



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**MARIA SUÊD MACÊDO ASSIS**

**SOBRE “A EXISTÊNCIA” DOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS: O QUE  
SABEMOS?**

**CUITÉ – PB**

**2023**

**MARIA SUÊD MACÊDO ASSIS**

**SOBRE “A EXISTÊNCIA” DOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS: O QUE  
SABEMOS?**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Cuité, como exigência parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros

CUITÉ – PB

2023

A848s Assis, Maria Suêd Macêdo.

Sobre "a existência" dos monopolos magnéticos: o que sabemos? /  
Maria Suêd Macêdo Assis. - Cuité, 2023.  
32 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Universidade  
Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2023.  
"Orientação: Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros".

Referências.

1. Eletromagnetismo. 2. Monopolos magnéticos. 3. Eletromagnetismo -  
aula - física. 4. Equações de Maxwell. 5. Mecânica quântica I. Medeiros,  
Fábio Ferreira de. II. Título.

CDU 538.3(043)

MARIA SUÊD MACÊDO ASSIS

**SOBRE “A EXISTÊNCIA” DOS MONOPOLOS MAGNÉTICOS: O QUE SABEMOS?**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Campina Grande, Campus Cuité, como exigência parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Aprovado em: 09 / 11 / 2023

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros – UFCG  
(Orientador)

---

Prof. MSc. Pablo José Lima Soares – ECITEEFM José Rolderick de Oliveira  
(Examinador Externo)

---

Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas – UFCG  
(Examinador Interno)

CUITÉ – PB  
2023

"Ninguém que é curioso é idiota. As pessoas que não fazem perguntas permanecem ignorantes para o resto de suas vidas."

(Neil deGrasse Tyson)

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho aos meus avós Marlita Tavares (in memorian) e Raimundo Luiz (in memorian), por todo o amor e carinho que me deram e por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida. Vocês foram e ainda são a razão pela qual não desisti, toda uma vida ainda seria pouco para agradecer a vocês. Jamais esquecerei de vocês e dedicarei essa e outras conquistas a vocês que hoje são as estrelas que iluminam o meu céu. Meu eterno amor e gratidão por todo o ensinamento de vida e principalmente pelo apoio quanto a minha formação.*

## **AGRADECIMENTOS**

Queria agradecer, primeiramente, a Deus, que é a luz da minha vida e que me deu força e coragem para continuar mesmo quando eu queria desistir. Agradecer a mim por todo meu esforço e por toda a batalha, madrugadas, choros e perdas que enfrentei durante todo este curso.

Aos meus pais Silvano e Roseane, e ao meu irmão Raldeck por todo apoio e que não mediram esforços para a realização de um sonho. E aos demais familiares que me apoiaram, em especial a minha avó Sebastiana e minha tia Sueli que sempre abriram as portas para me acolher, aos meus tios Joza e Voni, a minha comadre Josiedna e a Josiel que sempre me apoiaram em todos os momentos.

Aos excelentes profissionais no qual tive a oportunidade de aprender cada vez mais e crescer profissionalmente, em especial: ao meu orientador Dr. Fábio Ferreira Medeiros, por todo companheirismo, paciência e atenção ao longo do curso e durante a construção deste trabalho; Dr. Joseclécio Dutra Dantas, por todos os ensinamentos durante o curso, sua tranquilidade, organização e por aceitar o convite por fazer parte desta banca; Dr. Nilton Frazão, por todos os conselhos, por acreditar no meu potencial e pelas brincadeiras; MSc. Pablo José Lima Soares, por seu profissionalismo, pela compreensão e por aceitar fazer parte desta banca; Dr. Danyel Judson, por todo seu conhecimento. Agradeço a todos vocês que tem todo o meu respeito e admiração.

Aos meus amigos que convivi ao longo desta caminhada, em especial a Andriele, Ana Clara, Ysak, Ronayde, Karla, Vanderson, Ana Paula e Layane que me alegraram e me deram apoio nos meus dias difíceis em que eu pensei em desistir da vida e do curso. A minha mãe de coração Cicera Alves (in memorian) e a minha terceira avó Joana Alves (in memorian). E aos demais: Geíze, Tayrone, Eloíza, Tácila, Silas, Fernando, Weverton, Carlito, Dalva (in memorian), Eugênio, e outros que estiveram comigo.

Todos aqui citados tem a minha eterna gratidão, obrigada por todos os conselhos, todo o apoio, companheirismo, por trazer alegria para minha vida e por me acompanharem nos momentos bons e ruins. Cada um dos que estão aqui citados fazem parte desta história, toda e qualquer palavra dita ainda não seria suficiente para mostrar a minha gratidão por aqueles que fizeram muito por mim e que me ajudaram a levantar depois de inúmeras quedas.

## RESUMO

Em geral, a existência dos monopolos magnéticos é uma discussão “marginal” nas aulas de eletromagnetismo nos cursos de graduação em Física. Assim, este trabalho pretendeu a partir da bibliografia básica, utilizada em cursos de graduação em Física, descrever/apresentar este tema numa perspectiva histórica e da sua formulação matemática em termos físicos. Trata-se de um tema que permeia a Física, desde as equações de Maxwell até a Mecânica Quântica. Em 1931, Paul Dirac estabeleceu este problema com base na simetria das equações de Maxwell do eletromagnetismo, sugerindo que o simples fato de existir cargas magnéticas (os monopolos magnéticos) explicaria o porquê de a carga elétrica ser discretizada, ou seja, qualquer valor de carga elétrica aparece como múltiplo de uma carga elementar que é igual à carga do elétron (em valor absoluto). Este é um dos enigmas ainda não resolvidos da Física, por que a carga elétrica é quantizada? Como exposto anteriormente, vamos explorar este tema a partir de um levantamento bibliográfico que compreende descrever como a bibliografia básica de eletromagnetismo utilizada mais comumente nos cursos de graduação em Física expõe esta questão; e concomitantemente, vamos pesquisar na literatura mais específica, que são artigos científicos da área, como este assunto é abordado e quais são as conclusões que chegaram. Estamos longe de um trabalho que signifique exaurir o conteúdo e a Física produzida sobre este tema; não temos a competência suficiente e nem é este o nosso objetivo, mas unicamente produzir um material que sistematize as principais contribuições de livros mais populares em Cursos de Física.

**Palavras-Chave:** monopolos magnéticos, eletromagnetismo, bibliografia básica.

## ABSTRACT

In general, the existence of magnetic monopoles is a “marginal” discussion in electromagnetism classes in undergraduate Physics courses. Thus, this work intends, based on basic bibliography, used in undergraduate Physics courses, to describe/present this topic from a historical perspective and its mathematical formulation in physical terms. This is a theme that permeates Physics, from Maxwell's equations to Quantum Mechanics. In 1931, Paul Dirac established this problem based on the symmetry of Maxwell's equations of electromagnetism, suggesting that the simple fact that there are magnetic charges (magnetic monopoles) would explain why the electric charge is discretized, that is, any value of charge Electricity appears as a multiple of an elementary charge that is equal to the charge of the electron (in absolute value). This is one of the still unsolved enigmas in Physics, why is electric charge quantized? As previously stated, we will explore this topic based on a bibliographical survey that includes describing how the basic bibliography of electromagnetism used most commonly in undergraduate Physics courses exposes this issue; and at the same time, we will research more specific literature, which are scientific articles in the area, how this subject is approached and what conclusions were reached. We are far from a work that means exhausting the content and Physics produced on this topic; We do not have sufficient competence and this is not our objective, but simply to produce material that systematizes the main contributions of the most popular books in Physics Courses.

**Keywords:** magnetic monopoles, electromagnetism, basic bibliography.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	3
2.	METODOLOGIA.....	5
3.	BREVE HISTÓRIA DO MAGNETISMO .....	6
4.	EQUAÇÕES DE MAXWELL .....	9
4.1.	Breve biografia da vida de James Clerk Maxwell .....	9
4.2.	Lei de Gauss para a Eletrostática .....	10
4.3.	Lei de Gauss para a Magnetostática .....	11
4.4.	Lei de Indução de Faraday .....	12
4.5.	Lei de Ampère-Maxwell .....	13
4.6.	Equações de Onda.....	14
5.	BIBLIOGRAFIAS BÁSICAS: O que descrevem? .....	17
6.	EQUAÇÕES DE MAXWELL MODIFICADAS .....	25
6.1.	Lei das forças com as cargas magnéticas.....	25
6.2.	Equações de Maxwell com as cargas magnéticas.....	25
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	29
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	31

## 1. INTRODUÇÃO

A natureza, em geral, busca a simetria em suas relações. No Eletromagnetismo é um pouco diferente. Se observarmos a Eletricidade e o Magnetismo separados, temos que, historicamente, a eletricidade advém dos estudos das propriedades do âmbar de atração elétrica, já o Magnetismo advém das propriedades da magnetita de atração magnética. Era previsto que também existisse essa simetria sobre as cargas. Para a Eletricidade, temos as cargas elétricas; e para o Magnetismo, teríamos então as cargas magnéticas.

Por algum motivo, a natureza seguiu de forma assimétrica no caso das cargas. Até hoje não foi encontrado nenhuma evidência experimental de que as cargas magnéticas existam. Nos livros básicos, utilizados nos cursos de Física, este assunto não é abordado com a devida importância, tendo em vista que a existência dos monopolos magnéticos mudaria toda a teoria do Eletromagnetismo. Mas o objetivo deste trabalho não é encontrar evidências sobre a existência dos monopolos magnéticos.

Este trabalho é fruto de um projeto de iniciação científica no Programa Institucional Voluntário de Iniciação Científica - PIVIC 2022-2023, este trabalho foi importante porque permitiu aprofundar meus conhecimentos em Física Teórica, em particular, sobre Eletromagnetismo. Temos por objetivo discutir o legado histórico-científico sobre as discussões a respeito da existência dos monopolos magnéticos através de bibliografias básicas.

Com isto, vamos apresentar a forma como este assunto é abordado nos livros e suas formulações matemáticas, traçando uma linha temporal com os personagens principais e fatos que marcaram essas discussões sobre a existência das cargas magnéticas, com o intuito de fornecer um material complementar para os professores de Física em suas aulas sobre Eletromagnetismo.

Este trabalho faz uma abordagem sobre o Eletromagnetismo, trazendo a questão dos monopolos magnéticos que pouco é falada nos cursos de Eletromagnetismo. No segundo capítulo, é descrito como ocorreu a metodologia para a realização deste trabalho e de onde esse tema surgiu. No terceiro capítulo vamos apresentar alguns dos fatos importantes que compõem a história do Magnetismo, desde as primeiras pesquisas sobre o ímã natural, até as formulações matemáticas

de Maxwell e todos os colaboradores que avançaram nas pesquisas e desenvolveram toda a teoria do Eletromagnetismo.

No quarto capítulo, iremos mostrar as mudanças que Maxwell (1831-1879) introduziu na teoria clássica do Eletromagnetismo, através das suas formulações matemáticas, que são elas a lei de Gauss para a Eletrostática e Magnetostática, a lei de Indução de Faraday e a alteração na Lei de Ampère, que é conhecida pela Lei de Ampère-Maxwell, através das equações de Maxwell é possível encontrar as equações de onda dos campos Elétrico e Magnético.

No quinto capítulo, será apresentada a questão das cargas magnéticas, com base em pesquisas bibliográficas, vamos citar os comentários sobre os monopolos magnéticos encontrados nos livros básicos de Eletromagnetismo utilizados nos cursos de Física.

No sexto capítulo, iremos mostrar como as equações seriam modificadas de forma que irá conter a presença das cargas magnéticas. Será apresentado a maneira que a equação de força, a equação do campo magnético e as formulações matemáticas de Maxwell ficariam com a presença das cargas magnéticas, além de abordar um dos problemas que os cientistas utilizam nos laboratórios na busca do monopolo magnético.

No sétimo capítulo, iremos apresentar as conclusões que foram obtidas através das pesquisas bibliográficas e das modificações feitas nas equações de Maxwell caso exista o monopolo magnético. Por fim, no oitavo capítulo, temos todas as referências bibliográficas utilizadas nas pesquisas para a realização deste trabalho.

## **2. METODOLOGIA**

Esta monografia se trata de uma pesquisa que não existe no acervo acadêmica do curso, e que cujo tema não é comumente investigado na graduação. Ela pretende reunir as principais ideias e contribuições (ou pelo menos as fontes bibliográficas mais comuns) sobre a (in)existência dos monopolos magnéticos.

Para que essa pesquisa fosse realizada, a metodologia compreendeu nas consultas bibliográficas às principais obras utilizadas nos cursos de graduação em Física. Realizando um recorte de parte do texto das obras que tratam exclusivamente sobre os monopolos magnéticos, investigamos como este tema é abordado pelos autores. Portanto, este trabalho é resultado de uma pesquisa qualitativa-descritiva com base em recursos bibliográficos e inspirada em meu interesse acadêmico pelo tema.

### 3. BREVE HISTÓRIA DO MAGNETISMO

Como popularmente é divulgado, a Eletricidade está inicialmente ligada à busca do entendimento das propriedades do âmbar, e o Magnetismo advém inicialmente da busca do entendimento das propriedades magnéticas de uma pedra chamada de magnetita, que segundo pesquisadores, foi encontrada numa cidade da Grécia chamada Magnésia, onde se encontram depósitos de óxido de ferro. Do ponto de vista histórico, os fenômenos magnéticos são conhecidos e estudados há pelo menos tanto tempo quanto os fenômenos elétricos (JACKSON, 1962).

O mineral magnetita age como um ímã natural, ele tem propriedades de atrair o ferro. Essas propriedades foram observadas e utilizadas por filósofos e cientistas e um dos primeiros usos foi como ímã natural na confecção das primeiras bússolas. Portanto, os minerais chamados de magnetitas eram conhecidos nos tempos antigos, assim como, a bússola do marinheiro é uma invenção muito antiga (JACKSON, 1962).

Os primeiros a utilizarem o ímã natural foram os chineses. Humboldt (1769-1859) afirma, além disso, que, ainda no século III da nossa era, os chineses navegavam em navios no oceano Índico sob a direção de agulhas magnéticas, apontando para o sul (MOTTELAY, 1922). E nas páginas de seu livro "Asie Centrale" ele fala que a direção do caminho que eles buscavam era através de indicações magnéticas. Entre os chineses, a aplicação da propriedade diretora de o ímã "no interior da Terra" parece ter precedido o uso da bússola no mar (HUMBOLDT, 1843). O mesmo também cita em seu livro a "bússola aquática".

Para evitar o atrito nos pivôs e dar um movimento mais livre as agulhas, imaginamos fazê-las nadar na água introduzindo-as em tubos de cana muito finos: esta era a bússola aquática dos chineses, o peixe magnético dos antigos pilotos indianos (HUMBOLDT, p. 42 1843).

Humboldt mostrou quais vantagens isso significa para a orientação topográfica, bem como o conhecimento que a aplicação precoce da agulha magnética deu aos geógrafos chineses sobre os gregos e romanos, para os quais, por exemplo, até mesmo a verdadeira direção dos Pirenéus e dos Apeninos sempre permaneceu desconhecida (MOTTELAY, 1922). Posteriormente, William Gilbert (1544–1603) observou que a atração magnética não podia ser barrada pela umidade do ar.

Sobre a atração mútua entre o ímã e o ferro, ele acreditava que as propriedades magnéticas do ímã, embora de natureza imaterial, sempre ocupavam o espaço em sua volta e, com a aproximação do ferro, uma propriedade latente deste, era despertada, tendo lugar a atração; os ímãs criavam uma "esfera de influência" em torno deles (ROCHA, 2002).

Através de suas observações também percebeu que a Terra se comportava como uma esfera magnética, e ao realizar experiências com o ímã esférico, ele percebeu que a agulha magnética sempre apontava para os polos magnéticos da Terra. Um dos maiores conhecedores do ímã natural foi Pierre de Maricourt, ele foi um grande estudioso da magnetita e colaborador do Eletromagnetismo. Devido à uniformidade na sua composição e à compactação das suas partes mais internas, tal pedra é pesada e, portanto, mais valiosa (PIERRE, 1904). Sua força é conhecida pela atração vigorosa por uma grande massa de ferro (PIERRE, 1904).

Foi o engenheiro militar francês Pierre de Maricourt (Petrus Peregrinus) que é o responsável, inclusive, pela denominação de polos do magneto aos pontos de cruzamento das curvas traçadas com a ajuda de pequeninos pedaços de ferro, colocados sobre um ímã natural esférico. Em seu trabalho sobre o magnetismo (1269), Peregrinus compilou tudo que se sabia até então e agregou a isto suas próprias experiências e observações (ROCHA, 2002).

Petrus Peregrinus também foi o responsável em pôr em evidência a não existência dos monopolos magnéticos. Ele observou que não podia isolar os polos magnéticos. Porém, em 1931, Paul A. Dirac apresentou argumentos, com base na teoria quântica, sobre a existência dos monopolos magnéticos que simetrizaria as equações de Maxwell e explicaria a quantização da carga elétrica (GRIFFITHS, 2008).

O Magnetismo era associado com o conhecimento da magnetita, dos ímãs das agulhas magnéticas e do campo magnético terrestre. Porém, até esse tempo, a Eletricidade e o Magnetismo eram coisas distintas, foi então que Hans Christian Oersted (1777-1851), que durante uma palestra, onde fez um experimento com um fio paralelo à agulha da bússola, observou a deflexão da agulha. A agulha balançou amplamente e quando a corrente galvânica foi invertida, ela balançou do outro jeito (PURCELL, 2012). Logo após essa descoberta, o mundo científico iniciou diversos experimentos em laboratórios.

Em pouco tempo, Ampère, Faraday e outros haviam elaborado uma descrição essencialmente completa e exata da ação magnética das correntes elétricas. A maior descoberta de Faraday sobre a indução eletromagnética ocorreu menos de 12 anos após o experimento de Oersted. Nos dois séculos anteriores, desde a publicação em 1600 da grande obra de William Gilbert, *De Magnete*, a compreensão do homem sobre o magnetismo teve nem um pouco de avanço (PURCELL, et. al., p.237, 2012).

Foram essas descobertas que deram descrições e resultados muitos importantes para a teoria clássica do Eletromagnetismo. Formulada matematicamente por Maxwell no início da década de 1860, foi triunfantemente corroborada com a demonstração das ondas eletromagnéticas por Heinrich Hertz (1857-1894), em 1888

(PURCELL, 2012). A partir dessas descobertas experimentais que cresceu a teoria clássica completa do Eletromagnetismo.

Das forças fundamentais da natureza, a força eletromagnética é a única que é totalmente compreendida pelo ser humano e que possibilitou a construção de uma sociedade tecnológica. A sua compreensão foi o ponto de partida para a Era Moderna, de modo que as equações de Maxwell influenciaram drasticamente a vida dos seres humanos na forma como interagem com a sociedade e com o mundo (SOARES, 2017). Além disso, o Eletromagnetismo também faz parte da relatividade especial, em que Hendrik Lorentz (1853-1928) ao estudar a Eletrodinâmica das cargas em movimento chegou próximo a teoria de Albert Einstein (1879-1955).

## 4. EQUAÇÕES DE MAXWELL

### 4.1. Breve biografia de James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell foi um físico e matemático, nascido em Edimburgo, Escócia, no ano de 1831, e faleceu em Cambridge, Inglaterra, no ano de 1879.

Suas obras basearam suas Teorias Eletromagnéticas: desenvolveu os trabalhos de Michael Faraday, desenvolveu a teoria do campo eletromagnético e o seu livro sobre Eletricidade e Magnetismo. Ao longo de sua vida, a sua teoria dinâmica do Eletromagnetismo foi descrita em: *On Faraday's Lines of Force* (1856), *On Physical Lines of Force* (1861), *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1864) e no célebre livro *A Treatise on Electricity & Magnetism* (1873), no qual foi sintetizado de forma completa os conhecimentos do ramo da Eletricidade, do Magnetismo e da Óptica (SOARES, 2017). O fato das equações do Eletromagnetismo, atualmente intituladas por Equações de Maxwell, já estarem formuladas, não menospreza a sua colossal contribuição para o Eletromagnetismo. Suas contribuições não se restringiram apenas ao Eletromagnetismo, mas abrangem a Teoria Cinética dos Gases, a Termodinâmica, a Astronomia e o estudo das cores, entre outros (SOARES, 2017).

Ele desenvolveu um modelo dos fenômenos eletromagnéticos, usando conceitos que representavam a intensidade magnética e a corrente elétrica, depois mostrou que as ondas transversais se propagariam em termos das constantes fundamentais do Eletromagnetismo e que a luz poderia ser compreendida como ondas transversais eletromagnéticas no éter (meio hipotético que logo após foi comprovada a sua não existência). Maxwell buscava por similaridades parciais entre as leis de diferentes campos da ciência. E a sua descrença na ação à distância e sob influência da ideia das linhas de força de Faraday, o permitiram realizar analogias entre o Eletromagnetismo e os movimentos de um fluido, acreditando que os fenômenos eletromagnéticos se manifestavam em um meio hipotético, o éter (SOARES, 2017).

Maxwell escreveu 20 equações que descreviam os aspectos do campo eletromagnético em forma de componentes, foram os matemáticos Heaviside e Gibbs que formularam de forma vetorial reunindo as vinte equações em quatro equações. A formulação matemática moderna das equações de Maxwell que conhecemos atualmente foi proposta por Oliver Heaviside (1850-1925) e Willard Gibbs (1839-

1903), em 1884, onde as sintetizaram em quatro equações com uma representação mais simples, utilizando-se da notação vetorial (SOARES, 2017). As equações de Maxwell se referem as quatro equações que relacionam os vetores, descrevendo o campo eletromagnético com cargas e correntes, que são elas: Lei de Gauss para Eletrostática, Lei de Gauss para Magnetostática, Lei de Indução de Faraday e Lei de Ampère-Maxwell.

Vamos apresentar as equações de Maxwell para o leitor menos familiarizado com o Eletromagnetismo. Já que estamos abordando um tema que nasceu da observância da assimetria entre as equações de Maxwell da Eletrostática e da Magnetostática, é oportuno apresentá-las.

#### 4.2. Lei de Gauss para a Eletrostática

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície é dado pela integral de superfície fechada

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (1)$$

Se considerarmos uma carga pontual  $Q$  envolta por uma superfície esférica de raio  $r$ , temos que

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \oint_S da = E4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Chamamos esta superfície, de superfície gaussiana. Isto acontece para uma carga pontual, no caso de mais cargas, teremos a carga total  $Q$  (soma de todas as cargas) dentro da superfície. Portanto,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Essa é a Lei de Gauss para Eletrostática na forma integral.

Aplicando o teorema do divergente, podemos reescrever a equação (1) da lei de Gauss como

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV \quad (3)$$

No caso de uma distribuição de cargas de densidade  $\rho$ , a Lei de Gauss pode ser escrita

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (4)$$

Portanto, a lei de Gauss se tornaria

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (5)$$

Isto é válido para qualquer volume, logo os integrandos da equação (5) devem ser iguais, portanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Essa é a Lei de Gauss para a Eletrostática na forma diferencial.

### 4.3. Lei de Gauss para a Magnetostática

O fluxo do campo através de uma superfície é dado pela integral de superfície. No caso da Lei de Gauss, a superfície é fechada. No caso do campo magnético, o fluxo magnético total que passa por uma superfície fechada é zero. Portanto, a Lei de Gauss para Magnetostática na forma integral é

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (7)$$

A lei de Gauss para campos magnéticos surge diretamente da falta de polos magnéticos isolados (“monopolos magnéticos”) na natureza. Se os polos individuais existissem, eles serviriam como fontes e sumidouros das linhas de campo magnético, assim como a carga elétrica faz para linhas de campo elétrico. Nesse caso, encerrando um único polo magnético dentro de uma superfície fechada produziria fluxo diferente de zero através da superfície (exatamente como você pode produzir um fluxo diferente de zero envolvendo uma carga elétrica) (FLEISCH, 2008).

Aplicando o teorema do divergente, podemos reescrever a equação (7) da lei de Gauss como

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV \quad (8)$$

A equação (8), torna-se então

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0 \quad (9)$$

Isto é válido para qualquer volume, logo os integrandos da equação (9) devem ser iguais, portanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10)$$

Esta é a Lei de Gauss para a Magnetostática na forma diferencial.

#### 4.4. Lei de Indução de Faraday

Em 1831, Faraday fez uma série de experimentos que consistiu em passar uma espira por um campo magnético, depois ele moveu o ímã em sentido contrário com a espira em repouso; em outro experimento, ele alterou a intensidade do campo, mantendo a espira e o ímã em repouso. Essa descoberta se torna ainda mais útil quando estendida à afirmação geral de que uma mudança do campo magnético produz um campo elétrico. Tais campos elétricos “induzidos” são muito diferentes dos campos produzidos por carga elétrica, e a Lei da Indução de Faraday é a chave para compreender seu comportamento (FLEISCH, 2008).

Os trabalhos de Faraday levaram ele a descobrir o fenômeno da indução eletromagnética. Modernamente, a lei da indução de Faraday é representada como:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (11)$$

Com estas experiências, Faraday conclui que um campo elétrico é induzido pela variação de um campo magnético. Pela definição de força eletromotriz, temos

$$\varepsilon = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

Em que  $\vec{f}$  é a força que move as cargas, como a força se relaciona com o campo elétrico induzido, então a equação (12) se torna

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

Como sabemos qual a expressão do fluxo magnético, podemos concluir que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (14)$$

Esta é a Lei de Indução de Faraday na forma integral. Utilizando o teorema de Stokes no lado esquerdo da equação (14), temos

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (15)$$

Para isso acontecer os integrandos da equação (15) tem que ser iguais, portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16)$$

E essa é a Lei de Indução de Faraday na forma diferencial.

#### 4.5. Lei de Ampère-Maxwell

A Lei de Ampère na forma integral:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (17)$$

A lei de Ampère estava incompleta, pois faltava um termo para campos que dependem do tempo. Além disso, do mesmo modo que um campo magnético variável induz um campo elétrico, por analogia, é possível que um campo elétrico variável também induza um campo magnético; por isso, faz-se necessário um componente que dependa do tempo. Vemos que campos magnéticos variáveis no tempo produzem campos elétricos induzidos, mas não há na Lei de Ampère um termo relacionando campos elétricos variáveis com a possível produção de campos magnéticos induzidos (MACHADO, 2005). É sugerido então, um fator dependente do tempo.

Temos então que a corrente de deslocamento é

$$I_D = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (18)$$

Definimos a densidade da corrente de deslocamento como

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (19)$$

Essa densidade de corrente consegue resolver o paradoxo do problema do capacitor, que consiste em dois capacitores em paralelo isolados, em que um está inicialmente carregado. Estes estão ligados por uma chave, e ao fechar a chave nota-se que a energia eletrostática final é menor. Este paradoxo aparece por causa do fato de que a carga está se acumulando no capacitor, o que faz com que a corrente não seja uma corrente estacionária (MACHADO, 2005). Com isto, adicionando o fator da corrente na lei de Ampère, para termos a corrente total, chegamos na equação

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{Tot} = \mu_0 (I + I_D)$$

À medida que a carga se acumula no capacitor, ocorre a produção de um campo elétrico entre as suas placas, e esse campo elétrico é variável no tempo (MACHADO, 2005). Portanto com a correção de Maxwell, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (20)$$

Esta é a Lei de Ampère-Maxwell na forma integral. Para encontrar a forma diferencial, vamos utilizar a lei de Ampère na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (21)$$

Novamente, utilizando a densidade de corrente de deslocamento total

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{Tot} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (22)$$

Esta é a Lei de Ampère-Maxwell na forma diferencial. Com as quatro equações de Maxwell nas formas integrais e diferenciais, podemos encontrar as equações de onda dos campos elétricos e magnéticos.

#### 4.6. Equações de Onda

As equações de Maxwell mostram que quando não há carga ou corrente:

- i)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0;$
- ii)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0;$
- iii)  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$
- iv)  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$

Maxwell percebeu através do termo da corrente de deslocamento, que era possível obter as ondas eletromagnéticas. A sua presença, juntamente com a sua contraparte na primeira equação, implica a possibilidade de ondas eletromagnéticas. Reconhecendo isso, Maxwell desenvolveu com brilhante sucesso uma teoria eletromagnética da luz (PURCELL, 2012). Se usarmos as equações de Maxwell e aplicarmos o rotacional:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= -\vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (24)$$

No vácuo, essas equações diferenciais de segunda ordem satisfazem a equação de onda tridimensional. Lembrando que:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Assim como a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética de qualquer meio é um parâmetro fundamental na determinação da velocidade com que uma onda eletromagnética se propaga nesse meio. Isso torna possível determinar a velocidade da luz no vácuo simplesmente medindo  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  usando um indutor e um capacitor; um experimento para o qual, parafraseando Maxwell, o único uso da luz é ver os instrumentos (FLEISH, 2008).

Vamos utilizar a velocidade  $v = c$  que é a velocidade da luz. Foi a concordância entre a velocidade de propagação calculada e a velocidade medida da luz que levou Maxwell a escrever: “a luz é uma perturbação eletromagnética propagada através do campo de acordo com leis eletromagnéticas” (FLEISH, 2008). Com isto, podemos substituir essa informação nas equações (23) e (24):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (25)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (26)$$

Os campos são da forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt)}, \quad (27)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt)}. \quad (28)$$

As soluções das equações de Maxwell, no vácuo, devem obedecer as equações de onda. Isto quer dizer que uma das propriedades é que as ondas

eletromagnéticas são transversais, e que os campos estão em fase e são perpendiculares um ao outro. As equações de onda reais dos campos elétrico e magnético, são

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt) , \quad (29)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt) . \quad (30)$$

Se substituirmos essas equações (29) e (30), nas eqs. de Maxwell (iii) e (iv), vamos ter que as relações das amplitudes, serão:

$$E_0 = vB_0 \quad \text{e} \quad B_0 = \frac{E_0}{v} \quad (31)$$

Lembrando que a relação das constantes  $\mu_0\epsilon_0$  com a velocidade, é:

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \pm c \quad (32)$$

Para que isso ocorra, ele deve seguir outras duas propriedades. Primeiro que o campo viaja na velocidade da luz, e se a velocidade for negativa, a sua direção é oposta ou o vetor de propagação tem sentido negativo. Segundo, em todos os pontos, em qualquer instante de tempo, a intensidade do campo elétrico é  $c$  vezes a intensidade do campo magnético. Maxwell escreveu: *“A velocidade da luz transversal (...) calculada a partir dos experimentos eletromagnéticos de MM. Kohlrausch e Weber, concordam exatamente com a velocidade da luz calculada a partir dos experimentos ópticos de M. Fizeau, dificilmente podemos evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos.”* (PURCELL, 2012). A velocidade da luz foi medida por Hippolyte Fizeau (1819-1896) em 1857.

## 5. BIBLIOGRAFIAS BÁSICAS: O que descrevem?

A comunidade científica de Físicos provavelmente é unânime em afirmar que cargas magnéticas não existem, após várias tentativas de encontrá-las. Os autores de um dos livros mais utilizados nos cursos de graduação nas áreas das ciências exatas e tecnológicas afirmam:

*Existe, na natureza, uma “carga de teste magnética” que possa ser usada para se determinar a intensidade, a direção e o sentido do campo magnético, assim como se utilizou a força sobre uma carga elétrica de teste para determinar o campo elétrico? A teoria permite a existência de cargas magnéticas isoladas, mas ninguém ainda encontrou uma. Apesar de buscas experimentais intensivas. Conclui-se que cargas magnéticas isoladas, chamadas de *monopolos magnéticos*, ou são muito raros ou não existem e, assim, as equações para o eletromagnetismo são escritas como se não existissem cargas magnéticas. (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 175).*

Mais adiante, os mesmos autores esclarecem que:

A existência de cargas magnéticas isoladas foi proposta em 1931 pelo físico teórico Paul Dirac, tendo como base argumentos da mecânica quântica e de simetria. Ele chamou estas cargas de monopolos magnéticos e derivou algumas propriedades básicas esperadas para elas, incluindo a intensidade da “carga magnética” (análoga à carga elétrica  $e$ ). Partindo da predição de Dirac, foram usados grandes aceleradores de partículas e foram examinadas amostras de matéria terrestre e extraterrestre com o intuito de se descobrir monopolos magnéticos. Nenhuma destas buscas iniciais forneceu alguma evidência para a existência de monopolos magnéticos. (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 271).

As discussões sobre a existência dos monopolos magnéticos perduraram pelas décadas seguintes do século XX, como revela esse trecho:

Tentativas recentes para unificar as leis da física, juntando as forças forte, fraca e eletromagnética em uma única estrutura, despertaram o interesse nos monopolos magnéticos. Estas teorias predizem a existência de monopolos magnéticos extremamente densos, aproximadamente  $10^{16}$  vezes a massa do próton. Isto é certamente muito denso para ser produzido em um acelerador na Terra; de fato, a única condição conhecida sob a qual os monopolos poderiam ter sido produzidos ocorreu na quente e densa matéria do universo primordial. Buscas pelos monopolos magnéticos continuam a ser desenvolvidas, mas ainda não foi obtida evidência convincente para a sua existência. (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 271).

Estas tentativas recentes, as quais os autores se referem, são discutidas em trabalhos publicados no século XX (FELCH, S. B., 1984 *apud* Halliday *et al.*, 2004); (CARRIGAN, R. A.; TROWER, W. P. Jr.; TROWER, W. P., 1982 *apud* Halliday *et al.*, 2004).

Esta questão leva a seguinte constatação: “um dipolo elétrico pode ser separado nas suas cargas únicas que o compõe (ou “polos”), mas um dipolo magnético não pode” (Halliday et al., 2004). Não importa quantas vezes você divida um dipolo magnético, vão surgir novos dipolos magnéticos com polos norte e sul indissociáveis, ou seja, surge um novo par de polos. “Este processo ocorre microscopicamente, no nível de átomos individuais. Cada átomo se comporta como um dipolo magnético, tendo um polo norte e sul...” (Halliday et al., 2004). Por sua vez, as diferenças entre os campos elétricos e magnéticos se encontram nas equações de Maxwell, na forma da lei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (33)$$

e

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad (34)$$

onde  $\Phi_E$  é o fluxo do campo elétrico e  $\Phi_B$  é o fluxo do campo magnético. As equações (33) e (34) exibem de imediato uma falta de simetria. O lado direito da equação (33) estabelece que as fontes dos campos elétricos são as cargas elétricas, que podem ser positivas (+ $Q$ ) ou negativas (- $Q$ ), ou seja, estabelece a existência dos monopolos elétricos; mas a equação (34), curiosamente, não nos diz nada a respeito da existência dos monopolos magnéticos; ela só nos esclarece que o fluxo  $\Phi_B$  através de qualquer superfície gaussiana fechada é nulo. Assim, os autores concluem:

No presente, supõe-se que ou os monopolos não existem, de modo que a Eq. 35-22 [aqui Eq. (34)] é exata e universalmente válida, ou então se eles existem, eles são tão raros que a Eq. 35-22 [aqui Eq. (34)] é uma aproximação altamente precisa. Assim, a Eq. 35-22 [aqui Eq. (34)] assume um papel fundamental como uma descrição do comportamento dos campos magnéticos na natureza e é incluída como uma das quatro leis do eletromagnetismo de Maxwell (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 271).

Esta propriedade, a simetria, por vezes, tem guiado os físicos em suas descobertas e fascinando-os na busca da compreensão da natureza subjacente do Universo. Assim, surge a pergunta: por que a Natureza fez uma escolha diferente neste caso? Será que os monopolos magnéticos não existem de fato?

Se a existência de cargas magnéticas individuais (monopolos magnéticos) fosse confirmada, as equações pareceriam ainda mais similares [Eqs. (33) e (34)]. Se  $q_m$  representa a “carga magnética”, então a lei de Gauss para o magnetismo seria escrita como  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 q_m$ . Esta equação afirma que o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada é proporcional à

carga magnética resultante envolvida pela superfície. Neste caso, as Eqs. I [aqui (33)] e II [aqui (34)] tornam-se mais simétricas. (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 322).

Outro autor bastante conhecido pela comunidade científica brasileira estabeleceu um programa de estudo para o Magnetismo semelhante àquele utilizado para o estudo de fenômenos elétricos:

Quando começamos a discutir os fenômenos elétricos, iniciamos com a carga elétrica, depois passamos à força elétrica e, por fim, chegamos ao campo elétrico. Esse desenvolvimento se processou de um modo bastante tranquilo e seria o caminho natural a seguir agora que vamos estudar o Magnetismo. Começaríamos com a carga magnética, depois a força magnética e, por fim, o campo magnético. Isso seria realmente o ideal, se não fosse por um pequeno grande problema: nunca foi observado experimentalmente a existência de uma carga magnética! (MACHADO, K. D., 2005, p. 160).

Machado (2005) esclarece que uma discussão sobre a existência dos monopolos magnéticos (ou cargas magnéticas) não precisa ser descartada a princípio; em suas palavras ele destaca:

A falta de evidências experimentais de cargas magnéticas não impede a suposição teórica de sua existência. De fato, as modernas teorias físicas que pretendem unificar as interações fortes, fracas e eletromagnéticas preveem a existência de monopolos magnéticos e, como consequência, explicam a natureza discreta da carga elétrica. Entretanto, enquanto não houver uma clara comprovação experimental da existência das cargas magnéticas, tais teorias são apenas isso, ou seja, teorias. (MACHADO, K. D., 2005, p. 161).

Posteriormente, Machado (2005) reforça a importância sobre a discussão da existência dos monopolos magnéticos:

A falta de evidências experimentais positivas a respeito de cargas magnéticas não impede que suponhamos sua existência de forma teórica. De fato, (...) se ocorrerem cargas magnéticas pontuais na Natureza, a quantização da carga elétrica é automaticamente explicada, conforme demonstrou P. A. M. Dirac em 1931, e isso esclarece um dos maiores mistérios da Física atual. Não há nenhum motivo pelo qual a carga elétrica não possa ser encontrada em qualquer quantidade. Porém, o fato é que as cargas são observadas sempre em valores múltiplos da carga do elétron. (MACHADO, K. D., 2005, p. 736).

Como dito anteriormente, em 1269, o francês Pierre Maricourt (Petrus Peregrinus) nos seus estudos sobre o ímã natural, realizou experimentos com uma agulha magnética. Ele foi também o primeiro a pôr em evidência uma das questões fundamentais do Eletromagnetismo, isto é, a questão dos monopolos magnéticos, ao observar que não se podia isolar um polo ou carga magnética (ROCHA, 2002).

Grande parte dos autores abordam o assunto de monopolos magnéticos em seus livros didáticos afirmando sua não existência, Halliday aborda isto através da analogia com as cargas elétricas:

Já que o campo elétrico é produzido por cargas elétricas, seria natural que o campo magnético fosse produzido por cargas magnéticas. Entretanto, embora a existência das cargas magnéticas (conhecidas como monopólos magnéticos) sejam previstas em algumas teorias, essas cargas até hoje não foram observadas experimentalmente (HALLIDAY D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 203).

Young e outros colaboradores também abordam o assunto sobre cargas magnéticas em seus livros didáticos:

O conceito de polo magnético pode parecer semelhante ao de carga elétrica; o polo norte e o polo sul podem parecer análogos a uma carga positiva e uma negativa. Porém, essa analogia é capaz de causar confusão. Embora existam cargas negativas e positivas isoladas, não existe nenhuma evidência experimental da existência de um polo magnético isolado. A existência de um polo magnético isolado, ou monopolo magnético, teria consequências importantes para a física teórica (YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. Sears e Zemansky., 2009, p.204).

Young destaca também as buscas sobre os monopólos. Pesquisas intensas com o propósito de detectar monopólos magnéticos têm sido realizadas, porém até o momento nenhuma teve êxito (YOUNG et al., 2009). Com isto, ele retorna a falar dos monopólos concluindo um resultado físico da sua não existência:

Por analogia, se existisse uma carga magnética (monopolo magnético), o fluxo magnético total através de uma superfície fechada seria proporcional à carga magnética no interior da superfície fechada. Porém conforme dissemos, apesar das pesquisas intensas nenhum monopolo magnético livre jamais foi encontrado. Concluimos que: o fluxo magnético total através de uma superfície fechada é sempre igual a zero (YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. Sears e Zemansky., 2009, p 210).

Alguns autores abordam em seus livros os monopólos magnéticos através de uma analogia entre eles e as cargas elétricas. Nussenzweig retratou em seu livro:

Poderíamos pensar então em descrever o magnetismo produzido por ímãs permanentes de forma análoga à eletrostática, introduzindo cargas magnéticas N e S por analogia com cargas elétricas + e -. Entretanto, a experiência mostra que não é possível separar um do outro os polos N e S de um ímã. Se o partirmos em dois, cada um deles continuará tendo polos N e S. Em anos recentes, fez-se um grande esforço experimental para verificar se existem partículas com "carga magnética", que seriam polos N e S isolados (monopólos magnéticos). Nenhum jamais foi visto. É, portanto um fato experimental básico no estudo do magnetismo que não existem cargas magnéticas (polos magnéticos isolados) (NUSSENZWEIG H. M., 2006, p. 127).

Knigth traz uma analogia verdadeira sobre os dipolos elétricos e magnéticos, destacando que a mesma analogia não ocorre com as cargas separadas.

Todo dipolo magnético é análogo a um dipolo elétrico, mas as duas cargas de um dipolo elétrico podem ser separadas e manipuladas individualmente. Isso parece não ser verdadeiro no caso de um dipolo magnético. Um polo magnético isolado, como um polo norte na ausência de um polo sul, seria chamado de monopolo magnético. Ninguém jamais observou um monopolo magnético (KNIGHT, R. D., 2009, p. 1000).

Por outro lado, ninguém ainda forneceu uma razão convincente para que monopolos magnéticos isolados não possam existir, e algumas teorias de partículas subatômicas preveem que eles deveriam existir. Se os monopolos magnéticos existem ou não na natureza permanece uma questão aberta em um dos níveis mais fundamentais da Física (KNIGHT, 2009).

Alonso apresenta a não existência dos polos magnéticos isolados:

Apesar de termos sido capazes de isolar cargas elétricas positivas e negativas, e associar uma quantidade definida de carga elétrica às partículas fundamentais constituintes de todos os átomos, não fomos capazes de isolar um polo magnético, ou identificar uma partícula fundamental que tivesse somente uma espécie de magnetismo, ou seja, N ou S. Os corpos magnetizados sempre apresentam polos aos pares, iguais e de sinais opostos (ALONSO, M.; FINN, E. J., 1972, p. 57).

Por outro lado, as noções de polo magnético e massa magnética foram consideradas desnecessárias para a descrição do magnetismo (ALONSO, M.; FINN, E. J., 1972). Tipler vai retratar os monopolos magnéticos em seu livro através da diferença entre os dipolos elétricos e magnéticos:

Embora as cargas elétricas e os polos magnéticos sejam similares em vários assuntos, existe uma importante diferença: os polos magnéticos sempre ocorrem em pares. Quando um ímã é dividido ao meio, polos iguais e opostos aparecem em cada lado do ponto de quebra. Isso resulta em dois ímãs, cada um com polo norte e polo sul (TIPLER, P. A., 2012, p. 190).

O mesmo autor também ressalta as especulações sobre os polos isolados:

Há muito tempo se especula a respeito da existência de um polo magnético isolado, e nos últimos anos consideráveis esforços experimentais têm sido feitos para encontrar uma resposta para tal questão. Até hoje, entretanto, não existe uma evidência conclusiva que comprove a existência de um polo magnético isolado (TIPLER, P. A., 2012, p. 190).

Keller vai abordar a não existência dos monopolos magnéticos através do fluxo magnético:

Em contraste, pela lei de Gauss para B, o fluxo magnético é zero para qualquer superfície fechada,  $\oint B \cdot dS = 0$ . Parece, pois, não haver correspondente magnético de carga elétrica. Se existisse a chamada carga magnética, corresponderia a um monopolo magnético, um polo magnético isolado (o polo norte isolado, por exemplo). Até hoje não houve observação confirmada de um monopolo magnético. E na ausência de um monopolo magnético, a fonte mais simples de um campo magnético é um dipolo magnético (KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J., 1997, p. 218).

Outro modo em que Keller também cita a inexistência dos monopolos magnéticos é através das linhas de campo

A inexistência do monopolo magnético (ou carga magnética) também pode ser ilustrada pelas linhas de campo magnético. Uma linha que representa o campo magnético  $\vec{B}$  sempre se fecha sobre si mesma, não tendo começo nem fim. Uma barra magnética, que possui um momento de dipolo magnético, tem um polo norte em uma extremidade e um polo sul na outra. Cada linha se fecha sobre si mesma, de modo que o fluxo magnético é zero para qualquer superfície fechada (KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J., 1997, p. 218).

O Griffiths ao apresentar as equações de Maxwell cita a inexistência das cargas magnéticas através das linhas de campo. As linhas dos campos magnéticos não começam ou terminam em lugar nenhum, seria necessário um divergente não nulo (GRIFFITHS, 2008). Ele também cita que não existem cargas pontuais (monopolos magnéticos) que produzem o campo magnético. Colocando de outra forma, não há fontes para  $\vec{B}$ , como há para  $\vec{E}$ , não existe análogo para a carga elétrica (GRIFFITHS, 2008). O Griffiths apresenta os cientistas que acreditavam nas cargas pontuais

Coulomb e outros acreditavam que o magnetismo era produzido por cargas magnéticas (monopolos magnéticos, como são chamados atualmente), e em alguns livros mais antigos você ainda irá encontrar referências a uma versão magnética da Lei de Coulomb que dá a força de atração e repulsão entre elas. Foi Ampère quem primeiro especulou que todos os efeitos magnéticos são atribuídos a cargas elétricas em movimento (GRIFFITHS, p. 162, 2008).

Por fim, Griffiths conclui que algumas teorias precisam da existência dessas cargas, mas que por enquanto para os objetivos do conteúdo, não existem os monopolos

Até onde sabemos, Ampère estava certo, mesmo assim, continua sendo uma questão experimental aberta se existem monopolos magnéticos na natureza (eles são obviamente muito raros, ou alguém já teria encontrado um), e, de fato, algumas teorias recentes sobre partículas elementares os exigem. Para os nossos objetivos, porém,  $\vec{B}$  não tem divergente e não existem monopolos magnéticos (GRIFFITHS, p. 162, 2008).

O Griffiths apresenta então a expansão de multipolos, o potencial vetorial de um circuito de corrente é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\vec{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos\theta' d\vec{l}' + \dots \right] \quad (35)$$

Chamamos o primeiro termo ( $\frac{1}{r}$ ) de termo de monopolo, e o segundo ( $\frac{1}{r^2}$ ) de termo de dipolo, e assim por diante. Agora ocorre que o termo de monopolo magnético é sempre zero, pois, a integral é apenas o vetor deslocamento total em torno de um circuito fechado (GRIFFITHS, 2008):

$$\oint d\vec{l}' = 0 \quad (36)$$

Isto reflete no fato de que (aparentemente) não há monopolos magnéticos na natureza (um pressuposto contido na equação de Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , na qual toda a teoria do potencial vetorial se baseia) (GRIFFITHS, 2008). Na ausência de qualquer contribuição de monopolo, o termo dominante é o dipolo (GRIFFITHS, 2008).

Jackson cita no seu livro a razão pela qual as leis do campo magnético, não advém dos primeiros estudos com materiais magnéticos, e o que a ausência das cargas magnéticas causa na ligação com a Eletrostática,

Em contraste com a eletrostática, as leis básicas dos campos magnéticos não decorreram diretamente do primeiro contato do homem com materiais magnéticos. As razões são várias, mas todas decorrem da diferença radical entre magnetostática e eletrostática: não existem cargas magnéticas livres. Isto significa que os fenômenos magnéticos são bastante diferentes dos fenômenos elétricos e que durante muito tempo nenhuma ligação foi estabelecida entre eles (JACKSON, p. 132. 1962).

Serway aborda o assunto sobre os polos magnéticos em comparação com a forças dos polos magnéticos e elétricos,

Embora a força entre dois polos magnéticos seja similar à força entre duas cargas elétricas, existe uma diferença importante. As cargas elétricas podem ser isoladas, enquanto os polos magnéticos não podem ser isolados. Isto é, os polos magnéticos sempre são encontrados em pares. Não importa quantas vezes um ímã permanente seja cortado, cada parte sempre tem um polo norte e um polo sul (SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR. J. W., 2006).

Por fim, o autor cita que ainda têm especulações sobre o assunto. Algumas teorias especulam que os monopolos magnéticos podem existir na natureza e as tentativas de detectá-los atualmente formam um campo experimental ativo de pesquisa. Entretanto, nenhuma dessas tentativas foram bem sucedidas até o momento (SERWAY, 2006).

Purcell ao abordar o assunto, cita a simetria dos casos elétrico e magnético, ao apresentar a forma como ficaria (por simetria) as densidades de cargas ao utilizar as equações dos campos elétrico e magnético e sobre como as cargas magnéticas se comportariam.

Torna-se ainda mais plausível quando lembramos que as equações fundamentais do campo eletromagnético são simétricas em  $\vec{E}$  e  $c\vec{B}$ . Por que, então, deveríamos não esperar encontrar simetria nas fontes do campo? Tendo a carga magnética como uma possível fonte do campo magnético estático  $\vec{B}$ , teríamos divisão  $\vec{B} \propto \eta$ , onde  $\eta$  representa a densidade da carga magnética, em completa analogia com a densidade da carga elétrica  $\rho$ . Duas cargas magnéticas positivas (ou polos norte) se repeliriam e assim por diante (PURCELL E. M., et. al., p. 529, 2012).

O autor acrescenta outra analogia com as cargas elétricas, sobre como a carga magnética se comportaria na presença de um campo.

Assim uma partícula elementar carregando uma carga magnética seria constantemente acelerada em um campo magnético estático, assim como um próton ou um elétron é constantemente acelerado em um campo elétrico. Alcançando alta energia, poderia então ser detectado por sua interação com a matéria. Um monopolo magnético itinerante é uma corrente magnética; deve ser circundado por um campo elétrico, assim como uma corrente elétrica é circundada por um campo magnético (PURCELL E. M., et. al., p. 531, 2012).

Após as analogias, o autor acrescenta o fato de que essa simetria não existe, o monopolo ainda não foi observado, e que caso exista, ele poderia ser reconhecido de diversas maneiras. Essas propriedades únicas seriam de extrema importância para a teoria Eletromagnética, os físicos procuraram e ainda procuram essas cargas magnéticas em muitos experimentos.

A busca foi renovada quando um desenvolvimento na teoria das partículas elementares sugeriu que o universo deveria conter pelo menos alguns monopolos magnéticos, remanescentes do “Big Bang”, em que provavelmente começou. Mas nenhum monopolo magnético ainda foi detectado, e agora é evidente que, se existirem, são extremamente raros (PURCELL, 2012). Nas décadas de 70 e 80 do século XX, experimentos realizados com a finalidade de encontrar os monopolos magnéticos foram inconclusivos (PRICE, *et al.*, 1975); (CABRERA, 1982).

## 6. EQUAÇÕES DE MAXWELL MODIFICADAS

### 6.1. Lei das forças com as cargas magnéticas

Por analogia, teríamos que a Lei de Coulomb seria

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1}q_{m2}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r} \quad (37)$$

Para a Lei da Força de Lorentz, seguindo a analogia, teríamos algo parecido com a força para a carga elétrica

$$\vec{F}_m = q_m [\vec{B} + (\vec{v} \times \vec{E})] \quad (38)$$

Como  $\vec{E}$  tem unidades de  $v\vec{B}$ , temos que multiplicar  $(\vec{v} \times \vec{E})$  por  $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ , por motivos dimensionais, é necessário que  $-\frac{1}{c^2}$ , portanto

$$\vec{F}_m = q_m \left[ \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \right] \quad (39)$$

Por fim, a Lei da Força de Lorentz se tornaria:

$$\vec{F}_m = q_e [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] + q_m \left[ \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E}) \right] \quad (40)$$

Usando a mesma analogia, o campo magnético com a presença da carga magnética, seria da mesma forma que o campo elétrico, logo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r} \quad (41)$$

Assim seria o campo magnético caso exista o monopolo magnético.

### 6.2. Equações de Maxwell com as cargas magnéticas

Caso fosse comprovado a existência dos monopolos magnéticos, por analogia, teríamos as equações de Maxwell de uma maneira diferente. A equação da Lei de Gauss para a Eletrostática e a equação da Lei de Ampère-Maxwell permaneceriam no seu formato atual. Mas a Lei de Gauss para Magnetostática com a carga magnética se tornaria

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m \quad (42)$$

Em que  $\rho_m$  seria a carga magnética. Outra mudança seria na Lei de Indução de Faraday, em que o termo adicionado seria análogo a densidade de corrente elétrica de deslocamento. No caso da existência de cargas magnéticas, teríamos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \beta_0 \vec{J}_m \quad (43)$$

Em que  $\beta_0$  é uma constante e  $\vec{J}_m$  é a densidade de corrente magnética. Se fizermos  $\beta_0 = -\mu_0$ , e acrescentarmos o termo do rotacional com a densidade de corrente magnética, na Lei de Indução de Faraday, teremos então

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (44)$$

Esta seria a Lei de Indução de Faraday com a carga magnética. Portanto, as equações de Maxwell com a carga magnética seriam

- i)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$ ;
- ii)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$ ;
- iii)  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;
- iv)  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Tanto as cargas magnéticas, quanto as cargas elétricas seriam conservadas, ou seja, a equação da continuidade seria:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0, \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad (45)$$

Em um certo sentido, as equações de Maxwell imploram pela existência da carga magnética – ela se encaixaria tão bem! (GRIFFITHS, 2008). Até onde sabemos  $\rho_m$  é zero em toda parte, como também  $\vec{J}_m$ ;  $\vec{B}$  não está “no mesmo pé” que  $\vec{E}$ : existem forças estacionárias para  $\vec{E}$  (cargas elétricas), mas não para  $\vec{B}$  (GRIFFITHS, 2008). A falta das cargas magnéticas reflete diretamente na expansão multipolar magnética, já que o termo do monopolo magnético é zero, com isto, os dipolos magnéticos consistem em espiras de correntes.

O Griffiths vai trazer em uma de suas questões, um dos métodos utilizados em laboratório para descobrir os monopolos magnéticos. Suponha um monopolo magnético  $q_m$  passe através de uma espira de fio sem resistência e com autoindutância  $L$ . Que corrente é induzida na espira? (GRIFFITHS, 2008). Para resolvermos este problema, vamos integrar a Lei de Indução de Faraday com cargas magnéticas,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon$$

$$\varepsilon = -\mu_0 \int \vec{J}_m \cdot d\vec{a} - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (46)$$

Sabemos que

$$I_{m_{enc}} = \int \vec{J}_m \cdot d\vec{a} \quad \text{e} \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (47)$$

Substituindo as eqs. (45) na eq. (46), temos:

$$\varepsilon = -\mu_0 I_{m_{enc}} - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (48)$$

Temos que a força eletromotriz é dada por

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{\varepsilon}{L} \quad (49)$$

Logo, a derivada da corrente em relação ao tempo, torna-se

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0}{L} I_{m_{enc}} + \frac{1}{L} \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (50)$$

Como a derivada é uma variação, podemos reescrever a eq. (48) como

$$I = \frac{\mu_0}{L} \Delta Q_m + \frac{1}{L} \Delta \Phi_B \quad (51)$$

Neste caso,  $\Delta Q_m$  é a carga magnética que passa pela superfície e  $\Delta \Phi_B$  é a mudança do fluxo magnético através da superfície. Se fizermos  $\Delta Q_m = q_m$ , vamos ter que quando a carga magnética está longe ou quando desaparece, o fluxo magnético é igual a zero. Quando o monopolo está longe  $\Phi = 0$ , o fluxo aumenta para  $\frac{\mu_0 q_m}{2}$  um pouco antes de passar pelo loop; então cai abruptamente para  $-\frac{\mu_0 q_m}{2}$  e volta a zero quando o monopolo desaparece na distância (GRIFFITHS, 2014). Se usarmos uma enorme superfície em forma de balão, com a carga magnética presa dentro da superfície, então  $\Delta Q_m = 0$ , e o fluxo vai aumentar de 0 a  $\mu_0 q_m$ .

Para um circuito semiconductor é um pouco diferente, mas para qualquer destes casos, a corrente é

$$I = \frac{\mu_0 q_m}{L}. \quad (52)$$

Existem também artigos que apresentam todas as equações da teoria eletromagnética com a presença do monopolo magnético, o artigo “Introdução à Física do Monopolo Magnético: uma abordagem clássica”, publicado pela Revista Brasileira de Ensino de Física, em 2023, apresenta as equações de movimento e o Potencial Vetor de Dirac. Este é o chamado potencial vetor de Dirac para o monopolo, tal expressão define assim o chamado monopolo de Dirac (JESUS, SCHIMIDT,

PORTUGAL, 2023). Os autores também apresentam algumas modificações do Potencial Vetor de Dirac para monopolos através de deduções matemáticas, estas modificações do Potencial Verto de Dirac o autor apresenta como: Monopolo Abeliano (JESUS, et.al., 2023); Monopolo de Schwinger (JESUS, et.al., 2023); Monopolo de Banderet (JESUS, et.al., 2023); Monopolo de Wu-Yang (JESUS, et.al., 2023).

A Física do monopolo magnético foi reproduzida em diversos sistemas: Tiurev, Kuopanportti e Mottonen realizaram experimentalmente a criação de um par monopolo-antimonopolo de Dirac em um condensado de Bose-Einstein com spin 1 (JESUS, et.al., 2023). Monopolos magnéticos foram reproduzidos experimentalmente em gelos de spin (spin ice), que são certos materiais onde podemos reproduzir quasipartículas de monopolo em um gás livre a uma temperatura abaixo de 1K (JESUS, et.al., 2023).

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Seguindo Paul Dirac, a existência dos monopolos magnéticos simetrizaria as equações de Maxwell e explicaria a quantização da carga elétrica.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad e \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 q_m$$

Onde a “carga magnética” seria análoga à carga elétrica  $e$ . Por analogia, se existisse uma carga magnética (monopolo magnético), o fluxo magnético total através de uma superfície fechada seria proporcional à carga magnética no interior da superfície fechada. (YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. Sears e Zemansky., 2009, p 210).

Os autores pesquisados: HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S.; MACHADO, K. D.; YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. Sears e Zemansky; NUSSENZVEIG H. M.; ALONSO, M.; FINN, E. J.; TIPLER. P. A.; KNIGHT, R. D.; KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J.; SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W., são unânimes em afirmar que não há qualquer evidência experimental sobre a existência dos monopolos magnéticos. Para alguns, é um fato científico que os monopolos magnéticos não existem. A conclusão mais simples que encontramos é que sem o monopolo magnético, a fonte mais simples do campo é um dipolo magnético.

A teoria permite a existência de cargas magnéticas isoladas, mas ninguém ainda encontrou uma, apesar de buscas experimentais intensivas. (HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S., 2004, p. 175). Ainda não foi comprovado experimentalmente a “não existência” das cargas magnéticas, portanto ainda se pode supor que exista esses monopolos. A falta de evidências experimentais de cargas magnéticas não impede a suposição teórica de sua existência. (MACHADO, K. D., 2005, p. 161).

Embora os monopolos magnéticos ainda não tenham sido observados na natureza, pela grande quantidade de informações a respeito de seu comportamento, inúmeros modelos análogos teóricos e experimentais (tanto clássicos como quânticos) podem ser obtidos (JESUS, et.al., 2023).

Um artigo intitulado “Magnetic monopoles discovered LCN Scientists”, publicado pelo Centro de Londres para Nanotecnologia (The London Centre for Nanotechnology), em 2018, mostra que a discussão sobre a existência dos monopolos

magnéticos é um assunto em aberto; e tratado como um “Santo Graal” da Física. As descobertas realizadas mostraram que há um tipo especial de matéria, chamada de ‘spin ice’, que exibe propriedades que são melhor explicadas se imaginarmos os polos norte e sul de um ímã livres para flutuar no interior do material (McMORROW, D.; BRAMWELL, S., 2018).

O artigo “Introdução à Física do Monopolo Magnético: uma abordagem clássica” apresenta estudos sobre os monopolos magnéticos. Monopolos magnéticos também foram reproduzidos em campos magnéticos sintéticos, em ímas quirais, usando metamateriais e também em campos quânticos (JESUS, SCHIMIDT, PORTUGAL, 2023). Um modelo experimental clássico análogo a um monopolo magnético foi criado por Béché e colaboradores, usando uma agulha magnética finíssima em escala nanoscópica (JESUS, SCHIMIDT, PORTUGAL, 2023). Modelos análogos ao monopolo (e também ao dyon) utilizando sistemas quânticos com massa efetiva variável (abreviados como sistemas PDM), via mapeamento, foram estudados por dois dos autores deste trabalho (JESUS, SCHIMIDT, PORTUGAL, 2023).

As equações que foram apresentadas no Capítulo 6, com a carga magnética presente, não necessariamente seriam daquela forma, porque são equações apenas baseadas em suposições e analogias com a carga elétrica. Da mesma forma, que até agora, o que sabemos é que a natureza escolheu esta assimetria no eletromagnetismo, caso encontrem o monopolo magnético, as equações também podem não seguir uma simetria em suas equações.

A teoria das classes características, uma generalização do teorema de Gauss-Bonnet da geometria diferencial, ainda fornece uma explicação topológica para a quantização da carga elétrica, resultado que foi obtido por Dirac na descrição de uma partícula quântica carregada na presença do monopolo (JESUS, et. al. 2023). Este tema continua em aberto devido as teorias modernas, como a teoria da grande unificação e a teoria das cordas (ou supercordas) que predizem a existência dos monopolos magnéticos.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física**: um curso universitário: campos e ondas – 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. v. 2.
- CABRERA, B. "**First Results from a Superconductive Detector for Moving Magnetic Monopoles**". *Physical Review Letters*. v. 48, n. 20, p. 1378–1381, May, 1982.
- CARRIGAN, R. A.; TROWER, W. P. Jr.; TROWER, W. P. **Superheavy Magnetic Monopoles**. *Scientific American*, p. 106, abril, 1982 *apud* Halliday *et al.* 2004.
- FELCH, S. B. **Searches for Magnetic Monopoles and Fractional Electric Charges**. *The Physics Teacher*, p. 142, março, 1982 *apud* Halliday *et al.* 2004.
- FLEISCH, D. *A Student's Guide to Maxwell's Equations*. [S.l.]: Cambridge, 2008.
- GRIFFITHS, D. J. **Instructor's Solution Manual Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. San Francisco: Pearson, 2014.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. San Francisco: Pearson, 2008.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. **FÍSICA 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- HUMBOLDT, A. V. *Asie Centrale*. Paris: Gide, Librairie Editeur. 1843.
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 1. ed. New York: by Jhon Willey & Sons, Inc. 1962.
- JESUS, Anderson L. de, SCHIMIDT, Alexandre G.M., PORTUGAL, Licinio L. S. **Introdução à Física do Monopolo Magnético: uma abordagem clássica**. Rio de Janeiro. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0335>.
- KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Makron Books, 1997. v. 3.
- KNIGHT, R. D. **Física Uma Abordagem Estratégica**: eletricidade e magnetismo. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. v. 3
- MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo**. 1. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2000.
- MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo**. 2. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2005.
- MACHADO, K. D. **Teoria do eletromagnetismo**. 3. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.
- McMORROW, D.; BRAMWELL, S. **Magnetic monopoles discovered LCN Scientists**. LCN. Londres, 2018.
- MOTTELEY, Paul Fleury. *Bibliographic history of electricity and magnetism*. Londres: Charles Griffin & company limited, 1922.
- NUSSENZVEIG H. M. **Curso de Física Básica**: eletromagnetismo. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. v. 3.
- PIERRE, Arnold. *A carta de Petrus Peregrinus no ímã*, DC 1269. McGraw Publishing Company, New York. 1904.
- PRICE, P. B.; SHIRK, E. K.; OSBORNE, W. Z.; PINSKY, L. S. **"Evidence for Detection of a Moving"**. 2013.
- PURCELL, Edward M., DAVID J. Morin. *Electricity and magnetism*. v.2/ Harvard University, Massachusetts. 2012.
- ROCHA, JFM., org. *Origens e evolução das idéias da física* [online]. Salvador: EDUFBA, 2002. ISBN 978-85-232-0878-3.

- SERWAY, R. A.; JEWETT JÚNIOR. J. W. **Princípios de física: eletromagnetismo**. 3. ed. São Paulo: Thomson, 2006. v. 3
- SOARES, P. J. L. Estudo das Ondas eletromagnéticas na matéria. Cuité, 2017.
- TIPLER, P. A. **Física para Cientistas e Engenheiros: eletricidade e magnetismo, óptica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2012. v. 2.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, A. L. Sears e Zemansky. **Física III: Eletromagnetismo**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.