



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Ester Oliveira Campos Rocha

# **Estudo da Gravidade Rainbow e Aplicações em Teoria de Espalhamento**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

8 de novembro de 2023

Ester Oliveira Campos Rocha

# **Estudo da Gravidade Rainbow e Aplicações em Teoria de Espalhamento**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, e coorientação do Dr. Eugênio Bastos Maciel apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Coorientador: Professor Dr. Eugênio Bastos Maciel

Campina Grande, Paraíba, Brasil

8 de novembro de 2023

R672e

Rocha, Ester Oliveira Campos.

Estudo da gravidade Rainbow e aplicações em teoria de espalhamento / Ester Oliveira Campos Rocha. – Campina Grande, 2023.  
44 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, Prof. Dr. Eugênio Bastos Maciel".

Referências.

1. Buracos Negros. 2. Gravidade Rainbow. 3. Teoria de Espalhamento. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Maciel, Eugênio Bastos. III. Título.

CDU 524.882(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
POS-GRADUACAO EM FISICA  
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

## FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

**ESTER OLIVEIRA CAMPOS ROCHA**

**Estudo da Gravidade Rainbow e Aplicações em Teoria de Espalhamento**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 08/11/2023

**Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos**  
Presidente da Comissão e Orientador

**Eugênio Bastos Maciel**  
Coorientador

**José André Vieira Campos**  
Examinador Interno

**Jean Paulo Spinelly da Silva**  
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 14/11/2023, às 09:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **EUGENIO BASTOS MACIEL, PROFESSOR 3 GRAU - SUBSTITUTO**, em 22/11/2023, às 18:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **José André Vieira Campos, Usuário Externo**, em 28/11/2023, às 11:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **3948972** e o código CRC **27BC9F7D**.

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
POS-GRADUACAO EM FISICA  
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

## REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

### REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 08 DE NOVEMBRO DE 2023

Aos oito dias do mês de novembro do ano de dois mil e vinte e três, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **ESTER OLIVEIRA CAMPOS ROCHA** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Eugênio Bastos Maciel** – Doutor em Física, o professor **José André Vieira Campos** – Doutor em Física, o professor **Jean Paulo Spinelly da Silva** – Doutor em Física, sendo o primeiro, o segundo e o terceiro integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro, integrante do corpo docente da Universidade Estadual da Paraíba. HORA DE INÍCIO: **09h00min** – LOCAL: **Auditório Jurguer Precker**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **ESTER OLIVEIRA CAMPOS ROCHA**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado **“Estudo da Gravidade Rainbow e Aplicações em Teoria de Espalhamento”**. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a ata, que será submetida à aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 08 de novembro de 2023.

**Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos**  
Presidente da Comissão e Orientador

**Eugênio Bastos Maciel**  
Coorientador

**José André Vieira Campos**  
Examinador Interno

**Jean Paulo Spinelly da Silva**  
Examinador Externo

**Ester Oliveira Campos Rocha**  
Candidato(a)

**Francisco de Assis de Brito**  
Coordenador do Programa

## 2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **ESTER OLIVEIRA CAMPOS ROCHA**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 14/11/2023, às 09:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ester Oliveira Campos, Usuário Externo**, em 14/11/2023, às 10:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **EUGENIO BASTOS MACIEL, PROFESSOR 3 GRAU - SUBSTITUTO**, em 22/11/2023, às 18:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **José André Vieira Campos, Usuário Externo**, em 27/11/2023, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **3948944** e o código CRC **33BDE614**.

# Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por me conceder essa oportunidade de concluir o mestrado, até aqui Ele me ajudou.
- Ao Prof. Eduardo Passos, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- Ao Prof. Eugênio Bastos que me acompanha desde o início da minha jornada acadêmica, obrigada pela paciência, incentivo, conselhos e todo aprendizado que recebi durante esse tempo.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- Aos meus pais por sempre acreditarem em mim, por todo amor e compreensão. Se cheguei até aqui foi pela confiança depositada em mim de que um dia alcançaria todos os meus objetivos.
- Ao meu esposo Warlean, por me incentivar, encorajar, compreender meus momentos de ausência e sempre acreditar que posso realizar meus sonhos.
- Ao meu amigo Joilson, estivemos juntos nessa jornada, compartilhamos momentos de tristezas e alegrias, mas nunca desistimos. Obrigada pelos seus conselhos, pela "zoeira" de sempre, pela cumplicidade, amizade.
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

Nesta dissertação, consideramos que a gravidade Rainbow seja um modelo apropriado para se estudar o Universo de Schwarzschild no regime de altas energias. Diante disto, o setor temporal da métrica é modificado de tal forma a estabelecer um cenário peculiar para verificar as implicações nas propriedades da teoria de espalhamento. Nossos estudos giram em torno da ideia a qual as funções Rainbow sejam capazes de afetar as seções de choque diferencial e de absorção, gerando assim, estruturas dependentes de um parâmetro que controla a violação da invariância de Lorentz em altas energias.

**Palavras-chave:** Gravidade Rainbow, Buracos Negros, Teoria de Espalhamento.

# Abstract

In this dissertation, we consider Rainbow gravity to be an appropriate model for studying the Schwarzschild Universe in the high energy regime. Given this, the temporal sector of the metric is modified in such a way as to establish a peculiar scenario to verify the implications on the properties of the scattering theory. Our studies revolve around the idea that Rainbow functions are capable of affecting the differential and absorption cross sections, thus generating structures dependent of a parameter that controls the Lorentz invariance violation at high-energy.

**Keywords:** Rainbow gravity, Black holes, Scattering Theory.

# Lista de abreviaturas e siglas

UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UAF	Unidade Acadêmica de Física
PPGF	Programa de Pós-Graduação em Física
CCT	Centro de Ciências e Tecnologia
TRG	Teoria da Relatividade Geral
MQ	Mecânica Quântica
DSR	Double Special Relativity
MP	Modelo Padrão
TRR	Teoria da Relatividade Restrita

# Lista de símbolos

$\Gamma$	Letra grega maiúscula Gama
$\Delta$	Letra grega maiúscula Delta
$\delta$	Letra grega minúscula delta
$\Gamma_{bc}^a$	Símbolos de Christoffel
$E_p$	Energia de Planck
$R_{ab}$	Tensor de Ricci
$T_{ab}$	Tensor momento-energia
$l_p$	Comprimento de Planck
$T_H$	Temperatura Hawking
$\nabla$	Nabla
$\kappa$	Letra grega minúscula Kappa

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Problema clássico de espalhamento[1] . . . . .	25
Figura 2 – Espalhamento de ondas[1] . . . . .	27
Figura 3 – Espalhamento por um potencial localizado [1] . . . . .	28
Figura 4 – Espalhamento unidimensional [1] . . . . .	31

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL . . . . .	13
2.1	Equação de Campo Via Princípio Variacional . . . . .	13
2.2	A Solução de Schwarzschild . . . . .	15
3	GRAVIDADE RAINBOW . . . . .	18
3.1	Relatividade Duplamente Especial (DSR) . . . . .	18
3.2	Aspectos Gerais da Gravidade Rainbow . . . . .	19
3.3	Equações de Campo Modificadas . . . . .	21
3.4	Solução de Schwarzschild Modificada . . . . .	22
4	TEORIA DE ESPALHAMENTO . . . . .	25
4.1	Espalhamento no Regime Clássico . . . . .	25
4.2	Espalhamento no Regime Quântico . . . . .	26
4.3	Análise de ondas parciais . . . . .	27
4.4	Mudança de Fase . . . . .	30
5	SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL NO CONTEXTO DA GRAVI- DADE RAINBOW . . . . .	33
5.1	Espalhamento para o caso Schwarzschild . . . . .	33
5.2	Espalhamento na Gravidade Rainbow . . . . .	34
5.3	Espalhamento Diferencial . . . . .	35
6	CONCLUSÕES . . . . .	37
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>38</b>
	<b>APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO</b> . . . . .	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>42</b>

# 1 Introdução

A busca por uma “nova física”, como aquela além do Modelo Padrão, vem sendo um dos principais objetivos dos físicos teóricos ao longo das últimas décadas. Neste cenário, acredita-se que a geometria do espaço-tempo é fundamentalmente descrita por uma teoria quântica, substituindo a suavidade trazida pela Teoria da Relatividade Geral (TRG). Diversas são as propostas na tentativa desta descrição, dentre estas temos a Gravidade Quântica em Loop [2], Geometrias Não-comutativas [3], Teoria das Cordas [4] e a Relatividade Duplamente Especial [5], por exemplo. No entanto, nenhuma destas teorias obtiveram ainda o sucesso devido a um ponto singular, a incompatibilidade presente entre a Teoria da Relatividade Geral (TRG) e Mecânica Quântica (MQ).

Um ponto de partida para solucionar este problema seria o de investigar a natureza na transição entre a física de baixas energias e a física de altas energias. Neste sentido, dentre as propostas acima, destaca-se a *Double Special Relativity I*, ou a Relatividade Duplamente Especial, ou ainda a Relatividade Não-Linear, proposta por Giovanni Amelini-Camelia em 2002 [5], como uma extensão à Teoria da Relatividade Especial TRE. Esta teoria, de maneira resumida, consiste em uma estrutura simples para descrição do espaço-tempo plano quântico, em que a premissa é a de assumir que a energia de Planck  $E_P = \sqrt{\hbar c^5/G}$  desempenha um papel limiar de separação entre a descrição do espaço-tempo quântico e clássico. Para valores superiores desta energia, espera-se que se tenha uma imagem radicalmente nova do espaço-tempo. Além disso, este valor de energia pode se tornar uma invariante, assim, todos os observadores inerciais concordam se uma partícula possui mais ou menos esse valor de energia. Em outras palavras, a energia de Planck  $E_P$ , assume o *status* de constante universal, sendo a mesma para todos os observadores inerciais. Algumas implicações físicas desta teoria podem ser vistas nas referências [6, 7, 8, 9].

Uma outra extensão para a TRE foi proposta por Magueijo e Smolin. Esta extensão está fundamentada em uma deformação à álgebra de Poincaré na escala de energia de Planck e é conhecida como *Double Special Relativity II*, comumente conhecida como DSR II [10]. Neste cenário a energia de Planck mantém os mesmos aspectos para todos os observadores iniciais, ou seja, observadores com a energia de Planck vão possuir os mesmos comprimentos descartando o fenômeno de contração de comprimentos quando submetidos a baixas energias descritos pela TRE. Então, resultaremos em três escalas invariantes, sendo elas: o comprimento de Planck, a velocidade da luz no vácuo e a energia mínima observável.

Magueijo e Smolin [11] mais uma vez propuseram uma nova extensão, desta vez não à TRE, mas sim, a Relatividade Duplamente Especial. Esta teoria ficou conhecida como

Gravidade Rainbow ou Gravidade Arco-íris e será o objeto de estudo desta dissertação. O ponto fundamental da proposta é considerar que diferentes comprimentos de onda de luz, experimentam diferentes níveis de gravidade e são separados da mesma maneira que um prisma natural divide a luz branca. Em linhas gerais, não existe uma única geometria clássica para o espaço-tempo quando consideramos energias próximas à escala de Planck e isso conduz a uma modificação na relação de dispersão. Tal fenômeno seria imperceptível em áreas de gravidade relativamente baixa, como, por exemplo, o conteúdo de gravidade produzida pela Terra, sendo significativo apenas em áreas de gravidade extremamente alta, como um conteúdo de gravidade produzido por um buraco negro.

Buracos Negros são objetos compactos, previstos pela teoria da relatividade geral que possuem um horizonte de eventos e uma singularidade [12, 13]. Desempenham um papel importante na física, tendo em vista, que são utilizados para entender como o espaço-tempo se comporta, contribuindo na investigação da relação entre características do espaço-tempo para escalas microscópicas e macroscópicas. Na astrofísica, os buracos negros tem sido estudados considerando a influência da Gravidade Rainbow que afeta suas propriedades. Estes aspectos são abordados em diversos cenários na literatura, incluindo por exemplo, a termodinâmica de buracos negros como uma forte área no âmbito do estudo de Gravitação [14, 15, 16, 17], favorecendo o entendimento do universo primitivo no que diz respeito as energias próximas a escala de Plank. O objetivo geral deste trabalho é o de estudar os efeitos da Gravidade Rainbow sobre a métrica de Schwarzschild para em seguida investigar suas implicações na Teoria de Espalhamento.

Recentemente, o problema das perturbações lineares das soluções de buracos negros [18] atraiu interesses renovados em relação ao aparecimento de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem após uma separação de variáveis. Em consonância, podemos destacar o estudo da absorção de espalhamento nas proximidades de um buraco negro, ramo importante da física teórica que ao longo dos anos vem apresentando diversos trabalhos para investigar a dispersão de um buraco negro [19, 20]. Essa investigação nos motiva a analisar as aplicações da Gravidade Rainbow no Universo de Schwarzschild com foco em investigar as seções de choque diferencial e de absorção sobre o efeito da violação da invariância de Lorentz.

Esta dissertação se encontra organizada como segue. No Cap.(2), trazemos uma revisão dos fundamentos da Teoria da Relatividade Geral, explicitamos as equações de campo de Einstein e a sua primeira solução, a solução de Schwarzschild. No Cap.(3), exploramos a proposta de Gravidade Rainbow e suas implicações na TRG, tais como as equações de campo modificadas e seus impactos na solução de Schwarzschild. No Cap.(4), apresentamos uma breve revisão da teoria de espalhamento. Neste sentido, procuramos entender as características de espalhamentos tanto no regime clássico como no regime quântico. No Cap.(5), abordamos o estudo da teoria de espalhamento pela métrica de

Schwarzschild sobre a influência das funções rainbow. No Cap.(6), apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Ao longo deste trabalho, adotaremos o sistema natural e unidades a qual considera,  $c = \hbar = 1$ .

## 2 Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral TRG proposta por Albert Einstein por volta de 1916, pode ser descrita como uma teoria de gravitação que incorpora uma manifestação do espaço-tempo e generaliza a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) ao incluir os referenciais não inerciais. Completa e auto consistente, esta teoria trouxe uma nova perspectiva na compreensão do fenômeno de Gravitação, ao passo que, constitui um dos pilares da Cosmologia Moderna, transcendendo o paradigma newtoniano sobre a compreensão do Universo.

Este capítulo trata de uma revisão acerca dos fundamentos da TRG. Expomos as equações de campo de Einstein por meio do princípio variacional onde também explicitamos a primeira solução das equações de Einstein, proposta por Karl Schwarzschild [21], conhecida comumente por solução exterior ou solução de Schwarzschild..

### 2.1 Equação de Campo Via Princípio Variacional

Albert Einstein, no final de 1915, trouxe uma proposta de equações que consolidaram a TRG, estas equações descrevem a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo, substituindo a gravitação newtoniana. Em sua interpretação, ele considerou o Universo como uma variedade  $M$  dotada de uma métrica  $g_{\mu\nu}$  onde a Gravidade é vista como uma distorção (curvatura) do espaço tempo gerada por um corpo massivo [22, 23]. Neste caso, as equações de campo para a TRG devem relacionar a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia. Assim, o ponto de partida via o princípio variacional deve ser uma ação fundamental que carregue estes dois ingredientes. Esta ação é conhecida como ação de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_c + \mathcal{S}_m. \quad (2.1)$$

O termo  $\mathcal{S}_c$  descreve à ação da parte geométrica, que contém a curvatura do espaço-tempo,

$$\mathcal{S}_c = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_G d^4x. \quad (2.2)$$

A quantidade  $\mathcal{S}_m$  descreve a ação que contém o conteúdo de matéria.

$$\mathcal{S}_m = \kappa \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_F d^4x. \quad (2.3)$$

Para a obtenção das equações de campo de Einstein é necessário assumir para (2.2) que  $\mathcal{L}_G = R$ , pois, essas equações envolvem derivadas do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  sem exceder as derivadas de segunda ordem. A lagrangiana associada deve conter derivadas superiores

a ela mesma para que o tensor métrico dependa apenas das primeiras derivadas, o único escalar que consegue atender essas condições é o escalar de curvatura de Ricci, porque ele inclui termos com derivadas de segunda ordem do tensor métrico, além de derivadas de primeira ordem e do próprio tensor métrico.

Variando primeiramente à parte da ação de Einstein-Hilbert que carrega o conteúdo geométrico do espaço-tempo e já reescrevendo (2.2) com  $\mathcal{L}_G = R$  obtemos as relações

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \delta \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x, \quad (2.4)$$

e

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x + \int R_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x. \quad (2.5)$$

O que nos conduz a

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (2.6)$$

esse resultado é obtido após a aplicação de algumas propriedades envolvendo as derivadas do tensor e escalar de Ricci além, de algumas manipulações matemáticas<sup>1</sup>.

Aqui  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  é o escalar de curvatura ou escalar de Ricci, definido em termos do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}. \quad (2.7)$$

Agora, aplicando o mesmo procedimento para a parte da ação que carrega o conteúdo de matéria

$$\delta \mathcal{S}_m = \delta \kappa \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_F d^4x, \quad (2.8)$$

encontramos a seguinte relação

$$\delta \mathcal{S}_m = \kappa \int \left[ \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \delta g_{,\alpha}^{\mu\nu} \right] d^4x. \quad (2.9)$$

O termo  $\frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \delta g_{,\alpha}^{\mu\nu}$  traz um índice que está relacionado com uma diferencial parcial,  $f_{,\alpha} = \partial f / \partial x^{\alpha}$ . Este é um termo de superfície e pode vir a ser desprezado eventualmente de acordo com cada sistema de interesse [24]. Então, podemos definir o tensor energia-momento como segue

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[ \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_F)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right] \right\}. \quad (2.10)$$

Assim, temos como resultado a seguinte relação

$$\delta \mathcal{S}_m = \delta \kappa \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_F d^4x = \frac{1}{2} \kappa \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.11)$$

<sup>1</sup> A demonstração formal das equações de campo de Einstein será exposta no Apêndice 1.

Portanto, aplicando o princípio da mínima ação com  $\delta S = 0$  em (2.1) e combinando juntamente as equações obtidas pela variação (2.6) e (2.11) encontramos a relação

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (2.12)$$

Esta relação nos conduz as famosas equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

em que  $\kappa = 8\pi G$ .

## 2.2 A Solução de Schwarzschild

Uma vez formulada a TRG com o conjunto de equações (2.13), o próximo passo seria encontrar a solução destas equações. O primeiro a apresentar uma solução foi o alemão Karl Schwarzschild [21], considerando um campo gravitacional esférico e simétrico, se assemelhando ao espaço-tempo plano quando no infinito. A priori, para desenvolver a solução Schwarzschild precisamos partir de uma métrica na sua forma geral. Para um campo esfericamente simétrico, esta métrica se apresenta como

$$ds^2 = -B(r,t)dt^2 + A(r,t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.14)$$

onde  $A(r)$  e  $B(r)$  são funções radiais a serem determinadas. Estamos interessados na solução exterior, assim, devemos resolver as equações de campo de Einstein para o espaço-tempo vazio, ou seja,

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

Devemos encontrar as componentes do tensor de Ricci (2.7), em termos das coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ . Tem-se portanto, as seguintes componentes não nulas

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} \right), \quad (2.16)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left( -\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}, \quad (2.17)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}, \quad (2.18)$$

$$R_{tt} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right). \quad (2.19)$$

Pode ser visto que da relação

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right), \quad (2.20)$$

obtemos a quantidade constante

$$A(r)B(r) = \text{const} . \quad (2.21)$$

Espera-se que para grandes distâncias ( $r \rightarrow \infty$ ) a métrica (2.14) se aproxime da métrica de Minkowski. Em outras palavras, devemos ter

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (2.22)$$

Desta forma, de (2.21), tem-se

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (2.23)$$

Portanto, usando a relação (2.23) em (2.17) encontramos

$$R_{\theta\theta} = 1 - B'(r)r - B(r), \quad (2.24)$$

igualando  $R_{\theta\theta} = 0$  obtemos

$$\frac{d}{dr}(rB(r)) = rB'(r) + B(r) = 1, \quad (2.25)$$

cujas soluções são

$$rB(r) = r + \text{const.} \quad (2.26)$$

A constante de integração é determinada considerando um argumento físico. Para grandes distâncias de um corpo massivo de massa  $M$ , a componente  $g_{00}$  deve se aproximar de  $-1 - 2\varphi$ , onde  $\varphi$  é o potencial gravitacional newtoniano [25]. Assim, a forma final das funções  $A(r)$  e  $B(r)$  são respectivamente

$$B(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right), \quad (2.27)$$

e

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}. \quad (2.28)$$

Desta forma, a solução de Schwarzschild (2.14) pode ser expressa por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (2.29)$$

Acreditava-se até o final da década de 50 que o termo  $r = 2GM$  descrevia uma singularidade física. No entanto, David Finkelstein introduziu o conceito de horizonte de eventos (nome dado pelo físico Wolfgang Rindler), apresentando as chamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein, [26]. Com a introdução destas coordenadas, ficou provado que esta era na verdade uma singularidade de coordenadas, não uma singularidade física. Assim,  $r = 2GM$  na métrica (2.29) é na verdade uma região de fronteira sem volta entre a região exterior  $r > 2GM$  e a região interior  $0 < r < 2GM$ . Na região exterior o campo gravitacional é relativamente fraco quando comparado as regiões mais próximas do buraco negro, porém, para a região interior temos uma mudança no comportamento das coordenadas, dentro do horizonte de eventos as coordenadas radiais tornam-se temporais,

por sua vez, as coordenadas temporais passam a se apresentar como coordenadas espaciais evidenciando a característica do espaço-tempo inserido no horizonte de eventos como podemos verificar na métrica (2.29).

Ou seja, toda a informação que um observador no exterior pode receber, foi criada em  $r > 2GM$  e toda a informação na região  $0 < r < 2GM$  é desconectada causalmente para um observador na região exterior. Desde então, o termo  $r = 2GM$  ficou conhecido como raio de Schwarzschild. Este fato se configura um dos pilares da chamada física dos buracos negros, cujo pioneiro, foi seguramente o buraco negro de Schwarzschild.

## 3 Gravidade Rainbow

Houve diversas tentativas visando criar uma teoria quântica para a Gravidade [27]. Dentre elas algumas até foram abandonadas [28]. É assumido que a geometria do espaço-tempo no contexto de altas energias é descrita por uma teoria quântica atrelada a TRG. Assim, surge a necessidade de modificar a TRG preservando seus fundamentos. Neste contexto, abordamos a chamada Gravidade Arco-íris ou do inglês “*Rainbow Gravity*” [11] que sugere o espaço-tempo como sendo um conjunto de geometrias dependentes da energia de um corpo. Como consequência, a energia de Planck associada a velocidade da luz no vácuo introduz uma escala adicional implicando em um novo formalismo com quantidades dependentes da energia. Neste capítulo abordamos os fundamentos da gravidade Rainbow e suas implicações na TRG, que servirá de base para o estudo da Teoria de Espalhamento.

### 3.1 Relatividade Duplamente Especial (DSR)

Na busca por uma resolução para a incompatibilidade entre a Teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica, uma proposta intrigante surge na forma da Relatividade Duplamente Especial I (DSR I), apresentada por Amelino-Camelia [5]. Essa teoria modifica a estrutura da Relatividade Especial, introduzindo duas grandezas invariantes essenciais [29]: a velocidade máxima da luz ( $c$ ) e o comprimento mínimo de Planck ( $l_p$ ) ou a escala de energia máxima de Planck ( $E_p$ ). A transição da Relatividade Especial para a Relatividade Duplamente Especial ocorre com a incorporação dessas duas grandezas invariantes mencionadas. Esse ajuste implica que, em regimes de altas energias, o comportamento das partículas é modificado em relação à sua energia e momento. Em outras palavras, a presença das escalas invariantes da velocidade da luz máxima e do comprimento mínimo de Planck altera significativamente as características fundamentais do movimento de partículas em cenários de alta energia. A transição da Relatividade Especial para Relatividade Duplamente Especial acontece com a inserção dessas duas escalas invariantes mencionadas, isso implica que, em altas energias, a forma como as partículas se comportam em relação à sua energia e momento é modificada.

Independentemente, Magueijo e Smolin [10] apresentam uma nova extensão para a Relatividade Especial, essa passa a ser denominada Relatividade Duplamente Especial II, do inglês "Double Special Relativity II (DSR II)". Essa extensão considera que além da velocidade máxima da luz ( $c$ ) e da energia máxima observável, existe uma terceira escala invariante: a energia mínima observável. A relação entre energia e momento torna-se não linear para altas e baixas energias trazendo implicações significativas para a física de partículas, afetando padrões de dispersão e interações.

A Gravidade Rainbow emerge como uma extensão a DSR para o espaço-tempo curvo. Proposta também por Magueijo e Smolin [11], essa teoria afirma que a gravidade é modificada devido a presença das escalas invariantes que caracterizam a relatividade duplamente especial, elas afetam a curvatura do espaço-tempo alterando as propriedades gravitacionais para diferentes faixas de energia. Recebe esse nome devido a ideia de que diferentes fótons e partículas "enxergam" o espaço-tempo curvo de formas diferentes, a depender de suas energias, essa ideia faz uma alusão a um prisma quando separa a luz branca em diferentes cores, ou seja, o espaço-tempo é dividido por diferentes geometrias que fazem referência as diferentes "cores" do prisma. Parte do princípio de que não existe apenas uma geometria para o espaço-tempo, mas um conjunto de geometrias clássicas que compartilham os mesmos referenciais inerciais. No contexto da DSR, a Gravidade Rainbow é desenvolvida a partir da não-linearidade da transformação de Lorentz, gerando uma modificação na dispersão expressa por

$$E^2 f(E/E_p)^2 - p^2 g(E/E_p)^2 = m^2, \quad (3.1)$$

onde  $E_p$  é a escala de energia de Plank,  $m$  é a massa da partícula, as funções  $f(E/E_p)^2$  e  $g(E/E_p)^2$  são denominadas funções arco-íris ou funções Rainbow. Elas devem satisfazer duas condições, no limite de baixas energias, convergindo para a unidade

$$\lim_{E/E_p \rightarrow 0} f(E/E_p) = \lim_{E/E_p \rightarrow 0} g(E/E_p) = 1. \quad (3.2)$$

A escolha das funções Rainbow parte de motivações fenomenológicas, dentre elas, Amelino-Camelia [30], [31] apresenta a estrutura das funções Rainbow sendo expressa por

$$f(E/E_p) = 1, \quad g(E/E_p) = \sqrt{1 - \eta(E/E_p)}, \quad (3.3)$$

usada para o estudo da Gravidade Quântica em Loop [2]. Anos mais tarde, Amelino-Camelia mostra outra forma dessas funções, dessa vez para explicar os espectros de raios gama [32],

$$f(E/E_p) = \frac{e^{\alpha E/E_p} - 1}{\alpha E/E_p}, \quad g(E/E_p) = 1. \quad (3.4)$$

Por fim, apresentamos o terceiro modelo dessas funções sugerido por Magueijo e Smolin [10] na tentativa de solucionar o problema do horizonte [11],

$$f(E/E_p) = g(E/E_p) = \frac{1}{1 - \lambda(E/E_p)}, \quad (3.5)$$

nos três modelos propostos,  $\eta$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$  são parâmetros adimensionais.

## 3.2 Aspectos Gerais da Gravidade Rainbow

Qualquer proposta para uma teoria quântica de Gravitação deve reproduzir os sucessos para a TRG, considerando uma reconstrução acerca da geometria local com

observáveis não locais. A escala de Planck apresenta um comprimento mínimo definido por:

$$l_p = \sqrt{\frac{G}{2\pi}}, \quad (3.6)$$

( $l_p$ ) representa o comprimento de Planck, e ( $G$ ) a constante newtoniana.

Para uma escala de energia máxima, a energia de Planck ( $E_p$ ) é definida por

$$E_p = \sqrt{\frac{1}{2\pi G}}. \quad (3.7)$$

Como se sabe, em 1905 Einstein propôs dois postulados para a TRE afirmando que as leis físicas são as mesmas para qualquer referencial inercial e que a velocidade da luz é invariante para qualquer referencial inercial. O comprimento de Planck dado pela Eq.(3.6), incorpora um novo invariante para o segundo postulado de Einstein conforme já afirmado anteriormente [5], sendo relevante unicamente para as escalas de altas energias.

Para a Gravidade Rainbow o espaço-tempo clássico não é representado por apenas uma geometria quando consideramos os efeitos da ordem de  $l_p E$ , mas por um conjunto de geometrias cujo único parâmetro é parametrizado pela razão ( $E/E_p$ ). Desta forma, a geometria do espaço-tempo pode depender da energia de uma partícula movendo-se nele. Assim, uma vez que temos um espaço-tempo sondado pela energia de cada partícula ou sua frequência, pode-se definir um "espaço-tempo Arco-íris", no sentido de que a geometria do espaço-tempo e as trajetórias dependam da "cor" da partícula, ou energia, ou ainda frequências de onda. Justifica-se desta forma, o nome Rainbow que do inglês equivale a "arco-íris".

Para que Gravidade Rainbow esteja em conformidade com a TRG, dois princípios fundamentais devem estar consistentes [11]:

1. **O Princípio da Equivalência Modificado** Considere uma dada região do espaço-tempo em que o raio de curvatura  $R$  é muito maior que o comprimento de Planck  $l_p = E_p^{-1}$ . Para observadores que fazem medidas sobre propriedades associadas a partículas e campos, com energias que satisfazem  $1/R \ll E \ll E_p$ , as leis da física são, em primeira ordem em  $1/R$ , as mesmas da DSR. Desta forma, observadores em queda livre podem ser descritos como observadores inerciais no espaço-tempo Rainbow, assintoticamente plano.
2. **O Princípio da Correspondência** A TRG deverá ser recuperada quando estamos trabalhando com energias muito baixas comparadas com a escala de Planck. Assim, quando  $E/E_p \rightarrow 0$ , recuperamos a TRG como é esperado.

### 3.3 Equações de Campo Modificadas

Conforme vimos os dois princípios na subseção anterior, a Gravidade Rainbow deve trazer modificações nas equações de campo. Neste cenário, como o espaço-tempo é uma função da energia, a métrica, por sua vez, também será. Assim, devemos ter uma estrutura que garanta que a métrica seja covariante na representação não linear de Lorentz [33], deformando a relatividade especial. De acordo com isto, consideramos uma métrica parametrizada por  $g(E) = \eta^{ab}e_a(E) \otimes e_b(E)$ , com

$$e_0(E) = \frac{1}{f(E/E_P)}\tilde{e}_0; \quad e_i(E) = \frac{1}{g(E/E_P)}\tilde{e}_i, \quad (3.8)$$

notando que  $e_a(E)$  corresponde a uma base geométrica dependente da energia (no sentido de que a partícula com energia  $E$  se move numa geometria constituída por um conjunto de bases ortonormais dependente da energia). Por outro lado,  $\tilde{e}_a$  especificam a geometria constituída por um conjunto de bases independentes da energia, sondada por partículas de baixa energia.

Deste modo, anteriormente as equações de campo de Einstein eram escritas como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

sendo essa a forma convencional. Considerando as funções Rainbow vamos aplicar o princípio de correspondência substituindo  $G_{\mu\nu}$  pelo tensor de Einstein modificado  $G_{\mu\nu}(E/E_P)$ , o mesmo faremos para o tensor energia-momento substituindo por  $T_{\mu\nu}(E/E_P)$ , obtemos

$$G_{\mu\nu}(E/E_P) = 8\pi G(E/E_P)T_{\mu\nu}(E/E_P), \quad (3.10)$$

onde  $G(E/E_P)$  é a constante de Newton em termos da energia tal que  $G$  representa a constante newtoniana usual.

As funções  $f(E/E_P)$  e  $g(E/E_P)$  carregam em si diversas motivações fenomenológicas. Dentre estas motivações, podemos citar sua importância estudar a dispersão de ondas eletromagnéticas de Gamma Ray Bursts [34]. Também é proposta para resolver o paradoxo dos raios gamma ultra energéticos [35, 32] bem como o paradoxo dos raios gama de 20 TeV da galáxia Markarian 501 [36].

É comum obtermos as funções Rainbow apenas em termos dos parâmetros do espaço-tempo. Isto é possível quando relacionamos a energia dos fótons que circundam o buraco negro, por exemplo. Existe uma dependência entre o quociente de energia do corpo que gravita e a energia de Planck  $G(E/E_P)$ , esta relação mostra a expectativa referente ao acoplamento de energia depender da escala de energia. Sabemos que na TRG, as equações de campo (3.10) satisfazem as condições de consistência, denominadas identidades de Bianchi, garantindo a seguinte lei de conservação

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.11)$$

Considerando uma solução geral para um sistema esfericamente simétrico, a modificação é representada por

$$ds^2 = \frac{N(r)}{f^2(E/E_p)} dt^2 - \frac{1}{g^2(E/E_p) N(r)} dr^2 - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2, \quad (3.12)$$

em que  $d\Omega^2$  é o elemento de ângulo sólido e  $N(r)$  descreve a geometria do espaço-tempo na ausência de correções quânticas ou modificações da gravidade. Esta consideração é fundamental para determinarmos a solução de Schwarzschild modificada, que veremos na próxima seção.

### 3.4 Solução de Schwarzschild Modificada

No contexto de Gravidade Rainbow, vamos utilizar um sistema esfericamente simétrico como o descrito pela métrica (3.12) e encontrar a solução correspondente a de Schwarzschild, que será, é claro, modificada. É possível absorver a dependência da energia nas coordenadas temporal e radial, então a métrica será dada por

$$ds^2 = \frac{A(r)}{f^2(E/E_p)} dt^2 - \frac{B(r)}{g^2(E/E_p)} dr^2 - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2, \quad (3.13)$$

em que o elemento de linha  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ ,  $r$  representa a coordenada da área, sua definição nos permite dizer que é proporcional a raiz quadrada de uma área medida no raio por observadores considerando  $E/E_p \rightarrow 0$ . A coordenada de área coerente para fazer as medições por quanta de energia é

$$\tilde{r} = \frac{r}{g(E/E_p)}. \quad (3.14)$$

Aqui, a coordenada “ $\tilde{r}$ ” descreve as coordenadas dependentes da energia. Partindo desses pressupostos, definimos duas funções dependentes da energia

$$\tilde{A}(\tilde{r}(E), E) = A(r), \quad (3.15)$$

$$\tilde{B}(\tilde{r}(E), E) = B(r). \quad (3.16)$$

É possível definirmos uma coordenada temporal, dependente da energia, sendo explicitada como

$$\tilde{t}(E) = \frac{t}{f(E/E_p)}. \quad (3.17)$$

Substituindo as duas funções (3.15, 3.16) na métrica (3.13), obtemos

$$ds^2 = \frac{\tilde{A}(\tilde{r}(E), E)}{f^2(E/E_p)} dt^2 - \frac{\tilde{B}(\tilde{r}(E), E)}{g^2(E/E_p)} d\tilde{r}^2 - \frac{\tilde{r}^2(E)}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2, \quad (3.18)$$

precisamos eliminar as dependências de energia das funções  $f$  e  $g$ , para isso vamos usar a condição  $f^2(E/E_p)g^2(E/E_p) = 1$  válida para substituímos  $\tilde{r} = r\sqrt{f^2(E/E_p)g^2(E/E_p)}$ , o que nos permite simplificar (3.18) obtendo

$$ds^2 = \tilde{A}(\tilde{r}(E), E)d\tilde{t}(E)^2 - \tilde{B}(\tilde{r}(E), E)d\tilde{r}(E)^2 - \tilde{r}(E)^2d\Omega^2. \quad (3.19)$$

Com o teorema de Birkoff's [37], encontramos uma solução para as equações de Einstein na ausência de matéria com simetria esférica, que é dada pela métrica de Schwarzschild. Então, para o espaço vazio teremos

$$\tilde{A}(\tilde{r}(E), E) = \tilde{B}^{-1}(\tilde{r}(E), E) = \left(1 - \frac{\tilde{C}(E)}{\tilde{r}(E)}\right), \quad (3.20)$$

em que o  $\tilde{C}$  representa uma constante que depende da energia.

Conforme a nova função (3.20) determinamos a dependência energética da constante de integração, essa dependência fica visível na métrica mencionada em (3.19) incluindo as coordenadas independentes de energia. Portanto, fica descrita

$$\tilde{A}(\tilde{r}(E), E) = \left(1 - \frac{\tilde{C}(E)g_E}{r}\right) = A(r). \quad (3.21)$$

Retomando ao princípio da correspondência, concluímos que

$$\tilde{C}(E) = \frac{2G(0)M}{g(E/E_p)}, \quad (3.22)$$

onde  $M$  representa a massa independente da energia e  $G(0)$  é a constante gravitacional newtoniana. A métrica modificada de Schwarzschild é obtida de acordo com a relação expressa em (3.21) em conjunto com o princípio (3.22) que substituído em (3.19) acrescido de algumas manipulações, resulta em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G(0)M}{r}\right) \frac{dt^2}{f^2(E/E_p)} - \frac{1}{1 - \frac{2G(0)M}{r}} \frac{dr^2}{g^2(E/E_p)} - \frac{r^2}{g^2(E/E_p)} d\Omega^2. \quad (3.23)$$

Como vimos no capítulo 2, as singularidades de coordenadas refletem uma inadequação do sistema de coordenadas escolhido. Podemos observar que para casos em que o eixo assume os valores com  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , não podem ser descritos por essa métrica porque apresentam elemento de linha degenerado. Entretanto, a métrica (3.23) também é degenerada em  $r = 0$  e  $r = 2G(0)M$ . Para solucionarmos essa inadequação devemos calcular um dos invariantes associados à curvatura e verificar o que acontece para esse caso mencionado. Calculando o escalar de Kretschmann [25]

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.24)$$

o resultado nesse caso específico é

$$K = g_E^2 \frac{48M^2}{r^6}. \quad (3.25)$$

Portanto, identificamos que o escalar de Kretschmann carrega a função Rainbow  $g_E$ . Para a singularidade destacada no caso  $r = 2G(0)M$ , conseguimos interpretar que é apenas aparente, mas para  $r = 0$  o escalar diverge não sendo possível efetuar transformações de coordenadas para remover a singularidade, uma vez que esta singularidade assim como o caso usual é uma singularidade física.

## 4 Teoria de Espalhamento

A Teoria de espalhamento é desenvolvida no Regime Clássico e Quântico com o objetivo de comparar os desdobramentos. É um campo de estudo que se propõe a compreender como ocorre o espalhamento de ondas e partículas através de soluções de equações diferenciais. O estudo dos processos de espalhamento é um ramo que tem despertado o interesse de muitos estudiosos em diferentes áreas do conhecimento, para a Física, essa teoria contribui para o estudo do mundo subatômico e dos constituintes básicos da matéria [38, 39]. Nas seções a seguir evidenciaremos o Espalhamento clássico e quântico com intuito de calcularmos a seção de choque diferencial para a solução de Schwarzschild e Gravidade Rainbow.

### 4.1 Espalhamento no Regime Clássico

Na Teoria de Espalhamento no Regime Clássico, consideramos a interação de uma onda ou partícula para verificarmos como ela é desviada devido a presença de potencial. O principal problema do espalhamento clássico é calcular o ângulo de espalhamento com base no impacto sofrido. Vamos considerar um exemplo clássico de uma partícula com dimensões atômicas que consegue trocar energia e momento com outras partículas do sistema, como um próton sendo disparado com um núcleo pesado. Quando a partícula incide no centro de espalhamento, a energia inicial é dada por  $E$ , o parâmetro de impacto  $b$  será proporcional ao ângulo de espalhamento, permitindo calcular o parâmetro do impacto. O esboço do exemplo mencionado está apresentado na figura abaixo.

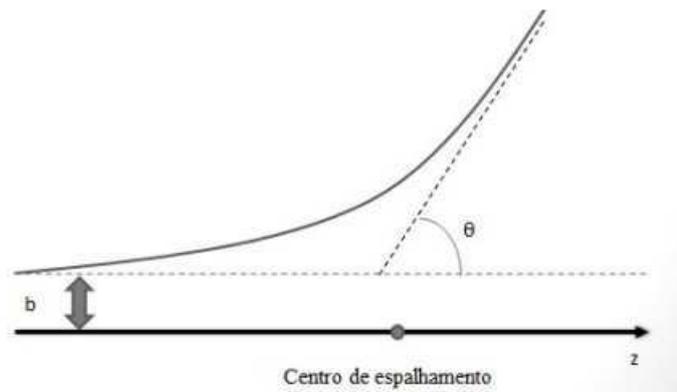


Figura 1 – Problema clássico de espalhamento[1]

Para a Teoria de espalhamento, a seção de choque diferencial é definida por

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (4.1)$$

onde  $d\sigma$  é uma área infinitesimal efetiva da seção de choque dentro do ângulo sólido  $d\Omega$ . Podemos reescrever a equação (4.1) de forma similar introduzindo o argumento ( $\theta$ ) para enfatizar que ela dependerá da direção de observação, então

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (4.2)$$

O resultado do espalhamento devido ao impacto das partículas incidentes é descrito através do ângulo azimutal  $\phi$ ,  $d\phi = b db d\phi$  e  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ , assim

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (4.3)$$

em que  $\frac{db}{d\theta}$  assume valor negativo devido a premissa da lei da força de forma que o valor da deflexão angular acaba diminuindo por conta do aumento referente ao parâmetro de impacto. A seção de choque total de espalhamento total é dada através da integral de  $D\theta$  sobre todos os ângulos sólidos da seção de choque diferencial

$$\sigma = \int D(\theta) d\Omega, \quad (4.4)$$

no regime clássico a área total incidente é espalhada pelo alvo.

## 4.2 Espalhamento no Regime Quântico

Seja no Regime Clássico ou Quântico, a grandeza crucial para descrever o processo de espalhamento é a seção de choque. Essa grandeza mostra a relação entre o número de partículas incidentes e espalhadas no ângulo sólido  $d\Omega$ . Para o caso quântico usaremos como base o comportamento de uma onda plana se movendo na direção  $z$  que encontra um potencial de espalhamento gerando uma onda esférica de saída. Estamos em busca de soluções para a equação de Schrödinger em sua forma geral

$$\psi(r, \theta) \approx A \left[ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right], \quad (4.5)$$

o primeiro termo é a onda incidente, e o segundo termo representa a onda espalhada (carrega em si o fator  $1/r$  com o intuito de conservar a probabilidade), e  $f(\theta)$  é a amplitude de espalhamento.

O número de onda  $k$  está relacionado à energia das partículas incidentes, pela definição

$$k = \sqrt{2mE}. \quad (4.6)$$

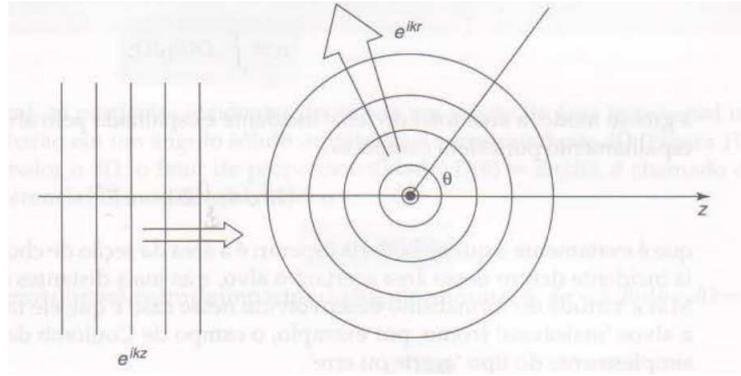


Figura 2 – Espalhamento de ondas[1]

A amplitude de espalhamento  $f(\theta)$  representa a probabilidade de que uma partícula seja espalhada em uma direção específica  $\theta$ . Em termos mais simples, indica quão provável é que a partícula seja desviada em um ângulo particular  $\theta$  após um encontro. A probabilidade da partícula que se move com velocidade  $v$  através da área  $d\sigma$  é dada no intervalo de tempo  $dt$ , sendo

$$dP = |A|^2 v dt d\sigma, \quad (4.7)$$

e a probabilidade para o caso da partícula se espalhar no ângulo sólido é expressa de forma correspondente  $d\Omega$

$$dP = \frac{|A|^2 |f(\theta)|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega. \quad (4.8)$$

Igualando (4.7) e (4.8) segue que

$$|A|^2 v dt d\sigma = \frac{|A|^2 |f(\theta)|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega. \quad (4.9)$$

Como  $|A|^2$  e  $v dt$  aparecem de ambos os lados podemos cancelar os termos semelhantes, restando apenas

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega \implies \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (4.10)$$

A igualdade dessas expressões implica que a seção de choque  $d\sigma$  é igual a  $|f(\theta)|^2 d\Omega$  demonstrando como a probabilidade de espalhamento  $\theta$  está relacionada a sua diferencial.

### 4.3 Análise de ondas parciais

A equação de Schrödinger admite duas soluções separáveis para um potencial esféricamente simétrico  $V(r)$ , sendo destinadas para a parte radial e angular, podendo ser representada como

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.11)$$

em que  $Y_l^m$  trata-se de um harmônico esférico com solução geral expressa por

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \quad (4.12)$$

$Y_l^m(\theta, \phi)$  é descrito em termos das funções associadas de Legendre, sendo  $R(r)$  solução da equação

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - 2mr^2[V(r) - E]R = l(l+1)R. \quad (4.13)$$

Aplicando a mudança de variável  $u(r) = rR(r)$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{-1}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[ V + \frac{1}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu, \quad (4.14)$$

em que  $\frac{1}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$  é o termo centrífugo e o potencial efetivo é expresso na forma

$$V_{eff} = V + \frac{1}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (4.15)$$

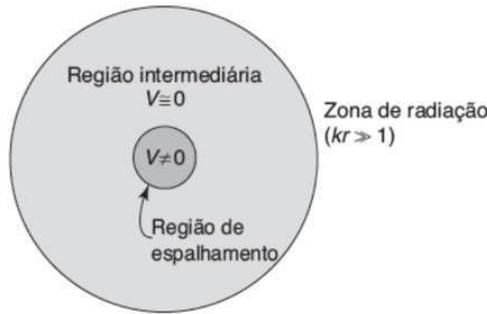


Figura 3 – Espalhamento por um potencial localizado [1]

A primeira distinção que vamos considerar é com relação a zona de radiação (3), pois, o  $r$  é muito extenso e o potencial  $V$  chega a zero tornando o termo centrífugo desnecessário para a relação, possibilitando assim sua reescrita

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -k^2u, \quad (4.16)$$

onde  $k^2 = 2mE$ , a equação (4.16) representa uma forma simplificada da equação de Schrödinger radial para uma partícula em um potencial  $V(r)$ . A solução geral para esta equação diferencial é

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}. \quad (4.17)$$

Podemos interpretar os termos  $e^{ikr}$  e  $e^{-ikr}$  como ondas viajantes, o primeiro representando uma onda esférica que se afasta do ponto central ( $r = 0$ ) e o segundo uma onda que se aproxima do ponto central; queremos encontrar  $D = 0$ . Então a solução proporcional para a parte radial é

$$R(r) \sim \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (4.18)$$

Na teoria de espalhamento unidimensional, assumimos que o potencial está localizado de tal forma que, fora de uma região finita de espalhamento, ele é essencialmente nulo. Na região intermediária, a equação radial se torna relevante, permitindo-nos estudar o movimento das partículas sob a influência do potencial. Portanto, a equação radial é expressa por

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u = -k^2u, \quad (4.19)$$

com uma solução geral composta por uma combinação linear de Bessel,  $j_l$  (se assemelhando a função seno) e de Neumann  $n_l$  (é um tipo de função cosseno),

$$u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr), \quad (4.20)$$

em que

$$j_l(x) \equiv (-x)^l \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^l \frac{\sin x}{x} \quad e \quad n_l(x) \equiv -(-x)^l \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^l \frac{\cos x}{x}. \quad (4.21)$$

Vamos utilizar as combinações lineares das funções de Bessel nas funções esféricas de Hankel, pois, embora as funções de Bessel e Newman sejam soluções da equação diferencial, não servem para descrever o problema de espalhamento. Com essa condição temos que

$$h_l^{(1)} \equiv j_l(x) + in_l(x) \longrightarrow \frac{1}{x} (-i)^{l+1} e^{ix} \quad (4.22)$$

$$h_l^{(2)} \equiv j_l(x) - in_l(x) \longrightarrow \frac{1}{x} (i)^{l+1} e^{-ix}. \quad (4.23)$$

A função de Hankel de primeiro tipo  $h_l^{(1)}(kr)$  é uma combinação linear de  $j_l(x)$  com  $n_l(x)$ , funcionando como  $e^{ikr}/r$ , enquanto  $h_l^{(2)}(kr)$  é uma combinação das mesmas funções de Bessel esféricas se comportando como  $e^{-ikr}/r$ , portanto precisamos de funções do tipo

$$R(r) \sim h_l^{(1)}(kr). \quad (4.24)$$

A função de onda fora da região de espalhamento, onde  $V = 0$ , pode ser reescrita de forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left[ e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right]. \quad (4.25)$$

Dado que estamos considerando um potencial esfericamente simétrico, a função de onda não deve depender da coordenada azimutal  $\phi$ . Para satisfazer essa condição, vamos fazer  $m = 0$  em (4.12), essa expressão passa a ser

$$Y_l^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta), \quad (4.26)$$

em que  $P_l^0$  representa os polinômios de Legendre de ordem  $l$  para  $m = 0$ . Para ajustar a função de onda espalhada faremos  $C_{l,0}$  igual a

$$C_{l,0} = i^{l+1} k \sqrt{4\pi(2l+1)} a_l. \quad (4.27)$$

Levando isto em conta e substituindo (4.26), (4.27) e a função de Hankel de primeiro tipo em (4.25) encontramos

$$\psi(r, \theta) = A \left[ e^{ikz} + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l^0(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right]. \quad (4.28)$$

Realizando a comparação de (4.28) com (4.5), notamos que a amplitude de espalhamento será igual a

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l^0(\cos \theta). \quad (4.29)$$

Portanto, a seção de choque diferencial é

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2 = f^*(\theta) f(\theta) = \sum_l \sum_{l'} (2l+1) (2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta), \quad (4.30)$$

por fim, utilizando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, a seção de choque total será representada por

$$\sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2. \quad (4.31)$$

## 4.4 Mudança de Fase

De acordo com o problema de espalhamento unidimensional, vamos considerar um potencial  $V(x)$  localizado na semirreta  $x < 0$  (4) limitado por uma parede infinita. A onda incidente da esquerda será dada por

$$\psi_i(x) = A e^{ikx} (x < -a), \quad (4.32)$$

sendo refletida em

$$\psi_r(x) = B e^{-ikx} (x < -a). \quad (4.33)$$

A função de onda total, considerando tanto a onda incidente quanto a onda refletida, é dada por

$$\psi_0(x) = A (e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (V(x) = 0), \quad (4.34)$$

para esse caso, com um potencial nulo  $V(x) = 0$ , a amplitude refletida  $B$  é igual e oposta à amplitude de onda incidente  $A$  com intuito de garantir a continuidade da função de onda na origem. O termo  $e^{ikx}$  representa a onda incidente e  $-e^{-ikx}$  a onda refletida. Outro caso é quando o potencial é diferente de zero, a função de onda incrementa a forma com  $(x < -a)$ ,

$$\psi(x) = A (e^{ikx} - e^{-i(2\delta - kx)}) \quad (V(x) \neq 0). \quad (4.35)$$

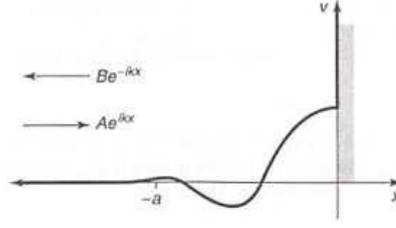


Figura 4 – Espalhamento unidimensional [1]

A onda plana incidente ( $Ae^{ikz}$ ) não traz momento angular na direção  $z$ . No entanto, ela inclui todos os valores possíveis do momento angular total ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Portanto, essa onda plana pode ser representada pela fórmula de Rayleigh

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (4.36)$$

Como o momento angular é conservado devido à simetria esférica do potencial, as ondas parciais se espalham independentemente sem mudança na amplitude, apenas na fase. Se não há nenhum potencial atuando, a função de onda total  $\psi_0$  é simplesmente uma onda plana incidente e é dada por  $e^{ikz}$ , e a  $l$ -ésima onda parcial é

$$\psi_0^{(l)} = A i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0). \quad (4.37)$$

Efetuada a adição das equações (4.22) com (4.23), temos

$$j_l(x) = \frac{1}{2} [h_l^{(1)} + h_l^{(2)}] = \frac{1}{2x} [(-i)^{l+1} e^{ix} + (i)^{l+1} e^{-ix}], \quad (4.38)$$

inserindo esse resultado em (4.37), encontramos

$$\psi_0^{(l)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) = 0). \quad (4.39)$$

O segundo termo entre colchetes representa uma onda esférica de entrada. O primeiro termo, por sua vez, representa a onda de saída. Ele inclui uma mudança de fase  $\delta_l$  e é dado por

$$\psi^{(l)} \approx A \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{i(kr+2\delta_l)} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (V(r) \neq 0). \quad (4.40)$$

Nesta seção estamos expressando a amplitude em termos de mudança de fase  $\delta_l$ , fazendo uma ligação com a análise de ondas parciais, podemos comparar a forma assintótica de (4.28) com (4.40), encontrando

$$a_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1), \quad (4.41)$$

logo, de 4.36 a amplitude de espalhamento será

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (4.42)$$

A equação (4.42) é menos convergente, o que torna extremamente difícil calcular a soma direta das séries. Isso ocorre devido ao fato de que um número infinito de polinômios de Legendre é necessário para evitar divergências em  $\theta = 0$ . Para contornar esse dilema, os mencionados autores em [40] propõe uma série reduzida menos divergente, isso se evidencia resumidamente

$$(1 - \cos \theta)^m f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^m P_l \cos \theta, \quad (4.43)$$

dessa forma as séries deverão convergir. Por fim, a seção de choque diferencial será determinada de acordo com [41, 40], como sendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) \frac{P_l(\cos \theta)}{1 - \cos \theta} \right|^2, \quad (4.44)$$

onde  $\omega$  representa a frequência.

## 5 Seção de Choque Diferencial no Contexto da Gravidade Rainbow

No capítulo anterior fizemos uma revisão sobre a Teoria de Espalhamento, agora vamos investigar a seção de choque para dois casos específicos: no contexto da métrica de Schwarzschild e no contexto o qual a métrica em questão seja modificada através das funções Rainbow.

### 5.1 Espalhamento para o caso Schwarzschild

Partindo da métrica (3.13) precisamos encontrar soluções para a equação de Klein-Gordon <sup>2</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Psi\right)=0. \quad (5.1)$$

Utilizando o método de separação de variáveis para escrever  $\Psi$  como  $R_{\omega l}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t}$ , buscando encontrar soluções da forma

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = R(r)Y(\theta, \phi)e^{-i\omega t}, \quad (5.2)$$

em que  $R(r)$  é a função radial,  $Y(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos e  $\omega$  a frequência angular. A função radial  $R(r)$  obedece à equação

$$A(r)\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dR_{\omega l}(r)}{dr}\right] + [\omega^2 - V_{eff}]R_{\omega l}(r) = 0, \quad (5.3)$$

em que o potencial efetivo é dado por

$$V_{eff} = \frac{A(r)}{r}\frac{dA(r)}{dr} + \frac{A(r)l(l+1)}{r^2} = 0. \quad (5.4)$$

Precisamos encontrar  $R(r)$ , para isso usaremos métodos apropriados. Levando em consideração  $\psi(r) = A^{1/2}(r)R(r)$ , podemos realizar a reescrita da equação (5.3) como sendo

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + U(r)\psi(r) = 0, \quad (5.5)$$

vale salientar que as funções são

$$U(r) = \frac{[A'(r)]^2}{4A^2(r)} - \frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{\omega^2}{A^2(r)} - \frac{V_{eff}}{A^2(r)} \quad (5.6)$$

e

$$A'(r) = \frac{dA(r)}{dr} = \frac{2MG}{r^2}, \quad A''(r) = \frac{d^2A(r)}{dr^2} = -\frac{4MG}{r^3}. \quad (5.7)$$

<sup>2</sup> A Equação de Klein-Gordon é uma generalização da equação de Schrödinger para partículas relativísticas.

Expandindo a função  $U(r)$  da equação 5.5 em série de potências em torno de  $1/r$  conseguiremos calcular seus principais termos,

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + [\omega^2 + v(r) + u(r)] + \psi(r) = 0, \quad (5.8)$$

então temos

$$v(r) = \frac{4MG\omega^2}{r} + \frac{12\ell^2}{r^2}, \quad (5.9)$$

e

$$u(r) = \frac{-2GM[(l^2 + l) + 1] + 16G^3M^3\omega^2 + 2GM}{r^3} + \frac{16G^4M^4\omega^2 - 4G^2M^2[(l^2 + l) + 1] + 5G^2M^2}{r^4} + \dots,$$

com o termo  $l^2$  sendo

$$l^2 = G^2M^2\omega^2 - \frac{l^2 + l}{12}. \quad (5.10)$$

Obtemos a mudança de fase através da expressão

$$\delta_l \approx \frac{1}{2}(l - \ell) = \frac{1}{2} \left( l - \sqrt{\frac{-(l^2 + l)}{12} + G^2M^2\omega^2} \right). \quad (5.11)$$

No limite de baixas energias, a mudança de fase pode ser simplificada,  $l \rightarrow 0$

$$\delta_0 \approx \frac{-GM\omega}{2}. \quad (5.12)$$

## 5.2 Espalhamento na Gravidade Rainbow

Na métrica de Schwarzschild vamos encontrar a solução da parte transversal diferencial, primeiramente através da onda espalhada

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi \right) = 0, \quad (5.13)$$

com a separação de variáveis obtemos

$$\Psi_{\omega lm}(\vec{r}, t) = \frac{R_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (5.14)$$

$Y(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos assim como para o caso de Schwarzschild da seção anterior em (5.2), portanto, escrevemos a equação radial na forma

$$\xi(r) \frac{d}{dr} \left( \xi(r) \frac{dR_{\omega l}}{dr} \right) + \left( \frac{f^2}{g^2} \omega^2 + V_{\text{eff}} \right) R_{\omega l} = 0, \quad (5.15)$$

o termo  $\xi(r)$  é dado por

$$\xi(r) = 1 - \frac{2MG}{r}, \quad (5.16)$$

é importante notar que o potencial efetivo influenciará no comportamento da onda, sendo expresso como

$$V_{eff} = \frac{\xi(r)}{r} \frac{d\xi}{dr} + \frac{\xi(r)l(l+1)}{r^2}. \quad (5.17)$$

Reescrevendo (5.15) incorporando a forma da equação de Schrödinger com a adição da mudança de variáveis para a função radial, encontramos

$$\frac{d^2u}{dr^2} + V(r)u = 0, \quad (5.18)$$

e para o potencial temos que

$$V(r) = \frac{1}{4} \frac{[\xi'(r)]^2}{\xi^2(r)} - \frac{1}{2} \frac{\xi(r)''}{\xi(r)} + \frac{f^2}{g^2} \frac{\omega^2}{\xi^2(r)} - \frac{V_{eff}}{\xi^2(r)}. \quad (5.19)$$

Expandindo (5.18) pela série de potências com a condição  $1/r$ , teremos

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + [\tilde{\omega} + \mathcal{V}_{eff}(r)]u(r), \quad (5.20)$$

em que  $\tilde{\omega} = (f/g)^2\omega$  evidenciando a inserção das funções Rainbow. Portanto, o potencial fica descrito

$$\mathcal{V}_{eff}(r) = \frac{f^2}{g^2} \frac{4MG}{r} + \frac{12}{r^2} \ell^2 \quad (5.21)$$

e

$$\ell^2 \equiv \frac{f^2}{g^2} M^2 G^2 \omega^2 - \frac{l^2 + l}{12}, \quad (5.22)$$

$\ell^2$  é uma quantidade que captura a interação entre a curvatura do espaço-tempo e o buraco negro, a saber, o buraco negro de Schwarzschild. Quando substituimos  $r \rightarrow \infty$  temos  $\mathcal{V}_{eff}(r) \rightarrow 0$  isso significa que quando a partícula está muito longe do buraco negro, ela não está mais sujeita a um potencial gravitacional significativo. Esse comportamento é esperado, pois à medida que a partícula se afasta do buraco negro, o efeito gravitacional do buraco negro se torna cada vez mais fraco, até se tornar praticamente nulo quando a partícula está muito distante.

### 5.3 Espalhamento Diferencial

Obtemos a mudança de fase aproximada na seção anterior, levaremos em consideração  $g = 1$ ,  $f = (1 - \lambda E)^{-1}$ , para obter a mudança de fase na expressão

$$\delta_l \approx 2(l - \ell) = 2 \left( l - \sqrt{(1 - \lambda E)^{-2} M^2 G^2 \omega^2 - \frac{l^2 - l}{12}} \right), \quad (5.23)$$

esta mudança de fase é crucial para entender como as ondas são afetadas pelo potencial e pela energia. Adotamos o caso 3.4 para  $f = (1 - \lambda E)^{-1}$ , em que  $\lambda \sim 1/M$  com  $M$  a

escala de energia a qual a violação da invariância de Lorentz acontece. Em seguida, para frequências muito baixas ( $l \rightarrow 0$ ), a expressão é modificada, sendo apresentada como

$$\delta_l = -2 \left( 1 - \lambda E + (\lambda E)^2 + \dots \right) MG\omega. \quad (5.24)$$

Utilizando a mudança de fase  $\sigma_l$ , para calcular a seção de choque diferencial  $\frac{d\sigma}{d\theta}$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left| \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^1 (2l+1) \left( e^{2i\delta_l} - 1 \right) \frac{P_l \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right|^2, \quad (5.25)$$

isso significa uma medida de como as partículas são espalhadas em diferentes ângulos devido ao potencial. Para o limite de pequenos ângulos,

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{4}{\omega^2 \theta^4} \left| \sum_{l=0}^1 (2l+1) \text{sen}(\delta_l) P_l \cos \theta \right|^2, \quad (5.26)$$

$$= \frac{16M^2G^2}{\theta^4} \left( 1 - \lambda E + (\lambda E)^2 + \dots \right)^2 \left| \sum_{l=0}^1 (2l+1) P_l \cos \theta \right|^2, \quad (5.27)$$

no limite de baixa frequência com  $r = 0$ , simplificamos ainda mais  $\frac{d\sigma}{d\theta}$ , obtendo uma expressão que inclui os parâmetros  $\lambda$  e  $E$  na dispersão das partículas,

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{16M^2G^2}{\theta^4} \left( 1 - 2\lambda E + 3(\lambda E)^2 - 2(\lambda E)^3 + (\lambda E)^4 + \dots \right). \quad (5.28)$$

Observe que para  $\lambda = 0$ , obtemos o resultado para o buraco negro de Schwarzschild. Além disso, ao introduzir as correções da função Rainbow (identificada pelo parâmetro  $\lambda$ ), a seção de choque diferencial para a dispersão de um buraco negro de Schwarzschild é reduzida à medida que aumentamos os seus valores. Isso implica que as propriedades da dispersão são afetadas pelas modificações introduzidas pela teoria da Gravidade Rainbow.

Vamos calcular agora a seção de absorção para um buraco negro de Schwarzschild na Teoria da Gravidade Rainbow no regime de baixas frequências. A seção de absorção total é dada por

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left( \left| 1 - e^{2i\delta_l} \right|^2 \right) \quad (5.29)$$

$$= \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2(\delta_l). \quad (5.30)$$

No limite de baixa energia e considerando  $l \rightarrow 0$ , teremos

$$\sigma_{\text{abs}} = 16\pi M^2 G^2 \left( 1 - 2\lambda E + 3(\lambda E)^2 - 2(\lambda E)^3 + (\lambda E)^4 + \dots \right), \quad (5.31)$$

Para  $\lambda = 0$ , recuperamos o resultado padrão para a absorção  $A_S = 4\pi r_S^2$  do buraco negro de Schwarzschild  $r_S = 2MG$ . Portanto, ao introduzir correções da função Rainbow, a amplitude de absorção do buraco negro de Schwarzschild é reduzida à medida que aumentamos o valor do parâmetro  $\lambda$ . Este efeito mostra como a Gravidade Rainbow pode influenciar as propriedades dos buracos negros, modificando suas seções de espalhamento e absorção em baixas energias.

## 6 Conclusões

Nesta dissertação estudamos os impactos da Gravidade Rainbow sobre o Universo de Schwarzschild e as implicações na teoria de espalhamento sobre o efeito da violação da invariância de Lorentz. Primeiramente, estudamos a Teoria da Relatividade Geral como uma revisão para demonstrar as equações de campo de Einstein na sua forma usual, com a inserção das funções Rainbow expomos as modificações realizadas tanto nas equações de campo como na solução de Schwarzschild. A inclusão das funções Rainbow é realizada de acordo com a Relatividade Duplamente Especial, que é posteriormente estendida para considerar os efeitos de curvatura, resultando no que conhecemos hoje como Gravidade Rainbow. Para esse cenário a métrica do espaço-tempo incorpora um conjunto de geometrias dada pela relação entre a energia da partícula e a energia de Planck.

Incrementamos também uma breve revisão sobre a Teoria de Espalhamento no regime clássico e quântico com o intuito de desenvolver soluções diferenciais envolvendo a equação de Schrodinger para estudar o comportamento da seção de choque diferencial. Verificamos o comportamento da seção de choque no contexto da Gravidade Rainbow, introduzindo funções Rainbow na métrica de Schwarzschild em conjunto com a Teoria de espalhamento para conseguirmos investigar os efeitos que tais funções realizam modificando as seções de espalhamento em dois casos específicos e na absorção no regime de baixas energias.

Foi possível verificar que para o cenário de energia escolhido que nos levou a escolha das funções Rainbow não houve mudanças no potencial efetivo, no entanto, foi possível reescrever a frequência em termos destas funções. Além disso, também verificou-se que as seções de choques diferencial e de absorção foram reescritas em termos do parâmetro  $\lambda$  e da energia  $E$ . Este fato deve-se a “versatilidade” das funções Rainbow que nesta situação nos trouxe apenas uma “mudança de escala” o que não significa que a teoria seja inválida. Como perspectiva, pretende-se construir uma função Rainbow fundamentada na energia mínima necessária para uma partícula orbitar um buraco negro.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Demonstração das Equações de campo

Este apêndice consiste em demonstrar as Equações de campo de Einstein 2.1 considerando o princípio da mínima ação

$$\delta S = 0. \quad (\text{A.1})$$

Inicialmente vamos desenvolver a integral 2.2

$$\begin{aligned} \delta \int \sqrt{-g} R d^4 x &= \delta \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} k_{\mu\nu} d^4 x \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4 x + \int R_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4 x. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a geodésica para encontrar a variação do tensor de Ricci  $\delta R_{\mu\nu}$ , substituímos primeiramente as definições dos símbolos de Christoffel. Em seguida, calculamos a variação da métrica, com as derivadas parciais da variação obtivemos

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta \left\{ \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \right\} \\ &= \delta \left\{ \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right\} \\ &= \frac{\partial (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho})}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu})}{\partial x^{\nu}} \\ &= \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A expressão A.2 é uma equação tensorial, abrange não apenas o sistema geodésico, mas todos os sistemas de coordenadas. Podemos expressar o integrando da primeira integral do lado direito como sendo

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left\{ \nabla_{\rho} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}) \right\} \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}) \right\} \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \nabla_a (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^a) - \nabla_a (g^{\mu a} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Então, escrevemos

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \nabla_a V^a, \quad (\text{A.5})$$

em que

$$V^{\alpha} = g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} \quad (\text{A.6})$$

é um vetor contravariante.

O resultado que obtemos para a integral do lado direito é dado por

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \frac{\partial(\sqrt{-g} V^\alpha)}{\partial x^\alpha} d^4x. \quad (\text{A.7})$$

Pelo teorema de Gauss,  $\sqrt{-g} V^\alpha$  desaparece devido a ser uma integral de superfície, como resultado dos símbolos de Christoffel nas fronteiras de integração, temos esse resultado para a primeira integral calculada referente ao lado direito da equação [A.2](#)

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (\text{A.8})$$

agora, vamos calcular o outro termo referente a segunda integral dessa mesma equação mencionada, ficando da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x &= \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int R \delta \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Podemos desenvolver o termo  $\sqrt{-g}$  de forma que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Aplicando o resultado obtido em [A.9](#), temos

$$\int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.11})$$

Efetando a soma dos resultados já obtidos acima, encontramos

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.12})$$

A segunda parte da integral evidencia os outros campos, exceto o campo gravitacional. Utilizando também o princípio da mínima ação obtemos o resultado dado por

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g_{,a}^{\mu\nu}} \delta g_{,a}^{\mu\nu} \right] d^4x, \quad (\text{A.13})$$

a vírgula no índice indica uma diferencial parcial. Conforme visualizamos no segundo termo da equação acima, verificamos que pode ser escrito como uma integral de superfície, como representado a seguir

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.14})$$

O tensor energia-momento é definido como segue na expressão abaixo

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^a} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\alpha}} \right] \right\}. \quad (\text{A.15})$$

Então, obtemos o resultado

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (\text{A.16})$$

para a parte não gravitacional da integral de ação. Usando as duas equações [A.12](#) e [A.16](#), teremos

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, chegamos as equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.18})$$

# Referências

- 1 GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. 2. ed. São Paulo: Editora Pearson, 2004. Citado 5 vezes nas páginas [8](#), [25](#), [27](#), [28](#) e [31](#).
- 2 ROVELLI, C. Loop quantum gravity. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 11, p. 1–69, 2008. Citado 2 vezes nas páginas [10](#) e [19](#).
- 3 GUBITOSI, G.; MERCATI, F. Relative locality in  $\kappa$ -poincaré. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 14, p. 145002, 2013. Citado na página [10](#).
- 4 CONNES, A.; MARCOLLI, M. *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2019. v. 55. Citado na página [10](#).
- 5 AMELINO-CAMELIA, G. Doubly special relativity. *arXiv preprint gr-qc/0207049*, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [10](#), [18](#) e [20](#).
- 6 MOFFAT, J. W. Superluminary universe: A possible solution to the initial value problem in cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 2, n. 03, p. 351–365, 1993. Citado na página [10](#).
- 7 KIMBERLY, D.; MAGUEIJO, J.; MEDEIROS, J. Nonlinear relativity in position space. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 8, p. 084007, 2004. Citado na página [10](#).
- 8 ALBRECHT, A.; MAGUEIJO, J. Time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 4, p. 043516, 1999. Citado na página [10](#).
- 9 ALEXANDER, S. H.; MAGUEIJO, J. Non-commutative geometry as a realization of varying speed of light cosmology. *arXiv preprint hep-th/0104093*, 2001. Citado na página [10](#).
- 10 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review Letters*, APS, v. 88, n. 19, p. 190403, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [10](#), [18](#) e [19](#).
- 11 JOAO, M.; LEE, S. Gravity’s rainbow. *Class. Quantum Gravity*, v. 21, p. 1725, 2004. Citado 4 vezes nas páginas [10](#), [18](#), [19](#) e [20](#).
- 12 GIBBONS, G. W. Vacuum polarization and the spontaneous loss of charge by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 44, p. 245–264, 1975. Citado na página [11](#).
- 13 DAS, S. R.; GIBBONS, G.; MATHUR, S. D. Universality of low energy absorption cross sections for black holes. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 3, p. 417, 1997. Citado na página [11](#).
- 14 DAVIES, P. C. Thermodynamics of black holes. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 41, n. 8, p. 1313, 1978. Citado na página [11](#).

- 15 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 13, n. 2, p. 191, 1976. Citado na página 11.
- 16 MANN, R. B.; MANN, R. B. *Black holes: thermodynamics, information, and firewalls*. [S.l.]: Springer, 2015. Citado na página 11.
- 17 BEKENSTEIN, J. D. Black-hole thermodynamics. *Physics Today*, American Institute of Physics, v. 33, n. 1, p. 24–31, 1980. Citado na página 11.
- 18 LINDESAY, J. *An Introduction to Black Holes, Information, and the String Theory Revolution*. 2005. Citado na página 11.
- 19 FUTTERMAN, J.; HANDLER, F.; MATZNER, R. A. Scattering from black holes. *Cambridge; New York: Cambridge University Press*, 1988. Citado na página 11.
- 20 BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 31, p. 161–170, 1973. Citado na página 11.
- 21 SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Gen. Relativ. Gravit*, v. 35, n. 5, p. 951–959, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.
- 22 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado na página 13.
- 23 D'INVERNO, R. A.; HARVEY, A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: American Institute of Physics, 1993. Citado na página 13.
- 24 CARMELI, M. *Classical fields: general relativity and gauge theory*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2001. Citado na página 14.
- 25 WEINBERG, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 23.
- 26 EDDINGTON, A. S. A comparison of whitehead's and einstein's formulæ. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 113, n. 2832, p. 192–192, 1924. Citado na página 16.
- 27 SFETCU, N. Heuristics and tests of quantum gravity. 2019. Citado na página 18.
- 28 BUTTERFIELD, J.; ISHAM, C. Spacetime and the philosophical challenge of quantum gravity. *Physics meets philosophy at the Planck scale*, Cambridge University Press Cambridge, p. 33–89, 2001. Citado na página 18.
- 29 AMELINO-CAMELIA, G. et al. Phenomenology of doubly special relativity. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 20, n. 26, p. 6007–6037, 2005. Citado na página 18.
- 30 AMELINO-CAMELIA, G. et al. Distance measurement and wave dispersion in a liouville-string approach to quantum gravity. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 12, n. 03, p. 607–623, 1997. Citado na página 19.
- 31 AMELINO-CAMELIA, G. Quantum-spacetime phenomenology. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 16, p. 1–137, 2013. Citado na página 19.

- 32 KIFUNE, T. Invariance violation extends the cosmic-ray horizon? *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 518, n. 1, p. L21, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 33 CONNES, A. *Noncommutative Geometry (San Diego: Acad. Press)*. [S.l.]: Inc, 1994. Citado na página 21.
- 34 AMELINO-CAMELIA, G. et al. Tests of quantum gravity from observations of  $\gamma$ -ray bursts. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 393, n. 6687, p. 763–765, 1998. Citado na página 21.
- 35 AMELINO-CAMELIA, G.; PIRAN, T. Planck-scale deformation of lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and the tev-photon paradoxes. *Physical Review D*, APS, v. 64, n. 3, p. 036005, 2001. Citado na página 21.
- 36 PROTHEROE, R.; MEYER, H. An infrared background-tev gamma-ray crisis? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 493, n. 1-2, p. 1–6, 2000. Citado na página 21.
- 37 WILL, C. M. *Theory and experiment in gravitational physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2018. Citado na página 23.
- 38 RUTHERFORD, E. Lxxix. the scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 21, n. 125, p. 669–688, 1911. Citado na página 25.
- 39 JOACHAIN, C. J. Quantum collision theory. 1975. Citado na página 25.
- 40 YENNIE, D.; RAVENHALL, D. G.; WILSON, R. Phase-shift calculation of high-energy electron scattering. *Physical Review*, APS, v. 95, n. 2, p. 500, 1954. Citado na página 32.
- 41 COTĂESCU, I. I.; CRUCEAN, C.; SPOREA, C. A. Partial wave analysis of the dirac fermions scattered from schwarzschild black holes. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, p. 1–19, 2016. Citado na página 32.