral. Como o único efeito da interação gravitacional, é, portanto, dobrar o espaço-tempo para dotá-lo de curvatura, toda partícula que for submetida exclusivamente à gravidade seguirá uma geodésica do espaço-tempo deformado [5].

A teoria da relatividade geral estabelece que a interação gravitacional é descrita por uma geometrização do espaço-tempo [6]. Einstein começou a enfrentar o problema relacionado ao fato de haver discrepâncias marcantes entre a gravitação proposta por Isaac Newton e os dados experimentais. É justamente a partir da contradição teórica entre a gravidade de Newton e a teoria da relatividade restrita, que nasce a teoria da relatividade geral. A busca por uma teoria relativística da gravitação leva a uma ruptura radical com a gravitação newtoniana.

O modelo cosmológico padrão, o Big Bang, afirma que em algum momento o universo em sua formação estava a um estado extremo de temperatura e densidade, no qual deu origem a um plasma de quarks e glúons, composto por partículas elementares dissociadas, assim como os elétrons livres. Mediante a expansão que continuava acontecendo, sucedeu-se a formação das primeiras estrelas, e, posteriormente, os demais corpos celestes. Tal modelo padrão não oferece todas as respostas, como por exemplo, para explicar uma expansão acelerada em um curto intervalo de tempo.

Quando se menciona o universo de modo geral, é importante destacar a importância e o grande interesse em se compreender a natureza das estrelas. Tal curiosidade surgiu antes mesmo da definição do termo ciência, e graças às recentes observações e modelagens teóricas, podemos compreender o ciclo de vida das estrelas. É a partir dele, que podemos chegar à definição das estrelas de nêutrons, que são objetos de dimensões pequenas, porém extremamente quentes e densas, e que apresentam altíssimas gravidades e podem ter campos magnéticos extremos [7].

A partir da compreensão das estrelas de nêutrons, podemos chegar à definição de um pulsar. Sabe-se que toda estrela possui um campo magnético que em geral é fraco. Entretanto, quando o núcleo de uma estrela é comprimido até atingir o estágio de uma estrela de nêutrons, o fraco campo magnético é também comprimido, onde as linhas de campo se adensam, tornando o campo magnético muito intenso. Dessa forma, um campo magnético forte, combinado com alta rotação produz fortes correntes elétricas na superfície da estrela de nêutrons as quais são responsáveis pela emissão de rajadas periódicas de radiação síncrotron. Estrelas em rotação que emitem esse tipo de rajada de radiação são conhecidas como pulsares.

O físico alemão Karl Schwarzschild foi o responsável por trabalhar na solução das

equações de Einstein para o caso no vácuo, utilizando uma versão anterior dos trabalhos de Einstein, onde em 1916 houve a divulgação da primeira solução, que recebeu o seu nome [8]. A solução de Schwarzschild providenciou análises que posteriormente seriam utilizadas para testar a validade da relatividade geral de Einstein. Os chamados testes clássicos deram força à teoria. A propulsão de Einstein ao estrelato veio a partir daí.

Para explicar o decaimento da frequência de rotação dos pulsares, normalmente se utiliza o modelo canônico, que considera que tais objetos são descritos como dipolos magnéticos rotacionando [9]. Aplicando a expansão em Taylor para o fator de escala, da Cosmologia, é possível obter parâmetros dos termos desta expansão que estejam relacionados diretamente a física dos pulsares, e um destes modelos é o próprio índice de frenagem. Desta forma, é possível generalizar a equação de desaceleração da rotação de um pulsar, e obter curvas de decaimento de rotação, além de ser possível estudar outras características dos pulsares, em geral.

O presente trabalho foi dividido da seguinte maneira: o capítulo 1 aborda a teoria de campos, e suas especificidades; o capítulo 2 traz uma abordagem da relatividade (restrita e geral) com seus princípios, além das equações de Einstein e a derivação destas equações; o terceiro capítulo nos direciona para uma abordagem astrofísica, mais precisamente voltada para o estudo das estrelas de nêutrons e a solução de Schwarzschild.

O capítulo 4 traz a problemática do nosso estudo, que está relacionada a análise de parâmetros cosmológicos e suas aplicações ao estudo dos pulsares. Assim, pretendemos, a partir de dados experimentais, generalizar a equação do índice de frenagem, adotando um superpotencial, para que seja possível obter curvas do índice de frenagem em função do tempo para pulsares. Temos como perspectivas realizar a caracterização de pulsares através de análises de parâmetros físicos.

2 A teoria de Campos

A teoria de campos é de fundamental relevância para a compreensão das interações das partículas elementares. É a partir do uso de formalismos como o lagrangiano e hamiltoniano que inúmeros fenômenos físicos podem ser descritos, desde a interação microscópica entre inúmeras partículas como também a interação gravitacional existente em larga escala [10]. O estudo da teoria clássica de campos se volta principalmente à busca por soluções das equações de movimento que advém da minimização da ação.

A ideia de descrever fenômenos de natureza física com campos não é nova, entretanto, seu desenvolvimento matemático é razoavelmente novo. Ela surgiu mais explicitamente através das pesquisas de Faraday e Maxwell, e a partir de então, desenvolveu-se o eletromagnetismo e a relatividade geral com campos clássicos e muitos outros, usando o formalismo que fora obtido para demais fenômenos quânticos que fazem uso de tal abordagem.

A teoria de campos é um importantíssimo suporte para uma série de teorias conhecidas. Mediante sua evolução e descobertas, foi possível utilizá-la como ferramenta para a descrição da relatividade, de Albert Einstein, e boa parte da mecânica quântica. Além disso, consegue ir desde a descrição de campos em níveis elementares -prótons e elétrons-, (que conseguiu demonstrar a existência da anti-matéria), até as teses de Cosmologia. De fato, é uma questão de escalas.

Neste capítulo, faremos uma breve revisão acerca dos modelos de 1 e 2 campos escalares estáticos, enfatizando o lagrangiano e o hamiltoniano, para descrever soluções importantes dentro do ramo, além de compreender a estabilidade linear, o método BPS, a carga topológica, e, posteriormente, a teoria de campos para 2 campos escalares, e os novos métodos (deformação e extensão).

2.1 O Formalismo Lagrangiano para uma Teoria de campos clássicos

A mecânica lagrangiana é uma forte aliada do estudo da variação de movimentos de partículas, tendo em vista que estas são indivisíveis, e podem estar localizadas em diversos e distintos pontos finitos do espaço, e em qualquer dimensão [11]. O formalismo lagrangiano surge com uma proposta inovadora e de fácil manuseio para o estudo de aplicação a baixas e altas velocidades (velocidade relativística). Ele é introduzido com muita simplicidade na solução de problemas da mecânica que seriam de difícil solução, se tivéssemos que necessariamente utilizar o formalismo proposto por Newton.

As equações de Lagrange possuem a vantagem adicional de serem válidas para uma escolha

arbitraria das coordenadas generalizadas, a escolha em cada situação específica sendo ditada por razões de conveniência e simplicidade. É preciso salientar, no entanto, que a energia cinética T e a energia potencial V devem ambas ser expressas relativamente a um mesmo referencial inercial. [3]

Sendo um campo $\phi(x, t)$ considerado como uma entidade que possui infinitos graus de liberdade. A densidade lagrangiana \mathcal{L} , rege um sistema contínuo descrito por um campo ϕ . \mathcal{L} pode depender, portanto, neste caso do próprio campo ϕ da coordenada x do campo, do tempo t e das derivadas espaciais e temporais.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t}, x, t \right). \quad (2.1)$$

Integrando a densidade função \mathcal{L} , em todo o espaço, obtemos a lagrangiana do sistema

$$L = \int \mathcal{L} dx. \quad (2.2)$$

Para que seja possível encontrarmos as equações de movimento para o campo, usamos o princípio variacional de Hamilton, o qual afirma que a quantidade denominada ação S dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2.3)$$

é uma função estacionária em relação a trajetória descrita pelo sistema, ou ainda,

$$\delta S = 0. \quad (2.4)$$

Substituindo a equação (2.2) na variação acima, temos

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial t}, x, t \right) = 0. \quad (2.5)$$

Integrando a função acima por partes, considerando que as variações de campos se anulam nos extremos dos intervalos espaciais e temporais teremos

$$\delta \phi(x, t_1) = \delta \phi(x, t_2) = \delta \phi(x_1, t) = \delta \phi(x_2, t) = 0, \quad (2.6)$$

e ainda,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)} \right) \right) \delta \phi = 0, \quad (2.7)$$

pela arbitrariedade $\delta\phi$, essa equação só é satisfeita se,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial t})} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x})} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (2.8)$$

que é conhecida como a equação de Euler-Lagrange ou equação de movimento para o campo em questão, onde consideramos $g_{\mu\nu} = (1, -1)$. Dessas equações diferenciais parciais, podemos concluir que, em um sistema conservativo, a variação entre as Lagrangianas de dois pontos consecutivos em relação ao tempo é nula.

Caso o campo escalar real seja estático, ou seja, $\phi = \phi(x)$, e

$$\mathcal{L} = -\frac{\phi'^2}{2} - V(x); \quad \phi' = \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.9)$$

ficamos com a seguinte equação de movimento

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.10)$$

cujas soluções serão exploradas e caracterizadas ao longo deste capítulo.

2.1.1 A estabilidade linear

Um estudo interessante que agrega valores à análise e compreensão de campos escalares, é feito a partir da aplicação de perturbações na solução do campo, a fim de analisar se o modelo apresenta estabilidade linear ou não [12]. É a partir daí, que é possível verificar se um determinado modelo apresenta consistência física.

Dessa forma, é possível descrever a estabilidade linear como sendo a solução do campo que é composta pela soma da solução estática mais uma função perturbadora que vai depender das coordenadas espaciais e do tempo.

Uma perturbação na solução estática do campo pode ser escrita como

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t) \quad (2.11)$$

onde $\phi_s(x)$ é a solução estática e $\eta(x, t)$ é a perturbação, que vai depender de ambos os termos (espaço, e tempo).

A equação de movimento que advém da densidade da lagrangiana do campo $\phi(x, t)$ é dada por

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.12)$$

Se considerarmos pequenas flutuações no potencial, em torno da solução estática, teremos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.13)$$

De acordo com a equação de Euler-Lagrange, sabemos que os dois últimos termos da equação acima se cancelam, logo

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (2.14)$$

Usando o método da separação de variáveis através do Ansatz, temos

$$\eta(x, t) = \sum_n^\eta n(x) \cos(w_n t). \quad (2.15)$$

A equação (2.12) é reescrita como

$$-\frac{d^2 \eta_n}{dx^2} + \mu(x) \eta_n = w_n^2 \eta_n, \quad (2.16)$$

sabendo que, $\mu(x) = \frac{d^2 V}{d\phi^2}$.

A última expressão é uma equação tipo Schrödinger independente do tempo para a função $\eta_n(x)$, com autovalores dados por w_n^2 . Ao substituir o potencial, determinar quem é $\mu(x)$, é possível resolver a equação acima de autovalores e, dessa forma, descobrir o formato da função $\eta(x, t)$.

2.1.2 Método BPS

O método BPS é um método alternativo, que permite a investigação da presença de defeitos topológicos, ou seja, as configurações da matéria formada nas transições do universo, nos modelos dos campos escalares. As soluções obtidas através da utilização deste método são definidas por dois estados de mínima energia, que conseguem identificar os setores topológicos do modelo.

Em outras palavras, a partir do método BPS, é possível encontrar soluções para as equações de movimento em segunda ordem, utilizando equações de primeira ordem que surgem da minimização da energia [13]. Também é possível encontrar a energia mínima, não-nula do sistema, chamada de Energia (BPS). As soluções aceitáveis, na física, são as que fornecem energia finita.

Na configuração de campos estáticos, a densidade de energia é dada por

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.17)$$

Para que seja possível encontrar a energia total do sistema, devemos integrar a densidade de energia por todo o espaço, isto é

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.18)$$

Completando um quadrado perfeito na equação acima, determinamos que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \pm \sqrt{2V(\phi)} \right]^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (2.19)$$

Ao impormos o vínculo

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.20)$$

a equação para a energia total E passa a ser escrita como

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (2.21)$$

Agora, permita-nos considerar que o potencial $V(\phi)$ é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (2.22)$$

onde a função $W(\phi)$ é uma função suave (que possui derivada de todas as ordens) do campo escalar ϕ , e, $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$. Consequentemente, a equação de movimento para o campo escalar ϕ é tal que

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (2.23)$$

cujas soluções também satisfazem as equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.24)$$

Já a energia para um campo escalar real estático pode ser escrita em termos do superpotencial $W(\phi)$, como

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) dx = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dx} dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|. \quad (2.25)$$

Da equação acima é possível concluir que para determinar o valor da energia de qualquer solução, apenas é necessário calcular o superpotencial, nos valores de $\phi(x)$. Quando as equações de primeira ordem forem satisfeitas, o menor valor da energia é verificado. Isso é necessário para que seja possível comprovar que os estados BPS apresentam mínima energia e são estáveis.

Além disso, é importante ressaltar que o comportamento da energia mínima do sistema (Energia BPS) não vai depender das características locais da solução, mas da forma como os campos se comportam nos extremos.

2.1.3 Carga Topológica

A carga topológica é uma quantidade física de grande importância para a caracterização de alguns tipos de soluções do campo [12]. Ela surge a partir da topologia do

sistema, onde é introduzida uma corrente conservada J_t^μ para uma teoria de campo escalar clássica. Ela não possui, portanto, natureza elétrica e sim é gerada a partir da introdução da topologia no sistema. Essa carga pode ser determinada a partir da corrente topológica, que é definida em sistemas formados por um campo escalar estático como

$$J_t^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi). \quad (2.26)$$

Para descrevermos a carga topológica, faz-se o uso do pseudo tensor de Levi-Civita, no qual as componentes do tensor anti-simétrico $\epsilon_{\mu\nu}$ são dadas por, $\epsilon_{00} = \epsilon_{11} = 0$ e $\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1$.

Como essa corrente é conservada, devemos ter

$$\partial_\mu J_t^\mu = 0. \quad (2.27)$$

Consequentemente, isso vai resultar na existência de uma carga (Q_t) que pode ser obtida quando integramos a componente zero da corrente topológica por todo o espaço

$$Q_t = \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dx} dx = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))| = E_{BPS}. \quad (2.28)$$

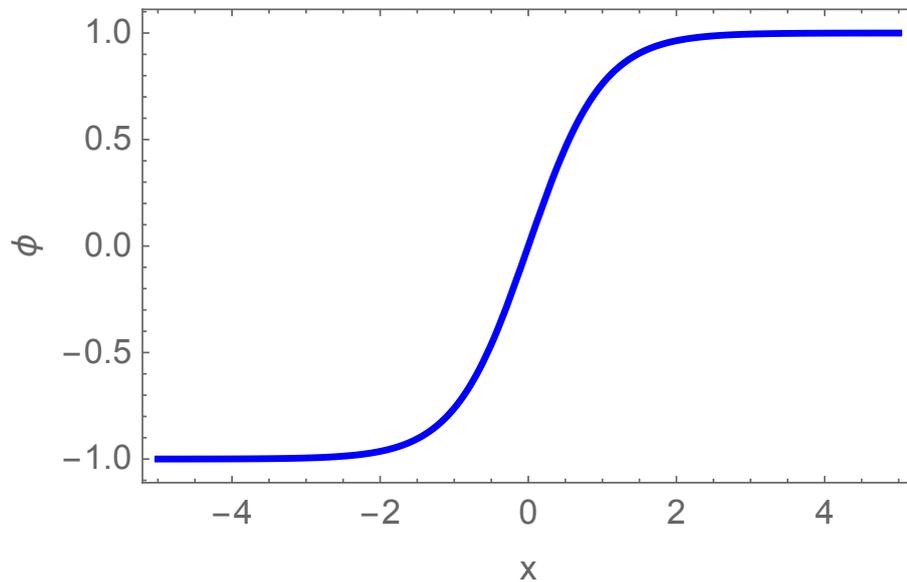
Tal resultado é obtido a partir do momento em que consideramos o campo estático. Analogamente à energia BPS, também é possível verificar que a carga topológica só vai depender das propriedades assintóticas do campo ϕ .

Além disso, também é possível classificar os tipos de soluções que a carga topológica caracteriza, que são: os kinks, quando o valor obtido é diferente de zero, que são, portanto, chamados de topológicos, e os lumps, que são as soluções não-topológicas [12]. Lembrando que, o campo ϕ só terá valor diferente de zero se $\phi(\infty)$ for diferente de $\phi(-\infty)$.

Os defeitos do tipo kink se comportam de forma diferente a medida em que nos afastamos do centro da solução em direções opostas, conforme é possível visualizar na figura 1.

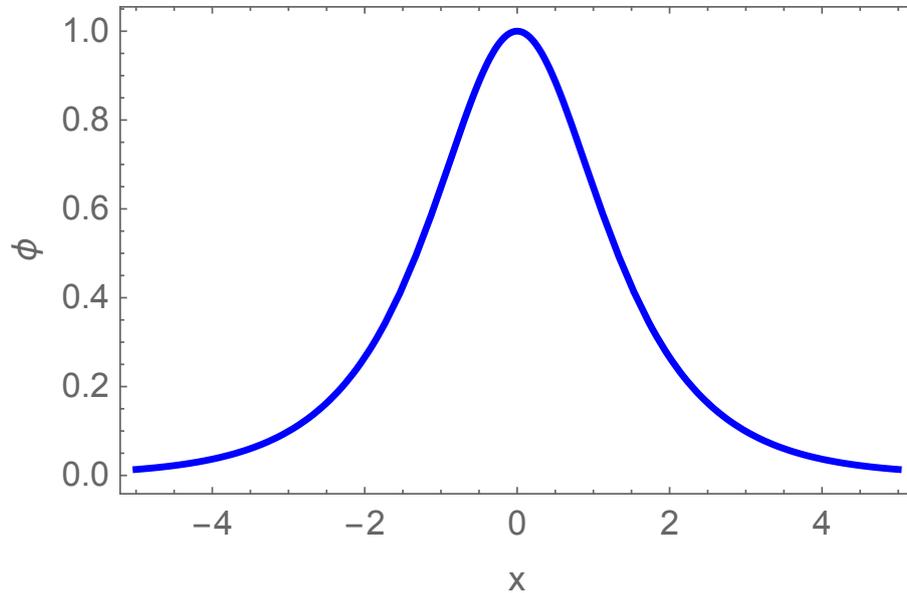
Os defeitos do tipo lump, devido a não possuírem uma carga topológica associada, são instáveis por argumentos topológicos, conforme é possível visualizar na figura 2.

Figura 1 – Gráfico do comportamento de uma solução do tipo kink.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2 – Gráfico do comportamento de uma solução do tipo lump.



Fonte: Elaborada pelo autor

2.1.4 Teoria de Campos para dois campos escalares

Na situação em que temos dois campos escalares acoplados, aparece o problema no que diz respeito a integração das equações de movimento, por causa da dificuldade de equações diferenciais de segunda ordem acopladas e não lineares, ou seja, um sistema constituído pela combinação de funções algébricas e funções transcendentais.

Entretanto, de maneira análoga aos casos nos quais se consideram um único campo escalar, é possível resolver as equações de movimento por equações diferenciais de primeira ordem, nas quais as soluções são consideradas estáveis (solução BPS), que vai ser responsável por minimizar a energia [12].

De modo geral, para que seja possível descrever um modelo comum considerando dois campos escalares, o formalismo apresentado e utilizado anteriormente não difere de forma grandiosa com o formalismo utilizado para o estudo de dois campos escalares. Iniciando a análise pela densidade lagrangiana, temos que

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi). \quad (2.29)$$

nas quais, as equações de movimento para campos estáticos são

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}; \quad (2.30)$$

e

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}; \quad (2.31)$$

sabendo que $V = V(\phi, \chi)$.

Sabe-se que a densidade de energia de um sistema estático é dada por

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi), \quad (2.32)$$

de onde podemos escrever a energia total do sistema como sendo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] dx. \quad (2.33)$$

Considerando $V(\phi, \chi)$ positivo, temos

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (W_\phi)^2 + \frac{1}{2} (W_\chi)^2, \quad (2.34)$$

onde, W é uma função do campo escalar e é um superpotencial. As expressões dos superpotenciais possuem grande utilidade, pois, a partir delas, é possível obter expressões para as energias relacionadas as estruturas dos defeitos topológicos.

Substituindo (2.33) em (2.32), temos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + (W_\phi)^2 + (W_\chi)^2 \right] dx. \quad (2.35)$$

Fazendo uso do método BPS e analisando a condição que minimiza a energia, teremos, portanto

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] dx \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right], \quad (2.36)$$

de onde, para satisfazer a condição acima, temos que ter

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (2.37)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi. \quad (2.38)$$

A energia total do sistema será dada como

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right) dx = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} W(\phi, \chi) dx, \quad (2.39)$$

ou ainda, como:

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \quad (2.40)$$

2.1.5 O método da deformação

Alguns potenciais não propiciam uma descrição analítica (descrição completa do sistema no qual se está analisando), o que dificulta o entendimento mais detalhado das propriedades de alguns modelos. Logo, surge a necessidade de buscar um método que possa gerar potenciais com soluções analíticas e de interesse físico.

Um método muito eficaz é o denominado método de deformação, onde, a partir de um potencial e de uma solução de um modelo já conhecido, é possível gerar novos modelos, a partir da modificação do potencial conhecido, usando como auxílio, uma função deformadora [14]. A principal vantagem desse método está no fato de que não há necessidade de recorrer à simulações computacionais ou a análises numéricas para que seja possível descrever características e/ou propriedades de um modelo.

Além disso, é possível resolver equações diferenciais não-lineares em sistemas com integrais utilizando o método da deformação, por exemplo, equações que descrevem fenômenos ondulatórios. A partir daí, é possível determinar soluções do novo potencial pelas soluções que já são conhecidas, e também pela função deformadora inversa, fornecendo, portanto, mais de um caminho para obter soluções específicas.

Sabemos, mediante análise das seções anteriores, que para um potencial $V(\phi)$, teremos soluções do tipo $\phi(x)$. A partir, novamente, da utilização da densidade lagrangiana para campos reais, também já conhecida como

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.41)$$

é possível encontrar a equação de movimento para campos estáticos

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (2.42)$$

de onde pode-se tirar as soluções do tipo:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi} \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.43)$$

Além disso, também é possível considerar um outro modelo, que é descrito por um determinado campo χ , considerando a densidade lagrangiana como sendo

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi). \quad (2.44)$$

no qual, para a solução estática $\chi = \chi(x)$, a equação de movimento é dada como

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{dV}{d\chi} \quad (2.45)$$

que é satisfeita por soluções da equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\chi}{dx} = \sqrt{2V(\chi)}. \quad (2.46)$$

Se considerarmos ϕ como uma função de χ , onde $\phi = f(\chi)$, as relações

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} \Rightarrow \frac{d\chi}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{d\chi}} \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.47)$$

passam a ser válidas, logo, levando a equação (2.46) ao quadrado, teremos

$$\left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2 = \frac{1}{f_\chi^2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 \quad (2.48)$$

e sabendo que $f_\chi = \frac{df}{d\chi}$. Substituindo (2.42) em (2.45), temos

$$V(\chi) = V \frac{[\phi = f(\chi)]}{f_\chi^2} \quad (2.49)$$

onde $f(\chi)$ é a função deformadora. Como mencionado no início desta seção, também podemos obter a inversa da função deformadora, dada por

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)). \quad (2.50)$$

2.1.6 O método da extensão

O método da extensão se fundamenta a partir do método da deformação, para que seja possível construir modelos de dois campos escalares a partir de um modelo mais simples, descrito por um campo escalar único. Fazendo uma análise do método de extensão de modelos para dois campos escalares, e, inicialmente utilizando a derivada de $\phi = f(\chi)$ com relação a χ , temos

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx}. \quad (2.51)$$

A equação de mapeamento entre dois modelos de um campo fornece a seguinte relação

$$W_\chi = W_\phi \frac{(\phi = f(\chi))}{f_\chi} \quad (2.52)$$

Ao compararmos com a equação (2.50), temos

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{\phi'(x)}{\chi'(x)} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi)}{W_\chi(\chi)} \quad (2.53)$$

podemos tirar a ideia do método a partir da análise acima, que consistem em utilizar a função de deformação para reescrever a função (2.52), como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)} \quad (2.54)$$

que é uma relação entre as equações diferenciais de primeira ordem do modelo de dois campos efetivos. Tais equações para os campos ϕ e χ podem ser reescritas de três formas diferentes, e equivalentes. Com relação ao campo ϕ

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad \phi' = W_\phi(\chi), \quad \phi' = W_\phi(\phi, \chi), \quad (2.55)$$

e de maneira análoga para o campo χ :

$$\chi' = W_\chi(\phi), \quad \chi' = W_\chi(\chi), \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi), \quad (2.56)$$

de onde podemos definir $W_\phi(\phi)$ e $W_\chi(\chi)$ da seguinte maneira: $W_\phi = a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi)$ e $W_\chi = b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)$. Deste modo, a equação diferencial relativa ao modelo de dois campos terá a forma

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi) + c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi)}{b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)}, \quad (2.57)$$

assumindo os parâmetros a_i , b_i e c_i , onde $i = 1, 2, 3 \dots$ de forma que estes possam seguir os vínculos $a_1 + a_2 + a_3 = 1$; $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ e $c_1 + c_2 + c_3 = 0$.

A função g é uma função de contra-peso, e pode ser determinada a partir da seguinte propriedade:

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}, \quad (2.58)$$

que resulta em

$$b_2 W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3 W_{\chi\phi}(\phi) = a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + a_2 W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi). \quad (2.59)$$

A partir da equação acima, é possível calcular a função contra-peso g , determinando, portanto, $W(\phi, \chi)$.

3 Gravitação

O espaço tridimensional euclidiano é a sua própria representação geométrica natural, considerando a mecânica Newtoniana com a relatividade de Galileu. A distância entre dois pontos é sempre a mesma, independentemente do referencial inercial que está sendo adotado.

Analogamente, a relatividade especial é baseada em um espaço quadrimensional, onde o tempo desempenha o papel de quarta coordenada [15]. Considerando os efeitos da gravidade nas partículas, observa-se que na mecânica de Newton uma força pode acelerar uma partícula a baixas velocidades, enquanto que na relativística, a velocidade limite é a da luz.

Na Mecânica newtoniana uma força pode acelerar uma partícula a baixas velocidades, enquanto que na Relatividade, a velocidade limite é c . Uma outra dificuldade com a Mecânica Clássica é que ela admite forças de ação a distância, enquanto isso exige que as forças de ação e reação sejam iguais. Tal igualdade de ação e reação não tem sentido na Relatividade, exceto para forças de contato, porque a simultaneidade de eventos separados é relativa [16].

A busca de uma teoria relativística da gravitação leva a uma brusca ruptura com a gravitação de Newton [17]. Além de não conseguir explicar como a força da gravidade é transmitida de um corpo a outro, Newton interpretava a gravidade como uma força de atração entre corpos, que era diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias entre elas.

As equações de Maxwell, conseguem descrever como os campos elétricos e magnéticos são gerados por cargas, correntes e as possíveis mudanças que ocorrem nesses campos [18]. As equações diferenciais foram protagonistas na primeira definição real do comportamento da luz como uma onda eletromagnética, que se propaga com velocidade constante no vácuo, além disso, as equações de Maxwell para a onda eletromagnética se mantinham invariantes sob as transformações de Lorentz. Elas foram um dos fatores que levaram a motivação para o surgimento da relatividade especial.

De acordo com a mecânica Newtoniana (que satisfazia as transformações de Galileu, no qual o tempo era absoluto), a velocidade da luz seria diferente em diferentes referenciais inerciais. Entretanto, muitas tentativas a fim de provar esta teoria foram feitas e nenhum

sucesso foi obtido no tocante à velocidade relativa da luz.

Ernst Mach mostrou que o tempo absoluto não existe. Ele acreditava que, se algo "A" sofre variação no tempo, "A" depende de condições de uma outra coisa, "B". Um exemplo está relacionado a inércia de um corpo. Para Mach, a inércia não é propriedade do corpo em si, mas sim, um resultado da sua interação com os corpos distantes do universo. Ou seja, todas as coisas são independentes e devido a isso não há como medir o tempo absoluto [19].

Posteriormente essas ideias foram chamadas por Einstein de "princípio de Mach". As observações de Mach fizeram com que Einstein não somente revisasse os conceitos de espaço e tempo, como também desse início a uma busca pelas equações que descreveriam o campo gravitacional, em suas características gerais e específicas, relacionando as grandezas espaço-tempo, energia, momento, entre outros.

A grande intervenção de Einstein em relação a teoria newtoniana da gravitação universal foi considerar que os conceitos de espaço e tempo não deveriam ter caráter absoluto, nem tampouco, serem analisados de forma independentes, mas sim, serem descritos por uma geometria em um espaço-tempo quadridimensional. Com o surgimento da teoria da gravidade de Einstein, a mecânica newtoniana e a visão de um espaço imutável e vazio, onde os eventos do mundo se desdobram, são substituídas pela ideia de espaço-tempo como uma entidade flexível e deformável pela matéria nele existente.

Se as leis de Newton do movimento das partículas estivessem totalmente corretas, alguém poderia acelerar uma partícula para se mover mais rápido que a luz, violando um dos princípios básicos da relatividade. É a partir daí que as leis do movimento das partículas na teoria da relatividade devem ser diferentes da teoria newtoniana.

3.1 A Teoria da Relatividade Restrita

A TRR foi descrita por Albert Einstein em 1905, sendo desenvolvida entre o final do século XIX e início do século XX. Alguns conceitos devem ser compreendidos para que se entenda posteriormente os parâmetros da teoria, dentre os quais está a noção de referencial, que é um sistema de coordenadas para as posições no espaço, e também é importante considerar que um referencial movendo-se com velocidade constante em relação a um referencial inercial é também um referencial inercial.

Na relatividade, todas as leis da natureza são consideradas as mesmas em todos os referenciais inerciais [17]. A generalização e síntese da mecânica clássica de Newton com a eletrodinâmica de Maxwell originou a teoria da relatividade restrita, que postulou que:

1. As leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (denominado postulado da relatividade);

2. A velocidade da luz é sempre a mesma, e isso independe do referencial no qual é medido (chamado de postulado da constância da velocidade da luz).

O postulado da Relatividade apenas generaliza a relatividade newtoniana, fazendo ser válida para toda a física. Já o postulado da constância da velocidade da luz só é procedente se os conceitos de relatividade da simultaneidade, relatividade do tempo e relatividade do espaço forem aceitos.

A relatividade da simultaneidade permite que a ordem temporal dos eventos possa ser diferente para observadores que estejam em referenciais inerciais diferentes [15]. A relatividade do tempo, interfere diretamente no intervalo de tempo entre dois eventos, por exemplo, relógios em movimento marcam intervalos de tempos menores do que relógios em repouso. Já a relatividade do espaço nos mostra que as medidas das coordenadas de dois pontos feitas simultaneamente em um dos referenciais não são simultâneas no outro referencial.

Os parâmetros citados acima, são consequências da teoria da Relatividade Restrita para a cinemática, ou seja, envolvem apenas os conceitos de espaço-tempo e mais alguns que dependem deles, como por exemplo, velocidade, aceleração, período, dentre outros. Entretanto, além de mudanças na cinemática, também observam-se mudanças na dinâmica dos corpos, que passa a ser chamada de dinâmica relativística, que estuda as relações existentes entre força, energia, massa, dentre outros, quando são medidos em diferentes referenciais.

Os dois efeitos principais na dinâmica relativística são: o aumento da massa com a velocidade, e a relação entre massa e energia, que resultam em uma proporcionalidade entre ambas. A relação é descrita como

$$E = m c^2, \quad (3.1)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e equivale a $3.10^8 km/s$. A massa é a medida da inércia, e a energia é a medida de movimento.

Com isso, a TRR implica que espaço e tempo estão diretamente interligados. Isso fez com que os conceitos de espaço-tempo da Mecânica Clássica fossem totalmente modificados. Porém, a teoria da relatividade restrita não engloba referenciais acelerados, impossibilitando a descrição de campos gravitacionais, pois, assim como a Mecânica newtoniana, consegue descrever apenas sistemas de referenciais inerciais, ou seja, sistemas em movimento retilíneo e uniforme ou em repouso.

Dessa forma, Einstein chegou a conclusão de que a Teoria da Relatividade Restrita refere-se a regiões galileanas, ou seja, regiões onde não existe campo gravitacional. Isso justifica os sistemas físicos com velocidades próximas da velocidade da luz, sem levar em conta o campo gravitacional.

Einstein conseguiu perceber que seria possível discutir as leis da natureza dentro do conceito da relatividade, mas havia um problema: teria que construir uma teoria mais geral, para que fosse possível englobar todos os referenciais e não apenas os inerciais [20]. Tanto o espaço euclidiano, como o espaço-tempo da relatividade restrita são espaços planos. Ao procurar compatibilizar a interação gravitacional com as ideias da teoria da relatividade restrita, Einstein é levado a renunciar o espaço-tempo plano, e, com isso, conseguiu desenvolver, mediante a inclusão da geometria não euclidiana, equações que descrevem o espaço curvo, dependentes do tempo.

Entre as consequências importantes da lei da Relatividade estão os fenômenos de cisão nuclear (do urânio), nos reatores nucleares e de fusão (de átomos de hidrogênio) no interior das estrelas. Em ambos os casos, há uma perda de massa que é convertida em energia.

3.2 A Teoria da Relatividade Geral

Para que seja possível generalizar o princípio da relatividade geral, à todos os campos gravitacionais, é preciso analisar, primeiramente, o caráter universal da gravitação, ou seja, a sua natureza. Sabendo que ela é única entre todas as forças, é possível concluir que todos os corpos caem ao longo da mesma trajetória no espaço, independentemente da sua massa, e da sua constituição.

Isso faz com que a noção de gravidade como uma força, seja substituída por uma propriedade geométrica do espaço-tempo, dentro do contexto da relatividade [21]. Einstein se apropriou disso. Para isso, ele fez uma análise minuciosa entre os conceitos de massa inercial e massa gravitacional.

Sabendo que as três leis de Newton são a base da Mecânica Clássica, e fazendo uma análise minuciosa acerca da segunda lei, conhecida como o princípio fundamental da dinâmica, e dada por:

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad (3.2)$$

é possível obtermos uma leitura completa acerca dos termos da equação, na qual Newton se refere a força motriz como sendo a força que atua em um determinado intervalo de tempo apenas para modificar o estado do corpo. A massa, descrita na segunda lei de Newton, mede a tendência que um corpo tem para conservar o seu movimento "natural", ou seja, retilíneo e uniforme. Isso reforça a teoria que afirma que quanto maior a massa de um corpo, maior sua inércia, conseqüentemente faz-se necessário um esforço maior seja para tirá-lo do repouso, fazê-lo parar ou até mesmo mudar a sua direção. Esse é o conceito de massa inercial.

Entretanto, quando se fala em forças, é preciso analisá-las o cenário nas quais

estas atuam, e compreender os diferentes tipos existentes na natureza, que influenciam de maneira direta ou indireta no comportamento dos corpos (seja movimento ou repouso). Dentre as forças conhecidas, está a força peso, uma força que também depende da massa do corpo, porém, a massa não é o fator determinante, para que o corpo preserve o seu movimento natural, já que, a partir do momento em que um corpo está submetido a força peso, está no conceito de queda livre. Portanto, pode-se afirmar que a força peso aparece como sendo uma reação à ação da gravidade e isso é a definição de massa gravitacional.

A teoria da relatividade geral contempla eventos ocorridos entre referenciais acelerados ou não [21], e por esta razão, é que se afirma que a TRR é um caso particular da TRG. A igualdade entre as duas massas é o que irá se tornar uma das bases da Teoria da Relatividade Geral, descrita no princípio da equivalência mais a frente.

Einstein conseguiu propor uma ideia, na qual afirmava que os observadores em queda livre num campo gravítico iriam se identificar como observadores inerciais da teoria da relatividade restrita, no que diz respeito as observações locais. Entretanto, ao contrário da TRR, dois observadores em queda livre não iriam manter uma velocidade uniforme entre si, por causa dos efeitos não locais do campo onde há presença da gravidade. Refletindo sobre isso, Einstein então, concluiu:

“...Se um homem cai livremente, não sente o próprio peso.” Fiquei abismado. Essa experiência simples de pensamento exerceu uma impressão profunda sobre mim. Ela me conduziu à teoria da gravitação...”. [22].

Logo, dois corpos em queda livre na superfície da Terra não descrevem trajetórias paralelas, pois, devido ao campo central, suas trajetórias irão convergir para o centro de massa. E para justificar estas diferenças frente a teoria da Relatividade Restrita, Einstein identifica que a gravidade é uma modificação em relação a geometria euclidiana, e conclui que ela produz a curvatura do espaço-tempo.

O próximo passo de Einstein, foi conseguir introduzir à Teoria da Relatividade, a geometria não euclidiana, que foi desenvolvida por Riemann. A geometria de Riemann, permitiu que Einstein pudesse desenvolver as equações que descrevem o espaço curvo dependentes do tempo, ou seja, as equações do espaço-tempo.

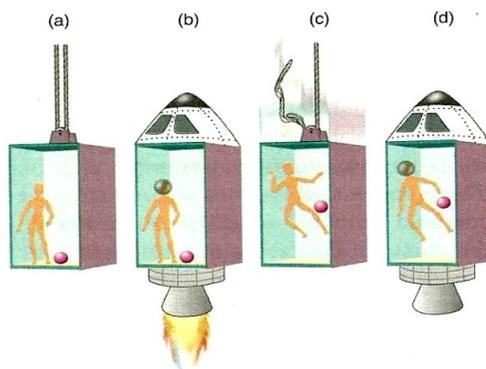
3.2.1 O Princípio da Equivalência

O princípio da equivalência é a base imprescindível da Teoria da Relatividade Geral [23]. Na seção 3.1, definimos os conceitos de massa adotados na mecânica clássica (massa inercial e massa gravitacional). Não é intuitivo definir a igualdade entre ambas, mas fazendo uma análise acerca das características experimentais de Galileu e de Newton

no que diz respeito ao estudo do movimento dos corpos, é possível chegar a uma definição de igualdade.

Einstein idealizou um experimento que é conhecido como "o elevador de Einstein", que conseguiu descrever a forma na qual o campo gravitacional (onde a massa gravitacional se manifesta), é equivalente ao movimento acelerado (onde temos a massa inercial). Podemos visualizar o experimento na figura 3

Figura 3 – Ilustração do experimento do elevador de Einstein



Fonte: <<https://oxxdaquestaoinkmixxresponde.blogspot.com/2017/07/criatividade-albert-einstein-e-teoria.html>>, 2017.

O experimento é explicado da seguinte maneira: Um observador é posicionado no interior de um elevador fechado. Se o elevador estiver parado na superfície da Terra, (como representado em (a)), o observador irá sentir o seu peso usual. Dessa forma, caso um objeto seja solto, ele irá cair aceleradamente em direção ao chão.

Porém, se um observador estiver em um elevador acelerado (representado em (b)), que se move para o espaço, com uma aceleração igual a da gravidade, irá sentir que o objeto cai ao chão com a mesma aceleração.

No terceiro caso (representado em (c)), considerando que o elevador cai livremente em direção ao chão sob ação do campo gravitacional da Terra, o observador não sentirá o peso do seu corpo, o que o levará a flutuar, e, se o mesmo soltar algum objeto dentro dessa cabine na qual ele está posicionado, este também irá flutuar ao seu redor.

Por fim, se o elevador estiver parado no espaço vazio, longe de qualquer ação gravitacional, o observador também não sentirá o peso do seu corpo, e o mesmo irá acontecer com o objeto solto na cabine (o mesmo acontece, por exemplo, com os astronautas no espaço).

Logo, é possível concluir que ao subir, o elevador se move com aceleração, aumentando a aceleração gravidade no referencial não inercial associado ao elevador, e, por isso, o observador tem a sensação de seu peso estar aumentando. Entretanto, assim que o elevador mantém a velocidade constante, ele começa a se mover uniformemente, e o peso

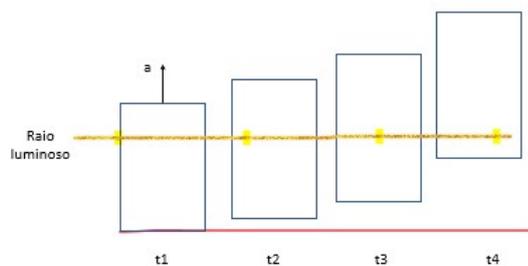
que aparentemente havia ganho, desaparece, fazendo com que retorne ao normal. Em outras palavras, o campo gravitacional é equivalente ao movimento acelerado.

Einstein utilizou do mesmo experimento mental a fim de buscar compreender a curvatura da trajetória de feixe de luz, a partir da análise do comportamento da gravidade. Inicialmente, ele imaginou uma fonte luminosa emitindo um raio de luz e se propagando em linha reta no espaço vazio. Ele sabia que a luz, no vácuo, caminha em trajetória retilínea.

Mas, o que aconteceria se um compartimento espacial cruzasse a trajetória do raio luminoso e estivesse se movendo em uma direção perpendicular à direção de propagação da luz? A princípio, um observador, de dentro do compartimento, não teria como saber se a luz se curvava por efeito da aceleração da nave ou por efeito de um campo gravitacional uniforme, pois os efeitos da aceleração e da gravidade são confusos. Então, a massa, que gera a gravidade, teria, por hipótese, o poder de curvar a trajetória da luz.

A partir do conceito relativístico de equivalência entre massa e energia, as partículas que possuem massa nula, como o fóton, deveriam apresentar as propriedades de peso e inércia. Dessa forma, a medida em que um raio luminoso passasse perto de um campo gravitacional, seria defletido. É a partir do Princípio da Equivalência que essa previsão pode ser feita de forma mais rigorosa. Analisando a figura 4, podemos entender como um feixe de luz atravessa um compartimento acelerado.

Figura 4 – Ilustração do ponto de vista de um observador em repouso, a medida em que um feixe de luz atravessa um compartimento acelerado.

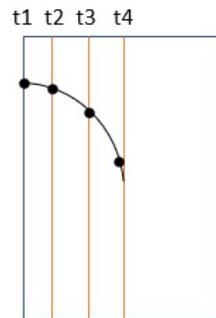


Fonte: o próprio autor

Analisando o ponto de vista de um observador que está em repouso, com relação a um feixe de luz que atravessa um compartimento acelerado, é possível perceber que o feixe viaja horizontalmente. A figura mostra as posições sucessivas do compartimento após intervalos de tempo iguais. Como a velocidade do compartimento está aumentando, a distância que o compartimento percorre a cada intervalo também irá aumentar com o tempo.

Agora, analisando a trajetória do feixe de luz do ponto de vista de um observador que esteja dentro do compartimento, representada na figura 5 é possível verificar que temos uma parábola.

Figura 5 – Ilustração da trajetória do feixe de luz do ponto de vista de um observador dentro do compartimento



Fonte: o próprio autor

De acordo com o Princípio de Equivalência, é impossível distinguir um compartimento acelerado de um compartimento que esteja com velocidade nula ou constante na presença de um campo gravitacional. As figuras 4 e 5 mostram os efeitos que o feixe de luz sofre, a medida em que passa em um campo gravitacional uniforme.

Entretanto, Einstein precisava geometrizar o espaço para que tivesse um suporte para esta ideia baseada no Princípio da Equivalência. Foi quando Einstein propôs a ideia de espaço quadrimensional, sendo três coordenadas espaciais (x,y,z) , e o tempo exercendo o papel de quarta coordenada. Dessa forma, o espaço seria deformado pela presença de massa, e quanto mais massa, maior a deformação do tecido do espaço de quatro dimensões [24].

Por fim, Einstein conseguiu concluir que o campo gravitacional curva a luz. E não apenas a trajetória da luz é curva, como também o espaço-tempo em que a luz se move é curvado. Para a comprovação experimental da teoria, já que não seria possível realizá-la em um laboratório convencional, utilizaram do Eclipse na cidade de Sobral, e, assim, foi comprovado que a teoria de Einstein estava correta.

3.2.2 O Princípio da Relatividade Geral

A Relatividade Restrita fez com que todos os referenciais inerciais atingissem um patamar de igualdade. A Relatividade Geral pretende fazer isso para todos os referenciais, sejam eles inerciais ou acelerados [17]. Pelo fato do espaço-tempo deixar de ser plano, quaisquer mudanças de coordenadas são possíveis, e, portanto, qualquer observador em qualquer sistema de coordenadas poderá verificar a presença das leis da física.

Em outras palavras, se um referencial acelerado pode ser descrito como um referencial que está em repouso, sob a ação de um campo gravítico, as leis da natureza não vão se alterar na presença do campo em questão, logo, não há motivos para que seja necessário fazer uma distinção entre referenciais acelerados e inerciais, no que diz respeito a descrição

da natureza, e é com isso que Einstein consegue generalizar o Princípio da Relatividade Geral que afirma que: as leis da física são as mesmas para todos os referenciais.

A consequência matemática disso é que, agora as leis da física devem ser descritas através do uso de tensores métricos. Através do princípio da Relatividade Geral, é possível deduzir propriedades do campo gravitacional devido ao fato natural da igualdade das massas (inercial e gravitacional), de onde se inclui o conceito de gravitação na relatividade. Com isso, é possível conhecermos as leis da natureza tanto na ausência de campos gravitacionais, como também, em relação a referenciais acelerados.

3.3 Equações de Einstein

A ação Einstein-Hilbert na teoria da relatividade geral é a ação que produz as equações de campo de Einstein, através de um princípio variacional, e vem da postulação de que a gravidade aparece quando a métrica torna-se dinâmica e provém de uma ação, que é um escalar.

A ação é descrita como

$$S_G = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (3.3)$$

Já a ação que descreve a dinâmica da matéria presente no espaço-tempo pode ser escrita como

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} L_M, \quad (3.4)$$

Logo, a ação total do sistema será

$$S = S_G + S_M \quad (3.5)$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{c^4}{16\pi G} R + L_M \right), \quad (3.6)$$

onde $-g$ é o determinante do tensor métrico (que depende do espaço adotado), 16π é o fator de normalização; G é a constante gravitacional de Newton e c é a velocidade da luz no vácuo; R é o escalar de curvatura de Ricci; L_M é a lagrangiana que neste caso se volta para um campo escalar.

Variando em relação a métrica é possível encontrar a equação de movimento, dada por

$$\int d^4x \delta \sqrt{-g} \left(\frac{c^4}{16\pi G} R + L_M \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{c^4 \delta R}{16\pi G} + \delta L_M \right) = 0. \quad (3.7)$$

Calculando $\delta \sqrt{-g}$, temos que

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g, \quad (3.8)$$

logo:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

de onde tiramos que $\frac{g}{\sqrt{-g}} = \sqrt{-g}$. Logo

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Devemos deixar o $\delta g_{\mu\nu}$ em evidência, devido a variação ser em relação a métrica, portanto

$$\int d^4x \frac{\sqrt{g}}{2} \left(\frac{c^4}{16\pi G} g_{\mu\nu} + L_M g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{8Rc^4}{16\pi G} + \delta L_M \right) = 0. \quad (3.11)$$

que irá nos levar às equações de Einstein para a teoria da relatividade geral

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia, e G é a constante gravitacional de Newton.

As equações de campo de Einstein, descrevem como o espaço-tempo se curva pela matéria, e, reciprocamente, como a matéria é influenciada pela curvatura do espaço-tempo, ou seja, como a curvatura dá lugar à gravidade. São um conjunto de 16 equações diferenciais parciais não lineares (que representa o efeito da gravitação sobre si mesma) acopladas e como $G_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, variando seus índices entre 0 e 3, tem-se a princípio 10 equações distintas.

3.4 Derivação das Equações de Einstein

Uma diferença marcante entre as equações do eletromagnetismo e as equações que descrevem os fenômenos gravitacionais, é que as últimas não são lineares (que é um sistema constituído por combinação de funções algébricas e funções transcendententes).

Enquanto no eletromagnetismo de Maxwell não há interação entre o campo magnético com ele mesmo (onde se afirma que o campo não conduz cargas, no sentido de induzilas), e, portanto, as equações são lineares, o campo gravitacional carrega energia e momento, e contribui como fonte.

Para se obter a expressão relativística do campo gravitacional, algumas propriedades devem ser consideradas [17], para que $G_{\mu\nu}$ seja satisfeito, dentre elas estão: $G_{\mu\nu}$, por definição, é um tensor; $G_{\mu\nu}$ contém termos lineares apenas na segunda derivada ou quadráticos na primeira, do tensor métrico; Como $T_{\mu\nu}$ é um tensor métrico, $G_{\mu\nu}$ também é; $G_{\mu\nu}$ tem que respeitar a equação de continuidade descrita abaixo:

$$G_{\nu}^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \quad (3.13)$$

e, para campos fracos, e estacionários, além de serem produzidos por matéria não-relativística, G_{00} deve ser escrito como

$$G_{00} = \nabla^2 g_{00}, \quad (3.14)$$

e a partir das propriedades acima, é possível determinar $G_{\mu\nu}$.

Devemos ter

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R. \quad (3.15)$$

para que possamos escrever a equação acima na forma

$$G_{\nu}^{\mu} = C_1 R_{\nu}^{\mu} + C_2 \delta_{\nu}^{\mu} R, \quad (3.16)$$

e tomando a derivada covariante em relação a x^{μ} , temos

$$G_{\nu}^{\mu};_{\mu} = C_1 R_{\nu}^{\mu};_{\mu} + C_2 \delta_{\nu}^{\mu} R;_{\mu}. \quad (3.17)$$

Sendo,

$$R_{\nu}^{\mu};_{\mu} = \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R;_{\mu}, \quad (3.18)$$

Temos da equação (3.17)

$$G_{\nu}^{\mu};_{\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R;_{\nu}. \quad (3.19)$$

Entretanto, a quarta propriedade impõe que

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) = 0, \quad (3.20)$$

ou

$$R;_{\nu} = 0 \quad (3.21)$$

logo, podemos determinar o seguinte vínculo:

$$C_2 = -\frac{C_1}{2}, \quad (3.22)$$

de onde podemos chegar em

$$G_{\mu\nu} = C \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (3.23)$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$G_{00} = C \left(R_{00} - \frac{1}{2} G_{00} R \right) = 2C R_{00}. \quad (3.24)$$

Da definição do tensor de Ricci (um tensor bivalente, obtido como um traço do tensor de curvatura), temos

$$R_{00} = R k_0 k_0 - R_{0000}, \quad (3.25)$$

logo

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 g_{00}}{\delta x^i \delta x^j}, \quad (3.26)$$

ou

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}. \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.25) em (3.20), temos

$$G_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00}. \quad (3.28)$$

Daí, obtemos as equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, e R é o escalar de curvatura.

A equação (3.29) é a expressão relativística do campo gravitacional, ou mais conhecida como base da Teoria da Relatividade Geral.

As equações de campo de Einstein da Teoria da Relatividade Geral, encaram a gravidade como sendo originada da curvatura do espaço-tempo, ocasionada pelas massas dos objetos, e não mais como sendo a ação atrativa da distância ocasionada pela massa dos corpos.

3.5 Solução de Schwarzschild

A atração gravitacional entre massas pode ser pensada como o movimento de partícula na curva que é produzida pela distribuição de todas as outras massas que estão distribuídas na região. Apesar das equações de Einstein serem não-lineares, a razão pela qual podemos resolvê-las para uma estrela estática e esfericamente simétrica, é que essa simetria limita a solução.

A exemplo, podemos considerar que como uma massa gravitante (que é a fonte) é estática, os componentes métricos seriam independentes do tempo. Além disso, a simetria esférica exige que os componentes da métrica dependam apenas da coordenada radial r .

A gravitação de Schwarzschild, é uma solução particular das equações da TRG de Einstein, aperfeiçoa a gravitação de Einstein, que pode ser expressa também, em termos do espaço-tempo curvo. Isto pode ser feito de duas maneiras: ou ela corresponde ao espaço-tempo de Minkowski (modificado para deixar de ser plano), ou ela corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild (modificado para ser apenas ligeiramente curvo) e em muitas situações físicas elas fornecem quase as mesmas previsões teóricas para os mesmos fenômenos [8].

A solução de Karl Schwarzschild, foi obtida em 1916. A ideia era adquirir uma solução que descreve o exterior de objetos com rotação lenta, como por exemplo a Terra e

o Sol [25]. Considerando a métrica não dependente de ϕ e 0, não vamos analisar termos cruzados do tipo espaço-espaço, assim como a métrica não vai depender do tempo e dos termos cruzados do tipo tempo-espaço, porque qualquer solução esfericamente simétrica da equação de Einstein no vácuo é estática.

A solução de Schwarzschild pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (3.30)$$

e assumindo a métrica, deve-se determinar os coeficientes μ e ν da métrica, logo

$$d_s^2 = -U(r)dt^2 + V(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.31)$$

O escalar de Ricci pode ser calculado como

$$R = \frac{U''}{UV} - \frac{U'V'}{2UV^2} - \frac{(U')^2}{2U^2V} + \frac{2U'}{rUV^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2V}, \quad (3.32)$$

de onde, se inserirmos o que foi calculado na equação de Einstein, resulta em um conjunto de equações envolvendo V, U e r.

Resolvendo as equações e impondo que a métrica se reduza à métrica de um espaço plano quando r tende a infinito, achamos expressões para U e V

$$V = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}}, \quad (3.33)$$

e

$$U = \left(1 - \frac{C}{r}\right). \quad (3.34)$$

A comparação com a métrica de campo fraco e baixas velocidades nos leva a um valor para C

$$C = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.35)$$

e a solução final, que indica o intervalo espaço-temporal da Relatividade Restrita pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$d_s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) dct^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.36)$$

onde, $\frac{2GM}{c^2} = r_g$, que é conhecido como raio gravitacional, ou, ainda, o raio de Schwarzschild, e é um parâmetro livre que depende da massa M que vai ser responsável por gerar a deformação no espaço-tempo.

Uma característica importante dessa solução é a decorrente estaticidade, que é obtida da própria solução das equações de Einstein no vácuo para um espaço-tempo esfericamente simétrico. Dessa forma, se uma estrela colapsar aos poucos, mantendo a sua simetria esférica e o vácuo em seu exterior, o espaço-tempo gerado pelo colapso estelar ainda será dado pela métrica de Schwarzschild.

Vale salientar que, o único parâmetro livre é a massa total do objeto, ou seja, a métrica exterior à um objeto esférico e estático é completamente determinada por sua massa, independente da forma que o tensor de energia momento assume dentro do objeto. Uma singularidade real ocorre no centro do buraco negro, onde a densidade de energia se torna infinita.

A equação (3.36) é utilizada para casos nos quais se consideram espaços com simetria por rotações ao redor da origem, ou, simetria esférica. Logo, cada superfície nos quais t e r são constantes, no espaço-tempo de Schwarzschild tem a geometria de uma esfera. A solução externa de Schwarzschild é considerada como a mais importante solução exata das equações de campo de Einstein, devido a sua aplicação com eficácia a sistemas reais.

Considerando um sistema com um referencial inercial, o intervalo ds^2 é escrito em coordenadas cartesianas como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu, \quad (3.37)$$

onde, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $x^\nu = (t, x, y, z)$.

A medida em que há transferência de um referencial inercial para outro, considerando as transformações de Lorentz, ds^2 não altera. Entretanto, se essa transição ocorre para um referencial não-inercial, o intervalo muda, e assume a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu, \quad (3.38)$$

onde, $g_{\mu\nu}$ chamado de tensor métrico, e representa um conjunto de 10 funções (das coordenadas espaciais e da coordenada temporal). Esse sistema de coordenadas é conhecido como curvilíneo, e o tensor têm todas as propriedades geométricas do espaço-tempo. dx^μ representa um deslocamento infinitesimal genérico da coordenada x^μ .

A equação (3.38) representa uma quantidade invariante, isso implica que independente do sistema de referência, todos os observadores concordarão com uma medida desta. Além disso, a métrica se comporta como um tensor responsável por transmitir todas as informação sobre estrutura causal e geométrica do espaço-tempo.

Logo, se considerarmos os campos equivalentes aos referenciais não-inerciais, podemos concluir que estes são determinados através do tensor métrico de um espaço-tempo curvo. Através da teoria da Relatividade Geral, isso também é estendido para campos gravíticos reais, a medida em que afirmamos que os efeitos gravíticos também são descritos por um tensor métrico.

O Teorema de Birkhoff afirma que um objeto massivo e esfericamente simétrico sempre gera um campo gravitacional esfericamente simétrico. Com isso, considerando os fenômenos físicos, o teorema afirma que o campo gravitacional de uma estrela estática

é o mesmo de uma estrela que esteja expandindo, pulsando ou colapsando. A estrutura métrica externa à estrela de nêutrons é idêntica a métrica de Schwarzschild de um buraco negro, descrita como [26]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\nu dx^\mu = -e^{2K(r)}dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.39)$$

4 As Estrelas de Nêutrons

A descoberta dos quasares levou a Teoria da Relatividade Geral imediatamente para a fronteira da astronomia. À escala cósmica, a gravidade é a interação dominante, e por implicar na concentração imensa de massa, levam a existência de campos gravitacionais muito intensos.

Neste contexto, podemos destacar as Estrelas de Nêutrons, que estão entre os mais exóticos corpos celestes já conhecidos, e representam os estágios finais da vida de estrelas massivas que pertencem à sequência principal, apresentando dimensões muito pequenas e girando em altíssimas velocidades, resultando em grandes campos gravitacionais e magnéticos [9].

4.0.1 O ciclo de vida das Estrelas e as Estrelas de Nêutrons

Quando nuvem de gás e poeira no universo se condensam devido a ação gravitacional, se forma uma bola de gás. A temperatura aumenta conforme essa poeira se condensa, e quando chega a aproximadamente 10.000 °C os átomos de hidrogênio se juntam e se transformam em átomos de hélio, através da fusão nuclear, que resulta no nascimento de uma estrela.

Mesmo uma estrela sendo jovem, ela passa por processos intensos de atividades, que fazem com que hajam modificações em suas características, como por exemplo, na temperatura, na massa e no diâmetro, além de apresentar momentos de instabilidades, dependendo da sua fase de vida [27]. Em uma mesma galáxia podem existir muitas regiões de formação das estrelas, e essas regiões são preenchidas por nuvens de gás e poeira, que estão localizadas entre os braços espirais, ou seja, regiões com maior densidade, com mais estrelas, e com mais gás e poeira, situados no disco de uma galáxia.

A gravidade presente nos braços espirais é suficientemente forte para acelerar objetos que se distanciam deles, e, da mesma forma, para desacelerar objetos que também distam deles. A compressão e/ou colisão nos braços espirais é resultado da acumulação e da colisão destas nuvens de gás e poeira. O resultado desta ação é a grande quantidade de estrelas jovens e de todos os tamanhos sendo formadas nessas regiões.

Na galáxia de Andrômeda, representada na Figura 6, encontra-se nuvens interestelares. Essa região fica entre os braços espirais, e estes aparecem na cor escura na figura.

Uma estrela consegue produzir a sua energia por um mecanismo chamado fusão nuclear (junção de núcleos) [28]. Este processo ocorre devido a proximidade dos núcleos

Figura 6 – Imagem óptica da galáxia de Andrômeda - representação dos braços espirais.



Disponível em: <<https://www.infoescola.com/astronomia/andromeda-galaxia/>>

atômicos. É importante enfatizar que esta aproximação não é tão simples como se pensa, pois, sabe-se que no núcleo do átomo existe a presença de cargas positivas que provocam a repulsão elétrica entre os núcleos, conseqüentemente impedindo a aproximação que é necessária para que a fusão ocorra.

Algumas estrelas possuem a capacidade de ter energia suficiente para superar a repulsão elétrica e permitir a fusão nuclear. Essa capacidade é adquirida mediante a contração do interior de uma estrela, que eleva a temperatura e faz com que os núcleos atômicos adquiram altas velocidades.

A medida em que a parte central de uma estrela jovem fica muito quente, os processos de fusão nuclear iniciam. Primeiro, com a fusão de 2 prótons, que formam um núcleo de dêuteron (hidrogênio pesado), um nêutron (que é responsável pela liberação de energia) e um elétron. Em seguida, o dêuteron se funde com um próton originando um hélio-3, e assim sucessivamente. Dessa forma ocorre a formação de elementos iguais aos que estão se fundindo, assim como outros elementos. As reações sempre ocorrem em cadeia, e dessa forma, a energia necessária para sustar a contração gravitacional é obtida.

Quanto mais a produção da energia nuclear vai aumentando, a pressão local também aumenta, e, conseqüentemente, a estrela se expande. Como conseqüência, o gás contido no interior da estrela esfria e a produção de energia diminui. Quando isso ocorre, a estrela passa a ficar estável por um longo período, na fase conhecida como seqüência principal. Nela, a estrela segue com temperatura e tamanho ideais para o seu equilíbrio.

Uma estrela passa cerca de 90% da sua vida na seqüência principal, e, portanto, em condições de equilíbrio, pois as características da estrela não se alteram. Durante este período, há uma conversão de hidrogênio em hélio, de forma lenta, e a força gravitacional e a pressão irão se equilibrar. Algumas estrelas têm um tempo de vida mais curto. Estas são mais quentes, mais massivas, e apresentam alta luminosidade, pois consomem seu combustível a taxas muito elevadas.

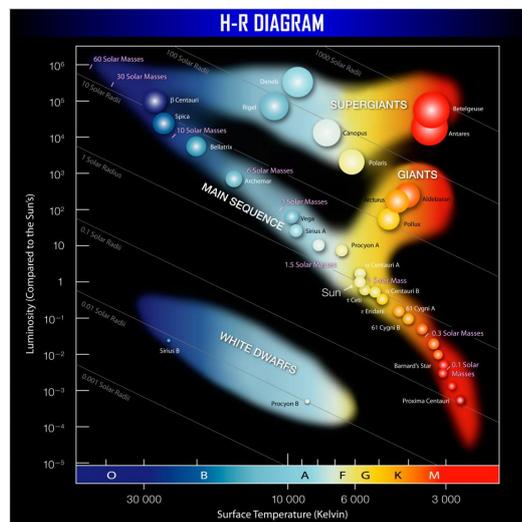
O equilíbrio vai sendo alterado a medida em que todo o hidrogênio do núcleo termina, pois, há uma modificação na estrutura interna da estrela, que influencia diretamente na aparência externa. Neste estágio, a estrela sai da seqüência principal, e dar início a fase

final da sua vida. Os estágios finais de uma estrela podem ser mais tranquilos ou até mesmo catastróficos, e isso vai depender da massa estelar.

Alterações no raio e na temperatura superficial da estrela são as principais alterações causadas pelo fim da produção de energia do núcleo (em sua camada mais interna). Devido ao processo de fusão nuclear, a composição do interior da estrela também muda, onde há uma redução de hidrogênio e um aumento de hélio, e no centro da estrela devido a temperatura elevada, a quantidade de hélio aumenta ainda mais rápido. Com a diminuição do hidrogênio, há também uma diminuição na produção de energia pelas reações termonucleares, que leva à queda de pressão e temperatura e leva à contração da região central da estrela.

Essa contração causa um novo aquecimento, que reativa a fusão no centro e uma membrana rica em hidrogênio se funde para formar o hélio. A medida que o hidrogênio esgota totalmente, a membrana se torna a única fonte de produção de energia na estrela. A medida em que a queima de hidrogênio na camada da estrela inicia, ela se desloca no diagrama Hertzsprung-Russell (diagrama HR), que é um gráfico de dispersão que relaciona a luminosidade e a temperatura da superfície de uma estrela, e com isso, se torna mais luminosa e mais fria, representado na figura 7.

Figura 7 – Diagrama HR



Fonte:Oliveira Filho, K.S. e Saraiva, M.F.Astronomia e Astrofísica. [29]

A luminosidade das estrelas está representada no eixo Y, e segue em escala logarítmica (que ao invés de usar a grandeza, usa o logaritmo de uma grandeza), porque o brilho de uma estrela pode sofrer variações grandiosas na sua temperatura e no seu tamanho. Sua classificação espectral está representada no eixo X, e para a classificação, leva em conta a temperatura da superfície da estrela.

As estrelas mais quentes ficam localizadas no lado esquerdo do diagrama, mais próxima do eixo Y, e as estrelas mais frias encontram-se à direita do gráfico. As estrelas

mais massivas ficam localizadas na parte superior do gráfico, e são extremamente luminosas, pois, quanto maior a área de uma estrela, mais ela consegue emitir luz.

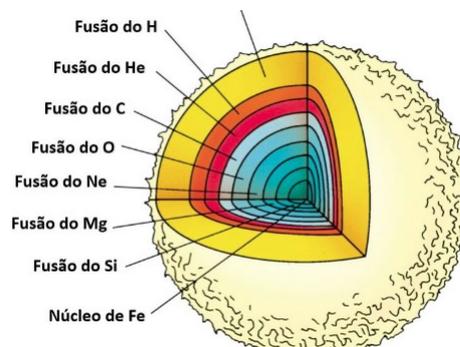
A medida em que a fusão nuclear é totalmente cessada na região central, a queda de temperatura ocasiona uma rápida contração (colapso). Sem a produção de energia, a pressão do gás na parte central, e a força da gravidade atua comprimindo a estrela [29].

O desequilíbrio das forças que atuam na parte central da estrela faz com que reflita nas outras regiões da mesma. A rápida fusão do hidrogênio vai causar uma pressão de radiação, impedindo que as camadas externas aumentem de raio, e nem mesmo a gravidade pode evitar. Com essa expansão, a temperatura diminui na superfície, e ela começa a se transformar em uma gigante vermelha.

Se a temperatura interna for muito alta, a estrela passa então para a região das supergigantes vermelhas, no gráfico HR, e dessa vez, a maior composição do núcleo é o carbono. Nas estrelas supermassivas, a temperatura interna consegue atingir os níveis necessários para que a fusão do carbono implique em elementos mais pesados. A estrela novamente passa por várias etapas, dessa vez, sem sofrer drásticas alterações [9].

Conforme a temperatura central vai aumentando, as reações do núcleo passam a ocorrer de forma mais acelerada, e a energia que é gerada consegue sustentar a estrela contra um colapso. Porém, alguns elementos pesados, como o ferro, por exemplo, são tão compactos que ao invés de gerarem energia, eles absorvem energia do meio. Chega um momento em que a pressão não é mais suficiente para sustentar a intensa força gravitacional, e a estrela implode. A Figura 8 nos traz um esquema de representação do interior de uma estrela massiva.

Figura 8 – Representação do interior de uma estrela de alta massa no fim da sua vida.



Fonte: Disponível em:

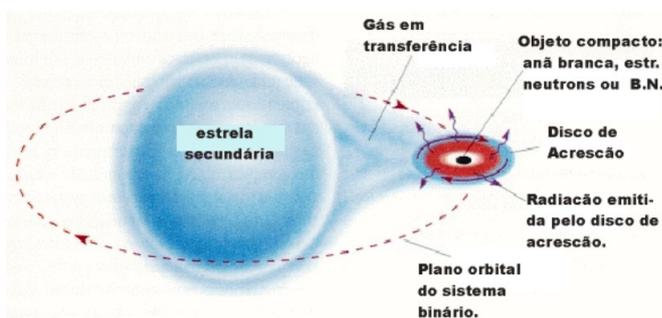
<<https://www.meteoritos.com.br/evolucao-das-estrelas-e-a-formacao-dos-elementos-quimicos/>>.

Se tratando de uma estrela massiva, o núcleo se expande violentamente em reação a compressão que foi interrompida, e uma onda de choque se espalha pela estrela, fazendo com que as camadas superficiais, se desloquem em um evento explosivo, levando até mesmo o ferro do núcleo para o meio interestelar (é o que conhecemos como explosão de supernova).

Se uma supernova ocorre em um sistema binário, ou seja, um sistema composto por dois corpos celestes orbitando em torno de um centro de massa comum, ligados gravitacionalmente entre si, a companheira da supernova pode perder uma parte das suas camadas da superfície, entretanto, consegue sobreviver à explosão.

Uma estrela de nêutrons irá se formar próximo de uma estrela secundária, e a medida em que a estrela secundária evoluir, o gás contido nela então irá se deslocar em forma espiral em direção à estrela de nêutrons. Este gás irá formar um disco de acreção, representado na Figura 9. O formato de um disco está relacionado com o fato do gás manter seu movimento orbital.

Figura 9 – Representação do disco de acreção



Disponível em:

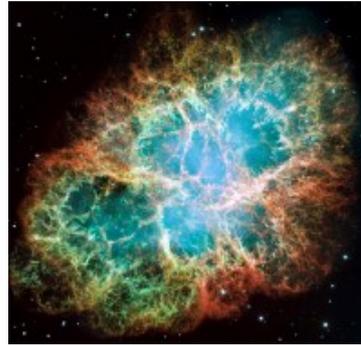
<https://www.if.ufrgs.br/oei/stars/neutronst/neutrst.htm>

Haverá uma perda do momento angular, a medida em que houver um atrito das camadas do gás nas órbitas que estão próximas do disco de acreção. Além disso, também vai ocasionar um movimento de queda em espiral do gás em direção a superfície da estrela de nêutrons. Como o gás se move em espiral para dentro do campo gravitacional da estrela, sua energia potencial gravitacional será convertida em energia térmica no interior do disco de acreção.

A energia gravitacional é liberada com maior intensidade na parte mais interna do disco de acreção, isso faz com que uma temperatura média de milhões de graus seja atingida. Devido a isso, uma fonte de energia muito intensa se torna presente nessa região, que vai emitir radiação (ultravioleta e raios-x). Se o gás for transferido em uma quantidade muito elevada do disco, a pressão na estrela de nêutrons sofre um aumento considerável, e assim, a energia acaba ficando acumulada, e o gás é expulso da estrela de nêutrons, fazendo com que fortes correntes de gás sejam ejetados em sua órbita.

A figura 10 representa a Nebulosa de Caranguejo. Ela é o que restou da explosão de uma supernova. É formada a partir do material que é ejetado das camadas da estrela massiva no período de fim da sua vida. No centro desta Nebulosa está o Pulsar do Caranguejo, que emite pulsos periódicos de radiação responsável por abranger quase todo o espectro eletromagnético.

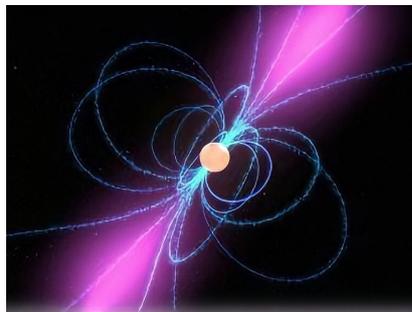
Figura 10 – Nebulosa de Caranguejo.



Disponível em: <https://www.nasa.gov/images/content/138785main_image_feature_460ys_full.jpg>.

Uma morte para as estrelas massivas pode ter duas consequências impactantes: o fim da estrela original, e se for massiva o suficiente, nasce um buraco negro; ou, deixar apenas um objeto compacto formado basicamente por nêutrons no seu centro, porque os prótons e os elétrons irão se repelir, mediante a redução do seu raio, restando apenas a matéria neutra. É aí então que chegamos ao conceito e nascimento das estrelas de nêutrons. A figura 11 nos mostra uma concepção artística de uma estrela de nêutrons.

Figura 11 – Concepção artística de uma estrela de nêutrons.



Fonte: NASA.

É possível apontar que as estrelas de nêutrons são remanescentes do processo de geração de supernovas. A partir daí, é possível afirmar que a compressão dos restos de explosão da estrela após esse efeito, irá influenciar também no aumento na intensidade do campo magnético, por causa da conservação do momento, e pelo fato de que nos polos a densidade magnética é maior, a atração gravitacional dos restos da estrela conduz a um objeto extremamente compacto.

O momento angular é uma quantidade que combina a massa, o tamanho e a velocidade de rotação. Antes de desmoronar, a estrela girava lentamente, porém, a medida em que entrou em colapso, o material reprimiu o seu momento angular original. A massa permanece semelhante a original, porém o raio encolhe. Isso faz com que para compensar, a velocidade de rotação aumente. Portanto, o momento angular de uma estrela de nêutrons é conservado a medida em que a estrela encolhe, pois, quanto mais perto a distribuição de massa estiver do eixo de rotação, menor é o momento de inércia, ou seja, o grau de

dificuldade de alterar o estado de movimento de um corpo, e portanto, o corpo vai ganhar mais velocidade angular, pois a resistência é menor em relação a velocidade de rotação.

O desenvolvimento da teoria da relatividade geral foi fundamental para o estudo e compreensão dos objetos em questão (as estrelas de nêutrons), isso porque, seria impossível compreendê-las utilizando a teoria da gravitação clássica de Isaac Newton [4]. As estrelas de nêutrons são objetos tão densos que sua força gravitacional consegue distorcer fortemente a estrutura do espaço à sua volta, e isso exige os estudos de Einstein para que seja possível detectar suas propriedades.

A densidade global das estrelas de nêutrons é em torno de 59.10^{16}kg/m^3 , o que é comparável com a densidade do núcleo atômico dos átomos. Essa densidade aumenta de acordo com o que se aproxima de seu interior, por causa da forte pressão que é exercida pela massa mais exterior. Por conta dessa densidade, as distorções gravitacionais na superfície dessas estrelas são bem estrondosas, e com isso, o campo gravitacional chega a ser 2.10^{11} vezes o campo da Terra.

Uma curiosidade importante é que corpos da superfície podem ser acelerados em velocidades altíssimas, e isso gera uma possibilidade desses corpos atingirem velocidades próximas à da luz, ou seja, com essa aceleração, qualquer corpo que chega próximo é automaticamente aniquilado.

De modo geral, as estrelas de nêutrons são um entre os possíveis estágios finais da vida de estrelas massivas que pertencem à sequência principal. São pequenas, porém extremamente quentes e densas, apresentam altíssimas gravidades e podem ter campos magnéticos extremos. O efeito de colapso de uma estrela de nêutrons ocorre por causa da curvatura do espaço-tempo que justifica a intensidade da gravidade numa estrela em colapso.

4.1 A Estimativa elementar do equilíbrio e as massas das estrelas de nêutrons

O fato de existir uma massa máxima para as estrelas de nêutrons sucede da presença da pressão como fonte da gravitação na Relatividade Geral. Analisando a gravitação newtoniana pelo momento, sabe-se que a equação que estabelece o estado mecânico do gás é conhecida como: equação de equilíbrio hidrostático para uma esfera auto-gravitante [7]. Tal equação é dada por

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}, \quad (4.1)$$

onde $m(r)$ é a massa encerrada no raio r , e G é a constante Gravitacional de Newton.

A solução da equação (4.1) em termos da função pressão $P(r)$, estabelece que a estrela decorre do balanço de forças de pressão e gravidade. Neste caso, a pressão

gravitacional é vista como resultado da variação da energia a respeito do volume que ela ocupa.

A pressão gravitacional, dada por

$$P_{grav} = -\frac{\partial E_{grav}}{\partial V}, \quad (4.2)$$

é exercida sobre uma estrela de nêutron. Pode-se, então, escrever a energia gravitacional de uma esfera, em função do volume, V

$$E_{grav} = -\frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{GM^2}{V^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.3)$$

onde $3/5$ é um valor constante para um processo adiabático.

Isso resulta em

$$P_{grav} = -\frac{\delta E_{grav}}{\delta V} = CM^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}, \quad (4.4)$$

sendo $C = \frac{G}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$. A partir daí, escalonando para valores de referência, temos

$$P_{grav} = 3,2 \cdot 10^{33} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (4.5)$$

onde, M_{\odot} é a massa solar, e ρ é a densidade.

Para que haja equilíbrio, a pressão gravitacional deve ser igual a pressão de repulsão nuclear, que é a verdadeira responsável pela estabilidade estelar neste regime.

Realizando o cálculo da densidade, é possível encontrar a massa máxima dentro de um erro percentual pequeno na aproximação da densidade constante. Logo

$$M_{max} = 2,54 \left(\frac{\rho}{4,5\rho_0} \right) \left(\frac{R}{10} \right)^3 M_{\odot}. \quad (4.6)$$

A equação acima não é adotada completamente, porque os resultados obtidos, em geral, são uma média, uma aproximação. Para que se obtenha uma solução mais refinada, é necessário recorrer à integração de equações deduzidas para soluções estáticas com simetria esférica, da relatividade Geral.

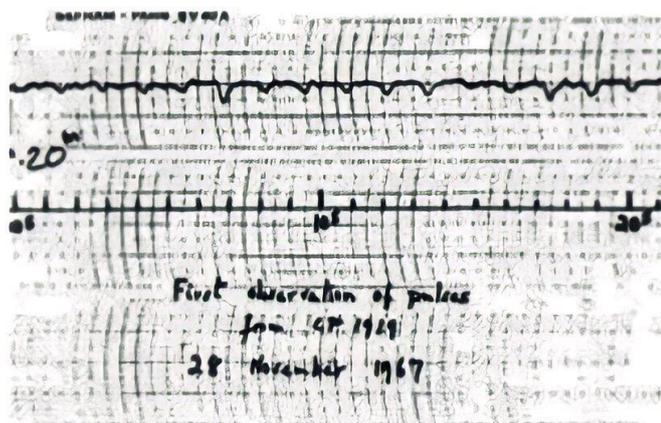
4.2 Os pulsares

Os pulsares foram descobertos acidentalmente em 1967, obtidos durante uma baixa frequência na busca por fontes de rádio extragalácticos [30]. Jocelyn Bell fazia parte de um grupo de estudantes de radioastronomia, da universidade de Cambridge. Um dia, a partir de um radiotelescópio desenvolvido pelo líder da turma, perceberam sinais de pulsos periódicos, diferentes dos que normalmente eles esperavam (a detecção de quasares, objetivo do estudo).

Até um pouco antes de 1960, não se sabia de fato qual a origem de um pulsar. Uma técnica de cintilação interplanetária foi descoberta, o IPS (interplanetary pulsar scintillation), que é a flutuação aparente na intensidade da emissão de rádio de uma fonte de rádio compacta, e ocorre devido a difração das ondas de rádio a medida em que passam pelos ventos solares no espaço interplanetário [31]. Os quasares são objetos astronômicos que cintilam mais que fontes de rádio estendidas, e a intenção era identificar quasares.

Jocelyn percebeu uma rápida cintilação que envolvia uma fonte fraca, que no horário da noite são pouco frequentes. Além disso o sinal só estava presente em uma fração de tempo, mas foi se repetindo até que gravações de alta velocidade revelaram que os sinais vinham de uma sucessão de pulsos com apenas 1 s de intervalo. Até então, nenhum objeto celeste apresentava tais características. A figura 12 mostra um registro do sinal do primeiro pulsar descoberto.

Figura 12 – Registro do sinal do primeiro pulsar descoberto por Jocelyn Bell; os “vales” na linha superior, em novembro de 1967.



Fonte: Cambridge University.

Em 1968 foi levantada uma hipótese de que os pulsares poderiam ser estrelas de nêutrons em alta rotação. Dois artigos foram escritos, e mostraram a relação existente entre teoria e o que realmente acontecia.

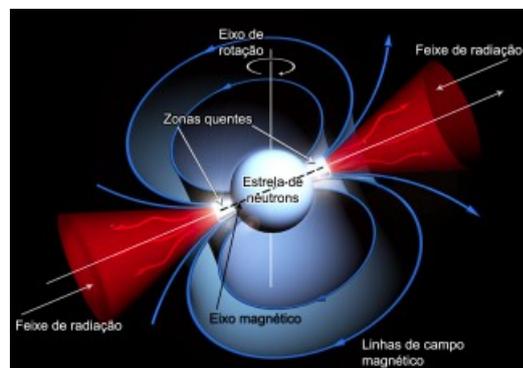
“Os pulsares, ao que parece, têm o potencial de revelar aspectos muito diversos do universo, como a natureza do espaço-tempo e as propriedades fundamentais da matéria. [...] E, ao girarem, emitem raios de radiação - luz, rádio e raios-X - que fluem para o espaço. Se um dos raios cruza a Terra, o pulsar parece piscar como um sinal de alerta que marca o local de um cataclismo estelar. Essa gama de características únicas torna os pulsares como laboratórios para testar fenômenos com significado não apenas astronômico, mas cosmológico. A incrível precisão dos pulsares permite que os

astrônomos estudem uma das previsões mais importantes da relatividade geral, as ondas gravitacionais. As taxas de rotação dos pulsares são tão precisas que são consideradas uma das fontes de tempo mais exatas” [32]

O interior de uma estrela de nêutrons que até então era considerado um simples nêutron fluido, provou ser muito acessível através da taxa de rotação que foi observada, analisada e levada para estudos posteriores. Após a descoberta dos pulsares de curto período (Vela e Caranguejo), foram utilizadas teorias que envolviam anãs brancas, a fim de compreender se estas teriam alguma relação com os pulsares de períodos curtos, por exemplo, de 1s, e possivelmente para 14s (que era o menor período conhecido), entretanto, o Vela teve um período de 89 ms apenas.

Somente uma estrela de nêutrons poderia vibrar ou girar tão rápido [33]. A matéria que fica acumulada é compelida a cair em algumas regiões peculiares dos polos magnéticos, e ao serem aquecidas, são as responsáveis pela emissão de raios-x. Além disso, também é possível que a rotação por vezes possa variar e diminuir, mas a vibração não apresenta o mesmo comportamento. Observando a figura 13 podemos analisar um modelo de uma estrela de nêutrons com as propriedades de um pulsar.

Figura 13 – Modelo de uma estrela de nêutrons com suas propriedades de um pulsar.



Fonte: USP

O número de pulsares conhecidos aumentou muito nos primeiros 15 anos de descobertas. Os períodos variavam entre 100 ms a 1 s, e as taxas de desaceleração que foram minuciosamente analisadas comprovavam que os pulsares com períodos menores eram os mais jovens.

Os sinais dos pulsares variaram rapidamente de forma aleatória devido a movimentos aleatórios no gás interestelar que atravessam em seu caminho para Terra, assim como as estrelas piscam aleatoriamente devido aos movimentos do ar na atmosfera da Terra. É exatamente quando o feixe de luz cruza a linha de visada entre o pulsar e a Terra, que é detectado em forma de pulsos.

A intensidade desse sinal vai variar de acordo com a fase de rotação da estrela, e o período de repetição também varia de acordo com a fase de rotação da estrela. Alguns pulsares emitem uma radiação em frequências que se estendem das ondas de rádio até os raios gama, e isso sugere um plasma em torno dessas estrelas [34].

O período de um pulso também aumenta lentamente, mas há exceções, por exemplo, quando há falhas na periodicidade dos pulsos (glitches), ou quando há o aumento da frequência angular (spin-ups), que são consequências do aumento da massa. Com isso, ficou definido que os pulsares são estrelas de nêutrons fortemente magnetizados.

O campo magnético exerce uma poderosa influência no interior de um pulsar. A rotação da estrela de nêutrons é composta por duas rotações: uma do corpo sólido, e uma de fluido. Os fortes campos magnéticos exercem um efeito que se trata da desaceleração da taxa de rotação, que ocorre a partir do momento em que há uma perda no momento angular da radiação eletromagnética [34].

4.2.1 Idade com base no modelo para a desaceleração da rotação de um dipolo canônico

Para explicar o decaimento da frequência de rotação dos pulsares, normalmente se utiliza o modelo canônico, que considera que tais objetos são descritos como dipolos magnéticos rotacionando, com uma velocidade angular Ω [9]. De acordo com a eletrodinâmica, esses dipolos magnéticos giram em torno de um eixo perpendicular ao dipolo com velocidade angular $\Omega = 2\pi\nu$, e irradiam uma onda na frequência angular Ω com uma potência total de $\frac{2}{3}\mu^2\Omega^4c^{-3}$. A energia fornecida advém da energia cinética de rotação $\frac{1}{2}I\Omega^2$ onde I é o momento de inércia.

Neste modelo mais simples, a taxa de variação da energia cinética de rotação é dada por

$$d\left(\frac{1}{2}I\Omega^2\right) = I\Omega\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{3}\mu^2\sin^2\alpha\Omega^4c^{-3}, \quad (4.7)$$

onde α é o ângulo entre os eixos de dipolo e rotação e μ é o momento de dipolo.

O fluxo de energia de um pulsar pode ser uma combinação entre a radiação dipolar e uma saída de fluxo de partículas. Mesmo que estas partículas carreguem uma grande parte da energia, espera-se que o fluxo seja dado aproximadamente pela equação (4.7), uma vez que, o campo magnético é gerado na magnetosfera (externa).

A saída combinada pode ser considerada, portanto, como um fluxo de rotação e de partículas na velocidade c , que perpassa por uma área de $4\pi r_c^2$, onde r_c é o raio do cilindro na velocidade da luz. Para que a equação (4.7) possa ser utilizada para encontrar o fluxo, é necessário que a densidade de energia total na velocidade da luz seja de aproximadamente $\frac{B^2}{8\pi}$, de onde B é a intensidade do campo magnético.

Seguindo a linha de raciocínio de utilizar a equação (4.7) para a desaceleração de um pulsar, a componente ortogonal do dipolo μsen^α pode ser derivada dos valores de P e \dot{P} . Um valor convencional adotado para a intensidade do campo magnético na superfície $B_s = \mu R^{-3}$ é frequentemente utilizado. Isso pressupõe que há um rotador ortogonal, com $r = 10km$ e momento de inércia equivalente a $10^{45}g.cm^2$, dando:

$$B_s = 3,2 \cdot 10^{19} \left(P \frac{dP}{dt} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

O campo $B_s = \mu R^{-3}$ é o campo no equador magnético. A integração da equação (4.7) mostra que para um pulso com período inercial P_0 e constante do campo dipolar B_s o período evolui com o tempo t (anos) da seguinte forma:

$$P(t) = \left(P_0^2 + 3,15 \cdot 10^{-32} B_s^2 t \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

Também é possível, e até mesmo mais propício, analisar uma pulsação que diminui de acordo com a lei de potência, pois, o modelo mencionado acima pode não ser o mais correto ou apropriado. Assim, consideremos a seguinte equação para descrever a evolução da velocidade angular de um pulsar

$$\frac{d\Omega}{dt} = -K\Omega^n, \quad (4.10)$$

onde K é uma constante, relacionada com a estrutura do campo magnético e n é o um índice de frenagem, que é um parâmetro que nos diz como um pulsar diminui sua taxa de rotação. É possível constatar que o índice de frenagem contribui com diferentes graus de não linearidade para a equação diferencial da velocidade angular. Um caso especial de não linearidade consiste em tomar $n = 3$, correspondendo a um pulsar que irradia a sua energia na forma de um dipolo magnético. A partir dessa equação diferencial, podemos ver que o índice de frenagem deve obedecer o seguinte vínculo

$$n = \frac{\Omega \cdot \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}, \quad (4.11)$$

Considera-se ainda na análise padrão da equação diferencial acima a seguinte condição de contorno: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{P_0}$, a qual caracteriza um pulsar com alta velocidade angular. Deste modo, ao integrar a equação (4.10), são assumidos de forma padrão que: no tempo t_0 , a velocidade angular é $\Omega(t_0) = \Omega_0$, e no modelo canônico, considerando um $t = t_c$ (idade característica). Desta forma, é possível demonstrar que a idade do pulsar é tal que

$$t = -\frac{1}{n-1} \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{n-1}. \quad (4.12)$$

Ao considerarmos a aproximação na qual $\Omega_0 \gg \Omega$, para $n \neq 1$, temos

$$t_c = -\frac{1}{n-1} \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} = \frac{1}{n-1} \frac{P}{\dot{P}}, \quad (4.13)$$

que é a definição de idade característica. Podemos verificar ainda, que o índice de frenagem pode ser escrito em termos da velocidade angular, da frequência e do período de rotação como sendo

$$n = \frac{\Omega\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} = \frac{\nu\ddot{\nu}}{\dot{\nu}^2} = 2 - \frac{P\ddot{P}}{\dot{P}^2}. \quad (4.14)$$

A perda de energia rotacional equivale a potência (ou seja, a quantidade de energia que é concedida ou consumida por unidade de tempo) pela estrela, fazendo com que haja uma desaceleração de um pulsar.

4.3 Generalização da equação do decaimento de rotação de um pulsar

Na Cosmologia, tem-se a constante de Hubble, denotada por H_0 (que representa quão grande é o aumento da velocidade das galáxias a cada Megaparsec) é a responsável por fornecer a informação da taxa atual de expansão do Universo. Devido à melhoria da precisão com que somos capazes de medir as distâncias entre a Terra e as galáxias, a constante de Hubble sofreu modificações ao longo do tempo (tendo o seu valor atualizado diversas vezes) [35].

Das equações de Friedmann, são obtidas as informações de que um universo com uma densidade de energia maior, irá se expandir em um ritmo mais rápido, enquanto um universo com uma densidade de energia menor, expandirá em um ritmo mais lento. O parâmetro de densidade ($\tilde{\Omega}_0$) é um mecanismo muito útil para especificar a densidade do universo.

A a relação entre a curvatura, a densidade e taxa de expansão pode ser escrita como

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}, \quad (4.15)$$

ou

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1). \quad (4.16)$$

de onde, conhecendo Ω_0 , se conhece o sinal de curvatura de κ , e conhecendo a distância de Hubble dada por $\frac{H_0^2}{c^2}$ é possível calcular o raio de curvatura, R_0 .

Ao invés de citar a densidade do universo diretamente, é conveniente citar o seu valor em relação a densidade crítica (que define se o universo tem curvatura aberta ou fechada, e, dessa forma, se vai se expandir consideravelmente para sempre, ou se vai tornar a colapsar novamente no futuro) [36].

O parâmetro de densidade é descrito pela razão entre a densidade de matéria-energia do Universo e o valor que seria necessário para entender a sua curvatura, e é

definido como

$$\tilde{\Omega} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (4.17)$$

onde $\tilde{\Omega}$ é o parâmetro de densidade, e é uma função do tempo, tendo em vista que ρ e ρ_c dependem do tempo.

Recentemente, os astrônomos chegaram a conclusão de que o universo expande de forma acelerada, e a fonte desse processo de expansão é denominada por energia escura. O parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração são capazes de quantificar esse comportamento. Para derivarmos esses e outros parâmetros cosmológicos, consideramos a seguinte expansão em série de potências do fator de escalar $a(t)$. O fator de escala mede as variações nas escalas produzidas pela expansão ou contração do universo.

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (4.18)$$

Dividindo a equação anterior por $a(t_0)$, verificamos que esta pode ser reescrita como

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots, \quad (4.19)$$

onde $H = \dot{a}/a$ e o parâmetro de desaceleração é dado por

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}, \quad (4.20)$$

de onde podemos concluir que quanto maior o valor de q_0 mais rápida é a desaceleração.

Inspirados nesse procedimento de derivação de parâmetros cosmológicos a partir da expansão em série de potências do fator de escala, podemos fazer uma expansão análoga da velocidade angular de rotação de pulsar $\Omega(t)$. A partir daí, é possível generalizar a equação para o decaimento da velocidade de um pulsar, a fim de que seja possível encontrar novos modelos analíticos que descrevam o índice de frenagem.

Fazendo a expansão em série de potências para $\Omega(t)$ ao redor de $t = t_0$, obtemos

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \dot{\Omega}\Big|_{t_0}(t - t_0) + \frac{\ddot{\Omega}\Big|_{t_0}}{2}(t - t_0)^2 + \dots \quad (4.21)$$

Assim, ao dividirmos a equação anterior por $\Omega(t_0)$ temos

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega(t_0)} = 1 + \frac{\dot{\Omega}\Big|_{t_0}}{\Omega(t_0)}(t - t_0) + \frac{\ddot{\Omega}\Big|_{t_0}}{2\Omega(t_0)}(t - t_0)^2 + \dots, \quad (4.22)$$

a qual pode ser reescrita como

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega(t_0)} = 1 + \bar{\Omega}\Big|_{t_0}(t - t_0) + n\bar{\Omega}^2\Big|_{t_0}(t - t_0)^2 + \dots, \quad (4.23)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}; \quad n = \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}. \quad (4.24)$$

Consequentemente, a equação acima permite recuperarmos a forma do índice de frenagem e ainda derivamos um novo parâmetro ($\bar{\Omega}$) que mede a taxa de variação da velocidade de um pulsar, tendo comportamento análogo ao parâmetro de Hubble em relação ao fator de escala. Vemos ainda que os termos de alta ordem da equação (4.23) proporcionam a determinação de diversos novos parâmetros que podem ser utilizados para a caracterização dos pulsares.

Com o intuito de generalizar as classes de modelos analíticos para a determinação da velocidade angular de um pulsar, permita-nos considerar que $\Omega(t)$ obedece a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{\Omega} = W_{\Omega}, \quad (4.25)$$

onde W_{Ω} pode ser uma função não-linear de Ω e tem papel análogo ao do superpotencial em teoria clássica de campos. A equação diferencial acima implica em

$$\ddot{\Omega} = W_{\Omega\Omega} W_{\Omega}, \quad (4.26)$$

que ao ser substituída na segunda equação de (4.24), resulta na seguinte relação para o índice de frenagem

$$n = \frac{W_{\Omega\Omega}}{W_{\Omega}} \Omega. \quad (4.27)$$

A partir dessa generalização, é possível reproduzir curvas do índice de frenagem, em função do tempo no qual o pulsar gira rapidamente em declive. Um exemplo que pode ser considerado, é em relação ao pulsar PSR *J1734 – 3333* [37], que apresenta uma curva do índice de frenagem representado na figura 14. Este pulsar apresenta um comportamento peculiar para o seu índice de frenagem que de acordo com Gao et al. [37] está relacionado com comportamentos atípicos de seu campo magnético, sugerido que ele é uma potencial magnetar.

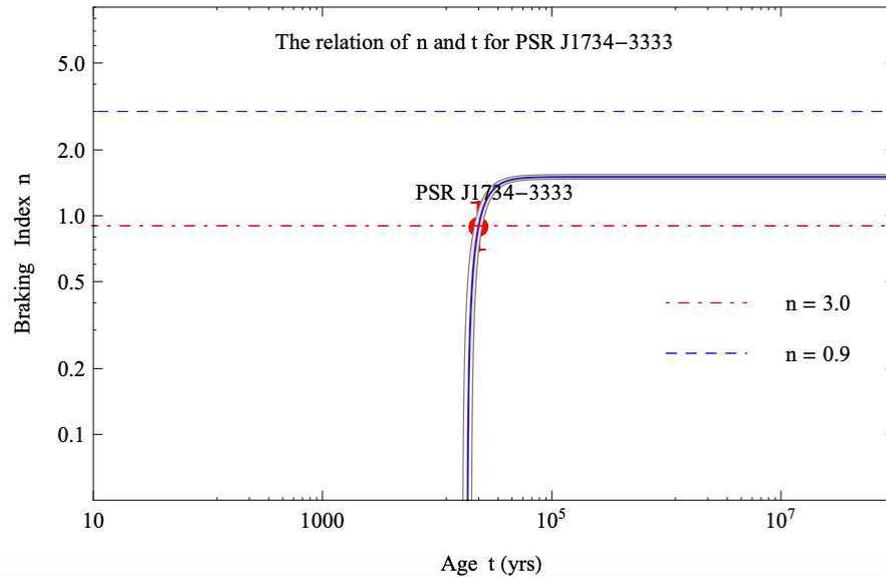
Na Fig. 14 a linha azul representa uma modelagem teórica proposta por Gao et al. [37], sobre o comportamento previsto para o índice de frenagem do pulsar PSR *J1734 – 3333*. Nessa proposta, n possui valores menores do que 3 (baixos índices de frenagem), que aumentam rapidamente até atingirem um valor aproximadamente constante onde $n \approx 1.5$. A linha vermelha tracejada mostrada informa que o atual valor experimental medido para o índice de frenagem é $n = 0.9$, com uma incerteza de $\Delta n = 0.2$ nas medidas.

Podemos tentar reproduzir essa curva do índice de frenagem considerando o seguinte modelo analítico

$$W_{\Omega} = -\Omega\sqrt{1 - \Omega^2}; \quad \dot{\Omega} = -\Omega\sqrt{1 - \Omega^2}, \quad (4.28)$$

cujas soluções analíticas são

$$\Omega(t) = \operatorname{sech}(t - t_0). \quad (4.29)$$

Figura 14 – Índice de frenagem em função de t para PSR J1344–3333.

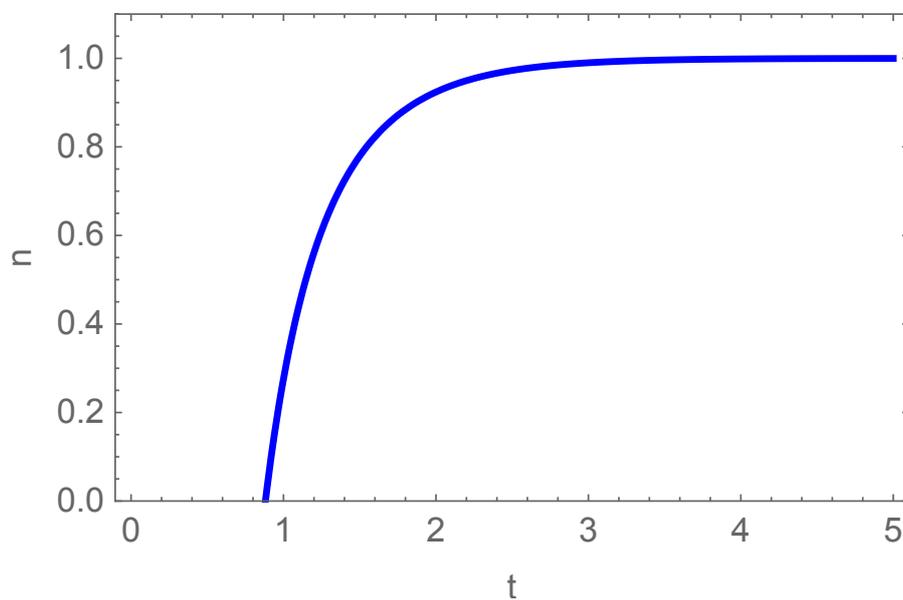
Fonte: Z.F.Gao; N.Wang. H.Shan.

Ao substituírmos esses ingredientes na relação para o índice de frenagem (4.27), encontramos

$$n = 1 - \operatorname{csch}^2(t - t_0), \quad (4.30)$$

que encontra-se plotado na Figura 15. Podemos ver que o índice de frenagem tem comportamento semelhante ao previsto para o pulsar $J1344 - 3333$, embora seu valor de convergência para longos intervalos de tempo seja $n \approx 1$ e não $n \approx 1.5$. Apesar deste modelo ainda não ser o melhor em termos de ajustes em relação à descrição teórica acerca do índice de frenagem do pulsar $J1344 - 3333$, acreditamos que ele evidencia o potencial de nossa metodologia para caracterização de comportamentos não triviais dos pulsares. Além disso, o valor previsto por nosso modelo encontra-se dentro da janela de incerteza do atual valor experimental do índice de frenagem.

Figura 15 – Índice de frenagem a partir da equação de generalização da rotação de um pulsar



Fonte: Elaborado pelo autor

5 Conclusões

Nesta dissertação estudamos como ferramentas já bem estabelecidas no contexto de teoria clássica de campos podem ser aplicadas à física de pulsares. Para tanto, fizemos uma revisão bibliográfica de conceitos fundamentais tanto na área de teoria clássica de campos quanto em gravitação e astrofísica de pulsares. Em teoria clássica de campos revisamos o formalismo de minimização da ação para um campo escalar real, como podemos derivar a equação de movimento para um campo escalar estático, analisar sua estabilidade e soluções tipo BPS. No caso de gravitação, vimos como podemos obter as equações de Einstein, como podemos resolver tais equações para uma dada métrica e como as soluções que caracterizam uma estrela de neutrons podem ser obtidas.

A astrofísica fornece muitos exemplos de corpos em rotação e em órbita cujos períodos de rotação e revolução podem ser determinadas com grande precisão. Os tempos de chegada dos pulsos de rádio dos pulsares não apenas fornecem informações sobre a natureza da fonte de rádio pulsada, como também podem fornecer uma posição precisa para a fonte. Já é conhecido que o tempo de chegada de um único pulso depende da frequência de rádio, que sofre dispersão devido à sua longa viagem através do gás ionizado do espaço interestelar.

A compressão dos restos de explosão de uma estrela influencia diretamente no aumento na intensidade do campo magnético, por causa da conservação do momento, e pelo fato de que nos polos a densidade magnética é maior, a atração gravitacional dos restos da estrela conduz a um objeto extremamente compacto. O desenvolvimento da teoria da relatividade geral foi fundamental para o estudo e compreensão dos objetos em questão (as estrelas de nêutrons), isso porque, seria impossível compreendê-las utilizando a teoria da gravitação clássica de Isaac Newton.

Com a descoberta dos pulsares, por Jocelyn Bell, houve uma nova revolução no contexto científico, que implicou na busca por compreender as propriedades das estrelas de nêutrons em rotações. O intenso campo magnético exerce uma poderosa influência no interior de um pulsar, e considerando que a rotação da estrela de nêutrons é composta por duas rotações, os fortes campos magnéticos exercem um efeito que se trata da desaceleração da taxa de rotação de um pulsar, onde há perda no momento angular da radiação eletromagnética.

Com isso, o presente trabalho teve como objetivo compreender como se dá essa taxa de redução na rotação de um pulsar, através de uma análise do índice de frenagem, a fim de modelar a equação para obter uma generalização deste parâmetro, e conseguir reproduzir curvas da taxa de desaceleração de pulsares distintos. Esperamos que, a partir

desta contribuição, outros trabalhos possam ser desenvolvidos, com o objetivo de analisar as propriedades de pulsares e estrelas de nêutrons a partir dos parâmetros já desenvolvidos.

Também temos como perspectivas ampliar a classe de modelos analíticos para o índice de frenagem, assim como considerar situações nas quais o decaimento de rotação do pulsar seja anisotrópico, comportamento este que pode ser mapeado a partir de técnicas consideradas em modelos compostos por dois campos escalares em teorias clássicas de campos. Poderemos também, analisar outros possíveis parâmetros associados à física dos pulsares determinados a partir da expansão do parâmetro $\Omega(t)$.

Referências

- [1] Marcelo Otávio Caminha Gomes. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. Edusp, 2002.
- [2] Alexander Vilenkin and E Paul S Shellard. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [4] H Lenzi César, Pedro J Pompeia, and Nelson Studart. A deflexão gravitacional da luz: De newton a einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41, 2019.
- [5] Anthony Zee. *Einstein gravity in a nutshell*, volume 14. Princeton University Press, 2013.
- [6] Júnior Diniz Toniato. De newton a einstein: a geometrização da gravitação. *Cadernos de Astronomia*, 1(1):17–29, 2020.
- [7] JE Horvath. A massa máxima das estrelas de nêutrons: uma abordagem didática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, 2020.
- [8] Domingos Soares. De schwarzschild a newton. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, 2020.
- [9] Andrew Lyne and Francis Graham-Smith. *Pulsar astronomy*. Cambridge University Press, 2012.
- [10] MAM Souza and JJ Rodrigues. O método de deformação como ferramenta didática na teoria de campos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41, 2018.
- [11] João Barcelos Neto. *Mecânica Newtoniana, Lgrangiana e Hamiltoniana*. Editora Livraria da Física, 2004.
- [12] M SOUZA, D Bazeia, L Losano, and R Menezes. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol*, 6(1):47, 2012.
- [13] Simone Vicente de Oliveira et al. Uma abordagem sobre a teoria do campo escalar real. 2009.
- [14] Joao Rafael Lucio dos Santos et al. Tópicos em defeitos deformados e o movimento browniano. 2013.
- [15] Ramayana Gazzinelli. *Teoria da relatividade especial*. Editora Blucher, 2019.

- [16] Robert Resnick and Shigeo Watanabe. *Introdução à relatividade especial*. Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
- [17] Oliver Fabio Piattella. Introdução à relatividade geral. *Cadernos de Astronomia*, 1(1):30–39, 2020.
- [18] Marcelo Costa de Lima. Sobre o surgimento das equações de maxwell. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41, 2019.
- [19] José Lourenço Cindra. Esboço da evolução histórica do princípio de relatividade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 16(1-4):56–67, 1994.
- [20] George FR Ellis and Ruth M Williams. Flat and curved space-times. *Oxford: Clarendon Press*, 1988.
- [21] Albert Einstein. *A teoria da relatividade: sobre a teoria da relatividade especial e geral*. L&PM Editores, 2022.
- [22] Albert Einstein. How i created the theory of relativity. *Physics today*, 35(8):45–47, 1982.
- [23] OA Acevedo, EM de Moraes, and BM Pimentel. O princípio de equivalência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41, 2019.
- [24] FT Falciano. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 31:4308–4317, 2009.
- [25] Matheus Pereira Lobo. No interior do horizonte de um buraco negro de schwarzschild. *Physicae*, 6(1):1–5, 2006.
- [26] James B. Hartle and Kip S. Thorne. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *Astrophys. J.*, 153:807, 1968.
- [27] Jane Gregório-Hetem, Thierry Montmerle, and Nicolas Grosso. Aglomerados estelares jovens recentemente descobertos em cmar1. *Instituto do Milênio: Instrumentação para os grandes telescópios e a evolução de estrelas e galáxias*, 2004.
- [28] Walter Junqueira Maciel. *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar Vol. 24*. Edusp, 1999.
- [29] Kepler de Souza Oliveira Filho and Maria de Fátima Oliveira Saraiva. Astronomia e astrofísica. *São Paulo: Editora Livraria da Física*, 780(2004):183, 2004.
- [30] David J Nice, Eric M Splaver, Ingrid H Stairs, Oliver Löhmer, Axel Jessner, Michael Kramer, and James M Cordes. A 2.1 m pulsar measured by relativistic orbital decay. *The Astrophysical Journal*, 634(2):1242, 2005.

-
- [31] Larissa do Nascimento Pires and Luiz OQ Peduzzi. Little green men: O episódio de detecção dos pulsares e o protagonismo de Jocelyn Bell Burnell. *Investigações em Ensino de Ciências*, 27(1):137, 2022.
- [32] Gerry McNamara and Joe O’Hara. The importance of the concept of self-evaluation in the changing landscape of education policy. *Studies in educational evaluation*, 34(3):173–179, 2008.
- [33] Larissa do Nascimento Pires and Luiz OQ Peduzzi. Jocelyn Bell Burnell e a descoberta dos pulsares: Revisando pesquisas do ensino de física e de astronomia em uma perspectiva histórica. *Investigações em Ensino de Ciências*, 26(3), 2021.
- [34] HO Oliveira, NS Magalhaes, RM Marinho Jr, GA Carvalho, and C Frajuca. The dynamics of neutron star superfluid cores and braking indices of young pulsars. *Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira*, 31(1):162–166, 2001.
- [35] D Soares. A idade do universo, a constante de Hubble e a expansão acelerada. *Tópicos em cosmologia relativista, disponível em www.researchgate.net/publication/338842995 (acesso em dez. 2020)*, 2009.
- [36] Helio V Fagundes. Modelos cosmológicos e a aceleração do universo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24:247–253, 2002.
- [37] Zhi-Fu Gao, N. Wang, and H. Shan. Could the low-braking-index pulsar PSR J1734–3333 evolve into a magnetar? *Astron. Nachr.*, 338(9-10):1060–1065, 2017.