



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Roberta Dárlla Reinaldo de Araújo

Solução de Corda Negra da Gravidade Rainbow

Campina Grande, Paraíba, Brasil

24 de dezembro de 2023

Roberta Dárlla Reinaldo de Araújo

Solução de Corda Negra da Gravidade Rainbow

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Francisco de Assis Brito
Coorientador: Job Saraiva Furtado Neto

Campina Grande, Paraíba, Brasil

24 de dezembro de 2023

A663s Araújo, Roberta Dárlla Reinaldo de.
Solução de corda negra da gravidade Rainbow / Roberta Dárlla
Reinaldo de Araújo. – Campina Grande, 2023.
96 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, Prof. Dr. Job
Saraiva Furtado Neto".

Referências.

1. Buraco Negro. 2. Corda Negra. 3. Gravidade Rainbow.
4. Termodinâmica. I. Brito, Francisco de Assis. II. Furtado Neto, Job
Saraiva. III. Título.

CDU 524.882(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

Solução de Corda Negra na Gravidade Rainbow

Roberta Dárlla Reinaldo de Araújo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 16/082023

Francisco de Assis de Brito

Presidente da Comissão e Orientador

Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Examinador Interno

Morgana Lígia de Farias Freire

Examinadora Externa



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, COORDENADOR(A)**, em 16/08/2023, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Morgana Lígia de Farias Freire, Usuário Externo**, em 16/08/2023, às 16:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberta Dárlla Reinaldo de Araújo, Usuário Externo**, em 16/08/2023, às 16:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 16/08/2023, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **3705521** e o código CRC **5AC40ADD**.

Agradecimentos

- Aos meus familiares e aos meus amigos pelo apoio e incentivo, aos meus pais por sempre cuidarem de mim não importando o quanto eu cresça e me torne adulta.
- A todos os meus ex-professores da URCA, em especial ao professor Wilson Hugo C. Freire, por tornar tudo isso possível, a Ivan Carneiro Jardim, por ser um ótimo e divertido amigo, e a Ricardo Rodrigues de Carvalho, por ser um professor tão marcante e uma pessoa tão inspiradora.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram para a minha formação, em especial aos professores João Rafael, Amílcar Queiroz, Luiz Stuani e Marcos Anacleto pelas ótimas aulas e ao professor Eduardo Passos por todas as sugestões e pela boa relação de amizade.
- Aos colegas de pós-graduação, Anderson Fernando, Pablo Gorgonho, Raiff Hugo e especialmente Laila Clarissa, por todo o apoio.
- Aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- Ao meu orientador Dr. Francisco de Assis Brito por ter me dado a oportunidade de trabalhar com ele e de aprender mais sobre essa área, pela grande paciência, disponibilidade, apoio e bondade.
- Ao meu coorientador Dr. Job Saraiva Furtado Neto por querer trabalhar comigo, ser tão atencioso e pelas boas orientações.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*"A pergunta diante de tudo e de todas as coisas, "Você quer isto mais uma vez e
incontáveis vezes?"."*
(Friedrich Nietzsche)

Resumo

Neste trabalho estudamos soluções de cordas negras sob consideração da gravidade Rainbow. Obtivemos analiticamente a solução para cordas negras quadridimensionais em termos das funções $f(E/E_p)$ e $g(E/E_p)$ que definem a escala de energia onde a gravidade Rainbow se torna relevante. Obtivemos também a temperatura de Hawking para a corda negra, a partir da qual nós pudemos ver que as funções rainbow desempenham o papel de aumentar ou diminuir a temperatura de Hawking para um dado raio de horizonte dependendo da escolha dessas funções. Calculamos também a entropia, calor específico e energia livre da corda negra. A entropia e o calor específico exibem uma dependência das funções rainbow enquanto a energia livre não apresenta modificação.

Palavras-chave: Buraco negro; Corda negra; Gravidade Rainbow; Termodinâmica.

Abstract

In this work we study black string solutions under the consideration of rainbow gravity. We have analytically obtained the solution for four-dimensional black strings in terms of the functions $f(E/E_p)$ and $g(E/E_p)$ that set the energy scale where the rainbow gravity becomes relevant. We have also obtained the Hawking temperature for the black string, from which we could see that the rainbow functions play the role of increasing or decreasing the Hawking temperature for a given horizon radius depending on the choice of such rainbow functions. We have computed the entropy, specific heat and free energy for the black string. The entropy and specific heat exhibit a rainbow dependence while the free energy is not modified by the rainbow functions.

Keywords: Black hole; Black string; Rainbow gravity; Thermodynamics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Transformação de coordenadas	23
Figura 2 – *	23
Figura 3 – Transporte paralelo no espaço plano	29
Figura 4 – *	29
Figura 5 – Transporte paralelo no espaço curvo	29
Figura 6 – *	29
Figura 7 – Temperatura de Hawking do buraco negro de Schwarzschild	46
Figura 8 – Entropia do buraco negro de Schwarzschild	47
Figura 9 – Calor específico do buraco negro de Schwarzschild	48
Figura 10 – Efeitos da gravidade Rainbow nos diferentes comprimentos de onda de luz próximo a uma fonte de gravidade forte.	56
Figura 11 – Solução da corda negra na gravidade Rainbow para o caso I das funções rainbow.	60
Figura 12 – Solução da corda negra na gravidade Rainbow para o caso II das funções rainbow.	60
Figura 13 – Temperatura de Hawking para uma solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso I.	61
Figura 14 – Temperatura de Hawking para uma solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso II.	62
Figura 15 – Entropia para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso I.	62
Figura 16 – Entropia para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso II.	63
Figura 17 – Calor específico para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso I.	63
Figura 18 – Calor específico para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso II.	64
Figura 19 – Potencial efetivo para partículas sem massa.	65
Figura 20 – Potencial efetivo para partículas massivas.	65

Lista de símbolos

η_{ab}	Métrica do espaço-tempo de Minkowski
g_{ab}	Métrica do espaço-tempo curvo
g	Determinante da métrica do espaço-tempo curvo
J	Jacobiano
Γ_{bc}^a	Símbolos de Christoffel
R_{bcd}^a	Tensor de Riemann
R_{ab}	Tensor de Ricci
R	Escalar de curvatura
G_{ab}	Tensor de Einstein
T_{ab}	Tensor momento-energia
λ	Letra grega Lambda
\in	Pertence
Λ	Constante cosmológica
\Rightarrow	"Implica que"
T_H	Temperatura de Hawking
S	Entropia
C_v	Calor específico
F	Energia Livre
l_p	Comprimento de Planck
E_p	Energia de Planck

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	19
2.1	Tensores	21
2.1.1	Variedades	21
2.1.2	Operações com tensores	23
2.1.3	Derivada de um tensor	28
2.1.4	Derivada covariante	29
2.1.5	Geodésicas Afins	31
2.1.6	Métrica	32
2.1.7	O tensor de Riemann	34
2.1.8	Tensor momento-energia	35
2.2	Equações de Campo	36
2.2.1	Termo cosmológico	38
3	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	39
3.1	Buracos negros	42
3.2	Termodinâmica de buracos negros	43
4	SOLUÇÃO DE CORDA NEGRA	49
4.1	Termodinâmica da Corda Negra	52
5	SOLUÇÃO DE CORDA NEGRA NA GRAVIDADE RAINBOW	55
5.1	Gravidade Rainbow	55
5.2	Solução de Corda Negra na Gravidade Rainbow	58
5.3	Termodinâmica da Corda Negra na Gravidade Rainbow	60
5.4	Geodésicas e órbitas circulares	64
6	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICES	73
	APÊNDICE A – COMPONENTES DOS TENSORES PARA A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	75
A.1	Símbolos de Christoffel	75

A.2	Tensor de Riemann	77
A.3	Tensor de Ricci	79

APÊNDICE B – COMPONENTES DOS TENSORES PARA A SOLUÇÃO DA CORDA NEGRA 81

B.1	Símbolos de Christoffel	81
B.2	Tensor de Riemann	82
B.3	Tensor de Ricci	85
B.4	Escalar de Curvatura	86

APÊNDICE C – COMPONENTES DOS TENSORES PARA A SOLUÇÃO DA CORDA NEGRA NA GRAVIDADE RAINBOW 87

C.1	Símbolos de Christoffel	87
C.2	Tensor de Riemann	88
C.3	Tensor de Ricci	91
C.4	Escalar de Curvatura	92

Appendices 93

1 Introdução

A formulação da teoria eletromagnética em 1861 por James Clerk Maxwell unificou os fenômenos elétricos e magnéticos e os descreveu quantitativamente no conjunto de equações chamadas equações de Maxwell, que caracterizavam também as ondas eletromagnéticas. Essas ondas possuíam um caráter diferente do mecânico pois eram causadas por alterações no campo eletromagnético e se propagavam no espaço vazio como consequência da teoria. A velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas foi o que mais instigou os pesquisadores da época, já que era numericamente igual à velocidade da luz e salientava uma relação entre fenômenos eletromagnéticos e ópticos. A natureza eletromagnética da luz e sua propagação no espaço vazio não ia de acordo com os conceitos da mecânica newtoniana, além disso, as equações de Maxwell não eram invariantes sob as transformações de Galileu.

Para contornar a incompatibilidade entre eletromagnetismo clássico e a mecânica newtoniana, Einstein formulou em 1905 a *Teoria da Relatividade Especial*, essa teoria foi baseada em dois postulados. O primeiro postulado, em essência, afirma que para todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas as leis da óptica e da eletrodinâmica. O segundo enuncia que a luz, no vácuo, sempre se propaga com uma velocidade determinada que independe do estado de movimento da fonte luminosa e do estado de movimento do observador. Esses dois postulados foram formulados para sistemas de referência que caracterizam os chamados *referenciais inerciais*¹. Tais postulados mostraram-se suficientes para solucionar as contrariedades do caráter da natureza da luz e sustentar o princípio da relatividade, deixando invariante as equações de Maxwell.

A teoria da relatividade especial se tornou um dos pilares da física moderna, no entanto, é uma teoria restrita a uma classe privilegiada de observadores: os observadores inerciais. Ao incluir a gravitação, e conseqüentemente referenciais não inerciais, Einstein complementou a sua formulação originando a *Teoria da Relatividade Geral* em 1915. Essa teoria conseguiu explicar satisfatoriamente inconsistências da mecânica newtoniana, como a precessão do periélio de Mercúrio, por exemplo, além de fazer previsões inéditas e específicas referentes ao comportamento da natureza, como a existência de ondas gravitacionais e buracos negros.

Buracos negros são obtidos como soluções das equações de Einstein e desempenham um papel muito relevante na física, tendo em vista que tais objetos podem ser usados para entender como o espaço-tempo se estabelece após um colapso gravitacional, além de

¹ De maneira concisa, um referencial inercial pode ser definido como aquele que caracteriza um observador que possui um movimento com velocidade constante em relação a uma partícula livre.

investigar a relação entre as características do espaço-tempo em escala microscópica e em escala macroscópica. Apesar de haver uma tendência natural para o estudo de buracos negros de simetria esférica, especialmente em espaços-tempo que possuem constante cosmológica nula, o estudo de tais objetos com simetrias diferentes também se efetivou como algo de interesse. Espaços-tempo que admitem constante cosmológica negativa são o pano de fundo para a existência de buracos negros de simetria cilíndrica e uma corda negra surge nesse cenário. Uma solução de corda negra para uma ação de Einstein-Hilbert quadridimensional foi proposta em [1], dentro do cenário da teoria clássica da gravitação e desde então tem sido extensivamente estudada na literatura.

A teoria da relatividade geral, apesar de bem sucedida, não consegue descrever alguns fenômenos no regime de altas energias e falha em caracterizar fenômenos no mundo quântico, por este motivo, algumas propostas surgem tentando desenvolver uma teoria mais geral que seja capaz de abarcar tais fenômenos. A Relatividade Duplamente Especial (DSR) foi originalmente proposta por Amelino-Camelia [2] e surge como uma teoria modificada da relatividade restrita, essa teoria parte do princípio de que além da velocidade da luz, existe uma escala de comprimento característico que deve permanecer invariante sob as transformações de Lorentz. Esse modelo ainda sugere que a relação de dispersão é modificada quando se considera energias próximas à escala de Planck [3, 2, 4, 5].

A gravidade Rainbow foi proposta há mais de uma década, sendo estudada dentro do escopo da DSR. De acordo com essa teoria, não existe uma única geometria clássica para o espaço-tempo quando se considera energias próximas à escala de Planck e isso leva a uma modificação na relação de dispersão [6] que permite a explicação de alguns fenômenos, como os raios cósmicos, por exemplo. Na astrofísica, a influência da gravidade Rainbow nas propriedades de um buraco negro tem sido estudada em diversos cenários, incluindo sua termodinâmica [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], e também no estudo de cordas cósmicas [18, 19, 20], além de favorecer o entendimento do universo primitivo, no qual as energias envolvidas estavam próximas à escala de Planck.

Neste trabalho, estudamos soluções de cordas negras sob a consideração da gravidade Rainbow. Nós obtivemos analiticamente a solução para cordas negras quadridimensionais em termos das funções $f(E/E_p)$ e $g(E/E_p)$ que definem a escala de energia onde a gravidade Rainbow se torna relevante. Além disso, calculamos a temperatura de Hawking, entropia, calor específico e energia livre da corda negra, bem como estudamos os efeitos da gravidade Rainbow nas órbitas de partículas massivas e sem massa em torno da corda negra.

2 Teoria da Relatividade Geral

Um dos princípios bases para a teoria da relatividade geral é o **princípio da equivalência**, cujo ponto chave consiste em entender o caráter da massa gravitacional e da massa inercial. A massa inercial é definida pela segunda lei de Newton

$$\vec{F} = m_I \vec{a}, \quad (2.1)$$

e pode ser entendida como a medida da resistência de um corpo a uma mudança em seu movimento. A massa gravitacional, por sua vez, seria uma propriedade intrínseca da matéria, tal como a carga elétrica, e seria o agente causador e receptor do campo gravitacional. Assim, temos duas categorias: a massa gravitacional ativa, que produziria o campo, e a passiva, que sofreria a ação do campo, mas devido à simetria na equação da lei da gravitação universal, estas massas são equivalentes.

A força que um corpo esfericamente simétrico de massa M constante exerceria em um corpo de massa gravitacional m_g é dada por

$$\vec{F} = -\frac{GMm_g}{r^2} \hat{r}. \quad (2.2)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário de M para m_g . Considerando que a força resultante que atua sobre o corpo de massa gravitacional m_g é a força gravitacional e comparando (2.1) com (2.2), em magnitude, temos que

$$\frac{GM}{r^2} m_g = m_I a. \quad (2.3)$$

Na mecânica newtoniana foi medido com boa precisão, usando as unidades adequadas, que a massa inercial e a massa gravitacional são iguais, ou seja, a massa que gera o campo gravitacional é a mesma que define a tendência de inércia de um corpo. Portanto, a aceleração produzida por um corpo de massa M será

$$a = \frac{GM}{r^2} = \text{constante}. \quad (2.4)$$

A aceleração da gravidade seria, então, a mesma para todos os corpos com massas suficientemente pequenas para experienciar um campo gravitacional, mas não contribuir para o mesmo. Esse resultado é suportado experimentalmente, tendo em vista que, estabelecido um local onde haja um campo gravitacional conhecido, é verificado que todos os objetos caem, independente de sua forma e composição, com a mesma aceleração quando soltos em queda livre a partir de um mesmo ponto. Se houvesse realmente alguma diferença entre massa gravitacional e massa inercial, um corpo que, por exemplo, apresentasse massa inercial razoavelmente maior do que sua massa gravitacional deveria, em seu processo de

queda, apresentar uma aceleração menor do que a que se observaria em um corpo no qual a massa gravitacional mostrasse-se maior que sua massa inercial.

Essa equivalência, no entanto, poderia ser apenas uma coincidência, considerando que a existência da massa inercial não estaria, à priori, relacionada à gravidade. Einstein pensou nesse fato como algo mais fundamental. Todas as forças inerciais são proporcionais à massa do corpo que as experimenta, existe uma força que se comporta da mesma maneira: a força da gravitação. Se jogarmos dois corpos no campo gravitacional da Terra, por exemplo, eles vão experimentar as forças m_1g e m_2g , respectivamente. Essa coincidência sugeriu para Einstein que poderíamos tratar a gravitação como um efeito inercial também, ou seja, um efeito que surge por não usarmos um referencial inercial. Portanto, o princípio da equivalência de Einstein pode ser enunciado da seguinte forma:

Um referencial linearmente acelerado em relação a um referencial inercial é localmente idêntico a um referencial em repouso em um campo gravitacional.

Vale ressaltar que "localmente" se refere a um referencial localizado em uma região tão pequena que não é possível verificar mudanças consideráveis no campo gravitacional, ou seja, o campo é aproximadamente uniforme. Assim, de acordo com o princípio da equivalência, é impossível um referencial que esteja em repouso sob a ação de um campo gravitacional uniforme de um referencial que esteja acelerado. Por exemplo, se uma pessoa estiver dentro de uma nave e experimentar uma força a puxando para baixo, a mesma não poderá afirmar se essa força é devido a gravidade local ou se é a própria aceleração da nave no sentido oposto que está gerando esse efeito. Portanto, as leis da gravitação são definidas a partir do princípio de que a gravidade é equivalente a um referencial acelerado.

Consequentemente é possível remover os efeitos gravitacionais e recair na relatividade especial, podemos fazer isso considerando um sistema de referência que está em queda livre e seja não rotativo. Assim, não haveriam experimentos locais que poderiam distinguir referenciais não rotativos em queda livre em um campo gravitacional daquele que esteja em movimento uniforme no espaço na ausência do campo gravitacional. Dessa forma, seria impossível distinguir um referencial em queda livre de um outro que seja inercial. Se uma pessoa estiver em uma nave e não sentir a atuação de nenhuma nenhuma força sobre ela, a mesma não saberá relatar se está em um local onde não há gravidade ou se está sofrendo o efeito da gravidade, porém em queda livre com a mesma aceleração do campo gravitacional.

Uma consequência que surge do princípio da equivalência é que não é possível se construir nenhuma experiência de qualquer caráter que consiga distinguir o efeito de um referencial acelerado do efeito de um referencial em repouso sob efeito de um campo gravitacional uniforme. Isso levou Einstein a propor o **princípio da covariância geral**, que estende o princípio da relatividade especial e afirma que todos os observadores,

incluindo os não-inerciais, são equivalentes. Assim, todos os observadores são capazes de discutir as leis da física, dessa forma, é natural assumir que todas as equações que descrevem as leis físicas devem ser invariantes sob uma transformação de coordenadas global. Portanto, o princípio da covariância geral pode ser declarado da seguinte forma:

As equações da física devem ser da forma tensorial.

Para entendermos melhor esse enunciado precisamos definir o que são os tensores e estudar suas propriedades para sermos capazes de estudar a relatividade geral a partir dessa formulação.

2.1 Tensores

De maneira pragmática, tensores podem ser entendidos como uma extensão natural do conceito de matriz, tendo em vista que eles são usualmente representados dessa forma. O exemplo mais simples de um tensor é o que chamamos de *escalar* ou *tensor de ordem zero*, que é basicamente um número e pode ser representado por uma matriz de uma linha e uma coluna. Um *vetor* ou *tensor de ordem 1* pode ser representado por uma matriz coluna e *tensores de ordem 2* são representados por matrizes quadradas

$$C = [3] \quad v = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Esse conceito se aplica para mais dimensões e um *tensor de ordem 3*, por exemplo, seria representado por uma grade tridimensional de números e tensores de ordem superior seriam representados por matrizes multidimensionais. Apesar dessa definição ser prática, ela não é totalmente satisfatória, um tensor é um objeto bem mais abstrato e possui um significado geométrico.

Podemos definir um tensor de maneira mais precisa como um objeto que é invariante sob uma mudança de coordenadas, ao contrário de suas componentes que se transformam ao passar de uma representação para outra. Ou seja, as componentes de um tensor são modificadas pela lei de transformação que dita a mudança de coordenadas mas o tensor em si, não muda. De maneira mais completa e abstrata, um tensor é um objeto geométrico definido em uma entrada geométrica chamada **variedade**.

2.1.1 Variedades

Uma variedade de dimensão n é algo que localmente se parece com o espaço euclidiano \mathbf{R}^n mas globalmente possui uma estrutura bem diferente [21]. Podemos tomar

o exemplo da esfera S^2 que é uma superfície curva, mas uma região suficiente pequena de S^2 é bem semelhante ao plano euclidiano \mathbf{R}^2 . De maneira geral, uma variedade M de n dimensões é caracterizada como um conjunto de pontos onde cada ponto possui um conjunto de n coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) .

Um fato importante é que, não é possível descrever geometricamente a semelhança local da variedade com o \mathbf{R}^n através de um único sistema de coordenadas, ou seja, um que descreve um único conjunto de n números de coordenadas para cada ponto. Por exemplo, a esfera S^2 de raio R pode ser parametrizada como:

$$X(\phi, \theta) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta), \quad (2.5)$$

com $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. Essa parametrização é satisfatória para associar um único conjunto de coordenadas para cada ponto sobre a esfera, no entanto, ela não satisfaz as condições que categorizariam a esfera S^2 como uma superfície quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Uma saída para este problema é utilizar duas parametrizações:

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}), \quad (2.6)$$

$$X'(u, v) = (u, v, -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}). \quad (2.7)$$

Por este motivo trabalhamos com sistemas de coordenadas que cubram apenas uma porção da variedade.

Perto de cada ponto da variedade M de dimensão n podemos construir uma *carta*. Uma carta pode ser definida como um subconjunto aberto U de M mais um homeomorfismo $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbf{R}^n$, ou seja, a imagem do homeomorfismo ϕ é um subconjunto aberto de \mathbf{R}^n . O homeomorfismo permite a saída de um sistema de coordenadas para outro através de uma transformação de coordenadas na região de sobreposição, como está esquematizado na figura (2).

Um conjunto de cartas que cobre toda a variedade é chamado de *atlas*, esse atlas pode ser só contínuo mas estamos interessados no caso em que ele é também suave para que seja possível trabalhar com o cálculo diferencial, que tem como ambiente natural o espaço euclidiano, por isso trabalharemos com as *variedades diferenciáveis*.

Dada uma variedade, estaremos preocupados com os pontos nela e os subconjuntos de pontos que definem *curvas* e *superfícies* de diferentes dimensões. Uma curva é definida como uma aplicação diferenciável que possui um grau de liberdade, ou seja, que depende de apenas um parâmetro. Vamos designar uma curva pelas equações paramétricas:

$$x^a = x^a(u), \quad (2.8)$$

onde $(a = 1, 2, \dots, n)$, e $x^1(u), x^2(u), \dots, x^n(u)$ são n funções do parâmetro u .

Uma superfície, por sua vez, é uma aplicação que depende de m parâmetros, portanto, possui m graus de liberdade e dimensão m . Vamos designá-la pelas equações

Figura 1 – Transformação de coordenadas

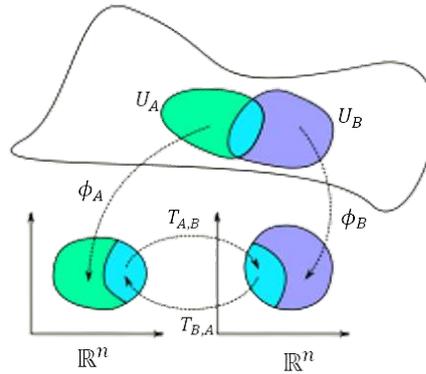


Figura 2 – *

Fonte: <https://bjlkeng.io/posts/manifolds/>

paramétricas:

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad (2.9)$$

com $(a = 1, 2, \dots, n)$.

Um ponto sobre a variedade pode ser descrito a partir de diferentes sistemas de coordenadas, conseqüentemente, precisamos descobrir como suas coordenadas se comportam quando vamos de um sistema para outro. Consideramos, portanto, a transformação $x^a \rightarrow x'^a$ dada pelas n equações:

$$x'^a = f^a(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (2.10)$$

onde as f^a 's são funções diferenciáveis. Assim, vemos uma transformação como atribuir a um ponto da variedade cujas coordenadas antigas são (x^1, x^2, \dots, x^n) as novas coordenadas $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$. Além disso, podemos escrever a equação (2.10) de maneira mais simples como

$$x'^a = x'^a(x), \quad (2.11)$$

observe que a transformação se dá quando tomamos cada coordenada nova como função das n coordenadas antigas.

2.1.2 Operações com tensores

As transformações entre sistemas de coordenadas descritos segundo o sistema cartesianos são obtidas de maneira mais objetiva, pois os vetores de base que geram o sistema cartesiano são constantes, no entanto, transformações de coordenadas entre sistemas gerais são mais complexas, tendo em vista que em sistemas curvilíneos seus vetores

de base mudam de ponto à ponto. Portanto, a matriz de transformação de coeficientes é obtida derivando (2.11) em relação as antigas coordenadas x^b , que resulta na matriz Jacobiana:

$$\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

O determinante J' dessa matriz é chamado de jacobiano da transformação.

Podemos obter a transformação inversa

$$x^a = x^a(x'), \quad (2.13)$$

cuja matriz de transformação é:

$$\left[\frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial x'^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^n}{\partial x'^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x'^n} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

e segue diretamente da regra do produto para determinantes que o jacobiano da função inversa será $J = 1/J'$

Em três dimensões, a equação de uma superfície é dada por $z = f(x, y)$ e sua diferencial total é definida como

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.15)$$

Assim, de maneira análoga, a diferencial total de (2.11) é definida como

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^a}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial x'^a}{\partial x^n} dx^n, \quad (2.16)$$

para cada a indo de 1 à n . Podemos escrever isso de maneira mais concisa como

$$dx'^a = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b, \quad (2.17)$$

ou de maneira ainda mais econômica pela introdução da **notação de Einstein**, que consiste basicamente omitir o símbolo de somatório e interpretar os índices que se repetem uma vez em um mesmo termo como indicador desse somatório

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b. \quad (2.18)$$

Os índices que não se repetem não representam somatórios, mas sim o número de equações. O índice repetido pode ser substituído por qualquer outra letra que ainda não esteja em uso

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} dx^c. \quad (2.19)$$

Segue diretamente da definição de derivada parcial que

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x'^b} = \frac{\partial x^a}{\partial x^b} = \delta_b^a, \quad (2.20)$$

onde δ_b^a é o Delta de Kronecker, que é uma quantidade definida como

$$\delta_b^a = \begin{cases} 1, & \text{se } a = b; \\ 0, & \text{se } a \neq b \end{cases} \quad (2.21)$$

Consideremos agora dois pontos vizinhos P e Q na variedade com coordenadas x^a e $x^a + dx^a$, respetivamente. Esses dois pontos definem um vetor infinitesimal dx^a avaliado no ponto P , as componentes desse vetor em relação ao sistema de coordenadas x'^a é dx'^a , de modo que elas estão conectadas através da equação

$$dx'^a = \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right] dx^b. \quad (2.22)$$

Assim, podemos definir um vetor contravariante - ou tensor contravariante de ordem 1 - como quantidades que se transformam com a matriz (2.12) sob uma mudança de coordenadas:

$$X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b. \quad (2.23)$$

Generalizando essa definição, um tensor contravariante de ordem 2 é um conjunto de quantidades associadas ao ponto P , que denotaremos por X^{ab} no sistema de coordenadas x^a , que se transformam de acordo com

$$X'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} X^{cd}, \quad (2.24)$$

ou seja, com duas matrizes de transformação. Esse conceito pode ser estendido para tensores de ordem superior.

Vamos considerar agora a função de valor real na variedade:

$$\phi = \phi(x^b), \quad (2.25)$$

ou seja, para cada ponto P na variedade, $\phi(P)$ produz um número real. Portanto, assumindo que ϕ é uma função diferenciável podemos tomar $\partial\phi/\partial x^b$. Como $x^b = x^b(x')$ temos, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \frac{\partial\phi}{\partial x^b}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, podemos definir um vetor covariante ou tensor covariante de ordem 1 como quantidades que se transformam com a matriz (2.14) sob uma mudança de coordenadas

$$X'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} X_b. \quad (2.27)$$

De maneira semelhante, vamos definir um tensor covariante de ordem 2 como quantidades que se transformam de acordo

$$X'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} X_{cd}. \quad (2.28)$$

Tensores mistos são quantidades que se transformam com as duas matrizes de transformação (2.12) e (2.14). Um tensor misto de ordem 3 - uma vez contravariante e duas vezes covariante - satisfaz a equação

$$X'^a_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} X^d_{ef}. \quad (2.29)$$

Se um tensor misto tem p índices contravariantes e q índices covariantes, então o denotamos como um tensor do tipo (p, q) .

Um escalar α , também chamado de tensor de ordem zero, é uma quantidade que se transforma como

$$\alpha = \alpha'. \quad (2.30)$$

Em análise vetorial, um vetor fixo é um vetor associado a um ponto enquanto um campo vetorial definido sobre uma região é uma associação de um vetor para cada ponto da região. Por exemplo, um campo vetorial em \mathbf{R}^2 é uma aplicação $F : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad (2.31)$$

$$\vec{F} = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}. \quad (2.32)$$

De maneira análoga, um tensor é um objeto definido em um ponto da variedade enquanto um campo tensorial definido sobre uma região da variedade é uma associação de um tensor de mesma ordem para cada ponto da região. A lei de transformação para um campo tensorial contravariante é, portanto

$$X'^a(x') = \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right]_P X^b(x), \quad (2.33)$$

Para um campo tensorial covariante

$$X'_a(x') = \left[\frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \right]_P X_b(x). \quad (2.34)$$

Estamos interessados em operações com tensores que resultam em outros tensores. Tensores do mesmo tipo podem ser somados e resultam em um tensor também do mesmo tipo

$$X_{bc}^a = Y_{bc}^a + Z_{bc}^a, \quad (2.35)$$

sendo esses tensores avaliados no mesmo ponto P . O mesmo vale para a subtração e a multiplicação por escalar.

Nós podemos multiplicar dois tensores do tipo (p_1, q_1) e (p_2, q_2) e obter um tensor do tipo $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$

$$X_{bcd}^a = Y_b^a Z_{cd}. \quad (2.36)$$

Dado um tensor do tipo (p, q) podemos formar um tensor do tipo $(p - 1, q - 1)$ pelo processo de contração, por exemplo, dado o tensor X_{bcd}^a

$$\delta^{ba} X_{bcd}^a = X_{acd}^a = Y_{cd}.$$

Um tensor covariante de ordem 2 é dito simétrico se $X_{ab} = X_{ba}$. Ou seja,

$$X_{ab} - X_{ba} = 0, \quad (2.37)$$

e é dito anti-simétrico se $X_{ab} = -X_{ba}$, logo

$$X_{ab} + X_{ba} = 0. \quad (2.38)$$

Assim, podemos representar o tensor X_{ab} da forma:

$$X_{ab} = \frac{1}{2}[X_{ab} + X_{ba}], \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{2}[X_{ab} + X_{ab} + X_{ba} - X_{ba}]. \quad (2.40)$$

Daí, temos

$$X_{ab} = \frac{1}{2}(X_{ab} + X_{ba}) + \frac{1}{2}(X_{ab} - X_{ba}). \quad (2.41)$$

Assim, a partir de (2.37) podemos definir a parte simétrica do tensor como

$$X_{ab} = \frac{1}{2}(X_{ab} + X_{ba}), \quad (2.42)$$

e a partir de (2.38) podemos definir a parte anti-simétrica do tensor como

$$X_{ab} = \frac{1}{2}(X_{ab} - X_{ba}). \quad (2.43)$$

Para um tensor covariante de ordem 3, sua parte simétrica e anti-simétrica são dadas respectivamente por

$$X_{abc} = \frac{1}{6}[X_{abc} + X_{acb} + X_{cab} + X_{cba} + X_{bca} + X_{bac}], \quad (2.44)$$

$$X_{abc} = \frac{1}{6}[X_{abc} - X_{acb} + X_{cab} - X_{cba} + X_{bca} - X_{bac}]. \quad (2.45)$$

Para um tensor covariante de ordem n temos

$$X_{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{n!} (\text{soma de todas as permutações dos índices } a_1 \text{ para } a_n). \quad (2.46)$$

2.1.3 Derivada de um tensor

Como vimos anteriormente, algumas operações algébricas são tensoriais, i.e. converte tensores em tensores, no entanto, existem algumas operações que não possuem o mesmo caráter como, por exemplo, a derivada parcial usual de um tensor que, em geral, não forma um tensor. No caso de um vetor contravariante, pela relação dada em (2.23), temos que

$$\frac{\partial X'^a}{\partial x'^c} = \frac{\partial}{\partial x'^c} \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b \right) \quad (2.47)$$

$$= \frac{\partial x^d}{\partial x'^c} \frac{\partial}{\partial x^d} \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b \right) \quad (2.48)$$

$$= \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \frac{\partial x^d}{\partial x'^c} \frac{\partial X^b}{\partial x^d} + \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^b \partial x^d} \frac{\partial x^d}{\partial x'^c} X^b. \quad (2.49)$$

Observe que se o segundo termo do lado direito da equação (2.49) não existisse, então a derivada parcial atuaria em um vetor contravariante como uma transformação tensorial usual para um tensor do tipo (1,1), no entanto, a presença deste termo impede esse comportamento. Existe um motivo pelo qual isso ocorre.

Pela definição, derivar implica comparar uma quantidade avaliada em dois pontos vizinhos P e Q no limite em que um parâmetro δu que represente a separação entre esses dois pontos tende a zero. No caso de um campo vetorial contravariante X^a no espaço plano, o limite do parâmetro δu ir à zero pode ser interpretado geometricamente como o transporte paralelo do vetor que caracteriza o campo X^a no ponto Q até o ponto P . Nesse caso, o transporte é trivial e está esquematizado na figura (4).

No entanto, lidar com campos vetoriais imersos em espaços diferentes do \mathbf{R}^n acaba sendo um trabalho difícil, isso acontece porque esses espaços são geralmente curvos e a definição de um tensor num espaço curvo é local, ou seja, só é legítimo operar com tensores em um ponto, isso ocorre porque a orientação desses vetores mudam de ponto à ponto, então tomá-los apenas como sendo segmentos de reta equipolentes e deslizando um sobre o outro para compará-los acaba não tendo muito sentido.

Figura 3 – Transporte paralelo no espaço plano

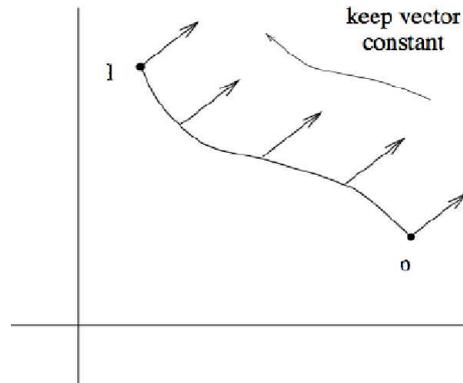


Figura 4 – *

Fonte: <https://www.researchgate.net/figure/Parallel-transport-in-flat-spacetime>

Figura 5 – Transporte paralelo no espaço curvo

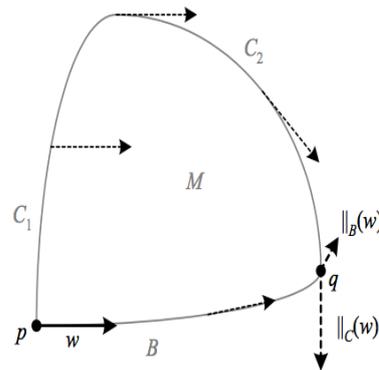


Figura 6 – *

Fonte: mathphysicsbook.com/mathematics/riemannian-manifolds/introducing-parallel-transport-of-vectors/the-parallel-transporter/

Como vemos na figura (6), quando transportamos paralelamente o vetor \mathbf{w} do ponto p ao ponto q , a depender do caminho escolhido para fazer isso, obtemos vetores com orientações diferentes, o mesmo não acontece em um espaço plano onde a orientação do vetor é sempre preservada. Portanto, para definir uma derivada que faça sentido para espaços curvos, precisamos encontrar uma outra maneira de comparar vetores.

2.1.4 Derivada covariante

Vamos considerar um campo vetorial contravariante $X^a(x)$ avaliado no ponto Q que possui coordenadas $x^a + \delta x^a$. Pelo teorema de Taylor temos que

$$X^a(x + \delta x) = X^a(x) + \delta x^b \partial_b X^a. \quad (2.50)$$

Denotando $\delta x^b \partial_b X^a = \delta X^a(x)$ obtemos

$$X^a(x + \delta x) = X^a(x) + \delta X^a(x) \quad (2.51)$$

$$\delta X^a(x) = X^a(x + \delta x) - X^a(x) \quad (2.52)$$

Observe que essa quantidade não é tensorial já que envolve a subtração de tensores avaliados em pontos diferentes. O ponto Q está próximo de um ponto P com coordenadas x^a . Para definir uma derivada tensorial, vamos introduzir um vetor em Q que, para algum senso geral, é paralelo à X^a avaliado em P . Já que $x^a + \delta x^a$ é próximo à x^a , então podemos assumir que o vetor paralelo só difere de X^a por uma pequena quantidade, que denotaremos por $\tilde{\delta} X^a$ e que também não possui caráter tensorial, mas a construiremos de forma que

$$X^a(x) + \delta X^a(x) - [X^a(x) + \tilde{\delta} X^a(x)] = \delta X^a(x) - \tilde{\delta} X^a(x), \quad (2.53)$$

seja tensorial.

É natural exigir que $\tilde{\delta} X^a(x)$ desapareça sempre que $X^a(x)$ ou δx^a desaparecer. Por este motivo, se torna mais simples assumir que $\tilde{\delta} X^a$ é linear tanto em $X^a(x)$ como em δx^a . Isso significa que existem fatores multiplicativos que denotaremos por Γ_{bc}^a onde

$$\tilde{\delta} X^a(x) = -\Gamma_{bc}^a X^b(x) \delta x^c. \quad (2.54)$$

O sinal de menos é convencional.

Vamos portanto, definir a **derivada covariante** pelo processo limitante

$$\nabla_c X^a = \lim_{\delta x^c \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^c} \{X^a(x + \delta x) - [X^a(x) + \tilde{\delta} X^a(x)]\} \quad (2.55)$$

$$= \lim_{\delta x^c \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^c} \{X^a(x + \delta x) - [X^a(x) - \Gamma_{bc}^a X^b(x) \delta x^c]\} \quad (2.56)$$

$$= \lim_{\delta x^c \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^c} \{X^a(x + \delta x) - X^a(x)\} + \lim_{\delta x^c \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^c} \{\Gamma_{bc}^a X^b(x) \delta x^c\}. \quad (2.57)$$

Em outras palavras, é a diferença entre o vetor $X^a(Q)$ e o vetor em Q paralelo à $X^a(P)$ dividida pela diferença de coordenadas no limite em que essa diferença tende a zero. Portanto,

$$\nabla_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma_{bc}^a X^b. \quad (2.58)$$

O objeto Γ_{bc}^a é denominado **conexão afim** e se transforma de acordo com

$$\Gamma'_{bc}{}^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \Gamma_{ef}{}^d - \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \frac{\partial x^e}{\partial x'^c} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^d \partial x^e}, \quad (2.59)$$

ou de maneira equivalente

$$\Gamma'_{bc}{}^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \Gamma_{ef}{}^d + \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial^2 x^a}{\partial x'^b \partial x'^c}. \quad (2.60)$$

Observe que a não linearidade da transformação da conexão afim indica que a mesma não possui caráter tensorial, no entanto, a existência do termo não homogêneo não é surpreendente já que deve compensar o segundo termo que aparece em (2.49).

A expressão no caso de um tensor geral é

$$\nabla_c T_{a\dots}^{b\dots} = \partial_c T_{a\dots}^{b\dots} + \Gamma_{dc}^a T_{d\dots}^{b\dots} + \dots - \Gamma_{bc}^d T_{a\dots}^{d\dots} - \dots \quad (2.61)$$

O nome derivada covariante vem do fato de que a derivada de um tensor do tipo (p, q) é do tipo $(p, q + 1)$, i.e., tem uma classificação covariante extra.

A soma de duas conexões não é uma conexão e nem um tensor, mas a diferença de duas conexões é um tensor do tipo $(1, 2)$ (já que o termo não homogêneo se cancela na transformação) que é chamado de **tensor de torção**, dado por

$$T_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a. \quad (2.62)$$

Quando o tensor de torção desaparece, então a conexão é dita simétrica, isto é

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a \quad (2.63)$$

2.1.5 Geodésicas Afins

Um campo vetorial contravariante X pode determinar uma congruência local de curvas

$$x^a = x^a(u), \quad (2.64)$$

de modo que o campo tangente à congruência é

$$\frac{\partial x^a}{\partial u} = X^a. \quad (2.65)$$

A partir disso, podemos definir a derivada de um tensor qualquer $T_{b\dots}^{a\dots}$ ao longo da curva C da congruência como

$$\frac{D}{Du}(T_{b\dots}^{a\dots}) = \nabla_X T_{b\dots}^{a\dots}, \quad (2.66)$$

onde $\nabla_X = X^c \nabla_c$ é a derivada covariante de um tensor contraída com X .

O tensor $T_{b\dots}^{a\dots}$ é propagado paralelamente ou transportado ao longo da curva C se

$$\frac{D}{Du}(T_{b\dots}^{a\dots}) = 0. \quad (2.67)$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem para $T_{b\dots}^{a\dots}$, assim, dado um valor inicial $T_{b\dots}^{a\dots}(P)$, a equação (2.67) determina um tensor ao longo de C que é paralelo à $T_{b\dots}^{a\dots}$ em todos os pontos.

Portanto, uma geodésica afim pode ser definida como uma curva privilegiada ao longo da qual o vetor tangente se propaga paralelamente a ele mesmo. Em outras palavras, o vetor propagado paralelamente em qualquer ponto da curva, é proporcional ao vetor tangente nesse ponto

$$\frac{D}{Du} \left(\frac{dx^a}{du} \right) = \lambda(u) \frac{dx^a}{du}, \quad (2.68)$$

A equação (2.68) pode ser reescrita como

$$\nabla_X X^a = \lambda X^a, \quad (2.69)$$

ou equivalentemente

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = \lambda \frac{dx^a}{du}. \quad (2.70)$$

Se a curva é parametrizada de modo que λ desaparece (ou seja, de modo que o vetor tangente é transportado nele mesmo), então a equação da geodésica se reduz à

$$\nabla_X X^a = 0. \quad (2.71)$$

Um resultado muito útil é que em qualquer ponto da variedade, nós podemos introduzir um sistema de coordenadas especial chamado de **sistema de coordenada geodésico**, no qual

$$[\Gamma_{bc}^a]_P = 0.$$

Muitas equações tensoriais podem ser estabelecidas mais facilmente nas coordenadas geodésicas.

Pode ser mostrado que o resultado pode ser estendido para obter um sistema de coordenadas no qual a conexão desapareça ao longo de uma curva mas não, em geral, em toda a variedade. No entanto, se existir um sistema de coordenadas especial no qual a conexão desapareça em todo ponto, então a variedade é chamada de **plano afim**. Como veremos mais adiante, isto está intimamente ligado com o desaparecimento do tensor de Riemann.

2.1.6 Métrica

Qualquer campo tensorial simétrico de ordem 2 define uma métrica. Uma variedade dotada de uma métrica é chamada de **variedade Riemanniana**. Uma métrica (ou tensor métrico), que denotaremos por $g_{ab}(x)$, permite especificar um procedimento para medir distâncias e o comprimento dos vetores, além de estender noções do espaço euclidiano como área ou volume de uma superfície ou ângulo entre duas curvas.

A distância infinitesimal (ou intervalo infinitesimal para a relatividade), entre dois pontos vizinhos x^a e $x^a + dx^a$ é definida como

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b. \quad (2.72)$$

Note que a equação (2.72) nos fornece o quadrado da distância infinitesimal. Essa equação também é conhecida como **elemento de linha** e g_{ab} é chamado de forma métrica. O quadrado do **comprimento** ou **norma** de um vetor contravariante X^a é definido por

$$X^2 = g_{ab}(x) X^a X^b. \quad (2.73)$$

A métrica é dita *positiva definida* se para todos os vetores X , $X^2 > 0$ e é dita negativa se $X^2 < 0$, para todos os vetores X . Caso não se enquadre em nenhum desses casos, a métrica é dita *indefinida*.

O ângulo entre dois vetores X^a e Y^a com $X^a \neq 0$ e $Y^a \neq 0$ é dado por

$$\cos(X, Y) = \frac{g_{ab}X^aY^a}{|g_{cd}X^cY^d|^{1/2} + |g_{ef}X^eY^f|^{1/2}}. \quad (2.74)$$

Em particular, os vetores X^a e Y^a são ditos *ortogonais* se $g_{ab}X^aY^a = 0$. Se a métrica é indefinida, então existem vetores que são ortogonais a eles mesmos, isto é, $g_{ab}X^aX^b = 0$ e são chamados de **vetores nulos**.

O determinante da métrica é denotado por

$$g = \det(g_{ab}). \quad (2.75)$$

A métrica é *não-singular* se $g \neq 0$. A inversa de g_{ab} é denotada por g^{ab} , onde

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_c^a. \quad (2.76)$$

A métrica transforma-se de acordo com

$$g'_{ab}(x') = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} g_{cd}(x), \quad (2.77)$$

e então, seu determinante

$$g' = J^2 g. \quad (2.78)$$

Uma **isometria** é uma transformação de coordenadas que deixa as componentes do tensor métrico invariantes. Essas transformações são importantes para preservar as informações sobre as simetrias da variedade Riemanniana.

Considere uma curva C de equações paramétricas $x^a = x^a(u)$, pela equação (2.72), temos que

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{ab} \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du}. \quad (2.79)$$

Então, o intervalo s entre dois pontos P_1 e P_2 em C será dado por

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{ab} \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du}\right)^{1/2} du. \quad (2.80)$$

Nós definimos uma **geodésica métrica** entre dois pontos quaisquer P_1 e P_2 , como a curva privilegiada que os une cujo intervalo é estacionário sob pequenas variações que desaparecem nos pontos extremos. Conseqüentemente, o intervalo pode ser um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.

Através do formalismo Lagrangeano e dos resultados que obtivemos até aqui, temos que as equações de Euler-Lagrange resultam em equações diferenciais de segunda ordem

$$g_{ab} \frac{d^2 x^b}{du^2} + \{bc, a\} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = \left(\frac{d^2 s}{du^2} \bigg/ \frac{ds}{du} \right) g_{ab}. \quad (2.81)$$

As quantidades $\{bc, a\}$ são chamadas de **símbolos de Christoffel do primeiro tipo**, que são definidas em termos das derivadas da métrica

$$\{bc, a\} = \frac{1}{2} (\partial_b g_{ac} + \partial_a g_{bc} - \partial_c g_{ab}). \quad (2.82)$$

Os **símbolos de Christoffel do segundo tipo** são obtidos multiplicando a equação acima por g^{ab} .

Se uma variedade é dotada tanto de uma conexão afim quanto de uma métrica, então ela possui duas classes de curvas, uma geodésica afim e uma geodésica métrica. De modo que,

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}). \quad (2.83)$$

Essa conexão especial construída a partir da métrica que é equivalente aos símbolos de Christoffel do segundo tipo recebe o nome de **conexão métrica**, que é simétrica

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a. \quad (2.84)$$

A partir dessa definição segue a seguinte identidade

$$\nabla_c g_{ab} \equiv 0. \quad (2.85)$$

Vale ressaltar que esse resultado é válido apenas para conexões métricas.

Em qualquer ponto P da variedade, g_{ab} é uma matriz simétrica de números reais, sendo assim, existe uma transformação que reduz a matriz g_{ab} para a forma diagonal, onde cada elemento da diagonal é $+1$ ou -1 . O excesso de sinais positivos ou negativos depende da *assinatura* da métrica.

Em geral não é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual a métrica possa ser reduzida para essa forma diagonal com seus elementos sendo ± 1 em todos os pontos. No entanto, se existir um sistema de coordenadas no qual a métrica possa ser escrita dessa forma, então a métrica é chamada **plana**. Desde que a métrica seja constante em todo lugar, suas derivadas parciais desaparecem e, portanto, a conexão métrica desaparece como consequência da definição (2.83).

2.1.7 O tensor de Riemann

No espaço euclidiano, podemos chamar de curvatura a função escalar que mede em cada ponto do domínio a norma da variação do vetor tangente em relação ao comprimento

do arco definido pela curva. Em uma variedade Riemanniana com dimensão ≥ 3 , a curvatura é representada pelo tensor de Riemann, também chamado de **tensor de curvatura** que é dado por

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a, \quad (2.86)$$

onde Γ_{bc}^a é a conexão métrica dada em (2.83). Segue diretamente da definição que o tensor de Riemann é anti-simétrico

$$R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a. \quad (2.87)$$

Podemos usar o tensor de curvatura para definir vários outros tensores importantes. O **tensor de Ricci** é simétrico e é obtido através da contração

$$R_{ab} = R_{acb}^c. \quad (2.88)$$

O escalar de curvatura ou **escalar de Ricci**, por sua vez, é dado por

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (2.89)$$

Por fim, os dois tensores dados em (2.88) e (2.89) podem ser usados para definir o **tensor de Einstein**

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \quad (2.90)$$

que também é simétrico.

Alguns resultados importantes seguem das definições que vimos até aqui

Teorema: Uma variedade é um plano afim quando existe um sistema de coordenadas global no qual $\Gamma_{bc}^a = 0$.

Teorema: Uma condição necessária e suficiente para que uma variedade seja um plano afim é que a conexão seja simétrica e integrável.

Teorema: Uma condição necessária e suficiente para que a variedade seja um plano afim é que o tensor de Riemann desapareça.

Teorema: Uma condição necessária e suficiente para que a métrica seja plana é que o tensor de Riemann desapareça.

2.1.8 Tensor momento-energia

Cada partícula carrega consigo um vetor quadri-momento em sua linha de mundo. Um sistema de muitas partículas produzem, assim, um fluxo contínuo, esse fluxo pode ser quantificado através do **tensor momento-energia**. O tensor momento-energia, definido por T_{ab} , é um tensor do tipo $(0, 2)$, que possui as informações à respeito das densidades dos

fluxos de energia e momento associados a todas as formas de matéria e todos os campos não gravitacionais [22].

Assim como os outros tensores, o tensor momento-energia é um objeto cuja definição e significado transcendem sistemas de coordenadas. Mas qualquer observador, presta mais atenção nas componentes de T_{ab} do que no próprio T_{ab} , isso porque a cada componente ele atribui um significado físico específico. As componentes do tensor de energia-momento são as seguintes:

- T_{00} = densidade de massa e energia;
- T_{0b} = fluxo de energia na direção b ; $b \neq 0$;
- T_{a0} = densidade da componente a do momento; $a \neq 0$;
- T_{ab} = fluxo da componente a do momento na direção b (i.e., tensão de cisalhamento); $a, b \neq 0$;
- T_{aa} = fluxo da componente a do momento na direção a (i.e., força sobre a área perpendicular, ou seja, pressão); $a \neq 0$.

Para a relatividade geral, podemos descrever a fonte de um campo gravitacional como um fluido perfeito, isto é, que não tem viscosidade e não conduz calor em um sistema de coordenadas comóveis. No caso da matéria ser um fluido perfeito, com densidade ρ e pressão p e cuja quadri-velocidade é dada por $U_a = (-c, 0, 0, 0)$, o tensor momento-energia pode ser escrito como

$$T_{ab} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_a U_b + p g_{ab}. \quad (2.91)$$

Em um sistema de coordenadas local, temos que

$$T_{00} = \rho c^2, \quad (2.92)$$

$$T_{a0} = T_{0b} = 0, \quad (2.93)$$

$$T_{aa} = p \delta_{ab}. \quad (2.94)$$

Isso faz com que o tensor energia-momento seja dado por uma matriz diagonal, nesta situação, podemos escrever o tensor para um fluido perfeito como $T_{ab} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$. Ademais, esse tensor é simétrico e obedece a seguinte lei de conservação

$$\nabla_b T^{ab} = 0. \quad (2.95)$$

2.2 Equações de Campo

O motivo pelo qual vimos um pouco do formalismo tensorial é porque na teoria da relatividade (tanto restrita quanto geral) o espaço-tempo é caracterizado matematicamente

por este formalismo. Através dessa abordagem, o espaço-tempo na relatividade especial é, em essência, representado por uma variedade quadridimensional dotada de uma conexão afim simétrica Γ_{bc}^a que satisfaz (2.83) e um tensor métrico η_{ab} , onde η_{ab} é não singular, satisfaz a condição de metricidade $\nabla_c \eta_{ab} = 0$ e o tensor de curvatura é identicamente nulo $R_{bcd}^a = 0$. Em outras palavras, o contínuo quadridimensional que caracteriza o espaço-tempo no cenário da relatividade restrita (na ausência de gravitação) chamado espaço-tempo de Minkowski é um espaço-tempo plano, cuja métrica plana é dada por $diag(1, -1, -1, -1)$ em relação ao sistema de coordenadas de Minkowski¹ (t, x, y, z) . Adotando a convenção de sinal adequada, o elemento de linha de Minkowski pode ser obtido a partir de (2.72) e toma a forma

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.96)$$

Um espaço-tempo curvo, por sua vez, é caracterizado como uma variedade com uma métrica não plana na qual não existe um sistema de coordenadas canônico. Até aqui fizemos as principais definições necessárias para se estudar as propriedades geométricas do espaço-tempo, e também definimos outra quantidade tensorial de imensa importância do ponto de vista físico: o tensor momento-energia. Para completarmos nossa formulação à respeito da teoria da relatividade geral vamos partir para o seu ponto central: as equações de campo, que em unidades relativísticas ($G = c = 1$) são dadas por

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.97)$$

Essas equações essencialmente relacionam como a curvatura do espaço-tempo é afetada pela presença de matéria e energia, e essa declaração pode ser observada analisando cada lado da expressão individualmente. O lado esquerdo da equação (2.97) é composto apenas de quantidades de caráter puramente geométrico, como o tensor de curvatura de Ricci R_{ab} e o escalar de curvatura R , que, como vimos, são tensores que contém informações parciais a respeito da curvatura do espaço-tempo e podem ser expressos em termos da métrica g_{ab} , que é o objeto responsável por designar como se mede distâncias no espaço-tempo ao qual ele caracteriza. Já no lado direito da equação nós temos o tensor momento-energia T_{ab} que é o objeto matemático que descreve como é a distribuição de energia e matéria no espaço-tempo. Com base nisso é que é feita a afirmação fundamental da relatividade geral: matéria e energia curvam o espaço-tempo.

A equação de campo (2.97) enganosamente simples é na verdade um conjunto de dez equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. Mesmo sem fazer o grande esforço de resolvê-las exatamente, podemos fazer afirmações gerais sobre as propriedades da solução. Como as dez equações diferenciais são de segunda ordem, isso significa que o espaço-tempo pode ter curvatura diferente de zero mesmo em vizinhanças do espaço-tempo

¹ Como vimos, se uma métrica é plana, então existe um sistema de coordenadas especial cobrindo toda a variedade no qual a métrica é diagonal com elementos iguais a ± 1 .

onde o tensor momento-energia T_{ab} é zero, tendo em vista que o campo gravitacional em si carrega energia e momento. Além disso, essas equações diferenciais podem produzir soluções de propagação de ondas, nas quais as perturbações se propagam através do espaço em função do tempo, dando origem às ondas gravitacionais.

O principal objetivo na mecânica newtoniana é, em geral, determinar a trajetória da partícula, pois é através da trajetória que você obtém outras quantidades importantes para descrever esse sistema, como a velocidade, momento linear, aceleração e etc. Na mecânica quântica, o principal objetivo é determinar a função de onda, já que é a quantidade que descreve como o sistema formado pela partícula ou conjunto de partículas evolui no tempo. Na teoria da relatividade geral, nós geralmente estamos preocupados em obter o tensor métrico, pois é através dele que você consegue calcular e medir distâncias, além de determinar quais são as trajetórias naturais dos corpos que se movem pelo espaço-tempo, que são as geodésicas. Além disso, caso exista alguma curvatura no espaço tempo, ela será apontada pela métrica.

2.2.1 Termo cosmológico

A constante cosmológica, denotada por Λ , foi introduzida por Einstein nas equações de campo, primeiramente com o objetivo de prescrever condições de contorno apropriadas, tendo em vista que as equações de campo, à priori, violavam o princípio de Mach. No entanto, a principal motivação para a introdução do termo cosmológico Λg_{ab} , foi o fato do Einstein ser adepto à ideia de que o universo, em grande escala, era estático. As equações de campo, tal como expressas em (2.97) não permitiam um universo estático, na verdade, a gravidade faria com que o universo se contraísse, assim, o termo cosmológico deveria ser capaz de complementar as equações de campo e fornecer um modelo que equilibrasse uma força repulsiva de Λ com a força atrativa da gravitação. As equações de campo, com o termo extra, se tornam

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.98)$$

No entanto, esse modelo apresentava um defeito prático: era instável, além disso, pouco depois de Einstein obter a solução cosmológica estática, foi descoberto que o universo não era de fato estático, mas que está em expansão em larga escala, como evidenciado pelo redshift das galáxias. Esses resultados fizeram com que de Einstein descartasse esse termo subsequentemente, porém, a maioria dos tratamentos da cosmologia o incluem, e dependendo da sua denotação ($\Lambda > 0$, $\Lambda = 0$ ou $\Lambda < 0$), obtemos características diferentes para o universo.

3 Solução de Schwarzschild

Como vimos, as equações de campo (2.97), em geral, formam um sistema de equações diferenciais não lineares, isso pode tornar a sua resolução bastante complicada, mesmo que os parâmetros independentes possam ser reduzidos devido à simetria da métrica. No entanto, para maior simplificação da resolução podemos ainda recorrer à simetrias. A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata das equação de campo e foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916, que para isso considerou as equações de campo no vácuo¹ e um sistema idealizado de massa M no qual havia simetria esférica. Para encontramos a solução de Schwarzschild vamos partir do elemento de linha com simetria esférica mais geral [23]

$$-e^{2v(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (3.1)$$

Pela relação (2.76)

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -e^{2v(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Como a métrica deve satisfazer a relação (2.72), então

$$g^{ab} = \begin{bmatrix} -e^{-2v(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Através da métrica podemos calcular os símbolos de Christoffel a partir de (2.83), de onde obtemos

$$\Gamma_{01}^0 = v'(r), \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{00}^1 = v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda'(r), \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -re^{-2\lambda(r)}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \text{sen} \theta e^{-2\lambda(r)}, \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen} \theta \cos \theta. \quad (3.12)$$

¹ Quando $T_{\mu\nu} = 0$.

As componentes não-nulas do tensor de Riemann podem ser obtidas através de (2.86) e são dadas por

$$R_{010}^1 = e^{-2\lambda(r)+2v(r)}(v''(r) - v'(r)\lambda'(r) + v'^2(r)), \quad (3.13)$$

$$R_{020}^2 = \frac{v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}}{r}, \quad (3.14)$$

$$R_{030}^3 = \frac{v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}}{r}, \quad (3.15)$$

$$R_{101}^0 = -v''(r) + \lambda'(r)v'(r) - v'^2(r), \quad (3.16)$$

$$R_{121}^2 = \frac{\lambda'(r)}{r}, \quad (3.17)$$

$$R_{131}^3 = \frac{\lambda'(r)}{r}, \quad (3.18)$$

$$R_{202}^0 = -r v'(r) e^{-2\lambda(r)}, \quad (3.19)$$

$$R_{212}^1 = e^{-2\lambda(r)} r \lambda'(r), \quad (3.20)$$

$$R_{232}^3 = -e^{-2\lambda(r)} + 1, \quad (3.21)$$

$$R_{303}^0 = -e^{2\lambda(r)} r \sin^2 \theta v'(r), \quad (3.22)$$

$$R_{313}^1 = e^{-2\lambda(r)} \lambda'(r) \sin^2 \theta, \quad (3.23)$$

$$R_{323}^2 = -e^{-2\lambda(r)} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta. \quad (3.24)$$

À partir de (2.88) podemos encontrar as seguintes componentes do tensor de Ricci

$$R_{00} = \left(v''(r) - \lambda'(r)v'(r) + v'^2(r) + \frac{2v'(r)}{r} \right) e^{2v(r)-2\lambda(r)}, \quad (3.25)$$

$$R_{11} = -v''(r) + \lambda'(r)v'(r) - v'^2(r) + \frac{2\lambda'(r)}{r}, \quad (3.26)$$

$$R_{22} = (-1 - rv'(r) + r\lambda'(r))e^{-2\lambda(r)} + 1, \quad (3.27)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta [(-1 - rv'(r) + r\lambda'(r))e^{-2\lambda(r)} + 1]. \quad (3.28)$$

Como estamos considerando o cenário de vácuo onde $T_{\mu\nu} = 0$, temos que

$$g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}R = 0. \quad (3.29)$$

Mas sabemos que $g^{ab}R_{ab} = R$ e além disso

$$g^{ab}g_{ab} = (-e^{-2v(r)})(-e^{2v(r)}) + (e^{-2\lambda(r)})(e^{2\lambda(r)}) + \left(\frac{1}{r^2}\right)(r^2) \\ + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)(r^2 \sin^2 \theta) \quad (3.30)$$

$$= 4. \quad (3.31)$$

Dessa forma, temos

$$R - 2R = 0 \Rightarrow R = 0. \quad (3.32)$$

Portanto, as equações de campo de Einstein para esse caso se reduzem a

$$R_{ab} = 0. \quad (3.33)$$

Através de (3.25) e (3.26) temos que

$$\frac{2\lambda'(r)}{r} + \frac{2v'(r)}{r} = 0, \quad (3.34)$$

o que nos leva a

$$\lambda(r) + v(r) = \text{const.} \quad (3.35)$$

Quando consideramos pontos distantes, isto é, quando $r \rightarrow \infty$, devemos recuperar o espaço-tempo de Minkowski, no qual $e^{2v(r)} \rightarrow 1$ e $e^{2\lambda(r)} \rightarrow 1$, ou seja, $\lambda(r) \rightarrow 0$ e $v(r) \rightarrow 0$. Daí, temos

$$\lambda(r) + v(r) = 0. \quad (3.36)$$

Substituindo em (3.27):

$$(1 + 2rv'(r))e^{2v(r)} - 1 = 0, \quad (3.37)$$

de modo que

$$\frac{d(re^{2v(r)})}{dr} = 1, \quad (3.38)$$

assim,

$$re^{2v(r)} = r + C, \quad (3.39)$$

que por (3.36)

$$e^{2v(r)} = 1 + \frac{C}{r} = e^{-2\lambda(r)}, \quad (3.40)$$

onde C é a constante de integração que escolheremos como $C = -2M$ (em unidades relativísticas) para que no limite de campo fraco recupere a descrição newtoniana.

Portanto, o elemento de linha que descreve a região do espaço-tempo exterior ao corpo esfericamente simétrico é dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi), \quad (3.41)$$

onde $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Além de ser esfericamente simétrica, a solução de Schwarzschild é estacionária, ou seja, a métrica é independente do tempo, não possui termos cruzados e por isso é estática, e é assintoticamente plana².

Em geral, o elemento de linha (3.41) diverge para dois valores de raio, pois quando $r \rightarrow 0$ temos $g_{00} \rightarrow \infty$ e quando $r_h \rightarrow 2M$ ³ temos que $g_{11} \rightarrow \infty$. A divergência em $r_h = 2M$ pode ser evitada em um sistema de coordenadas apropriado. Por exemplo,

² Isso significa que quando $r \rightarrow \infty$ a solução recai no espaço-tempo de Minkowski.

³ Raio de horizonte de Schwarzschild.

considerando a mudança de coordenadas $dt = dv - f(r)dr$ temos que

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dv^2 + f^2(r)dr^2 - 2dvf(r)dr) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi), \quad (3.42)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) f^2(r)\right] + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) 2dvf(r)dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \quad (3.43)$$

A escolher $f = 1 - 2M/r$, implica que

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi), \quad (3.44)$$

que é bem definido quando $r = 2M$. O mesmo não ocorre para $r = 0$, e podemos verificar isso analisando os invariantes de curvatura, que por serem quantidades escalares, são invariantes sob uma transformação de coordenadas, e são eles que caracterizarão se a divergência em $r = 0$ é inerente ao sistema de coordenadas ou não. Analisando o escalar de Kretschmann

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (3.45)$$

observamos que obtemos um valor finito para $r = 2M$ mas, de fato, há o que denotamos por *singularidade* em $r = 0$.

Como vimos, matéria e a energia estão “apoiadas” no tecido espaço-tempo e são capazes de afundá-lo ligeiramente - vale ressaltar que absolutamente nada no universo está imune a essa curvatura (isto é, à gravidade), nem mesmo a luz - assim, a interpretação para essa singularidade pode ser tomada como: se você compactar um objeto muito massivo em um espaço muito diminuto, chega uma hora que ele objeto entra em colapso, a gravidade se torna tão intensa que o objeto desaba sobre si mesmo, até se tornar uma singularidade, causando essa divergência na métrica, um bug no tecido do espaço-tempo. Por esse motivo, surge a interpretação de um **buraco negro** associado à solução (3.41).

3.1 Buracos negros

Apesar a existência de objetos caracterizados como buracos negros ser uma previsão da teoria da relatividade geral, a ideia intuitiva de objetos físicos com o seu comportamento decorre dos conceitos da mecânica newtoniana. O cerne desse pensamento consiste na ideia de *velocidade de escape*. A menor velocidade para que um objeto possa escapar de um campo gravitacional dado por uma distribuição esférica de massa m e raio r , em unidades naturais, é

$$v^2 = \frac{2m}{r}. \quad (3.46)$$

Como a maior velocidade permitida no universo é a velocidade da luz, a qual se considera $c = 1$ no sistema natural de unidades, obtemos a seguinte relação

$$r = 2m. \quad (3.47)$$

Ou seja, a velocidade mínima que um objeto deve ter para escapar do campo gravitacional de um corpo esfericamente simétrico de massa m e raio $2m$ seria igual à velocidade da luz. Uma questão que surge é: o que aconteceria se existisse um corpo com um campo gravitacional tão intenso, que sua velocidade de escape fosse maior que a velocidade da luz? Daí retomamos à ideia de um buraco negro.

Um buraco negro pode ser definido como um objeto cujo campo gravitacional seja suficientemente intenso a ponto de que a velocidade mínima necessária para que um objeto possa escapar dele - uma vez que esse objeto ultrapasse uma região denotada por *horizonte de eventos* - deve ser maior que a da luz. Ou seja, nenhum objeto pode escapar de buraco negro, dado que a velocidade máxima no universo é a velocidade da luz. Assim, qualquer matéria ou até mesmo a luz que atravesse a região delimitada pelo horizonte de eventos só pode descrever uma trajetória de via única, isto é, elas podem entrar na região delimitada pelo horizonte, mas não podem sair sem violar a causalidade.

Assim, o elemento de linha (3.41) descreve a forma mais simples de um buraco negro, que depende apenas do seu raio r e de sua massa M . No entanto, se relaxarmos a condição de simetria esférica e admitirmos termos cruzados em (3.41), o buraco negro pode ter rotação e, por consequência, dependerá de um outro parâmetro: seu momento angular J , e então será descrito então pela solução de Kerr. Considerando um espaço-tempo permeado por um campo eletromagnético, podemos ter um buraco negro com carga elétrica Q . Por fim, a solução mais geral que descreve um buraco negro com todos esses parâmetros tem o nome de solução de Kerr-Newmann, que descreve buracos negros com carga e em rotação. Essencialmente, do ponto de vista da relatividade geral, um buraco negro é descrito apenas por 3 parâmetros: massa M , carga Q e momento angular J , segundo o teorema da ausência de cabelo [24]. Assim, todas as outras informações sobre a matéria que colapsou para formar o buraco negro ou que "caiu" nele, desaparece dentro do horizonte de eventos e conseqüentemente se torna inacessível a observadores externos.

3.2 Termodinâmica de buracos negros

Em 1973, os físicos Bardeen, Carter e Hawking publicaram um artigo [25] apresentando quatro leis que regiam a mecânica dos buracos negros, essas leis foram obtidas utilizando a relatividade geral para descrever o comportamento dos mesmos. A chamada *lei zero* para buracos negros envolve a noção do que chamamos de *gravidade superficial* κ . De maneira concisa, a gravidade de superficial é a aceleração necessária que um observador localizado no horizonte de eventos do buraco negro deve possuir para que não caia na

singularidade, essa aceleração é medida do ponto de vista um observador localizado em um ponto que está infinitamente distante do buraco negro ⁴. Assim, a lei zero enuncia que a gravidade superficial κ é constante no horizonte de eventos para um buraco negro estacionário e em um espaço-tempo que respeite a condição dominante de energia.

A *primeira lei* dos buracos negros descreve essencialmente como o buraco negro se comporta em trocas de energia com a matéria existente. No contexto da relatividade geral, sabemos que massa e momento angular carregam energia, dessa forma, dependendo dos processos nos quais os buracos negros sejam submetidos, suas variações de momento angular estarão relacionadas com suas variações de massa, e por consequência de seu tamanho. O que chamamos da primeira lei dos buracos negros consiste exatamente em uma relação entre os parâmetros de um buraco negro. Essa relação é dada por

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA - \Omega_H dJ. \quad (3.48)$$

A *segunda lei* para os buracos negros diz essencialmente que, para quaisquer processos físicos, a área A do horizonte de eventos de um buraco negro sempre obedece a relação $\delta A \geq 0$, onde $\delta A = 0$ para processos estacionários, então o aumento da sua área do horizonte de eventos é causado por processos não estacionários. A chamada *terceira lei* da mecânica dos buracos negros diz, por sua vez, que não é possível atingir $\kappa = 0$ por processos físicos finitos.

Como podemos ver, essas leis exibem um caráter excepcionalmente análogo às leis da termodinâmica, por este motivo, foram chamadas de *quatro leis da termodinâmica de buracos negros*. Os paralelos entre as leis da termodinâmica e as leis dos buracos negros estão esboçados em (1).

A semelhança entre as leis da mecânica dos buracos negros e as leis da termodinâmica chamaram atenção dos físicos da época. Primeiramente pelo fato de serem resultados obtidos à partir de teorias de caráter distinto, mas também porque, à princípio, analisando buracos negros do ponto de vista clássico, é notável a sua incompatibilidade com as noções termodinâmicas, tendo em vista que, corpos com temperatura emitem um espectro térmico de radiação que caracteriza sua temperatura, e pela própria definição de buracos negros, nada escapa de seu interior. Dessa forma, a única temperatura fisicamente coerente para caracterizar um buraco negro seria $T = 0$, assim, não faria sentido existência de uma termodinâmica para esses objetos. Isso também levantou discussões, especialmente pelo fato disso implicar na violação da segunda lei da termodinâmica.

Em 1995, Hawking publica um artigo [26], no qual, partindo de uma abordagem semiclássica e introduzindo campos quânticos, provou matematicamente a existência do que chamamos de *radiação hawking*. De maneira heurística, essa radiação se dá devido

⁴ Vale ressaltar que do ponto de vista do observador que está localizado no horizonte de eventos, a aceleração que o mesmo deve possuir para não cair na singularidade tem que ser infinita.

Tabela 1 – Relação entre as leis da mecânica de buracos negros com as leis da termodinâmica

Lei	Termodinâmica	Buracos Negros
<i>Lei Zero</i>	T é constante em um sistema em equilíbrio térmico	Para um buraco negro estacionário, κ é constante no horizonte de eventos
<i>Primeira Lei</i>	$dE = TdS - dW$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA - \Omega_H dJ$
<i>Segunda Lei</i>	$\delta S \geq 0$	$\delta A \geq 0$
<i>Terceira Lei</i>	Não é possível atingir $T = 0$ por processos físicos finitos.	Não é possível atingir $\kappa = 0$ por processos físicos finitos.

às flutuações do vácuo e exibe um caráter similar a da radiação do corpo negro com temperatura $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$. Além disso, Bekenstein considerou a semelhança entre as leis da termodinâmica e as leis dos buracos negros como algo relevante e formulou a hipótese de que buracos negros têm entropia [27] e que a mesma seria proporcional à área de horizonte de eventos $S = \frac{A}{4}$. Esses resultados salientavam que o paralelo entre as leis dos buracos negros com as demais leis da termodinâmica seria de fato algo fundamental e não apenas uma coincidência.

Ademais, esses resultados despertaram o interesse na tentativa de obter uma descrição para buracos negros do ponto de vista da termodinâmica estatística. Em [28], Gibbons e Hawking obtiveram o ensemble canônico para buracos negros em equilíbrio térmico com um reservatório no infinito, e além de recuperar as fórmulas para entropia e temperatura de Hawking, eles observaram que a quantidade que controla a estabilidade dos buracos negros neste cenário é a sua capacidade térmica. Uma capacidade térmica positiva indica que o sistema é termodinamicamente estável, enquanto sua negatividade implica uma instabilidade termodinâmica [29].

A partir de agora estaremos aptos à estudar a termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild. Vamos inicialmente calcular a sua temperatura. Sendo $B(r) = 1 - 2M/r$ a função que caracteriza o comportamento da solução de Schwarzschild, a temperatura de Hawking associada pode ser obtida através da expressão [30]

$$T_H = \frac{B'(r)}{4\pi} \Big|_{r=r_h}. \quad (3.49)$$

Dessa forma

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2M}{r^2} \right] \Big|_{r=r_h}, \quad (3.50)$$

como $r_h = 2M$ então

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}. \quad (3.51)$$

Essa relação nos permite afirmar que os buracos negros de maior massa emitem menos radiação do que os de menor massa. A expressão (3.51) pode ainda ser expressa em termos do raio de horizonte de eventos, na qual assume a forma

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_h}. \quad (3.52)$$

O comportamento da temperatura de Hawking está apresentado na figura (7).

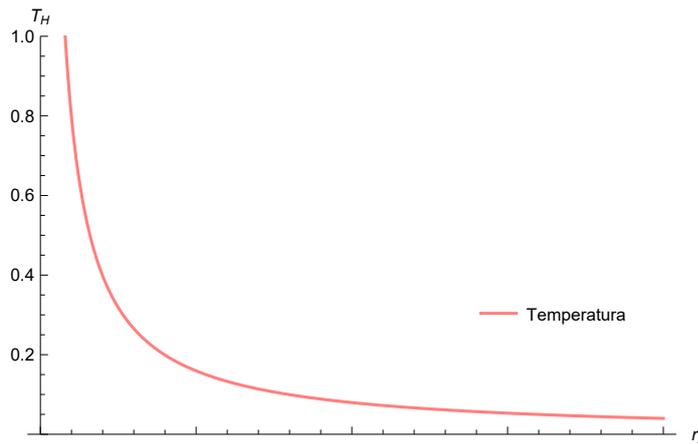


Figura 7 – Temperatura de Hawking do buraco negro de Schwarzschild

Com o intuito de calcular a entropia do buraco negro, vamos partir da primeira lei da termodinâmica

$$dE - TdS = dW. \quad (3.53)$$

Pela teoria da relatividade especial, sabemos que existe uma equivalência entre massa e energia e como estamos considerando uma solução estática, na qual $dW = 0$, então a expressão (3.53) assume a forma

$$dS = \frac{dM}{T_H}. \quad (3.54)$$

Daí, temos

$$S = \int 8\pi M dM, \quad (3.55)$$

$$S = 4\pi M^2. \quad (3.56)$$

Este resultado mostra que quanto maior a massa do buraco negro, maior será a sua entropia. Expressando em termos do raio de horizonte de eventos, temos

$$S = \frac{4\pi r_h^2}{4}. \quad (3.57)$$

A expressão acima está de acordo com a relação entre entropia e área $S = A/4$, sendo $A = 4\pi r_h^2$ a área da superfície que define o horizonte de eventos, obtida a partir da equivalência entre as leis da termodinâmica e as de um buraco negro.

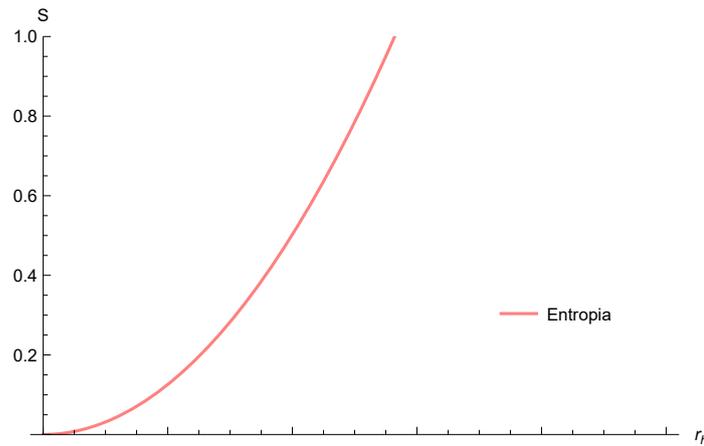


Figura 8 – Entropia do buraco negro de Schwarzschild

Podemos ainda estudar a estabilidade do buraco negro através do cálculo do seu calor específico, que pode ser feito através da expressão

$$C_v = \frac{dM}{dT_H}. \quad (3.58)$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$C_v = \frac{dM}{dr_h} \frac{dr_h}{dT_H}. \quad (3.59)$$

Logo,

$$C_v = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi T_H^2}, \quad (3.60)$$

$$C_v = -2\pi r_h^2. \quad (3.61)$$

Aqui podemos notar um calor específico sempre negativo, o que implica em uma instabilidade termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild, isto é, o buraco negro aumenta a sua entropia conforme se diminui a sua temperatura, e isso pode ser visto também comparando as figuras (7) e (8).

Por fim, podemos obter o potencial termodinâmico de Helmholtz que é dado por

$$F = M - T_H S \quad (3.62)$$

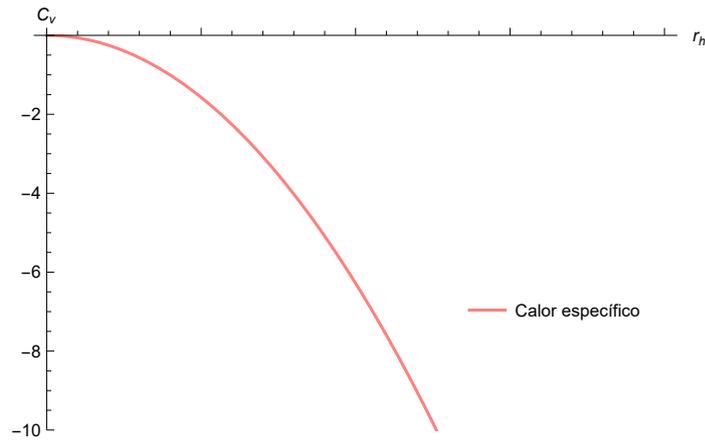


Figura 9 – Calor específico do buraco negro de Schwarzschild

Daí, temos que

$$F = \frac{r_h}{2} - \frac{1}{4\pi r_h} \frac{4\pi r_h^2}{4}, \quad (3.63)$$

$$F = \frac{r_h}{4}. \quad (3.64)$$

4 Solução de Corda Negra

Uma das características fundamentais de um buraco negro é a sua topologia. Em um espaço-tempo estacionário quadridimensional e assintoticamente plano, Hawking mostrou que um buraco negro deve ter necessariamente uma topologia S^2 [31]. Mais tarde, o *teorema da censura topológica* [32] afirmou que, em espaços assintoticamente planos, apenas horizontes esféricos podem dar origem a uma estrutura causal bem definida para um buraco negro. Além disso, a *conjectura Hoop*, proposta por Kip Thorne em 1972, afirma que uma configuração de matéria auto gravitante de massa M entraria em colapso para formar um buraco negro se, e somente se, um aro circular de uma circunferência crítica $C = 4\pi M$ pudesse ser colocado em torno dessa distribuição de matéria e girado em 360° para formar uma esfera envolvente, no entanto, esse resultado é restrito às condições bem específicas. Todos esses teoremas restritivos não se sustentam em dimensões superiores [33] ou são contornados pela introdução da constante cosmológica.

Em 1995, Lemos propôs a solução de um buraco negro cilindricamente simétrico para uma ação de Einstein-Hilbert quadridimensional, dentro do cenário da teoria clássica da gravitação [1]. Essa solução foi obtida considerando as equações de Einstein com o termo cosmológico e uma constante cosmológica negativa, e é conhecida como **corda negra**, exatamente como se fosse uma corda infinita de matéria, ou seja, enquanto na simetria esférica considera-se que a matéria colapsa no centro do sistema de coordenadas (na origem), na simetria cilíndrica considera-se que a matéria colapsou numa reta que coincide com o eixo “z”. Para obtermos a solução de corda negra, vamos começar considerando o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -f(r)dt + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\phi^2 + \alpha^2r^2dz^2, \quad (4.1)$$

onde $-\infty < t < \infty$ e $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ definem as coordenadas radial, angular e axial, respectivamente. O parâmetro α é tal que $\alpha^2 \equiv -\Lambda/3$, sendo Λ a constante cosmológica.

Para a corda negra, a ação efetiva de Einstein-Hilbert requer a contribuição da constante cosmológica, de modo que,

$$S_u = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (4.2)$$

onde $\kappa = 8\pi$ e R é o escalar de Ricci. O tensor métrico referente a esse sistema será

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2r^2. \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Os símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{f(r)f'(r)}{2}, \quad (4.5)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{f'(r)}{2f(r)}, \quad (4.6)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -f(r)r, \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -f(r)\alpha^2 r, \quad (4.8)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}. \quad (4.10)$$

As componentes não-nulas do tensor de Riemann são

$$R_{010}^1 = \frac{f(r)f''(r)}{2}, \quad (4.11)$$

$$R_{020}^2 = \frac{f(r)f'(r)}{2r}, \quad (4.12)$$

$$R_{030}^3 = \frac{f(r)f'(r)}{2r}, \quad (4.13)$$

$$R_{101}^0 = -\frac{f''(r)}{2f(r)}, \quad (4.14)$$

$$R_{121}^2 = -\frac{f'(r)}{2f(r)r}, \quad (4.15)$$

$$R_{131}^3 = -\frac{f'(r)}{2f(r)r}, \quad (4.16)$$

$$R_{202}^0 = -\frac{f'(r)r}{2}, \quad (4.17)$$

$$R_{212}^1 = -\frac{f'(r)r}{2}, \quad (4.18)$$

$$R_{232}^3 = -f(r), \quad (4.19)$$

$$R_{303}^0 = -\frac{f'(r)}{2}\alpha^2 r, \quad (4.20)$$

$$R_{313}^1 = -\frac{f'(r)}{2}\alpha^2 r, \quad (4.21)$$

$$R_{323}^2 = -f(r)\alpha^2. \quad (4.22)$$

As componentes do tensor de Ricci, por sua vez, serão

$$R_{00} = \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}, \quad (4.23)$$

$$R_{11} = -\frac{f''(r)}{2f(r)} - \frac{f'(r)}{f(r)r}, \quad (4.24)$$

$$R_{22} = -f'(r)r - f(r), \quad (4.25)$$

$$R_{33} = -f'(r)\alpha^2 r - f(r)\alpha^2. \quad (4.26)$$

Por fim, o escalar de curvatura é dado por

$$R = -f''(r) - \frac{4f'(r)}{r} - \frac{2f(r)}{r^2}. \quad (4.27)$$

As equações de movimento apropriadas para esse caso, são as equações (2.98). O tensor momento-energia estará restrito apenas ao eixo “z”, portanto, podemos representá-lo por uma distribuição delta de Dirac $T_{\nu}^{\mu} = -\rho(r) \text{diag}(1, 1, 0, 0) + p_l(r) \text{diag}(0, 0, 1, 1)$, onde $\rho(r) = \mu(2\pi r)^{-1}\delta(r)$ e $p_l = p_{\phi} = p_z = p(2\pi r)^{-1}\delta(r)$, sendo μ massa linear da corda negra. Como estamos interessados na região em que $r \neq 0$, então podemos assumir que $T_{\mu\nu} = 0$ para essa região. Para o nosso propósito, só é necessário usar uma componente do tensor de Einstein, aqui usaremos a componente G_{00} . Dessa forma, podemos obter a solução de corda negra resolvendo

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + \Lambda g_{00} = 0. \quad (4.28)$$

Daí temos

$$\frac{f(r)}{2} \frac{f''(r)}{r} + \frac{f(r)}{r} \frac{f'(r)}{r} - \frac{1}{2}(-f(r)) \left(-f''(r) - \frac{4f'(r)}{r} - \frac{2f(r)}{r^2} \right) + \Lambda(-f(r)) = 0, \quad (4.29)$$

onde $f'(r) = \frac{df(r)}{dr}$, logo,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [f(r) r] = -\Lambda. \quad (4.30)$$

Resolvendo a equação diferencial acima, obtemos a seguinte solução

$$f(r) = -\frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{C}{r}, \quad (4.31)$$

sendo C a constante de integração, que definiremos como $C = -4\mu/\alpha$. Sabemos também que $-\Lambda/3 = \alpha^2$, portanto,

$$f(r) = \alpha^2 r^2 - \frac{4\mu}{\alpha r}. \quad (4.32)$$

Logo, o elemento de linha que representa o espaço-tempo de uma corda negra estática¹ no vácuo é

$$ds^2 = - \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4\mu}{\alpha r} \right) dt^2 + \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4\mu}{\alpha r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + \alpha^2 r^2 dz^2. \quad (4.33)$$

Para encontrarmos o raio do horizonte fazemos $f(r) = 0$.

$$\alpha^2 r^2 - \frac{4\mu}{\alpha r} = 0.$$

A única raiz real que a equação (4) possui é:

$$r_h = \frac{(4\mu)^{\frac{1}{3}}}{\alpha}. \quad (4.34)$$

¹ Quando falamos em solução estática nos referimos ao fato do elemento de linha não possuir termos cruzados.

É importante destacar que essa solução também possui uma divergência intrínseca em $r = 0$, pois o escalar de Kretschmann da mesma é dado por

$$R_{abcd}R^{abcd} = 24\alpha^2 \left(1 + \frac{8\mu^2}{\alpha^6 r^6} \right), \quad (4.35)$$

e, além disso, quando $r \rightarrow \infty$, o espaço-tempo da corda negra é anti-de Sitter.

4.1 Termodinâmica da Corda Negra

A partir da solução de corda negra, somos capazes de estudar sua termodinâmica. Partindo de (4.34), podemos escrever a massa linear como

$$\mu = \frac{\alpha^3 r_h^3}{4}. \quad (4.36)$$

A temperatura da corda negra pode ser calculada através da expressão

$$T_H = \frac{f'(r)}{4\pi} \Big|_{r=r_h}. \quad (4.37)$$

Assim,

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left[2\alpha^2 r + \frac{4\mu}{\alpha r^2} \right] \Big|_{r=r_h}, \quad (4.38)$$

$$= \left[\frac{\alpha^2 r}{2\pi} + \frac{4\mu}{4\pi\alpha r^2} \right] \Big|_{r=r_h}, \quad (4.39)$$

$$= \frac{\alpha^2}{2\pi} \left(\frac{(4\mu)^{1/3}}{\alpha} \right) + \frac{4\mu}{4\pi\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{(4\mu)^{2/3}} \right), \quad (4.40)$$

$$= \frac{3\alpha^2 (4\mu)^{1/3}}{4\pi \alpha}. \quad (4.41)$$

Usando a relação (4.34), temos que

$$T_H = \frac{3\alpha^2 r_h}{4\pi}. \quad (4.42)$$

Aqui podemos observar o comportamento linear da temperatura de Hawking para a corda negra usual.

Para calcular a entropia, vamos partir novamente da primeira lei da termodinâmica (3.53), como vimos ela teoria da relatividade especial, sabemos que existe uma equivalência entre massa e energia - nesse caso temos a massa linear μ - e como estamos considerando o caso em que $r \neq 0$ então $dW = 0$. Dessa forma, a expressão (3.53) assume a forma

$$dS = \frac{d\mu}{T_H}. \quad (4.43)$$

A partir disso, temos

$$dS = \frac{4\pi}{3\alpha} (4\mu)^{-1/3} d\mu, \quad (4.44)$$

$$S = \int \frac{4\pi}{3\alpha} (4\mu)^{-1/3} d\mu, \quad (4.45)$$

$$S = \frac{\pi}{2\alpha} (4\mu)^{2/3}. \quad (4.46)$$

Utilizando a relação (4.36) obtemos, portanto

$$S = \frac{\pi\alpha r_h^2}{2}. \quad (4.47)$$

Observe que este resultado obedece a lei de área de Bekenstein $S = A/4$ onde, no nosso caso, $A = 2\pi\alpha r_h^2$.

Com a finalidade de estudar a estabilidade termodinâmica da corda negra, vamos calcular seu calor específico através da expressão

$$C_v = \frac{d\mu}{dT_H}. \quad (4.48)$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$C_v = \frac{d\mu}{dr_h} \frac{dr_h}{dT_H}. \quad (4.49)$$

Assim,

$$C_v = \frac{3\alpha^3 r_h^2}{4} \frac{4\pi}{3\alpha^2}, \quad (4.50)$$

$$C_v = \alpha r_h^2 \pi. \quad (4.51)$$

Esse resultado mostra que o calor específico da corda negra é sempre positivo, o que implica que a mesma é termodinamicamente estável.

Por fim, vamos estudar o comportamento da energia livre associada a esse sistema

$$F = \mu - T_H S. \quad (4.52)$$

Usando as relações (4.42) e (4.47), temos que

$$F = \frac{\alpha^3 r_h^3}{4} - \left(\frac{3\alpha^2 r_h}{4\pi} \right) \left(\frac{\pi \alpha r_h^2}{2} \right) \quad (4.53)$$

$$= \frac{\alpha^3 r_h^3}{4} - \frac{3\alpha^3 r_h^3 \pi}{8\pi} \quad (4.54)$$

$$= \frac{2\alpha^3 r_h^3}{8} - \frac{3\alpha^3 r_h^3}{8}. \quad (4.55)$$

Portanto,

$$F = -\frac{\alpha^3 r_h^3}{8}. \quad (4.56)$$

5 Solução de Corda Negra na Gravidade Rainbow

5.1 Gravidade Rainbow

A teoria da relatividade geral é extremamente bem sucedida na descrição e previsão de fenômenos gravitacionais, no entanto, a teoria ainda possui alguns problemas em aberto como a energia escura e alguns fenômenos no regime de altas energias, por exemplo. Por este motivo, surge a necessidade de se formular uma teoria mais geral que consiga abarcar tais fenômenos. Dentre as várias propostas nesta direção, vamos focar na chamada gravidade Rainbow.

A gravidade Rainbow surge dentro do cenário da *Relatividade Duplamente Especial* (DSR), apresentada inicialmente por Amelino-Camelia [2]. A DSR foi uma proposta que emergiu como uma teoria alternativa para a relatividade especial. A formulação dessa teoria tem uma motivação fenomenológica, pois certas observações de raios cósmicos de ultra alta energia violavam algumas previsões básicas da relatividade especial. Além disso, alguns argumentos que surgiram devido à teorias para a uma gravidade quântica também encorajaram uma busca por uma modificação da relatividade especial.

A relatividade de Galileu foi substituída pela relatividade especial devido sua incompatibilidade com a teoria eletromagnética, a transição da relatividade de Galileu pela relatividade especial se deu com a introdução de um invariante relativístico: a velocidade da luz. De maneira análoga, a transição da relatividade especial para a relatividade duplamente especial ocorre quando introduzimos mais uma escala absoluta independente do observador: uma escala de comprimento mínimo, uma escala na qual nossa descrição dos fenômenos físicos mudam significativamente, como uma escala cinemática independente do observador, onde nesse caso, será atribuída um status especial à escala de Planck.

Assim, o espaço-tempo será governado por duas escalas independente dos observadores, a velocidade da luz c e o comprimento de Planck que é definido como

$$l_p = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

que implica em uma escala de energia máxima, a energia de Planck, dada por

$$E_p = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Assim, observadores com a energia de Planck iriam atribuir os mesmos comprimentos para um determinado corpo, e então, não haveria o fenômeno da contração dos comprimentos

que ocorre no limite de baixas energias. Vale ressaltar que esses efeitos só seriam fisicamente relevantes para energias próximas à escala de energia de Planck. Uma consequência desse modelo é uma simetria de Lorentz deformada, de modo que existe uma modificação na relação de dispersão quando consideramos energias próximas à escala de Planck [3, 2, 4, 5].

A abordagem que recebe o nome de gravidade Rainbow emerge buscando fazer uma modificação na Teoria da relatividade geral clássica incorporando os aspectos dessa teoria da relatividade especial modificada (DSR). Acredita-se geralmente que a geometria do espaço-tempo é fundamentalmente descrita por uma teoria quântica, qualquer que seja a natureza dessa descrição, crê-se que a energia de Planck desempenhe o papel de um limiar que separa a descrição clássica da descrição quântica. Nesse sentido, é esperado que no regime de energias próximas à escala de Planck, surja uma nova imagem para o espaço-tempo.

A teoria da gravidade Rainbow parte do princípio de que não existe uma única geometria clássica para o espaço-tempo, a geometria do mesmo se torna dependente da energia. Assim, quanta de diferentes energias observam diferentes geometrias clássicas. Essas geometrias clássicas compartilham os mesmos referenciais inerciais e, portanto, o princípio da equivalência pode ser mantido, em uma forma modificada, mas as medições de distância e tempo adquirem uma nova dependência da energia dos quanta usados nas medições.

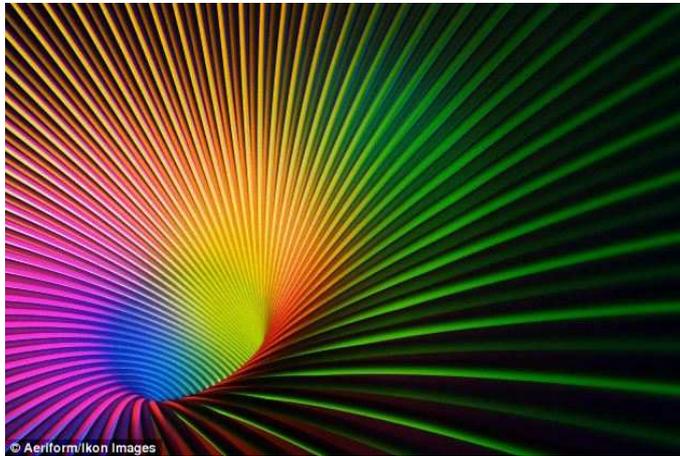


Figura 10 – Efeitos da gravidade Rainbow nos diferentes comprimentos de onda de luz próximo a uma fonte de gravidade forte.

Como resultado, há o surgimento de uma relação de dispersão modificada, que é usualmente escrita na forma [4, 34, 35]

$$E^2 f^2(E/E_p) - p^2 c^2 g^2(E/E_p) = m^2 c^4, \quad (5.3)$$

onde $f(E/E_p)$ e $g(E/E_p)$ recebem o nome genérico de *funções rainbow*. Essas funções são parametrizadas pela razão E/E_p , sendo E a energia total da partícula ou sistema de partículas medida por um observador em queda livre e E_p é a energia na escala de Planck.

Já que a geometria do espaço-tempo muda de acordo com a energia da partícula teste se movendo nele, então não existe um único espaço-tempo dual ao espaço de momento, isto é, existe uma família de métricas dependentes da energia, de acordo com [35], que serão parametrizadas pelas funções rainbow. A construção da métrica deve ser de tal modo que ela seja covariante em relação à representação não-linear das transformações de Lorentz, já que pretendemos incorporar a DSR. Nas referências [36, 37], os autores pontuam que as métricas dependentes da energia podem ser construídas fazendo a substituição

$$dt \rightarrow \frac{dt}{f(E/E_p)}, \quad (5.4)$$

para a coordenada temporal e

$$dx^i \rightarrow \frac{dx^i}{g(E/E_p)}, \quad (5.5)$$

para todas as coordenadas espaciais. Então, o espaço-tempo de Minkowski se torna

$$ds^2 = \frac{dt^2}{f^2(E/E_p)} - \frac{1}{g^2(E/E_p)} \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.6)$$

As funções $f(E/E_p)$ e $g(E/E_p)$ são construídas de modo que, no limite de baixas energias, elas convergem para a unidade

$$\lim_{E/E_p \rightarrow 0} f(E/E_p) = 1 \quad \lim_{E/E_p \rightarrow 0} g(E/E_p) = 1. \quad (5.7)$$

Para estudar os efeitos da gravidade Rainbow no universo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [38, 39], as seguintes funções rainbow foram consideradas (caso I)

$$f(E/E_p) = 1, \quad g(E/E_p) = \sqrt{1 - \xi(E/E_p)^s}, \quad (5.8)$$

onde $s > 1$ e ξ é um parâmetro livre adimensional do modelo, que nós vamos considerar o mesmo das outras funções rainbow para facilitar a comparação entre os modelos empregados.

Outra escolha interessante para as funções rainbow é a seguinte (caso II)

$$f(E/E_p) = g(E/E_p) = \frac{1}{1 - \xi(E/E_p)}. \quad (5.9)$$

Tais funções rainbow foram consideradas em [4, 34] (e em suas referências) no estudo de possíveis soluções de universos não singulares e em [35], uma vez que assegura uma velocidade constante para a luz, isso pode fornecer uma solução para o problema do horizonte.

Uma última escolha bastante interessante para as funções rainbow é dada por (caso III)

$$f(E/E_p) = \frac{e^{\xi(E/E_p)} - 1}{\xi(E/E_p)}, \quad g(E/E_p) = 1. \quad (5.10)$$

Essa escolha de funções rainbow foram originalmente consideradas em [6] no contexto de explosões de raios gama. Mais tarde, essa mesma escolha foi abordada em [38, 40] em conexão com as soluções FRW.

5.2 Solução de Corda Negra na Gravidade Rainbow

De maneira análoga ao que fizemos no capítulo (4), para obtermos a solução da corda negra na gravidade Rainbow, vamos começar considerando o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -\frac{A(r)}{f^2(E/E_p)} dt^2 + \frac{1}{g^2(E/E_p)A(r)} dr^2 + \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\phi^2 + \frac{\alpha^2 r^2}{g^2(E/E_p)} dz^2, \quad (5.11)$$

com as transformações adequadas para considerar os efeitos da gravidade Rainbow (5.4) e (5.5), sendo $t \in (-\infty, \infty)$, a coordenada radial $r \in [0, \infty)$, a coordenada angular $\phi \in [0, 2\pi)$ e a coordenada axial $z \in (-\infty, \infty)$.

Os símbolos de Christoffel não-nulos para a corda negra neste cenário são

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad (5.12)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2}, \quad (5.13)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad (5.14)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -A(r)r, \quad (5.15)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -A(r)\alpha^2 r, \quad (5.16)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (5.17)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}. \quad (5.18)$$

As componentes não-nulas do tensor de Riemann serão, portanto,

$$R_{010}^1 = \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A''(r)}{2}, \quad (5.19)$$

$$R_{020}^2 = \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2r}, \quad (5.20)$$

$$R_{030}^3 = \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2r}, \quad (5.21)$$

$$R_{101}^0 = -\frac{A''(r)}{2A(r)}, \quad (5.22)$$

$$R_{121}^2 = -\frac{A'(r)}{2A(r)r}, \quad (5.23)$$

$$R_{131}^3 = -\frac{A'(r)}{2A(r)r}. \quad (5.24)$$

$$(5.25)$$

$$R_{202}^0 = -\frac{A'(r)r}{2}, \quad (5.26)$$

$$R_{212}^1 = -\frac{A'(r)r}{2}, \quad (5.27)$$

$$R_{232}^3 = -A(r), \quad (5.28)$$

$$R_{303}^0 = -\frac{A'(r)}{2}\alpha^2 r, \quad (5.29)$$

$$R_{313}^1 = -\frac{A'(r)}{2}\alpha^2 r, \quad (5.30)$$

$$R_{323}^2 = -A(r)\alpha^2. \quad (5.31)$$

A partir das quais obtemos as seguintes componentes para o tensor de Ricci

$$R_{00} = \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(\frac{A(r)A''(r)}{2} + \frac{A(r)A'(r)}{r} \right), \quad (5.32)$$

$$R_{11} = -\frac{A''(r)}{2A(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)r}, \quad (5.33)$$

$$R_{22} = -A'(r)r - A(r), \quad (5.34)$$

$$R_{33} = -A'(r)\alpha^2 r - A(r)\alpha^2. \quad (5.35)$$

Por fim, o escalar de curvatura para esse caso será

$$R = g^2(E/E_p) \left(-A''(r) - \frac{4A'(r)}{r} - \frac{2A(r)}{r^2} \right). \quad (5.36)$$

Pelos mesmo argumentos dados em (4), podemos encontrar $A(r)$ resolvendo

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + \Lambda g_{00} = 0. \quad (5.37)$$

Daí, temos

$$[g(E/E_p)]^2 \left[\frac{1}{r} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{A(r)}{r^2} \right] = \Lambda, \quad (5.38)$$

de modo que obtemos

$$A(r) = \frac{\alpha^2 r^2}{[g(E/E_p)]^2} - \frac{4\mu}{\alpha r}. \quad (5.39)$$

A solução acima para a corda negra no cenário de gravidade Rainbow [41] recupera a solução usual de corda negra [1] quando $g(E/E_p) = 1$, isto é,

$$A(r) = \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4\mu}{\alpha r} \right). \quad (5.40)$$

Tendo encontrado a solução da corda negra na gravidade Rainbow, podemos estudar o seu comportamento devido aos efeitos da gravidade Rainbow para cada caso das funções

rainbow que mencionamos anteriormente. Começemos notando que o caso III (5.10) para as funções rainbow não gera nenhuma modificação na solução de corda negra, já que $g(E/E_p) = 1$. O comportamento de $A(r)$ está representado nas figuras (11) e (12) para os casos I e II respectivamente .

Como podemos ver em (11), a medida em que aumentamos o valor da energia E , aproximando-se da escala de energia de Planck, também aumentamos o valor do raio do horizonte da corda negra para o caso I.

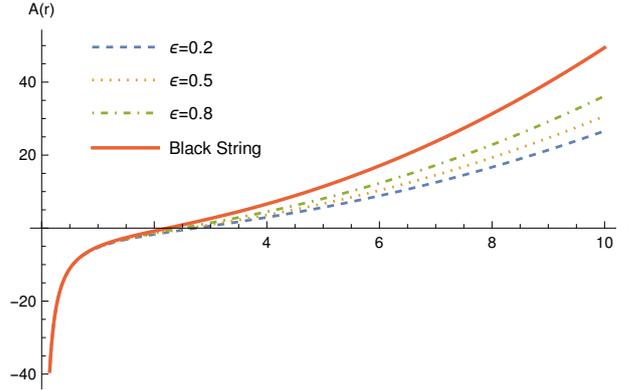


Figura 11 – Solução da corda negra na gravidade Rainbow para o caso I das funções rainbow.

Em (12), podemos observar um comportamento semelhante para o caso II

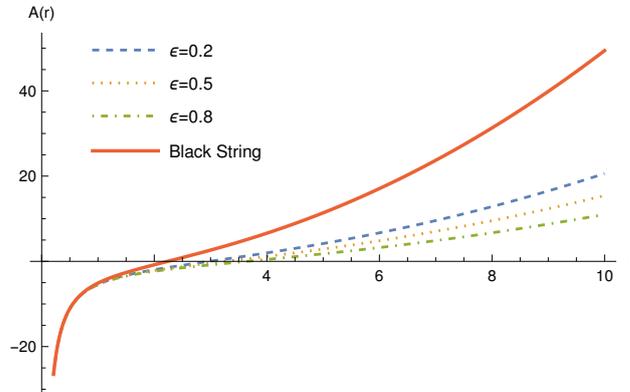


Figura 12 – Solução da corda negra na gravidade Rainbow para o caso II das funções rainbow.

5.3 Termodinâmica da Corda Negra na Gravidade Rainbow

Tendo a solução da corda negra estática no cenário da gravidade Rainbow dada em (5.39), somos capazes de estudar a sua termodinâmica. Primeiramente vamos encontrar as curvas de horizonte que são definidas por $A(\tilde{r}_h) = 0$, ou seja,

$$\frac{\alpha^2 r^2}{[g(E/E_P)]^2} - \frac{4\mu}{\alpha r} = 0. \quad (5.41)$$

A única solução real que a equação (5.41) possui é

$$\tilde{r}_h = \frac{(4\mu)^{1/3}[g(E/E_P)]^{2/3}}{\alpha}. \quad (5.42)$$

A partir dessa relação podemos escrever a massa linear da corda negra nesse cenário como

$$\mu = \frac{\alpha^3 \tilde{r}_h^3}{4g(E/E_P)^2}, \quad (5.43)$$

mas, temos que $\tilde{r} = r_h[g(E/E_P)]^{2/3}$, onde r_h é o raio de horizonte da solução usual de corda negra da relatividade geral. Assim, a expressão (5.43) se torna

$$\mu = \frac{\alpha^3 r_h^3}{4}. \quad (5.44)$$

Portanto, a massa linear não apresenta modificações devido à gravidade Rainbow.

Vamos começar a calcular suas quantidades termodinâmicas, partindo do cálculo da temperatura de Hawking por meio de $\tilde{T}_H = \frac{A'(\tilde{r}_h)}{4\pi}$. Assim, obtemos

$$\tilde{T}_H = \frac{3\alpha^2 \tilde{r}_h}{4\pi[g(E/E_P)]^{4/3}}. \quad (5.45)$$

O comportamento da temperatura de Hawking para os casos I e II está representado nas figuras (13) e (14). Para ambos os casos (I e II), o mesmo comportamento linear da temperatura de Hawking usual da corda está presente. No entanto, algumas pequenas diferenças entre os casos devem ser destacadas.

Para o caso I (fig(13)) podemos ver que para um determinado raio de horizonte a temperatura de Hawking é maior quando consideramos o efeito da gravidade Rainbow, ou seja, conforme aumentamos o raio de horizonte da corda negra neste cenário, a temperatura de Hawking aumenta de maneira mais rápida.

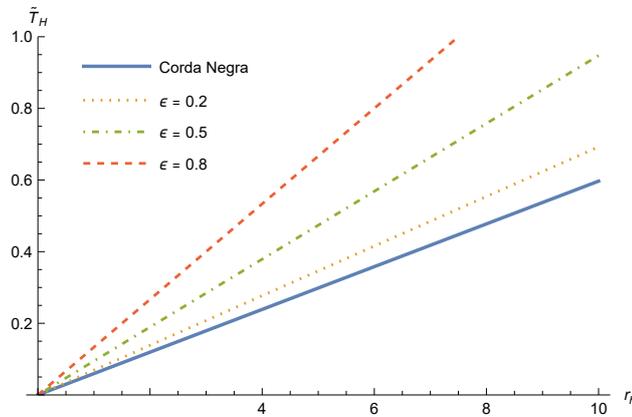


Figura 13 – Temperatura de Hawking para uma solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso I.

O contrário acontece para o caso II (fig(14)), onde para um determinado raio de horizonte

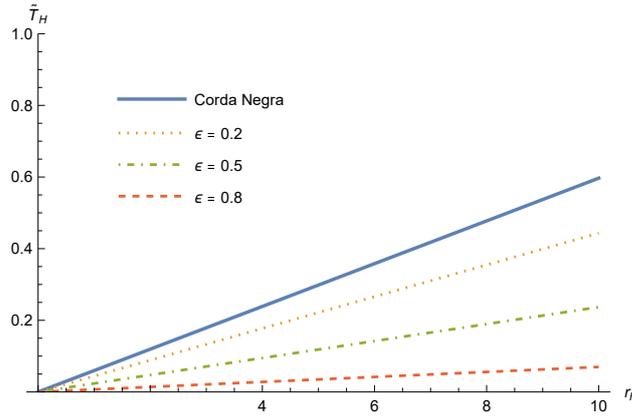


Figura 14 – Temperatura de Hawking para uma solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso II.

a temperatura de Hawking aumenta de maneira mais lenta quando consideramos o efeito da gravidade Rainbow.

Para entender corretamente a termodinâmica da corda negra no contexto da gravidade Rainbow é necessário calcular a entropia, calor específico e energia livre. A entropia pode ser calculada diretamente através da expressão $d\tilde{S} = \frac{d\mu}{\tilde{T}_H}$. Na qual obtemos

$$\tilde{S} = \frac{\pi \alpha r_h^2 [g(E/E_P)]^{4/3}}{2}. \quad (5.46)$$

Esse resultado recai no resultado usual da corda negra $S = \frac{1}{2}\pi\alpha r_h^2$ quando $g(E/E_P) = 1$.

Como podemos ver nas figuras (15) e (16), para ambos os casos nós temos a mesma dependência quadrática do raio de horizonte que a entropia da corda negra usual exibe. No entanto, diferentemente na temperatura de Hawking, o caso I promove uma diminuição na entropia para um dado raio de horizonte, ou seja, a entropia vai aumentar de maneira mais lenta conforme aumentarmos o raio de horizonte de eventos

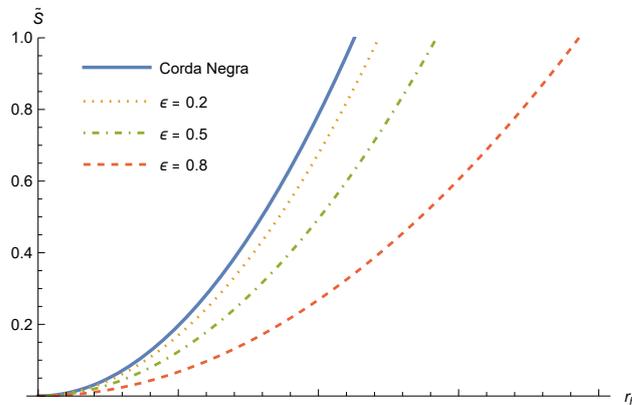


Figura 15 – Entropia para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso I.

Para o caso II e o efeito da gravidade rainbow promove um aumento mais rápido da

entropia, ou seja, a entropia vai aumentar de maneira mais rápida conforme aumentarmos o raio de horizonte de eventos.

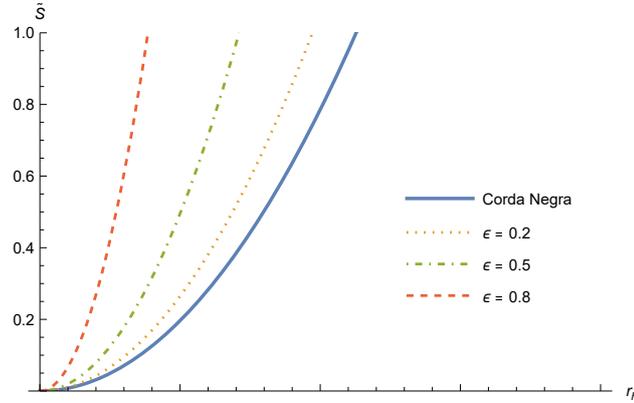


Figura 16 – Entropia para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso II.

O calor específico, por sua vez, pode ser calculado através de $\tilde{C}_v = \frac{d\mu}{dT_H}$, de onde obtemos

$$\tilde{C}_v = \pi \alpha r_h^2 [g(E/E_P)]^{4/3}. \quad (5.47)$$

O comportamento do calor específico para os casos I e II das funções rainbow está retratado nas figuras (17) e (18). Semelhante à entropia, no caso I, para um dado raio de horizonte, o calor específico aumenta de maneira mais lenta quando consideramos o efeito da gravidade Rainbow.

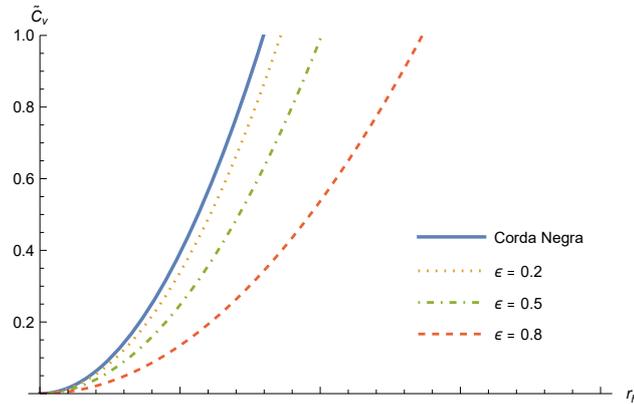


Figura 17 – Calor específico para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso I.

O oposto acontece para o caso II.

Quando $g(E/E_P) = 1$ nós obtemos $C_v = \pi \alpha r_h^2$, que é a expressão para o calor específico da solução usual da relatividade geral. Como se sabe, a estabilidade termodinâmica dos buracos negros (cordas negras para o nosso caso) está diretamente relacionada ao sinal da capacidade térmica. Uma capacidade térmica positiva indica que o sistema é termodinamicamente estável, enquanto uma capacidade térmica negativa indica uma

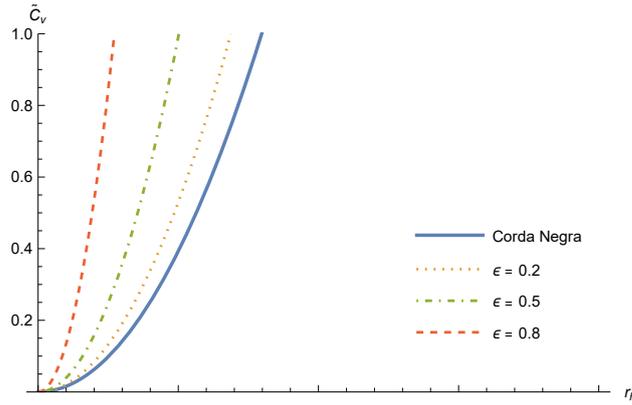


Figura 18 – Calor específico para solução de corda negra na gravidade Rainbow para o caso II.

instabilidade termodinâmica. Logo, o resultado para o calor específico no contexto da gravidade Rainbow indica uma estabilidade termodinâmica da corda negra.

Por outro lado, a gravidade Rainbow não apresenta modificação na energia livre $F = \mu - \tilde{T}_H \tilde{S}$, produzindo portanto, o resultado da corda negra usual

$$F = -\frac{\alpha^3 r_h^3}{8}. \quad (5.48)$$

5.4 Geodésicas e órbitas circulares

Um resultado importante que pode nos interessar é o das possíveis órbitas circulares em torno da corda negra nesse cenário. Isto é, se é possível uma partícula com massa m ou um fóton realizar uma trajetória circular em torno da corda negra. Para avaliarmos isso, podemos estudar o comportamento da energia potencial efetiva (V_{eff}) do sistema formado pela corda negra e uma partícula massiva ou uma partícula sem massa. À partir da determinação desta energia potencial, podemos aplicar a condição básica para que uma órbita possa ser circular, ou seja, que seja um ponto de equilíbrio, um ponto no qual a derivada em relação à coordenada radial da energia potencial seja igual a zero. Assim, existem dois tipos de órbitas circulares, a órbita estável e a instável. A órbita estável é aquela na qual, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, a concavidade da função é positiva, ou seja, $V_{eff} > 0$, e a instável, sua concavidade é negativa, $V_{eff} < 0$ [42].

A geodésica de uma partícula em órbita em torno de uma corda negra estática é dada por

$$\dot{r}^2 = \omega^2 - A(r) \left(\frac{L^2}{r^2} + m^2 \right), \quad (5.49)$$

onde ω é a energia da partícula, L é o momento angular e m é a massa da partícula.

Portanto, o potencial efetivo é definido como

$$V_r = A(r) \left(\frac{L^2}{r^2} + m^2 \right). \quad (5.50)$$

As geodésicas circulares ocorrem nos pontos r_c satisfazendo $\frac{1}{2}\dot{r}_c^2 = 0$ e $V'_r(r_c) = 0$. Na figura (19) nós descrevemos o potencial efetivo de partículas massivas e sem massas para a corda negra no cenário da gravidade Rainbow.

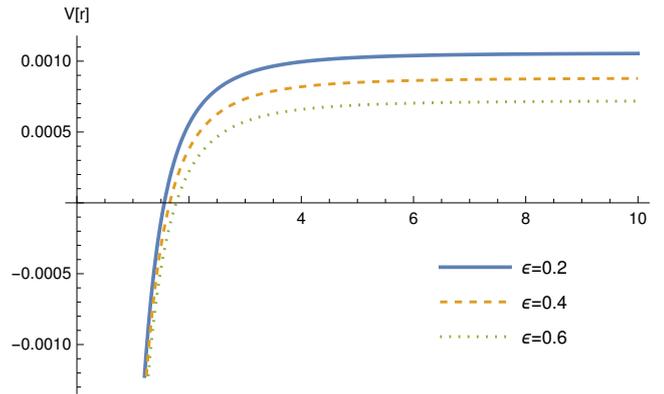


Figura 19 – Potencial efetivo para partículas sem massa.

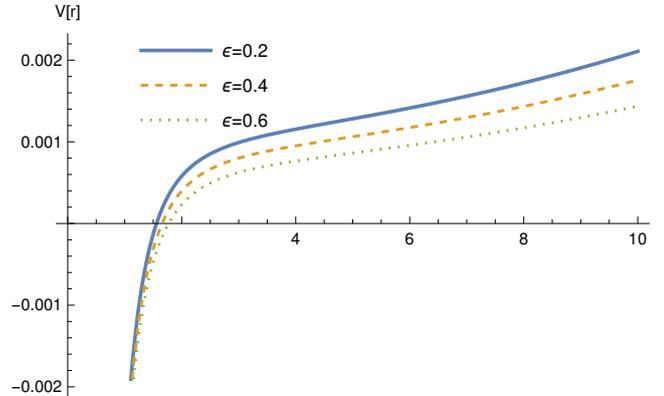


Figura 20 – Potencial efetivo para partículas massivas.

Isso mostra que não há casos que apresentem órbitas circulares estáveis, de maneira semelhante à solução usual de corda negra. Portanto, a gravidade Rainbow não modifica significativamente os resultados para geodésicas e órbitas circulares em comparação com a corda negra usual.

6 Conclusão

Neste trabalho encontramos de maneira inédita a solução de uma corda negra quadridimensional sob consideração da gravidade Rainbow [41] e verificamos que a solução da corda negra depende apenas da função $g(E/E_P)$, uma das quais define a escala de energia onde a gravidade Rainbow se torna relevante. Conseqüentemente, todos os parâmetros termodinâmicos da corda negra nesse cenário dependem apenas de $g(E/E_P)$. Traçamos o comportamento da solução da corda negra em (11) e (12) e pudemos verificar que à medida que aumentamos o valor da energia E , aproximando-se da escala de energia de Planck, também aumentamos o valor do raio do horizonte para os casos I (5.8) e II (5.9) das funções rainbow.

Também obtivemos a temperatura de Hawking para a corda negra, a partir da qual pudemos ver que as funções rainbow desempenham o papel de fazer com que a temperatura de Hawking aumente de maneira mais rápida ou mais lenta para um determinado raio do horizonte, dependendo da escolha de tais funções rainbow. Calculamos a entropia, calor específico e energia livre para a corda negra. A entropia e o calor específico exibem uma dependência das funções rainbow, enquanto a energia livre não é modificada. Estudamos também as órbitas de partículas massivas e sem massa em torno de uma corda negra, e as partículas não exibem órbitas estáveis em torno de uma corda negra no cenário da gravidade Rainbow, para qualquer configuração das funções rainbow; sejam as partículas massivas ou não.

Referências

- 1 LEMOS, J. P. S. Cylindrical black hole in general relativity. *Phys. Lett. B*, v. 353, p. 46–51, 1995. Citado 3 vezes nas páginas [18](#), [49](#) e [59](#).
- 2 AMELINO-CAMELIA, G. Doubly special relativity. *Nature*, v. 418, n. 34, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [18](#), [55](#) e [56](#).
- 3 AMELINO-CAMELIA, G. Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (planckian) length scale. *Int. J. Mod. Phys.*, D11, p. 35–60, 2002. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [56](#).
- 4 MAGUEIJO; SMOLIN, L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [18](#), [56](#) e [57](#).
- 5 GALAN; MARUGAN, G. A. M. Quantum time uncertainty in a gravity’s rainbow formalism. *Phys. Rev.*, D70, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [56](#).
- 6 AMELINO-CAMELIA J. R. ELLIS, N. E. M. D. V. N. G.; SARKAR, S. Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts. *Nature*, v. 393, p. 763–765, 1998. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [57](#).
- 7 LEIVA, J. S. C.; VILLANUEVA, J. The geodesic structure of the schwarzschild black holes in gravity’s rainbow. *Mod. Phys. Lett.*, A24, p. 1443–1451, 2009. Citado na página [18](#).
- 8 LI, Y. L. H.; HAN, X. Modified (a)ds schwarzschild black holes in rainbow spacetime. *Class. Quant. Grav.*, v. 26, 2009. Citado na página [18](#).
- 9 ALI, A. F. Black hole remnant from gravity’s rainbow. *Phys. Rev.*, D89, n. 10 104040, 2014. Citado na página [18](#).
- 10 BEZERRA H. R. CHRISTIANSEN, M. S. C. V. B.; MUNIZ, C. R. Exact solutions and phenomenological constraints from massive scalars in a gravity’s rainbow spacetime. *Phys. Rev.*, D96, n. 024018, 2017. Citado na página [18](#).
- 11 FENG, Z.-W.; YANG, S.-Z. Thermodynamic phase transition of a hole in rainbow gravity. *Phys. Lett.*, B772, n. 737, 2017. Citado na página [18](#).
- 12 LI M. HE, J.-C. D. X.-R. H. P.; DENG, J.-B. Thermodynamics of charged ads black holes in rainbow gravity. *Adv. High E. Phys.*, v. 1043639, 2018. Citado na página [18](#).
- 13 LOBO, I. P.; RONCO, M. Rainbow-like black-hole metric from loop quantum gravity. *Universe*, v. 4(12), n. 139, 2018. Citado na página [18](#).
- 14 JUNIOR, M. E. R. E. L. B.; SILVA, M. V. de S. Regular black holes in rainbow gravity. *Nuc. Phys.*, B961, n. 115244, 2020. Citado na página [18](#).
- 15 M.DEHGHANI. Ads4 black holes with nonlinear source in rainbow gravity. *Phys. Lett.*, B801, n. 135191, 2020. Citado na página [18](#).

- 16 MORAIS G. V. SILVA, J. P. M. G. P. H.; BEZERRA, V. B. Thermodynamics and remnants of kiselev black holes in rainbow gravity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 54, n. 16, 2022. Citado na página 18.
- 17 HAMIL, B.; LÜTFÜOĞLU, B. C. Effect of snyder–de sitter model on the black hole thermodynamics in the context of rainbow gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, v. 19, n. 2250047, 2022. Citado na página 18.
- 18 BEZERRA I. P. LOBO, H. F. M. V. B.; MUNIZ, C. R. Landau levels in the presence of a cosmic string in rainbow gravity. *Ann. Phys.*, v. 401, n. 162, 2019. Citado na página 18.
- 19 BAKKE, K.; MOTA, H. Aharonov–bohm effect for bound states in the cosmic string spacetime in the context of rainbow gravity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 52, n. 97, 2020. Citado na página 18.
- 20 L.C.N.SANTOS C.E.MOTA, C. J. L.; V.B.BEZERRA. Quantum dynamics of scalar particles in the space–time of a cosmic string in the context of gravity’s rainbow. *Ann. Phys.*, v. 421, n. 168276, 2020. Citado na página 18.
- 21 D’INVERNO, R. Book. *Introducing Einstein’s Relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado na página 21.
- 22 Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. *Gravitation*. [S.l.: s.n.], 1973. Citado na página 36.
- 23 DIRAC, P. *General Theory of Relativity*. Princeton University Press, 2016. (Physics Notes). ISBN 9781400884193. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=qkWPDAAAQBAJ>>. Citado na página 39.
- 24 CARTER, B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, v. 26(6), n. 331, 1971. Citado na página 43.
- 25 BARDEEN J.M., C. B. . H. S. The four laws of black hole mechanics. *Commun.Math. Phys.*, v. 31, p. 161–170, 1973. Citado na página 43.
- 26 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications In Mathematical Physics*, v. 43(3), n. 199, 1975. Citado na página 44.
- 27 BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. *Lettere Al Nuovo Cimento Series*, v. 2 4(15), n. 737, 1972. Citado na página 45.
- 28 HAWKING, G. G. e S. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Physical Review*, v. 15(10), n. 2752, 1977. Citado na página 45.
- 29 FERNANDES, T. A termodinâmica de buracos negros. *Cad. Astro.*, v. 4, n. 1, p. 78–90, 2023. Citado na página 45.
- 30 ALENCAR G.; MUNIZ, C. R. Thermodynamic properties of static and rotating unparticle black holes. *JCAP*, v. 3, n. 40, 2018. Citado na página 45.
- 31 HAWKING, S. W. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, v. 25, n. 2, 1972. Citado na página 49.

- 32 FRIEDMAN, J. L.; SCHLEICH, K.; WITT, D. M. Topological censorship. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 71, p. 1486–1489, Sep 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.1486>>. Citado na página 49.
- 33 EMPARAN, R.; REALL, H. S. A rotating black ring solution in five dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 101101, Feb 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.101101>>. Citado na página 49.
- 34 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 044017, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- 35 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Gravity’s rainbow. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 7, p. 1725, mar 2004. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/7/001>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- 36 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 7, p. 1725, mar 2004. Citado na página 57.
- 37 FENG H. L. LI, X. T. Z. S. Z. Y. Z. W. Quantum corrections to the thermodynamics of schwarzschild–tangherlini black hole and the generalized uncertainty principle. *The European Physical Journal C*, v. 76, n. 4, 2016. Citado na página 57.
- 38 AWAD, A.; ALI, A. F.; MAJUMDER, B. Nonsingular rainbow universes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2013, n. 10, p. 052, oct 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/10/052>>. Citado na página 57.
- 39 ALI, A. F. Black hole remnant from gravity’s rainbow. *Physical Review D*, v. 89, p. 104040, 2014. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119238359>>. Citado na página 57.
- 40 SANTOS, G.; GUBITOSI, G.; AMELINO-CAMELIA, G. On the initial singularity problem in rainbow cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2015, n. 08, p. 005, aug 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/08/005>>. Citado na página 57.
- 41 DÁRLLA, R.; BRITO, F. A.; FURTADO, J. Black string solutions in rainbow gravity. *Universe*, v. 9, n. 6, 2023. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/9/6/297>>. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 67.
- 42 JEFREMOV, P. I.; TSUPKO, O. Y.; BISNOVATYI-KOGAN, G. S. Innermost stable circular orbits of spinning test particles in schwarzschild and kerr space-times. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 91, p. 124030, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.124030>>. Citado na página 64.



Article

Black String Solutions in Rainbow Gravity

Roberta Dárla¹, Francisco A. Brito¹ and Job Furtado^{2,*} 

¹ Departamento de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande 58429-900, PB, Brazil

² Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte 63048-080, CE, Brazil

* Correspondence: job.furtado@ufca.edu.br

Abstract: In this paper, we studied black string solutions under the consideration of rainbow gravity. We analytically obtained the solution for four-dimensional black strings in terms of the functions $f(E/E_p)$ and $g(E/E_p)$ that sets the energy scale where the rainbow gravity becomes relevant. We also obtained the Hawking temperature for the black string, from which we can see that the rainbow functions play the role of increasing or decreasing the Hawking temperature for a given horizon radius depending on the choice of such rainbow functions. We computed the entropy, specific heat and free energy for the black string. The entropy and specific heat exhibit a rainbow dependence, whereas the free energy is not modified by the rainbow functions. Finally, we studied the effects of rainbow gravity in the orbits of massive and massless particles around a black string. We could verify that neither massive nor massless particles exhibit stable orbits around a black string in the scenario of rainbow gravity for any configuration of rainbow functions.

Keywords: black string; rainbow gravity; modified dispersion relation; thermodynamics

1. Introduction

Black holes are obtained as solutions of Einstein's equations and play a very relevant role in physics since such objects can be used to understand how space-time is established after a gravitational collapse. Although there is a natural tendency to study spherically symmetric black holes, especially in space-times with a vanishing cosmological constant, the study of such objects with different topologies has also become something of interest. Space-times with a negative cosmological constant are the background for the existence of



Citation: Dárla, R.; Brito, F.A.;

Furtado, J. Black String Solutions in

Apêndices

APÊNDICE A – Componentes dos tensores para a solução de Schwarzschild

Nesta seção, vamos calcular com detalhes todas as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel, tensor de Riemann e do tensor de Ricci para a solução de Schwarzschild.

A.1 Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-2v(r)})\left(\frac{\partial}{\partial r}(-e^{2v(r)})\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2v(r)}(2e^{2v(r)}v'(r)) \\ &= v'(r) \\ \Gamma_{10}^0 &= v'(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-2\lambda(r)})\left(\frac{\partial}{\partial r}(e^{2v(r)})\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\lambda(r)}(2e^{2v(r)}v'(r)) \\ &= v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-2\lambda(r)})\left(\frac{\partial}{\partial r}(e^{2\lambda(r)})\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\lambda(r)}(2e^{2\lambda(r)}\lambda'(r)) \\ &= \lambda'(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\lambda(r)}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}(r^2)\right) \\
&= -e^{-2\lambda(r)}r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\lambda(r)}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \text{sen}^2 \theta)\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\lambda(r)}(-2r \text{sen}^2 \theta) \\
&= -re^{-2\lambda(r)} \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2)\right) \\
&= \frac{1}{2r^2}2r \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta r^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}(\text{sen}^2 \theta r^2)\right) \\
&= \frac{1}{\text{sen}^2 \theta r^2}(2 \text{sen}^2 \theta r) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta r^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{sen}^2 \theta r^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta r^2}\right)(2r^2 \text{sen} \theta \cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{23} + \partial_3g_{23} - \partial_2g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\text{sen}\theta)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)(2r^2\text{sen}\theta\cos\theta) \\
&= -\text{sen}\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

A.2 Tensor de Riemann

$$R_{bcd}^a = \partial_c\Gamma_{bd}^a - \partial_d\Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e\Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e\Gamma_{ed}^a$$

$$\begin{aligned}
R_{000}^0 &= 0 \\
R_{010}^1 &= \partial_1\Gamma_{00}^1 - \partial_0\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^0\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^2\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{00}^3\Gamma_{31}^1 - \Gamma_{01}^0\Gamma_{00}^1 - \Gamma_{01}^1\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{01}^2\Gamma_{20}^1 - \Gamma_{01}^3\Gamma_{30}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}) + (v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)})(\lambda'(r)) - (v'(r))(v'(r))e^{-2\lambda(r)+2v(r)} \\
&= v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}(-2\lambda'(r) + 2v'(r)) + e^{-2\lambda(r)+2v(r)}(v''(r) + v'(r)\lambda'(r) - v'^2(r)) \\
&= e^{-2\lambda(r)+2v(r)}(v''(r) - v'(r)\lambda'(r) + v'^2(r)) \\
R_{020}^2 &= \partial_2\Gamma_{00}^2 - \partial_0\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^0\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{00}^3\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{02}^0\Gamma_{00}^2 - \Gamma_{02}^1\Gamma_{10}^2 - \Gamma_{02}^2\Gamma_{20}^2 - \Gamma_{02}^3\Gamma_{30}^2 \\
&= (v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)})\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}}{r} \\
R_{030}^3 &= \partial_3\Gamma_{00}^3 - \partial_0\Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^0\Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{13}^3 + \Gamma_{00}^2\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{00}^3\Gamma_{33}^3 - \Gamma_{03}^0\Gamma_{00}^3 - \Gamma_{03}^1\Gamma_{10}^3 - \Gamma_{03}^2\Gamma_{20}^3 - \Gamma_{03}^3\Gamma_{30}^3 \\
&= (v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)})\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}}{r} \\
R_{101}^0 &= \partial_0\Gamma_{11}^0 - \partial_1\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^0\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{11}^3\Gamma_{30}^0 - \Gamma_{10}^0\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{10}^2\Gamma_{21}^0 - \Gamma_{10}^3\Gamma_{31}^0 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}(v'(r)) + (\lambda'(r))(v'(r)) - (v'(r))(v'(r)) \\
&= -v''(r) + \lambda'(r)v'(r) - v'^2(r) \\
R_{111}^1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{121}^2 &= \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) + (\lambda'(r)) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{\lambda'(r)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{131}^3 &= \partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 - \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) + (\lambda'(r)) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{\lambda'(r)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{202}^0 &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0 \\
&= (-e^{2\lambda(r)} r)(v'(r)) \\
&= -r v'(r) e^{-2\lambda(r)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{212}^1 &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (-e^{-2\lambda(r)} r) + (-e^{-2\lambda(r)} r)(\lambda'(r)) - \left(\frac{1}{r} \right) (-e^{-2\lambda(r)} r) \\
&= (-e^{-2\lambda(r)} (-2\lambda'(r))r - e^{-2\lambda(r)}) - e^{-2\lambda(r)} r \lambda'(r) + e^{-2\lambda(r)} \\
&= e^{-2\lambda(r)} r \lambda'(r)
\end{aligned}$$

$$R_{222}^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{232}^3 &= \partial_3 \Gamma_{22}^3 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta} (\cot \theta) + (-e^{-2\lambda(r)} r) \left(\frac{1}{r} \right) - (\cot \theta)(\cot \theta) \\
&= \operatorname{cosec}^2 \theta - e^{-2\lambda(r)} - \cot \theta \\
&= \operatorname{cosec}^2 \theta - e^{-2\lambda(r)} - (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) \\
&= -e^{-2\lambda(r)} + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{303}^0 &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 - \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&= (-e^{-2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta)(v'(r)) \\
&= -e^{2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta v'(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{313}^1 &= \partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (-e^{-2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta) + (-e^{-2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta)(\lambda'(r)) - \left(\frac{1}{r}\right) (-e^{-2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta) \\
&= 2e^{-2\lambda(r)} \lambda'(r) r \operatorname{sen}^2 \theta - e^{-2\lambda(r)} \operatorname{sen}^2 \theta - e^{-2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta \lambda'(r) + e^{-2\lambda(r)} \operatorname{sen}^2 \theta \\
&= e^{-2\lambda(r)} \lambda'(r) \operatorname{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{323}^2 &= \partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= (-e^{-2\lambda(r)} r \operatorname{sen}^2 \theta) \left(\frac{1}{r}\right) - (\cot \theta)(-\operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\
&= -e^{-2\lambda(r)} \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

$$R_{333}^3 = 0$$

A.3 Tensor de Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \\
&= e^{-2\lambda(r)+2v(r)}(v''(r) - v'(r)\lambda'(r) + v^2(r)) + \frac{v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}}{r} \\
&\quad + \frac{v'(r)e^{-2\lambda(r)+2v(r)}}{r} \\
&= e^{-2\lambda(r)+2v(r)} \left(v''(r) - v'(r)\lambda'(r) + v^2(r) + \frac{2v'(r)}{r} \right) \\
R_{11} &= R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 \\
&= -v''(r) + \lambda'(r)v'(r) - v'^2(r) + \frac{\lambda'(r)}{r} + \frac{\lambda'(r)}{r} \\
&= -v''(r) + \lambda'(r)v'(r) - v'^2(r) + \frac{2\lambda'(r)}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3 \\
&= -rv'(r) e^{-2\lambda(r)} + e^{-2\lambda(r)} r \lambda'(r) - e^{-2\lambda(r)} + 1 \\
&= e^{-2\lambda(r)}(-rv'(r) + r \lambda'(r) - 1) + 1 \\
R_{33} &= R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3 \\
&= -e^{-2\lambda(r)} r \text{sen}^2 \theta v'(r) + e^{-2\lambda(r)} \lambda'(r) r \text{sen}^2 \theta - e^{-2\lambda(r)} \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&= e^{-2\lambda(r)}(-r \text{sen}^2 \theta v'(r) + \lambda'(r) r \text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) + \text{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – Componentes dos tensores para a solução da corda negra

Nesta seção, vamos calcular com detalhes todas as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel, tensor de Riemann e do tensor de Ricci para a solução da corda negra.

B.1 Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{f(r)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}(-f(r))\right) \\ &= \frac{f'(r)}{2f(r)} \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{f'(r)}{2f(r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}f(r)\left(-\frac{\partial}{\partial r}(-f(r))\right) \\ &= \frac{f(r)f'(r)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}f(r)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{f(r)}\right)\right) \\ &= \frac{f(r)}{2}\left(\frac{0 \cdot f(r) - 1 \cdot f'(r)}{f^2(r)}\right) \\ &= \frac{f(r)}{2}\left(-\frac{f'(r)}{f^2(r)}\right) \\ &= -\frac{f'(r)}{2f(r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}f(r) \left(-\frac{\partial}{\partial r}(r^2) \right) \\
&= -\frac{f(r)}{2} 2r \\
&= -f(r)r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}f(r) \left(-\frac{\partial}{\partial r}(\alpha^2 r^2) \right) \\
&= \frac{f(r)}{2}(-2\alpha^2 r) \\
&= -f(r)\alpha^2 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) \right) \\
&= \frac{1}{2r^2} 2r \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r}(\alpha^2 r^2) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2 r^2} (2\alpha^2 r) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

B.2 Tensor de Riemann

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a$$

$$\begin{aligned}
R_{000}^0 &= 0 \\
R_{010}^1 &= \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{01}^2 \Gamma_{20}^1 - \Gamma_{01}^3 \Gamma_{30}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f(r)f'(r)}{2} \right) + \left(\frac{f(r)f'(r)}{2} \right) \left(-\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) - \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \left(\frac{f(r)f'(r)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}(f'(r)f'(r) + f(r)f''(r)) + \left(-\frac{f'^2(r)}{4} \right) - \left(\frac{f'^2(r)}{4} \right) \\
&= \frac{f'^2(r)}{2} + \frac{f(r)f''(r)}{2} - \frac{f'^2(r)}{2} \\
&= \frac{f(r)f''(r)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{020}^2 &= \partial_2 \Gamma_{00}^2 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{02}^3 \Gamma_{30}^2 \\
&= \left(\frac{f(r)f'(r)}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{f(r)f'(r)}{2r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{030}^3 &= \partial_3 \Gamma_{00}^3 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3 - \Gamma_{03}^2 \Gamma_{20}^3 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3 \\
&= \left(\frac{f(r)f'(r)}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{f(r)f'(r)}{2r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{10}^2 \Gamma_{21}^0 - \Gamma_{10}^3 \Gamma_{31}^0 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) + \left(-\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) - \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{f''(r)f(r) - f'(r)f'(r)}{f^2(r)} \right) + \left(-\frac{f'^2(r)}{4f^2(r)} \right) - \left(\frac{f'^2(r)}{4f^2(r)} \right) \\
&= -\frac{f''(r)f(r)}{2f^2(r)} + \frac{f'^2(r)}{2f^2(r)} - \frac{f'^2(r)}{2f^2(r)} \\
&= -\frac{f''(r)}{2f(r)}
\end{aligned}$$

$$R_{111}^1 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{121}^2 &= \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(-\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{f'(r)}{2f(r)r} - \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{f'(r)}{2f(r)r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{131}^3 &= \partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 - \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(-\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{f'(r)}{2f(r)r} - \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{f'(r)}{2f(r)r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{202}^0 &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0 \\
&= (-f(r)r) \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \\
&= -\frac{f'(r)r}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{212}^1 &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (-f(r)r) + (-f(r)r) \left(-\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) - \frac{1}{r} (-f(r)r) \\
&= -f'(r)r - f(r) + \frac{f'(r)r}{2} + f(r) \\
&= -f'(r)r + \frac{f'(r)r}{2} \\
&= -\frac{f'(r)r}{2}
\end{aligned}$$

$$R_{222}^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{232}^3 &= \partial_3 \Gamma_{22}^3 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= (-f(r)r) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= -f(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{303}^0 &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 - \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&= (-f(r)\alpha^2 r) \left(\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) \\
&= -\frac{f'(r)}{2} \alpha^2 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{313}^1 &= \partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (-f(r)\alpha^2 r) + (-f(r)\alpha^2 r) \left(-\frac{f'(r)}{2f(r)} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) (-f(r)\alpha^2 r) \\
&= -f'(r)\alpha^2 r - f(r)\alpha^2 + \frac{f'(r)}{2} \alpha^2 r + f(r)\alpha^2 \\
&= -f'(r)\alpha^2 r + \frac{f'(r)}{2} \alpha^2 r \\
&= -\frac{f'(r)}{2} \alpha^2 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{323}^2 &= \partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= (-f(r)\alpha^2 r) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= -f(r)\alpha^2
\end{aligned}$$

$$R_{333}^3 = 0$$

B.3 Tensor de Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}^c$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \\
&= \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{2r} + \frac{f(r)f'(r)}{2r} \\
&= \frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r} \\
R_{11} &= R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 \\
&= -\frac{f''(r)}{2f(r)} - \frac{f'(r)}{2f(r)r} - \frac{f'(r)}{2f(r)r} \\
&= -\frac{f''(r)}{2f(r)} - \frac{f'(r)}{f(r)r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3 \\
&= -\frac{f'(r)r}{2} - \frac{f'(r)r}{2} - f(r) \\
&= -f'(r)r - f(r) \\
R_{33} &= R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3 \\
&= -\frac{f'(r)}{2}\alpha^2 r - \frac{f'(r)}{2}\alpha^2 r - f(r)\alpha^2 \\
&= -f'(r)\alpha^2 r - f(r)\alpha^2
\end{aligned}$$

B.4 Escalar de Curvatura

$$R = g^{ab} R_{ab}$$

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

$$\begin{aligned}
R &= \left(-\frac{1}{f(r)}\right) \left(\frac{f(r)f''(r)}{2} + \frac{f(r)f'(r)}{r}\right) + f(r) \left(-\frac{f''(r)}{2f(r)} - \frac{f'(r)}{f(r)r}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{r^2}\right) (-f'(r)r - f(r)) + \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2}\right) (-f'(r)\alpha^2 r - f(r)\alpha^2) \\
R &= -\frac{f''(r)}{2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f''(r)}{2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} \\
R &= -f''(r) - \frac{4f'(r)}{r} - \frac{2f(r)}{r^2}
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – Componentes dos tensores para a solução da corda negra na gravidade Rainbow

Nesta seção, vamos calcular com detalhes todas as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel, tensor de Riemann e do tensor de Ricci para a solução da corda negra sob consideração da gravidade Rainbow.

C.1 Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{f^2(E/E_p)}{A(r)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{A(r)}{f^2(E/E_p)} \right) \right) \\ &= \frac{A'(r)}{2A(r)} \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{A'(r)}{2A(r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}(g^2(E/E_p)A(r)) \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{A(r)}{f^2(E/E_p)} \right) \right) \\ &= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}(g^2(E/E_p)A(r)) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{g^2(E/E_p)A(r)} \right) \right) \\ &= \frac{A(r)}{2} \left(-\frac{A'(r)}{f^2(r)} \right) \\ &= -\frac{A'(r)}{2A(r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}(g^2(E/E_p)A(r)) \left(-\frac{\partial}{\partial r}(r^2) \right) \\
&= -\frac{A(r)}{2} 2r \\
&= -A(r)r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}(g^2(E/E_p)A(r)) \left(-\frac{\partial}{\partial r}(\alpha^2 r^2) \right) \\
&= \frac{A(r)}{2}(-2\alpha^2 r) \\
&= -A(r)\alpha^2 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) \right) \\
&= \frac{1}{2r^2} 2r \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r}(\alpha^2 r^2) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2 r^2} (2\alpha^2 r) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

C.2 Tensor de Riemann

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a$$

$$\begin{aligned}
R_{000}^0 &= 0 \\
R_{010}^1 &= \partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{01}^2 \Gamma_{20}^1 - \Gamma_{01}^3 \Gamma_{30}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2} \right) + \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(-\frac{A(r)A'(r)}{2} \frac{A'(r)}{2A(r)} - \frac{A'(r)}{2A(r)} \frac{A(r)A'(r)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} (A'(r)A'(r) + A(r)A''(r)) - \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(\frac{A'^2(r)}{4} - \frac{A'^2(r)}{4} \right) \\
&= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(\frac{A'^2(r)}{2} + \frac{A(r)A''(r)}{2} - \frac{A'^2(r)}{2} \right) \\
&= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(\frac{A(r)A''(r)}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{020}^2 &= \partial_2 \Gamma_{00}^2 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{02}^3 \Gamma_{30}^2 \\
&= \left(\frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{030}^3 &= \partial_3 \Gamma_{00}^3 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3 - \Gamma_{03}^2 \Gamma_{20}^3 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3 \\
&= \left(\frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{10}^2 \Gamma_{21}^0 - \Gamma_{10}^3 \Gamma_{31}^0 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) + \left(-\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) - \left(\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \left(\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{A''(r)A(r) - A'(r)A'(r)}{A^2(r)} \right) + \left(-\frac{A'^2(r)}{4A^2(r)} \right) - \left(\frac{A'^2(r)}{4A^2(r)} \right) \\
&= -\frac{A''(r)A(r)}{2A^2(r)} + \frac{A'^2(r)}{2A^2(r)} - \frac{A'^2(r)}{2A^2(r)} \\
&= -\frac{A''(r)}{2A(r)}
\end{aligned}$$

$$R_{111}^1 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{121}^2 &= \partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(-\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{A'(r)}{2A(r)r} - \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{A'(r)}{2A(r)r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{131}^3 &= \partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 - \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(-\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{A'(r)}{2A(r)r} - \frac{1}{r^2} \\
&= -\frac{A'(r)}{2A(r)r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{202}^0 &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0 \\
&= (-A(r)r) \left(\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \\
&= -\frac{A'(r)r}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{212}^1 &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (-A(r)r) + (-A(r)r) \left(-\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) - \frac{1}{r} (-A(r)r) \\
&= -A'(r)r - A(r) + \frac{A'(r)r}{2} + A(r) \\
&= -A'(r)r + \frac{A'(r)r}{2} \\
&= -\frac{A'(r)r}{2}
\end{aligned}$$

$$R_{222}^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{232}^3 &= \partial_3 \Gamma_{22}^3 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= (-A(r)r) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= -A(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{303}^0 &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 - \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&= (-A(r)\alpha^2 r) \left(\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) \\
&= -\frac{A'(r)}{2} \alpha^2 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{313}^1 &= \partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (-A(r)\alpha^2 r) + (-A(r)\alpha^2 r) \left(-\frac{A'(r)}{2A(r)} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) (-A(r)\alpha^2 r) \\
&= -A'(r)\alpha^2 r - A(r)\alpha^2 + \frac{A'(r)}{2} \alpha^2 r + A(r)\alpha^2 \\
&= -A'(r)\alpha^2 r + \frac{A'(r)}{2} \alpha^2 r \\
&= -\frac{A'(r)}{2} \alpha^2 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{323}^2 &= \partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= (-A(r)\alpha^2 r) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= -A(r)\alpha^2
\end{aligned}$$

$$R_{333}^3 = 0$$

C.3 Tensor de Ricci

$$R_{ab} = R_{acb}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \\
&= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A''(r)}{2} + \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2r} + \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \frac{A(r)A'(r)}{2r} \\
&= \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(\frac{A(r)A''(r)}{2} + \frac{A(r)A'(r)}{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 \\
&= -\frac{A''(r)}{2A(r)} - \frac{A'(r)}{2A(r)r} - \frac{A'(r)}{2A(r)r} \\
&= -\frac{A''(r)}{2A(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3 \\
&= -\frac{A'(r)r}{2} - \frac{A'(r)r}{2} - A(r) \\
&= -A'(r)r - A(r) \\
R_{33} &= R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3 \\
&= -\frac{A'(r)}{2}\alpha^2 r - \frac{A'(r)}{2}\alpha^2 r - A(r)\alpha^2 \\
&= -A'(r)\alpha^2 r - A(r)\alpha^2
\end{aligned}$$

C.4 Escalar de Curvatura

$$R = g^{ab} R_{ab}$$

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

$$\begin{aligned}
R &= \frac{-f^2(E/E_p)}{A(r)} \frac{g^2(E/E_p)}{f^2(E/E_p)} \left(\frac{A(r)A''(r)}{2} + \frac{A(r)A'(r)}{r} \right) + (g^2(E/E_p)A(r)) \left(-\frac{A''(r)}{2A(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)r} \right) \\
&\quad + \left(\frac{g^2(E/E_p)}{r^2} \right) (-A'(r)r - A(r)) + \left(\frac{g^2(E/E_p)}{\alpha^2 r^2} \right) (-A'(r)\alpha^2 r - A(r)\alpha^2) \\
R &= g^2(E/E_p) \left(-A''(r) - \frac{4A'(r)}{r} - \frac{2A(r)}{r^2} \right).
\end{aligned}$$

Appendices