



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA AGROALIMENTAR  
UNIDADE ACADÊMICA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA AMBIENTAL  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DOS APOIOS NO  
COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE ESCADAS CONVENCIONAIS  
DE CONCRETO ARMADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**FRANCISCO CLAUDIO MARQUES DA SILVA JÚNIOR**

**POMBAL – PB**

**2023**

FRANCISCO CLAUDIO MARQUES DA SILVA JÚNIOR

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DOS APOIOS NO  
COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE ESCADAS CONVENCIONAIS  
DE CONCRETO ARMADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Unidade Acadêmica de  
Ciências e Tecnologia Ambiental da  
Universidade Federal de Campina  
Grande, como parte dos requisitos  
necessários para obtenção do título de  
Engenheiro Civil.

Orientador(a): Prof. Me. Luiz Ricardo da  
Silva Linhares

POMBAL – PB

2023

S586a Silva Júnior, Francisco Cláudio Marques da.

Análise da influência da rigidez dos apoios no comportamento estrutural de escadas convencionais de concreto armado via método dos elementos finitos / Francisco Cláudio Marques da Silva Júnior. – Pombal, 2023.  
44 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar, 2023.

“Orientação: Prof. Me. Luiz Ricardo da Silva Linhares”.

Referências.

1. Escadas - Comportamento estrutural. 2. Esforços internos. 3. Deslocamentos. 4. Armaduras. 5. Método dos elementos finitos I. Linhares, Luiz Ricardo da Silva.  
II. Título.

CDU 692.6 (043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA AGROALIMENTAR  
UNIDADE ACADÊMICA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA AMBIENTAL  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO.

FRANCISCO CLAUDIO MARQUES DA SILVA JÚNIOR

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DOS APOIOS NO COMPORTAMENTO  
ESTRUTURAL DE ESCADAS CONVENCIONAIS DE CONCRETO ARMADO VIA  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso do discente (FRANCISCO CLAUDIO MARQUES DA SILVA JÚNIOR) **APROVADO** em 01 de dezembro de 2023 pela comissão examinadora composta pelos membros abaixo relacionados como requisito para obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL pela Universidade Federal de Campina Grande

Registre-se e publique-se.

Documento assinado digitalmente  
 LUIZ RICARDO DA SILVA LINHARES  
Data: 07/12/2023 14:22:53-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Me. Luiz Ricardo da Silva Linhares  
(Orientador - UFCG)



Assinado digitalmente por  
Eduardo Morais de Medeiros  
Razão: Eu atesto a precisão e a  
integridade deste documento  
Localização: Pombal/PB  
Data: 2023.12.08 08:21:38-03'00'

---

Prof. Dr. Eduardo Morais de Medeiros  
(Membro Interno - UFCG)

Documento assinado digitalmente  
 PABLO DA SILVA ARAUJO  
Data: 08/12/2023 19:17:36-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Me. Pablio da Silva Araújo  
(Membro Externo - UNIFIP)

*À toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus por me proporcionar chegar até esse momento da minha vida e a todos que contribuíram de alguma forma para minha formação na graduação em engenharia civil na UFCG, campus Pombal, especialmente aos meu pais e meu irmão pelo esforço feito para vencermos mais uma etapa.

Ao meu orientador, Prof. Me. Luiz Ricardo da Silva Linhares, pelo suporte durante a elaboração deste trabalho e pelo aprendizado passado em suas disciplinas durante a graduação.

Aos colegas que sempre foram prestativos e companheiros em todos esses anos de graduação.

Aos coordenadores que passaram por essa função nestes meus 5 anos no campus por toda assistência, paciência e atenção dada aos alunos.

Ao corpo docente do CCTA pelo esforço em buscar sempre melhorias para o campus e proporcionar mais conhecimento para todos os discentes.

*“Há uma forma de fazer isso melhor –  
encontre-a.”*

*-Thomas Edison*

## **Influência da rigidez dos apoios no comportamento estrutural de escadas convencionais de concreto armado**

Influence of support stiffness on the structural behavior of conventional reinforced concrete stairs

Autor: Francisco Claudio Marques da Silva Júnior, e-mail: fclaudio.eng@gmail.com

Orientador: Luiz Ricardo da Silva Linhares, e-mail: luiz.ricardo@ufcg.edu.br

---

### **RESUMO**

Sabe-se que atualmente existem vários programas computacionais que realizam cálculos de estruturas de concreto armado, porém alguns elementos do projeto merecem um cuidado especial, como é o caso de escadas. Sendo assim, é importante calculá-la separadamente, construindo um modelo mais seguro e, para isso, deve-se determinar um método para o cálculo dos esforços que pode ser, por exemplo, o analítico ou o numérico. Além disso, é necessário definir o tipo de apoio do modelo, pois irá influenciar nos valores dos esforços internos. Este trabalho tem como objetivo fazer uma análise comparativa dos esforços, deslocamentos e armaduras de flexão de escadas convencionais apoiadas, variando a rigidez do apoio e a espessura da laje. Para determinação desses parâmetros foi utilizado o *software* SAP2000 para modelagem e obtenção dos esforços e deslocamentos através de elementos de casca que é baseado no método dos elementos finitos (MEF), que se trata de um método de discretização de elementos contínuos. As armaduras foram calculadas manualmente através das equações de Araújo (2014). Observou-se que, de maneira geral houve aumento dos momentos fletores e das forças cortantes com o aumento da espessura da laje, exceto em alguns casos específicos, e que houve reduções de momentos positivos com aumento da rigidez. Quanto aos deslocamentos, verificou-se redução dos mesmos com o aumento da espessura da laje e com o aumento da rigidez dos apoios, assim como nas áreas de aço.

**Palavras-chave:** Escadas. Esforços internos. Deslocamentos. Armaduras. Método dos elementos finitos.

## ABSTRACT

It is known that there are currently several computer programs that carry out calculations for reinforced concrete structures, but some design elements deserve special care, such as stairs. Therefore, it is important to calculate it separately, building a safer model and, for this, a method must be determined for calculating the efforts, which can be, for example, analytical or numerical. Furthermore, it is necessary to define the type of support of the model, as it will influence the values of internal efforts. This work aims to make a comparative analysis of the efforts, displacements and flexural reinforcement of supported conventional stairs, varying the stiffness of the support and the thickness of the slab. To determine these parameters, the SAP2000 software was used to model and obtain the efforts and displacements through shell elements, which is based on the finite element method (FEM), which is a method of discretization of continuous elements. The reinforcements were calculated manually using the Araújo equations (2014). It was observed that, in general, there was an increase in bending moments and shear forces with the increase in slab thickness, except in some specific cases, and that there were reductions in positive moments with an increase in stiffness. As for displacements, there was a reduction in them with the increase in the thickness of the slab and with the increase in the stiffness of the supports, as well as in the steel areas.

**Keywords:** Stairs. Internal efforts. Displacements. Reinforcements. Finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aspectos geométricos da escada.....	20
Figura 2 - Planta de formas da escada.....	20
Figura 3 - Momentos fletores com elementos de (a) 20 x 20 cm e (b) 10 x 10 cm.....	24
Figura 4 - Momentos fletores (kN.m).....	25
Figura 5 - Forças cortantes(kN).....	25
Figura 6 - Deslocamentos (mm).....	25
Figura 7 - MCEC14-1: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	42
Figura 8 - MCEC16-1: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	42
Figura 9 - MCEC12-2: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	43
Figura 10 -MCEC14-2: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	43
Figura 11 - MCEC16-2: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	43
Figura 12 - MCEC12-3: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	44
Figura 13 - MCEC14-3: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	44
Figura 14 - MCEC16-3: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	44
Figura 15 - MCEC12-4: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	45
Figura 16 - MCEC14-4: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	45
Figura 17 - MCEC16-4: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm).....	45

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Momentos fletores negativos nas vigas inferior e superior.....	28
Gráfico 2 - Momentos fletores positivos na interface piso-lance.....	28
Gráfico 3 - Momentos fletores positivos no lance.....	29
Gráfico 4 - Momentos fletores negativos na interface lance-patamar.....	29
Gráfico 5 - Momentos fletores negativos na viga intermediária.....	30
Gráfico 6 - Forças cortantes na viga inferior.....	33
Gráfico 7 - Forças cortantes na viga intermediária.....	33
Gráfico 8 - Forças cortantes na viga superior.....	34
Gráfico 9 - Flechas máximas das amostras.....	36

## LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Modelos estruturais analisados.....	22
--	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cargas características atuantes na estrutura da escada.....	23
Tabela 2 - Valores das constantes elásticas das molas (kmola).....	26
Tabela 3 - Valores de momentos fletores dos modelos em elementos de casca (kNm)....	27
Tabela 4 - Variação dos momentos fletores em relação à espessura.....	30
Tabela 5 - Variação dos momentos fletores em relação aos apoios.....	31
Tabela 6 - Valores das forças cortantes para os modelos em elementos de casca (kN)...	32
Tabela 7 - Variação das forças cortantes em relação à espessura.....	34
Tabela 8 - Variação das forças cortantes em relação aos apoios.....	35
Tabela 9 - Flechas máximas da escada.....	36
Tabela 10 - Variação das flechas.....	36
Tabela 11 - Áreas de aço positiva longitudinal calculada dos lances.....	37
Tabela 12 - Áreas de aço negativa longitudinal calculada dos patamares.....	38

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>2. OBJETIVOS.....</b>	<b>16</b>
2.1. Objetivo geral.....	16
2.2. Objetivos específicos.....	16
<b>3. MATERIAIS E MÉTODOS.....</b>	<b>17</b>
3.1. Software utilizado.....	17
3.2. Normas técnicas.....	17
3.3. Aspectos geométricos.....	18
3.4. Ações.....	20
3.4.1. Peso próprio.....	21
3.4.2. Sobrecarga.....	21
3.4.3. Revestimento.....	21
3.4.4. Guarda-corpo.....	22
3.5. Metodologia.....	22
3.5.1. Cálculo pelo SAP2000.....	23
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>24</b>
4.1. Momentos fletores.....	26
4.2. Forças cortantes.....	32
4.3. Deslocamentos.....	35
4.4. Armaduras de flexão.....	37
<b>5. CONCLUSÕES.....</b>	<b>38</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>41</b>
<b>ANEXO A - RESULTADOS DOS ESFORÇOS INTERNO E DESLOCAMENTOS FORNECIDOS PELO SAP2000.....</b>	<b>42</b>
<b>ANEXO B - PROCEDIMENTO DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS DA ESCADA.....</b>	<b>46</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Dentro da história da engenharia há uma busca pelo melhor modelo que represente a realidade e, devido a essa investigação, temos diferentes formas de projetar estruturas que vão desde modelos analíticos até modelos matemáticos que necessitam de máquinas computacionais para resolvê-los. Sendo assim, cabe ao projetista analisar o problema que se depara e escolher o modelo que garanta as três características almejadas dentro da engenharia, que são segurança, economia e conforto.

Essas considerações podem ser feitas durante o processo de dimensionamento de escadas em concreto armado, as quais são elementos estruturais composta por uma série de degraus para permitir o acesso a diferentes pavimentos de uma edificação de maneira confortável ao usuário. Elas podem ser projetadas de diferentes formas e dimensões a depender do espaço disponível, do fluxo de pessoas e da arquitetura (Araújo, 2014).

Segundo Oliveira (2008), os modelos estruturais utilizados para realizar os cálculos devem ser capazes de representar com eficiência o modo como se comportam, sendo que a escolha dos mesmos é feita durante uma etapa fundamental do projeto, a concepção estrutural. Ao dimensionar elementos especiais, como escadas, é essencial escolher modelos de cálculo que capturam adequadamente o comportamento real da estrutura, evitando tanto o superdimensionamento quanto o subdimensionamento desses elementos.

Com o modelo definido, observa-se a partir de uma análise estrutural o comportamento dos esforços internos e as deformações que surgem. Esse comportamento se altera de acordo com o modelo que, por sua vez, leva em conta hipóteses do comportamento físico. Dentre as características dos modelos que buscam representar o comportamento de elementos estruturais estão as condições de apoio, as quais podem variar a rigidez da vinculação, modificando os esforços e as deformações.

Além disso, determinar o método de cálculo que será utilizado para o dimensionamento também é uma variável a ser escolhida pelo projetista. Realizar por meio de métodos analíticos ou numéricos são algumas das possibilidades, as quais podem ser feitas de forma manual ou com a exigência de programas computacionais. Dentre os métodos numéricos mais difundidos está o Métodos dos Elementos Finitos que

é uma abordagem numérica que quebra o domínio do problema em múltiplos subdomínios conhecidos como elementos finitos. Em seguida, funções simples, como polinômios, são estabelecidas para cada um desses elementos, visando a aproximação das variáveis do problema (Martins, 2012). Este método, utilizado no desenvolvimento do trabalho, permite uma melhor representação do comportamento dos esforços e deslocamentos da estrutura e, dessa forma, é possível realizar um dimensionamento mais assertivo e econômico.

## 2. OBJETIVOS

Este trabalho objetiva realizar uma comparação entre diferentes modelos estruturais de escadas convencionais variando o tipo do apoio a partir de programas computacionais, permitindo fazer uma análise dos esforços internos e dos deslocamentos que irão interferir no dimensionamento da estrutura e conseqüentemente no seu custo.

### 2.1. Objetivo geral

Comparar o comportamento estrutural de escadas convencionais em concreto armado, em função da rigidez dos apoios através de modelos em elementos de barra e em elementos de casca, a fim analisar os esforços internos e deformações, verificando o comportamento em cada situação.

### 2.2. Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Realizar a modelagem de uma escada convencional em concreto armado no *software* SAP2000;
- Determinar os esforços internos e deslocamentos através MEF com o uso do *software* SAP2000;
- Obter as armaduras de flexão necessária através do dimensionamento manual;
- Fazer uma análise comparativa entre os resultados dos esforços internos, deslocamentos e armaduras da escada.

### 3. MATERIAIS E MÉTODOS

Este trabalho foi dividido em 4 fases:

- 1ª Etapa: Definição das dimensões da estrutura modelo;
- 2ª Etapa: Lançamento dos modelos no SAP2000 e obtenção dos esforços e deslocamentos;
- 3ª Etapa: Dimensionamento manual das armaduras dos modelos com os esforços obtidos em cada *software*;
- 4ª Etapa: Análise comparativa dos resultados.

#### 3.1. Software utilizado

Ao longo dos anos, houve um avanço significativo na análise das estruturas de construções e nos procedimentos de garantia da sua segurança, principalmente devido à aplicação dos computadores como ferramentas auxiliares (Carneiro; Martins, 2008). Dessa forma, é importante que se busque métodos e modelos mais aperfeiçoados que representem melhor o comportamento estrutural para atender as necessidades de segurança e custo de maneira mais eficiente, utilizando essas ferramentas embasadas em verificações analíticas clássicas.

Para obtenção de esforços e deformações de estruturas de concreto armado, existem vários *softwares* comerciais capazes de fornecê-los. Neste trabalho foi utilizado o SAP2000 (V25) para realizar a modelagem e obter os esforços e deslocamentos da escada com elementos de casca. Este programa computacional se baseia no Método dos Elementos Finitos (MEF) para realizar o processamento dos esforços e deslocamentos.

O MEF foi desenvolvido para o estudo de meios contínuos, que são muito complexos para serem analisados com exatidão. Nesse método, o meio contínuo é dividido em um número discreto de elementos de dimensões finitas, interligados por meio pontos nodais, onde se forma uma malha que se comporta de forma semelhante ao elemento contínuo (Soriano, 2003).

#### 3.2. Normas técnicas

Para realização da modelagem foi utilizado como referência para determinação das dimensões da escada a NBR 9050 (ABNT, 2020) - Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos - e a NBR 6118 (ABNT, 2023) - Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. As cargas que irão atuar na escada serão determinadas pela NBR 6120 (ABNT, 2019) - Ações para o cálculo de estruturas de edificações.

### 3.3. Aspectos geométricos

As escadas podem apresentar diversas dimensões, mas estas precisam atender as condições mínimas exigidas por normas. De acordo com a NBR 9050 (ABNT 2020), as escadas em rotas acessíveis devem ter largura mínima de 1,20 m e que para o dimensionamento do espelho ( $e$ ) e do piso ( $p$ ) deve ser obedecido as condições das equações 1, 2 e 3.

$$0,63\text{ m} \leq p + 2e \leq 0,65\text{ m} \quad (1)$$

$$0,28\text{ m} \leq p \leq 0,32\text{ m} \quad (2)$$

$$0,16\text{ m} \leq e \leq 0,18\text{ m} \quad (3)$$

Como a principal função de uma escada é vencer um desnível, é preciso conhecer primeiramente essa altura ( $H$ ) e determinar uma altura de espelho para calcular a quantidade de degraus ( $n$ ) necessários. (Cunha; Souza, 1994)

$$n = \frac{H}{e} \quad (4)$$

Com as dimensões dos degraus definidos, a inclinação da escada " $\alpha$ " é calculado com a seguinte equação:

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + e^2}} \quad (5)$$

Outras características geométricas importantes para determinação das cargas atuantes na estrutura são a espessura vertical da laje do lance ( $h_1$ ) e a espessura vertical média da laje do lance ( $h_m$ ), obtidas, respectivamente, pelas equações 6 e 7.

$$h_1 = \frac{h}{\cos\alpha} \quad (6)$$

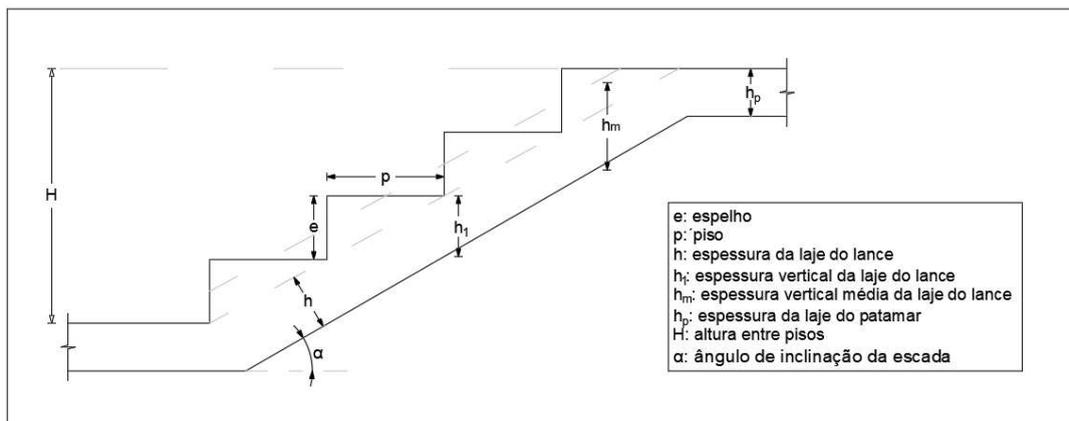
$$h_m = h_1 + \frac{e}{2} \quad (7)$$

Quanto à espessura da laje da escada, seguem as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2023) para os limites mínimos de lajes maciças:

- 7 cm para coberturas não em balanço;
- 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- 10 cm para lajes em balanço;
- 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- 15 cm para lajes com protensão apoiadas em vigas, com o mínimo 1/42 para laje de piso biapoiadas e 1/50 para lajes de piso contínuas;
- 16 cm para lajes lisas e 14 cm para lajes-cogumelo, fora do capitel.

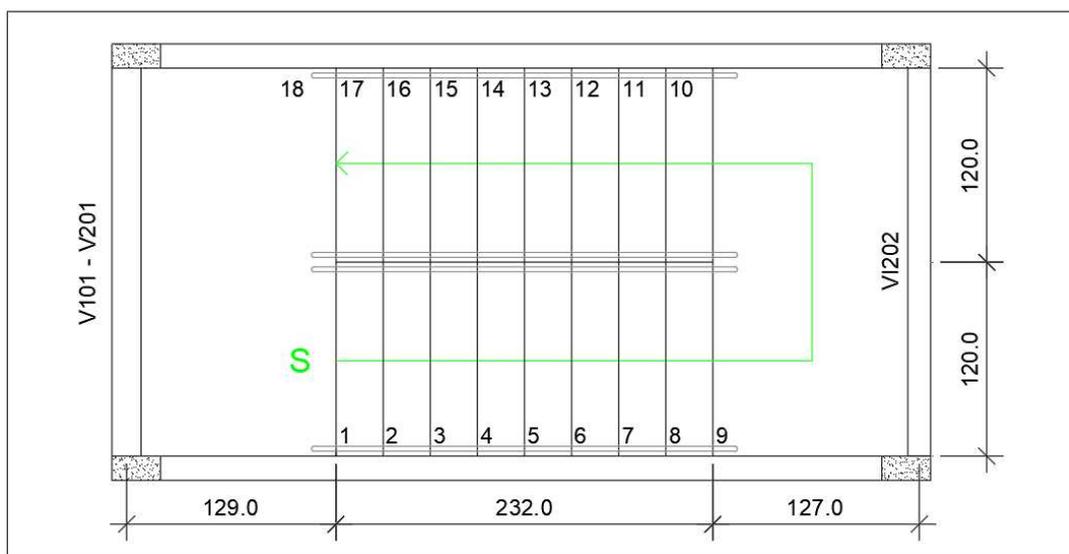
A escada analisada possui dois lances com patamares intermediário, de entrada e saída apoiados em vigas, sendo este tipo de escada as mais convencionais em edifícios residenciais, onde se tem pouco espaço para uma escada reta. Cada lance contém 8 degraus de 16 cm de espelho e 29 cm de piso, estando de acordo com as equações estabelecidas pela NBR 9050 (ABNT, 2020). As espessuras das lajes da escada, geralmente, são definidas como sendo 3% do vão, porém, tendo como um dos objetivos verificar a influência dos apoios em diferentes espessuras, estas serão variadas entre 12, 14 e 16 cm e a largura dos lances e do patamar é de 1,20 m. As principais características geométricas da escada apresentadas anteriormente estão presentes na figura 1.

**Figura 1 - Aspectos geométricos da escada**



Fonte: Autor (2023)

**Figura 2 - Planta de formas da escada**



Fonte: Autor (2023)

### 3.4. Ações

Pode-se chamar de ação qualquer influência, ou conjunto de influências que são capazes de causar estados de tensões ou de deformações em uma estrutura (Carvalho; Figueiredo Filho, 2022). As ações devem ser conhecidas para determinar os esforços internos que são gerados na estrutura e conseqüentemente realizar o dimensionamento correto delas para resisti-los e limitar as deformações. As ações podem ser agrupadas em permanentes, variáveis e excepcionais. Para o estudo da escada deste trabalho serão aplicadas cargas permanentes, as quais incluem peso próprio, revestimento e corrimão, e

as cargas variáveis que são de acordo com o tipo de uso da estrutura. Os valores das ações são determinados pela NBR 6120 (ABNT, 2019).

### 3.4.1. Peso próprio

De acordo com a NBR 6120 (ABNT,2019), o peso próprio se refere ao peso exclusivamente da estrutura. Além disso, ela determina que o peso específico aparente ( $\gamma_c$ ) do concreto armado, material da estrutura da escada, é de 25 kN/m<sup>3</sup>. Dessa forma, o peso próprio do patamar ( $g_p$ ) é obtido pela equação 6.

$$g_p = 25 \cdot h \quad (8)$$

Já no trecho inclinado, é preciso levar em consideração os degraus utilizando a espessura vertical média da laje do lance para calcular o seu peso próprio pela equação 8 (Araújo, 2014).

$$g_l = 25 \cdot h_m \quad (9)$$

### 3.4.2. Sobrecarga

A NBR 6120 (ABNT, 2019) estabelece cargas que devem ser aplicadas sobre a estrutura levando em consideração o seu uso específico. No caso da escada em estudo é importante frisar que sua finalidade não inclui acesso público, o que resulta em uma sobrecarga ( $q$ ) de 2,50 kN/m<sup>2</sup> de acordo com a respectiva norma.

### 3.4.3. Revestimento

Quando não há informações disponíveis sobre o material específico utilizado para o revestimento, a NBR 6120 (ABNT, 2019) estabelece uma carga ( $g_r$ ) a ser considerada para revestimentos de pisos em edifícios residenciais com uma espessura de 5,0 cm. De acordo com essa norma, a carga estipulada é de 1,0 kN/m<sup>2</sup>.

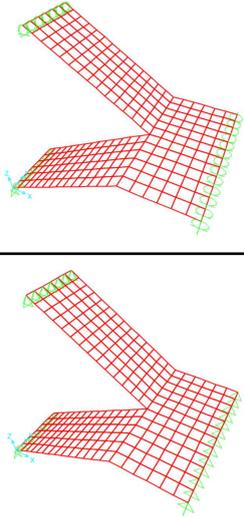
### 3.4.4. Guarda-corpo

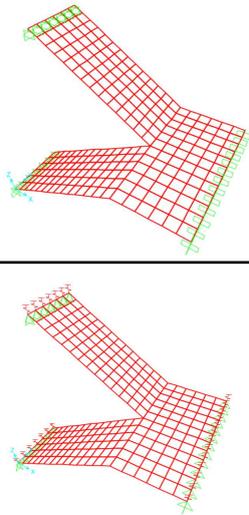
Os corrimãos e guarda-corpos estão apoiados sobre os lances da escada, sendo considerado o seu peso distribuído sobre a área do lance. A carga aplicada foi considerada como 2 kN/m<sup>2</sup>.

### 3.5. Metodologia

A estrutura foi analisada utilizando quatro arranjos estruturais, os quais se diferenciam pelo tipo de apoio, o que altera a rigidez dos mesmos, além de variar em três espessuras distintas de laje, totalizando 12 amostras estudadas. A sua modelagem e obtenção dos resultados foi com o uso do *software* SAP2000 através de elementos de casca onde as propriedades da estrutura são representadas por uma malha de elementos finitos. As nomenclaturas das amostras estão descritas abaixo e apresentadas no quadro 2.1.

**Quadro 2.1 – Modelos estruturais analisados**

Modelagem	Modelo	Apoios	Espessura da laje (cm)	Estrutura
Elementos de Casca	MCEC12-1	1º e 2º gênero	12	
	MCEC14-1		14	
	MCEC16-1		16	
	MCEC12-2	2º gênero	12	
	MCEC14-2		14	
	MCEC16-2		16	

	MCEC12-3	3º gênero	12	
	MCEC14-3		14	
	MCEC16-3		16	
	MCEC12-4	Semirrígidos	12	
	MCEC14-4		14	
	MCEC16-4		16	

Fonte: Autor, 2023

As cargas verticais que atuam sobre o patamar ( $R_p$ ) e o lance ( $R_{lh}$ ) estão expostas na tabela 1. Para o lance da escada, foi calculada a carga ao longo do lance ( $R_{li}$ ), visto que a carga  $R_{lh}$  está ao longo da projeção horizontal da escada.

**Tabela 1** – Cargas características atuantes na estrutura da escada

h (cm)	$g_p$ (kN/m <sup>2</sup> )	$g_l$ (kN/m <sup>2</sup> )	$g_c$ (kN/m <sup>2</sup> )	$g_r$ (kN/m <sup>2</sup> )	q (kN/m <sup>2</sup> )	$R_p$ (kN/m <sup>2</sup> )	$R_{lh}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$R_{li}$ (kN/m <sup>2</sup> )
12	3,00	5,43	2,00	1,00	2,50	6,50	10,93	9,57
14	3,50	6,00	2,00	1,00	2,50	7,00	11,50	10,07
16	4,00	6,57	2,00	1,00	2,50	7,50	12,07	10,57

Fonte: Autor, 2023

### 3.5.1. Cálculo pelo SAP2000

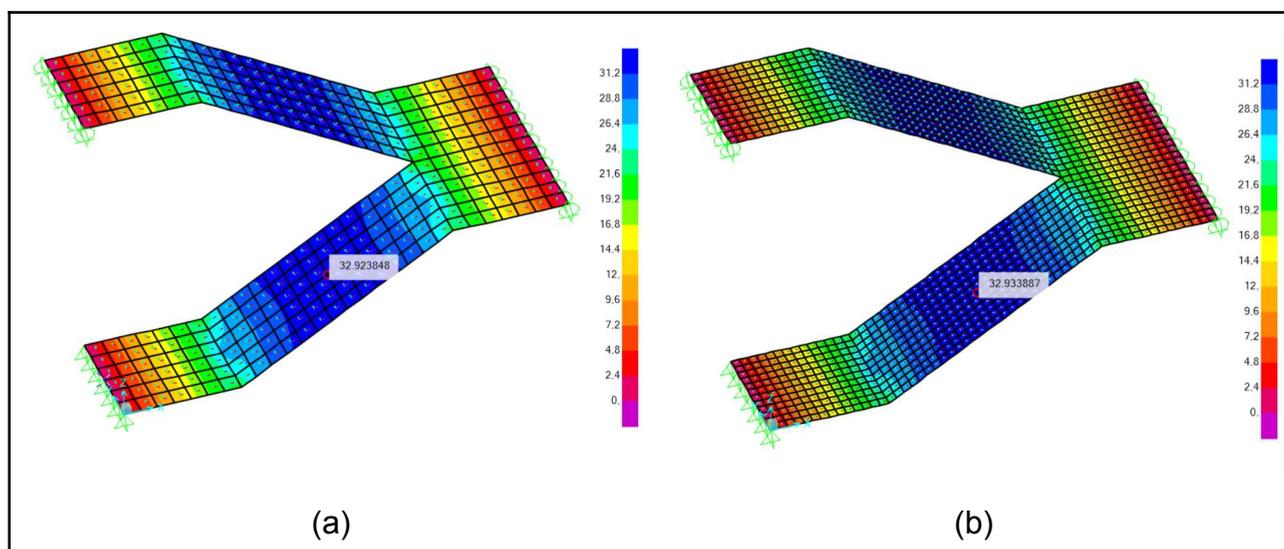
A modelagem da escada no SAP2000 foi feita a partir de elementos de casca (shells) que consistem em elementos de área com comportamento de membrana. Nessas membranas é possível determinar características como materiais e dimensões desejadas pelo projetista..

O lançamento da estrutura no *software* foi realizado com a implementação de especificações que incluem um módulo de elasticidade de 24 GPa, um coeficiente de Poisson igual a 0,2, um coeficiente de dilatação térmica de  $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$  e resistência característica à compressão do concreto de 25 MPa. As lajes da estrutura foram modeladas como elementos de casca fina (Shell-Thin) e foram discretizadas em elementos finitos de 20 cm x 20 cm, percebendo que ao discretizar a estrutura em

elementos menores houve uma mudança mínima como pode ser visto no modelo MCEC12-1 na figura X. Essa abordagem permite uma representação mais precisa das lajes, considerando suas características físicas e comportamentais de maneira mais próxima possível da realidade.

Foram obtidos os diagramas de esforços internos e as deformações para as quatro condições de apoio. Como mencionado anteriormente, essa análise é importante para compreender como a estrutura se comporta sob diferentes configurações de apoio. Em seguida, procedeu-se ao dimensionamento das armaduras de forma manual.

**Figura 3** - Momentos fletores com elementos de (a) 20 x 20 cm e (b) 10 x 10 cm



Fonte: Autor, 2023

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

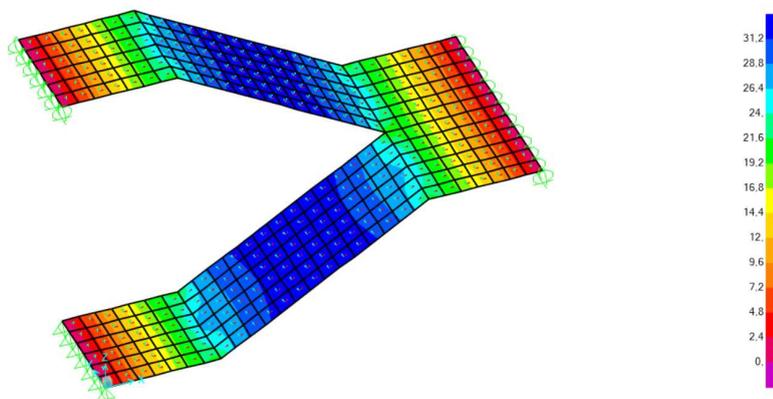
Nesta seção serão apresentados os resultados dos esforços internos e dos deslocamentos obtidos por meio dos *softwares*, assim como a análise destes resultados. Para análise foi feita uma comparação levando em consideração o modelo adotado e a espessura da laje da escada, sendo utilizada a equação 10 para determinação da variação percentual.

$$variação(\%) = \frac{valor_{analizado} - valor_{base}}{valor_{base}} * 100 \quad (10)$$

Para o modelo MCEC12-1, por exemplo, os resultados dados pelo SAP2000 para os esforços internos, momento fletor e força cortante, podem ser observados nas figuras

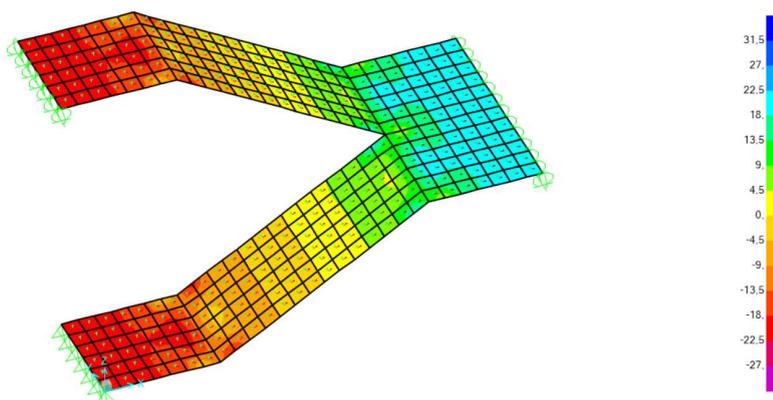
3 e 4, respectivamente, enquanto o deslocamento está apresentado na figura 5. As figuras dos resultados dos demais modelos estão presentes no anexo A.

**Figura 4 - Momentos fletores (kN.m)**



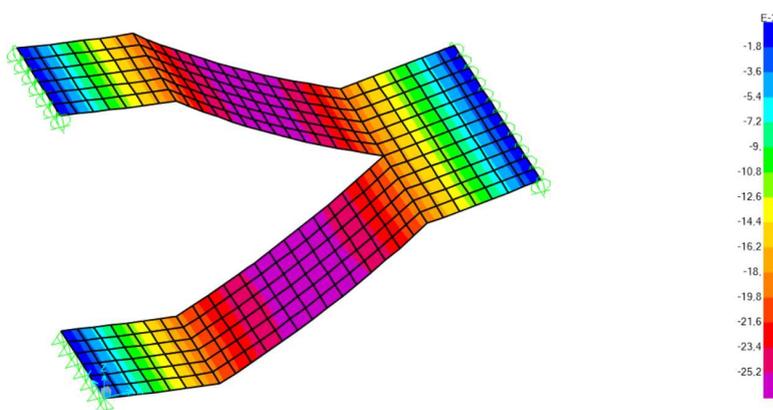
Fonte: Autor, 2023

**Figura 5 - Forças cortantes (kN)**



Fonte: Autor, 2023

**Figura 6 - Deslocamentos (mm)**



Fonte: Autor, 2023

Nos casos das amostras com vinculações semirrígidas, foram inseridos apoios elásticos rotacionais com uma constante elástica da mola ( $k_{mola}$ ) determinada por iteração com aproximação do momento negativo que surge nos apoios ao momento de fissuração ( $M_r$ ) apresentado na NBR 6118 (ABNT, 2023) pela equação 11. Os valores das constantes elásticas para cada espessura da escada estão expostos na tabela 2.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (11)$$

onde:

- $\alpha$  é o fator que correlaciona aproximadamente resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta (1,5 para seções retangulares);
- $y_t$  é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;
- $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta do concreto;
- $f_{ct}$  é a resistência à tração direta do concreto. Para determinação do momento de fissuração, deve ser usado o  $f_{ctk,inf}$  (equação 12 para concretos de classe até C50).

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (12)$$

**Tabela 2** - Valores das constantes elásticas das molas ( $k_{mola}$ )

Espessura da laje (cm)	$\alpha$	$I_c$ (cm <sup>4</sup> )	$y_t$ (cm)	$f_{ctk,inf}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$M_r$ (kNm)	$k_{mola}$ (kN.m/rad)
12	1,5	1,44 x 10 <sup>-4</sup>	6,00	0,18	6,46	114
14	1,5	2,29 x 10 <sup>-4</sup>	7,00	0,18	8,80	270
16	1,5	3,41 x 10 <sup>-4</sup>	8,00	0,18	11,49	595

Fonte: Autor, 2023

#### 4.1. Momentos fletores

A partir da modelagem com elementos de casca, foram obtidos os valores dos momentos fletores na viga inferior da escada ( $m_{v1}$ ), na interface piso-lance ( $m_p$ ), no lance ( $m_l$ ), na interface lance-patamar ( $m_{pi}$ ), na viga intermediária ( $m_i$ ) e na viga superior ( $m_{v3}$ ). Como  $m_{v1}$  e  $m_{v3}$  tiveram resultados iguais, foi escolhido apenas um deles para ser apresentado nas tabelas ( $m_v$ ). Na tabela 3 estão expostos os momentos fletores encontrados na região central da largura da escada por meio do método dos elementos finitos com o uso do SAP2000, e que serão analisados posteriormente.

**Tabela 3** - Valores de momentos fletores dos modelos em elementos de casca (kNm)

Amostra	$m_v$	$m_p$	$m_l$	$m_{pi}$	$m_{vi}$
MCEC12-1	0,0	26,67	32,92	26,23	0,0
MCEC14-1	0,0	27,89	34,78	27,48	0,0
MCEC16-1	0,0	29,12	36,64	28,73	0,0
MCEC12-2	0,0	25,85	32,92	26,82	0,0
MCEC14-2	0,0	27,04	34,77	28,12	0,0
MCEC16-2	0,0	28,22	36,63	29,43	0,0
MCEC12-3	-22,62	2,49	11,01	2,83	-22,64
MCEC14-3	-23,91	2,62	11,60	2,95	-23,93
MCEC16-3	-25,61	2,76	12,20	3,08	-25,62
MCEC12-4	-6,04	18,29	25,80	18,93	-6,46
MCEC14-4	-8,25	16,88	25,10	17,48	-8,80
MCEC16-4	-10,76	15,19	24,08	15,75	-11,49

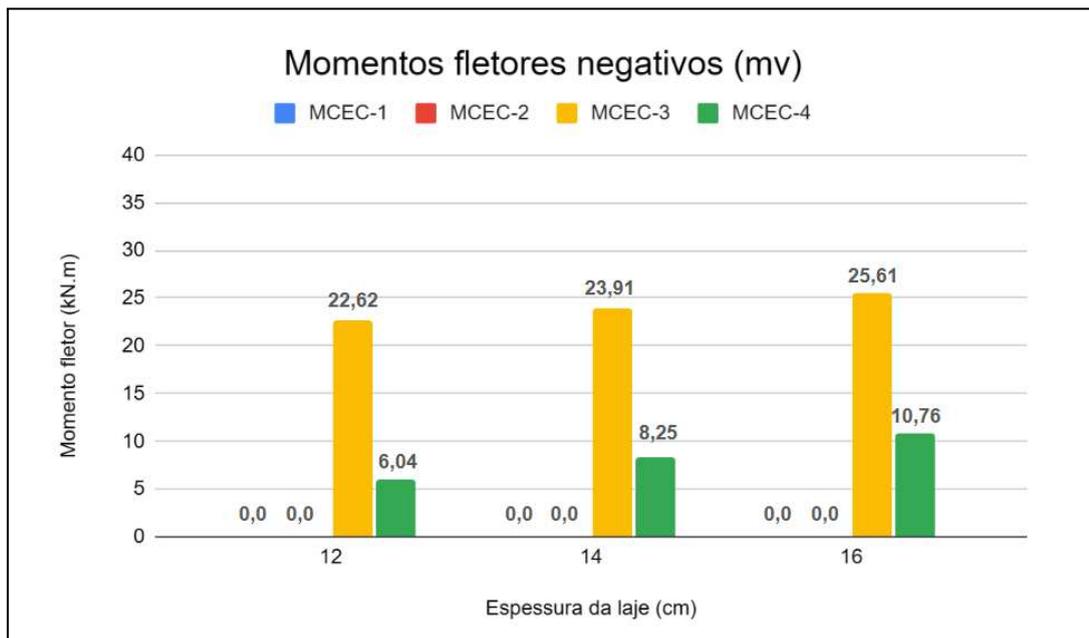
Fonte: Autor, 2023

Para esta análise, foram comparados os momentos fletores obtidos das amostras, as quais foram modeladas em elementos de casca pelo método dos elementos finitos. A análise foi influenciada pelo tipo do apoio utilizado no modelo e pela espessura da laje da escada.

Nos gráficos de colunas a seguir, divididos por região da escada, são apresentados os valores dos momentos fletores obtidos. O gráfico 1 apresenta os valores dos momentos negativos nas vigas inferior e superior. O gráfico 2 apresenta os momentos fletores positivos na interface piso-lance. O gráfico 3 apresenta os momentos fletores positivos nos lances. O gráfico 4 apresenta os momentos fletores positivos na interface lance-patamar. Por fim, o gráfico 5 apresenta os momentos fletores negativos na viga intermediária.

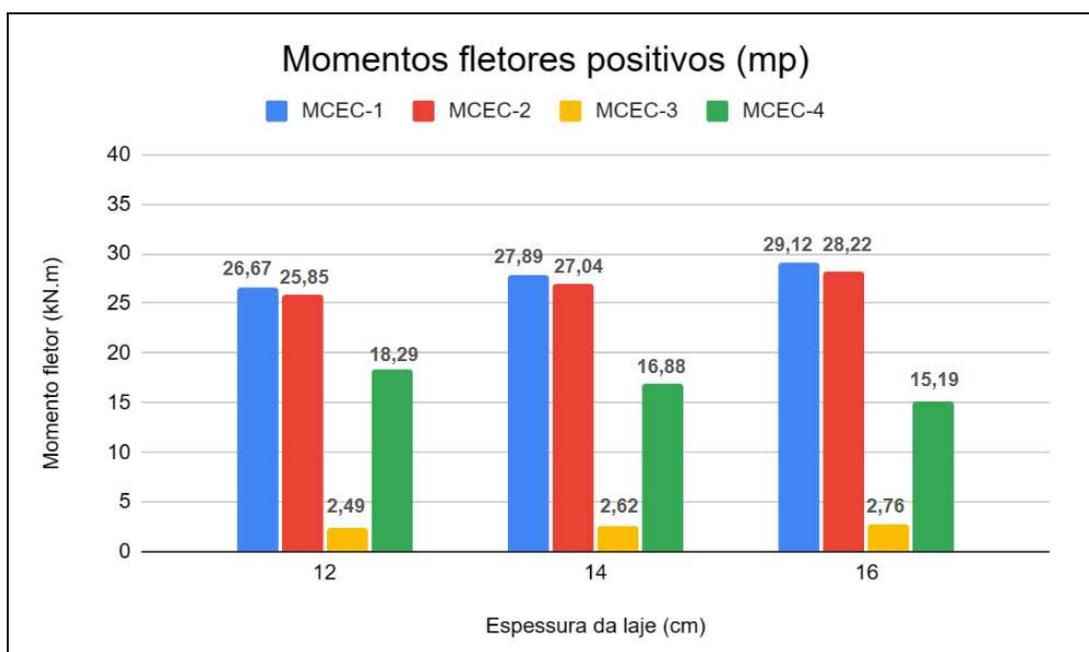
Em seguida, a tabela 4 expõe as variações que ocorreram entre os modelos em relação à espessura da laje, tomando como valor base aqueles com a espessura da laje de 12 cm e como valor analisado aqueles com a espessura da laje de 16 cm, e em relação à variação dos apoios na mesma espessura, tomando como valor base para os momentos negativos o modelo MCEC-3 e para os momentos positivos o modelo MCEC-1.

**Gráfico 1 - Momentos fletores negativos nas vigas inferior e superior**



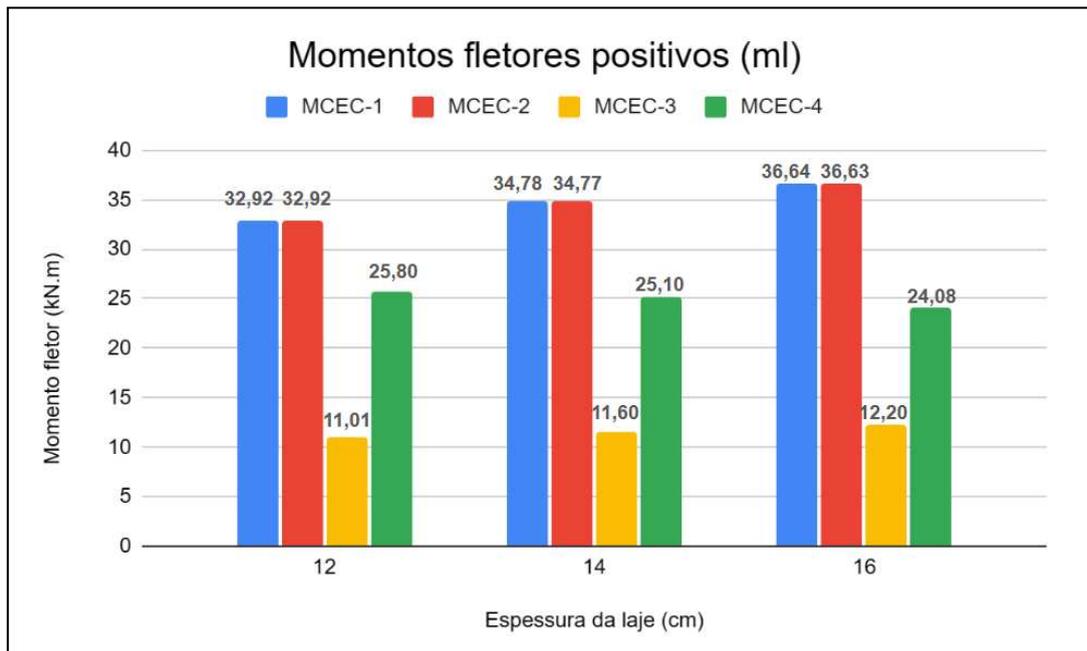
Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 2 - Momentos fletores positivos na interface piso-lance**



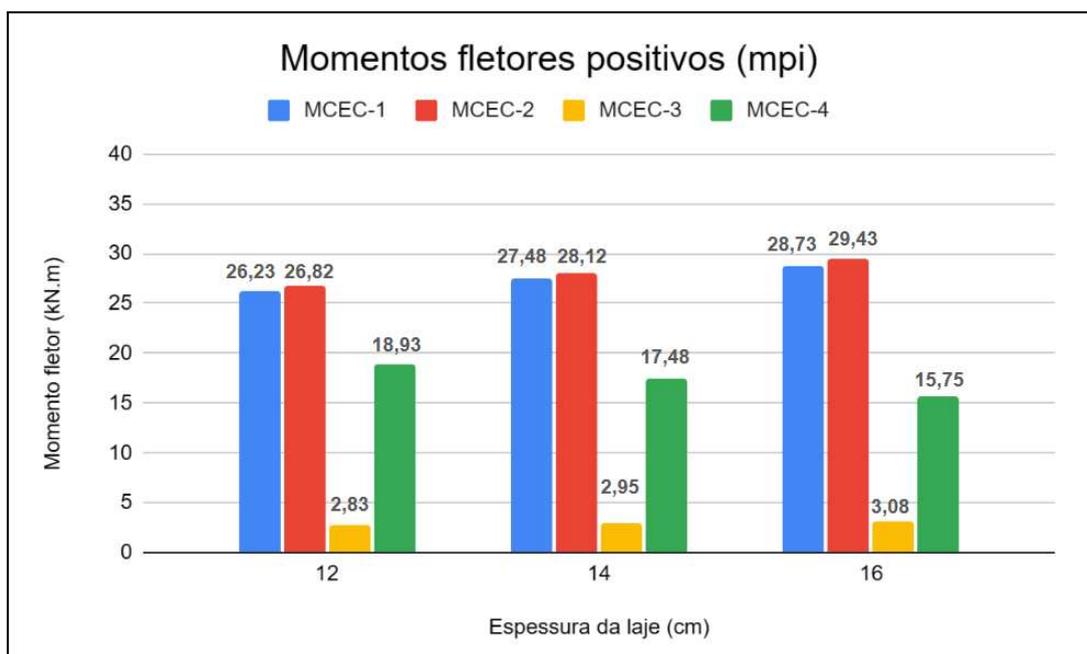
Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 3 - Momentos fletores positivos no lance**



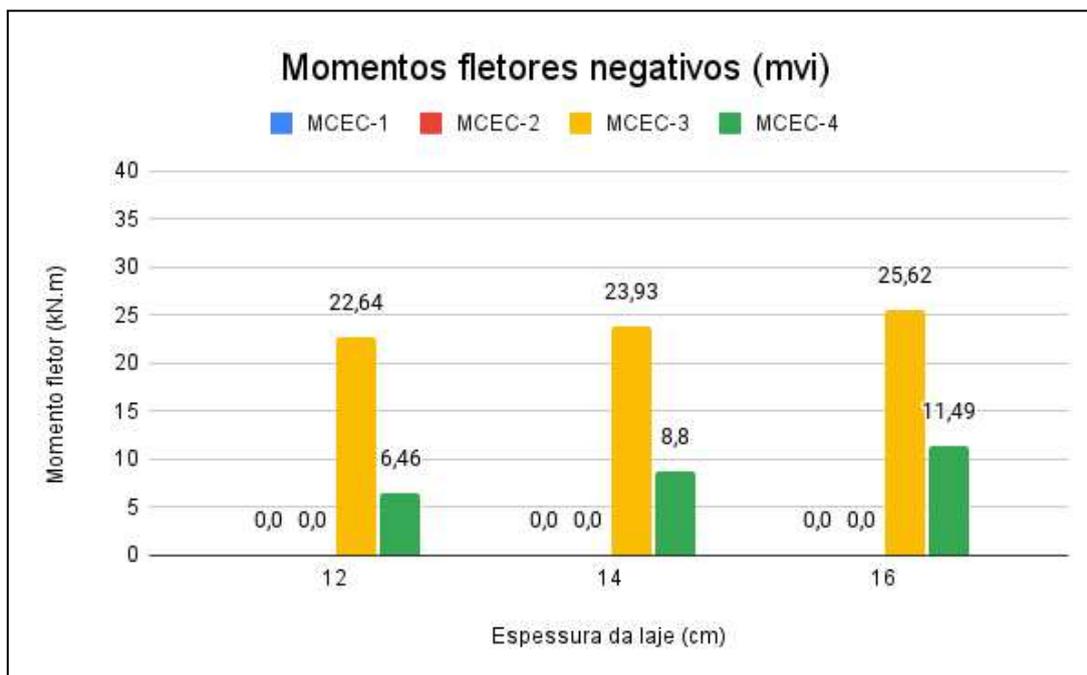
Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 4 - Momentos fletores negativos na interface lance-patamar**



Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 5** - Momentos fletores negativos na viga intermediária



Fonte: Autor, 2023

**Tabela 4** - Variação dos momentos fletores em relação à espessura

Modelo	MCEC-1	MCEC-2	MCEC-3	MCEC-4
<b>Momentos fletores negativos (mv)</b>				
12 cm	-	-	22,62	6,04
16 cm	-	-	25,61	10,76
Variação	-	-	13%	78%
<b>Momentos fletores positivos (mp)</b>				
12 cm	26,67	25,85	2,49	18,29
16 cm	29,12	28,22	2,76	15,19
Variação	9%	9%	13%	-17%
<b>Momentos fletores positivos (ml)</b>				
12 cm	32,92	32,92	11,01	25,80
16 cm	36,64	36,63	12,20	24,08
Variação	11%	11%	11%	-7%
<b>Momentos fletores positivos (mpi)</b>				
12 cm	26,23	26,82	2,83	18,93
16 cm	28,73	29,43	3,08	15,75
Variação	10%	10%	9%	-17%
<b>Momentos fletores negativo (mvi)</b>				
12 cm	-	-	22,64	6,46
16 cm	-	-	25,62	11,49
Variação	-	-	13%	78%

Fonte: Autor, 2023

**Tabela 5** - Variação dos momentos fletores em relação aos apoios

Modelo	12 cm	14 cm	16 cm
<b>Momentos fletores negativos (mv)</b>			
MCEC-3	-	-	-
MCEC-4	-73%	-65%	-58%
<b>Momentos fletores positivos (mp)</b>			
MCEC-1	-	-	-
MCEC-2	-3%	-3%	-3%
MCEC-3	-91%	-91%	-91%
MCEC-4	-31%	-39%	48%
<b>Momentos fletores positivos (ml)</b>			
MCEC-1	-	-	-
MCEC-2	0%	0%	0%
MCEC-3	-67%	-67%	-67%
MCEC-4	-22%	-28%	-34%
<b>Momentos fletores positivos (mpi)</b>			
MCEC-1	-	-	-
MCEC-2	2%	2%	2%
MCEC-3	-89%	-89%	-89%
MCEC-4	-28%	-36%	-45%
<b>Momentos fletores negativo (mvi)</b>			
MCEC-3	-	-	-
MCEC-4	-71%	-63%	-55%

Fonte: Autor, 2023

Ao analisar os gráficos e as tabelas, verifica-se que os modelos MCEC-1 e MCEC-2 apresentaram, tanto nos valores dos momentos quanto na variação, resultados próximos apesar da diferença no arranjo das vinculações. Isso ocorre, pois a única diferença entre eles é a restrição ao movimento horizontal na mudança de um apoio do 1º gênero para um do 2º gênero, o que não interfere significativamente nos momentos fletores.

Comparando os modelos MCEC-3 e MCEC-4, nota-se que os com apoios do 3º gênero possuem momentos mais elevados nos apoios visto que eles têm uma maior rigidez e, em contrapartida, possuem momentos positivos inferiores aos modelos com apoios semirrígidos.

Ao observar as variações dos momentos positivos em relação ao modelo MCEC-1, observa-se uma redução significativa dos desse esforço, sendo essa variação mais acentuada quando se tem apoios totalmente engastados.

Um outro aspecto importante é que os modelos com apoios semirrígidos foram os únicos que mostraram uma diminuição dos momentos positivos com o aumento da espessura da laje. Isso se deve a indução do aumento do momento negativo nos apoios através da constante elástica da mola.

## 4.2. Forças cortantes

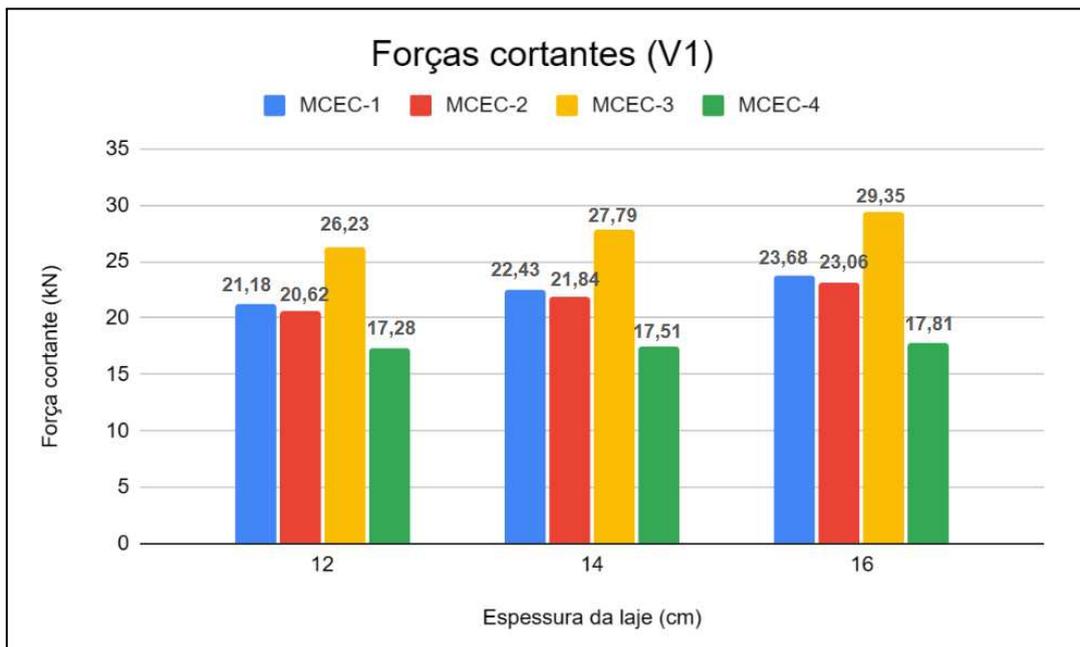
Para análise das forças cortantes, foram escolhidos os pontos onde se esperam os valores máximos, os quais estão sobre os apoios, ou seja, sobre as vigas inferior, superior e intermediária. Os gráficos 6, 7 e 8 apresentam, respectivamente, os resultados colhidos da modelagem no SAP2000 no apoio inferior (V1), intermediário (V2) e superior (V3) e a tabela 6 mostra todos os valores encontrados.

**Tabela 6** - Valores das forças cortantes para os modelos em elementos de casca (kN)

Amostra	V1	V2	V3
MCEC12-1	21,18	-21,88	21,18
MCEC14-1	22,43	-23,16	22,43
MCEC16-1	23,68	-24,44	23,68
MCEC12-2	20,62	-22,71	20,62
MCEC14-2	21,84	-24,03	21,84
MCEC16-2	23,06	-25,35	23,06
MCEC12-3	26,23	-23,61	26,23
MCEC14-3	27,79	-25,04	27,79
MCEC16-3	29,35	-26,46	29,35
MCEC12-4	17,28	-22,01	17,28
MCEC14-4	17,51	-23,15	17,51
MCEC16-4	17,81	-24,33	17,81

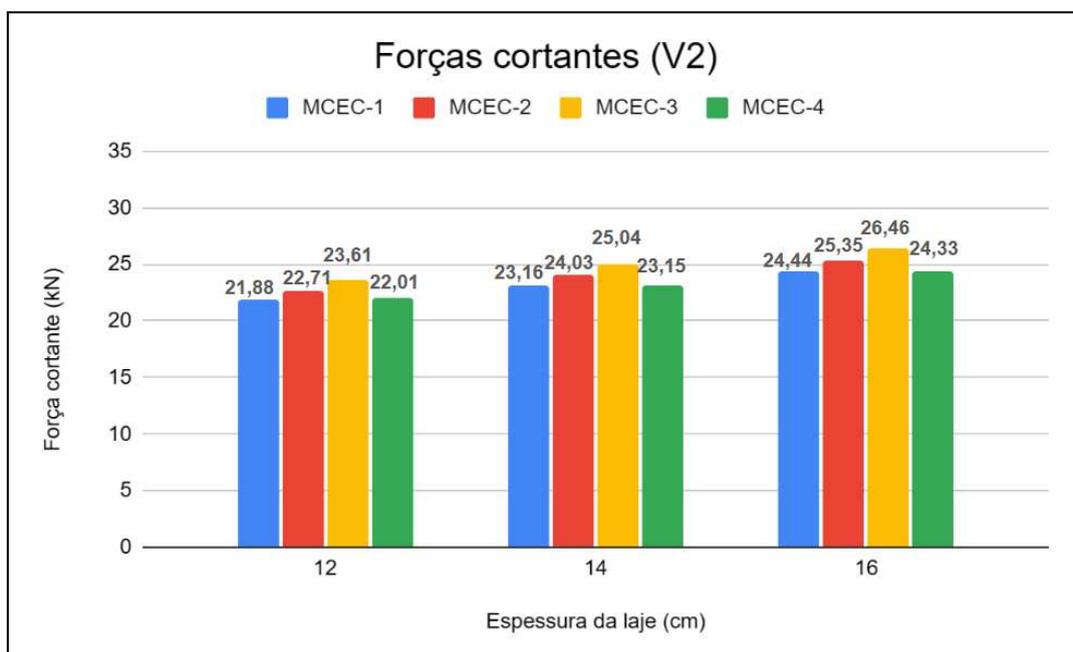
Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 6 - Forças cortantes na viga inferior**



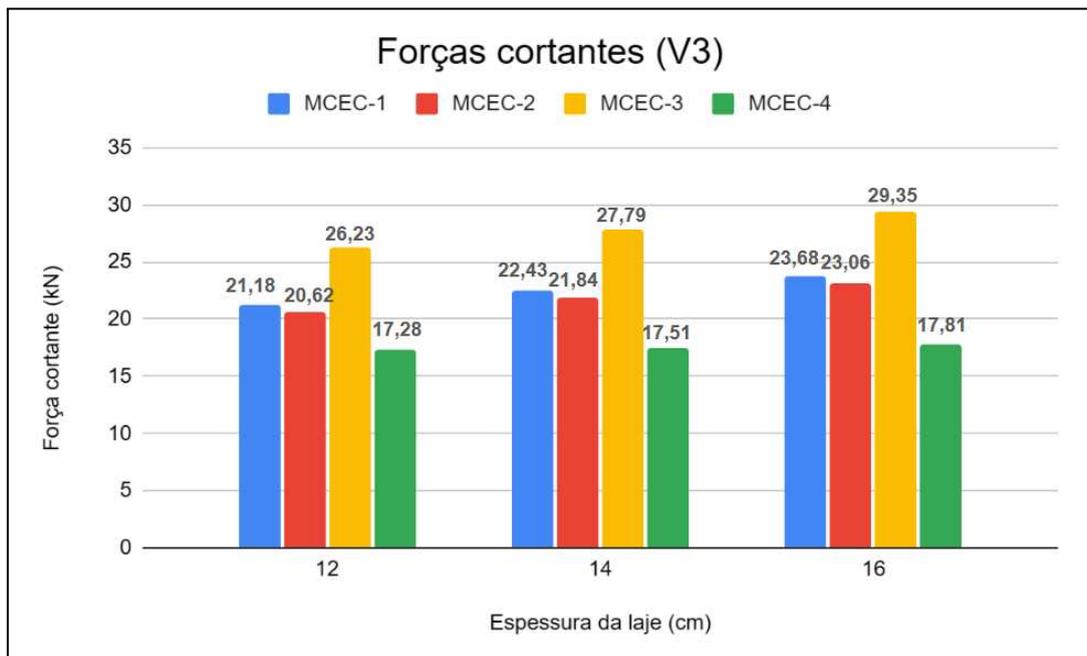
Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 7 - Forças cortantes na viga intermediária**



Fonte: Autor, 2023

**Gráfico 8 - Forças cortantes na viga superior**



Fonte: Autor, 2023

**Tabela 7 - Variação das forças cortantes em relação à espessura**

Modelo	MCEC-1	MCEC-2	MCEC-3	MCEC-4
<b>Forças cortantes (kN) - V1</b>				
12 cm	21,18	20,62	26,23	17,28
16 cm	23,68	23,06	29,35	17,81
Variação	12%	12%	12%	3%
<b>Forças cortantes (kN) - V2</b>				
12 cm	21,88	22,71	23,61	22,01
16 cm	24,44	25,35	26,46	24,33
Variação	12%	12%	12%	11%
<b>Forças cortantes (kN) - V3</b>				
12 cm	21,18	20,62	26,23	17,28
16 cm	23,68	23,06	29,35	17,81
Variação	12%	12%	12%	3%

Fonte: Autor, 2023

**Tabela 8** - Variação das forças cortantes em relação aos apoios

Modelo	12 cm	14 cm	16 cm
<b>Forças cortantes (kN) - V1</b>			
<b>MCEC-1</b>	-	-	-
<b>MCEC-2</b>	-3%	-3%	-3%
<b>MCEC-3</b>	24%	24%	24%
<b>MCEC-4</b>	-18%	-22%	-25%
<b>Forças cortantes (kN) - V2</b>			
<b>MCEC-1</b>	-	-	-
<b>MCEC-2</b>	4%	4%	4%
<b>MCEC-3</b>	8%	8%	8%
<b>MCEC-4</b>	1%	0%	0%
<b>Forças cortantes (kN) - V3</b>			
<b>MCEC-1</b>	-	-	-
<b>MCEC-2</b>	-3%	-3%	-3%
<b>MCEC-3</b>	24%	24%	24%
<b>MCEC-4</b>	-18%	-22%	-25%

Fonte: Autor, 2023

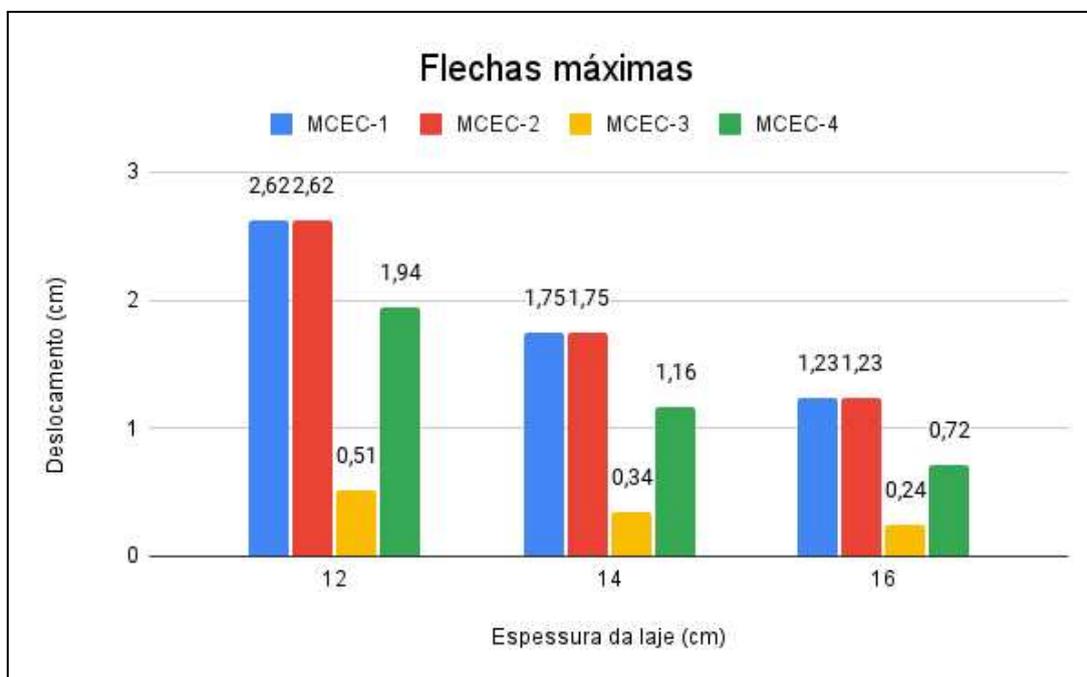
A partir dos gráficos 6, 7 e 8 e da tabela 7 percebe-se que assim como nos momentos fletores os valores e as variações das forças cortantes para os modelos MCEC-1 e MCEC-2 são bem próximos. Os modelos com apoios semirrígidos foram os que apresentaram menor força e cortante e também menor variação percentual, mas diferentemente do que ocorreu nos resultados dos momentos, não houve redução de esforço com o aumento da espessura da laje.

Quanto à tabela 8, onde se tem a variação percentual em relação aos apoios, verifica-se que nos modelos MCEC-3 só houve aumento dos esforços e todos os pontos analisados. Já nos modelos MCEC-2 e MCEC-4 houve redução das forças cortantes nos apoios inferior (V1) e superior (V3).

### 4.3. Deslocamentos

No gráfico 9 e na tabela 9 estão presentes os valores das flechas máximas obtidos através da modelagem no SAP2000. Todos os valores se encontram na região central do lance da escada. A tabela 10 mostra as variações percentuais em relação aos apoios do modelo MCEC-1

**Gráfico 9 - Flechas máximas das amostras**



Fonte: Autor, 2023

**Tabela 9 - Flechas máximas da escada**

Amostra	Espessura da laje		
	12 cm	14 cm	16 cm
MCEC-1	2,62	1,75	1,23
MCEC-2	2,62	1,75	1,23
MCEC-3	0,51	0,34	0,24
MCEC-4	1,94	1,16	0,72

Fonte: Autor, 2023

**Tabela 10 - Variação das flechas**

Amostra	Espessura da laje		
	12 cm	14 cm	16 cm
MCEC-1	-	-	-
MCEC-2	0%	0%	0%
MCEC-3	-81%	-81%	-80%
MCEC-4	-26%	-34%	-41%

Fonte: Autor, 2023

Observa-se, a partir do gráfico e das tabelas, que os modelos MCEC-1 e MCEC-2 possuem deslocamentos semelhantes, assim como apresentavam momentos fletores e forças cortantes próximos. Ao restringir a rotação com apoios de 3° gênero e semirrígidos nota-se uma grande diminuição no deslocamento, principalmente nos modelos do tipo 3, o que se explica por uma maior rigidez do apoio em relação aos modelos do tipo 4. Outro fator importante que aparece nos resultados é de que ao aumentar a espessura da laje da escada, o deslocamento também diminui visto que a rigidez da seção eleva-se.

#### 4.4. Armaduras de flexão

Para realização do dimensionamento das armaduras de flexão da escada considerou-se uma seção de largura  $b_w = 1$  m e altura de acordo com o modelo em análise. Para os cálculos, foram utilizadas as equações fornecidas por Araújo e pela NBR 6118 (ABNT, 2023), às quais estão detalhadas no anexo B.

O processo de dimensionamento foi realizado para o patamar inferior, um lance e patamar intermediário, visto que para o segundo lance e patamar superior os resultados são análogos. As tabelas 11 e 12 mostram os resultados das áreas de aço calculadas de acordo com os momentos já demonstrados anteriormente. Esses momentos foram majorados por um fator de 1,4.

**Tabela 11** - Áreas de aço positiva longitudinal calculada dos lances

Amostra	$M_d$ (kNm)	$A^+_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	Detalhamento
MCEC12-1	46,09	15,70	∅12,5 c/9
MCEC14-1	48,69	12,08	∅12,5 c/10
MCEC16-1	51,30	10,23	∅12,5 c/12
MCEC12-2	46,09	15,70	∅12,5 c/9
MCEC14-2	48,68	12,08	∅12,5 c/10
MCEC16-2	51,28	10,22	∅12,5 c/12
MCEC12-3	15,41	4,22	∅8,0 c/11
MCEC14-3	16,24	3,56	∅8,0 c/14
MCEC16-3	17,08	3,13	∅8,0 c/16
MCEC12-4	36,12	11,24	∅12,5 c/10
MCEC14-4	35,14	8,23	∅10,0 c/9
MCEC16-4	33,71	6,42	∅10,0 c/12

Fonte: Autor, 2023

**Tabela 12** - Áreas de aço negativa longitudinal calculada dos patamares

Amostra	$M_d^-$ (kNm)	$A_{s,nec}^-$ (cm <sup>2</sup> )	Detalhamento
MCEC12-1	-	-	-
MCEC14-1	-	-	-
MCEC16-1	-	-	-
MCEC12-2	-	-	-
MCEC14-2	-	-	-
MCEC16-2	-	-	-
MCEC12-3	-31,70	9,55	∅10,0 c/10
MCEC14-3	-33,50	7,80	∅10,0 c/12
MCEC16-3	-35,87	6,87	∅10,0 c/13
MCEC12-4	-9,04	2,40	∅6,3 c/15
MCEC14-4	-12,32	2,67	∅6,3 c/13
MCEC16-4	-16,09	2,94	∅6,3 c/13

Fonte: Autor, 2023

Com os resultados presentes nas tabelas 11 e 12 é possível verificar que um aspecto comum a praticamente todos os modelos, o qual é a diminuição da área de aço calculada com o aumento da espessura da laje da escada. Apesar do aumento da carga com o incremento de peso próprio há uma diminuição da armadura devido ao crescimento da altura útil, o que faz com que haja uma redução do momento solicitante reduzido.

Essa redução da armadura com o aumento da espessura da laje só não acontece com os modelos com apoios semirrígidos visto que a variação da profundidade relativa da linha neutra é muito pequena e acaba não interferindo significativamente no cálculo da área de aço.

Quanto ao detalhamento, verifica-se que os modelos que apresentam uma rigidez maior, ou seja, representam melhor a realidade, fornecem valores dentro do padrão utilizados em escadas convencionais. Esse fator proporciona um dimensionamento mais econômico em relação aos modelos simplesmente apoiados, que apresentaram valores elevados.

## 5. CONCLUSÕES

Com o desenvolver deste trabalho ficou evidente que a alteração no arranjo estrutural do modelo da escada resulta na alteração dos esforços internos, deslocamentos

e armaduras distintas para cada modelo. Também notou-se que há características específicas para cada um dos modelos e outras que são comuns a modelos distintos. Dessa forma, com a análise dos momentos fletores, forças cortantes, deslocamentos e áreas de aço das armaduras, formulam-se algumas conclusões provenientes dessa pesquisa.

Quanto aos momentos fletores, verificou-se que os modelos MCEC-1 e MCEC-2 apresentaram valores e comportamentos semelhantes, uma vez que a única alteração entre os modelos é uma restrição ao deslocamento horizontal. Estes modelos não apresentaram momentos negativos, porém foram os que tiveram maiores valores de momentos positivos. Já nos modelos MCEC-3 e MCEC-4 surgiram momentos fletores negativos nos apoios, em que o modelo com apoios semirrígidos apresentaram valores menores nos apoios e maiores nas outras regiões analisadas. Os modelos completamente engastados, por terem uma grande rigidez nos apoios resultam em valores de momentos negativos altos e baixos valores de momentos positivos.

Quando se analisa as variações percentuais com a mudança do arranjo dos apoios, constatou-se que na região do lance, há uma variação negativa de 91% ao mudar os apoios do modelo do tipo 1 para os apoios engastados, o que faz diminuir bastante a área de aço, em compensação haverá armaduras negativas. Quando ocorre a alteração do modelo do tipo 1 para o do tipo 4, a redução dos momentos positivos é menor em relação aos modelos engastados, mas os momentos negativos são muito inferiores a este modelo.

Um fator que ocorreu apenas nos modelos MCEC-4 foi a redução dos momentos positivos com o aumento da espessura da laje da escada, fato esse que ocorreu devido a indução do aumento do momento negativos no apoio com o incremento nas constantes elásticas das molas.

No que se refere às forças cortantes, observou-se que, assim como nos momentos fletores, os modelos MCEC-1 e MCEC-2 tiveram valores e variações próximas. O modelo engastado apresentou os maiores esforços cortantes e o modelo semirrígido teve os menores valores nos apoios inferior e superior e no apoio intermediário obteve valores próximos aos dois primeiros modelos.

Na análise dos deslocamentos, ficou claro que quanto maior a rigidez dos apoios menor é o valor da flecha. Além disso, com o aumento da espessura da laje houve uma redução da flecha, visto que a rigidez desta também cresceu. Com a mudança do apoios

do modelo do tipo 1 para os modelos do tipo 3 houve uma variação na faixa de 80%, sendo este o modelo que apresentou as menores flechas.

Por último, a análise das áreas de aço da escada mostrou que com o aumento da espessura da laje há uma redução da área de aço em todos os modelos, exceto nos patamares dos modelos com apoios semirrígidos. Observou-se também que os modelos engastados foram os que apresentaram menores áreas de armadura positiva e maiores áreas de armadura negativa. Além disso, os modelos apenas apoiados foram os que tiveram as mais elevadas áreas de armaduras positivas. Isso favorece a ideia de que adotar modelos mais próximos à realidade, ou seja, que consideram um maior rigidez dos apoios pode ser favorável do ponto de vista econômico.

Sendo assim, cabe ao projetista analisar os fatores prós e contras de cada modelo e escolher qual o modelo mais adequado para seu projeto, verificando as condições de segurança e economia, uma vez que cada modelo terá pontos positivos e negativos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2023. 238 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980. 66 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 9050: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaço e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro, 2020. 161 p.

ARAÚJO, J. M. Curso de concreto armado: Volume 1. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. Curso de concreto armado: Volume 4. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014.

CARNEIRO, F.; MARTINS, J. G. Análise de Estruturas - Contraventamento de Edifícios. Série Estruturas. 1ª Ed.: UFP, Porto – Portugal, 2008.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado. 4. ed. São Carlos: Edufscar, 2022. 415 p.

CUNHA, A. J. P.; SOUZA, V. C. M. Lajes em concreto armado e protendido. 1. ed. Niterói: EDUFF, 1994.

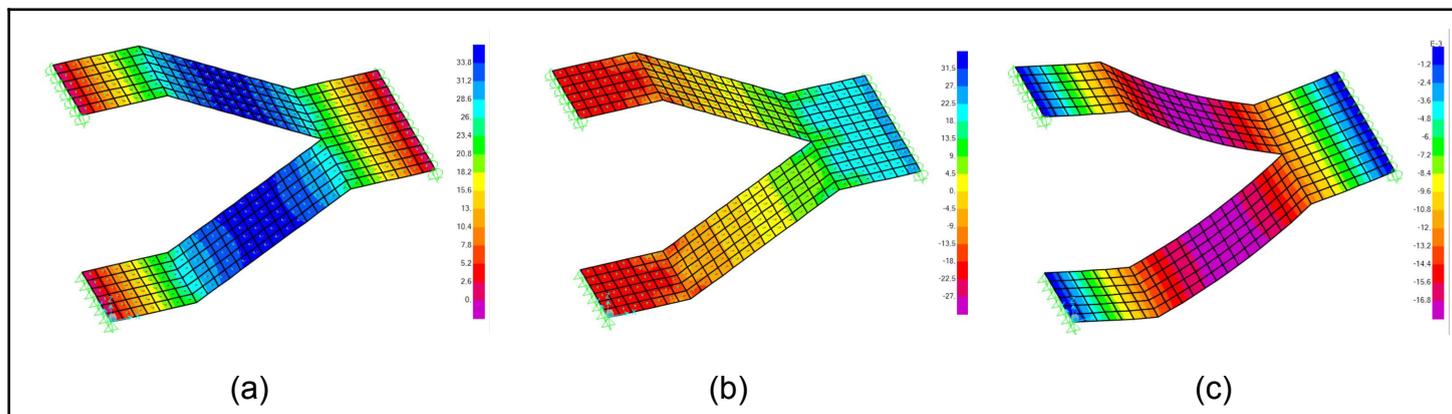
MARTINS, G. F. Otimização de esforços em estruturas: influência da localização e rigidez dos apoios. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2012.

OLIVEIRA, C. R. Considerações sobre Modelos Estruturais. Ciência et Praxis. v. 1, n. 1, 2008.

SORIANO, H. L. Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 499 p.

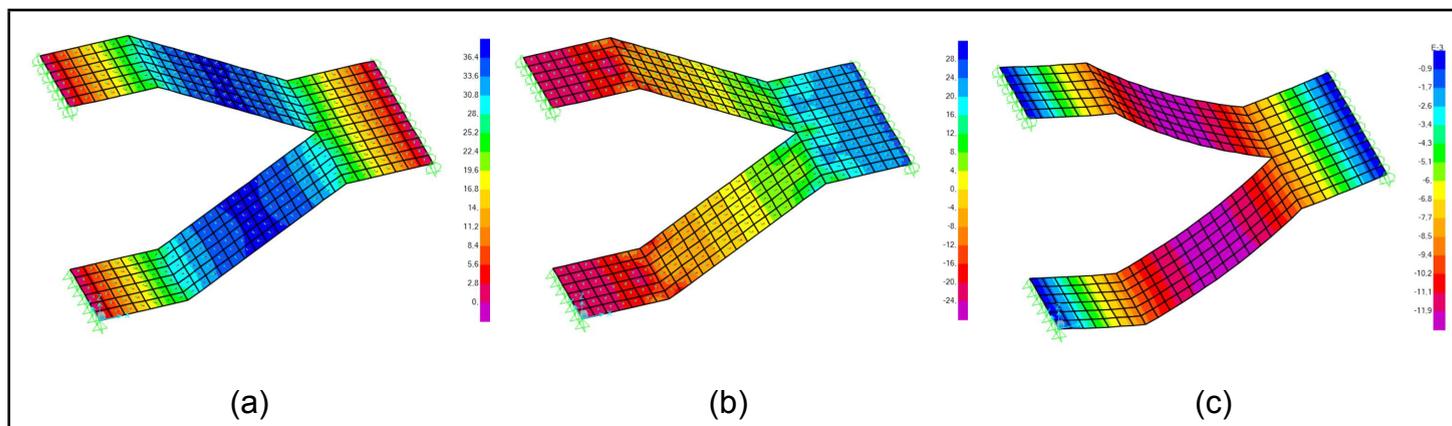
## ANEXO A - RESULTADOS DOS ESFORÇOS INTERNO E DESLOCAMENTOS FORNECIDOS PELO SAP2000

**Figura 7 - MCEC14-1:** (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)



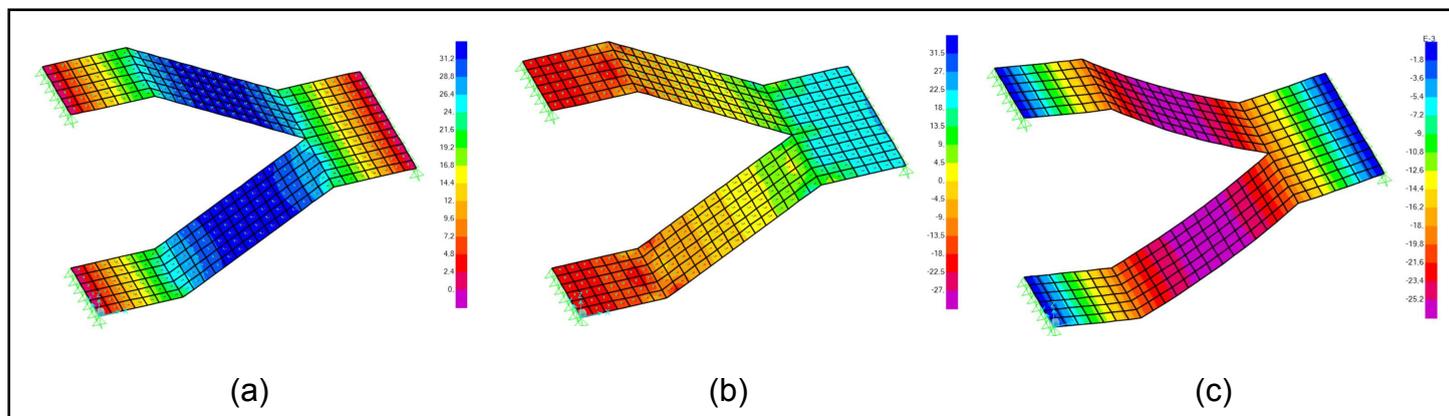
Fonte: Autor, 2023

**Figura 8 - MCEC16-1:** (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)



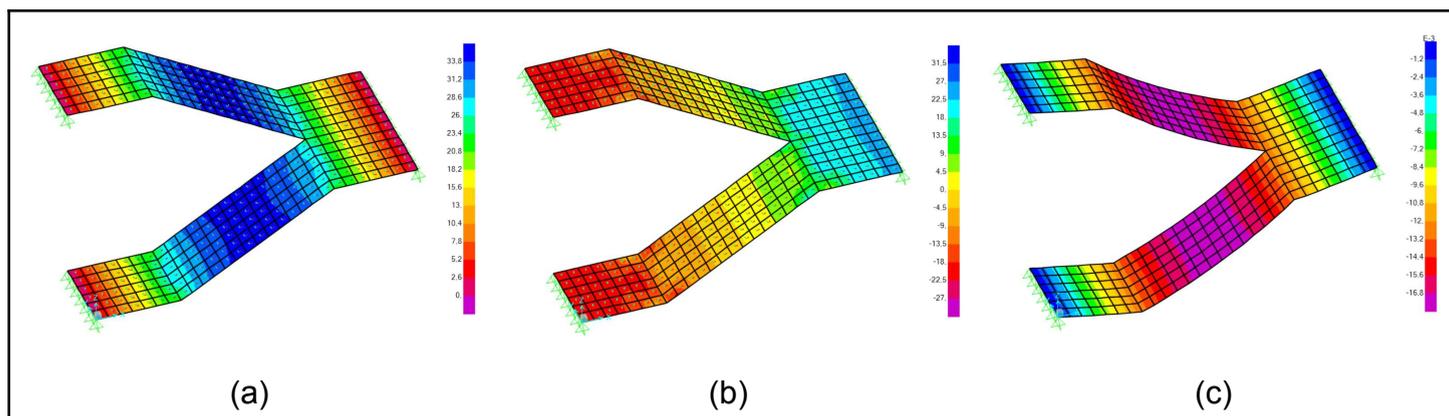
Fonte: Autor, 2023

**Figura 9 - MCEC12-2: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)**



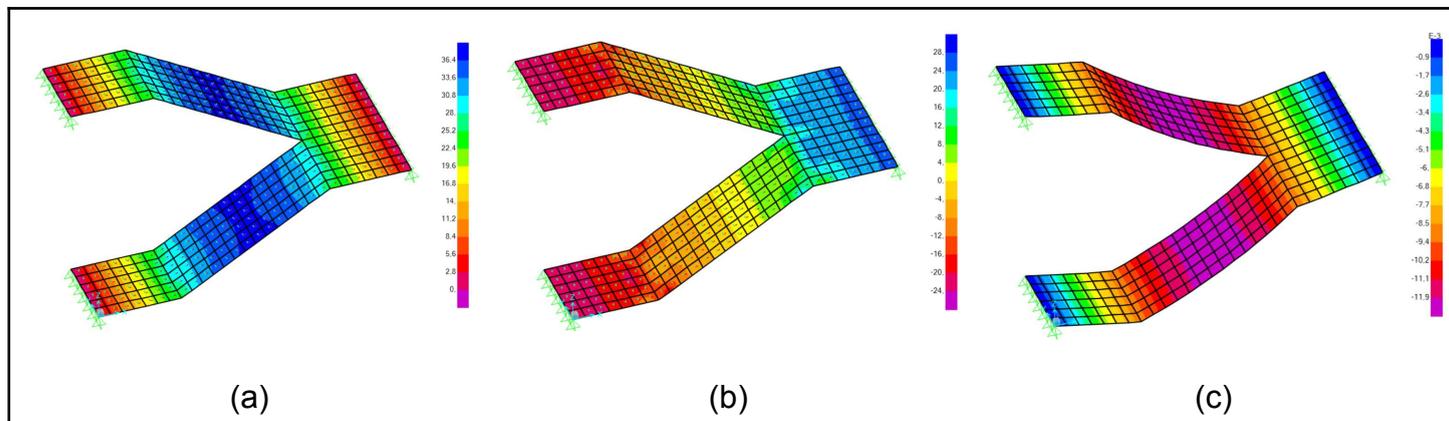
Fonte: Autor, 2023

**Figura 10 -MCEC14-2: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)**



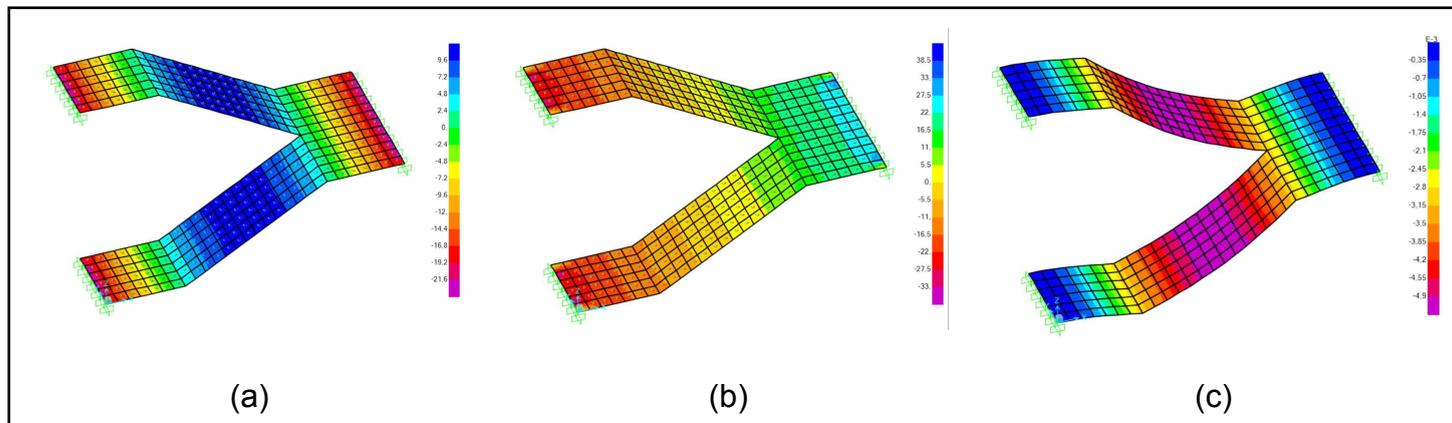
Fonte: Autor, 2023

**Figura 11 - MCEC16-2: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)**



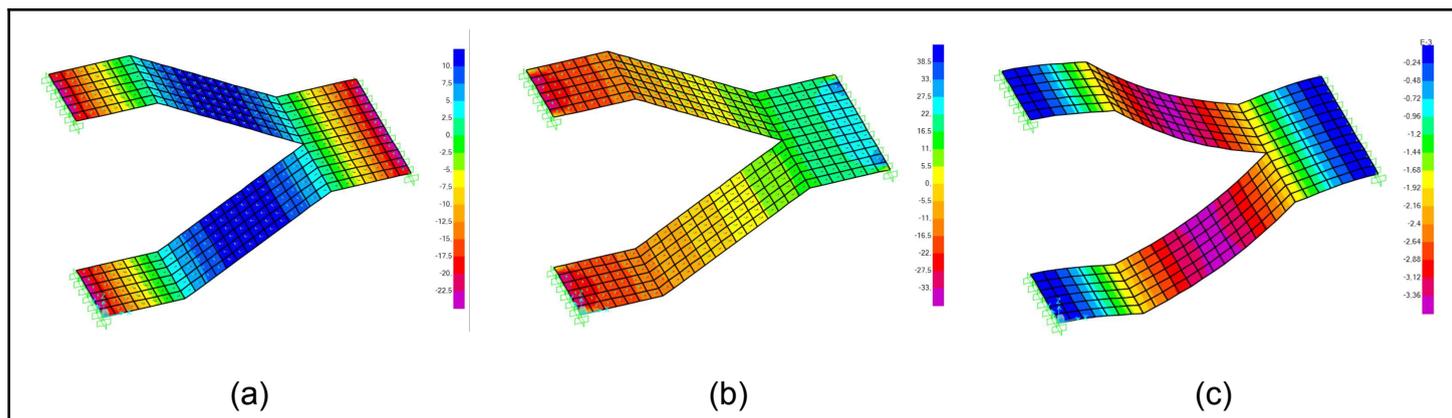
Fonte: Autor, 2023

**Figura 12 - MCEC12-3: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)**



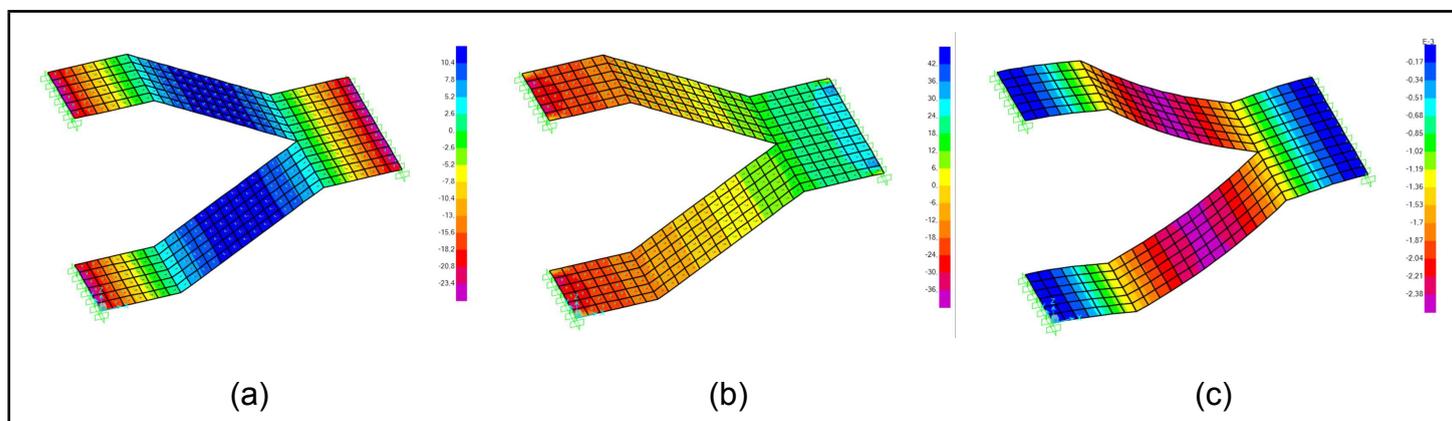
Fonte: Autor, 2023

**Figura 13 - MCEC14-3: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)**



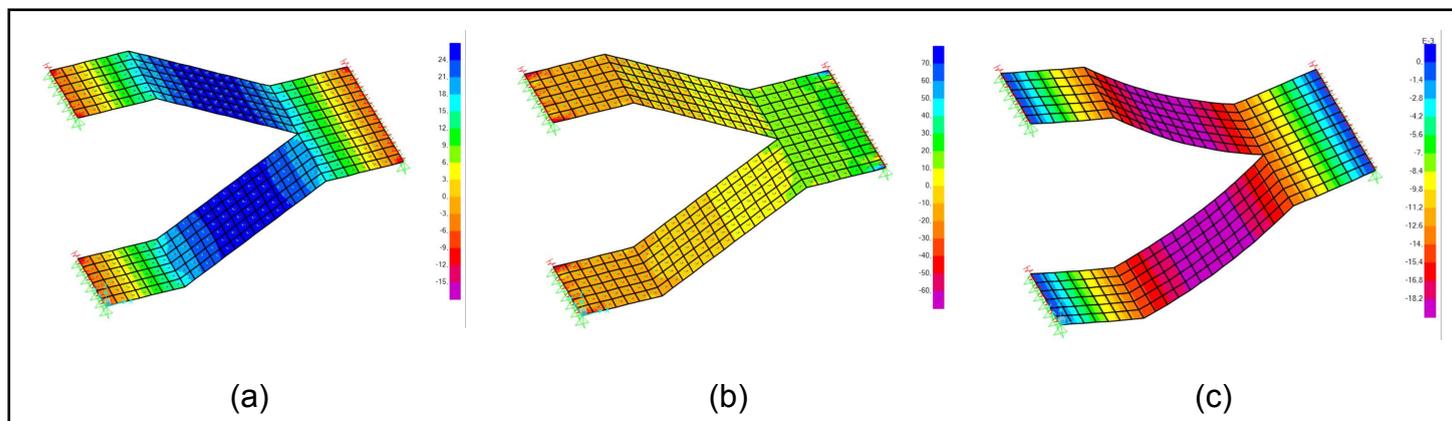
Fonte: Autor, 2023

**Figura 14 - MCEC16-3: (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)**



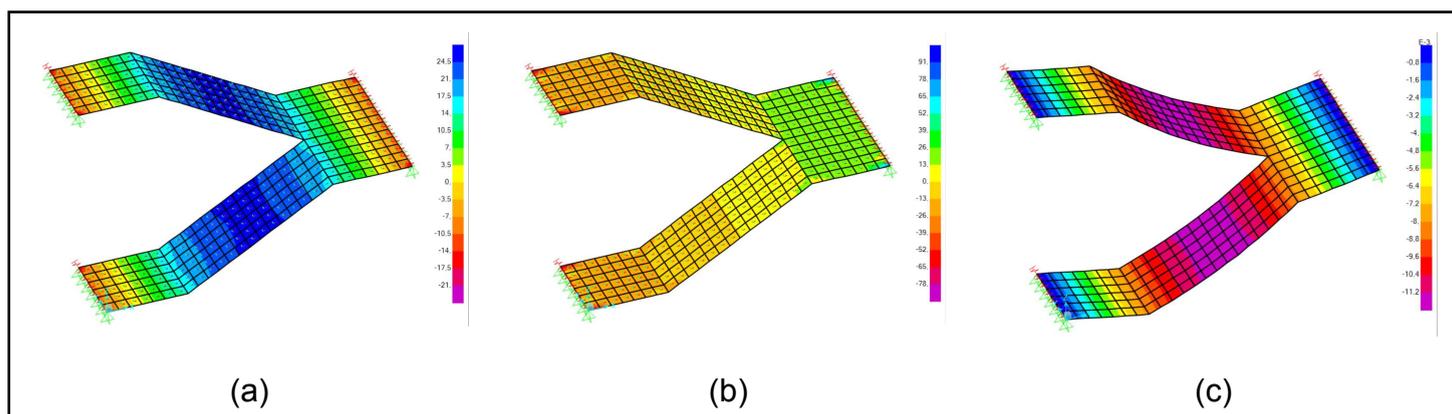
Fonte: Autor, 2023

**Figura 15 - MCEC12-4:** (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)



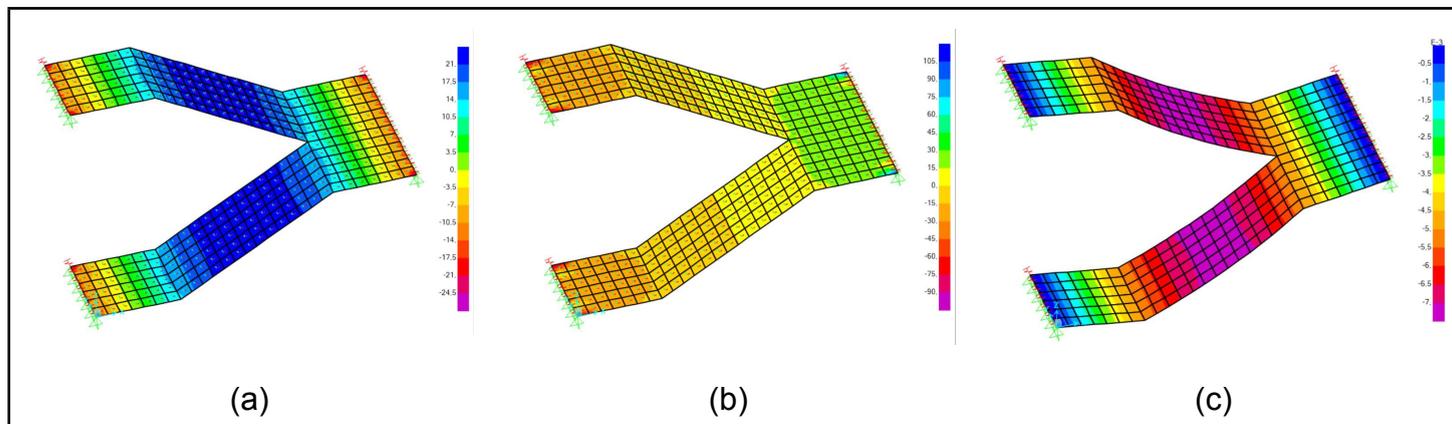
Fonte: Autor, 2023

**Figura 16 - MCEC14-4:** (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)



Fonte: Autor, 2023

**Figura 17 - MCEC16-4:** (a) momento fletor (kN.m), (b) força cortante (kN) e (c) deslocamento (mm)



Fonte: Autor, 2023

## ANEXO B - PROCEDIMENTO DE DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS DA ESCADA

O procedimento de dimensionamento das armaduras da escada consistiu em determinar um trecho de 1 metro de largura da laje para dimensionar de forma análoga ao de uma viga. Para os cálculos, foram utilizadas as equações de Araújo (2014) que estão apresentadas a seguir, tomando como exemplo o modelo MCEC14-1.

I - O momento fletor de cálculo “ $M_d$ ” (equação 13) foi obtido pela aplicação do fator de majoração ( $\gamma_f = 1,4$ ) ao momento fletor característico “ $M_k$ ” encontrado no *software*.

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k \quad (13)$$

$$M_d = 1,4 * 34,78 \text{ kNm/m}$$

$$M_d = 48,69 \text{ kNm/m}$$

II - A altura útil da seção “ $d$ ” é a distância da borda mais comprimida da laje até o centro de gravidade da armadura. Para o cálculo da altura útil (equação 14) da seção foi adotado inicialmente uma armadura de 10 mm de diâmetro e um cobrimento “ $c$ ” de 2,5 cm.

$$d = h - c - \frac{\phi_{\text{Ladotado}}}{2} \quad (14)$$

$$d = 14 - 2,5 - \frac{1}{2} = 11,0 \text{ cm}$$

III - O momento solicitante reduzido “ $\mu$ ” (equação 15) é o próximo parâmetro a ser calculado.

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot 0,85 \cdot f_{cd}} \quad (15)$$

$$\mu = \frac{48,69}{1 \text{ m} \cdot (0,11 \text{ cm})^2 \cdot 0,85 \cdot \frac{2,5 \text{ kN/cm}^2}{1,4}} = 0,2651$$

Com esse parâmetro definido, calcula-se a área de armadura longitudinal “ $A_s$ ” (equação 16)

$$A_s = \frac{0,85 \cdot b \cdot \varepsilon \cdot d \cdot 0,8 \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \quad (16)$$

onde  $\varepsilon$  é a profundidade relativa da linha neutra calculada pela equação 17.

$$\varepsilon = 1,25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (17)$$

Portanto, para o modelo em questão têm-se que:

$$\varepsilon = 1,25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,2651}) = 0,3933$$
$$A_s = \frac{0,85 \cdot (100 \text{ cm}) \cdot 0,3933 \cdot (11 \text{ cm}) \cdot 0,8 \cdot \frac{2,5 \text{ kN/cm}^2}{1,4}}{\frac{50 \text{ kN/cm}^2}{1,15}} = 12,08 \text{ cm}^2$$

IV - A área de aço calculada deve ser comparada com a área de aço mínimo (equação 18) formulada na NBR 6118 (ABNT, 2023),

$$A_{s,min} = \rho_{s,min} \cdot A_c \quad (18)$$

onde  $\rho_{s,min}$  é a taxa mínima de aço e  $A_c$  é a área de concreto. Logo, para o modelo exemplificado temos que:

$$A_{s,min} = \frac{0,150}{100} \cdot 100 \cdot 14 = 2,10 \text{ cm}^2 < A_s$$