



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE -
UFCG
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE - CES
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

IGOR GUIMARÃES BARROS

**OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO**

CUITÉ-PB

21 de Junho de 2023

IGOR GUIMARÃES BARROS

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física da Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - *Campus Cuité*.

Área de concentração: Cosmologia.

Orientador: JOSECLÉCIO DUTRA DANTAS

CUITÉ-PB

21 de Junho de 2023

B277o Barros, Igor Guimarães.

Olhando para o universo através da radiação cósmica de fundo. / Igor Guimarães Barros. - Cuité, 2023.
250 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas".

Referências.

1. Radiação Cósmica. 2. Universo. 3. Origem. 4. Evolução. I. Dantas, Joseclécio Dutra. II. Título.

CDU 524(043)

IGOR GUIMARÃES BARROS

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física da Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - *Campus Cuité*.

Área de concentração: Cosmologia.

Trabalho aprovado. CUITÉ-PB, 21 de Junho de 2023:

JOSECLÉCIO DUTRA DANTAS
Orientador

JOÃO BATISTA DA SILVA
Examinador Interno

**JOSÉ JAMILTON RODRIGUES DOS
SANTOS**
Examinador Externo - UEPB

Agradecimentos

Não poderia deixar de começar esses agradecimentos citando Deus, que me deu a vida e permitiu que todos os meus objetivos fossem alcançados durante o curso. Ele me deu saúde e determinação para vencer na vida (especialmente na caminhada acadêmica) e me guiou em todos os momentos, controlando tudo aquilo que estava fora do meu limitado alcance. Agradeço a Ele, ainda, pela competência dada para enfrentar as dificuldades oriundas das disciplinas, das pesquisas, da docência e das demais atividades acadêmicas as quais participei, permitindo-me superar todas elas e, ao mesmo tempo, aprender com cada uma. A gratidão a Deus se estende por tudo o que conquistei até agora e o peço saúde, sabedoria e força para conquistar muito mais. Obrigado, meu senhor, por ser meu norte e por me conduzir na superação das adversidades da vida!

Em segundo lugar, agradeço aos meus entes familiares pelo amor, incentivo e apoio incondicionais, que foram diretamente responsáveis pela conclusão desse ciclo em minha vida. Aos meus pais, Antônio Acácio de Barros e Lidiane Maria dos Santos Guimarães Barros, dedico inteiramente este trabalho: eles, que nunca deixaram de me incentivar na carreira acadêmica, que compreenderam a minha ausência durante as centenas de viagens Picuí-Cuité (e para outras cidades) feitas durante a graduação e que fizeram o possível (e o impossível) para que eu pudesse me dedicar fortemente aos estudos. Esse trabalho é de vocês! Agradeço, ainda, aos demais membros da família (materna e partena) pela torcida e pelos votos de sucesso que me foram direcionados. Em especial, queria demonstrar a minha eterna gratidão ao Dr. Genílson Lucas de Lucena, exemplo de padrinho, tio e médico, que sempre me incentivou a caminhar na direção da ciência e que é uma das minhas grandes inspirações, como ser humano e como profissional. Ao senhor, tio, desejo saúde e vida longa!

Não posso esquecer de mostrar a minha gratidão aos meus amigos (dos meus mais diversos grupos sociais), que sempre estiveram comigo ao longo da caminhada, demonstrando-me apoio e felicidade pelas minhas conquistas. Além disso, agradeço aos amigos pelas recorrentes palavras de encorajamento, força, motivação, “puxões de orelha” e, em especial, pelas inúmeras perguntas e discussões sobre Física compartilhadas comigo (foram momentos muito ricos). Este TCC também é de vocês!

Dedico este parágrafo de agradecimentos aos meus mestres. Primeiramente, queria demonstrar gratidão ao meu maestro (orientador) Dr. Joseclécio Dutra Dantas por ter desempenhado o seu papel com excelência durante toda a graduação, especialmente pela confiança e empenho a mim atribuídos. Os nossos encontros semanais para discutir Cosmologia foram valiosíssimos e determinantes para o desenvolvimento deste trabalho e, mais ainda, queria agradecê-lo por todos os ensinamentos, conselhos, correções, oportunidades, cobranças e palavras de incentivo, que me proporcionaram uma formação profissional

diferenciada. Aos demais professores do curso (e aos professores da Educação Básica os quais convivi por mais ou menos tempo) quero agradecer pela ajuda, pela paciência e por todos os aprendizados, que guiaram o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal durante esses quase 5 anos. Eles me ensinaram não somente Física, mas também deram grandes contribuições sobre caráter profissional e relacionamento interpessoal, que foram essenciais na minha formação. Queria, ainda, escrever aos membros da banca: obrigado por terem aceitado o convite e pelas relevantes sugestões dadas a este trabalho, cuja qualidade melhorou após cada uma das suas contribuições.

Também quero mostrar gratidão aos meus colegas, nas pessoas de Ronayde Emanuel de Lima, Ysak Anykueury Claudino da Silva e Rosângela Machado da Costa, com quem convivi intensamente durante o curso, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer como pessoa e como cientista. Agradeço a todos os colegas por compartilharem comigo muitos momentos de sorrisos, conversas, estudos e descobertas ao longo deste percurso. Demonstro gratidão especialmente pelos momentos de descontração nos mais diferentes lugares e por todo o tempo que vivemos juntos: estudando, conversando, dividindo sala e viajando.

Além disso, minha gratidão também é direcionada a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, enriquecendo o meu processo de aprendizado. Especificamente, queria registrar a minha gratidão a todos os funcionários não-docentes do CES (da prefeitura universitária à portaria), que sempre me receberam com gentileza e que foram muito prestativos no desempenho de suas funções. Agradeço ainda a todas as pessoas com quem tive contato ao longo da graduação, que me incentivaram de alguma maneira e que tiveram impacto positivo na minha formação.

Por fim, às instituições também dirijo os meus agradecimentos: à UFCG pelas diversas oportunidades (Monitorias, Representações Estudantis, Congressos e outros eventos), à CAPES pelo grande aprendizado obtido a partir dos programas de ensino por 2 anos e meio (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID - e Residência Pedagógica), à CNPq pela minha inserção na pesquisa em Física por dois anos (Programa Institucional Voluntário de Iniciação Científica - PIVIC), à FAPESQ pelo contato com a pesquisa em Educação durante um ano (currículo e formação docente), ao Centro Acadêmico de Física (CA-FIS/CES) pela oportunidade de ter sido Presidente por dois anos e ao Diretório Central dos Estudantes (DCE-UFCG) pelo secretariado de Campus que assumi durante um ano. Além disso, queria agradecer às instituições da Educação Básica que me acolheram durante a realização dos meus Estágios Curriculares Supervisionados e que me proporcionaram grandes aprendizados: o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), durante o Estágio I, e a Escola Cidadã Integral Técnica “José Luiz Neto” (ECIT-JLN), durante os Estágios II e III.

Resumo

A Radiação Cósmica de Fundo (em inglês, Cosmic Microwave Background - CMB) é uma radiação eletromagnética (microondas), que advém do cosmos e que foi produzida quando o Universo tinha aproximadamente 380000 anos. Em síntese, essa radiação possui um espectro térmico de corpo negro, foi prevista teoricamente por George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman em 1948 e descoberta por Arno Penzias e Robert Wilson em 1965. Nesse contexto, o presente trabalho centra-se em estudar a CMB, especificamente a sua origem e evolução, e como podemos obter dela informações cosmológicas. Os dados oriundos das observações da CMB assumem papel central no desenvolvimento da cosmologia moderna e em nossa compreensão do passado do Universo. Nesse sentido, o espectro de potência e as suas anisotropias (tanto em temperatura quanto em polarização) nos revela a física por trás da CMB - e, portanto, do Universo primordial - e nos permite verificar a consistência dos mais variados modelos cosmológicos. Os atuais experimentos direcionados à CMB visam, especialmente, uma maior sensibilidade nas medições relativas aos modos B de polarização (um dos entes físicos mais procurados pelos cosmólogos atualmente).

Palavras-chaves: Radiação Cósmica, Universo, Origem, Evolução.

Abstract

The Cosmic Microwave Background (CMB) is electromagnetic radiation (microwaves) that comes from the cosmos and was produced when the Universe was approximately 380,000 years old. In summary, this radiation has a blackbody thermal spectrum, it was theoretically predicted by George Gamov, Ralph Alpher and Robert Herman in 1948 and discovered by Arno Penzias and Robert Wilson in 1965. Therefore, the present work focuses on studying the CMB, specifically its origin and evolution, and how we can obtain cosmological information from it. Data originating from CMB observations play a central role in the development of modern cosmology and in our understanding of the universe's past. In this sense, the power spectrum and its anisotropies (both in temperature and polarization) reveal the physics behind the CMB - and the primordial Universe - and allow us to verify the consistency of the most varied cosmological models. The current experiments directed at the CMB aim, especially, at greater sensitivity in measurements on the B polarization modes (one of the physical entities most sought after by cosmologists today). **Key-words:** Radiation. Cosmic. Origin. Evolution. Universe.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Formação das estruturas: uma nuvem de gás primordial de $10^{15} M_{Sol}$ colapsa formando uma “panqueca”, que se quebra em aglomerados e estes em galáxias.	40
Figura 2 – Cosmologias de Friedmann abertas, planas e fechadas, mostrando como o tamanho do Universo muda com o tempo.	48
Figura 3 – O fator de escala em função do tempo para vários modelos cosmológicos. A inclinação das curvas na época atual t_0 é fixada por medições de H_0 (note que o autor usou $a(t) = R(t)$)	50
Figura 4 – A curva azul é o fator de escala em função do tempo comóvel (o autor fez $\eta = \tau$ nessa imagem), obtido pela resolução da equação de Friedmann. As três curvas pontilhadas pretas são os parâmetros de densidade de radiação (Ω_R), matéria (Ω_M) e energia escura, considerada como um fluido cosmológico constante (Ω_Λ)	65
Figura 5 – Representação bidimensional do espaço de fase.	68
Figura 6 – Representação bidimensional de um processo no espaço de fase.	72
Figura 7 – Representação das interações entre diferentes entes cosmológicos.	82
Figura 8 – Representação de uma região do cósmos com diferentes temperaturas.	85
Figura 9 – O problema do horizonte.	97
Figura 10 – O raio de Hubble comóvel em função do fator de escala a	101
Figura 11 – Algumas partículas na grade comóvel durante (esquerda) e no final da inflação (direita).	102
Figura 12 – Perturbações espaço-temporais devido a uma onda gravitacional.	110
Figura 13 – Evolução das ondas gravitacionais em função do tempo comóvel.	111
Figura 14 – A evolução das perturbações na era da radiação (na figura, o autor fez $C = R$).	116
Figura 15 – Gráficos de Φ x a para diferentes valores de k	126
Figura 16 – A evolução da perturbação de densidade de matéria escura em função do fator de escala para diferentes valores de k	128
Figura 17 – A evolução de P_L em função de k para diferentes valores de redshift z	130
Figura 18 – A evolução de η em função de a	132
Figura 19 – Representação da região de super-horizonte (hachurada em cinza).	134
Figura 20 – Evolução da perturbação Φ em função de a para diferentes valores de modos k	136
Figura 21 – Representação da região de cruzamento do horizonte (hachurada em verde).	137
Figura 22 – A evolução do potencial durante o cruzamento do horizonte.	140

Figura 23 – A evolução de δ_c em função do fator de escala durante o cruzamento do horizonte.	142
Figura 24 – A evolução do sub-horizonte (região hachurada em cinza).	143
Figura 25 – Evolução das perturbações na matéria escura no sub-horizonte.	146
Figura 26 – O espectro de potência linear dos modos k	149
Figura 27 – Evolução do fator de crescimento em função do fator de escala a	151
Figura 28 – Evolução da função de transferência em função do fator de escala para diferentes massas de neutrinos	152
Figura 29 – Esquema simplificado de um radiotelescópio da época.	161
Figura 30 – Desacoplamento da matéria e radiação, quando $T \approx 3000\text{K}$: após o desacoplamento, os fótons (setas onduladas) se propagaram livremente, uma vez que os elétrons e os prótons se combinaram para formar átomos de Hidrogênio	166
Figura 31 – A fração de elétrons livres em função do redshift z	168
Figura 32 – As soluções do oscilador harmônico amortecido para diferentes valores de força e frequência.	171
Figura 33 – Representação de um fóton que é dispersado diversas vezes em um mar de elétrons.	172
Figura 34 – Perturbações na temperatura de uma onda plana com número de onda k	172
Figura 35 – O espectro de corpo negro de três corpos de diferentes temperaturas (a posição do pico depende da temperatura T e a área sob a curva depende de T^4).	175
Figura 36 – Monopolo da CMB observado pelo WMAP.	176
Figura 37 – Dipolo da CMB e redshift associado ao movimento relativo entre a via láctea e o grupo local observados pelo WMAP.	176
Figura 38 – Flutuações de temperatura da CMB observadas pelo WMAP.	177
Figura 39 – Flutuações de temperatura da CMB obtidas pelo Planck.	177
Figura 40 – Anisotropias da CMB ΔT (em μK) medida pela sonda WMAP.	178
Figura 41 – Três diferentes anomalias (atualmente ainda inexplicadas) na CMB que foram detectadas nos últimos anos. As figuras da esquerda foram obtidas do WMAP e as da direita da análise Wavelet.	181
Figura 42 – Anisotropias do acoplamento forte, para uma perturbação de escala muito maior do que o caminho livre médio dos fótons $1/ \tau' $	187
Figura 43 – Assinaturas oriundas de um modo "congelado" após o desacoplamento matéria-radiação.	188
Figura 44 – Representação do quadrupolo ($l = 2$), hexapolo ($l = 3$) e octupolo ($l = 4$) de radiação.	189
Figura 45 – Comportamento do monopolo $\theta + \Psi$ e do dipolo $3\theta_1$ na recombinação na cosmologia fiducial.	191

Figura 46 – Comportamento de k_D^{-1} em relação ao fator de escala a	194
Figura 47 – Os comportamentos dos integrandos de θ_l	196
Figura 48 – A linha pontilhada mostra o platô de Sachs-Wolfe invariante de escala, que é previsto pela expressão (10.51).	200
Figura 49 – Comportamento de $\theta_0 + \Psi$ em função de l	201
Figura 50 – O espectro de potência da CMB.	203
Figura 51 – Representação do espectro de flutuações de temperatura.	204
Figura 52 – Diferentes comportamentos geométricos do Universo.	205
Figura 53 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de Ω_K	206
Figura 54 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de τ_{rei}	208
Figura 55 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de $\Omega_b h^2$	209
Figura 56 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de $\Omega_c h^2$	210
Figura 57 – Coordenadas de um ponto na esfera de Poincaré.	217
Figura 58 – Possíveis estados de polarização de uma onda eletromagnética.	218

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de a , H e w	63
Tabela 2 – Alguns resultados experimentais obtidos para a temperatura da CMB.	164
Tabela 3 – Valores atuais de importantes parâmetros cosmológicos.	211

Lista de abreviaturas e siglas

CMB	(Cosmic Microwave Background - Radiação C3smica de Fundo)
FLRW	(Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker)
GUT	(Grande Teoria de Unifica33o)
CP	(Conjugada-Paridade)
Λ CDM	(Lambda Cold Dark Matter - Modelo cosmol3gico que considera a energia escura e a mat3ria escura fria)
CN	(Cianog3nio)
ISW	(Efeito Sachs-Wolfe Integrado)
SZ	(Efeito Sunyaev-Zel'dovich)
UV	(Ultravioleta)
EUA	(Estados Unidos da Am3rica)
EDO	(Equa33o Diferencial Ordin3ria)
VLA	(Very Large Array)
DASI	(Degree Angular Scale Interferometer)
SZA	(The Sunyaev-Zeldovich Array)
FIRS	(Far Infra-Red Survey)
MAXIMA	(Millimeter Anisotropy EXperiment IMaging Array)
COBE	(Cosmic Background Explorer)
WMAP	(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)
NASA	(National Aeronautics and Space Administration)
CBI	(Cosmic Background Imager)
ACBAR	(Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver)
ESA	(European Space Agency)
JAXA	(Japanese Space EXploration Agency)

PIXIE (Polar Ionosphere X-Ray Imaging Experiment)

LiteBIRD (Light satellite for the studies of B-mode polarization and Inflation from cosmic background Radiation Detection)

Lista de símbolos

$=$	Igualdade
$<$	Menor que
$>$	Maior que
\geq	Maior ou igual a
\leq	Menor ou igual a
\gg	Muito maior que
\ll	Muito menor que
\propto	Proporcional a
\approx	Aproximadamente igual a
\neq	Diferente de
\sim	Da ordem de
\equiv	Equivalente a
\rightarrow	Para
\pm	Mais ou menos
\mp	Menos ou mais
∂	Derivada parcial
\int	Integral
\cdot	Produto escalar
\times	Produto vetorial
\leftrightarrow	Relação recíproca
\vec{x}	Grandeza vetorial x
∇	Operador nabla
\hat{x}	Vetor unitário na direção x

∞	Infinito
\dagger	Adaga
$\langle x \rangle$	Valor esperado da grandeza x
\oplus	Polarização linear vertical-horizontal
\otimes	Polarização linear oblíqua
Γ	Letra grega gama maiúscula
γ	Letra grega gama minúscula
Λ	Letra grega Lambda maiúscula
λ	Letra grega lambda minúscula
Σ	Letra grega sigma maiúscula
σ	Letra grega sigma minúscula
Δ	Letra grega delta maiúscula
δ	Letra grega delta minúscula
Ω	Letra grega ômega maiúscula
ω	Letra grega ômega minúscula
Π	Letra grega pi maiúscula
π	Letra grega pi minúscula
Θ	Letra grega theta maiúscula
θ	Letra grega theta minúscula
Φ	Letra grega phi maiúscula
ϕ	Letra grega phi minúscula
Ψ	Letra grega psi maiúscula
ψ	Letra grega psi minúscula
ϵ	Letra grega épsilon minúscula
τ	Letra grega tau minúscula
ν	Letra grega ní minúscula

ρ	Letra grega rho minúscula
μ	Letra grega mí minúscula
χ	Letra grega chi minúscula
η	Letra grega eta minúscula
α	Letra grega alfa minúscula
β	Letra grega beta minúscula

Sumário

1	UMA IDEIA GERAL DA ABORDAGEM	24
2	UMA BREVE BIOGRAFIA DO COSMOS	29
2.1	O que iremos estudar neste capítulo?	29
2.2	A era de Planck	29
2.3	A era da inflação cósmica	30
2.4	O congelamento cósmico	31
2.5	A bariogênese	31
2.6	A transição quark → hádron: a era hadrônica	33
2.7	A era leptônica	33
2.8	A nucleossíntese do Big Bang	34
2.9	A recombinação e a formação de átomos neutros	36
2.10	O fim da era da radiação	38
2.11	A formação das galáxias	38
2.12	Mais sobre galáxias e aglomerados	41
3	A FAMOSA TEORIA DO BIG BANG	44
3.1	O que iremos estudar neste capítulo?	44
3.2	Alguns suportes observacionais	44
3.2.1	A homogeneidade	44
3.2.2	A expansão cósmica	44
3.2.3	A idade e o tamanho do Universo	46
3.2.4	Outras evidências do Big Bang	46
3.3	Os modelos cosmológicos	47
3.3.1	A métrica de Friedmann-Lêmaître-Roberson-Walker (FLRW)	47
3.3.2	Sobre a dinâmica	48
3.3.3	A densidade crítica	50
3.3.4	Os modelos que incluem radiação	51
3.4	Sobre a densidade do Universo	52
4	ABRINDO O UNIVERSO HOMOGÊNIO: A RELATIVIDADE GERAL	55
4.1	O que iremos estudar neste capítulo?	55
4.2	Aspectos físicos de um Universo em expansão	55
4.2.1	O princípio cosmológico	55
4.2.2	A distância comóvel	56
4.2.3	O tempo de Hubble	58

4.2.4	O raio de Hubble	58
4.2.5	O horizonte de partículas e a causalidade	59
4.3	As equações de campo gravitacional e a evolução de fundo	60
4.4	As equações de Friedmann	61
4.5	A equação da aceleração	62
4.6	A equação da continuidade	62
4.7	Análise quantitativa da expansão cosmológica	63
5	FECHANDO O UNIVERSO HOMOGÊNIO: AS EQUAÇÕES DE BOLTZMANN	67
5.1	O que iremos estudar neste capítulo?	67
5.2	Os princípios fundamentais da equação de Boltzmann	67
5.3	A construção matemática das equações de Boltzmann	68
5.4	A equação de Boltzmann associada a um Universo homogêneo e em expansão	69
5.5	Um pouco de física de partículas: os termos de colisão	71
6	FUGINDO DA HOMOGENEIDADE	76
6.1	O que iremos estudar neste capítulo?	76
6.2	Uma breve introdução	76
6.3	Fundamentos da teoria de perturbação	77
6.3.1	A ideia geral da teoria	77
6.3.2	As funções e equações de perturbação	78
6.4	O plano de fundo e as perturbações	79
6.4.1	Sobre um espaço-tempo perturbado	79
6.4.2	A equação da geodésica	81
6.5	As perturbações nos diferentes constituintes do Universo	83
6.5.1	A equação de Boltzmann perturbada para fótons	83
6.5.2	O efeito do espalhamento Compton nos termos de colisão	84
6.6	Um pouco sobre o formalismo de Fourier	86
6.6.1	O acoplamento de modos k	87
6.7	As equações de Boltzmann para os diferentes constituintes do Universo	88
6.7.1	A equação de Boltzmann para fótons	88
6.7.2	A equação de Boltzmann para matéria escura fria	89
6.7.3	A equação de Boltzmann para bárions	91
6.7.4	A equação de Boltzmann para neutrinos	93
7	INDO MAIS A FUNDO NO UNIVERSO NÃO-HOMOGÊNIO	96
7.1	O que iremos estudar neste capítulo?	96
7.2	Considerações iniciais	96

7.3	A inflação	98
7.3.1	A natureza da rápida expansão	98
7.3.2	Mais sobre o período inflacionário	101
7.4	Sobre as perturbações tensoriais	105
7.4.1	As ondas gravitacionais	105
7.4.2	A matriz de perturbação	106
7.4.3	As perturbações nos símbolos de Christoffel	107
7.4.4	O tensor de Ricci perturbado	107
7.4.5	As equações de Einstein perturbadas	108
7.4.6	O espectro de potência de perturbação	111
7.5	Sobre as perturbações escalares	113
7.5.1	Os campos escalares em um fundo homogêneo	114
7.5.2	As perturbações de super-horizonte	115
7.5.3	As equações de Einstein com perturbações escalares	118
7.5.4	As componentes das equações de Einstein	119
7.6	As equações de Einstein-Boltzmann em tempos primitivos	121
8	A EVOLUÇÃO “LINEAR” DO UNIVERSO	125
8.1	O que iremos estudar neste capítulo?	125
8.2	Comentários iniciais	125
8.3	Sobre o crescimento das estruturas	125
8.3.1	As três etapas da evolução	126
8.3.2	A hierarquia de Boltzmann	130
8.4	A evolução das grandes escalas	133
8.4.1	A evolução do super-horizonte	133
8.4.2	Sobre o cruzamento do horizonte	136
8.5	A evolução das pequenas escalas	138
8.5.1	Mais sobre o cruzamento do horizonte	139
8.5.2	Sobre a evolução do sub-horizonte	143
8.6	A função de transferência	146
8.6.1	Algumas propriedades estatísticas	146
8.6.2	A função $T(k)$	148
8.7	O fator de crescimento	150
8.8	Fechando a análise: bárions, neutrinos massivos e matéria escura	152
9	O FÓSSIL COSMOLÓGICO: A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO	157
9.1	O que iremos estudar neste capítulo?	157
9.2	A história da descoberta	157
9.2.1	O contexto teórico da Cosmologia na época	157
9.2.2	A previsão teórica da CMB	157

9.2.3	As detecções “cegas” da CMB e as técnicas de medição	158
9.2.4	O “chiado” de Penzias e Wilson	160
9.2.5	A coerência com as previsões teóricas	162
9.2.6	As consequências da descoberta da CMB	163
9.3	A radiação que estamos tratando é, de fato, cósmica?	164
9.4	O contexto cosmológico de formação da radiação	165
9.5	O papel das oscilações e das perturbações de temperatura na CMB	170
9.6	Características físicas e estatísticas da CMB	173
9.6.1	Algumas propriedades da CMB	173
9.6.2	Os efeitos que influenciam a CMB	178
9.6.3	Sobre o ferramental matemático	179
9.6.4	Algumas discordâncias científicas e anomalias da CMB	181
10	AS ANISOTROPIAS DA CMB	184
10.1	O que iremos estudar neste capítulo?	184
10.2	Algumas considerações iniciais	184
10.3	As anisotropias de larga escala angular	185
10.4	Sobre as oscilações acústicas	186
10.4.1	A equação de Boltzmann e o acoplamento forte	186
10.4.2	As soluções do acoplamento forte	190
10.5	O amortecimento da difusão	192
10.6	Heterogeneidades importantes	194
10.6.1	O fluxo livre	194
10.6.2	O espectro de potência angular	197
10.7	O espectro de potência da CMB	199
10.7.1	As grandes escalas angulares	199
10.7.2	Os picos acústicos	201
10.8	Os parâmetros cosmológicos	203
10.8.1	A curvatura e Λ	205
10.8.2	Amplitude, índice espectral e profundidade óptica	207
10.8.3	As densidades bariônica e de matéria escura	209
11	A POLARIZAÇÃO DA CMB	214
11.1	O que iremos estudar neste capítulo?	214
11.2	Os parâmetros de Stokes	214
11.3	A esfera de Poincaré	216
11.4	A polarização de campo da CMB	219
11.4.1	Alguns elementos das polarizações	219
11.4.2	Sobre a polarização da CMB	221
11.5	Os modos E e B	222

11.6	Comentários sobre o cálculo de $\delta T/T$ e dos $C(l)$'s	224
11.6.1	Uma breve revisão	225
11.6.2	Sobre a variação fracionária de temperatura $\delta T/T$	226
11.6.3	Sobre o espectro de potência angular $C(l)$	227
11.7	A poluição cósmica: os contaminantes da CMB	229
11.7.1	O efeito Sachs-Wolfe e as lentes gravitacionais	230
11.7.2	A emissão síncrotron galáctica	234
11.7.3	A emissão free-free	234
11.7.4	A emissão de poeira térmica	235
11.7.5	Os efeitos magnéticos	236
11.7.6	As fontes compactas	239
11.7.7	Outros efeitos poluentes	239
12	ALGUMAS PERSPECTIVAS FUTURAS SOBRE O ESTUDO DA CMB	243
12.1	O que iremos estudar neste capítulo?	243
12.2	O panorama atual	243
12.3	O que está no horizonte?	243
13	A TÍTULO DE CONSIDERAÇÕES FINAIS	247
	REFERÊNCIAS	248

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 01 UMA IDEIA GERAL DA ABORDAGEM

“Na vida, não existe nada a temer, mas a entender”.

(Marie Curie)

1 Uma ideia geral da abordagem

Informações importantes sobre fenômenos físicos antigos da evolução do Universo, e também relativamente mais recentes, podem ser extraídas da análise da CMB, uma relíquia dos estágios iniciais da evolução do Universo, permitindo conhecer algo sobre sua composição e sua história. As observações da CMB são, portanto, uma base em que se firma a Cosmologia moderna de precisão, além de representar um divisor de águas na história da Cosmologia (NASELSKY; NOVIKOV; NOVIKOV, 2006); (PARTRIDGE, 2006).

A temperatura da CMB, em torno de 2,725 K, é uma das medidas mais precisas na Cosmologia (ROSSMANITH, 2013); (FIXSEN, 2009). A uniformidade observada na temperatura da CMB vinda de diversas direções do céu, concorda com o Princípio Cosmológico que, na Teoria do Big Bang, assume a homogeneidade e isotropia do Universo em grande escala. Neste sentido, a CMB é uma forte evidência em favor da Teoria do Big Bang.

A CMB foi prevista na década de 1940 por George Gamow (GAMOW, 1946), Ralph Alpher e Robert Herman (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948); (ALPHER; HERMAN, 1950). Mais de duas décadas depois, em 1965, essa radiação foi detectada pelos radioastrônomos Arno Penzias e Robert Wilson (PENZIAS; WILSON, 1965), fortalecendo a ideia defendida pela Teoria do Big Bang de que o Universo surgiu de um estado muito quente e denso (Hot Big Bang), em que radiação e matéria estavam acopladas em equilíbrio térmico (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948); (FABRIS; AL, 2016).

A radiação cósmica de fundo foi emitida quando o Universo tinha cerca de 380000 anos e a temperatura havia baixado o suficiente para que os elétrons pudessem ser aprisionados em poços de potencial de núcleos de átomos de hidrogênio. Na faixa de tempo onde ocorreu a formação dos primeiros átomos, os fótons desacoplaram da matéria e puderam viajar até atingirem o nosso aparelho de observação. Esses fótons da CMB possuem um espectro de corpo negro e carregam informações sobre a temperatura e sobre a densidade de matéria na última superfície de espalhamento (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

Experimentos importantes estiveram e estão dedicados a analisar a CMB, principalmente as suas anisotropias, porque estas trazem informações sobre a formação de estruturas, como galáxias e aglomerados de galáxias. Dentre esses experimentos, podemos citar: Tenerife, VLA (Very Large Array), DASI (Degree Angular Scale Interferometer), SZA (The Sunyaev-Zeldovich Array), FIRS (Far Infra-Red Survey), MAXIMA (Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array), Boomerang (Balloon Observations of Millime-

tric Extragalactic Radiation and Geophysics), COBE (Cosmic Background Explorer), WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) e mais recentemente o satélite Planck (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). Particularmente, o COBE foi lançado pela agência norte americana National Aeronautics and Space Administration (NASA) em 1990. As medidas foram refinadas pelo WMAP, lançado pela NASA em 2001. Os dados mais recentes vêm do satélite Planck, uma colaboração da NASA e da European Space Agency (ESA), lançado em 2009 (EVANS, 2015); (PETTINARI, 2016).

Os dados coletados nessas observações têm contribuído para que a comunidade científica possa entender melhor o Universo, porque os dados confirmam previsões, como a homogeneidade e isotropia em grande escala, mas também alimentam novos desafios, novos problemas a serem solucionados, como é o caso do problema do horizonte, que diz respeito justamente à observação da homogeneidade e isotropia (BAUMANN; MCALISTER, 2015); (DIMOPOULOS, 2021).

E as anisotropias? Que informações são retiradas da observação das anisotropias? Trabalhos recentes importantes, fundamentados nos dados da missão Planck, apresentam valores de parâmetros cosmológicos extraídos da análise do espectro de potência da CMB (DURRER, 2020); (GIOVANNINI, 2008); (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Essas são duas das questões motivadoras deste trabalho.

A presente monografia tem como objetivo principal a busca pelo entendimento do que é a CMB e de como podemos obter dela informações (como a evolução do Universo e os valores de importantes parâmetros cosmológicos). Além disso, pontuamos que este trabalho busca fornecer uma base teórica abrangente (especialmente direcionada a alunos de graduação que são simpatizantes do tema e aqueles que pretendem iniciar os estudos no tema) e que mostre detalhadamente as ferramentas conceituais e matemáticas utilizadas.

A relevância deste trabalho é evidente quando entendemos que o estudo da CMB e de suas propriedades é uma grande fonte de informações sobre o Universo primordial, uma vez que é o observável cosmológico mais antigo conhecido (um verdadeiro fóssil cosmológico!). Nesse sentido, esta investigação se motiva no potencial que a CMB tem de fornecer informações relevantes sobre o nosso Universo (passado e presente), como a sua idade, geometria e conteúdo.

Em termos metodológicos podemos afirmar que esta monografia é resultado de uma pesquisa bibliográfica. Nesse sentido, para fundamentar este trabalho, realizamos uma revisão da literatura atual que trata da CMB, incluindo livros e artigos de revistas especializadas em Cosmologia. Por fim, podemos citar que a sequência de apresentação dos conteúdos deste trabalho foi elaborada com vistas à construção gradativa das ideias que, em geral, culminam em equações ou em resultados ligados à CMB (especialmente às anisotropias e à polarização).

Esta monografia é dividida em 13 capítulos, cuja sinopse segue:

- **Capítulo 01:** Na introdução buscamos fazer uma breve síntese do nosso objeto de estudo (a CMB) e apresentamos a estrutura do trabalho.
- **Capítulo 02:** Este capítulo será dedicado à história térmica do Universo, desde a era de Planck até a formação das galáxias. Nesta seção explanaremos as principais fases do Universo (ordenadas cronologicamente) e apresentaremos alguns dados que julgamos relevantes para se ter noção da dimensão das energias e temperaturas envolvidas em cada estágio de evolução do cosmos.
- **Capítulo 03:** Essa parte da monografia tratará dos aspectos fundamentais do Big Bang, a teoria cosmológica mais aceita na atualidade. Iniciaremos a abordagem falando sobre alguns suportes observacionais, que sustentam a teoria do Big Bang (e o ferramental matemático envolvido neles), passaremos pelos modelos cosmológicos e terminaremos o capítulo tecendo breves comentários sobre a densidade do cosmos.
- **Capítulo 04:** Nesse ponto vamos introduzir a teoria que melhor descreve o comportamento geométrico (e gravitacional) do Universo: a Relatividade Geral. Começaremos falando sobre alguns elementos importantes para entendermos o comportamento de um Universo em expansão e trataremos das equações de campo gravitacional e suas derivações: equações de Friedmann, da aceleração e da continuidade. Finalizaremos essa parte fazendo uma breve análise qualitativa da expansão cosmológica (baseando-se na teoria inflacionária).
- **Capítulo 05:** Nesse capítulo trataremos do ferramental matemático que é destinado à descrição do conteúdo do Universo: as equações de Boltzmann. Iniciaremos com a construção matemática da equação de Boltzmann a partir de alguns princípios fundamentais, citaremos alguns passos importantes para a obtenção da referida equação para o caso de um Universo homogêneo e em expansão e terminaremos este capítulo falando sobre a dedução dos termos de colisão.
- **Capítulo 06:** Posteriormente, no capítulo 06, vamos nos dedicar, basicamente, ao tratamento das perturbações cosmológicas. Daremos início à seção apresentando alguns elementos da teoria de perturbação, passaremos pelas perturbações de um Universo com métrica Friedmann-Lemaitre-Roberson-Walker (FRLW) e dissertaremos sobre: o efeito das perturbações nos termos de colisão, o formalismo de Fourier e as equações de Boltzmann para diferentes constituintes do Universo (fótons, bárions, neutrinos e matéria escura).
- **Capítulo 07:** Esse capítulo buscará oferecer uma abordagem mais profunda sobre as não-homogeneidades do Universo. Após algumas considerações iniciais, versaremos sobre as perturbações tensoriais (especialmente as ondas gravitacionais e as

perturbações nas equações de Einstein), escalares (também nas equações de Einstein) e encerraremos esse capítulo falando sobre as equações de Einstein-Boltzmann em tempos primitivos.

- **Capítulo 08:** O capítulo 08 será dedicado à teoria do crescimento linear das estruturas cosmológicas e nele falaremos, em sequência, sobre: o crescimento das estruturas, a evolução das grandes escalas (o super-horizonte e o cruzamento do horizonte) e das pequenas escalas (o cruzamento do horizonte e o sub-horizonte), a função de transferência e o fator de crescimento.
- **Capítulo 09:** Essa parte será inteiramente dedicada ao objeto de estudo desse trabalho: a CMB. Iniciaremos com breves aspectos históricos sobre a descoberta da CMB, seguiremos com o tratamento do contexto cosmológico de formação da radiação (a época da recombinação), passaremos pelas flutuações de temperatura no Universo primordial e encerraremos o capítulo apresentando algumas propriedades físicas e estatísticas da CMB.
- **Capítulo 10:** As anisotropias da CMB serão abordadas no capítulo 10. Começaremos pelas anisotropias de larga escala angular e discorreremos sobre: as oscilações acústicas, o amortecimento da difusão e algumas heterogeneidades importantes. Completaremos a discussão inicial sobre as anisotropias apresentando o espectro de potência da CMB e mostrando quais os efeitos de diversos parâmetros cosmológicos nesse espectro.
- **Capítulo 11:** Em seguida, neste capítulo, faremos um estudo da polarização da CMB. Daremos início à discussão definindo e abordando os parâmetros de Stokes, a esfera de Poincaré e a polarização de campo da CMB. Após isso, trataremos dos modos E e B, comentaremos como são feitos os cálculos de $C(l)$ e de $\delta T/T$ e finalizaremos o capítulo discorrendo sobre os contaminantes cósmicos da CMB.
- **Capítulo 12:** Dedicaremos esta parte às perspectivas futuras do estudo da CMB. Nesse sentido, citaremos as evoluções obtidas ao longo dos últimos anos e apresentaremos alguns experimentos que se encontram em desenvolvimento com o objetivo de melhorar a detecção dos dados oriundos da CMB e, assim, de obter maiores restrições para os valores dos parâmetros cosmológicos.
- **Capítulo 13:** No último capítulo teceremos os comentários finais sobre o presente trabalho e sobre o tema estudado.

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 02 UMA BREVE BIOGRAFIA DO COSMOS

“Somos os representantes do cosmos. Somos um exemplo do que o hidrogênio pode fazer com 15 bilhões de anos de evolução cósmica”.

(Carl Sagan)

2 Uma breve biografia do cosmos

2.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“Uma breve biografia do cosmos” aborda uma série de acontecimentos cronologicamente ordenados sobre a evolução do Universo. Neste parte traremos, além das principais características de cada era cosmológica, de alguns valores de grandezas como energia e temperatura que a teoria cosmológica padrão prevê. A sua importância dessa discussão está atrelada à necessidade de conhecermos, com certo detalhamento, as fases evolutivas do Universo até se transformar no que observamos hoje.

2.2 A era de Planck

A era de Planck é o nome dado ao período inicial da evolução do Universo no qual todas as estruturas estavam reunidas em uma dimensão muito pequena, que caracteriza o comprimento-limite imposto pela teoria quântica: o comprimento de Planck (da ordem de 10^{-35}m). A era de Planck cobre o intervalo de tempo que vai de 10^{-43} a 10^{-35} segundos depois do Big Bang. É estimado que a temperatura durante esta época diminuiu de 10^{32}K a 10^{27}K (DODD; GRIPAIS, 2020). Nessa era, o espaço, o tempo, a energia e toda a matéria estavam reunidos em uma minúscula região, que estava sob a influência de uma única força fundamental.

Essa força era resultado da união das 4 interações fundamentais conhecidas hoje: a interação nuclear forte (que atua unindo os quarks e dos núcleons e é descrita pela Cromodinâmica Quântica), a interação nuclear fraca (que atua mediando os decaimentos radioativos), a interação eletromagnética (que atua nos fenômenos associados à eletricidade e ao magnetismo e é descrita pela Eletrodinâmica Quântica) e a interação gravitacional (que atua atrativamente em corpos massivos e é descrita pela Relatividade Geral).

Dito isso, para se compreender satisfatoriamente a era de Planck, é necessária uma teoria de gravitação quântica (ou de uma Grande Teoria de Unificação - GUT), uma vez que a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica encontravam-se, nessa época, fundidas. No entanto, até os presentes dias, se procura uma maneira de unificar a Relatividade Geral à Mecânica Quântica e, mais precisamente, unir a força gravitacional às demais interações fundamentais, cuja unificação é descrita, com certa precisão, pelo Modelo Padrão.

Em síntese, se pode analisar a era de Planck em dois instantes distintos:

- 10^{-43} segundos (onde: $T \approx 10^{32}\text{K} \approx 10^{19}\text{GeV}$):

O Universo emerge da era Planck, na qual a gravidade quântica era dominante. A densidade de energia é dominada por partículas relativísticas e está caindo com $\rho \propto 1/a^4 \propto T^4$ (DODD; GRIPAIS, 2020), em que a representa o raio do Universo e T é a temperatura. Ainda nas proximidades desse instante, o tempo de Planck, a interação gravitacional se separou das outras três forças fundamentais.

- 10^{-35} segundos (onde $T \approx 10^{28} K \approx 10^{15} GeV$):

Nesse ponto estima-se que o Universo observável (que hoje tem cerca de 10^{10} anos-luz de tamanho) se encontrava confinado em um volume da ordem de um milímetro cúbico (DODD; GRIPAIS, 2020). Neste instante, a interação forte se separa das forças eletromagnética e fraca e, pouco tempo mais tarde, a bariogênese levou à dominância cosmológica da matéria sobre a antimatéria.

2.3 A era da inflação cósmica

Nessa fase se dá origem à assimetria entre matéria e antimatéria, ao mesmo tempo em que os monopólos magnéticos desaparecem (CIÊNCIA, 2016). Além disso, a inflação cósmica fez com que o Universo passasse por uma rápida expansão em um intervalo de tempo minúsculo. De acordo com o modelo inflacionário proposto por Guth (em 1981), a inflação cósmica ocorreu quando o Universo tinha apenas 10^{-35} segundos de idade.

Em meio a essa época, acredita-se que o raio do Universo aumentou de um fator de 10^{43} (DODD; GRIPAIS, 2020). Essa brusca expansão fez com que a geometria cósmica, que inicialmente era curva, se tornasse praticamente plana. Em virtude disso, o período inflacionário provocou uma forte queda de temperatura no Universo, apesar da energia liberada na transição de fase (também denominada transição de vácuo) ter sido transformada em energia térmica. Em seguida, a referida energia térmica foi transferida para as partículas, que foram reaquecidas à mesma temperatura que teriam se a inflação não tivesse ocorrido.

Quando a temperatura caiu para $T \approx 10^{15} K \approx 10^2 GeV$ ocorreu a quebra de simetria eletrofraca e o Universo observável se encontrava contido em uma região de 10^{14} cm de tamanho (DODD; GRIPAIS, 2020).

Um dos modelos mais aceitos hoje para a explicação da origem da inflação é o seguinte: quando o Universo primordial se expandiu (e, conseqüentemente, esfriou), atingindo uma temperatura crítica de $10^{14} GeV$, o vácuo simétrico se tornou instável. Nessa época, a energia do vácuo simétrico se tornou maior do que a energia do vácuo de quebra de simetria. Esse “desequilíbrio” energético fez com que o Universo passasse por uma transição de fase, na qual passou de um estado de maior energia para um de menor, e isto motivou a inflação exponencial.

Com o fim do período inflacionário (em $t \approx 10^{-32}$ s) inicia-se a era da radiação, onde o Universo reaqueceu e o fator de escala se comportava como: $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ (DODD; GRIPAIS, 2020). Os eventos mais notáveis da história cósmica ocorreram quando a expansão era dominada pela radiação, particularmente em redshifts $z \geq 10^4$, onde a temperatura $T \propto t^{\frac{1}{2}}$ e tinha escala de:

$$T(t) = \frac{10^{10} K}{\sqrt{t}} \approx \frac{1 MeV}{\sqrt{t}}, \quad (2.1)$$

com t expresso em segundos.

2.4 O congelamento cósmico

Ao fim da inflação, o Universo consistia em pares partícula-antipartícula (incluindo quarks e léptons) e fótons. Nessa época, as quantidades de cada espécie de partícula eram aproximadamente as mesmas e essa igual proporção era devida a reações como $e^- + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma$, que acoplavam a matéria (elétrons e pósitrons) aos campos de radiação (fótons).

À medida em que o Universo se expandiu e houve a queda da temperatura e da densidade, as partículas (que se acoplavam cada vez mais fortemente) puderam sair do contato térmico com a radiação: a esse fenômeno dá-se o nome de “congelamento”. A existência do congelamento dependeu essencialmente da taxa Γ de reação das partículas: se essa taxa fosse menor que a taxa de expansão do Universo, as partículas deixavam de reagir e saíam do contato térmico com os demais constituintes do Universo, logo, o congelamento ocorreu quando $H \geq \Gamma$, em que H é o parâmetro de Hubble, que mede a taxa de expansão do Universo.

As partículas de interação fraca (como os neutrinos, por exemplo) que congelaram cedo, quando a temperatura $kT \gg mc^2$ (em que $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K representa a constante de Boltzmann e $c = 3 \times 10^8$ m/s é velocidade da luz no vácuo), não foram afetadas, apesar da sua densidade numérica simplesmente ter diminuído quando $n \propto a^{-3} \propto (z+1)^3$ ao fim do congelamento (essas partículas são chamadas de “quentes”). Por outro lado, quando $kT \sim mc^2$, a densidade numérica n das partículas que ainda estavam fortemente acopladas à radiação começou a depender (aproximadamente) da seção térmica média de choque $\bar{\sigma}$: $n \propto (m\bar{\sigma})^{-1}$ (essas partículas são chamadas de “frias”).

2.5 A bariogênese

Após a era inflacionária inicia-se a bariogênese. Acredita-se que esse processo tenha sido o responsável pela geração do excesso de bárions, através dos decaimentos de partículas muito massivas em $t = 10^{-25}$ s.

Para que um excesso de bárions fosse possível em um Universo inicialmente simétrico, seriam necessárias três condições: a existência de reações que violassem o número bariônico; as simetrias de carga conjugada (C) e de carga conjugada-paridade (CP) também deveriam ser violadas; e a expansão do Universo deveria proporcionar um afastamento temporário do equilíbrio térmico. A partir disso, o excesso de bárions teria sido gerado após a inflação (PARTRIDGE, 2006).

Para entender como surgiu o excesso de bárions vamos supor a existência de uma partícula massiva (o bóson X), que violou a conservação do número bariônico em seu decaimento. Em seguida, vamos supor também que a taxa de decaimento Γ_X era menor que a taxa H de expansão do Universo, de modo que os bósons X saíram do equilíbrio térmico e permaneceram abundantes à medida em que decaíram. Nesse ponto, podemos assumir a existência de dois canais de decaimento possíveis, que produzem diferentes números de bárions por decaimento. Se r for a probabilidade do decaimento ocorrer pelo primeiro canal, então $(1 - r)$ representará a probabilidade de ocorrência pelo segundo canal. Com base nisso, o número de bárions por decaimento do bóson X gerado por vários processos desse tipo será:

$$N = rN_1 + (1 - r)N_2, \quad (2.2)$$

em que N_i representa a quantidade de bárions gerados pelo i -ésimo canal de decaimento.

Agora vamos considerar que, durante a época da simetria matéria-antimatéria, deve ter existido um \bar{X} para cada X , que decaíam em \bar{N} antibárions assim:

$$\bar{N} = \bar{r}N_1 + (1 - \bar{r})N_2. \quad (2.3)$$

Dessa maneira, o número líquido de bárions δN gerado a partir da aniquilação de um par $\bar{X}X$ foi:

$$\delta N \equiv N - \bar{N} = (r - \bar{r})(N_1 - N_2). \quad (2.4)$$

De acordo com a primeira condição imposta, devemos ter $N_1 \neq N_2$, e a segunda condição permite que $(r - \bar{r}) \neq 0$ (PARTRIDGE, 2006). Como o bóson X e as suas propriedades são desconhecidas, não conseguimos calcular nem $(r - \bar{r})$ e nem δN . No entanto, observações astronômicas nos permitem avaliar δN aproximadamente, escrevendo-o como uma razão de densidades numéricas de duas espécies:

$$\delta N = \frac{n_b}{n_X + n_{\bar{X}}}, \quad (2.5)$$

em que n_b representa a densidade numérica de bárions no final da bariogênese, e n_X e $n_{\bar{X}}$ são as densidades numéricas do bóson X e de sua antipartícula antes dos processos de decaimento. Cada decaimento de X (ou de \bar{X}) produziu um ou dois quarks (dependendo das probabilidades r e \bar{r}), logo:

$$\delta N \approx \frac{n_b}{3n_q}. \quad (2.6)$$

Além disso, nessa época, as densidades numéricas de quarks (n_q) e de fótons (n_γ) eram aproximadamente iguais, então (PARTRIDGE, 2006):

$$\delta N \approx \frac{1}{3} \left(\frac{n_b}{n_\gamma} \right), \quad (2.7)$$

onde $n_b/n_\gamma \sim 10^{-9}$.

2.6 A transição quark \rightarrow hádron: a era hadrônica

Após o decaimento dos bósons X e \bar{X} (em $t = 10^{-10}$ s após o Big Bang, aproximadamente) o Universo era constituído de fótons, léptons e pares quark-antiquark (com uma quantidade ligeiramente maior de partículas em relação a antipartículas). Ao se atingir uma temperatura de $T \approx 3 \times 10^{12}$ K ≈ 300 MeV dizemos que a Cromodinâmica Quântica se tornou confinante: os quarks livres começaram a se combinar para formar os hádrons. Esse acontecimento, que ocorreu antes do Universo completar 7×10^{-5} segundos de idade, marcou o início da era hadrônica (PARTRIDGE, 2006).

Os hádrons mais familiares são os prótons e os nêutrons, que são conjuntamente chamados de núcleons. Na era hadrônica o Universo estava inundado deles, porque a temperatura era suficientemente alta para a criação de píons, núcleons e outros hádrons, assim como de suas antipartículas (CIÊNCIA, 2016). Cabe destacar que, nessa época, os léptons já existiam, porém eram “dominados” pelo denso mar de hádrons existente no Universo. Esse mar de hádrons foi formado pela combinação da alta densidade de hádrons com a alta agitação térmica (causada pela elevada temperatura do Universo). Com isso, os hádrons começaram a se agregar e formaram um fluido contínuo e denso, constituído por quarks, antiquarks e glúons, chamado de plasma de quarks-glúons.

2.7 A era leptônica

O início da era leptônica é situado entre 7×10^{-5} segundos, quando a temperatura era $T \approx 10^{11}$ K ≈ 10 MeV, e 5 segundos, quando a temperatura era de 6×10^9 K (DODD; GRIPAIS, 2020). Nesse intervalo, o Universo era composto basicamente de elétrons, pósitrons, fótons, neutrinos e antineutrinos e tinha aproximadamente um ano-luz de tamanho. Particularmente quando a idade cósmica era de $t \approx 1$ segundo, com uma temperatura cósmica $T \approx 10^{10}$ K ≈ 1 MeV, o Universo tinha grandes quantidades de elétrons e pósitrons porque a massa de repouso deles é de $m_e c^2 \approx 0,5$ MeV. Nesse instante não se esperaria haver muitos nêutrons ou prótons (p) porque as massas de repouso deles são aproximadamente iguais a 1 GeV (CIÊNCIA, 2016).

Nesse contexto, não poderia haver nenhum núcleo atômico em razão das altas temperaturas, que separaria nêutrons e prótons e ionizaria qualquer outra estrutura maior.

Por outro lado, durante essa época da evolução cosmológica, havia pequenas quantidades de prótons e nêutrons, que frequentemente participavam dos seguintes processos nessas altas temperaturas:

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n, \quad (2.8)$$

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p. \quad (2.9)$$

Portanto, na era leptônica a temperatura era alta o bastante para provocar a produção de pares elétron-pósitron, que eram continuamente criados e aniquilados. Na mesma linha, ocorria uma crescente troca de energia entre fótons, elétrons (através do espalhamento Compton) e neutrinos. A partir desse ponto os neutrinos e os antineutrinos começaram a se comportar como partículas livres e se separaram do restante da matéria, evoluindo de maneira independente.

Devido a essas interações, todo o Universo se encontrava em equilíbrio térmico e existiam, aproximadamente, a mesmas quantidades de elétrons, pósitrons, neutrinos e fótons. Os núcleons se encontravam imersos nesse mar de fótons e léptons e, nessa época, se acredita que a proporção de núcleons para fótons, elétrons e neutrinos era de 1 para 1 bilhão. Existiam, aproximadamente, o mesmo número de prótons e nêutrons e cada núcleon colidia frequentemente com os léptons e os seguintes processos ocorriam: os nêutrons capturavam os pósitrons e produziam prótons, e os prótons capturavam um elétron e produziam nêutrons, conforme as expressões (2.8) e (2.9).

No final da era leptônica a temperatura caiu de tal forma que as massas do nêutron e do próton se tornaram consideravelmente diferentes. Ainda nesse estágio de evolução do Universo, muitos elétrons não tinham mais energia suficiente para converter prótons em nêutrons, enquanto que a conversão de nêutrons em prótons ainda ocorria facilmente. Esse mecanismo resultou na proporção de 1 nêutron para cada 5 prótons no começo da era de radiação (CIÊNCIA, 2016).

2.8 A nucleossíntese do Big Bang

Os suportes observacionais atuais fornecem uma confiança maior sobre a evolução do Universo a partir de $t = 10^{-5}$ s após o Big Bang (como foi o caso da evolução das densidades numéricas de prótons e nêutrons e a formação dos primeiros átomos eletricamente neutros).

Em $t \approx 10^2$ s, quando $T \approx 10^9$ K $\approx 0,1$ MeV, o Universo era praticamente constituído por fótons, neutrinos e antineutrinos, com uma pequena quantidade de elétrons e de núcleons, e o Universo observável já tinha cerca de 100 anos-luz (ou 10^{20} cm) de tamanho (DODD; GRIPAIOS, 2020). Pouco depois, quando $t \approx 3$ ou 4 minutos, onde $T \approx 8 \times 10^8$ K (escala de energia que coincide com as dos processos nucleares) começa a nucleossíntese, período no qual todos os nêutrons livres (e alguns prótons livres) foram

confinados nos núcleos atômicos e formaram elementos leves, como deutério, hélio e lítio (CIÊNCIA, 2016).

Os núcleos de qualquer elemento (com exceção do hidrogênio) necessitam da combinação nêutrons-prótons para serem formados. Nessa linha, podemos citar que a primeira etapa do processo de formação de átomos foi a síntese de deutérios através da reação $n + p \rightarrow d + \gamma$. Antes da temperatura do Universo cair a 10^9 K, a abundância de deutérios era muito baixa, mas, após $t \approx 100$ s (em $T \approx 10^9$ K), taxa de reação de deutérios aumentou e todos os nêutrons restantes nessa época foram incorporados aos núcleos e, assim, estabilizados: como a energia de ligação do deutério está em torno de 0,26 MeV, a sua existência estava condicionada à queda da temperatura para menos de 10^9 K (temperaturas maiores que essa faria com que os fótons separassem os núcleos).

Os deutérios, no entanto, têm baixa energia de ligação e as reações nucleares subsequentes (como $d + d \rightarrow {}^3\text{He} + n$ e ${}^3\text{He} + d \rightarrow {}^4\text{He} + p$) converteram rapidamente a maioria dos deutérios em núcleos muito mais estáveis. Posteriormente, os nêutrons e os prótons continuaram a se combinar em hélio e este processo não cessou até que todos os nêutrons fossem incorporados em núcleos de hélio. Por outro lado, os prótons que sobraram (que não encontram mais nêutrons para reagir) tornaram-se átomos de hidrogênio.

O que limitou a produção de núcleos mais estáveis foi o número de nêutrons disponíveis, que foram quase todos transformados em ${}^4\text{He}$ próximo de $t = 100$ s. Se todos os nêutrons estivessem ligados em núcleos de ${}^4\text{He}$, a abundância Y de ${}^4\text{He}$ em massa seria (PARTRIDGE, 2006):

$$Y = \frac{2n_n}{n_n + n_p}, \quad (2.10)$$

onde n_n e n_p representam as densidades numéricas de nêutrons e prótons, respectivamente. Daí:

$$Y = \frac{2n_p}{n_n} \left(1 + \frac{n_p}{n_n}\right)^{-1} \quad (2.11)$$

pode ser calculado se n_p/n_n em $t \approx 100$ s for conhecido.

Essa proporção, por sua vez, dependia de quatro fatores: a meia-vida do nêutron livre (tomada como $10,6 \pm 0,1$ min); as seções de choque para processos como $n + \nu \leftrightarrow p + e$, que convertem nêutrons em prótons e vice-versa; a temperatura atual da CMB (que nos permite descrever a densidade em $T \approx 10^9$ K); e a taxa de expansão do Universo, que, por sua vez, dependia do número N' de famílias de léptons leves. A dependência de Y dos parâmetros supracitados se dá pela equação (PARTRIDGE, 2006):

$$Y = 0,230 + 0,011 \ln \left(\frac{10^{10} n_b}{n_\gamma} \right) + 0,013(N' - 3) + 0,014(t_{\frac{1}{2}} - 10,6), \quad (2.12)$$

onde $t_{\frac{1}{2}}$ é o tempo de meia-vida do nêutron livre, dado em minutos. A partir disso inferimos que, conhecendo T_0 e n_γ , podemos obter o valor da densidade de bárions ρ_b atualmente a partir da razão n_b/n_γ . As observações astronômicas da abundância de ${}^4\text{He}$ na Galáxia

forneem $Y = 0,235 \pm 0,005$, que está em concordância com as previsões da nucleossíntese (PARTRIDGE, 2006).

No entanto ${}^4\text{He}$ e H não foram os únicos núcleos a emergir do Big Bang: também se registra a produção de ${}^7\text{Li}$ e de alguns núcleos que, posteriormente, vieram a formar mais ${}^4\text{He}$ (como os deutérios, por exemplo). Se essas reações nucleares tivessem se completado, todos os deutérios seriam convertidos em ${}^4\text{He}$ e a abundância de ${}^2\text{H}$ seria zero (e não é nula porque as taxas de reação diminuiriam com a expansão do Universo). Como podemos imaginar, as taxas de reação dependiam da densidade numérica das partículas reagentes: se a razão n_b/n_γ fosse menor, então uma fração maior de deutérios teria sobrado, logo, a abundância de ${}^2\text{H}$ no Big Bang decresceu com a densidade de bárions.

As observações astronômicas fornecem limites inferiores confiáveis para a abundância de deutério: elas estabelecem um limite superior firme para a densidade dos bárions $\Omega_b < 0,2$. A faixa $0,010 \leq \Omega_b h^2 \leq 0,025$ (ou $0,010 \leq \Omega_b h^2 \leq 0,200$ para $0,4 \leq h \leq 1$) é atualmente a preferida pelas observações (PARTRIDGE, 2006). Esse valor está abaixo do valor $\Omega = 1$, que corresponde ao modelo plano ($k = 0$) evidenciado por diversos modelos inflacionários. No entanto, o limite estabelecido pela abundância de deutério se aplica apenas à matéria bariônica, isto é, se a matéria e a energia escuras existirem, então $\Omega = 1$ e teremos a relação: $\Omega_{DM} + \Omega_\Lambda + \Omega_b = 1$.

A abundância observada de lítio também fornece uma importante confirmação do baixo valor de Ω_b : a baixa quantidade de ${}^7\text{Li}$ define os limites superior e inferior de Ω_b . De maneira geral, as abundâncias de elementos leves são consistentes com uma faixa estreita de Ω_b , aproximadamente de $0,010h^{-2}$ a $0,015h^{-2}$. Esses limites foram calculados usando $T_0 = 2,75\text{K}$, mas mudariam em torno de 11 por cento se usássemos temperatura da faixa de 2,65 a 2,85K (PARTRIDGE, 2006).

Como sabemos, há incertezas no valor de H_0 , mas acredita-se que se encontra na faixa de 40 a 100 km s^{-1} por megaparsec, e isso implica que: $0,4 \leq h \leq 1,0$. Diante desses argumentos, a densidade de bárions é limitada por:

$$0,01 \leq \Omega_b \leq 0,1. \quad (2.13)$$

Dentro de algumas horas, a nucleossíntese foi concluída, deixando 24 por cento de hélio e 76 por cento de hidrogênio (isto é, prótons não utilizados), além de quantidades menores de outros elementos leves. No entanto, o Universo ainda é composto principalmente por fótons e neutrinos (CIÊNCIA, 2016).

2.9 A recombinação e a formação de átomos neutros

Um fenômeno físico que ocorreu antes da recombinação foi o “arrasto de radiação”, que dependeu basicamente do forte acoplamento entre matéria e radiação resultante do

espalhamento Thomson e da interação coulombiana entre prótons e elétrons. O forte acoplamento garantiu que a radiação pudesse “arrastar” matéria e isso afetou diretamente as flutuações de densidade da matéria bariônica. Apesar dessas flutuações, a amplitude das perturbações de isocurvatura (isotérmicas) não aumentaram, ao contrário das perturbações adiabáticas, que foram amortecidas em todas as escalas entre 10^{10} e 10^{11} massas solares à medida em que a radiação fluía de regiões mais quentes e densas para regiões mais frias, arrastando a matéria.

Dessa maneira, as únicas flutuações adiabáticas na densidade bariônica ρ_b que sobreviveram até a época de recombinação foram aquelas acima dessa escala. Apesar do fato do arrasto de radiação ter afetado a matéria bariônica, ele não afetou a matéria escura, considerando que ela não se acoplou a fótons nem a algum componente bariônico. Assim, a evolução das flutuações na densidade da matéria escura foi diferente da bariônica, especialmente porque as flutuações adiabáticas (ou isotérmicas) na matéria escura não foram amortecidas.

Quando o Universo tinha $t \approx 10^4$ anos de idade e temperatura $T \approx 10^5$ K, a densidade de energia começou a ser dominada pela matéria não-relativística e agora cai como $\rho \propto 1/a^3 \propto T^3$. Como, nessa época, a maioria dos núcleos eram hidrogênios (H), precisamos considerar principalmente a recombinação de H, que foi regida pela equação de Saha (PARTRIDGE, 2006):

$$\frac{n_p n_e}{n_H} = \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad (2.14)$$

onde n_p , n_e e n_H são as densidades numéricas de prótons, elétrons e átomos de hidrogênio neutro, respectivamente, m_e é a massa do elétron e E é a energia de ionização do hidrogênio ($E = 13,6$ eV). A dependência exponencial de n_p/n_H nos diz que a formação de átomos neutros foi rápida quando a temperatura do Universo caiu abaixo de 3000 K e que o Universo sofreu uma transição abrupta de uma fase ionizada para uma fase neutra. Em termos de redshift, estima-se que a transição durou $\Delta z \approx 400$ e se centrou em $z \sim 1400$, quando $n_p/n_H = 1$ (PARTRIDGE, 2006).

Antes da recombinação, ainda próximo de $z = 1400$, a densidade numérica de elétrons livres era alta e dispersava (através de espalhamento Compton) os fótons com frequência, cuja seção transversal de Thomson era da ordem de: $\sigma_T = 6,65 \times 10^{-25}$ cm².

Porém, em $t \approx 3,8 \times 10^5$ anos (onde: $T \approx 3000$ K), os elétrons começaram a se combinar com os núcleos para formar os primeiros átomos neutros. Com o desaparecimento das partículas carregadas, o Universo passou a ser transparente à radiação eletromagnética, uma vez que, nessa época, não havia mais tantas partículas carregadas para espalhar os fótons (CIÊNCIA, 2016). Após a era da recombinação, os elétrons livres desapareceram e o único processo de espalhamento remanescente era o do hidrogênio neutro, que tinha um valor de σ_T bem menor.

Como a recombinação foi curta, o Universo tornou-se repentinamente transparente à luz em $z \approx 1060$ e os fótons da CMB começaram a se propagar livremente no Universo. Desse modo, a observação do fundo cósmico fornece, na verdade, um instantâneo da superfície de último espalhamento em um desvio para o vermelho $z \approx 1000$. Conforme mencionado, a recombinação foi repentina ($\Delta z \approx 100$), mas permitiu à superfície de último espalhamento ter uma espessura, que “mancha” a CMB em escalas angulares abaixo de $7\Omega^{\frac{1}{2}}$ arcmin em $z \approx 1000$ (PARTRIDGE, 2006). À medida em que o Universo continuou se expandindo, o comprimento de onda dos fótons foi “esticado” e as suas frequências, por conseguinte, foram reduzidas (assim como suas energias). Além disso, acredita-se que a temperatura associada às energias dos fótons também foi reduzida, correspondendo a um comprimento de onda de fóton de centímetros (ou até de milímetros). Podemos dizer, em virtude disso, que a CMB foi espalhada pela última vez na mesma época de formação dos átomos, que é conhecida como superfície de último espalhamento, e que é o limite observável pela astronomia.

2.10 O fim da era da radiação

Como sabemos, em épocas iniciais, a expansão do Universo foi dominada pela radiação. Apenas se negligenciarmos uma constante cosmológica diferente de zero teremos uma expansão cósmica dominada pela matéria. A fronteira que separa a dominação da radiação e a dominação da matéria está localizada no momento em que $\rho_\gamma \equiv u/c^2 = \rho_m$ (com u sendo a densidade de energia). Tendo em vista que $u = bT^4$ (em que b é uma constante) e que $T_0 = 2,75$ K, então o redshift correspondente pode ser calculado por:

$$z + 1 = 3,9 \times 10^4 \Omega h^2. \quad (2.15)$$

Dado que $0,4 \leq h \leq 1,0$, podemos inferir que o fim da dominação da radiação ocorreu em um redshift um pouco mais alto e, portanto, antes da era da recombinação, a menos que tenhamos $\Omega \ll 1$.

2.11 A formação das galáxias

Por volta de $t \approx 10^9$ até 10^{10} anos (quando: $T \approx 10$ K) iniciou-se a formação das primeiras galáxias (DODD; GRIPAIS, 2020). Para os astrofísicos, a formação das galáxias e dos aglomerados de galáxias consistiu de dois estágios (CIÊNCIA, 2016):

- As pequenas flutuações de densidade de matéria nos estágios iniciais do período inflacionário ocasionaram a formação de determinadas concentrações de densidade, as quais chamamos de protogaláxias e protoaglomerados.

- Essas concentrações de densidade de matéria colapsaram gravitacionalmente, dando origem às galáxias e aos aglomerados observados hoje.

Os cientistas acham que a primeira fase citada acima começou muito antes da época na qual os átomos se formaram e talvez até mesmo durante a época de Planck: em $t = 10^{-43}$ segundos. A formação de galáxias foi essencialmente completada quando a idade do Universo era de $t = 10^9$ anos ou ainda mais cedo. Não há certeza sobre isso e valores como esse dependem da teoria de formação de galáxias que consideramos correta (CIÊNCIA, 2016).

Nesse sentido, estima-se que o colapso gravitacional durou em torno de 3×10^8 anos e que ocasionou a fragmentação das galáxias em estrelas (CIÊNCIA, 2016). As estrelas mais velhas das galáxias (classificadas como população II), por exemplo, foram formadas durante o colapso das galáxias. A posteriori, densas camadas de matéria concentraram-se para formar as de população I, que são frequentemente produzidas nas galáxias. Além dessas duas classificações, os astrônomos sugerem que existe estrelas de população III, que foram formadas ainda antes das galáxias (no estágio de protogaláxias). Essa população seria responsável pela presença de um pequeno percentual de “metais” nas estrelas de população II.

De maneira geral, existem diversos mecanismos sugeridos para explicar a formação inicial de galáxias e de aglomerados, a exemplo da instabilidade gravitacional e do colapso de protogaláxias.

- **A instabilidade gravitacional:**

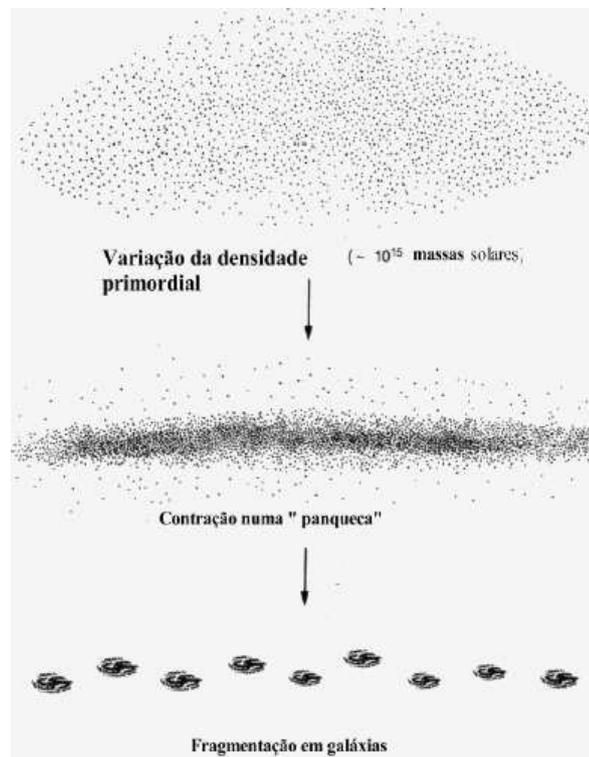
Como sabemos, o excesso de densidade de matéria (como gás, por exemplo) em um local provoca o aumento da intensidade do campo gravitacional, que tende a atrair ainda mais matéria para a região. A pressão do gás, em contraponto, tende a diminuir (através da dispersão) o valor da densidade e restaurar a homogeneidade. Este problema foi estudado pelo astrônomo inglês James Jeans em 1902, chegando à conclusão que perturbações de pequena escala são rapidamente dispersadas, enquanto que perturbações de grande escala tendem a ser cada vez maiores (CIÊNCIA, 2016). No caso das perturbações de grandes escalas, a densidade aumenta com o tempo e isso é conhecido como instabilidade gravitacional.

A instabilidade gravitacional, portanto, dá origem a uma concentração de matéria que pode se tornar uma estrela, uma galáxia ou um aglomerado de galáxias, a depender de sua magnitude. O valor da concentração de matéria depende tanto da densidade inicial do gás quanto da velocidade do som na região analisada (uma vez que essa é a velocidade com a qual as perturbações de densidade se propagam). Existe um valor limiar de massa para se ter instabilidade gravitacional, que é chamado de massa de Jeans M_J .

Outro parâmetro importante no estudo da instabilidade gravitacional é o raio de Jeans λ_J . Se imaginarmos certa quantidade de gás contida em uma esfera de raio maior do que λ_J , então a força gravitacional tende a superar a pressão interna do gás e a causar uma concentração (aglomeração) de matéria. Do contrário, se a esfera tiver raio menor do que λ_J , a pressão do gás supera a gravidade e a perturbação é amortecida.

Em tempos anteriores à recombinação ($t < t_{rec}$) o raio de Jeans era muito grande, uma vez que a velocidade do som era próxima a da luz (pois toda a matéria e a radiação do Universo estavam fortemente acopladas). Nesse mesmo período, a massa de Jeans aumentou, atingindo um valor estimado de $10^{15} M_{Sol}$:

Figura 1 – Formação das estruturas: uma nuvem de gás primordial de $10^{15} M_{Sol}$ colapsa formando uma “panqueca”, que se quebra em aglomerados e estes em galáxias.



Fonte: WUENSCHÉ (1994).

Porém, com o fim da recombinação, matéria e radiação foram desacopladas e a radiação deixou de contribuir para a pressão interna dos gases. Com base nisso, a velocidade do som caiu rapidamente a poucos quilômetros por segundo e houve uma queda correspondente na massa de Jeans (que foi a $10^5 M_{Sol}$).

- **O colapso de protogaláxias:**

Conforme mencionado anteriormente, as protogaláxias se tratam do primeiro estágio na formação de galáxias. Essas estruturas eram grandes bolhas de gás e matéria e, a

dependem da evolução das perturbações, as protogaláxias formaram galáxias elípticas, espirais ou irregulares.

Uma das maneiras mais usuais de explicar a formação das galáxias está baseada no colapso das protogaláxias, onde a matéria se move abruptamente em direção ao centro sem forças de oposição. O chamado “tempo de colapso” é de aproximadamente 300.000.000 anos para uma galáxia ordinária. Esta escala de tempo poderia ser maior se as protogaláxias fossem significativamente maiores em tamanho (CIÊNCIA, 2016). Basicamente existem dois cenários que descrevem o colapso de protogaláxias para a formação de galáxias: um que considera as protogaláxias constituídas apenas de gás e outro que assume uma composição dominada predominantemente por estrelas. No caso das galáxias gasosas há a admissão de que elas se originaram de protogaláxias totalmente gasosas que colapsaram. O gás presente nessas protogaláxias eram formado por nuvens de partículas que colidiram inelasticamente, isto é, que dissiparam energia em cada colisão.

As colisões dessas nuvens geraram densas concentrações de matéria, que evoluíram posteriormente para estrelas. Dessa maneira, acredita-se que a formação das estrelas já ocorrera durante o colapso gravitacional da protogaláxia e que a taxa de formação de estrelas depende tanto da densidade de matéria como dos movimentos aleatórios de partículas que ocorre dentro da protogaláxia: quanto mais altos forem a densidade e os movimentos aleatórios, mais estrelas são formadas. Após o colapso das protogaláxias, pequenas quantidades de gás restaram (o que, de fato, se observa atualmente).

As protogaláxias que não eram muito densas colapsaram mais lentamente e as mais densas, do contrário, colapsaram abruptamente e, nesses casos, parte do gás não teve tempo suficiente para formar estrelas e se acumulou no plano perpendicular ao eixo de rotação da galáxia, que é o plano de simetria. A partir disso surgiu uma camada relativamente fina de gás, que hoje conhecemos como disco galáctico e cujas estrelas foram formadas muito mais tarde e em menor quantidade (estrelas de população I). Já as estrelas que se formaram durante o colapso gravitacional são naturalmente as mais velhas e fazem parte da população II.

2.12 Mais sobre galáxias e aglomerados

Na cosmologia e na astrofísica existem alguns dos parâmetros físicos importantes para o entendimento da composição e do comportamento de galáxias, como: raio (que, em geral, variam entre 10^3 e 10^4 parsecs), massa (tipicamente da ordem de 10^8 e 10^{12} vezes a massa do Sol) e luminosidade (da ordem de 10^7 e 10^{11} vezes a luminosidade do Sol) (CIÊNCIA, 2016).

A massa das galáxias é determinada pelos astrônomos pela medição da velocidade de rotação em função da distância ao centro galáctico, aplicando-se uma generalização

da Terceira Lei de Kepler. No entanto, as massas determinadas por esse método são, em praticamente todas as situações, maiores do que a soma das massas de todos os constituintes observáveis da galáxia. Nessa linha, ocorre que a velocidade de rotação das periferias galácticas não cai com $r^{-\frac{1}{2}}$, mas é praticamente constante. Esse fenômeno sugere que a maior parte das massas galácticas não é matéria luminosa (como estrelas e gases), mas sim “matéria escura”, que estudaremos mais tarde.

Até onde se tem conhecimento, todas as galáxias emitem ondas de rádio, porém, em determinados casos, a radioluminosidade excede a luminosidade. Quando isso ocorre, estamos diante de uma radiogaláxia, que compõe a maior parte das fontes extragalácticas detectáveis com radiotelescópios.

A maioria das galáxias está agrupada em aglomerados maiores, que geralmente contém de centenas a milhares de galáxias. Esses aglomerados contêm matéria entre suas galáxias constituintes, denominada matéria intergaláctica, que pode ser detectada diretamente (através da detecção de raios-x emitidos pelo gás ionizado) ou indiretamente. A massa gravitacional de um aglomerado (isto é, a massa necessária para mantê-lo coeso) pode ser calculada ao se assumir um aglomerado em equilíbrio:

$$M = \frac{R\bar{v}^2}{G}, \quad (2.16)$$

onde \bar{v}^2 representa a velocidade média quadrática das galáxias dentro do aglomerado e R é o raio do aglomerado. A massa típica de um aglomerado é de 10^{44} a 10^{45} kg, que é, em geral, uma ordem de grandeza superior à soma das massas das galáxias individuais. Esse cômputo nos faz inferir que a massa visível é insuficiente explicar a coesão dos aglomerados (CIÊNCIA, 2016).

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 03 A FAMOSA TEORIA DO BIG BANG

“Os últimos dois bilhões de anos tiveram uma evolução lenta: são a fumaça e as cinzas de fogos de artifício brilhantes, mas muito rápidos”.

(Georges Lemaître)

3 A famosa teoria do Big Bang

3.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“A famosa teoria do Big Bang” traz importantes elementos para o entendimento da teoria cosmológica mais bem fundamentada atualmente: o modelo do Big Bang. Basicamente, esse capítulo traz informações sobre: os suportes observacionais da teoria, os modelos cosmológicos e a densidade do Universo. Falar sobre o Big Bang é condição necessária para o estudo da CMB, que, como veremos adiante, aparece como um pilar da referida teoria.

3.2 Alguns suportes observacionais

3.2.1 A homogeneidade

A partir da observação e da análise minuciosa de inúmeros aglomerados galácticos se inferiu que, em escalas cosmológicas da ordem de $d \leq 30 \text{ Mpc} = 3 \times 10^7 \text{ pc}$ ou ainda 10^{24} m , as galáxias são distribuídas de maneira não-homogênea. Para escalas consideravelmente maiores (como $d \geq 300 \text{ Mpc}$, por exemplo), a distribuição é aproximadamente homogênea e isotrópica. Esta é a primeira evidência favorável ao Big Bang: em escalas de distância suficientemente grandes, o Universo tem aspecto homogêneo e isotrópico (PARTRIDGE, 2006).

3.2.2 A expansão cósmica

A expansão cosmológica foi caracterizada por Edwin Hubble, em meados da década de 1920. Em síntese, Hubble observou que as linhas espectrais detectadas de galáxias distantes quase sempre apareciam em comprimentos de onda maiores que o restante (ou que os comprimentos de onda de laboratório dessas mesmas linhas atômicas). Esse fenômeno foi descrito por Hubble como sendo uma “deformação” da radiação eletromagnética para comprimentos de onda mais longos, que seria batizado de desvio para o vermelho (ou redshift). Em termos matemáticos, o redshift z é definido da seguinte maneira:

$$z + 1 \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{rep}}, \quad (3.1)$$

onde λ_{obs} representa o comprimento de onda observado e λ_{rep} é o comprimento de onda medido por um observador em repouso. Além disso, Hubble descobriu que, em média, a intensidade do redshift observada para uma galáxia ordinária era proporcional à sua distância d do planeta Terra. A partir dessas observações, Hubble interpretou os valores de

redshift que observou como consequência do efeito Doppler e propôs que, para velocidades de recessão $v \ll c$, a equação (3.1) apresenta a seguinte característica:

$$z = \frac{v}{c} \propto d. \quad (3.2)$$

Esta foi a principal proposição de Hubble: a velocidade de recessão é proporcional à distância. A relação linear entre v e d é exatamente o que se esperaria para o caso de uma expansão uniforme do Universo. Para que a relação acima se torne uma igualdade é necessário imprimir uma constante de proporcionalidade entre v e d : a constante de Hubble H_0 , que nada mais é do que uma medida da taxa de expansão do Universo. Portanto:

$$v = H_0 d \rightarrow z = \frac{H_0 d}{c}. \quad (3.3)$$

As medições astronômicas de z e d mostram que H_0 está na faixa de $(1,3 - 3,2) \times 10^{-18} s^{-1}$ ou ainda $40 - 100$ km/s por megaparsec. A incerteza natural da medição de distâncias de objetos extragaláticos é uma fonte de imprecisões para os dados cosmológicos. Então, para exprimir a incerteza em H_0 , geralmente se convencionou o valor de $100h$.km/s por megaparsec, onde: $0,4 \leq h \leq 1,0$. Nesse ponto, cabe destacar que a relação linear entre z e d não é válida para grandes distâncias e/ou velocidades muito altas (PARTRIDGE, 2006). Como z é uma grandeza mais fácil de se medir do que d , é comumente usada para parametrizar a distância entre a Terra e uma galáxia ou outra fonte.

Originalmente Hubble interpretou o redshift como um desvio causado pelo efeito Doppler oriundo do movimento relativo entre galáxias. Por outro lado, atualmente existe uma interpretação baseada na Relatividade Geral que considera as galáxias como entes praticamente fixos em um espaço-tempo em expansão. A velocidade de recessão aparente entre um observador na Terra e uma galáxia distante é devida à expansão do espaço-tempo entre os dois e esta é especificada através de uma quantidade $a(t)$ conhecida como “fator de escala”, que é dependente do tempo e crescente. A partir desse conceito, podemos escrever a distância entre quaisquer dois objetos no Universo no tempo t como:

$$d(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} d(t_0), \quad (3.4)$$

em que $d(t_0)$ representa a distância entre os dois objetos no presente (denotado como t_0) e $a(t_0)$ é o valor atual do fator de escala: em geral, $a(t_0)$ é igual a 1, por convenção. Como $\dot{a}(t) > 0$ (sempre crescente), inferimos que todos os comprimentos de onda (como os de fótons que se propagam livremente) e distâncias medidos neste espaço-tempo em expansão eram menores no passado. Com isso, podemos escrever que $\lambda_{obs} = a^{-1}(t)\lambda_{rep}$ para um fóton emitido em algum instante anterior t . Daí:

$$a(t) = \frac{1}{z(t) + 1}, \quad (3.5)$$

que é a relação entre redshift e fator de escala. Como adotamos a convenção $a(t_0) = 1$, temos que $H_0 = \dot{a}(t_0)$, onde o subscrito zero representa o valor atual das grandezas mensuradas.

3.2.3 A idade e o tamanho do Universo

Se a expansão do Universo for livre de forças contrárias, então a permanecerá constante e, desse modo, se espera que $a = 0$ em algum tempo finito no passado. À medida em que a vai para zero, as distâncias também diminuem e, portanto, a densidade do cosmos vai para o infinito. Esse estado de densidade infinita (ou pelo menos muito alta) é a origem: o Big Bang. Assumindo um valor constante para $a(t)$ fica fácil mostrar que o tempo decorrido desde o Big Bang é H_0^{-1} e este intervalo é a idade atual do Universo t_0 (PARTRIDGE, 2006).

Para o caso em que $a = \text{constante}$, o instante t_0 situa-se em uma faixa temporal de 10 a 20 bilhões de anos, dependendo do valor assumido para H_0 , e o suporte observacional é obtido através de medições astronômicas independentes de várias partes do Universo. Como exemplos, podemos citar que o sistema Terra-Lua tem 4,6 bilhões de anos, a idade de certos radioisótopos de vida longa encontrados em material meteorítico é de 11 a 12 bilhões de anos e a idade das estrelas mais antigas da Via Láctea também são calculadas dessa maneira, que se encontra em concordância razoável com H_0^{-1} : nenhum objeto catalogado no Universo observável tem idade superior a H_0^{-1} , logo, as medições de idade, até os dias atuais, são consistentes com a teoria do Big Bang.

A idade do Universo estabelece um limite para sua extensão. Em um Universo de idade t_0 , os fótons podem ter percorrido uma distância máxima de cerca de ct_0 e um astrônomo não pode “enxergar” além disso. Esta distância, avaliada em cerca de 5×10^9 pc, é considerada o raio efetivo do Universo (PARTRIDGE, 2006).

3.2.4 Outras evidências do Big Bang

A detecção e a análise da CMB estabeleceram que o Universo primitivo era muito quente e denso, devido ao seu espectro térmico de radiação (espectro de corpo negro). Se retrocedermos no tempo, o comprimento de onda dos fótons diminui proporcionalmente a $a(t)$ ou a $(z + 1)^{-1}$. Como sabemos, a lei de Planck depende apenas do produto λT , mas, através de dados observacionais, se inferiu que a temperatura do Universo (no passado) era maior por um fator $z + 1$, de modo que:

$$T(t) = T_0 [z(t) + 1], \quad (3.6)$$

onde T_0 é a temperatura média atual da CMB. De posse do valor atual da temperatura, podemos calcular a temperatura em qualquer época anterior usando a relação acima.

Por exemplo, para redshifts $z > 1000$, a temperatura era $T > 3000$ K, que é suficiente para ionizar o hidrogênio. Em valores ainda maiores de redshift (ou seja, em épocas mais primordiais do Universo), a temperatura era ainda maior. No entanto, a dependência linear de $z + 1$ e T é violada em temperaturas mais altas, onde o número de espécies de partículas leves aumenta.

Como vimos, alguns minutos após a origem do Big Bang, a temperatura do Universo caiu para cerca de 10^9 K, que era baixa o suficiente para permitir a fusão de nêutrons e prótons presentes no plasma primordial. Os núcleos de elementos leves, principalmente o hélio, foram produzidos. As abundâncias previstas teoricamente concordam bem com as determinações astronômicas desses mesmos núcleos nas estrelas mais antigas e outras matérias em nossa Galáxia, fornecendo forte suporte adicional para a teoria do Big Bang (PARTRIDGE, 2006).

3.3 Os modelos cosmológicos

Os modelos cosmológicos são representações matemáticas que buscam descrever as propriedades do Universo. Como sabemos, para que um determinado modelo seja considerado adequado à descrição do cosmos, é necessário que as suas previsões teóricas estejam em concordância com os dados observacionais. A grande maioria dos modelos cosmológicos é baseada no princípio cosmológico, que postula homogeneidade e isotropia em larga escala para o Universo.

3.3.1 A métrica de Friedmann-Lêmaître-Roberson-Walker (FLRW)

Tomando como base o princípio cosmológico, se pode supor, inicialmente, que a geometria do Universo também é isotrópica. Da Relatividade Geral sabemos que a geometria do espaço-tempo pode ser completamente especificada a partir de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que, para um dado conjunto de quatro coordenadas de espaço-tempo x^μ , a distância entre dois pontos (que é invariante de Lorentz) ds^2 é dada por:

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.7)$$

onde x^0 representa a componente temporal do espaço-tempo, dada por ct . No intuito de considerarmos o efeito deformativo dos corpos massivos no espaço-tempo devemos utilizar a métrica FLRW, que descreve um Universo isotrópico em expansão. Em coordenadas esféricas, essa métrica é dada por:

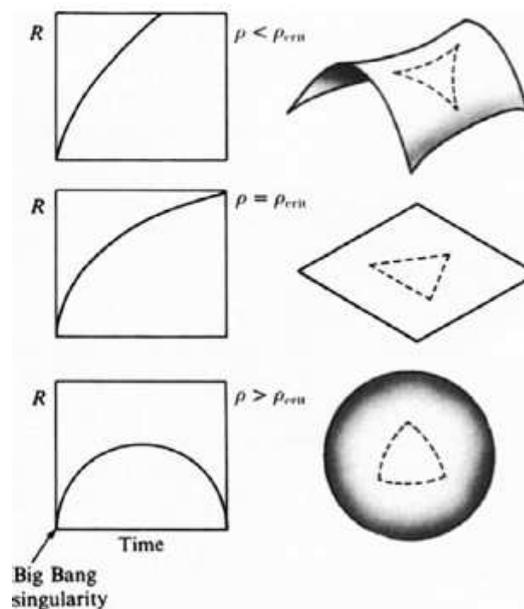
$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (3.8)$$

As grandezas r , θ e ϕ são coordenadas fixas de uma geometria em expansão e, por isso, são chamadas de coordenadas comóveis. A constante k é chamada de constante de curvatura

do espaço-tempo. Conforme mencionamos anteriormente, vamos considerar que as galáxias estão aproximadamente em repouso em um sistema de coordenadas comóveis, no qual a expansão é descrita pelo fator de escala $a(t)$.

Observando (3.8) podemos ainda citar que a parte espacial dessa métrica pode ter três curvaturas globais, a depender do valor da constante k . Para os casos em que $k = 0$, a geometria espacial do Universo é plana (euclidiana), de modo que as distâncias comóveis são dadas pelo teorema de Pitágoras: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Uma métrica FLRW curvada positivamente ($k > 0$) implica em um Universo fechado, que é limitado em volume, mas que não apresenta arestas, semelhante a uma superfície esférica. O caso de curvatura negativa ($k < 0$) representa uma geometria aberta e infinita. Todos esses modelos são ilustrados na Figura 2:

Figura 2 – Cosmologias de Friedmann abertas, planas e fechadas, mostrando como o tamanho do Universo muda com o tempo.



Fonte: DODD e GRIPAIS (2021).

Esses modelos (denominados modelos de Friedmann) formam a base da cosmologia padrão do Big Bang. Os estudiosos buscam, atualmente, determinar qual deles descreve corretamente o nosso Universo, que depende da constante de Hubble H e da densidade ρ do Universo. Apesar de suas previsões muito diferentes para o destino final do cosmos, esses modelos descrevem semelhantemente o Universo nos primeiros tempos (DODD; GRIPAIS, 2020).

3.3.2 Sobre a dinâmica

Nos dias atuais há fortes evidências de que o Universo está em expansão acelerada, então o fator de escala $a(t)$ está aumentando com o tempo. Como vimos, na ausência de

forças para alterar a expansão, o fator a permaneceria constante, mas, como a densidade do Universo é diferente de zero, deve haver pelo menos uma força (atrativa e de longo alcance) atuando: a gravidade, que age no sentido contrário à expansão. A função $a(t)$ que descreve a expansão do Universo pode ser encontrada resolvendo as equações de campo gravitacional da Relatividade Geral (PARTRIDGE, 2006).

Para melhor ilustrar o modelo, vamos considerar uma esfera de raio $a(t)$ centrada em um ponto arbitrário do Universo em expansão. Vamos assumir também que o raio $a(t)$ é suficientemente grande para que a esfera represente uma amostra razoável do Universo, mas pequeno o bastante para que a curvatura do espaço-tempo possa ser desprezada. Por fim, consideremos a aceleração de uma partícula massiva na superfície da esfera em direção ao ponto central:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{GM}{a^2(t)}, \quad (3.9)$$

em que M representa a massa dentro da esfera:

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3(t)\rho(t), \quad (3.10)$$

onde $\rho(t)$ é a densidade no tempo t . Pela lei de conservação da massa, se a densidade do Universo incluir apenas partículas materiais (isto é, que interagem apenas por intermédio da força gravitacional) que não exercem pressão (ou seja, excluindo a radiação), então temos que $V(t)\rho(t) = V(t_0)\rho(t_0)$, e então:

$$\rho(t) = \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)}\rho(t_0). \quad (3.11)$$

Se convencionarmos $a(t_0) = 1$ e representarmos a densidade atual como ρ_0 , temos que, no caso em que negligenciarmos a radiação:

$$\rho(t) = a^{-3}(t)\rho_0. \quad (3.12)$$

Portanto, ao combinarmos (3.10), (3.11) e (3.12), chegamos a:

$$\ddot{a}(t) = \frac{4}{3}\pi G\rho_0 a^{-2}(t), \quad (3.13)$$

que, após uma integração, fornece:

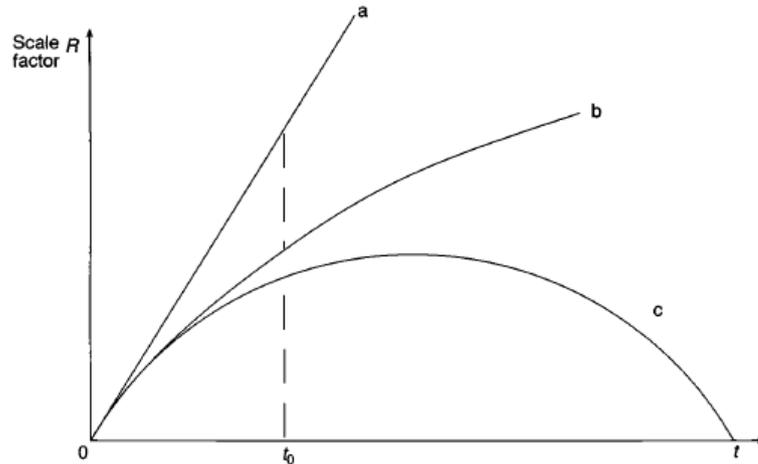
$$\dot{a}^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 a^{-1}(t) + c'. \quad (3.14)$$

A constante de integração c deve ter relação com a densidade do Universo, a dinâmica e a curvatura. Por análise dimensional, vamos assumir que $c' = -kc^2$:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 a^{-1}(t) - kc^2. \quad (3.15)$$

Esse resultado é válido tanto para sistemas newtonianos quanto para sistemas relativísticos.

Figura 3 – O fator de escala em função do tempo para vários modelos cosmológicos. A inclinação das curvas na época atual t_0 é fixada por medições de H_0 (note que o autor usou $a(t) = R(t)$)



Fonte: PARTRIDGE, 2006.

Existem três classes gerais de soluções, dependendo do valor de k , mostrados na Figura 3. De acordo com esta figura, a idade do Universo (o tempo desde $a = 0$) é menor que H_0^{-1} para modelos com $\rho_0 > 0$.

Perceba que, nos casos de curvaturas positivas ($k > 0$), é possível que $a = 0$ (para um valor de a finito) e então os modelos cosmológicos fechados também incluem o colapso do Universo, como mostra a curva c da Figura 3. Esses são denominados modelos de alta densidade, que possuem densidade de matéria suficiente para desacelerar e reverter a expansão atual. Por outro lado, para $k < 0$, o Universo se expande eternamente, caso representado pela curva b da Figura 3. No caso em que $k = 0$, temos então $\dot{a}^2 \propto a^{-1}$ ou $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$. Este resultado implica que $t = t_0(z + 1)^{-\frac{3}{2}}$ para o modelo de Sitter-Einstein (de um espaço-tempo plano). Também podemos analisar a solução obtida para os casos em que $\rho_0 \rightarrow 0$: se o Universo está em expansão ($a > 0$), então $k < 0$. Como $\rho_0 \rightarrow 0$, então $a \rightarrow \text{constante}$, como mostra a curva da Figura 3.

3.3.3 A densidade crítica

As três possibilidades de curvaturas vistas acima estão diretamente associadas à quantidade de matéria no Universo: uma alta densidade produz curvatura positiva; uma baixa densidade produz uma curvatura negativa; e uma densidade crítica (ρ_c) produz uma geometria plana. A partir das equações anteriores podemos analisar o valor da densidade no caso de um espaço-tempo plano, fazendo $k = 0$ na equação (3.15) e adotando $a(t_0) = 1$:

$$\dot{a}^2(t_0) = \frac{8}{3}\pi G\rho_c. \quad (3.16)$$

Da convenção $a(t_0) = 1$, temos que $H_0 = a(t_0)$, e então:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (3.17)$$

Numericamente obtemos: $\rho_c \sim (3-20) \times 10^{-30} \text{gcm}^{-3}$, dependendo do valor assumido para H_0 . Se a densidade atual do Universo exceder ρ_c , então $k > 0$ e a geometria espacial do Universo é fechada. Por outro lado, se $\rho_0 < \rho_c$, então $k < 0$ e a geometria é aberta e em constante expansão. Baseando-se nessas observações podemos inferir que a razão $\Omega = \rho/\rho_c$ é um parâmetro cosmológico crucial: se $\Omega > 1$, então $k > 0$, e se $\Omega < 1$, então $k < 0$.

3.3.4 Os modelos que incluem radiação

A inclusão da radiação nos cálculos altera as equações, primeiramente porque ela atua como uma fonte gravitacional no Universo: tanto a densidade de massa equivalente da radiação (dada por: $\rho_\gamma = u/c^2 \text{ gcm}^{-3}$), quanto sua pressão (dada por: $P = u/3$), contribuem significativamente para o fator de escala $\ddot{a}(t)$. Incluindo esses efeitos, podemos obter, aplicando (3.10) em (3.9):

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + \frac{u}{c^2} \right) a(t). \quad (3.18)$$

Em segundo lugar, devemos considerar que a pressão de radiação modifica as equações que são baseadas apenas na conservação da massa: agora a conservação da massa-energia deve ser observada na esfera de raio a . Para isso é necessária a inclusão de qualquer trabalho PdV realizado no sistema à medida em que $a(t)$ aumenta ou diminui. Para isso, podemos escrever:

$$\dot{\rho} = -3 \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.19)$$

As equações (3.18) e (3.19) podem ser resolvidas para $a(t)$ desde que conheçamos a evolução temporal de ρ e de P (a pressão do campo de radiação). A principal contribuição para a pressão de radiação no Universo é da CMB, onde: $u/3c^2 \approx 3 \times 10^{-5}$ da densidade de matéria atual. Como veremos, a CMB tem um espectro de corpo negro, então a sua densidade de energia e pressão são dadas, respectivamente, por (PARTRIDGE, 2006):

$$u = bT^4 \text{ erg cm}^{-3}, \quad (3.20)$$

$$P = \frac{b}{3}T^4 \text{ erg cm}^{-2}, \quad (3.21)$$

onde $b = 7,565 \times 10^{-5}$, no sistema de unidades c.g.s. Para a radiação de corpo negro temos:

$$\rho_\gamma \propto u \propto T^4 \propto a^{-4} \propto (z+1)^4. \quad (3.22)$$

No entanto, sabemos que:

$$\rho_m \propto a^{-3} \propto (z+1)^3, \quad (3.23)$$

apenas para a densidade da matéria. A partir disso podemos comparar as equações (3.22) e (3.23) e obter uma relação para a densidade de energia de radiação:

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_m} \propto a^{-1} \propto (z + 1). \quad (3.24)$$

Esta equação nos diz que a densidade de energia de radiação se torna cada vez mais dominante à medida em que olhamos para épocas cada vez mais antigas do Universo, quando $a(t)$ era menor. Como $\rho = u/3c^2 \approx 10^{-5}\rho_m$ atualmente, vemos a partir dessa relação que a radiação dominou a dinâmica nas épocas iniciais correspondentes aos redshifts $z + 1 \geq 10^4$ (PARTRIDGE, 2006). Nessa direção, podemos descobrir que o fator de escala $a(t)$ depende da temperatura T quando a radiação domina a expansão. Para o análogo dominado por radiação do modelo de Einstein-Sitter (quando $k = 0$), temos:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

Essa proporção descreve a expansão do Universo nos primeiros de anos após o Big Bang.

3.4 Sobre a densidade do Universo

Embora ρ_c seja muito baixa, as tentativas observacionais de determinar a densidade real ρ_0 do Universo produziram valores ainda mais baixos. Se somarmos toda a massa das galáxias em um grande volume representativo do Universo, por exemplo, obtemos aproximadamente $0,01-0,1\rho_c$ ou $\Omega = 0,01-0,1$; o valor maior inclui a matéria não luminosa em galáxias e aglomerados. Outra restrição importante em ρ_0 (ou em Ω) é a definida pela nucleossíntese primordial: a quantidade de deutério emergindo desta época é uma função de Ω , de modo que as observações da abundância de deutério implicam em limites superiores $\Omega < 0,2$ (esse limite se aplica apenas à matéria bariônica) (PARTRIDGE, 2006).

É possível, no entanto, que grandes quantidades de matéria não-bariônica possam estar presentes no espaço intergaláctico: a matéria escura. Atualmente existem diversos candidatos a matéria escura, como neutrinos de massa de repouso diferente de zero (da ordem de 10 eV) e algumas partículas associadas às Grandes Teorias de Unificação (GUT's)¹, como os áxions, ou às teorias supersimétricas (os photinos). A principal motivação para a proposição da matéria escura é a sua necessidade para explicar as curvas de rotação das galáxias e as grandes massas de aglomerados de galáxias.

Cabe destacar que existe uma grande dificuldade em conciliar as teorias de formação de galáxias em um modelo para $\Omega < 1$ com as restrições observacionais oriundas das anisotropias de pequena escala da CMB, e nenhum desses modelos especifica um valor para Ω .

¹ Em síntese, as GUT's são teorias que visam explicar e conectar (em um único arcabouço físico e matemático) todos os fenômenos naturais conhecidos.

Apesar do valor de ρ_0 não ser bem conhecido, certamente é muito maior que a densidade da CMB, pois a razão $\rho_\gamma/\rho_0 \leq 10^{-4}$ atualmente. Entretanto, essa razão pode ser reescrita como uma razão entre as densidades numéricas de bárions e de fótons no Universo: essa razão é aproximadamente $n_b/n_\gamma = 10^{-9}$. Perceba que a razão n_b/n_γ independe de $(z + 1)$ e então permaneceu constante à medida em que o Universo se expandiu, o que não ocorreu com a razão de densidades (ρ_r/ρ_m) , que aumentou linearmente com $(z + 1)$.

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 04 ABRINDO O UNIVERSO HOMOGÊNEO: A RELATIVIDADE GERAL

*“O importante é não parar de questionar, a
curiosidade tem sua própria razão de existir”.*

(Albert Einstein)

4 Abrindo o Universo homogêneo: a Relatividade Geral

4.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“Abrindo o Universo homogêneo: a Relatividade Geral”, como o próprio nome já sugere, versa sobre a Teoria da Relatividade Geral, que relaciona a geometria do Universo com o conteúdo nele presente. Nessa parte também tratamos da evolução de fundo do Universo e da expansão cósmica. A relevância deste capítulo advém do enorme potencial que a Teoria da Relatividade Geral tem de prever e explicar o comportamento (estrutural e dinâmico) de diversos entes cosmológicos, como é o caso da CMB.

4.2 Aspectos físicos de um Universo em expansão

4.2.1 O princípio cosmológico

Este princípio enuncia que em escalas suficientemente grandes (da ordem de 100 megaparsecs - 326 milhões de anos-luz) ([WUENSCHÉ, 1994](#)) o Universo é homogêneo (diferentes partes do Universo têm as mesmas propriedades físicas médias, como densidade de energia, pressão e temperatura) e isotrópico (não há direções preferenciais no Universo, isto é, medidas de uma quantidade física em duas direções diferentes devem apresentar o mesmo valor).

O princípio cosmológico é violado em pequenas escalas: a distribuição irregular de planetas, estrelas e galáxias não permitem que o Universo seja homogêneo. Como as escalas da ordem de $100h^{-1}\text{Mpc}$ representam praticamente a distância média entre duas galáxias, então, nesses casos, podemos tratar a dinâmica dos fluidos cosmológicos (em grandes escalas) como se o Universo fosse perfeitamente homogêneo e isotrópico.

Além disso, esse princípio permite definir uma variável de tempo universal, chamada de tempo cósmico, que pode ser entendida como o tempo medido por observadores em repouso em relação à matéria em sua vizinhança. A homogeneidade garante que os relógios desses observadores possam estar sincronizados em relação à evolução da densidade homogênea cosmológica. Por convenção, escolhemos o tempo cósmico zero para representar o Big Bang e, portanto, essa grandeza pode ser interpretada como a idade do Universo.

Apesar de ainda não ter sido demonstrado inequivocamente, o princípio cosmológico dá um significado universal às medições locais e leva a soluções elegantes das equações de Einstein. A principal dificuldade nesse sentido é que é impossível provar observacionalmente

a homogeneidade sem antes assumir que não ocupamos uma posição especial no Universo (princípio de Copérnico) e que só temos acesso ao cone de luz passado. Se partirmos do princípio de Copérnico, então a existência de isotropia no Universo observável implica automaticamente na homogeneidade de todo o Universo, porque a isotropia é bem estabelecida em termos de observações. Podemos citar alguns exemplos bem estabelecidos: as isotropias de fundo de micro-ondas e de raios-X, as isotropias de várias fontes de radiação (como as radiogaláxias) e a isotropia da CMB.

Para verificar a homogeneidade do Universo observável geralmente se conta o número de objetos (galáxias, por exemplo) em regiões de volume crescente. Se o Universo for homogêneo, então espera-se que a densidade média de galáxias nessas regiões deve convergir um valor constante e apresentar uma certa escala de homogeneidade. Para definir essa escala é preciso assumir um modelo cosmológico que converta os dados obtidos das galáxias em distâncias. Essa limitada metodologia se caracteriza mais como uma verificação de consistência de modelos homogêneos do que propriamente como um teste de homogeneidade.

A medição do maior volume ($V \sim 1h^{-3} \text{ Gpc}^{-3}$) até o momento foi realizada usando as galáxias azuis. Resumidamente se encontrou homogeneidade para escalas maiores que $70h^{-1}\text{Mpc}$, que está de acordo com o que foi obtido usando galáxias vermelhas e em desacordo com resultados anteriores, que sugeriam uma estrutura fractal do Universo (PETTINARI, 2016).

4.2.2 A distância comóvel

A distância comóvel χ pode ser entendida como a distância (adimensional) entre dois pontos espaciais na grade de espaço-tempo comóvel. A grande vantagem de se definir χ é que ela é constante no tempo, uma vez que engloba apenas coordenadas comóveis. A distância física, dada por $r = a(t)\chi$, por outro lado, é a distância medida em um espaço-tempo que não se move com a expansão e, portanto, que não se modifica com o tempo.

Como sabemos, o redshift está intrinsecamente relacionado à propagação da luz, cujos fótons se movem de uma fonte até o observador. A trajetória desses fótons é descrita pela geodésica nula ($ds^2 = 0$) ao longo de um caminho radial ($d\phi = d\theta = 0$), que no caso da métrica FLRW fornece:

$$d\chi = \frac{c}{a(t)}dt. \quad (4.1)$$

Ou seja: a velocidade real de um fóton é constante (e igual a c), mas a sua velocidade em relação às coordenadas comóveis é maior quando o Universo é pequeno (isto é, quando temos $a < 1$). Portanto, um fóton que foi emitido em um instante t_e e observado em t_o

terá percorrido uma distância comóvel de:

$$\chi(t_e, t_o) = \int_{t_{ems}}^{t_{obs}} \frac{c}{a(t)} dt. \quad (4.2)$$

A distância comóvel χ é, por definição, independente do tempo. Se outro fóton for emitido logo após o primeiro (por exemplo, no tempo $t_1 + dt_1$), ele é observado após o primeiro (em $t_2 + dt_2$), mas a distância comóvel percorrida é a mesma: $\chi(t_1, t_2) = \chi(t_1 + dt_1, t_2 + dt_2)$. Com base nesse resultado, inferimos que $dt_1/a(t_1) = dt_2/a(t_2)$, e então inferimos que a quantidade $dt/a(t)$ é conservada ao longo do cone de luz. Essa igualdade nos diz que todos os intervalos de tempo são “esticados” durante a propagação dos fótons em um Universo em expansão: como $d\lambda = cdt$, esse resultado também é válido para os comprimentos de onda.

Usando a relação expansão-redshift ($1 + z = a_0/a$) e a definição da taxa de Hubble ($aH = da/dt$), podemos relacionar χ com z :

$$d\chi = -\frac{c}{a_0 H(z)} dz. \quad (4.3)$$

Como sabemos, $a_0 \equiv a(t_0)$. Portanto, a distância comóvel percorrida por um fóton emitido em um redshift z e recebido hoje (em $z = 0$) é dada por:

$$\chi(z) = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (4.4)$$

em que o parâmetro E é definido como $E(z) \equiv H(z)/H_0$. Essa expressão relaciona a geometria do Universo (descrita por χ e H) ao redshift z medido. De acordo com a lei de Hubble ($v = H_0 r$) e com a identidade $r(t, t_0) = a_0 \chi(t, t_0)$, obtemos a relação entre velocidade e redshift:

$$\frac{v}{c} = \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (4.5)$$

que é um expressão relevante para converter um dado redshift em velocidade de recessão no momento da emissão.

As leis distância-redshift (4.4) e velocidade-redshift (4.5) nos dizem que, para inferir as distâncias e velocidades de um objeto, primeiro precisamos conhecer a história da expansão do Universo $H(z)$ até quando a luz foi emitida. A razão é que nossas observações cosmológicas estão limitadas à região do espaço-tempo incluída em nosso cone de luz passado (PETTINARI, 2016). É importante destacar que temos apenas “fotos” do Universo (tiradas aqui e agora), que as fontes mais distantes emitiram sua luz em um momento em que a taxa de expansão era diferente do valor atual H_0 e que essa luz viajou por muito tempo em um Universo em expansão. Diante desses fatos, para calcular a distância de um objeto, devemos considerar o redshift, a expansão do Universo e o intervalo de tempo entre t_e e t_o .

Por outro lado, se o objeto estiver muito próximo (isto é, para pequenos valores de redshift) a integral acima pode ser expandida em série de Taylor em torno de $z = 0$, de modo a obtermos:

$$\int_0^z \frac{dz}{E(z)} \approx z - \frac{E'(0)}{2} z^2 + \frac{1}{6} [2E'(0)^2 - E''(0)] + \dots \quad (4.6)$$

As linhas representam derivadas em relação a z . Se mantermos apenas o primeiro termo na expansão, as leis distância-redshift e velocidade-redshift tornam-se respectivamente:

$$cz = H_0 r, \quad (4.7)$$

e

$$v = H_0 r. \quad (4.8)$$

Por esta razão encontramos a Lei de Hubble escrita como $cz = H_0 r$.

4.2.3 O tempo de Hubble

Podemos definir o tempo de Hubble t_H simplesmente como o inverso do parâmetro de Hubble. A partir dessa definição, o valor atual do tempo de Hubble é facilmente obtido de H_0 :

$$t_H = \frac{1}{H} \rightarrow t_{H_0} = \frac{1}{H_0} \approx 9,77h^{-1} \times 10^9 \text{ anos}. \quad (4.9)$$

Se a taxa de expansão for constante (ou seja, se $d^2a/dt^2 = 0$), o tempo de Hubble pode ser interpretado como o tempo necessário para o Universo dobrar de tamanho. Equivalentemente, podemos escrever:

$$a(t_1) + \frac{da}{dt} \Delta t = a(t_2). \quad (4.10)$$

A solução dessa equação para $a(t_2) = 2a(t_1)$ é $\Delta t = H^{-1}(t_1)$. Se a expansão fosse constante após o Big Bang, então poderíamos interpretar o tempo de Hubble como a idade do Universo. Em um modelo mais realista, onde a taxa de expansão varia, o tempo de Hubble não corresponde à idade do Universo, no entanto, define uma escala de tempo para a expansão do Universo. No modelo Λ CDM (o mais aceito atualmente), o tempo t_{H_0} é um bom substituto para a idade atual do Universo, pois, usando parâmetros cosmológicos obtidos pelo satélite Planck, encontra-se $t_0 = 13,817 \pm 0,048$ bilhões de anos e $t_{H_0} \approx 14,6$ bilhões de anos (PETTINARI, 2016).

4.2.4 O raio de Hubble

Definimos o raio de Hubble r_H como a distância física percorrida pela luz em um tempo de Hubble. Nesse sentido, a sua expressão e o seu valor atual são:

$$r_H = \frac{c}{H} \rightarrow r_{H_0} = \frac{c}{H_0} \approx 2998h^{-1} \text{ Mpc}. \quad (4.11)$$

De acordo com a lei de Hubble, os objetos que se encontram a distâncias maiores que o raio de Hubble recuam mais rápido que a luz. Com base nisso, para uma expansão constante, um objeto localizado no centro de uma esfera de raio r_H nunca será capaz de interagir com objetos fora dessa esfera, pois um movimento acima da velocidade da luz seria necessário para que essa interação ocorresse. Logo, o raio de Hubble é a extensão máxima do cone de luz do futuro de qualquer evento no Universo.

Se a expansão do Universo diminuir com o tempo, um número crescente de regiões do Universo acabará entrando em contato causal e a escala de tempo necessária para que isso aconteça é o tempo de Hubble. Por outro lado, se o Universo experimentar uma expansão acelerada, qualquer objeto localizado dentro da esfera de Hubble atualmente sairá dela depois de um tempo bastante longo: como resultado, um número crescente de regiões causalmente desconectadas será criado. Em um Universo em aceleração, a luz não consegue acompanhar a expansão.

Devido a esta interpretação causal, o raio r_H geralmente é denominado horizonte e é dado por $c/H(t)$. Porém, esse horizonte é uma distância física, não comóvel. Para resolver essa questão e obter um “horizonte comóvel” devemos dividir essa expressão pelo fator de escala: $c/[H(t)a(t)]$. Essa quantidade não deve ser confundida com o horizonte de partículas, que representa a distância máxima que uma partícula viajou desde o Big Bang até um tempo t .

4.2.5 O horizonte de partículas e a causalidade

A expressão do horizonte de partículas em coordenadas comóveis é obtida de χ ao definirmos os limites $t_e = 0$ e $t_o = t$:

$$\chi(t) \equiv \int_0^t \frac{c}{a(t)} dt. \quad (4.12)$$

Como a velocidade da luz é a velocidade-limite do Universo, então podemos interpretar o horizonte de partículas como a distância comóvel máxima que uma partícula viajou até o tempo t , conforme mencionado anteriormente. Note que o horizonte de partículas é proporcional ao tempo comóvel η , de modo que:

$$\chi(t) = c\eta(t). \quad (4.13)$$

A partir dessas definições, o tempo e o horizonte de partícula comóveis serão utilizados como parâmetros de referência para os cálculos. Em algum instante t , o horizonte de partículas $\chi(t)$ é a extensão máxima do cone de luz passado para todos os eventos no Universo (para um observador na Terra, por exemplo, o valor atual de $\chi(t)$ define o tamanho do Universo observável).

O valor desse parâmetro depende do modelo cosmológico adotado: para um modelo Λ CDM, equivale a $\chi(t)(t_0) \approx 14.000$ Mpc e, para o mesmo modelo, $ct_0 \approx 4.000$ Mpc

(PETTINARI, 2016). Perceba, finalmente, que o horizonte de partículas $\chi(t)$ e o horizonte de Hubble $c/(aH)$ são grandezas distintas: enquanto o primeiro é uma medida do cone de luz passado de um evento (dado o histórico de expansão anterior), o último define a extensão do cone de luz futuro com base em um valor instantâneo de H .

4.3 As equações de campo gravitacional e a evolução de fundo

Para obtermos a forma do fator de escala $a(t)$ precisamos relacionar a métrica com o conteúdo energético do Universo e, portanto, recorrer às equações de campo gravitacional de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Em coordenadas naturais ($c = 1$). Nessa relação, $R_{\mu\nu}$ representa o tensor de Ricci (resultado da contração do tensor de Riemann), associado à curvatura do espaço-tempo:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}, \quad (4.15)$$

em que os fatores Γ são os símbolos de Christoffel, que levam em conta as mudanças espaço-temporais na métrica:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (4.16)$$

Além disso, $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento total (a fonte do campo gravitacional) e G é a constante de gravitação universal.

Em particular, o tensor energia-momento é dado pela soma dos tensores energia-momento de todas as espécies s do Universo:

$$T_{\mu\nu} = \sum_s T_{\mu\nu}^{(s)}, \quad (4.17)$$

onde $s = \gamma, b, \nu, c, \Lambda$ para fótons, bárions, neutrinos, matéria escura fria e energia escura, respectivamente.

O fato de o tensor espacial de Einstein ser diagonal é uma consequência direta da isotropia da métrica FLRW. De maneira semelhante, o tensor energia-momento também é forçado a ser diagonal, o que significa que os fluidos cosmológicos não podem ter velocidades peculiares ou tensões anisotrópicas (PETTINARI, 2016). Com base nisso podemos inferir que, na métrica FLRW simples, um fluido é caracterizado apenas por sua densidade de energia $\rho(t)$ e sua pressão $P(t)$.

Além disso, vamos assumir que os fluidos do Universo são barotrópicos, ou seja, que suas pressões são dadas em funções explícitas de sua densidade de energia. A relação matemática entre P e ρ pode ser representada pela equação de estado (ou parâmetro barotrópico) w , definida como:

$$P = w(\rho)\rho. \quad (4.18)$$

Falaremos mais sobre ω adiante. Portanto, podemos expressar o tensor energia-momento de um fluido da espécie s como:

$$T_{00}^{(s)} = \rho_s, \quad (4.19)$$

$$T_{ij}^{(s)} = \delta_{ij} w_s(\rho) \rho_s. \quad (4.20)$$

Ao conhecermos o parâmetro $w(\rho)$ das várias espécies se torna possível derivar toda a história da expansão do Universo. As espécies relativísticas (como os fótons e os neutrinos) têm uma equação de estado constante: $w = 1/3$. Por outro lado, as espécies não-relativísticas (como os bárions e a matéria escura fria após o desacoplamento) têm $w = 0$. Nos modelos em que a energia escura é uma constante cosmológica, a tratamos como um fluido de pressão negativa com $w = -1$. Em uma simples mistura de matéria e radiação, o parâmetro w deixa de ser constante.

4.4 As equações de Friedmann

Para um Universo homogêneo e isotrópico, caracterizado pela métrica FLRW, a componente tempo-tempo das equações de Einstein é chamada de equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.21)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e $\rho = \sum \rho_s$ é a densidade de energia total do Universo. O termo em k representa o fato de que, em um Universo plano ($k = 0$), a densidade total é sempre igual à densidade crítica ρ_c , definida como:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (4.22)$$

que depende do tempo e cujo valor atual pode ser facilmente calculado em termos da constante de Hubble:

$$\rho_c = 10,54 h^2 \text{GeV}/\text{m}^3, \quad (4.23)$$

em coordenadas naturais. Esse valor de densidade é pequeno, bem menor que a densidade do ar ($1,27 \text{kg}/\text{m}^3$), apesar de não se esperar um valor distante desse para a densidade média do Universo. À razão entre a densidade das espécies e a densidade crítica do Universo dá-se o nome de parâmetro de densidade ($\Omega_s(t)$):

$$\Omega_s(t) \equiv \frac{\rho_s(t)}{\rho_c(t)}. \quad (4.24)$$

De acordo com as equações de estado das várias espécies, a equação de Friedmann pode ser reescrita em termos do valor atual dos parâmetros de densidade ($\Omega_{s0} \equiv \Omega_s(t_0)$), como:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{\Omega_{R0}}{a^4} + \frac{\Omega_{k0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} \right), \quad (4.25)$$

onde $H_0 \equiv H(t_0)$ e os outros parâmetros são dados por:

$$\begin{aligned}\Omega_{M0} &= \frac{\rho_M(t_0)}{\rho_c(t_0)}, \\ \Omega_{R0} &= \frac{\rho_R(t_0)}{\rho_c(t_0)}, \\ \Omega_{k0} &= -\frac{k}{a_0^2 + H_0^2}, \\ \Omega_{\Lambda 0} &= \frac{\Lambda}{3H_0^2}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

4.5 A equação da aceleração

Em um Universo regido pela métrica FLRW, as componentes espaciais da equação de Einstein se reduzem à equação de aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P),\tag{4.27}$$

em que $P = \sum_s P_s$ representa a pressão combinada de todas as espécies. Essa equação também é válida para um Universo curvo, onde $k \neq 0$. Perceba que a pressão e a densidade aparecem em concordância nessa equação: ambas contribuem para aumentar a atração gravitacional e, assim, desacelerar a expansão do Universo. Esse comportamento não é comumente observado nos sistemas, pois a pressão geralmente tende a expandir sistemas (quando há um gradiente de pressão), mas, em um Universo homogêneo, a pressão P é constante e, desse modo, não há gradiente de pressão nem forças expansivas.

4.6 A equação da continuidade

A evolução das espécies materiais é determinada pela conservação de energia-momento:

$$T_{\nu,\mu}^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0\tag{4.28}$$

Devido à isotropia cósmica, a única componente significativa é $\nu = 0$, que resulta na equação da continuidade:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0.\tag{4.29}$$

Em termos do parâmetro barotrópico, temos:

$$\dot{\rho} + 3H\rho(w + 1) = 0.\tag{4.30}$$

Essa equação deve ser aplicada separadamente para cada espécie, pois, nas épocas de interesse, o número de partículas é conservado e a troca de energia é desprezível. Dessa

forma, para um fluido da espécie s com w constante ($P = w\rho$), a equação da continuidade fornece (PETTINARI, 2016):

$$\rho_s \propto a^{-3(1+w_s)} \quad (4.31)$$

Como vimos, para radiação ($w = 1/3$), matéria escura fria ($w = 0$) e energia escura ($w = -1$), as densidades apresentam as seguintes características (PETTINARI, 2016):

$$\begin{aligned} \rho_R &\propto a^{-4}, \\ \rho_M &\propto a^{-3}, \\ \rho_\Lambda &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para o caso de uma equação de estado dependente da expansão cósmica (e, consequentemente, do tempo) $w = w(s)$, teremos que resolver a seguinte integral:

$$\rho_M \propto \exp \left\{ \int_0^a \frac{1}{\tilde{a}} [1 + w(\tilde{a})] d\tilde{a} \right\}, \quad (4.33)$$

onde os \sim servem apenas para diferenciar a variável de integração dos limites de integração.

4.7 Análise quantitativa da expansão cosmológica

Se inserirmos a equação geral de estado na equação de Friedmann, resolvermos para $a(t)$ e desprezarmos a curvatura k , obteremos uma série de valores que representam a história da expansão de um Universo preenchido por uma única espécie (que tem w constante):

Tabela 1 – Valores de a , H e w .

Valores de a	Valores de H	Valores de w
$a \propto t^{\frac{2}{3(w+1)}} \propto \eta^{\frac{2}{1+3w}}$	$H \propto t^{-1} \propto a^{\frac{-3(1+w)}{2}}$	$w = \text{constante} \neq -1$
$a \propto t^{\frac{2}{3}} \propto \eta^2$	$H \propto t^{-1} \propto a^{\frac{-3}{2}}$	$w = 0$ (matéria escura)
$a \propto t^{\frac{1}{2}} \propto \eta$	$H \propto t^{-1} \propto a^{-2}$	$w = \frac{1}{3}$ (radiação)
$a \propto e^{Ht} \propto \frac{1}{ \eta }$	$H = \text{constante}$	$w = -1$ (constante cosmológica)

Nesta tabela, t é o tempo cósmico e η é o tempo comóvel, relacionados por: $d\eta = dt/a$. No caso de uma mistura de fluidos, devemos utilizar a equação de Friedmann completa:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{M0}}{a^3} + \frac{\Omega_{R0}}{a^4} + \frac{\Omega_{k0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0}}, \quad (4.34)$$

que produz uma integral temporal que pode ser resolvida analiticamente para $a(t)$, dados os parâmetros cosmológicos (que foram medidos com alta precisão). Para a constante de

Hubble atual $H_0 = 100h \text{ kms}^{-1}/\text{Mpc}$ e o parâmetro de densidade da matéria $\Omega_M = \Omega_b + \Omega_c$, adotamos os melhores valores de ajuste obtidos pelo experimento Planck (PETTINARI, 2016):

$$\begin{aligned} h &= 0,6780 \pm 0,0077, \\ \Omega_{b0}h^2 &= 0,02214 \pm 0,00024, \\ \Omega_{c0}h^2 &= 0,1187 \pm 0,0017, \end{aligned} \tag{4.35}$$

com nível de confiança de 68 por cento. O parâmetro de densidade do fluido de fótons, por outro lado, pode ser determinado a partir do valor de temperatura da CMB:

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001\text{K}, \tag{4.36}$$

com nível de confiança de 95 por cento. Para um espectro de corpo negro esses dados produzem:

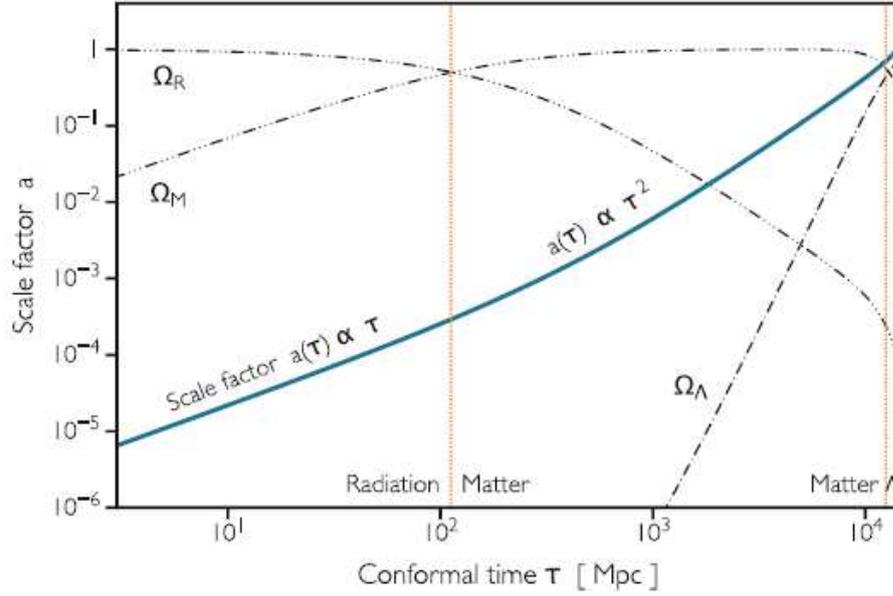
$$\begin{aligned} \Omega_{\gamma 0}h^2 &= 2,49 \cdot 10^{-5}, \\ \Omega_{\nu 0}h^2 &= 1,69 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

onde admitimos que a densidade de neutrinos sem massa é aproximadamente igual a $0,68 \Omega_\gamma$ porque eles são férmions em temperaturas mais baixas. Por fim, podemos adotar um Universo plano ($\Omega_k = 0$) para que a densidade da energia escura possa ser determinada como sendo:

$$\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{R0} - \Omega_{M0} = 0,694. \tag{4.38}$$

Na Figura 4 está a evolução do fator de escala obtido com os parâmetros calculados acima.

Figura 4 – A curva azul é o fator de escala em função do tempo comóvel (o autor fez $\eta = \tau$ nessa imagem), obtido pela resolução da equação de Friedmann. As três curvas pontilhadas pretas são os parâmetros de densidade de radiação (Ω_R), matéria (Ω_M) e energia escura, considerada como um fluido cosmológico constante (Ω_Λ)



Fonte: PETTINARI, 2016.

No gráfico acima, os dias atuais correspondem a $a = 1$ e $\eta = 14200$ Mpc. As interseções entre os três Ω 's dividem a história cósmica em três épocas: a era de dominação da radiação (quando $a \propto \eta$), a era de dominação da matéria (onde $a \propto \eta^2$) e a era de dominação da energia escura (em que $a \propto 1/\eta$). As transições entre as três eras ocorrem nos seguintes fatores de escala (PETTINARI, 2016):

$$a_{eq} = \frac{\Omega_{R0}}{\Omega_{M0}} = 2,96 \cdot 10^{-4},$$

$$a_\Lambda = \frac{\Omega_{M0}}{\Omega_\Lambda} = 0,44,$$
(4.39)

ou ainda, respectivamente, em: $z_{eq} = 3380$ e $z_\Lambda = 1,26$. Se avaliarmos a equação de aceleração no início do Universo, quando a radiação dominava ($w = 1/3 > 0$), temos $d^2a/dt^2 < 0$, ou seja, a função $a(t)$ é uma curva côncava. Com isso, podemos esperar que o fator de escala do Universo cruze a linha $a = 0$ em um período de tempo finito: o Big Bang. Portanto, o Big Bang representa singularidades nas coordenadas (a métrica espacial desaparece para $a = 0$), no escalar de Ricci e na densidade de radiação (já que $\rho_R \propto a^{-4}$).

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 05 FECHANDO O UNIVERSO HOMOGÊNEO: AS EQUAÇÕES DE BOLTZMANN

*“A energia disponível é o principal objeto em jogo
na luta pela existência e pela evolução do mundo”.*

(Ludwig Boltzmann)

5 Fechando o Universo homogêneo: as equações de Boltzmann

5.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“Fechando o Universo homogêneo: as equações de Boltzmann” apresenta os princípios básicos e o passo-a-passo matemático para a dedução da equação de Boltzmann, uma importante ferramenta no estudo dos constituintes do Universo. Diante disso conseguimos entender o porquê deste capítulo ser uma parte essencial do presente trabalho: aos diferentes conteúdos materiais do Universo podem ser associadas equações de Boltzmann, que descrevem a evolução das funções de distribuição desses constituintes nos sistemas termodinâmicos.

5.2 Os princípios fundamentais da equação de Boltzmann

A equação de Boltzmann (também conhecida como equação de transporte de Boltzmann) é uma ferramenta matemática, criada em 1872 por Ludwig Boltzmann, que descreve a transferência de calor e de cargas elétricas (que envolve, também, gradientes de temperatura e densidade). Esta equação fornece informações importantes para a descrição de sistemas de partículas termo-estatísticas. Antes de deduzir a equação, porém, devem ser levadas em consideração as seguintes hipóteses:

- O gás analisado é rarefeito, ou seja, o livre caminho médio é muito maior que a distância de atuação das forças entre as partículas. Além disso, as colisões entre as partículas são elásticas (a energia cinética das partículas é conservada) e binárias (ocorrem aos pares) e os efeitos de parede e de geometria podem ser desprezados;
- As velocidades das partículas não estão correlacionadas: se duas partículas colidem e, depois, colidem com outras partículas, ao voltarem a se colidir no futuro, não carregam nenhuma informação daquela primeira colisão;
- As partículas e as forças de interação são esféricas;
- A Mecânica Clássica não-relativística é aplicável (as velocidades das partículas são baixas, se comparadas à velocidade da luz);
- Os efeitos das forças externas sobre uma colisão são desprezíveis;

- As variáveis posição (\vec{r}), velocidade (\vec{v}) e tempo (t) são independentes entre si;
- A função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ não varia durante uma colisão.

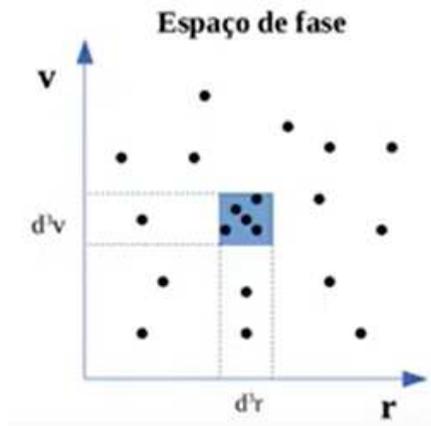
Diante disso, o objetivo geral da equação de Boltzmann é descrever a evolução temporal e espacial da função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ em um gás, cujas partículas constituintes têm apenas energia cinética, dentro e fora do equilíbrio.

Pela forma da função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, note que é necessário se trabalhar em um espaço diferente do espaço tridimensional que estamos acostumados: o vetor posição tem três componentes, o vetor velocidade tem outras três componentes e o tempo aparece como uma sétima componente. Desse modo, precisamos trabalhar com sete componentes distintas para descrever completamente o estado de uma partícula de gás. O espaço multidimensional que possibilita essa descrição é chamado espaço de fase.

5.3 A construção matemática das equações de Boltzmann

Observe, na Figura 5, a representação de um volume infinitesimal em um determinado espaço de fase hexadimensional (WOLF, 2021):

Figura 5 – Representação bidimensional do espaço de fase.



Fonte: WOLF (2021).

A partir dessa figura, podemos notar que o número de partículas que está no volume azul em um determinado instante de tempo t é dado pelo produto da função de distribuição pelo volume no espaço de fase:

$$N(t) = f(r, v, t) d^3r d^3v. \quad (5.1)$$

Da mesma maneira, decorrido um intervalo de tempo Δt , o número de partículas no volume vai mudar para:

$$N(t + \Delta t) = f(r + \Delta r, v + \Delta v, t + \Delta t) d^3r' d^3v'. \quad (5.2)$$

Se decorrido um intervalo infinitesimal de tempo dt , a expressão da variação $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ do número de partículas acima se transforma, a partir das equações (5.1) e (5.2), em:

$$dN = \frac{df(r, v, t)}{dt} d^3r d^3v dt = f(r + vdt, v + adt, t + dt) d^3r' d^3v' - f(r, v, t) d^3r d^3v. \quad (5.3)$$

Expandindo essa equação em séries de Taylor (até primeira ordem) e rearranjando os termos, chegaremos a:

$$dN = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v f. \quad (5.4)$$

Esta é a expressão geral da equação de Boltzmann. A partir dela, podemos fazer as seguintes associações:

- O termo $\partial f / \partial t$ representa a variação parcial no tempo da função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$;
- O termo $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f$ diz respeito à variação em $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ devida ao campo de velocidades das partículas;
- O termo $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v f$ descreve a variação em $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ devida a ação de forças externas ao sistema;
- O termo df/dt é um parâmetro que leva em consideração as características microscópicas do gás, como a frequência de colisões entre as partículas.

5.4 A equação de Boltzmann associada a um Universo homogêneo e em expansão

Para o contexto de um espaço-tempo em expansão, as equações de movimento são generalizadas para a equação da geodésica e os trimomentos p são correspondentemente promovidos a quadrivetores, de modo que:

$$P^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (5.5)$$

onde λ é um parâmetro que serve para descrever (em outras palavras, parametrizar) o caminho da partícula. A função de distribuição para um sistema de partículas é definida, em um espaço de fase hexadimensional, de modo que o tempo será tratado separadamente e o quadrimomento de cada partícula obedece à relação relativística:

$$P^2 \equiv g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = p^2 - (P^0)^2 = -m^2. \quad (5.6)$$

Além disso, observamos a relação entre os momentos físicos e comóveis:

$$P^i = \left(\frac{p}{a}\right) p^i. \quad (5.7)$$

Calculamos $dP/d\lambda$, os símbolos de Christoffel e aplicamos os resultados na equação de Boltzmann (5.4) para obter:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{p}{E}\right) \left(\frac{p^i}{a}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} - (Hp) \frac{\partial f}{\partial p} = C(f). \quad (5.8)$$

Esta equação é válida para todas as partículas. Note que fizemos $df/dt = C(f)$, que representa o termo de colisões. Para o limite relativístico, isto é, quando $p \gg m$, temos $E \approx p$ e, portanto, a equação (5.8) pode ser escrita como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{p^i}{a}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} - (Hp) \frac{\partial f}{\partial p} = C(f). \quad (5.9)$$

A equação acima se aplica, principalmente, a fótons e neutrinos, pois eles são relativísticos (casos nos quais o momento da partícula é muito maior que a sua massa). Do contrário, no limite não-relativístico, ou seja, quando $p \ll m$ e $E \approx m$. A equação de Boltzmann (5.4) se torna:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{p}{m}\right) \left(\frac{p^i}{a}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} - (Hp) \frac{\partial f}{\partial p} = C(f). \quad (5.10)$$

Note que o coeficiente na frente do segundo termo (que representa a velocidade das partículas) é pequeno, uma vez que $p \ll m$.

A partir disso se pode entender como a equação de Boltzmann permite calcular a evolução (temporal e espacial) do número de partículas por unidade de volume (também chamada densidade numérica). Seja $n(x, t)$ a densidade numérica. Podemos expressar matematicamente essa grandeza como a integral de $f(x, p, t)$ em todo o espaço de momentos. Desse modo, integrando a equação (5.8) e considerando o fato de que o Universo é homogêneo: ($\partial f/\partial x_i = 0$), tem-se:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\partial f}{\partial t} d^3p - \frac{H}{(2\pi)^3} \int p \frac{\partial f}{\partial p} d^3p = \frac{1}{(2\pi)^3} \int C(f) d^3p. \quad (5.11)$$

Resolvendo as integrais por partes e observando que a densidade numérica é:

$$n(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(p) d^3p, \quad (5.12)$$

chegamos à equação:

$$\frac{dn(t)}{dt} + 3Hn(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int C(f) d^3p. \quad (5.13)$$

Portanto, na ausência de colisões (isto é, se tivermos $C(f) = 0$), o número de partículas cai com a^{-3} , uma vez que, à medida em que o espaço-tempo se expande, o volume de uma região contendo um número fixo de partículas cresce com a^3 .

5.5 Um pouco de física de partículas: os termos de colisão

De acordo com a equação de Boltzmann, o efeito das interações diretas de partículas são as “colisões”. No entanto, de maneira geral, o termo “colisões” inclui também fenômenos como: dispersão, criação (ou aniquilação) de pares e decaimento de partículas. Um processo recorrente nos sistemas de partículas é a reação de partículas do tipo 1 e 2, que agem para formar partículas do tipo 3 e 4, representado por:

$$(1)_p + (2)_q \leftrightarrow (3)_{p'} + (4)_{q'}. \quad (5.14)$$

Na reação acima p e q representam os momentos lineares das partículas antes da interação e p' e q' são os momentos após a interação. Por exemplo, se quisermos representar o espalhamento de elétrons e fótons, devemos escolher $(1) = (3) = (e^-)$ e $(2) = (4) = (\gamma)$ ou, se quisermos representar uma aniquilação, devemos escolher $(1) = (e^-)$, $(2) = (e^+)$ e $(3) = (4) = (\gamma)$:

$$\begin{aligned} e_p^- + \gamma_q &\leftrightarrow e_{p'}^- + \gamma_{q'} \rightarrow \text{Espalhamento}, \\ e_p^- + e_q^+ &\leftrightarrow \gamma_{p'} + \gamma_{q'} \rightarrow \text{Aniquilação}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Além disso, todos os processos físicos microscópicos têm que obedecer às leis de conservação do momento linear e da energia. Então podemos escrever:

$$E_1(p) + E_2(q) = E_3(p') + E_4(q') \rightarrow \text{Conservação da energia}, \quad (5.16)$$

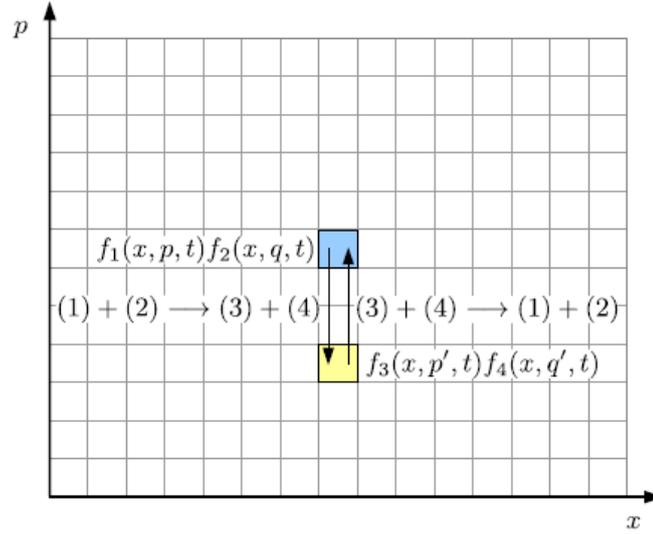
$$p + q = p' + q' \rightarrow \text{Conservação do momento linear}, \quad (5.17)$$

em que: $E_s(p) = \sqrt{(p^2 + m_s^2)}$ denota a relação energia-momento (em coordenadas naturais) para uma partícula s . Como se sabe, cada tipo de partícula tem sua respectiva função de distribuição $f_s(x, p, t)$ e em Cosmologia se considera que estados diferentes (por exemplo, estados de spin) têm a mesma função de distribuição f . Portanto, em vez de representar os estados por funções de distribuição separadas, atribuiremos pesos estatísticos apropriados a cada um deles.

Para entender como os processos afetam a evolução das funções de distribuição f_s das partículas envolvidas, primeiramente, devemos ter em mente que eles se tratam de uma interação local no espaço e no tempo. Logo, todas as funções de distribuição são avaliadas em valores fixos de (x, t) . Desse modo, só é essencialmente necessário determinar os argumentos referentes ao momento linear da partícula: para $f_1(x, p, t)$, por exemplo, devemos subtrair as partículas do tipo 1 (com momento p) que foram dispersadas pela reação direta e adicionar as partículas do tipo 1 (com momento p) que são espalhadas pela reação inversa.

Observe a figura 6. Nessa figura, se nota que a reação direta remove partículas de $f_1(x, p, t)$ em proporção ao produto $f_1 f_2$ (número total de partículas do lado esquerdo) e as

Figura 6 – Representação bidimensional de um processo no espaço de fase.



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

adiciona à função de distribuição para as partículas (3) $f_3(x, p', t)$ (e o mesmo ocorre entre as partículas (2) e (4)), “passando” as partículas da célula azul para a célula amarela (isto é, de um estado no espaço de fase para outro). A reação inversa, por outro lado, adiciona partículas a $f_1(x, p, t)$ e $f_2(x, p, t)$, em proporção à abundância das partículas (3) e (4), ou seja, na célula inferior. Todas as colisões acontecem localmente, ou seja, em uma posição fixa x .

Em outra frente, para o cálculo do termo de colisões associado a esse sistema, devemos somar em todos os outros momentos (q, q', p') que afetam $f_1(p)$. Matematicamente, os termos de colisão são: (DODELSON; SCHMIDT, 2021)

$$C(f_1(p)) = \sum_{q, p', q'}^{p+q=p'+q'} \delta_D^{(1)} [E_1(p) + E_2(q) - E_3(p') - E_4(q')] |M|^2 [f_3(p') f_4(q') - f_1(p) f_2(q)], \quad (5.18)$$

em que $\delta_D^{(1)}$ é o delta de Dirac, que impõe a conservação de energia. O termo $|M|^2$ é a amplitude de espalhamento, um fator que depende dos detalhes microscópicos da interação e pode ser calculado através dos diagramas e das regras de Feynman. Esse fator pode ser usado para calcular a probabilidade de ocorrência de um processo de espalhamento, conectando o estado inicial (caracterizado por um conjunto de partículas que possuem momentos bem definidos) a um estado final (contendo outras partículas, que são, na maioria das vezes, diferentes e que também possuem momentos bem definidos). A amplitude de espalhamento nos fornece também valores de parâmetros importantes para o estudo dos processos, tais como: seções de choque σ , taxas de decaimento Γ e tempo de vida τ de partículas.

Cabe ainda destacar que, como estamos tratando da interação entre duas partículas, a amplitude de espalhamento $|M|^2$ depende do produto das funções de distribuição $f_1 f_2$

(na reação direta) e $f_3 f_4$ (na reação inversa), e para as reações direta e inversa apresenta o mesmo valor. A partir da equação (5.18) podemos notar que os termos de colisão consistem na soma dos produtos entre a diferença de energia total (primeiro termo entre colchetes) pela diferença no número de partículas causada pela reação (segundo termo entre colchetes), multiplicados por coeficientes de ponderação.

É importante destacar dois elementos que foram negligenciados na equação (5.18): os efeitos quânticos causados pela emissão estimulada e o bloqueio de Pauli. A emissão estimulada é um fenômeno quântico que ocorre quando o estado excitado (que, naturalmente, libera um fóton para retornar ao estado fundamental) de um átomo é perturbado pelo campo elétrico de um fóton com frequência ν , ao ponto de fazer o átomo emitir outros fótons de mesma frequência, em fase com um primeiro fóton (o átomo, então, decai novamente para o estado fundamental). Já o bloqueio de Pauli diz respeito a um fenômeno quântico que ocorre quando um número grande de férmions (como os elétrons) estão muito próximos: devido ao princípio de exclusão de Pauli, as partículas ficam “sem espaço” para espalhar a luz, tornando a matéria invisível.

Estes fatores aumentam ou diminuem a taxa de reação dependendo da ocupação do estado final. Matematicamente, incluir esses dois fatores equivale a adicionar fatores de $(1 \pm f_3)(1 \pm f_4)$ à reação direta e $(1 \pm f_1)(1 \pm f_2)$ à reação inversa (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Em cada um desses casos, o sinal de mais se aplica quando a partícula correspondente é um bóson e o sinal de menos se aplica quando a partícula correspondente é um férmion. A título de exemplo, o bloqueio de Pauli se aplica assim: se o estado do férmion 1 (de momento p) já estiver ocupado, o fator $1 - f_1(p)$ é zero e, portanto, a reação inversa com este estado final não ocorre (devido ao princípio de exclusão de Pauli). Por outro lado, se a partícula 1 for um bóson, a taxa de reação correspondente é aumentada, pois os bósons podem ocupar um mesmo estado.

Portanto, deve-se adicionar os fatores apropriados na equação (5.18) para realizar corretamente as somas no espaço de fase. Dessa forma, pode-se lembrar que o elemento de volume no espaço de fase em coordenadas naturais é $d^3p/(2\pi)^3$ e que, além disso, em um cenário relativístico, as integrais do espaço de fase são calculadas sobre as três componentes do momento e da energia. Com todas essas considerações, os termos de colisão de tornam (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$C(f_1) = \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_4} |M|^2 (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}(p + q - p' - q') \quad (5.19)$$

$$\times \delta_D^{(1)}[E_1 + E_2 - E_3 - E_4] \{ [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2)] - [f_1 f_2 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2)] \}.$$

Aqui, negligenciamos as dependências de E e de f dos momentos p e q apenas para despoluir a equação. Mais uma vez, cabe destacar que as funções delta de Dirac reforçam a conservação da energia e do momento totais na interação, multiplicado por um fator $(2\pi)^4$. O resultado acima vale para qualquer interação entre duas partículas, que podem ser de uma mesma

espécie. A expressão (5.19) pode também ser escrita para o decaimento de partículas, caso no qual se deve considerar um novo termo de colisão, tendo que levar em conta novos produtos de funções de distribuição, amplitudes de espalhamento e integrais sobre momentos.

De posse das equações de campo gravitacional de Einstein (que descrevem o comportamento do espaço-tempo do cosmos) e das equações de Boltzmann (que descrevem a evolução da densidade numérica de diversas espécies de partículas) estamos em condições de prever, explicar e descrever o comportamento de um Universo homogêneo e em expansão e dos fenômenos a ele associados.

*OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO*

*CAPÍTULO 06
FUGINDO DA HOMOGENEIDADE*

*“O universo é uma harmonia de contrários”.
(Pitágoras)*

6 Fugindo da homogeneidade

6.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“Fugindo da homogeneidade” é um capítulo introdutório às perturbações cosmológicas (tendo em vista que, até o momento, estávamos estudando um Universo homogêneo) e, nele, encontraremos elementos da teoria de perturbação e o efeito desta nas funções de distribuição dos fótons. Por fim, ainda nesta parte, estudamos os fundamentos do formalismo de Fourier e apresentamos uma sequência de passos para a dedução das equações de Boltzmann para diferentes constituintes do Universo. Este capítulo merece destaque porque traz as equações que regem as perturbações nas distribuições de fótons, matéria escura fria, bárions e neutrinos.

6.2 Uma breve introdução

As equações de Einstein e Boltzmann em Universo homogêneo são ferramentas suficientes para se entender a história térmica do Universo, a produção de matéria escura, a nucleossíntese do Big Bang e a formação dos primeiros átomos. Agora vamos considerar um Universo com heterogeneidades, que formam o caso mais geral possível e que está mais próximo da realidade ([DODELSON; SCHMIDT, 2021](#)).

Inicialmente, cabe ressaltar que um Universo não-homogêneo é um caso muito mais complexo (e mais rico) do que o Universo homogêneo. Em razão dessa complexidade, torna-se extremamente necessária a realização de algumas aproximações, dentre as quais se destaca a seguinte: as perturbações do espaço-tempo construído pela métrica FLRW são pequenas (embora seja uma aproximação, isso fornece resultados muito precisos na Cosmologia).

A principal razão para admitirmos que as flutuações são pequenas é a possibilidade de utilização da teoria de perturbação, um método aproximativo largamente utilizado em diversas áreas da Física. O estudo das perturbações é a principal chave para se testar modelos cosmológicos. As perturbações não só explicam alguns dos porquês da história do cosmos, como revelam até mecanismos quânticos que podem ter sido a chave para o aparecimento das estruturas do Universo ([MARQUES, 2012](#)).

6.3 Fundamentos da teoria de perturbação

6.3.1 A ideia geral da teoria

Dado um campo cosmológico $\phi(x, t)$, dizemos que esse campo é perturbativamente expandido em torno de um valor de fundo (isto é, de ordem zero) $\phi^{(0)}(t)$ quando escrevemos:

$$\phi(x, t) = \phi^{(0)}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \phi^{(i)}(x, t), \quad (6.1)$$

em que ϵ é o parâmetro de expansão e $\phi^{(i)}$ representa a perturbação de ordem i de ϕ . O valor $\phi^{(0)}$ pode ser interpretado como o valor que o campo ϕ assumiria se o Universo fosse perfeitamente homogêneo e essa é a razão para este parâmetro depender somente do tempo cósmico t . Além disso, podemos entender os outros termos da expansão como a parte perturbada de ϕ , que não é homogênea e, portanto, depende tanto do tempo quanto da posição. O termo perturbativo de primeira ordem, dado por $\phi^{(1)}(x, t)$, é geralmente chamado de termo linear.

Nos casos em que o parâmetro ϵ é menor que 1, o somatório pode ser truncado em uma certa ordem n para produzir valores de ϕ até a n -ésima ordem, ou seja:

$$\phi(x, t) \approx \phi^{(0)}(t) + \epsilon \phi^{(1)}(x, t) + \dots + \epsilon^n \phi^{(n)}(x, t). \quad (6.2)$$

A isotropia observada da CMB sugere que no Universo primitivo (em redshifts $z > 1000$) as perturbações tinham uma amplitude 10^5 vezes menor que o fundo (PETTINARI, 2016). Diante disso, podemos truncar o somatório no termo de ordem linear, de modo a fornecer uma aproximação satisfatória:

$$\phi(x, t) \approx \phi^{(0)}(t) + \phi^{(1)}(x, t). \quad (6.3)$$

Em momentos posteriores, as perturbações da CMB permaneceram lineares porque as perturbações dos fótons não cresceram com o tempo. Estamos então justificados em usar as equações linearizadas para descrever a maior parte da física da CMB até hoje (PETTINARI, 2016).

Existem, por outro lado, efeitos importantes na CMB que não podem ser descritos pela teoria de perturbação linear, que acaba ignorando toda a complexidade na estrutura não-linear das equações de Einstein e de Boltzmann. A perturbação linear “ignora” propriedades importantes da CMB (como as não-gaussianidades das flutuações) e, para resolver esse problema, devemos expandir todas as variáveis até segunda ordem:

$$\phi(x, t) \approx \phi^{(0)}(t) + \phi^{(1)}(x, t) + \phi^{(2)}(x, t). \quad (6.4)$$

Onde, por questão de legibilidade, fizemos: $\epsilon^i \phi^{(i)} \rightarrow \phi^{(i)}$.

6.3.2 As funções e equações de perturbação

Um propriedade importante da teoria de perturbações é o produto de duas perturbações. Consideremos ϕ e ψ como duas perturbações, então:

$$\phi\psi = [\phi^{(0)}(t) + \phi^{(1)}(x, t) + \phi^{(2)}(x, t) + \dots][\psi^{(0)}(t) + \psi^{(1)}(x, t) + \psi^{(2)}(x, t) + \dots]. \quad (6.5)$$

Podemos dividir esse resultado de acordo com a ordem dos termos, de modo que:

$$\begin{aligned} (\phi\psi)^{(0)} &= \phi^{(0)}\psi^{(0)}, \\ (\phi\psi)^{(1)} &= \phi^{(0)}\psi^{(1)} + \phi^{(1)}\psi^{(0)}, \\ (\phi\psi)^{(2)} &= \phi^{(0)}\psi^{(2)} + \phi^{(2)}\psi^{(0)} + \phi^{(1)}\psi^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

A teoria da perturbação geralmente produz equações longas, apesar de que muitas perturbações têm um valor de fundo nulo, como é o caso de todos os trivetores (se eles tivessem um valor de fundo diferente de zero violariam o princípio de homogeneidade e isotropia do Universo). Diante disso, quando $\phi^{(0)} = \psi^{(0)} = 0$, o produto $\phi\psi$ simplifica para:

$$\begin{aligned} (\phi\psi)^{(0)} &= 0, \\ (\phi\psi)^{(1)} &= 0, \\ (\phi\psi)^{(2)} &= \phi^{(1)}\psi^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Uma função da variável perturbada ϕ pode ser expandida em séries de Taylor em torno do seu valor de fundo $\phi^{(0)} = \bar{\phi}$ como:

$$f(\phi) \approx f(\bar{\phi}) + \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_{\phi=\bar{\phi}} (\phi - \bar{\phi}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right)_{\phi=\bar{\phi}} (\phi - \bar{\phi})^2. \quad (6.8)$$

Se também considerarmos $\phi \approx \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$ e dividirmos a função $f(\phi)$ em ordens, vamos obter:

$$\begin{aligned} f(\phi)^{(0)} &= f(\bar{\phi}), \\ f(\phi)^{(1)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_{\phi=\bar{\phi}} \phi^{(1)}, \\ f(\phi)^{(2)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_{\phi=\bar{\phi}} \phi^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right)_{\phi=\bar{\phi}} \phi^{(1)}\phi^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Seguindo essa linha de raciocínio, podemos listar dois exemplos úteis: as funções $(1+x)^\alpha$ e e^x , com $x = (\phi - \bar{\phi})/\bar{\phi}$, que são expandidos até a segunda ordem como:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x^1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^1 x^1, \quad (6.10)$$

$$e^x \approx 1 + x^1 + \frac{1}{2} x^1 x^1. \quad (6.11)$$

Além disso, temos também que:

$$\sqrt{1+2x} \approx 1 + x^1 + x^2 - \frac{1}{2}x^1x^1, \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}} \approx 1 - x^1 - x^2 + \frac{3}{2}x^1x^1. \quad (6.13)$$

A principal vantagem da teoria da perturbação é a propriedade que permite que as equações perturbadas possam ser resolvidas ordem por ordem: podemos dividida-las em uma parte de fundo (de ordem zero), uma parte de primeira ordem (linear), uma parte de segunda ordem e assim por diante.

A equação para a ordem n é resolvida usando as soluções para as ordens anteriores, da $(n-1)$ ordem até a ordem 0, ou solução de fundo. A solução para a ordem $(n+1)$ não é necessária porque é desprezível em relação à ordem n (PETTINARI, 2016). Perceba que uma equação perturbativa de segunda ordem pode ser dividida em uma parte puramente de segunda ordem (que é linear nas perturbações de segunda ordem e que tem a mesma estrutura de uma equação linearizada) e em uma parte quadrática, que envolve o produto de perturbações de primeira ordem.

Uma propriedade importante da teoria da perturbação é a que postula: um sistema perturbado de equações de ordem n tem a mesma estrutura de um sistema linear com a adição de fontes extras (que são conhecidas a partir da resolução das ordens anteriores). Em geral, as expansões perturbativas vão até os termos de segunda ordem, pois um termo quadrático sempre será formado por duas perturbações lineares (que já são pequenas, por definição).

6.4 O plano de fundo e as perturbações

6.4.1 Sobre um espaço-tempo perturbado

Enquanto o Universo homogêneo era descrito por uma única função (o fator de escala $a(t)$), que dependia apenas do tempo, o Universo perturbado requer mais duas funções, que denotaremos por Ψ e Φ , ambas dependentes do espaço e do tempo. Em termos dessas funções perturbativas, as componentes do tensor métrico podem ser escritas como (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\begin{aligned} g_{00}(x, t) &= -1 - 2\Psi(x, t), \\ g_{0i}(x, t) &= 0, \\ g_{ij}(x, t) &= a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(x, t)]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Note que, na ausência de Ψ e Φ , as equações se reduzem as do caso de um Universo euclidiano, homogêneo e de perturbações de ordem zero. Por outro lado, na ausência de expansão ($a(t) = 1$) esta métrica descreve um campo gravitacional fraco.

Vamos representar as perturbações na métrica por Ψ , o potencial newtoniano que governa o movimento de corpos lentos (isto é, no regime não-relativístico) e Φ , a perturbação devida à curvatura espaço-temporal (causada por um corpo massivo), que pode ser interpretada como uma perturbação local no fator de escala. Essa perturbação pode ser descrita como:

$$a(t) \rightarrow a(x, t) = a(t)\sqrt{1 + 2\Phi(x, t)}. \quad (6.15)$$

A magnitude típica das perturbações métricas Ψ e Φ em nosso Universo é pequena (de ordem menor que 10^{-4}) e, por esta razão, se mostra como uma excelente aproximação trabalhar com essas quantidades em sua ordem linear. Na prática, essa aproximação implica em negligenciar todos os termos quadráticos ou de ordem superior presentes nas expressões (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Nessa direção, podemos dividir as perturbações naquelas que se comportam como escalares, vetores ou tensores, observando como se transformam de um sistema de coordenadas espaciais tridimensionais para outro. Na prática, para levar essas perturbações em conta, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ requer outras funções além de Ψ e Φ , mas, como as perturbações escalares apresentam-se como as mais importantes para a origem e evolução do Universo, então a descrição é satisfatória se considerarmos apenas Ψ e Φ . No caso de perturbações na métrica, existe uma certa liberdade de calibre: mesmo que apenas as perturbações escalares sejam relevantes, ainda há uma liberdade considerável nas coordenadas que se pode escolher para descrever e representar as perturbações de ordem superior.

O primeiro cálculo a ser feito ao se utilizar a métrica FLRW é o dos símbolos de Christoffel, considerando apenas os termos de primeira ordem (aqueles que são lineares em Ψ e Φ). Inicialmente, considere $\Gamma_{\mu\nu}$ que, por definição, pode ser escrito em termos da métrica como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{0\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\nu\mu,\alpha}), \quad (6.16)$$

onde o subscrito $(, \alpha)$ representa a derivada em relação a x^α . Através de algumas manipulações algébricas, obtemos, a partir disso:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{a^2(t)}\Psi_{,i}, \\ \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij}(H + \dot{\Phi}), \\ \Gamma_{jk}^i &= \delta_{ij}\partial_k\Phi + \delta_{ik}\partial_j\Phi - \delta_{jk}\partial_i\Phi. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Observe que, na ordem zero, o único componente que não desaparece é Γ_{j0}^i , uma vez que: $\Gamma_{j0}^i = \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij}H$. Por convenção, tanto δ_{ij} quanto as derivadas espaciais ∂_k atuam em um espaço euclidiano e, portanto, se pode trocar livremente seus índices superiores e inferiores (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

6.4.2 A equação da geodésica

Para se obter a equação de Boltzmann no contexto de um espaço-tempo perturbado, torna-se necessário saber como as partículas se movem nesse cenário. Desse modo, podemos fazer uso da equação da geodésica, que agora deve ser generalizada de modo a incluir as perturbações do espaço-tempo. Diante disso, o objetivo é calcular os termos: dx^i/dt , dp/dt e dp^i/dt modificados e, após isso, inseri-los na equação de Boltzmann. Diante disso, partimos da condição relativística (on-shell) para uma partícula de massa m , dada por:

$$g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -(1 + 2\Psi)(P^0)^2 + p^2 = -m^2, \quad (6.18)$$

em coordenadas naturais. A partir disso, descobrimos que o quadrimomento perturbado pode ser escrito como:

$$P^\mu = \left(E(1 - \Psi), \frac{1 - \Phi}{a} p^i \right), \quad (6.19)$$

em que E representa a energia total da partícula e p^i é o vetor trimomento da partícula de massa m . Com base nisso, encontramos a equação do movimento:

$$\frac{dp}{dt} = -(H + \dot{\Phi})p - \left(\frac{E}{a} \right) \hat{p}^i \Psi_{,i}. \quad (6.20)$$

Em síntese, essa relação descreve a mudança na magnitude do momento de uma partícula à medida que ela se move através de um Universo regido pela métrica FLRW perturbada. O primeiro termo representa a perda de momento devido à expansão do Universo (o equivalente ao redshift cosmológico e o consequente decaimento da velocidade). É possível, ainda, interpretar a constante de Hubble ($H = \dot{a}/a$) como a perturbação fracionária do fator de escala local e $H + \Phi$ como a taxa de expansão local do Universo. A partir disso podemos inferir que o primeiro termo da expressão acima contém informações sobre o redshift cosmológico, incluindo sua perturbação local.

Por fim, o último termo descreve o efeito em que uma partícula presa em um poço de potencial (onde $p^i \partial \Psi / \partial t < 0$) ganha energia. Contrariamente, à medida em que a partícula sai do poço, perde energia (no caso de partículas não-relativísticas, isso é esperado). Cabe destacar que essa equação também é válida para fótons e que, nesse caso, descreve o efeito de redshift gravitacional. Como sabemos, a equação da geodésica define a noção de linhas retas no espaço curvo e, nessa equação, os termos em Ψ e Φ representam as fontes adicionais de curvatura devido à estrutura do Universo.

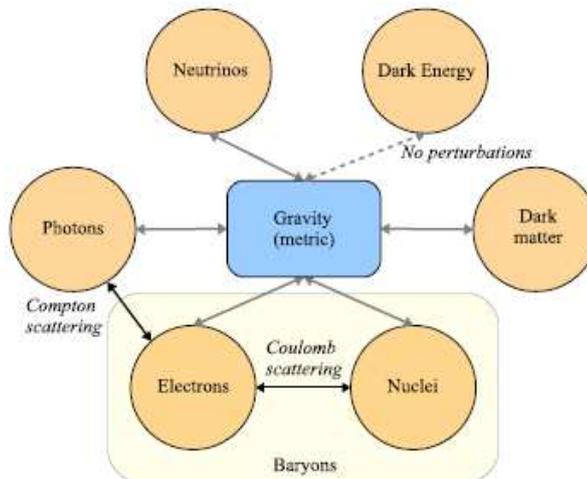
Vamos considerar o caso especial das partículas não-relativísticas (com $p \ll E$). Nesse cenário, o termo envolvendo Φ é desprezível, portanto, somente Ψ , a perturbação para a componente g_{00} é relevante. Além disso, podemos observar a partir das equações obtidas que recuperamos $dp/dt = -m \nabla \Psi$ para partículas não-relativísticas, com um fator adicional $1/a$, que é justificado pelo fato de que o gradiente espacial considera coordenadas comóveis x^k , enquanto que a segunda lei de Newton se refere às coordenadas físicas ax .

Para o caso dos fótons (onde: $p/E = 1$), os entes Ψ e Φ contribuem igualmente para a deflexão. Para os casos em que $\Phi = -\Psi$, aparecerá um fator de 2, aumentando a deflexão dos fótons prevista pela teoria de Einstein. A deflexão das partículas não-relativísticas é muito mais forte que a da luz, porque os fótons não estão ligados aos aglomerados galácticos, enquanto o restante da matéria está (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Em termos matemáticos, isso se deve ao fator E/p , que se torna grande para objetos não-relativísticos (pois $p \ll E$) e, fisicamente, isso acontece porque a curvatura “tem mais tempo” para desviar as trajetórias de objetos em movimento lento em comparação com partículas sem massa que viajam na velocidade da luz. Portanto, a partir da equação da geodésica, temos todas as informações necessárias para escrever a equação de Boltzmann em um Universo perturbado.

Para o caso de um Universo não-homogêneo, o objetivo do estudo é investigar como se comportam as anisotropias na distribuição cósmica de fótons e heterogeneidades na matéria, utilizando a equação de Boltzmann para cada espécie no Universo. Nesse caso, vamos levar em consideração a dependência espacial e direcional da função de distribuição $f(x, p, t)$. Esse fato complica significativamente a álgebra, no entanto, vamos contornar esse problema usando alguns conceitos e aproximações.

Como se sabe, os fótons são afetados tanto pela gravidade quanto pelo espalhamento Compton com elétrons livres (além disso, sabemos também que os elétrons estão fortemente ligados aos prótons, e que ambos também são afetados pela gravidade). Em contrapartida, a métrica que determina as forças gravitacionais é influenciada por todos esses componentes, mais os neutrinos e a matéria escura. Dessa forma, para obtermos as funções de distribuição de qualquer espécie de partículas, devemos considerar também a presença de todas as outras espécies.

Figura 7 – Representação das interações entre diferentes entes cosmológicos.



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

Considere a Figura 7. Em síntese, essa figura mostra as maneiras pelas quais os

diferentes componentes do Universo interagem uns com os outros (cujas conexões são escritas pelas equações de Boltzmann e de Einstein). O forte acoplamento entre elétrons e núcleos através da força eletromagnética permite tratá-los como um único componente, que denominaremos bárions (é sempre válido lembrar que elétrons não são bárions, mas que essa nomenclatura é comumente utilizada na Cosmologia). Após obtermos as equações de evolução das perturbações em todas as espécies relevantes no Universo, podemos calcular diversos parâmetros cosmológicos reais.

Além disso, temos que considerar as perturbações na densidade de energia escura, que sempre existiram, se a energia escura não for considerada uma constante cosmológica. Porém, os modelos atuais mais viáveis de energia escura preveem que as perturbações são muito pequenas e que só se tornaram relevantes muito recentemente. Diante disso, podemos negligenciar a energia escura como uma fonte de perturbações para a métrica.

6.5 As perturbações nos diferentes constituintes do Universo

6.5.1 A equação de Boltzmann perturbada para fótons

A equação de Boltzmann para fótons, em ordem linear de perturbações é dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left(H + \dot{\Phi} + \frac{p^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right). \quad (6.21)$$

Nesse ponto, como estamos tratando de fótons (que são bósons), se pode escrever a sua função de distribuição f como uma distribuição de Bose-Einstein de ordem zero, de uma forma ligeiramente diferente:

$$f(x, p, \hat{p}, t) = \frac{1}{\exp \left\{ \frac{p}{T(t)[1+\theta(x, \hat{p}, t)]} \right\} - 1}. \quad (6.22)$$

Perceba que, nessa proposta, a temperatura de ordem zero T é uma função apenas do tempo, não do espaço. Em um Universo homogêneo, a temperatura T é independente de x , e em um Universo isotrópico, T é independente da direção de propagação dos fótons \hat{p} (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Por outro lado, para descrevermos as perturbações sobre um Universo homogêneo é necessário que consideremos uma perturbação na função de distribuição, que é caracterizada por uma perturbação fracionária de temperatura $\theta(x, \hat{p}, t)$, que também pode ser escrita como: $\delta T/T$. Em palavras, a perturbação $\theta(x, \hat{p}, t)$ representa tanto as heterogeneidades na distribuição de fótons (que são dependentes de x) quanto as anisotropias (que são dependentes de \hat{p}). A expansão de (6.22) em séries de Taylor nos fornece:

$$f(x, p, t) \approx f^{(0)}(p, t) - p \frac{\partial f^{(0)}(p, t)}{\partial p} \theta(x, \hat{p}, t) \quad (6.23)$$

Ao aplicar a expressão (6.23) em (6.21), chegamos à seguinte equação de Boltzmann:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\text{ordem1}} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left(\theta + \frac{p^i}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{p^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right), \quad (6.24)$$

em que $f^{(0)}$ representa a função de distribuição de ordem zero: $f^{(0)} \equiv 1/(e^{p/T(t)} - 1)$, em coordenadas naturais. Os dois primeiros termos dessa expressão correspondem a uma derivada ao longo dos raios de luz (geodésicas nulas) em um Universo homogêneo e descrevem como a função de distribuição evolui na ausência de colisões (transmissão livre). Os dois últimos termos estão relacionados ao efeito gravitacional das perturbações. Observe que em todos os termos que x aparece, ele é multiplicado por a , o fator de escala. Isso deve acontecer, pois as distâncias físicas são: ax . Cabe destacar que essa equação ainda não está completa, pois, em perturbações de primeira ordem, há um termo de colisão diferente de zero que temos que considerar.

6.5.2 O efeito do espalhamento Compton nos termos de colisão

A determinação da influência do espalhamento Compton na função de distribuição de fótons é primordial para o estudo das anisotropias da CMB, no sentido dela precisar como se comporta a distribuição de fótons no período da recombinação. O tratamento matemático dos termos de colisão deve, portanto, incluir a influência das perturbações nas funções de distribuição, em um contexto no qual não há equilíbrio químico nem cinético. Como sabemos, o processo espalhamento Compton é: $e^-(p) + \gamma(q) \leftrightarrow e^-(q') + \gamma(p')$, onde p e q são os momentos das partículas antes da colisão e p' e q' são os momentos após a colisão.

Partindo do termo de colisão (5.19), fazendo algumas expansões e aproximações, chegamos a:

$$\begin{aligned} C[f(p)] = & \frac{n_e \sigma_T}{4\pi p} \int_0^\infty \frac{p'^2}{p'} dp' \int \delta_D^{(1)}(p - p') \left[-p' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'} \theta_0 + p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \theta(\hat{p}) \right] \\ & + \delta_D^{(1)}(p - p')(p - p') u_b \frac{\partial \delta_D^{(1)}(p - p')}{\partial p'} [f^0(p') - f^0(p)] d\Omega', \end{aligned} \quad (6.25)$$

em que Ω' é o ângulo sólido gerado pelo vetor unitário \hat{p}' , n_e representa a densidade numérica de elétrons livres, σ_T é a seção de choque de Thomson e u_b simboliza a velocidade mássica dos elétrons (o subscrito “b” indica que é a mesma velocidade que a dos bárions), que é a média de todas as velocidades do fluxo de elétrons, em determinado ponto do espaço e em um dado instante. Cabe ressaltar que, na equação acima, a diferença $f(p') - f(p)$ foi expandida em termos de primeira ordem e que a parte que multiplica o termo de velocidade mássica u_b pode ser desprezado (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Além disso, o primeiro termo que acompanharia o delta de Dirac é igual a zero, pois temos que: $p = p'$.

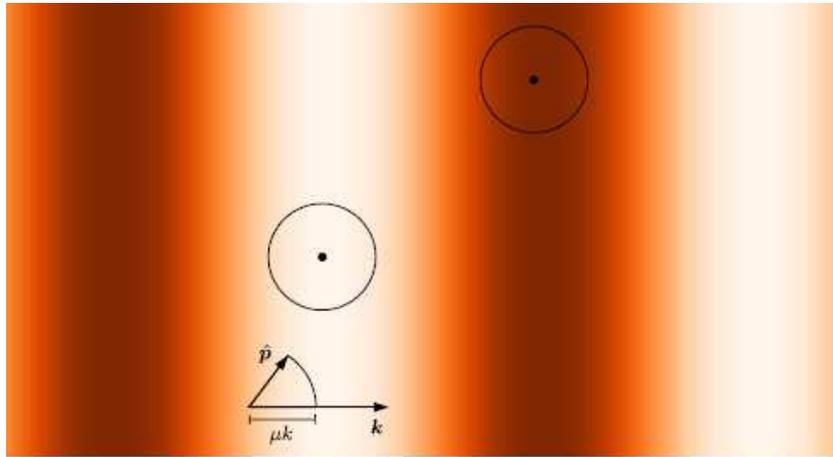
A equação acima explicita a dependência de θ das variáveis \hat{p} e \hat{p}' , uma vez que a dependência de (x, t) é irrelevante na dedução do termo de colisão, pois os valores (x, t)

são fixos, já que as colisões são locais. Existem apenas dois termos nessa expressão que dependem de \hat{p}' e que, portanto, devem ser considerados na integração sobre o ângulo sólido Ω' . Primeiro, baseando-se na perturbação da função de distribuição $\theta(\hat{p}')$, torna-se conveniente introduzir o monopolo:

$$\theta_0(x, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \theta(\hat{p}', x, t) d\Omega'. \quad (6.26)$$

Em palavras, o monopolo $\theta_0(x, t)$ é a soma integral de todas as perturbações do fóton em qualquer ponto do espaço e em todas as direções. Isso corresponde à perturbação fracionária no fluxo de fótons em ângulo médio e em uma determinada posição x e tempo t (expressa como uma perturbação de temperatura através da distribuição de Bose-Einstein).

Figura 8 – Representação de uma região do cósmos com diferentes temperaturas.



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

Observe a Figura 8. Essa representação mostra uma perturbação de temperatura de onda plana (o número de onda k é o eixo horizontal) e seu efeito em fótons fortemente acoplados. Essa é uma vista superior de uma onda que se propaga no plano, onde as regiões escuras representam pontos quentes (picos) e as regiões claras são pontos frios (vales) em relação às temperaturas dos elétrons. Se o espalhamento Compton for muito eficiente, os fótons observados em um dado ponto espalharam-se muito próximos, dentro dos círculos (que denotam as superfícies de último espalhamento) para observadores indicados pelos pontos. A temperatura nessas superfícies é muito próxima do uniforme, de modo que a distribuição é quase completamente descrita por seu monopolo. No entanto, diferentes círculos (correspondentes a diferentes observadores) têm temperaturas diferentes devido às perturbações. Assim, se pode concluir que o monopolo varia no espaço. Ainda de acordo com a Figura 8, o monopolo associado à temperatura de ordem zero é constante em todo o espaço.

Com isso, podemos voltar à equação (6.25) para chegar à expressão final para o termo de colisão:

$$C[f(p)] = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} (n_e \sigma_T) [\theta_0 - \theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot u_b]. \quad (6.27)$$

A partir disso podemos observar o efeito do espalhamento Compton na distribuição de fótons: na ausência de uma velocidade mássica para os elétrons ($u_b = 0$), o termo de colisão serve para conduzir θ a θ_0 , ou seja, quando o espalhamento Compton é muito eficiente, apenas a perturbação do monopolo θ_0 ocorre. Intuitivamente, um forte espalhamento Compton significa que o livre caminho médio de um fóton é muito pequeno e, portanto, que os fótons que chegam a um determinado ponto no espaço dispersam rapidamente os elétrons que estão muito próximos. Como esses elétrons próximos tinham uma temperatura muito semelhante à local, os fótons que interagem com eles (em todas as direções) têm a mesma temperatura, de modo a se considerar que o fluxo de qualquer direção é igual ao fluxo médio do ângulo: $\theta(x, \hat{p}, t) = \theta_0(x, t)$.

A situação muda ligeiramente se os elétrons carregarem uma velocidade mássica u_b . Nesse caso, será gerado um momento de dipolo na distribuição de fótons, determinado pelo módulo e direção da velocidade dos elétrons. Ainda assim, momentos de ordem superior, como o quadrupolo, desaparecem. Logo, o espalhamento Compton produz uma distribuição de fótons simples de analisarmos: tem apenas um monopolo e um dipolo que não desaparecem, o que equivale a dizer que os fótons e elétrons se comportam como um fluido único, se o espalhamento for eficiente o bastante e se o acoplamento for forte o suficiente. Como se sabe, o espalhamento Compton deixa de ser eficiente no período de desacoplamento fóton-bárion, então os fótons não se comportam mais como um fluido após a recombinação. No entanto, a abordagem de Boltzmann permanece válida após o desacoplamento e também captura a física essencial da transmissão livre que caracteriza a longa jornada dos fótons desde o desacoplamento até os detectores (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

6.6 Um pouco sobre o formalismo de Fourier

A evolução das perturbações cosmológicas é descrita pelas equações de Einstein-Boltzmann, que formam um sistema de equações diferenciais parciais acopladas. É possível transformarmos esse sistema em um conjunto de equações diferenciais ordinárias (para facilitar o tratamento numérico) ao escrevermos a dependência da posição x em uma base de ondas planas com vetor de onda k . Como as perturbações cosmológicas são campos tridimensionais estocásticos (isto é, indeterminados, de origem aleatória), em vez de obter valores específicos de tais campos, estamos interessados em prever seus valores esperados, como os espectros de potência (PETTINARI, 2016).

A ideia é utilizar o formalismo de Fourier para simplificar (e resolver) sistemas de equações diferenciais que seriam, a princípio, mais complicados (como o de Einstein-Boltzmann). Matematicamente, isso pode ser alcançado se aplicarmos em ambos os lados

das equações o operador de Fourier, dado por:

$$F_k[f] = \int e^{-ikx} f(x) dx, \quad (6.28)$$

em que $f(x)$ é uma função qualquer da posição. A partir disso, se o operador de Fourier for linear, então atua (separadamente) em todos os elementos de seu argumento. A função $F_k(f)$ é chamada de transformada de Fourier da função $f(x)$ e iremos denotá-la como $f(k)$. Por outro lado, a transformada inversa de Fourier é dada por:

$$f(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ikx} f(k) dk. \quad (6.29)$$

Com base nesse resultado podemos notar que a transformada de Fourier de uma função real obedece à relação: $f(-k) = f^*(k)$. Portanto, no espaço de Fourier, teremos que as derivadas parciais irão se transformar em produtos da forma (PETTINARI, 2016):

$$F_k \left[\frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = ik^i f(k), \quad (6.30)$$

que surge como consequência das propriedades da exponencial em relação às derivadas. O operador laplaciano ∇^2 tem a seguinte transformada de Fourier:

$$F_k[\nabla^2] = -k^2 f(k), \quad (6.31)$$

em que: $|k|^2 \equiv k_i k^i$.

As componentes do vetor de onda $k = k_1, k_2, k_3$ entram nas equações do espaço de Fourier como parâmetros externos. Em princípio, para obter a evolução temporal das perturbações, deve-se resolver N^3 sistemas diferenciais independentes, onde N é o número de pontos de amostragem em cada direção k . Na prática, porém, a isotropia estatística das perturbações cosmológicas nos permite escolher um sistema de coordenadas para cada vetor de onda k onde o zênite está alinhado com o próprio k . Como resultado, a solução para um dado vetor de onda k dependerá apenas de sua magnitude $k \equiv |k|$ e do tempo t (PETTINARI, 2016).

A partir da adoção desse espaço (que evita o uso de derivadas parciais) teremos que todas as variáveis perturbadas terão uma dependência (k, t) . Nesse ponto, cabe destacarmos que o número de onda k deverá ser amostrado em intervalos de intensidades e frequências adequados para recuperar a física das perturbações em todas as escalas.

6.6.1 O acoplamento de modos k

Uma equação diferencial de segunda ordem geralmente inclui um termo quadrático que consiste em um produto de perturbações de primeira ordem. Diante disso, temos que determinar como a transformada de Fourier atua nesse termo quadrático genérico. Um

produto da forma $A(x)B(x)$ produz uma integral (dita integral de convolução) dada por (PETTINARI, 2016):

$$F_k[A(x)B(x)] = \int \frac{1}{(2\pi)^3} A(k_1)B(k - k_1)dk_1 = \int \frac{1}{(2\pi)^3} A(k_1)B(k_2)\delta(k - k_1 - k_2)dk_1dk_2. \quad (6.32)$$

onde $\delta(k - k_1 - k_2)$ é um delta de Dirac: uma função que “força” os três vetores de onda k , k_1 e k_2 a formarem um triângulo. Há, ainda, uma segunda maneira de se expressar a convolução. Adotando a notação $A_1 \equiv A(k_1)$, $B_2 \equiv B(k_2)$ e $f = A(x)B(x)$ obtemos, para a integral de convolução (PETTINARI, 2016):

$$F_k[f] = \int \frac{1}{(2\pi)^3} f(k_1, k_2)\delta(k - k_1 - k_2)dk_1dk_2. \quad (6.33)$$

A evolução do modo k de uma perturbação de segunda ordem é determinada por todos os outros modos, representados acima por k_1 . Equivalentemente, o comportamento das perturbações em uma determinada escala é influenciado por todas as outras escalas. Esta propriedade importante é típica do sistema não-linear e é chamada de acoplamento de modos. Em ordem linear, onde não há fontes quadráticas, todos os modos evoluem independentemente. Os vetores de onda de convolução k_1 e k_2 são variáveis fictícias; portanto, não há uma maneira única de expressar os termos quadráticos da fonte (PETTINARI, 2016).

6.7 As equações de Boltzmann para os diferentes constituintes do Universo

6.7.1 A equação de Boltzmann para fótons

Nesse ponto, podemos igualar as expressões (6.24) e (6.27) para os termos de colisão e obter:

$$\dot{\theta} + \frac{p^i}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{p^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = (n_e \sigma_T)[\theta_0 - \theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot u_b], \quad (6.34)$$

que, em termos do tempo comóvel η , pode ser escrita como:

$$\theta' + p^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} + \Phi' + p^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = (n_e \sigma_T)(a)[\theta_0 - \theta(\hat{p}) + \hat{p} \cdot u_b], \quad (6.35)$$

lembrando que os termos com linha denotam derivadas em relação ao tempo comóvel: $d/d\eta = (1/a)d/dt$. A expressão (6.35) é uma equação diferencial parcial linear de θ acoplada às outras variáveis Ψ , Φ e u_b , que também evoluem de acordo com equações lineares (essa simplificação surge porque as perturbações são pequenas).

As perturbações na CMB permanecem pequenas em todas as épocas cosmológicas, enquanto as perturbações de matéria são pequenas apenas no Universo primitivo: elas eventualmente crescem e se tornam não-lineares, formando objetos massivos, como galáxias

(DODELSON; SCHMIDT, 2021). Antes de prosseguir, vamos definir o cosseno do ângulo entre o número de onda k e a direção do fóton \hat{p} como μ :

$$\mu \equiv \frac{\vec{k} \cdot \hat{p}}{k}. \quad (6.36)$$

Note, pela Figura 8, que o vetor de onda \vec{k} está apontando na direção em que a temperatura está mudando (ou seja, esse vetor é paralelo ao gradiente de temperaturas). Se isso é verdade, então $\theta(k, \mu = 1)$ descreve fótons viajando na direção do gradiente (paralela a de \vec{k} , horizontalmente, na Figura 8), ao longo do qual a temperatura está mudando. Por outro lado, $\theta(k, \mu = 0)$ descreve fótons viajando perpendicularmente ao gradiente, ou seja, em uma direção ao longo da qual a temperatura permanece a mesma (verticalmente, na Figura 8). De maneira geral, o aparecimento de μ em uma equação diferencial significa automaticamente que a expressão está escrita no espaço de Fourier.

Por outro lado, as velocidades são geralmente longitudinais, isto é, apontam na mesma direção que o vetor de onda \vec{k} :

$$\vec{u}_b(k, \eta) = \left(\frac{\vec{k}}{k} \right) u_b(k, \eta). \quad (6.37)$$

Como \vec{k} (e, portanto, \vec{u}_b) é paralelo ao gradiente de temperaturas, se pode inferir que o vetor velocidade é irrotacional e então: $\vec{u}_b \cdot \hat{p} = u_b \mu$.

Outra definição importante que faremos é a profundidade óptica $\tau(\eta)$:

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} (n_e \sigma_T a) d\eta'. \quad (6.38)$$

Fisicamente a profundidade óptica descreve o quão opaco o Universo é. Em outras palavras, quando $\tau \rightarrow 0$, a quantidade de interações entre as partículas é muito pequena. Por outro lado, quando $\tau \rightarrow 1$, o número de interações pode ser considerado grande. Essas observações se tornam triviais ao se observar que τ é diretamente proporcional a n_e , o que indica que: quanto maior for o valor de τ , mais elétrons livres estarão disponíveis para interagir com outras partículas.

A partir dessas definições, podemos reescrever as derivadas espaciais como $ik\mu$ no espaço de Fourier e obter a equação de Boltzmann para fótons:

$$\theta' + (ik\mu)\theta + \Phi' + (ik\mu)\Psi = -\tau'[\theta_0 - \theta(\hat{p}) + \mu u_b]. \quad (6.39)$$

6.7.2 A equação de Boltzmann para matéria escura fria

A dedução da equação de Boltzmann para qualquer outro constituinte do Universo segue o mesmo procedimento aplicado na dedução para os fótons. No que se refere à matéria escura (em todos os modelos viáveis de formação), sabe-se que ela desempenha

um papel importante no crescimento das estruturas do Universo através de seu efeito gravitacional. Como no caso dos fótons, a equação de Boltzmann é o ponto de partida correto para descrever a evolução da matéria escura.

Existem várias maneiras pelas quais a distribuição da matéria escura difere da dos fótons. Primeiro: em épocas posteriores à sua produção, a matéria escura, por definição, não interage com nenhum dos outros constituintes do Universo (assim, não é necessário lidar com quaisquer termos de colisão). Segundo: a matéria escura fria, em contraste com os fótons, não é relativística, pois as velocidades típicas das partículas de matéria escura devem ser muito menores que a velocidade da luz. Assim, a versão apropriada da equação de Boltzmann a ser usada é a equação de Boltzmann (sem colisões) para partículas massivas, dada por (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} + \left(\frac{p}{E}\right) \left(\frac{p^i}{a}\right) \frac{\partial f_c}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \left(\frac{E}{ap}\right) \hat{p}^i \Psi_{,i} \right] p \frac{\partial f_c}{\partial p} = 0. \quad (6.40)$$

Para o caso de partículas de matéria escura fria, não são necessárias informações detalhadas sobre a função de distribuição de ordem zero. A informação mais relevante e necessária é que essas partículas se encontram no limite não-relativístico. Esse resultado implica que o movimento mássico da matéria escura já está incluído nas equações e, portanto, que a matéria escura pode ser tratada efetivamente como um fluido (isto é, não é necessário tratarmos da grande variedade de velocidades das partículas, mas somente da velocidade de um único fluido).

A partir disso, podemos manipular a equação (6.40) e definir dois parâmetros importantes: a densidade numérica de matéria escura n_c e a velocidade mássica de matéria escura u_c^i . Suas expressões são:

$$n_c = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_c d^3p, \quad (6.41)$$

$$u_c^i = \frac{1}{n_c} \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_c \left(\frac{p\hat{p}^i}{E(p)} \right) d^3p. \quad (6.42)$$

Com isso, chegamos a duas equações: uma que descreve a perturbação fracionária na densidade numérica δ_c ($\delta_c = \delta\rho_c/\rho_c$) de matéria escura e uma que mostra a evolução da velocidade mássica u_c^i :

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial t} + \left(\frac{1}{a}\right) \frac{\partial u_c^i}{\partial x^i} + 3\dot{\Phi} = 0, \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial u_c^i}{\partial t} + H u_c^i \left(\frac{1}{a}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = 0. \quad (6.44)$$

É interessante, no entanto, expressarmos estas equações em termos de tempo comóvel η e no espaço de Fourier. Usando a regra da cadeia e a equação da continuidade, chegamos às equações de Boltzmann para a matéria escura fria:

$$\delta'_c + i k u_c + 3\Phi' = 0, \quad (6.45)$$

$$u'_c + \left(\frac{a'}{a}\right)u_c + ik\Psi = 0. \quad (6.46)$$

A equação (6.46) justifica, pelo menos em partes, a suposição de que u_c é irrotacional, pois diz que u_c é originado pelo gradiente de um potencial escalar Ψ (o que é característico de um vetor irrotacional e conservativo).

6.7.3 A equação de Boltzmann para bárions

Outro componente do Universo que requer um conjunto de equações de Boltzmann são os elétrons, nêutrons e prótons, que são frequentemente agrupados e chamados bárions. Este equívoco (os elétrons serem postos no grupo dos bárions) é motivado pelo fato da densidade de energia dessas partículas ser dominada pelas massas de repouso dos prótons e dos nêutrons, que compõem os núcleos de hidrogênio e hélio. A seguir, serão tratados somente os prótons, embora se deva ter em mente que essa análise inclui o hélio e vestígios de núcleos mais pesados.

Como se sabe, os elétrons e os prótons são acoplados por espalhamento Coulomb, cujo processo é: $e^- + p \leftrightarrow e^- + p$. A taxa de dispersão de Coulomb é muito maior do que a taxa de expansão nas épocas de interesse, o que torna o acoplamento apertado e que força as superdensidades de elétrons e prótons a convergirem a um valor comum:

$$\frac{\rho_e - \bar{\rho}_e}{\bar{\rho}_e} = \frac{\rho_p - \bar{\rho}_p}{\bar{\rho}_p} \equiv \delta_b, \quad (6.47)$$

onde o subscrito b significa “bárions”. Da mesma forma, as velocidades mássicas das duas espécies são forçadas a um valor comum:

$$u_e = u_p \equiv u_b. \quad (6.48)$$

Após a recombinação, quando elétrons e núcleons formaram átomos pela primeira vez, o forte acoplamento permaneceu e, portanto, os átomos neutros estavam desacoplados dos fótons. Por causa desse forte acoplamento e, conseqüentemente, do livre caminho médio pequeno (e o fato de que eles são não-relativísticos, já que $T \ll m_e$), os elétrons e os núcleons podem ser tratados como um fluido não-relativístico e só é necessário tomar os momentos de ordem zero e de primeira ordem da equação de Boltzmann para descrevê-lo. Além disso, torna-se necessário analisar o comportamento do acoplamento de fótons via espalhamento Compton (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

O procedimento de tomar os dois primeiros momentos da equação de Boltzmann para derivar equações para δ_b e u_b procede exatamente como no caso da matéria escura fria (pelo menos o lado esquerdo das equações é assim). A parte de ordem zero fornece uma equação (no espaço de Fourier e escrita em termos do tempo comóvel) para a densidade de bárions:

$$\delta'_b + ik u_b + 3\Phi' = 0. \quad (6.49)$$

Note que o lado direito da equação é nulo (apesar das colisões), pois as colisões preservam o número de elétrons e prótons. Esse fato vale tanto para o processo de espalhamento Coulomb: $e^- + N \leftrightarrow e^- + N$ (onde N representa um núcleon) quanto para o espalhamento Compton: $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$. Nas épocas de interesse (ao redor e após a recombinação), as reações que alteram o número de elétrons e núcleons (como produção de pares, aniquilação e reações nucleares) são irrelevantes.

Para o caso da equação para a velocidade mássica, podemos seguir procedimento semelhante ao caso da matéria escura, exceto pela definição do dipolo de radiação θ_1 (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\theta_1(k, \eta) \equiv \left(\frac{i}{2}\right) \int_{-1}^1 \mu \theta(\mu, k, \eta) d\mu, \quad (6.50)$$

que aparece em razão da influência da transferência líquida de momento entre os fótons e os elétrons: em um campo de radiação isotrópico, nenhuma transferência de momento líquido ocorrerá, mas, se houver um dipolo, então os fótons mais energéticos vêm mais de uma direção do que da direção oposta. Com isso, os elétrons que se movem na direção da temperatura mais alta estarão enfrentando uma “força de arrasto” na direção oposta (este efeito é conhecido como arrasto Compton). A partir disso, devemos considerar uma densidade de força (análoga a um gradiente de pressão) que é exercida pela dispersão de fótons e elétrons e que influencia no termo de colisão. Levando isso em conta, podemos obter a equação para a velocidade mássica de bárions:

$$u'_b + \left(\frac{a'}{a}\right) u_b + ik\Psi = \tau' \left(\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}\right) [3i\theta_1 + u_b]. \quad (6.51)$$

O fato da densidade de energia dos bárions aparecer no denominador da fração pode ser intrigante porque, como os fótons se espalham principalmente por elétrons, a densidade total de bárions (que é dominada por prótons) não deveria influenciar nesse processo. Fisicamente, isso se deve à alta resistência ao movimento dos elétrons, porque estão fortemente acoplados aos prótons por meio da força eletromagnética.

Cabe destacar que a equação acima foi deduzida definindo: $n_e = n_p = n_b$, ou seja, se assumiu que o hidrogênio está completamente ionizado. No entanto, o resultado é válido mesmo que haja uma quantidade apreciável de hidrogênio neutro, de modo que $n_e < n_b$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). De fato, após a recombinação, a maioria dos prótons estava ligada a átomos de hidrogênio neutros e, mesmo antes da recombinação, uma pequena fração estava em átomos ou íons de hélio. No entanto, mesmo hidrogênio e hélio neutros estão fortemente acoplados a elétrons e prótons. Então o resultado acima abrange todos os bárions.

6.7.4 A equação de Boltzmann para neutrinos

Para os neutrinos, com função de distribuição $f_\nu(x, p, t)$, se pode notar algumas semelhanças com os fótons: seguem uma distribuição de equilíbrio com temperatura $T_\nu(a)$ de ordem zero e são relativísticos no Universo primitivo. Assim, é possível novamente expressar a perturbação em sua função de distribuição em termos de uma perturbação de temperatura, denotada por $N(x, p, \eta)$, assim como foi feito para os fótons. Portanto, assumimos uma função de distribuição de Fermi-Dirac perturbada da forma:

$$f_\nu(x, p, t) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{p}{T_\nu(t)[1+N(x, \hat{p}, \eta)]}\right\} + 1}. \quad (6.52)$$

Em seguida, fazemos uma expansão em séries de Taylor dessa distribuição, como fizemos no caso dos fótons, e aplicamos o resultado na equação de Boltzmann sem colisões para partículas massivas (porque, durante a época do desacoplamento de neutrinos em diante, quaisquer interações não-gravitacionais de neutrinos são desprezíveis). Nesse sentido, obtemos:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \left(\frac{p}{E_\nu}\right) \left(\frac{\hat{p}^i}{a}\right) \frac{\partial N}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial N}{\partial p} + \dot{\Phi} + \left(\frac{E_\nu}{ap}\right) \hat{p}_i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = 0. \quad (6.53)$$

Convertendo para derivadas de tempo comóvel e movendo os termos para o espaço de Fourier, vem:

$$N' + (ik\mu) \left(\frac{p}{E_\nu}\right) N - Hp \frac{\partial N}{\partial p} = -\Phi' - (ik\mu) \left(\frac{E_\nu}{p}\right) \Psi, \quad (6.54)$$

que é a equação de Boltzmann de primeira ordem para neutrinos.

Além da ausência do termo de colisão, essa expressão difere da dos fótons pelos fatores de p/E_ν , que se reduzem à unidade quando os neutrinos são relativísticos ($p = E$). Em momentos tardios, quando a temperatura cai abaixo de m_ν , o primeiro fator de p/E_ν à esquerda reflete a desaceleração no fluxo livre devido aos neutrinos massivos lentos e o fator E_ν/p no último termo reflete o fato de que neutrinos lentos passam mais tempo em poços de potenciais e, portanto, seu movimento será mais influenciado por esses poços (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Um ponto importante a ser observado é que não se pode mais assumir que N é independente de p , ou seja, que depende apenas de (x, \hat{p}, η) . Por essa razão, o terceiro termo aditivo da equação acima não aparece na equação para θ , uma vez que os neutrinos se movem de maneira diferente, pois não são mais ultra-relativísticos: o fator p/E_ν pode ser muito diferente para os neutrinos de baixas energias da distribuição do que para aqueles de alta energia. Pela mesma razão são necessárias diferentes funções de distribuição para os diversos estados de massa dos neutrinos, mas, como o sistema de interesse são os neutrinos até o período de recombinação, se pode admitir: $p/E_\nu = 1$ na expressão acima e desprezar

a dependência de p de N , reduzindo-a à versão sem colisão da equação de Boltzmann para fótons e então podemos descrever melhor todas as três gerações de neutrinos (do elétron, do tau e do múon) com um único N .

*OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO*

*CAPÍTULO 07
INDO MAIS A FUNDO NO UNIVERSO
NÃO-HOMOGÊNEO*

*“O acaso tem um papel fundamental no Universo”.
(Werner Heisenberg)*

7 Indo mais a fundo no Universo não-homogêneo

7.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“Indo mais a fundo no Universo não-homogêneo” foi escrito com a finalidade de aprofundar o estudo das perturbações (como as escalares e as tensoriais), culminando nas equações de Einstein-Boltzmann em tempos primitivos. A leitura dessa parte tem grande significância, especialmente porque, a partir dela, podemos entender quantitativamente quais são os efeitos das perturbações no Universo.

7.2 Considerações iniciais

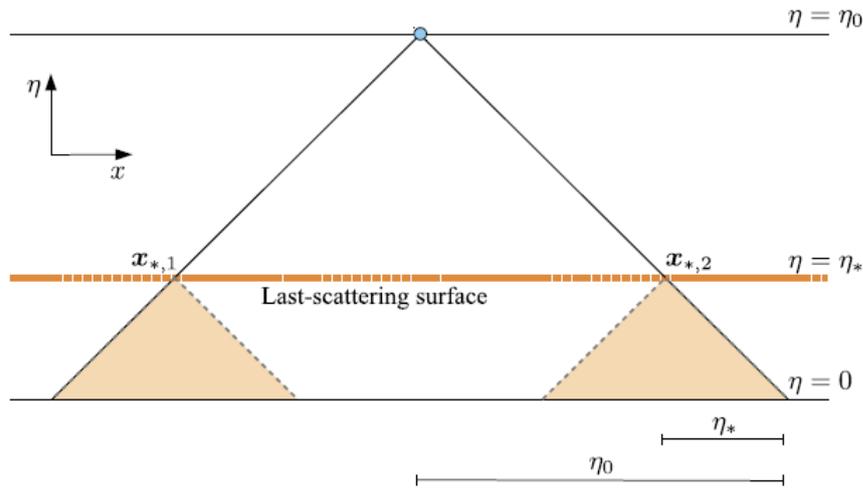
Antes de resolver as equações que descrevem um Universo perturbado devemos conhecer algumas condições iniciais, que estão diretamente ligadas à teoria da inflação. Como vimos, uma das questões que essa teoria busca responder diz respeito a como regiões que não poderiam estar em contato causal umas com as outras têm a mesma temperatura, isto é, procura explicar a homogeneidade em larga escala do Universo. A partir da inflação, por exemplo, conseguimos perceber que o mecanismo que explica a uniformidade da temperatura cósmica é o mesmo que pode explicar a origem das perturbações no Universo.

Portanto, entender a inflação fornecerá as condições iniciais necessárias para resolver o sistema de equações de Einstein-Boltzmann. Atualmente, o modelo inflacionário é a explicação mais plausível para a origem das estruturas e é frequentemente submetido a testes cada vez mais rigorosos pelas pesquisas de estruturas em larga escala. O sistema de equações diferenciais de Einstein-Boltzmann (não diferente da maioria dos outros problemas da física) necessita de condições iniciais para ser resolvido, isto é, a evolução futura do cosmos só pode ser determinada a partir dessas condições.

Quando o Universo tinha apenas 380.000 anos era muito uniforme: a amplitude típica das flutuações de temperatura na CMB era de 10^{-5} e, além disso, os fótons e bárions estavam muito próximos termicamente. Diante disso, podemos trabalhar no regime de pequenas perturbações em torno de um Universo com métrica FLRW, apesar de esperarmos que uma região do espaço-tempo do tamanho do Universo observável seja altamente heterogênea (tendo em vista as densidades iniciais de matéria e radiação em cada ponto). Isso pode ser explicado pelo que chamamos de termalização: se o Universo fosse muito heterogêneo, o contato térmico faria com que todo o Universo se equilibrasse em uma mesma temperatura. No entanto, essa descrição parece não funcionar no Universo,

uma vez que as diferentes partes do cosmos observadas a partir da CMB se encontravam tão distantes no momento da recombinação que não estavam em contato causal umas com as outras: nem a luz poderia ter viajado de uma região para outra. Portanto, essas partes aparentemente nunca foram capazes de termalizar. Esse é o chamado problema do horizonte.

Figura 9 – O problema do horizonte.



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

Observe a Figura 9. Nessa figura, o observador (representado pelo círculo azul) detecta sinais de luz vindos do cone de luz passado (região delimitada pelas linhas pretas diagonais). A CMB observada é emitida quando este cone intercepta a superfície de último espalhamento em $\eta = \eta_*$ (linha marrom horizontal) e é uniforme. Apenas sinais de dentro das regiões sombreadas (em bege) abaixo de cada ponto na superfície de último espalhamento poderiam ter influenciado os fótons da CMB que foram emitidos nas posições $x_{*,1}$ e $x_{*,2}$. Como essas regiões não se tocam, não é possível que se ajustem à uma mesma temperatura, se comesçassem a partir de temperaturas diferentes. Isso ocorre porque o horizonte comóvel η_* no momento em que a CMB foi emitida é muito menor do que o horizonte comóvel atual η_0 .

A partir dessas observações podemos calcular o horizonte comóvel η_* na era da recombinação: é a distância comóvel que a luz poderia ter viajado de $\eta = 0$ a η_* . Em seguida, se pode obter a distância comóvel que separa duas anisotropias diferentes da CMB hoje. No modelo cosmológico padrão, assumindo que o Universo continha apenas matéria e radiação até $\eta = 0$, infere-se que o horizonte comóvel na recombinação é $\eta_* = \eta(a_*) \approx 281h^{-1}$ Mpc (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Matematicamente, a distância comóvel χ entre duas anisotropias da CMB separadas por um ângulo θ é (para um ângulo θ pequeno) atualmente:

$$\chi(\theta) \approx \chi_*\theta = (\eta_0 - \eta_*)\theta. \quad (7.1)$$

Nos dias atuais, se observa que $\eta_0 \approx 14200h^{-1}$ Mpc. Então duas anisotropias da CMB têm a seguinte separação angular:

$$\theta \geq \frac{\eta_*}{\eta_0 - \eta_*} \approx 1, 2^\circ, \quad (7.2)$$

sem contato térmico durante a recombinação. A grande diferença de tamanho entre η_0 e η_* exacerba o problema: a razão η_0/η_* é de ordem 3, em vez do fator 50 do Universo real. Para melhor encarar esse problema, vamos reescrever o tempo comóvel η como uma integral sobre o fator de escala, alterando as variáveis de integração do tempo físico t' para o logaritmo do fator de escala $\ln(a')$. Isso leva a:

$$\eta(a) = \int_0^a \frac{1}{a'H(a')} d(\ln a'). \quad (7.3)$$

O integrando acima é o raio comóvel de Hubble, que representa a distância (aproximada) sobre a qual a luz pode viajar no decorrer de um tempo de expansão, ou seja, o tempo em que o fator de escala aumenta por um fator de e . Esse parâmetro nos permite avaliar se as partículas podem, em uma determinada época, ter se comunicado em uma região do Universo em expansão. Se o cosmos é dominado por matéria ou radiação, então H é proporcional a $a^{-\frac{3}{2}}$ ou a a^{-2} , respectivamente, e o raio comóvel de Hubble está sempre aumentando. Portanto, a maior contribuição para $\eta(a)$ vem das épocas mais recentes.

Esse fato indica o caminho para uma solução: se houve uma época inicial durante a qual o raio comóvel de Hubble diminuiu, então η_* pode ter recebido grandes contribuições de tempos muito antigos, quando o raio de Hubble era muito maior. Nesse caso, o tamanho de uma região que é capaz de termalizar no início poderia ter sido muito maior do que foi calculado e do que o horizonte comóvel atual (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Agora, uma época durante a qual $(aH)^{-1} = \dot{a}^{-1}$ diminui, corresponde a uma época de \dot{a} crescente, ou $\ddot{a} > 0$: uma expansão acelerada. Assim, uma época de aceleração precoce resolveria o problema do horizonte. Essa época postulada é chamada de inflação.

7.3 A inflação

7.3.1 A natureza da rápida expansão

As equações de Friedmann descrevem como ocorre a expansão do espaço-tempo com base no princípio cosmológico. Em específico, se analisarmos cuidadosamente a equação da aceleração, para o caso de uma inflação cósmica, teríamos um conteúdo de matéria dominante com pressão negativa. No entanto, a matéria e a radiação que conhecemos não satisfazem essa condição: $\rho + 3p > 0$.

Diante dessa problemática, precisamos fazer alguma modificação no modelo, como, por exemplo, adicionar um campo extra ou uma constante cosmológica, a fim de entrarmos

em acordo com as observações cosmológicas. Podemos reescrever a equação da aceleração como (MONTEIRO, 2021):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = H^2(1 - \epsilon), \quad (7.4)$$

em que $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ é chamado de parâmetro de rolagem lenta (ou parâmetro de slow-roll) e, como a própria expressão sugere, está relacionado à evolução do parâmetro de Hubble H . Note, a partir de (7.4), que a condição $\ddot{a} > 0$ corresponde a $\epsilon < 1$.

Consideremos que a matéria que dominava na época da inflação era um campo escalar ϕ , o qual chamaremos de inflaton (se considerarmos apenas um campo, chamamos esse tipo de inflação de inflação de campo simples - single field inflation -) (MONTEIRO, 2021). Com base nas equações de Einstein e em suas componentes (as equações de Friedmann e da aceleração), chegamos às relações a seguir:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (7.5)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} \left[\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (7.6)$$

Portanto, para que haja o período de inflação nessa situação, teremos que tomar a energia potencial dominando sobre a energia cinética (MONTEIRO, 2021). Por questões de conveniência, estamos adotando coordenadas naturais e, com isso, fazendo a massa reduzida de Planck M igual a 1. Analisando as equações (7.4), (7.5) e (7.6), podemos reescrever o parâmetro de slow-roll como:

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2}. \quad (7.7)$$

O caso em que $p_\phi \rightarrow \rho_\phi$, conhecido como limite de de Sitter, corresponde a $\epsilon \rightarrow 0$, o que resulta em $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Tal situação é conhecida como condição de slow-roll e nela praticamente não vemos uma variação do potencial com o campo (MONTEIRO, 2021). Tendo em vista que a inflação precisa ter ocorrido em um tempo suficientemente grande, se torna necessário definimos um segundo parâmetro de slow-roll η , que é adimensional, e que está associado à aceleração:

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad (7.8)$$

de tal modo que, se $|\eta| \ll 1$, teremos que $|\ddot{\phi}| \ll |H\dot{\phi}|$, e podemos escrever (MONTEIRO, 2021):

$$3H\dot{\phi} \approx -V_\phi, \quad (7.9)$$

em que $V_\phi = dV/d\phi$ representa a primeira derivada do potencial em relação ao campo ϕ . Observe que a aproximação acima é válida porque o termo de fricção tem que dominar sobre o termo $\ddot{\phi}$ para satisfazer a condição de slow-roll: $V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Além disso, sob

a mesma justificativa, também é possível negligenciarmos o termo $|\ddot{\phi}|$ em relação a V_ϕ , apenas derivando a condição de slow-roll em relação ao tempo.

Uma outra maneira de conseguirmos analisar tal condição é relacionando o parâmetro de densidade com a pressão associados ao campo ϕ . Tal relação é conhecida como equação de estado ω (MONTEIRO, 2021):

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \approx -1 \rightarrow V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \quad (7.10)$$

A aproximação acima se justifica pelo fato da equação de estado ω proposta para um campo escalar ser $\omega = -1$. A partir dessas definições, estamos em condições de escrever os parâmetros de slow-roll relacionados ao potencial V . Elevando (7.9) ao quadrado, dividindo ambos os lados por H^4 , negligenciando o fator multiplicativo e comparando o resultado com (7.7), teremos:

$$\epsilon_\phi \equiv \frac{M^2}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2. \quad (7.11)$$

O outro parâmetro de slow-roll pode ser obtido a partir da derivação temporal da equação (7.9) e ao dividirmos ambos os lados por $3H^2\dot{\phi}$. O resultado é:

$$\eta \equiv \frac{M^2}{2} \left(\frac{V_{\phi\phi}}{V} \right), \quad (7.12)$$

onde $V_{\phi\phi} = d^2V/d\phi^2$ representa a segunda derivada do potencial em relação ao campo ϕ . Assim, podemos relacionar os dois parâmetros de slow-roll da seguinte maneira:

$$\epsilon + \eta = \eta_\phi. \quad (7.13)$$

O período inflacionário tem fim quando há violação das condições de slow-roll, ou, matematicamente, quando $\epsilon(\phi_f) \equiv 1 \rightarrow \epsilon_\phi(\phi_f) \approx 1$. É válido destacarmos que os parâmetros de slow-roll ϵ e η não são observáveis, mas que os observáveis inflacionários estão relacionados diretamente com eles.

Nesse ponto, podemos definir o número N de e-folds da seguinte forma:

$$dN \equiv H dt = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt = d(\ln a) \rightarrow N_{tot} = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right), \quad (7.14)$$

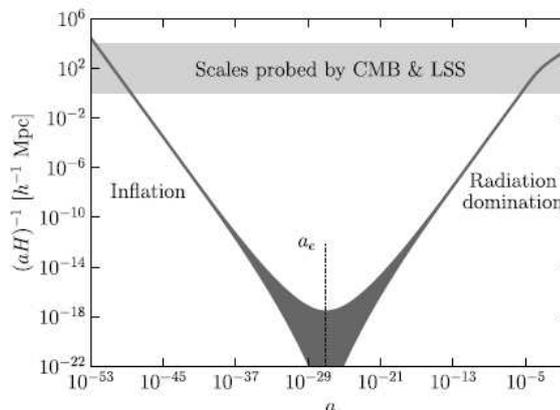
em que a_i e a_f são os fatores de escala no início e no final da inflação, respectivamente. A quantidade N pode ser entendida como uma medida da expansão do Universo durante a época da inflação, isto é, N nos fornece a informação do quanto o Universo se desdobrou (em seu tamanho) na era inflacionária (MONTEIRO, 2021). Integrando a expressão anterior, teremos:

$$N = \int_t^{t_f} H dt = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{1}{M} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_\phi}} d\phi, \quad (7.15)$$

essa expressão é importante porque relaciona o número N de e-folds com o parâmetro ϵ de slow-roll. As flutuações observadas na CMB são criadas quando $N \approx 60$ e-folds antes do final da inflação (MONTEIRO, 2021).

7.3.2 Mais sobre o período inflacionário

Figura 10 – O raio de Hubble comóvel em função do fator de escala a .



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

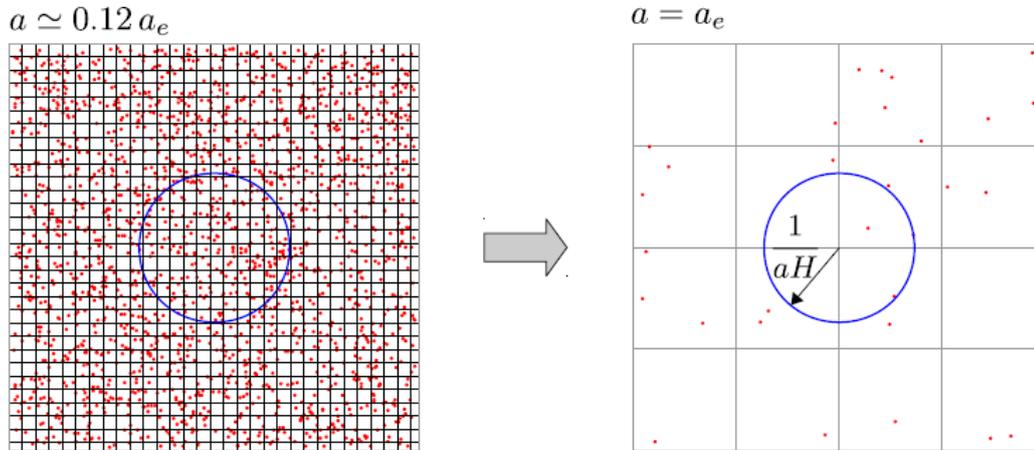
Com o estudo da natureza do período inflacionário estamos em condições de nos aprofundar em alguns aspectos técnicos importantes para o entendimento desse período da evolução cósmica. Inicialmente, considere a Figura 10. Perceba as seguintes épocas: a inflação em tempos iniciais (quando $H = H_{\text{inf}} = \text{constante}$), a transição para o domínio da radiação em (torno de $a \sim a_e$) e, finalmente, o domínio da matéria (em $a > 10^{-4}$). O domínio da energia escura é pouco visível, pois ocorre em $a > 0,5$, e as escalas de interesse cosmológico (representadas pela faixa cinza horizontal) eram maiores que o raio de Hubble quando $a < 10^{-5}$: mais tarde, essas escalas entraram no raio de Hubble, onde passaram a ser observadas.

No início da inflação, todas as escalas de interesse eram menores que o raio de Hubble e, portanto, estavam em contato causal. A evolução do raio de Hubble nas proximidades do final da inflação (em torno de $a = a_e$) é incerta, conforme indicado pela faixa sombreada escura. A metade direita deste gráfico afirma que, no passado, as escalas comóveis de interesse eram muito maiores que $1/(aH)$ e mais ainda quando se volta no tempo. O lado esquerdo, por outro lado, mostra que uma época inflacionária reduziu drasticamente o raio comóvel de Hubble. Em algum ponto inicial da inflação, o raio comóvel de Hubble era muito grande, maior do que qualquer escala de interesse cosmológico hoje: todas as escalas de interesse estavam bem dentro do horizonte.

A Figura 11 dá uma visão diferente de como a inflação afeta o argumento da causalidade.

Ambos os painéis usam a mesma escala física (não-comóvel). Os pontos ilustram as posições das partículas, enquanto os círculos mostram o tamanho do raio comóvel de Hubble. Em algum momento durante a inflação, o raio comóvel de Hubble era bastante grande, abrangendo dezenas de células na grade (lado esquerdo). Após a inflação, o raio comóvel do Hubble encolheu para apenas uma célula (observe o número muito menor de

Figura 11 – Algumas partículas na grade comóvel durante (esquerda) e no final da inflação (direita).



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

partículas dentro do raio comóvel de Hubble à direita). No exemplo abordado acima, o fator de escala cresceu por um fator de 8, enquanto que, durante a inflação, o fator de escala aumentou por um fator de ordem e^{62} . O encolhimento do raio comóvel de Hubble significa que as partículas que estavam inicialmente em contato causal umas com as outras (dentro do círculo à esquerda) agora não podem mais se comunicar dentro de uma determinada região. O raio físico de Hubble H^{-1} , por outro lado, permanece aproximadamente constante durante a inflação.

Além disso, cabe destacar que o painel da esquerda mostra uma “grade comóvel” em algum ponto durante a inflação, com o círculo indicando o tamanho do raio comóvel de Hubble naquele momento. Todas as partículas (representadas por pontos) dentro dessa região estão em contato causal umas com as outras e, portanto, toda a região pode ter se termalizado. O painel da direita mostra o que acontece após uma expansão por um fator de 8 (suponha que isso seja no final da inflação): a grade comóvel se expandiu e o raio de Hubble comóvel passou a cobrir 8 células a menos (em cada dimensão) na grade comóvel. Apenas uma pequena região na grade está em contato causal (isto é, dentro de $1/(aH)$), mas se sabe pelo painel esquerdo que uma região muito maior estava em contato causal antes, durante os estágios iniciais da inflação. Então, após a inflação, a região do cosmos que esteve em contato causal é muito maior do que o raio de Hubble comóvel.

Outra maneira de pensar sobre isso é que a inflação “esvaziou” o Universo. À medida em que o Universo se expandiu exponencialmente, as partículas nele foram diluídas em igual escala. Isso fica claro na Figura 11: há muito menos partículas em um determinado volume físico no lado direito em comparação com o esquerdo. Suponha que exista uma substância que mantém a taxa de Hubble $H = H_{\text{inf}}$ aproximadamente constante durante a inflação, fato que é corroborado pelos dados. Nesse caso, como $d(\ln a) = H dt$, o fator de

escala evolui como:

$$a(t) = a_e e^{H_{\text{inf}}(t-t_e)}, \quad (7.16)$$

para $t < t_e$, onde t_e é o tempo no final da inflação.

À medida em que a inflação prosseguiu, o Universo tornou-se dominado pela “substância lisa” que impulsiona a aceleração, transformando um pedaço caótico e não-homogêneo do Universo em um espaço muito maior que é completamente homogêneo e vazio (o cosmos se esvazia e se torna homogêneo à medida em que a inflação progride). A densidade de energia do Universo segue comportamento semelhante: à medida em que a inflação prosseguiu, qualquer radiação primordial e partículas massivas foram rapidamente diluídas, e apenas a substância que impulsionou a inflação permaneceu. No final da inflação, a substância decaiu em radiação e partículas massivas novamente (DODELSON; SCHMIDT, 2021)

A partir do momento em que a inflação se instalou, tudo o que estava em um dado trecho do Universo (partículas pesadas, partículas sem massa, monopolos magnéticos e assim por diante) se tornaram irrelevantes, porque a densidade numérica de partículas massivas evolui como $n(t) \propto a^{-3} \propto e^{-3H_{\text{inf}}t}$, que cai exponencialmente rápido, enquanto a densidade de energia que impulsiona a inflação permaneceu aproximadamente constante. As perturbações no espaço-tempo, assim como os componentes da matéria comum e da radiação, foram rapidamente homogeneizadas devido à inflação.

No final da inflação o Universo era “suave” e praticamente vazio. No entanto, a substância que impulsionava a expansão exponencial dominou a energia em todos os lugares e era praticamente a mesma em todos os pontos do cosmos. Posteriormente, a produção das partículas que conhecemos pode ter ocorrido mediante oscilações de um determinado campo, que em geral tratamos como sendo o campo escalar do inflaton ϕ . Ele oscilava em torno do mínimo de seu potencial, produzindo partículas que, por sua vez, iriam interagir até que, em dado momento, atingissem o equilíbrio térmico. Isso ocorreria quando praticamente toda a energia do inflaton fosse transformada em energia térmica de partículas elementares (MONTEIRO, 2021).

Pequenas perturbações foram geradas durante a inflação e uma época crucial na evolução das perturbações do número de onda comóvel k foi quando seu comprimento de onda comóvel tornou-se da ordem do raio comóvel de Hubble $(aH)^{-1}$. Durante os domínios da radiação e da matéria (na verdade, a qualquer momento quando $1/(aH)$ estava crescendo), os modos sempre evoluem de $k^{-1} \gg (aH)^{-1}$ inicialmente para $k^{-1} < (aH)^{-1}$ em momentos posteriores (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Portanto, podemos afirmar que o modo entra no horizonte à medida que vai de $k \ll aH$ até $k > aH$, pois se torna uma perturbação detectável para um observador que vive no Universo. As equações de Einstein-Boltzmann nos permitem acompanhar as perturbações de fora do horizonte até o momento em que são observadas.

Em síntese, os modos tinham inicialmente $k \gg aH$, mas deixaram o horizonte depois (uma vez que aH diminui exponencialmente), de modo que $k \ll aH$ no final da inflação para todos os modos observáveis. As maiores escalas observáveis atualmente, aquelas que entraram no horizonte muito recentemente, deixaram o horizonte mais cedo. As pequenas escalas, que entraram no horizonte há muito tempo, saíram correspondentemente mais tarde durante a inflação. Portanto, para se explicar a estrutura do Universo hoje é necessário entendermos a geração de perturbações durante a inflação. Por outro lado, para resolvermos o problema do horizonte é necessário que o raio comóvel de Hubble tenha sido maior que o raio comóvel atual H_0^{-1} , antes da inflação. O raio comóvel de Hubble no final da inflação (no tempo t_e), era $1/(a_e H_e)$, onde $H_e \equiv H(t_e)$.

Para obter uma estimativa aproximada da ordem de magnitude, suponha que a temperatura após a inflação foi $T_e = 10^{14}$ GeV e ignore as épocas (relativamente breves) de dominação da matéria e da energia escura, de modo que se possa usar as relações do domínio da radiação por toda parte. Dessa forma, H passa a aumentar com a^{-2} e a razão do raio comóvel de Hubble no final da inflação e hoje é $(a_0 H_0)/(a_e H_e) = a_e/a_0$. Como $T \propto a^{-1}$, então se tem: $a_e/a_0 \approx T_0/10^{14}$ GeV $\sim 10^{-27}$. Assim, o raio comóvel de Hubble no final da inflação era 27 ordens de magnitude menor do que é hoje. Com isso, se pode inferir que o fator de escala teve que aumentar por um fator de $10^{27} \sim e^{62}$ durante a inflação para que o raio comóvel de Hubble atual fosse menor do que no início da inflação (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Se a taxa de Hubble é constante, então a expansão é exponencial no tempo e, portanto, o Universo precisou se expandir exponencialmente em 60 ordens de grandeza.

Além disso, cabe destacar que η deixa de ser um parâmetro de tempo efetivo após a inflação porque se torna muito grande muito cedo e muda relativamente pouco à medida em que o Universo se expande durante as eras dominadas por matéria e radiação. Uma maneira comum de lidar com esse problema é reescrever η de modo que $\eta = 0$ corresponda ao fim da inflação:

$$\eta(t) = \int_{t_e}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (7.17)$$

em que t pode ser maior ou menor que t_e : essa convenção permite-nos dizer que, durante a inflação, η é negativo, mas sempre monotonicamente crescente. Com isso, não será mais preciso se referir ao tempo de início da inflação, pois o tempo final $\eta = 0$ é o que realmente nos interessa. Por fim, cabe destacar que a inflação produziu algumas flutuações ao redor do Universo homogêneo e que a quantidade mínima de flutuações é garantida pelo princípio da incerteza de Heisenberg.

Como vimos, a inflação faz mais do que resolver o problema do horizonte: ela tem a capacidade de correlacionar escalas que de outra forma seriam desconectadas. Os termos de ordem zero garantem que o Universo será quase uniforme em todas as escalas de interesse hoje. No entanto, existem perturbações nesses termos e essas perturbações - que foram

produzidas quando as escalas estavam conectadas causalmente - persistiram por muito tempo após o término da inflação.

As perturbações mais relevantes são as perturbações escalares da métrica, porque se acoplam às densidades de matéria e de radiação e são responsáveis pela estrutura que observamos no Universo. Além das perturbações escalares, porém, a inflação também gera flutuações tensoriais na métrica, ou seja, ondas gravitacionais. Essas perturbações não estão acopladas à densidade (e, portanto, não são responsáveis pela estrutura em grande escala do Universo), mas induzem anisotropias na CMB. Na verdade, essas anisotropias acabam sendo uma assinatura única do período inflacionário sendo, portanto, uma evidência física em favor da inflação (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

7.4 Sobre as perturbações tensoriais

As perturbações tensoriais são invariantes, isto é, elas parecem ser as mesmas independentemente do sistema de coordenadas adotado e, nesse caso, podemos negligenciar o acoplamento dos modos tensoriais às outras perturbações na métrica ou na matéria. Já as perturbações escalares, por outro lado, são afetadas por essas duas complicações: elas parecem diferentes dependendo de qual sistema de coordenadas é escolhido e se misturam com as perturbações na métrica.

Durante a inflação, acredita-se que o Universo consistia principalmente de um campo escalar e de uma métrica de fundo uniformes. Nesse contexto, a flutuação dos campos era regida pela Mecânica Quântica e, a qualquer momento, a flutuação média (o desvio da média) era zero, pois havia regiões em que o campo era ligeiramente maior que seu valor médio e regiões em que era menor. A média do quadrado das flutuações (a variância), no entanto, não era zero, o que justifica a importância de se calcular esse parâmetro e verificar como ele evoluiu à medida em que a inflação avançou (conhecendo-se a variância se pode extrair uma função de distribuição de probabilidade e definir as condições iniciais a partir das quais se realiza o cálculo da evolução da estrutura).

No cenário inflacionário, a incerteza é fundamental: a inflação apagou todos os vestígios do que veio antes dela e os substituiu por flutuações de vácuo (regidas pela Mecânica Quântica), que não podem ser previstas, em princípio. Desse modo, o que a inflação prevê são as funções de distribuição das quais as perturbações podem ser extraídas.

7.4.1 As ondas gravitacionais

Para calcular as flutuações quânticas na métrica (as ondas gravitacionais), torna-se necessário quantizar o campo. A maneira de fazer isso, no caso de perturbações tensoriais e escalares, é reescrever o problema como um oscilador harmônico. A partir disso, podemos relembrar algumas propriedades básicas desse sistema oscilatório e, por fim, quantizá-lo.

Podemos lembrar, primeiramente, da equação do oscilador harmônico simples:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (7.18)$$

Após a quantização, a solução x se torna um operador quântico da seguinte forma:

$$\hat{x} = v(\omega, t)\hat{a} + v^*(\omega, t)\hat{a}^\dagger, \quad (7.19)$$

onde \hat{a} é o operador aniquilação e v representa a solução de frequência positiva para o oscilador acima, com $v \propto e^{-i\omega t}$, e o operador \hat{a}^\dagger é o adjunto hermitiano do operador \hat{a} . Realizando algumas manipulações algébricas, chegamos à seguinte expressão para o valor esperado do operador x :

$$\langle |x|^2 \rangle = |v(\omega, t)|^2 = \frac{1}{2\omega}. \quad (7.20)$$

Isso é (quase) tudo o que se precisa saber sobre as flutuações quânticas para calcular as flutuações no início do Universo geradas pela inflação.

No estudo das flutuações, em vez de lidar com um único oscilador harmônico, se deve imaginar uma coleção infinita de osciladores, um para cada modo de Fourier k . Cada modo carrega seus próprios operadores individuais de criação e aniquilação \hat{a}^\dagger e \hat{a} . A evolução temporal destes operadores é descrita por uma combinação de frequências positivas e negativas que, no espaço de Minkowski, são simplesmente $v(k, t)$ e $v^*(k, t)$, que são proporcionais a $e^{\pm i\omega(k)t}$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). No espaço de Minkowski, então, o valor esperado de vácuo (calculado acima) é independente do tempo e da posição, e não produz nenhuma partícula real.

Esse fato muda em um espaço-tempo em rápida expansão: as duas soluções independentes que compõem a função $v(k, \eta)$ têm dependências de tempo drasticamente diferentes. Fisicamente, o estado de vácuo está evoluindo devido à expansão, de modo que ele (no início da inflação) não é mais desprovido de partículas. A variância das flutuações será identificada como o espectro de potência das ondas gravitacionais (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

7.4.2 A matriz de perturbação

De maneira geral, as ferramentas necessárias para estudar os modos escalares e tensoriais são as mesmas. Nesse contexto, devemos partir do pressuposto de que as perturbações na métrica podem ser caracterizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_{00}(x, t) &= -1 + h_{00}(x, t), \\ g_{0i}(x, t) &= a(t)h_{0i}(x, t) = a(t)h_{i0}(x, t), \\ g_{ij}(x, t) &= a^2(t) [\delta_{ij} + h_{ij}(x, t)], \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde h_{00} , h_{0i} e h_{ij} representam perturbações métricas (que são funções do espaço-tempo), cujas componentes são consideradas pequenas em magnitude. Para o caso das perturbações

tensoriais, deve-se fazer $h_{00} = -1$ e $h_{0i} = 0$ para obter:

$$g_{ij}(x, t) = a^2(t)h_{ij}(x, t), \quad (7.22)$$

onde h_{ij} representa a matriz de perturbação:

$$h_{ij}(x, t) = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Ou seja, as perturbações na métrica são descritas por duas funções, h_+ e h_x , assumidas como pequenas. Por definição, as perturbações ocorrem no plano xy e isso corresponde a escolher o eixo z para estar na direção do vetor de onda k . Note que as perturbações h_+ e h_x são duas componentes de uma matriz sem divergência e sem traços: “sem divergência” significa que: $k^i h_{ij} = k^j h_{ij} = 0$ e “sem traços” equivale dizer que a soma das perturbações ao longo da diagonal é zero.

7.4.3 As perturbações nos símbolos de Christoffel

Se estamos trabalhando com um espaço-tempo perturbado, obviamente teremos modificações na métrica e, por conseguinte, nos símbolos de Christoffel. Para iniciarmos a análise desses símbolos, devemos ter em mente que a métrica considerada tem as componentes g_{00} constante e g_{0i} nula. Como os símbolos de Christoffel são somas das derivadas da métrica, os únicos termos que serão diferentes de zero são aqueles que envolvem derivadas da parte espacial da métrica $g_{ij,\alpha}$. Portanto, se pode argumentar imediatamente que:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0. \quad (7.24)$$

A partir da relação (7.21), podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= Hg_{ij} + \frac{1}{2}a^2 h_{ij,0}, \\ \Gamma_{0j}^i &= H\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij,0}, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{i}{2} (k_k h_{ij} + k_j h_{ik} + k_i h_{jk}). \end{aligned} \quad (7.25)$$

7.4.4 O tensor de Ricci perturbado

Nesse ponto, podemos combinar os símbolos de Christoffel para formar o tensor de Ricci. Como a componente R_{00} não tem índice espacial (pois é um escalar tridimensional), sabe-se que os índices de h_{ij} devem ser contraídos com outros índices de R_{00} . As únicas opções para isso são δ_{kl} e k_i : os índices também poderiam ser contraídos com outro fator de h_{kl} , mas isso resultaria em um termo de segunda ordem. Como h_{ij} tem traço e divergente nulos, todas as contrações com o delta de Kronecker ou k_i desaparecem. Isso significa que

R_{00} não tem contribuições do modo k_i em primeira ordem. Por outro lado, as componentes espaciais do tensor de Ricci dependem das variáveis de perturbação do tensor:

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta - \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta. \quad (7.26)$$

Nesse ponto, reescrevemos os dois primeiros termos como:

$$\Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha = \Gamma_{ij,0}^0 - \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ij,k}^k. \quad (7.27)$$

Usando a definição dos símbolos de Christoffel perturbados, vem:

$$\Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha = \frac{1}{2} (g_{ij,00} + k^2 h_{ij}), \quad (7.28)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta = \frac{3}{2} H g_{ij,0}, \quad (7.29)$$

$$\Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta = 2H^2 g_{ij} + 2a^2 H h_{ij,0}. \quad (7.30)$$

Aplicando (7.28), (7.29) e (7.30) em (7.26) e expandindo as derivadas temporais, chegamos a:

$$R_{ij} = g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 \right) + \frac{1}{2} (3a^2 H h_{ij,0} + a^2 h_{ij,00} + k^2 h_{ij}). \quad (7.31)$$

Perceba que, com essa expressão, se pode recuperar a parte de ordem zero do tensor de Ricci. Dessa equação podemos extrair o escalar de Ricci fazendo:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}, \quad (7.32)$$

que não recebe nenhuma contribuição de h_{ij} em primeira ordem.

7.4.5 As equações de Einstein perturbadas

Calculadas as perturbações nos símbolos de Christoffel e no tensor (assim como no escalar) de Ricci, estamos em condições de deduzir as equações de Einstein com perturbações tensoriais, isto é, com as perturbações induzidas pelos modos tensoriais. Como o escalar de Ricci não é afetado por perturbações tensoriais, o tensor de Einstein de primeira ordem G_j^i é simplesmente:

$$\delta G_j^i = \delta R_j^i. \quad (7.33)$$

Para obter R_j^i é necessário calcular a contração $g^{ik} R_{kj}$, usando o tensor de Ricci perturbado. O primeiro termo, proporcional à contração $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$, não tem termos de primeira ordem. Os termos restantes são explicitamente de primeira ordem em h , podemos definir $g^{ik} = \delta^{ik}/a^2$, para obter:

$$\delta G_j^i = \frac{\delta^{ik}}{2} \left[3H h_{kj,0} + h_{kj,00} + \left(\frac{k}{a} \right)^2 h_{kj} \right]. \quad (7.34)$$

Por fim, como vimos, podemos assumir $\hat{k} = \hat{e}_z$ para deduzir um conjunto de equações de evolução para as variáveis da matriz de perturbação h_+ e h_x (a equação resultante será independente dessa convenção para \hat{k}). Para se obter uma equação para h_+ , vamos considerar, inicialmente, a diferença entre as componentes 1 e 2 do tensor de Einstein. Note que o tensor de Einstein é proporcional a h_{kj} e suas derivadas. Então, como $h_{11} = -h_{22} = h_+$, temos que δG_1^1 é igual e oposto a δG_2^2 . Portanto:

$$\delta G_1^1 - \delta G_2^2 = 3Hh_{+,0} + h_{+,00} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 h_+. \quad (7.35)$$

Nesse ponto, vamos fazer uma mudança de variáveis para o tempo comóvel η , de modo que possamos escrever: $h_{+,0} = h'_+/a$ e $h_{+,00} = h''_+/a^2 - a'/a^3 h'_+$, então:

$$a^2(\delta G_1^1 - \delta G_2^2) = h''_+ + 2\left(\frac{a'}{a}\right)h'_+ + k^2 h_+ = 0. \quad (7.36)$$

O lado direito dessa equação é zero na ausência de anisotropias, o que nos faz inferir que as ondas gravitacionais não são produzidas por perturbações de matéria. Já os componentes da radiação (fótons e neutrinos) têm certa anisotropia, dada pelo seu quadrupolo: para os fótons, no entanto, esse quadrupolo é suprimido durante a era dominada pela radiação, de modo que o termo-fonte pode ser ignorado. A quantidade mais relevante no lado direito das equações de Einstein para perturbações tensoriais então é a tensão anisotrópica de neutrinos, que fornece um termo de origem de ondas gravitacionais, o que leva a um amortecimento dos modos tensoriais em pequenas escalas (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Como as perturbações h_+ e h_x obedecem à mesma equação diferencial, então os modos tensoriais são governados por:

$$h''_T + 2\left(\frac{a'}{a}\right)h'_T + k^2 h_T = 0, \quad (7.37)$$

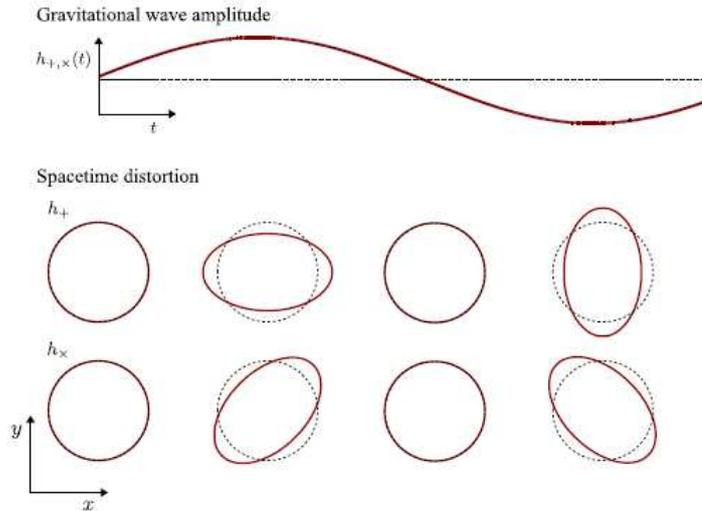
onde T representa tanto $+$ quanto x . Perceba que essa relação é uma equação de onda e as soluções correspondentes é o que chamamos de ondas gravitacionais. Por exemplo, se a expansão do Universo fosse negligenciada, de modo que o termo de amortecimento (o segundo termo acima) pudesse se anular, então as duas soluções associadas a esse sistema teriam a forma: $h_T \propto e^{\pm ik\eta}$. No espaço real, então, a perturbação na métrica é da forma:

$$h_T = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} [A(k)e^{ik\eta} + B(k)e^{-ik\eta}] d^3k. \quad (7.38)$$

Conforme mencionado, os modos k correspondem a ondas viajando na direção $\pm z$ na velocidade da luz. As distorções espaço-temporais induzidas por esses modos são ilustradas na Figura 12

Nessa figura, os modos k são tensoriais e o vetor k está ao longo do eixo z , que sai da página. O painel superior mostra a evolução temporal da amplitude da onda (desconsiderando

Figura 12 – Perturbações espaço-temporais devido a uma onda gravitacional.



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

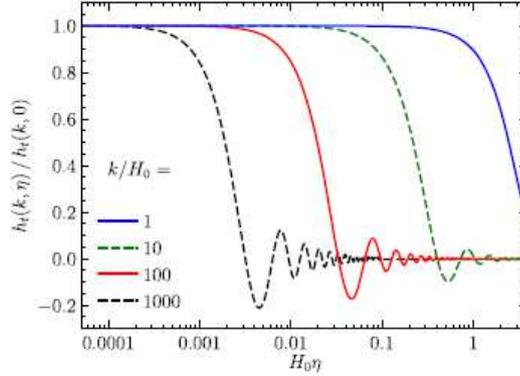
o amortecimento devido à expansão), enquanto o painel inferior mostra o alongamento e a compressão do espaço-tempo perpendicular à direção de propagação da onda em diferentes pontos durante um único ciclo de onda. Observe também o padrão elíptico no plano perpendicular ao vetor de onda (figuras inferiores): essa assimetria é uma distinção fundamental entre modos tensoriais e escalares, pois a distorção do espaço-tempo induzida por perturbações escalares é sempre azimuthalmente simétrica em torno do vetor de onda.

A equação (7.38) pode ser entendida como a generalização da equação de onda gravitacional para um Universo em expansão. Se o Universo é puramente radiação ou dominado por matéria, soluções analíticas exatas para essa equação podem ser obtidas, que também são oscilatórias, mas que também decaem em amplitude (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

A Figura 13 mostra a evolução da perturbação h_T para quatro modos de diferentes comprimentos de onda. Em outras palavras, essa ilustração mostra a evolução de ondas gravitacionais com diferentes números de onda $h_T(k, \eta)$ em função do tempo comóvel, normalizado para a amplitude inicial do super-horizonte ($\eta = 0$). Cada modo começa a oscilar e decair à medida que seu comprimento de onda se torna menor que o horizonte, o que corresponde à época $k\eta = 1$. Note que os modos com comprimentos de ondas menores (isto é, aqueles que apresentam um valor de k maior) decaem mais cedo.

Perceba, ainda, que cada modo permanece constante em momentos iniciais quando seu comprimento de onda é maior que o horizonte $k\eta < 1$. Quando o comprimento de onda do modo se torna comparável ao horizonte, sua amplitude oscila com uma frequência $k/2\pi$ e começa a decair. Em particular, o decaimento é proporcional a a^{-1} e a densidade de energia das ondas gravitacionais se desloca para o vermelho em proporção a a^{-4} , exatamente como se espera para qualquer forma de radiação.

Figura 13 – Evolução das ondas gravitacionais em função do tempo comóvel.



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

7.4.6 O espectro de potência de perturbação

É conveniente reescrevermos (7.38) na forma de um oscilador harmônico simples, para que a perturbação h possa ser facilmente quantizada. Para isso, vamos definir:

$$J \equiv \frac{ah}{\sqrt{16\pi G}}. \quad (7.39)$$

Após essa redefinição, recaímos em outra equação de oscilador harmônico, cuja solução é o operador:

$$\hat{J}(k, \eta) = v(k, \eta)\hat{a}_k + v^*(k, \eta)\hat{a}_k^\dagger. \quad (7.40)$$

Para determinar o espectro de potência das flutuações tensoriais se pode, primeiramente, usar a analogia com o oscilador harmônico para escrever a variância das perturbações no campo de perturbações h como:

$$\langle \hat{J}^\dagger(k, \eta)\hat{J}(k', \eta) \rangle = |v(k, \eta)|^2 (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(k - k'), \quad (7.41)$$

que é o valor esperado de um operador quântico no vácuo (para um campo clássico, isso representa o valor médio). Como um campo quântico é definido em todo o espaço, então pode ser considerado como um conjunto infinito de osciladores, cada um em uma posição espacial diferente, ou, no espaço de Fourier, com diferentes valores de k . As flutuações quânticas em cada um desses osciladores são independentes (desde que as equações sejam lineares), então $J(k)$ não está correlacionado com $J(k')$ se $k \neq k'$. A função delta de Dirac reforça essa independência entre os J 's e o fator $(2\pi)^3$ advém do fato de se estar trabalhando no limite contínuo. Se $J = ah/\sqrt{16\pi G}$, então a equação acima, em termos de h , se torna:

$$\langle \hat{J}^\dagger(k, \eta)\hat{J}(k', \eta) \rangle = \left[\frac{16\pi G}{a^2} |v(k, \eta)|^2 \right] (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(k - k') = P_h(k, \eta) (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(k - k'), \quad (7.42)$$

onde $P_h(k, \eta)$ representa o espectro de potência das perturbações tensoriais primordiais (isto é, para uma única polarização - o monopolo). A partir da definição de $P_h(k, \eta)$ o

problema se reduz a determinar o espectro de perturbações tensoriais (produzidas durante a inflação), resolvendo uma equação diferencial de segunda ordem para $v(k, \eta)$.

A expressão para v se torna, em termos do tempo comóvel:

$$v'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) v = 0. \quad (7.43)$$

As condições iniciais necessárias para resolver esta equação vêm de considerar v em tempos muito iniciais, especificamente quando $k|\eta| \gg 1$ e quando o modo está muito dentro do horizonte. Nessa época, o termo k^2 domina e a equação se reduz precisamente à do oscilador harmônico simples. Nesse caso, se sabe que a solução adequadamente normalizada é da forma:

$$v = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (7.44)$$

Então, esse conhecimento permite escolher a solução adequada a equação de v :

$$v = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right), \quad (7.45)$$

que é a solução correta quando o modo k está bem dentro do horizonte (ou seja, quando: $k|\eta| \gg 1$). Depois que a inflação expandiu o Universo na ordem de e^{62} , o produto $k|\eta|$ tornou-se muito pequeno e, portanto, o modo saiu do horizonte. Nos momentos iniciais $h \propto v/a$ cai para $1/a$ à medida que a inflação reduz a amplitude dos modos. Uma vez que o produto $k\eta$ se torna menor que a unidade, o modo deixa o horizonte e então h permanece constante (desde que $1/\eta \propto a$) e se torna uma onda gravitacional observável quando reentrar no horizonte (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Essa produção de ondas gravitacionais é consequência do fato de que as duas soluções da equação de onda se dividem em um modo constante e um decrescente em um espaço-tempo em expansão exponencial.

Como a solução v é normalizada, se pode determinar a variância da amplitude da onda gravitacional do super-horizonte, que aumenta com $|v|^2/a^2$ e é constante no tempo depois que a inflação “esticou” os modos para serem maiores que o horizonte. Esta constante determina as condições iniciais para as ondas gravitacionais, aquelas com as quais as perturbações h_+ e h_x aparecerão em algum momento antes de o modo reentrar no horizonte. A definição de $P_h(k)$ e o limite de v quando $k\eta \rightarrow 0$ mostram que esta constante é:

$$P_h(k) = \frac{16\pi G}{a^2} \frac{1}{2k^3\eta^2} = \left(\frac{8\pi GH^2}{k^3} \right)_{k|\eta|=1}, \quad (7.46)$$

onde utilizamos a aproximação $\eta \approx -1/(aH)$. Esta é a expressão final para o espectro de potência primordial das ondas gravitacionais (note que se assumiu H constante na dedução deste resultado, porém, na realidade, H varia lentamente durante a inflação, apesar de o resultado permanecer preciso se H for avaliado no momento em que o modo k deixa

o horizonte, em $k|\eta| = 1$). Além disso, se pode observar que (7.46) representa o espectro de potência para as perturbações h_+ e h_x individualmente, então o espectro de potência tensorial total é, na verdade, duas vezes a expressão (7.46).

A detecção das ondas gravitacionais e a medição de $P_h(k)$ permitem-nos medir a taxa de Hubble durante a inflação. Como a energia potencial geralmente domina a energia cinética em modelos inflacionários, uma medida de H seria equivalente a medir o potencial V , que seria bastante notável, tendo em vista a possibilidade da inflação ter sido gerada em escalas de energia acima de 10^{15}GeV . Não há garantia de que as ondas gravitacionais produzidas durante a inflação serão detectáveis. Como $H^2 \propto \rho/m_p^2$, onde: $m_p^2 = 1/G$ é a massa de Planck (em unidades naturais), então o espectro de potência é proporcional a ρ/m_p^4 , em que ρ é a densidade de energia no momento da inflação. Se a inflação ocorreu em escalas suficientemente menores que a escala de Planck, as ondas gravitacionais primordiais não serão detectáveis.

7.5 Sobre as perturbações escalares

Para poder encontrar o espectro de perturbações escalares emergentes da inflação, em princípio, é preciso especificarmos as perturbações iniciais de densidade e de velocidade para cada espécie. Uma das principais previsões do modelo inflacionário de campo único é que ela gera perturbações adiabáticas: diferentes partes do Universo têm diferentes valores de densidade, mas as perturbações de densidade fracionária são as mesmas para todas as espécies: $\delta\rho_s/\rho_s = \delta\rho/\rho$. O mesmo princípio é válido para as velocidades. A justificativa para essa admissão é o pressuposto de que a inflação foi impulsionada por um único campo, cujo valor dita quando a inflação termina. Assim, qualquer “mancha” durante a inflação é completamente caracterizada pelo valor de um campo $\phi(x, t)$, que não deve ser confundido com a perturbação Φ na métrica.

A natureza adiabática das perturbações foi confirmada com grande precisão pelas observações da CMB, que permitiu estudar as perturbações de densidade primordial em diferentes espécies (chamadas de perturbações de isocurvatura) como uma fração percentual das perturbações adiabáticas (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Diante disso, para descrevermos as perturbações escalares, se torna necessário obtermos apenas $\delta\rho$. De forma equivalente, usando as equações de Einstein, podemos especificar as condições iniciais em termos de Ψ , já que especificar um único campo inicial é suficiente. O cálculo de Ψ acaba sendo mais complicado do que o caso das perturbações tensoriais, devido a presença de perturbações no campo escalar ϕ que se acoplam às perturbações gravitacionais Ψ . Desse modo, tudo se resume a determinar como a perturbação no campo escalar $\delta\phi(x, t)$ é convertida em Ψ .

7.5.1 Os campos escalares em um fundo homogêneo

Como vimos, através da teoria de perturbações, se pode decompor o campo escalar $\phi(x, t)$ em uma parte homogênea de ordem zero e uma perturbação de primeira ordem:

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(x, t), \quad (7.47)$$

em que o campo de fundo (isto é, o valor médio do campo) é representado por $\bar{\phi}(t)$. De maneira geral, o objetivo é encontrar uma equação que descreva $\delta\phi$ em um Universo em expansão suave, ou seja, com métrica $g_{00} = -1$ e $g_{ij} = \delta_{ij}a^2(\eta)$. A componente $\nu = 0$ do tensor energia-momento fornece a equação desejada para $\delta\phi$, embora se tenha que expandir os termos à primeira ordem. Como se assume uma métrica homogênea (imperturbável), os únicos termos de primeira ordem são as perturbações no tensor energia-momento. Todos os símbolos de Christoffel são de ordem zero ($\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}a^2H$ e $\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \delta_{ij}H$) ou zero (as demais componentes). Assim, escrever a parte perturbada do tensor energia-momento como δT_ν^μ e considerar o componente $\nu = 0$ da equação de conservação perturbada leva a:

$$\frac{\partial \delta T_0^0}{\partial t} + ik_i \delta T_0^i + 3H \delta T_0^0 - H \delta T_i^i = 0. \quad (7.48)$$

A partir disso podemos determinar as perturbações no tensor energia-momento em termos das perturbações do campo escalar. Primeiro se deve calcular as perturbações no tensor de energia-momento, resultando em:

$$\delta T_0^i = i \frac{k_i}{a^3} (\bar{\phi}' \delta\phi) \quad (7.49)$$

$$\delta T_0^0 = -\frac{\bar{\phi}' \delta\phi'}{a^2} - V_{,\phi} \delta\phi \quad (7.50)$$

$$\delta T_i^j = \delta_{ij} \left(\frac{\bar{\phi}' \delta\phi'}{a^2} - V_{,\phi} \delta\phi \right) \quad (7.51)$$

Aplicando (7.49), (7.50) e (7.51) em (7.48) e manipulando os termos, vem:

$$\delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + k^2\delta\phi = 0, \quad (7.52)$$

que é idêntica à equação de h para o oscilador harmônico quântico (isto é, para perturbações tensoriais na métrica): desprezando o termo $V_{,\phi}\delta\phi$, a perturbação $\delta\phi$ obedece à equação de um campo sem massa em um Universo em expansão. Assim, por analogia, se pode escrever imediatamente que o espectro de potência das flutuações de $\delta\phi$ é igual a:

$$P_{\delta\phi} = \frac{H^2}{2k^3}, \quad (7.53)$$

que é praticamente idêntico ao espectro de potência das perturbações tensoriais (exceto por um fator de $16\pi G$, que foi inserido para transformar o h adimensional em um campo com dimensões de massa). Para obter o resultado para $\delta\phi$, que já é um campo escalar

com as dimensões adequadas, basta remover este fator. Por fim, note que a parte espacial do tensor energia-momento é diagonal, ou seja, proporcional a δ_{ij} : isso significa que não há tensão anisotrópica e que as equações de Einstein implicam que $\Phi = -\Psi$. Esse fato facilita os cálculos, pois se pode trabalhar com apenas um dos potenciais gravitacionais (com Ψ , e não com Φ).

7.5.2 As perturbações de super-horizonte

Quando o comprimento de onda da perturbação era muito menor que o horizonte, as perturbações na métrica podiam ser negligenciadas (o que não pode ser feito no final da inflação). Assim, embora as perturbações induzidas pela inflação se iniciem com $\delta\phi$, elas terminam como uma combinação linear de Ψ e $\delta\phi$ ou, de maneira mais geral, como uma combinação linear de Ψ com as perturbações no tensor de energia-momento. Diante dessa variedade, se deve encontrar a combinação linear que se conserva fora do horizonte: o valor dessa combinação linear conservada é determinado por $\delta\phi$ no cruzamento do horizonte (se pode avaliá-lo após a inflação apenas em termos de Ψ , já que o campo ϕ decai nesse período). A equação resultante deve ser da forma $\Psi \propto \delta\phi$ com o lado esquerdo sendo a perturbação na métrica pós-inflação e o lado direito a perturbação no campo escalar no cruzamento do horizonte (quando $aH = k$). A partir disso se torna possível relacionar o espectro de potência P do super-horizonte com o $P_{\delta\phi}$ da equação (7.53).

De acordo com a conservação de energia (na presença de perturbações métricas), se pode generalizar a expressão (7.48) para:

$$\frac{\partial\delta T_0^0}{\partial t} + ik_i\delta T_0^i + 3H\delta T_0^0 - H\delta T_i^i + 3(\rho + P)\dot{\Psi} = 0, \quad (7.54)$$

em que P e ρ são a pressão de ordem zero e a densidade de energia, respectivamente. Observe que, na expressão acima, fez-se a substituição $\dot{\Phi} = -\dot{\Psi}$ para considerar as perturbações na métrica (como o último termo era significativamente menor que os demais no período inflacionário, estava sendo negligenciado anteriormente).

Por outro lado, torna-se necessário acompanhar as perturbações à medida em que elas saem do horizonte e, em seguida, acompanhar sua evolução no super-horizonte até o fim da inflação. É inevitável que a desigualdade $|\rho + P| \ll \rho$ se torne inválida em algum momento antes do fim da inflação, isto é, em um dado ponto é preciso converter as perturbações do campo de inflação ϕ (que decai em partículas do Modelo Padrão através de uma cadeia de processos) naquelas do potencial gravitacional Ψ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Uma forma de lidar com o acoplamento entre as perturbações métricas e as da densidade de energia é definir a perturbação de curvatura C como:

$$C(k, \eta) = \frac{ik_i\delta T_0^i(k, \eta)a^2H(\eta)}{k^2(\rho + P)(\eta)} - \Psi(k, \eta). \quad (7.55)$$

Como a perturbação gravitacional Ψ durante a inflação é insignificante em relação aos demais termos, se pode usar a relação $\rho + P = (\bar{\phi}'/a)^2$ e a expressão de δT_0^i para se obter que, durante o período inflacionário, temos:

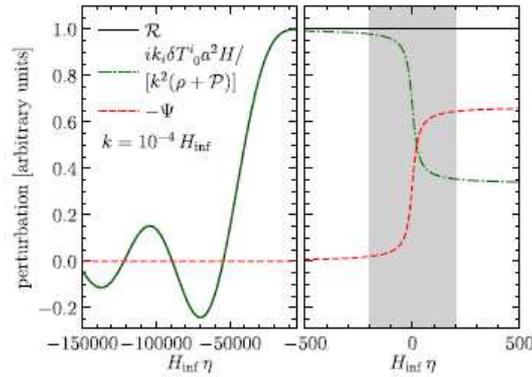
$$C = -\frac{aH\delta\phi}{\bar{\phi}'}. \quad (7.56)$$

Já no término da inflação (no domínio da radiação), tem-se que parte do numerador da equação acima se torna $ik_i\delta T_0^i = -4k\rho_r\theta_1/a$, isto é, proporcional ao dipolo da radiação θ_1 (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Como a pressão da radiação nessa época é igual a um terço da densidade de energia, então:

$$C = -\frac{3}{2}\Psi, \quad (7.57)$$

no momento pós-inflação, quando a radiação dominou a densidade do Universo.

Figura 14 – A evolução das perturbações na era da radiação (na figura, o autor fez $C = R$).



Fonte: DODELSON e SMITH (2021).

Um esboço de como C , Ψ e $i.k_i\delta T_0^i$ evoluem durante e após a inflação é mostrado na Figura 14. Nessa figura, H_{inf} denota o parâmetro de Hubble durante a inflação. Note que, durante a inflação, C oscila antes de congelar quando $k\eta \approx -1$, o ponto em que deixa o horizonte (painel esquerdo). Perceba também que, durante o período inflacionário, apenas a perturbação C é relevante (curva verde pontilhada), enquanto que Ψ é desprezível (curva vermelha tracejada). Isso muda quando a inflação termina (painel direito) e o reaquecimento acontece (área sombreada em cinza). A evolução das curvas durante essa época depende do comportamento microfísico do Universo. No entanto, C permanece constante fora do horizonte ao longo desta época e se sabe como ele é descrito, uma vez que a radiação “assume o controle”, ou seja, não é necessário saber o que acontece na área sombreada do gráfico.

A variável conservada C é extremamente importante no estudo da perturbação quando se move para fora do horizonte (de $H_{\text{inf}}\eta = -10^4$ em diante na Figura 14). Como

sabemos que após a inflação $C = -3/2\Psi$, se torna possível relacionar Ψ e o seu espectro de potência imediatamente após o fim da inflação com $\delta\phi$ no cruzamento do horizonte:

$$\Psi_{\text{pós-inflação}} = \frac{2}{3}aH \left(\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \right), \quad (7.58)$$

$$P_{\Psi}(k)_{\text{pós-inflação}} = \frac{2}{9k^3} \left(\frac{aH^2}{\dot{\phi}} \right)_{aH=k}^2. \quad (7.59)$$

Podemos, ainda, relacionar o espectro de potência de Ψ com o de ϕ :

$$P_{\Psi}(k) = P_{\Phi}(k) = \frac{128\pi^2 G^2}{9k^3} \left(\frac{HV}{V_{,\phi}} \right)_{aH=k}^2. \quad (7.60)$$

Esta equação nos permite fazer importantes observações sobre as perturbações escalares durante a inflação: a amplitude das perturbações para ϕ depende apenas da taxa de Hubble durante a inflação (como ocorre para os modos tensoriais). No entanto, devido aos potenciais gravitacionais, sabe-se que sua amplitude depende também da derivada do potencial do campo escalar. Em particular, tornando a fração $V_{,\phi}/V$ suficientemente pequena, se torna possível obter uma taxa de Hubble menor durante a inflação enquanto mantemos o espectro de potência $P_{\Phi}(k)$ fixo: isso reduz a amplitude das perturbações tensoriais em relação às escalares (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Uma maneira física de pensar sobre isso é lembrar que Φ quantifica a perturbação no fator de escala, pois: $\Phi = \delta a/a$, onde δa em uma determinada região é positivo se essa região se expandiu mais do que a região média durante a inflação, por exemplo. Esta perturbação no fator de escala está relacionada a uma pequena mudança no tempo cósmico via regra da cadeia: $\delta a = \dot{a}\delta t = aH\delta t$, mas também se pode expressar o tempo infinitesimal δt em termos de uma diferença no valor do campo escalar através da relação: $\delta\phi = \dot{\phi}\delta t$. Em outras palavras, o valor do campo ϕ (que, ao contrário de t , é invariante) fornece um “relógio físico” durante a inflação. Igualando essas duas expressões de δt , obtemos uma relação entre o campo ϕ e a perturbação métrica Φ : $\Phi \sim H\delta\phi/\dot{\phi}$.

O coeficiente de conversão presente na expressão do espectro de potência é o quadrado deste resultado e, portanto, o espectro de potência do potencial gravitacional $P_{\Psi}(k)$ é inversamente proporcional a $\dot{\phi}^2$. No entanto, as equações de movimento para um campo escalar de “rolagem lenta”, desprezando o termo em derivada segunda $\ddot{\phi}$, ditam que o campo “viaja” mais rapidamente em um potencial mais acentuado. Esse resultado fornece a proporcionalidade: $\dot{\phi} \propto V_{,\phi}$ e, portanto, a informação de que o espectro de potência de Φ é maior se o potencial for mais raso.

7.5.3 As equações de Einstein com perturbações escalares

Para começar o cálculo das equações de Einstein, vamos considerar agora as perturbações escalares no contexto de uma métrica da forma:

$$\Psi_{\text{pós-inflação}} = \frac{2}{3}aH \left(\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \right), \quad (7.61)$$

$$g_{00}(x, t) = -1 - 2\Psi(x, t), \quad (7.62)$$

$$g_{0i}(x, t) = 0, \quad (7.63)$$

$$g_{ij}(x, t) = a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\phi(x, t)]. \quad (7.64)$$

Para se escrever o lado esquerdo da equação de Einstein deve-se: calcular os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ para a métrica acima, formar o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e contraí-lo para obter o escalar de Ricci ($R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$). Além disso, também é necessário trabalharmos no espaço de Fourier, simplesmente trocando as derivadas espaciais por potências de ik . Como o tratamento é direcionado a perturbações escalares, torna-se necessária a obtenção de duas equações independentes para as duas perturbações: Ψ e ϕ . Conforme visto, para perturbações escalares, apenas as componentes tempo-tempo (00) e espaço-espaço (ij) de Einstein serão úteis.

O tensor de Ricci é facilmente expresso em termos dos símbolos de Christoffel. O componente tempo-tempo desse tensor é:

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\beta}. \quad (7.65)$$

Todos esses termos contribuem em primeira ordem. Uma simplificação ocorre quando se faz $\alpha = 0$ em todos esses termos. O primeiro e o segundo termos são iguais e opostos entre si, assim como os dois últimos. Dessa forma, a soma sobre o índice α contribui apenas quando ele é espacial. Calculando os termos para $\alpha = i$ no espaço de Fourier, temos:

$$\Gamma_{00,i}^i = - \left(\frac{k}{a} \right)^2 \Psi. \quad (7.66)$$

Para o segundo termo:

$$-\Gamma_{0i,0}^i = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 + \phi_{,00} \right). \quad (7.67)$$

O fator de 3 vem da soma implícita em δ_{ii} . O próximo termo é $\Gamma_{\beta i}^i \Gamma_{00}^{\beta}$. Note que Γ_{00}^{β} é de primeira ordem, independente da natureza de β , então se torna necessário manter somente a parte de ordem zero de $\Gamma_{\beta i}^i$, para evitar termos de segunda ordem. No entanto, $\Gamma_{\beta i}^i$ é de primeira ordem a menos que $\beta = 0$. Então:

$$\Gamma_{\beta i}^i \Gamma_{00}^{\beta} = \Gamma_{i0}^i \Gamma_{00}^0 = 3H\Psi_{,0}. \quad (7.68)$$

Para o último termo, se $\beta = 0$, ambos são de primeira ordem, então seu produto é de segunda ordem e pode ser desprezado. Portanto, apenas β espacial ($\beta = j$) precisa ser

considerado, levando a:

$$-\Gamma_{\beta 0}^i \Gamma_{0i}^\beta = -\Gamma_{j0}^i \Gamma_{0i}^j = -3(H^2 + 2H\phi_{,0}). \quad (7.69)$$

Com isso, aplicando (7.66), (7.67), (7.68) e (7.69) em (7.65) e cancelando alguns termos, chega-se ao componente tempo-tempo do tensor de Ricci:

$$R_{00} = -\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Psi - 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\phi_{,0}). \quad (7.70)$$

Analogamente, a componente espaço-espaço do tensor de Ricci é:

$$R_{ij} = \delta_{ij}[(2a^2H^2 + a\ddot{a})(1 + 2\phi - 2\Psi) + a^2H(6\phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\phi_{,00} + k^2\phi] + k_i k_j(\Psi + \phi). \quad (7.71)$$

Portanto, a expressão do tensor de Ricci se torna:

$$\begin{aligned} R = (-1 + 2\Psi) & \left[-\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Psi - 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\phi_{,0}) \right] \\ & + \left(\frac{1 - 2\phi}{a^2}\right) \left[3(2a^2H^2 + a\ddot{a})(1 + 2\phi - 2\Psi) \right. \\ & \left. + a^2H(6\phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\phi_{,00} + k^2\phi \right] + k^2(\Psi + \phi). \end{aligned} \quad (7.72)$$

Inicialmente, note que a parte de ordem zero de R é identificada (através do agrupamento dos termos) como $6(H^2 + \ddot{a}a)$ e, para se obter a parte de primeira ordem δR , se deve aplicar a propriedade distributiva nos termos acima e manter apenas os de primeira ordem em Ψ e ϕ . O resultado é:

$$\delta R = -12\Psi \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + 2\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Psi + 6\phi_{,00} - 6H(\Psi_{,0} - 4\phi_{,0}) + 4\left(\frac{k}{a}\right)^2 \phi. \quad (7.73)$$

7.5.4 As componentes das equações de Einstein

A equação de Einstein $G_\nu^\mu = 8\pi GT_\nu^\mu$ é composta por 10 componentes (8 delas são nulas ou redundantes em primeira ordem). A primeira componente não-trivial é a componente tempo-tempo:

$$G_0^0 = g^{00} \left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right) = (-1 + 2\Psi)R_{00} - \frac{R}{2}. \quad (7.74)$$

Um dos índices acima foi modificado multiplicando G_{00} por g^{00} (lembre-se que a componente g^{0i} desaparece). Note também que se fez: $g_{00}g^{00} = 1$. A partir disso, se pode utilizar as expressões da componente tempo-tempo do tensor de Ricci R_{00} e do escalar de Ricci perturbado δR para calcular a parte de primeira ordem do tensor de Einstein:

$$\delta G_0^0 = -6H\Phi_{,0} + 6\Psi H^2 - 2\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Phi. \quad (7.75)$$

A equação de Einstein iguala G_0^0 com $8\pi GT_0^0$ e, portanto, para deduzir a primeira equação de evolução para Ψ e Φ é necessário calcular a parte de primeira ordem de T_0^0 . Como se sabe, o termo T_0^0 representa a densidade de energia de todas as partículas no Universo e a contribuição de cada espécie é uma integral sobre a função de distribuição. Além disso, a expressão do tensor de energia-momento em termos dos momentos permanece válida:

$$T_0^0 = - \sum_s g_s m_s \left\{ \int \frac{1}{(2\pi)^3} [f_s(p, x, t) d^3p] \right\}. \quad (7.76)$$

Para o caso dos bárions e da matéria escura (entes não-relativísticos), temos:

$$(T_0^0)_{s=b=c} \approx -\rho_s(1 + \delta_s). \quad (7.77)$$

$$(\delta T_0^0)_{s=b} = -\rho_b \delta_b. \quad (7.78)$$

$$(\delta T_0^0)_{s=c} = -\rho_c \delta_c. \quad (7.79)$$

Para os fótons:

$$(T_0^0)_{s=\gamma} = -\rho_\gamma(1 + 4\theta_0) \rightarrow (\delta T_0^0)_{s=\gamma} = -\rho_\gamma \delta_\gamma. \quad (7.80)$$

Por fim, para os neutrinos:

$$(T_0^0)_{s=\nu} = -\rho_\nu(1 + 4N_0) \rightarrow (\delta T_0^0)_{s=\nu} = -\rho_\nu \delta_\nu. \quad (7.81)$$

Voltando às equações de Einstein, se pode igualar a expressão (7.75) com $8\pi G$ vezes a parte de primeira ordem do componente tempo-tempo do tensor momento de energia, composta pela soma das equações (7.78), (7.79), (7.80) e (7.81). Dividir ambos os lados por 2 resulta em:

$$k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \left(\Phi' - \frac{a'}{a} \Psi \right) = -4\pi G a^2 (\rho_b \delta_b + \rho_c \delta_c + \rho_\gamma \delta_\gamma + \rho_\nu \delta_\nu), \quad (7.82)$$

que é a primeira equação de evolução para Ψ e Φ . No limite sem expansão (quando $a =$ constante), a relação acima se reduz à equação de Poisson para a gravidade (no espaço de Fourier): perceba que o lado esquerdo é $-\nabla^2 \Phi$ (pois: $ik = i\partial/\partial x$) enquanto o lado direito é $4\pi G a^2 \delta\rho$.

Para obter a segunda equação de evolução para Ψ e Φ , considere a parte espacial do tensor de Einstein G_ν^μ :

$$G_j^i = g^{ik} \left(R_{kj} - \frac{g_{kj}}{2} R \right) = \frac{\delta^{ik}(1 - 2\phi)}{a^2} R_{kj} - \frac{\delta_j^i}{2} R. \quad (7.83)$$

A maioria dos termos em R_{kj} são proporcionais a δ_{kj} . Desse modo, quando o tensor for contraído com δ_{ik} aparecerá uma série de termos proporcionais a δ_{ij} , além do último termo (que é proporcional a R). Portanto, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$G_j^i = F(\Phi, \Psi) \delta_j^i + \frac{k_i k^j (\Phi + \Psi)}{a^2}, \quad (7.84)$$

em que $F(\Psi, \Phi)$ é composta por doze termos, que são proporcionais a δ_j^i e que, portanto, todos contribuem para o traço de G_j^i . Para facilitar os cálculos, considere a parte longitudinal (sem traço) de G_j^i , que pode ser extraída contraindo G_j^i com o termo $\hat{k}_i \hat{k}^j - (1/3)\delta_i^j$. Este procedimento resulta em:

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_i^j\right) G_j^i = \left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta_i^j\right) \left(\frac{k_i k^j (\Phi + \Psi)}{a^2}\right) = \frac{2k^2}{3a^2}(\Phi + \Psi). \quad (7.85)$$

Na mesma linha, as componentes espaciais do tensor energia-momento são:

$$T_j^i = \sum_s g_s \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{p^i p_j}{E_s(p)}\right) f_s(p, x, t) \right] d^3p. \quad (7.86)$$

Por outro lado, podemos observar que a integral atua na parte quadrupolar da distribuição de temperaturas, mas como a parte de ordem zero de f_s não tem quadrupolo, o termo fonte é de primeira ordem e diferente de zero apenas para fótons e neutrinos, ou seja, é proporcional a θ_2 e N_2 . Para a segunda equação de Einstein, portanto, se pode igualar (7.85) com $8\pi G$ vezes as tensões anisotrópicas do fóton e dos neutrinos (sem massa) para obter:

$$k^2(\Phi + \Psi) = 32\pi G a^2(\rho_\gamma \theta_2 + \rho_\nu N_2), \quad (7.87)$$

que é um resultado extremamente importante e útil: os dois potenciais gravitacionais Ψ e Φ são iguais e opostos, a menos que os fótons ou neutrinos tenham momentos de quadrupolo apreciáveis. Na prática, o quadrupolo θ_2 de fótons contribui pouco para esta soma, porque é muito pequeno durante o tempo em que os fótons tiveram densidade de energia apreciável (durante o acoplamento forte). Apenas os neutrinos sem colisão têm um momento de quadrupolo apreciável no início, quando a radiação dominava o Universo (DODELSON; SCHMIDT, 2021). As expressões (7.82) e (7.87) são as duas equações de Einstein desejadas para as perturbações Ψ e Φ , perceba que ambas as equações não contêm derivadas de segunda ordem atuando em Ψ ou Φ , o que quer dizer que Ψ e Φ não representam potenciais gravitacionais newtonianos.

7.6 As equações de Einstein-Boltzmann em tempos primitivos

No intuito de conectar a perturbação às variáveis de perturbação são necessárias condições iniciais para todas essas grandezas (considerando que as perturbações da inflação são adiabáticas). Uma vez que as perturbações fracionárias em todas as espécies são as mesmas, todas elas são determinadas por Ψ e se torna necessário somente descobrir como essa relação ocorre em tempos primitivos.

Considerando, inicialmente, as equações de Boltzmann em momentos muito iniciais após o fim da inflação (ou seja, quando $\eta > 0$, mas pequeno) de modo que, para qualquer modo k de interesse, tenha-se $k\eta \ll 1$ ou, equivalentemente, $k/aH \ll 1$. Essas desigualdades

levam imediatamente a várias simplificações importantes. A partir disso, considere a equação de Boltzmann para fótons:

$$\theta' + (ik\mu)\theta = -\Phi' - (ik\mu)\Psi - \eta' [\theta_0 - \theta(\hat{p}) + \mu u_b - P_2(\mu)\Pi], \quad (7.88)$$

em que $P_2(\mu)$ é o segundo polinômio de Legendre e Π é dado por:

$$\Pi = \theta_2 + \theta_{P,2} + \theta_{P,0}. \quad (7.89)$$

Note que um dos termos acima é $P_2\theta_2/2$, que representa a dependência angular do espalhamento Compton. As outras partes de Π representam o fato de que o campo de temperaturas também está acoplado ao campo de polarização θ_P . É importante ressaltar que θ_P é originado apenas pelo quadrupolo θ_2 da distribuição de temperaturas (e, portanto, por nenhum dos outros momentos de temperatura) (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Conforme visto acima, o primeiro termo é de ordem θ/η , enquanto o segundo é de ordem $k\theta$. Então o primeiro é maior que o segundo por um fator de ordem $1/(k\eta)$, que, por suposição, é muito maior que 1 (já que $k\eta \ll 1$). De maneira semelhante, se pode argumentar que todos os termos das equações de Boltzmann multiplicados por k podem ser negligenciados em tempos primitivos: isso também se aplica aos termos em u_b e Π . Fisicamente, isso significa que, nos primeiros tempos, todas as perturbações de interesse tinham comprimentos de onda muito grandes (o que faz os modos k serem muito pequenos). Um observador hipotético, então, que vê apenas fótons de dentro de seu horizonte causal, verá um céu uniforme. Dessa maneira, os multipolos mais altos (θ_1, θ_2 , etc) são muito menores que o monopolo θ_0 .

Portanto, as perturbações nas temperaturas dos fótons e neutrinos evoluem de acordo com as seguintes condições iniciais (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\theta'_0 + \Phi' = 0, \quad (7.90)$$

$$N'_0 + \Phi' = 0. \quad (7.91)$$

Os mesmos argumentos podem ser aplicados às distribuições de matéria, de modo que as superdensidades de matéria escura e de bárions se tornam:

$$\delta'_c = -3\Phi', \quad (7.92)$$

$$\delta'_b = -3\Phi'. \quad (7.93)$$

Além disso, sabemos também que, fora do horizonte comóvel, a gravidade é a única força relevante e esta é a razão pela qual a matéria escura e os bárions seguem praticamente a mesma equação de superdensidade: a gravidade age da mesma maneira sobre uma partícula de matéria escura ou sobre um próton. Como as velocidades são

menores que as superdensidades por um fator de ordem $k\eta$, podem ser zeradas inicialmente. Com base na equação (7.82) e nas condições iniciais acima, chegamos a:

$$\eta\Phi'' + 4\Phi' = 0, \quad (7.94)$$

cujas soluções tem a forma:

$$\Phi = 2\theta_{r,0}. \quad (7.95)$$

Assim, tanto $\theta_{r,0}$ como seus constituintes θ_0 e N_0 permanecem constantes no tempo. Portanto, para perturbações adiabáticas, as perturbações fracionárias de densidade e velocidade se tornam:

$$\frac{\delta\rho_s}{\rho_s} = \frac{\delta\rho}{\rho} \rightarrow \theta_0(k, \eta_i) = N_0(k, \eta_i) \rightarrow \Phi(k, \eta_i) = 2\theta_0(k, \eta_i), \quad (7.96)$$

onde as condições iniciais advêm de um momento inicial η_i . As condições iniciais para a matéria (tanto δ_c quanto δ_b) também se tornam simples uma vez que as perturbações são puramente adiabáticas. Combinando as condições (7.90), (7.91), (7.92) e (7.93) e integrando no tempo comóvel, tem-se que:

$$\int \delta'_c d\eta = -3 \int \Phi' d\eta = 3 \int \theta_0 d\eta \rightarrow \delta_c(k, \eta) = 3\theta_0(k, \eta) + Constante(k) \quad (7.97)$$

para a superdensidade de matéria escura. A equação para a superdensidade de bárions é idêntica a esta, inclusive na constante, que é nula. As perturbações adiabáticas devem ter uma proporção uniforme entre matéria e radiação, que é dada por:

$$\frac{n_c}{n_\gamma} = \frac{\bar{n}_c(1 + \delta_c)}{\bar{n}_\gamma(1 + 3\theta_0)}. \quad (7.98)$$

O pré-fator (a razão de densidades numéricas de ordem zero) é uma constante no espaço e no tempo. Com base nisso, para que a razão entre densidade numérica de matéria e radiação seja uniforme, a combinação dentro dos parênteses deve ser independente do espaço. Portanto, as perturbações devem somar zero: $\delta_c = \delta_b = 3\theta_0$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Além disso, se necessita das condições iniciais para as velocidades e momentos de dipolo da matéria e da radiação, respectivamente. Essas condições iniciais são:

$$\theta_1(k, \eta) = N_1(k, \eta) = \frac{iu_b(k, \eta)}{3} = \frac{iu_c(k, \eta)}{3} = \frac{-k\Phi(k, \eta)}{6aH}. \quad (7.99)$$

Com isso, a equação da perturbação de curvatura C em escalas de super-horizonte durante o domínio da radiação se torna:

$$C = \frac{3aH}{k}\theta_1 - \Psi = -\frac{3aH}{k}\frac{-k\Phi}{6aH} \rightarrow C = -\frac{3}{2}\Psi, \quad (7.100)$$

como era de se esperar para $\Phi = -\Psi$.

Como pudemos constatar, a inflação é um fenômeno cosmológico de complexo entendimento. Apesar de já termos apresentado o ferramental matemático suficiente para entendermos o modelo inflacionário com vistas ao estudo da CMB, é importante destacar que existem outros aspectos da inflação que precisam ser melhor entendidos e que carecem de comprovações experimentais.

*OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO*

*CAPÍTULO 08
A EVOLUÇÃO “LINEAR” DO UNIVERSO*

“Então se lembre: olhe para as estrelas, e não para os seus pés”.
(Stephen Halking)

8 A evolução “linear” do Universo

8.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“A evolução “linear” do Universo” objetiva descrever, baseando-se na Teoria do Crescimento Linear das Estruturas, como se deu a evolução das grandes e pequenas escalas cosmológicas (utilizando ferramentas matemáticas como a função de transferência e o fator de crescimento). Este capítulo é necessário para entendermos melhor as consequências da inflação em diferentes escalas cosmológicas.

8.2 Comentários iniciais

De posse do sistema de equações a ser resolvido e das condições iniciais para as perturbações, agora podemos estudar as heterogeneidades na matéria e as anisotropias nos fótons. As perturbações da matéria escura podem ser resumidas em perturbações na densidade δ_c e na velocidade mássica u_c , que se encontram acopladas a todas as outras perturbações através da interação gravitacional. Em função disso, as perturbações na matéria escura dependem muito pouco dos detalhes das perturbações da radiação: em tempos tardios, quando o Universo era dominado pela matéria, os potenciais Φ e Ψ , que mediam o efeito da gravidade, eram independentes da radiação.

Por outro lado, em tempos primitivos, as perturbações na radiação (que era o ente dominante nessas épocas) eram relativamente simples, de modo que todos os momentos além do monopolo e do dipolo podem ser desprezados. Porém, no caso da matéria, a recíproca não é verdadeira: para tratarmos adequadamente as anisotropias na radiação, se torna necessário sabermos como as perturbações da matéria se comportaram. Desse modo, a ideia é obtermos uma previsão para o espectro de potência linear da matéria a partir da evolução dos modos de Fourier. Com base nesse espectro de potência inicial (gerado pela inflação) se consegue construir o espectro de potência da matéria em função do redshift z .

8.3 Sobre o crescimento das estruturas

A instabilidade gravitacional é fundamentalmente responsável pela estrutura do Universo: à medida em que o tempo evolui, a matéria se acumula em regiões superdensas através da força de atração gravitacional. Apesar das superdensidades iniciais serem de amplitude muito pequena (da ordem de 10^{-4} , como vimos), a matéria que se acumulou ao longo da idade do Universo foi suficiente para formar as estruturas significativas observadas atualmente.

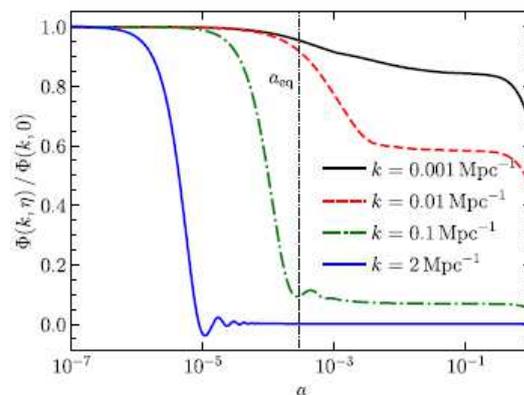
Além da força gravitacional (que é atrativa), existem dois efeitos antagônicos: primeiro, a expansão do cosmos, que tende a separar partículas de todas as espécies, e quanto mais rápida for a expansão do Universo, mais lento será o crescimento das estruturas. Em um Universo sem expansão, esperamos que uma pequena superdensidade cresça exponencialmente rápido sob a ação da gravidade (se não houver perturbações de pressão). Em contraponto, em um Universo em expansão, o crescimento exponencial é desacelerado para um crescimento em potências ou até mesmo em logarítmico ao longo do tempo.

O segundo efeito é específico para bárions e fótons, que exercem pressão: a pressão aumenta proporcionalmente à densidade e o gás tende a se mover na direção da pressão mais baixa (isto é, na direção oposta ao gradiente de pressão). Isso significa que a superdensidade de bárions não acumula matéria tão rapidamente quanto a superdensidade de matéria escura, já que a pressão (maior) sobre o ambiente tende a desacelerar ou interromper o acúmulo de gás. Os pontos-chave do crescimento gravitacional das estruturas são: o super-horizonte (onde: $k\eta \ll 1$), o cruzamento do horizonte (em que: $k\eta = 1$) e o sub-horizonte (quando: $k\eta \gg 1$), com e sem considerar as perturbações de radiação.

8.3.1 As três etapas da evolução

A evolução das perturbações cosmológicas divide-se naturalmente em três estágios. A Figura 15 mostra a evolução linear do potencial gravitacional Φ , em função do fator de escala, para modos k de comprimentos de onda longo, médio e curto (normalizados para o valor do potencial em tempos iniciais).

Figura 15 – Gráficos de Φ x a para diferentes valores de k .



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

Inicialmente percebe-se que, em tempos primitivos, quando $k\eta \ll 1$, (lembrando que o tempo comóvel η é positivo após a inflação), todos os modos estão fora do horizonte e o potencial Φ é constante. Em tempos intermediários, porém, duas coisas acontecem: os comprimentos de onda entram no horizonte e o Universo evolui da dominação da radiação

(quando: $a \ll a_{eq}$) para a dominação da matéria (quando: $a \gg a_{eq}$). Note que a ordem dessas épocas (onde a_{eq} representa o fator de escala na época do cruzamento do horizonte) afeta muito o potencial (que diminui consideravelmente após esse período). Os modos de grande escala, que entram no horizonte bem depois de a_{eq} , evoluem de forma muito diferente dos modos de pequena escala, que entram no horizonte antes da igualdade $a = a_{eq}$. Finalmente, observe que, nos últimos tempos, todos os modos evoluem de forma idêntica, permanecendo constantes durante o domínio da matéria antes de decair quando a energia escura começa a influenciar consideravelmente.

Nesse sentido, podemos observar que a distribuição da matéria ocorre predominantemente em épocas tardias, no terceiro estágio de evolução, quando todos os modos estão evoluindo de forma idêntica. Para relacionar o potencial Φ durante esses tempos com a perturbação da curvatura primordial $C(k)$ gerada durante a inflação, se deve escrever que (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\Phi(k, a) = \frac{3}{5}C(k)T(k)D(a), \quad (8.1)$$

onde $T(k)$ é a função de transferência e $D(a)$ é o fator de crescimento. Em síntese, a função de transferência descreve a evolução das perturbações através das épocas de cruzamento do horizonte e da transição dos domínios radiação/matéria, enquanto o fator de crescimento descreve o crescimento das estruturas independente dos modos em tempos tardios. Observe na Figura 15 que mesmo as perturbações de maior comprimento de onda (menor valor de k) diminuem ligeiramente à medida em que o Universo passa pela época da igualdade ($a = a_{eq}$). Com isso, a função de transferência é definida de modo que, em grandes escalas, seja igual a 1. Então:

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(k, a_{tarde})}{\Phi_{larga\ escala}(k, a_{tarde})}C(k)T(k)D(a), \quad (8.2)$$

onde a_{tarde} denota uma época profunda na dominação da matéria, cuja solução em grande escala é o potencial primordial Φ diminuído por uma pequena quantidade (que representa a solução do potencial gravitacional para modos que entraram no horizonte na época dominada pela matéria).

Uma segunda observação importante é tangente ao fator de crescimento: a razão entre o potencial Φ e seu valor logo após o regime da função de transferência é definida como:

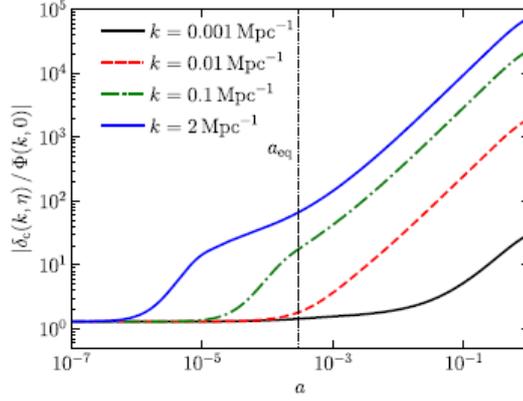
$$D(a) \equiv \frac{D_+ a}{a} = \frac{\Phi(k, a)}{\Phi(k, a_{tarde})}, \quad (8.3)$$

para os casos em que $a > a_{tarde}$. Nessa expressão, o termo D_+ é chamado de fator de crescimento. Durante o domínio da matéria, o potencial é constante, então $D_+(a) = a$ nesse caso. Com essas convenções, aplicando-se (8.2) e (8.3) em (8.1), vem:

$$\Phi(k, a) = \frac{3}{5}C(k)T(k)\frac{D_+(a)}{a}. \quad (8.4)$$

A evolução da superdensidade da matéria escura segue a evolução de Φ , conforme ilustrado na Figura 16 (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Figura 16 – A evolução da perturbação de densidade de matéria escura em função do fator de escala para diferentes valores de k .



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

Essa figura mostra a evolução das perturbações da densidade da matéria escura δ_c na cosmologia fiducial. Perceba que a amplitude de cada modo começa a crescer na entrada do horizonte. Observe também que, bem depois de $a = a_{eq}$, todos os modos de sub-horizonte evoluem de forma idêntica e aumentam como o fator de crescimento $D_+(a)$. Durante a dominação da matéria, antes de a matéria escura se tornar relevante, tinha-se: $D_+(a) = a$. Em tempos tardios vemos uma ligeira tendência linear devido ao início da expansão acelerada.

Na mesma direção, note que, em tempos tardios – quando o potencial é constante e todos os modos estão dentro do horizonte – a superdensidade cresce no tempo, ou seja: $\delta_c(k, a) \propto D_+(a)$. Esse fato explica a nomenclatura: D_+ descreve o crescimento das perturbações de matéria em tempos tardios, que é totalmente de se esperar, pois à medida em que o tempo evolui, as regiões superdensas atraem cada vez mais matéria, tornando-se assim mais superdensas.

Em tempos tardios, os bárions evoluem de forma semelhante à matéria escura e podem ser descritos juntos na forma de uma superdensidade total de matéria δ_m (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Para expressar o espectro de potência da distribuição da matéria em termos do espectro de potência primordial gerado durante a inflação, devemos usar a equação de Poisson generalizada, no limite sem radiação (ou seja, para grandes valores de k) para relacionar a superdensidade de matéria δ_m com o potencial Φ em tempos tardios. Essa expressão toma a forma de uma equação de Einstein:

$$k^2 \Phi(k, a) = 4\pi G [\rho_m(a) a^2 \delta_m(k, a)], \quad (8.5)$$

onde:

$$\rho_m = \frac{\Omega_m \rho_c}{a^3}, \quad (8.6)$$

$$\delta_m(k, a) = \left(\frac{2ak^2}{3\Omega_m H_0^2} \right) \Phi(k, a), \quad (8.7)$$

na época em que $a > a_{\text{tarde}}$ e que $k \gg aH$. Essa expressão, juntamente com (8.4), nos permite relacionar a superdensidade no Universo tardio com o potencial primordial:

$$\delta_m(k, a) = \left(\frac{2ak^2}{5\Omega_m H_0^2} \right) C(k)T(k) \frac{D_+(a)}{a}. \quad (8.8)$$

Essa equação vale independentemente de como a perturbação inicial $C(k)$ foi gerada, desde que seja uma perturbação adiabática. Como a perturbação $C(k)$ é extraída de uma distribuição Gaussiana com média zero, então o seu espectro de potência $P_C(k)$ é dado pela expressão (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$P_C(k) \equiv \left(\frac{2\pi^2}{k^3} \right) A_s \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s-1}, \quad (8.9)$$

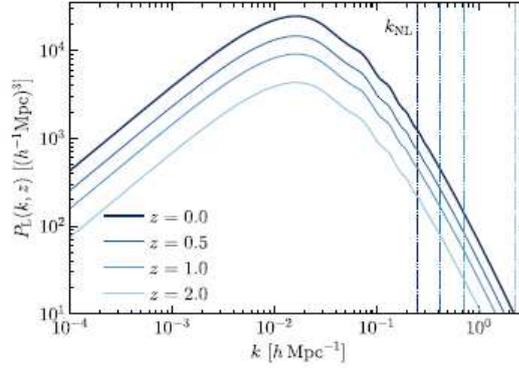
onde A_s (o espectro de potência primordial) representa a variância das perturbações da curvatura em um intervalo de número de onda logarítmico centrado em torno de uma escala de referência k_p e n_s é o índice espectral escalar. A escala de referência é uma convenção que geralmente é determinada como a escala mais bem restrita por um determinado conjunto de observações (como, por exemplo, as anisotropias da CMB).

A equipe do satélite Planck adota $k_p = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$ e, na cosmologia fiducial, temos: $A_s \approx 2,1 \times 10^{-9}$. Com base nisso, o espectro de potência linear da matéria em tempos tardios é (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$P_L(k, a) = \left(\frac{8\pi^2}{25} \right) \left(\frac{A_s}{\Omega_m^2} \right) D_+^2(a)T^2(k) \left(\frac{k^{n_s}}{H_0^4 k_p^{n_s-1}} \right). \quad (8.10)$$

Observe que o espectro de potência tem dimensões de (comprimento)³ e que a equação acima implica que $P_L(k) \propto k^{n_s}$ em grandes escalas, onde: $T(k) = 1$. A Figura 17 mostra o espectro de potência da matéria linear na cosmologia fiducial, em diferentes redshifts. As escalas à esquerda das linhas verticais, que indicam $k_{NL}(z)$ para cada um dos redshifts mostrados, ainda estão evoluindo de maneira aproximadamente linear em cada redshift. Nesse gráfico, enquanto em grandes escalas observamos o comportamento esperado, em pequenas escalas o espectro de potência se inverte: o modo de pequena escala (com $k = 2h\text{Mpc}^{-1}$) entra no horizonte bem antes da igualdade matéria/radiação. Além disso, se sabe que durante a época de radiação o potencial decai, então a função de transferência é muito menor que 1: o efeito disso nas perturbações da matéria é o retardo no crescimento das perturbações, que começam em 10^{-5} (após o modo ter entrado no horizonte) e terminam em 10^{-4} (quando o Universo se torna dominado pela matéria). Os modos que entram no horizonte ainda mais cedo sofrem mais supressão.

A partir disso, se pode inferir que o espectro de potência é uma função decrescente de k em pequenas escalas e isso leva à constatação de que haverá uma inversão no

Figura 17 – A evolução de P_L em função de k para diferentes valores de redshift z


Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

comportamento do espectro de potência em uma escala k_{eq} correspondente àquela que entra no horizonte na igualdade matéria/radiação. Medir essa escala nos permite restringir a quantidade de matéria no Universo. Outra escala importante é a escala k_{NL} acima da qual não podem ser ignoradas as não-linearidades. Para essa escala, se pode usar a variância de perturbações de densidade (lineares) $\Delta_L^2(k)$ geradas por modos dentro de um número de onda logarítmico $d(\ln k)$ centrado em torno de k (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\Delta_L^2(k) = \frac{1}{\epsilon(2\pi)^3} \int_{|\ln k' - \ln k| < \epsilon} P_L d^3 k' \rightarrow \Delta_L^2(k) = \frac{P_L(k, a) k^3}{2\pi^2}, \quad (8.11)$$

onde ϵ é um parâmetro de ajuste às incertezas das medidas. A integral angular resulta em 4π e os números de onda considerados são infinitesimais. Com base em (8.11), podemos inferir que um regime onde $\Delta_L^2(k) \ll 1$ corresponde a pequenas heterogeneidades, enquanto que $\Delta_L^2(k)$ maiores ou da ordem de 1 indica perturbações não-lineares. Quando plotado em função de $\ln(k)$, a variância $\Delta_L^2(k)$ imediatamente fornece em quais escalas se esperam flutuações significativas de densidade.

Resolver a condição $\Delta_L^2(k_{NL}, a) \sim 1$ para k_{NL} produz $k_{NL}(a = 1) \sim 0,25 h \text{Mpc}^{-1}$ hoje (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Em épocas anteriores, a estrutura não era tão evoluída, então a escala não-linear era menor ou, equivalentemente, o termo $k_{NL}(a)$ era maior no passado (representado pelas linhas verticais tracejadas na figura acima). O espectro de potência mostrado acima é o espectro de potência linear. Em escalas que se aproximam de k_{NL} , esta é apenas uma quantidade hipotética, e não se pode comparar diretamente $P_L(k, a)$ com a distribuição da matéria.

8.3.2 A hierarquia de Boltzmann

Como todos os constituintes da matéria escura são acoplados pela gravidade, em princípio, estes formam um conjunto completo de equações de Boltzmann e um par de equações de Einstein. No entanto, para uma compreensão qualitativa, esse conjunto completo de equações não é necessário: no início (antes da recombinação, em: $a = a_*$), a

distribuição de fótons pôde ser caracterizada por apenas dois momentos, o monopolo θ_0 e o dipolo θ_1 , e todos os outros momentos foram desprezados porque os fótons estavam fortemente acoplados ao plasma de prótons/elétrons. Após o desacoplamento, isso deixa de ser verdade e, para caracterizar completamente a distribuição de fótons, se torna necessário considerarmos os momentos θ de ordem superior. No entanto, para fins de distribuição de matéria, o comportamento dos fótons após a recombinação ($a = a_*$) é irrelevante, uma vez que, naquela época (na era da dominação da matéria), o potencial era dominado pela matéria escura. Diante disso, se pode desprezar todos os momentos superiores dos fótons (e considerar somente o monopolo e o dipolo), quando se estiver trabalhando com a evolução da distribuição da matéria.

Nessa linha, os multipolos superiores para os neutrinos também podem ser desprezados, por complicarem o tratamento analítico, mas, como os neutrinos fluem livremente (diferentemente dos fótons) em vez de serem fortemente acoplados, isso torna os resultados mais imprecisos: apesar de se desprezar os multipolos superiores dos neutrinos, o resultado é ainda mais preciso do que se os neutrinos fossem negligenciados por inteiro (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Assim, podemos seguir com a análise do monopolo $\theta_{r,0}$ e do dipolo $\theta_{r,1}$ totais de radiação (que não devem ser confundidos com as da perturbações de temperatura dos fótons θ_0 e θ_1). Ao desprezar os momentos de radiação mais altos, as equações de Boltzmann para neutrinos e fótons tornam-se idênticas e, além disso, as distribuições de fótons e neutrinos apresentam as mesmas condições iniciais, o que as faz poderem ser combinadas. Complementando-as com as equações para a matéria escura, obtemos o seguinte conjunto de equações de Einstein-Boltzmann:

$$\theta'_{r,0} + k\theta_{r,1} = -\Phi', \quad (8.12)$$

$$\theta'_{r,1} - \frac{k}{3}\theta_{r,0} = -\frac{k}{3}\Phi, \quad (8.13)$$

$$\delta'_c + iku_c = -3\Phi', \quad (8.14)$$

$$u'_c + \frac{a'}{a}u_c = ik\Phi. \quad (8.15)$$

As duas primeiras condições acima foram obtidas utilizando a equação de Boltzmann para fótons e aproximando os termos para o regime de acoplamento forte, o que permite eliminar as perturbações bariônicas (que é uma excelente aproximação, pois os bárions são mantidos quase uniformes nos primeiros tempos por meio de seu forte acoplamento aos fótons).

Para fechar o conjunto de equações para a densidade da matéria escura é necessária uma equação para o potencial gravitacional Φ . Nesse sentido, se sabe que a aproximação $\Psi \rightarrow -\Phi$ é válida no limite em que não há momentos quadrupolares. Uma vez que algumas componentes das equações de Einstein são redundantes, há várias opções para uma equação relativa às superdensidades de radiação e matéria. Por exemplo, se pode

utilizar a componente tempo-tempo:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2(\rho_c\delta_c + 4\rho_r\theta_{r,0}). \quad (8.16)$$

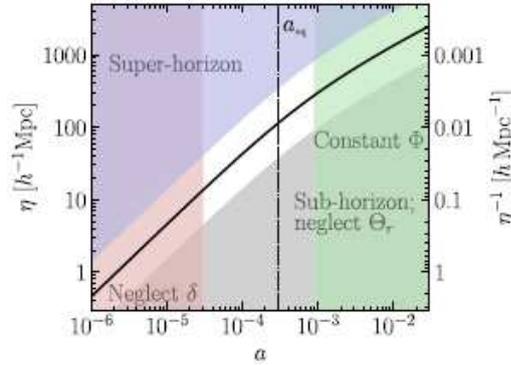
Nesse ponto, perceba que fizemos $\Psi = -\Phi$, negligenciamos a contribuição de matéria (bárions) e inserimos as contribuições de neutrinos e fótons no potencial. Com base nisso, torna-se conveniente trabalhar com a equação que não apresenta derivadas de tempo comóvel:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2(\rho_c\delta_c + 4\rho_r\theta_{r,0} + \left(\frac{3aH}{k}\right)(i\rho_c u_c + 4\rho_r\theta_{r,1}). \quad (8.17)$$

Ambas as equações nos serão úteis em vários momentos, embora apenas uma seja necessária para fechar o conjunto de equações para as cinco variáveis de nosso interesse: δ_c , u_c , $\theta_{r,0}$, $\theta_{r,1}$ e Φ . Nesse estágio, a maneira mais direta de proceder é resolver numericamente o conjunto de cinco equações acopladas.

A partir da dificuldade de se obter soluções analíticas para essas equações, se pode tomar alguns limites que reduzam o conjunto completo de cinco equações para duas ou três mais gerenciáveis (esses limites serão válidos apenas para certas escalas e em determinados momentos). Portanto, devemos juntar essas soluções analíticas para obter uma função de transferência $T(k)$ razoável para todos os modos k .

Figura 18 – A evolução de η em função de a .



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

Considere a Figura 18, que representa esquematicamente os regimes físicos da função de transferência. As regiões sombreadas mostram diferentes regimes onde existem expressões analíticas derivadas de (8.2) e (8.3). A lacuna (branca) no centro mostra que não existem soluções analíticas para descrever a evolução completa dos modos de escala intermediária. A curva monotonicamente crescente que vai do canto inferior esquerdo até o canto superior direito representa o horizonte comóvel $\eta(a)$, e o eixo à esquerda aumenta com o tempo e é igual a cerca de $110h^{-1}\text{Mpc}$ na época da igualdade matéria-radiação. O eixo da direita mostra o número de onda correspondente que cruza o horizonte ($k = 1/\eta$).

O valor de um campo aleatório no espaço de Fourier $X(k)$ quantifica a correlação entre pares de pontos separados por uma distância de $r = 2\pi/k$ e isso decorre diretamente

do comportamento harmônico da exponencial na transformada de Fourier (teorema de Wiener-Khinchin). No caso das perturbações cosmológicas, o comprimento de correlação $2\pi/k$ define uma escala comóvel com um importante significado causal: dizemos que um modo k está dentro ou fora do horizonte se sua escala comóvel $2\pi/k$ é, respectivamente, menor ou maior que o horizonte de partícula $c\eta$. Os modos dentro do horizonte (ou sub-horizonte) têm $k\eta > 2\pi/c$, enquanto os modos fora do horizonte (ou super-horizonte), têm $k\eta < 2\pi/c$. Uma vez que o horizonte de partículas é o comprimento máximo que uma partícula pode viajar desde o Big Bang, nenhuma física causal pode ocorrer em escalas de super-horizontes, portanto, esperamos que os correlacionadores observáveis evoluam apenas em escalas sub-horizontais (PETTINARI, 2016).

Ainda com base na Figura 18, podemos delimitar os seguintes regimes em que se pode empregar aproximações físicas (fazendo $2\pi/c = 1$): o regime do super-horizonte (quando $k\eta \ll 1$, que permite soluções exatas para toda a evolução temporal), a entrada no horizonte (quando η aumentou o suficiente para que $k\eta > 1$, que pode ser descrito em tempos tardios – modos de grande escala - ou em tempos primitivos durante a dominação da radiação – modos de pequena escala -) e a evolução do sub-horizonte dos modos de grande escala (que, para modos de pequena escala, se pode fazer outra aproximação, desprezando as perturbações de radiação).

No entanto, nenhuma dessas soluções aproximadas é capaz de descrever os modos que entram no horizonte em torno da igualdade matéria-radiação (a lacuna no centro da Figura 18). Isso se deve apenas à falta de limites simplificadores que se podem empregar: a física que descreve a evolução desses modos é a mesma dos modos de menor e maior escala (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

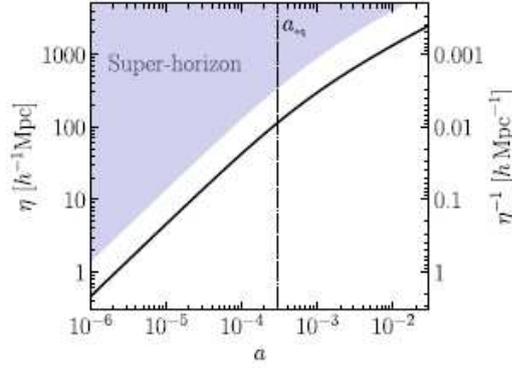
8.4 A evolução das grandes escalas

Em grandes escalas é possível obter soluções analíticas para o potencial tanto na transição matéria-radiação quanto no cruzamento do horizonte.

8.4.1 A evolução do super-horizonte

Considere, inicialmente, o regime de super-horizonte (região hachurada na Figura 19). Para modos que estão longe do horizonte (tais que $k\eta \ll 1$) em tal regime, se pode descartar todos os termos nas equações de evolução que dependem de k . Das equações (8.12) a (8.15), percebemos que, neste limite, a velocidade u_c e $\theta_{r,1}$ se desvinculam das equações de evolução, e isso reduz o número de equações para resolver de cinco para três. Reescrevendo as duas primeiras equações e a equação de Einstein para k desprezível,

Figura 19 – Representação da região de super-horizonte (hachurada em cinza).



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

tem-se que:

$$\theta'_{r,0} = -\Phi, \quad (8.18)$$

$$\delta'_c = -3\Phi, \quad (8.19)$$

$$3\frac{a'}{a} \left(\Phi' + \frac{a'}{a} \Phi \right) = 4\pi G a^2 (\rho_c \delta_c + 4\rho_r \theta_{r,0}). \quad (8.20)$$

Nesse ponto, note que as duas primeiras equações exigem que a diferença $\delta_c - 3\theta_{r,0}$ seja constante (que, para o caso de perturbações adiabáticas, é igual a zero). Desse modo, se pode usar a segunda e a terceira equações acima, com $\theta_{r,0} = \delta_c/3$ e com $y \equiv a/a_{eq} = \rho_m/\rho_r$ para se obter:

$$3\frac{a'}{a} \left(\Phi' + \frac{a'}{a} \Phi \right) = 4\pi G a^2 \rho_c \delta_c \left(1 + \frac{4}{3y} \right). \quad (8.21)$$

Por conveniência, a variável y será adotada como variável de evolução (em vez de η ou a). Como se está negligenciando os bárions, torna-se possível substituir o numerador da equação acima por ρ_c , uma correção simples para melhorar um pouco a precisão de nossas soluções analíticas.

Veja que (8.19) e (8.21) são duas equações de primeira ordem para δ_c e Φ , então vamos transformá-las em uma equação de segunda ordem e depois resolvê-la. Primeiro, porém, vamos reescrever as equações em termos da variável de evolução y . A derivada em relação a y está relacionada àquela em relação a η pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} = aH \frac{d}{dy}. \quad (8.22)$$

Aqui, utilizamos a definição de y e o fato de que $a' = a^2 H$. Em termos de y então, a equação de Einstein se torna:

$$y \frac{d\Phi}{dy} + \Phi = \frac{y}{2(y+1)} \left(1 + \frac{4}{3y} \right) \delta_c = \frac{3y+4}{6(y+1)} \delta_c. \quad (8.23)$$

Em geral, para transformar duas equações de primeira ordem em uma equação de segunda ordem, diferenciamos uma delas. Para simplificar, vamos reescrever a equação (8.23) como uma expressão de δ_c , diferenciar em relação a y e usar as condições de contorno para escrever a derivada $d\delta_c/dy$ como $-3d\Phi/dy$. Então:

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left[\frac{21y^2 + 54y + 32}{2y(y+1)(3y+4)} \right] \frac{d\Phi}{dy} + \left[\frac{1}{y(y+1)(3y+4)} \right] \Phi = 0, \quad (8.24)$$

que, se definirmos uma nova variável: $u \equiv y^3\Phi/\sqrt{y+1}$, se torna:

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \left[\frac{3}{2(1+y)} - \frac{2}{y} - \frac{3}{3y+4} \right] \frac{du}{dy} = 0. \quad (8.25)$$

Após a primeira integração, obtemos:

$$\frac{du}{dy} = A \left[\frac{y^2(3y+4)}{(1+y)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (8.26)$$

em que A é uma constante. Na segunda integração deve aparecer outra constante de integração; no entanto, em razão de $y^3 \rightarrow 0$ no início dos tempos, essa constante desaparece (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Por lógica semelhante, se pode determinar a constante A mesmo antes de realizar a integral. Lembrando da definição de u , integrando a expressão acima e observando que, para valores de y pequenos, o integrando se torna $4y^2$, teremos:

$$\Phi = \frac{4}{3}A \rightarrow A = \frac{3}{4}\Phi(0). \quad (8.27)$$

Logo, a solução completa de super-horizonte é:

$$\Phi(k, y) = \left(\frac{1}{10y^3} \right) (16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16) \Phi(k, 0), \quad (8.28)$$

que é a expressão final para o potencial em escalas de super-horizonte. Para pequenos valores de y essa expressão fornece: $\Phi = \Phi(0) = \text{constante}$, como era esperado (pois foram escolhidas as duas constantes de integração com essa condição). Para grandes valores de y , uma vez que o Universo se tornou dominado pela matéria, o termo y^3 entre parênteses domina, então $\Phi \rightarrow (9/10)\Phi(0)$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Assim, o potencial mesmo nas maiores escalas cai em 9/10 à medida que o Universo passa pela época da igualdade entre matéria e radiação.

Este resultado nos permite obter algumas relações muito úteis entre o potencial gravitacional do super-horizonte e a perturbação da curvatura $C(k)$. Conforme visto anteriormente: $\Phi = (2/3)C$ durante a dominação da radiação e agora se observa que Φ cai por um fator de 9/10 no domínio da matéria. Como C é sempre conservada fora do horizonte, tem-se: $\Phi = (9/10)(2/3)C$ no domínio da matéria (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Então, para resumir:

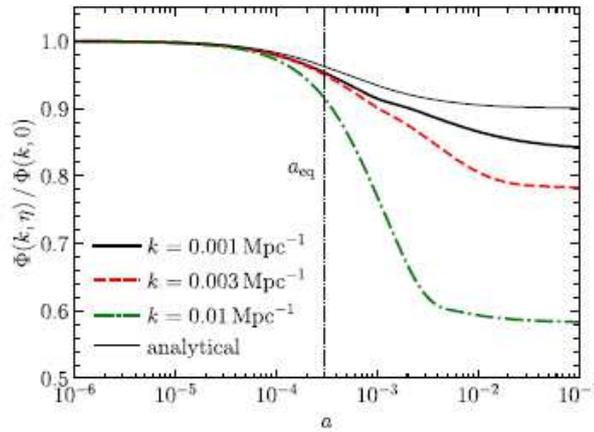
$$\Phi(k, \eta)_{\text{super-horizonte}} = \frac{2}{3}C \quad (\text{no domínio da radiação}). \quad (8.29)$$

$$\Phi(k, \eta)_{\text{super-horizonte}} = \frac{3}{5}C \quad (\text{no domínio da matéria}). \quad (8.30)$$

Durante o domínio da matéria, o potencial Φ nem sequer evolui dentro do horizonte, de modo que a relação $\Phi = (3/5)C$ permanece válida dentro do horizonte. Isso explica o fator $3/5$ incluído na definição da função de transferência $T(k)$.

Nesse ponto, considere a Figura 20, que mostra os comportamentos das soluções numérica e analítica para a evolução do potencial Φ , com foco nos modos k de larga escala que são comparáveis (ou maiores) que o horizonte até a época da recombinação.

Figura 20 – Evolução da perturbação Φ em função de a para diferentes valores de modos k .



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

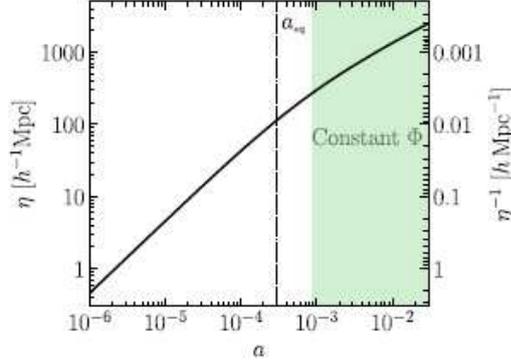
A linha sólida fina mostra o resultado analítico, que é válido apenas para modos muito maiores que o horizonte (e despreza os momentos de neutrinos e fótons com escalas angulares $l \geq 2$). Perceba que a solução analítica funciona razoavelmente bem nas maiores escalas (menores valores de k) e que os desvios são devidos principalmente ao quadrupolo de neutrinos N_2 que foi negligenciado no cálculo analítico (além disso, o quadrupolo N_2 também leva a Φ não ser exatamente igual e oposto a Ψ). Um fato interessante da solução analítica é que, embora seja verdade que os potenciais de grande escala sejam constantes nas épocas da matéria e da radiação, a transição entre as eras de matéria pura e radiação pura é bastante longa.

8.4.2 Sobre o cruzamento do horizonte

Uma característica interessante da imagem ilustrada na Figura 20 é que o potencial de grande escala (a solução numérica) se torna constante em tempos muito tardios (quando $a > 10^{-2}$). Nessa linha, se sabe que, para números de onda $k = 10^{-3}h\text{Mpc}^{-1}$, o modo entra no horizonte e que em $\eta \sim k^{-1} = 1000h^{-1}\text{Mpc}$, que corresponde a um fator de escala $a \sim 6 \times 10^{-3}$ na cosmologia fiducial. Este é o regime destacado na Figura 21, que

representa a evolução dos modos através da entrada no horizonte durante a dominação da matéria.

Figura 21 – Representação da região de cruzamento do horizonte (hachurada em verde).



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

O potencial Φ permanece constante à medida em que o modo cruza o horizonte (área verde) e este resultado é válido enquanto o Universo for dominado pela matéria (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Como Φ depende apenas das heterogeneidades da matéria, então se pode desprezar as duas equações de radiação: (8.12) e (8.13). Além das duas equações da matéria, tem-se a segunda das equações de Einstein, que é uma equação algébrica (o que significa que é possível, em princípio, eliminar as duas equações da matéria e ficar com um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem) e que, em geral, têm duas soluções. Como se sabe, durante a época da matéria, os potenciais de super-horizonte são constantes e, portanto, as condições iniciais para o problema são que o potencial seja constante ($\Phi' = 0$). Com base nisso, se mostrarmos que $\Phi = \text{constante}$ é uma das duas soluções gerais para o conjunto de equações dominadas pela matéria, então não será necessário conhecer o formato da outra solução (seria preciso ter esse conhecimento só se essa solução fosse crescente: $\Phi' > 0$, o que não é o caso). As condições iniciais garantem então que a solução constante será uma solução.

Diante disso, devemos verificar se o sistema de equações:

$$\delta'_c + ik u_c = 0, \quad (8.31)$$

$$u'_c + a H u_c = ik \Phi, \quad (8.32)$$

$$k^2 \Phi = \frac{3}{2} a^2 H^2 \left(\delta_c + \frac{3ia H u_c}{k} \right), \quad (8.33)$$

admite uma solução constante no tempo. Para fazermos isso, vamos explicitar δ_c na terceira equação para aplicar na primeira. Esse procedimento nos fornece, na era dominada pela matéria:

$$\left(\frac{2k^2}{3a^2 H^2} \right) \Phi' + \left(\frac{2k^2}{3aH} \right) \Phi - \left(\frac{3iaH}{k} \right) u'_c + \left(\frac{3ia^2 H^2}{2k} + ik \right) u_c = 0. \quad (8.34)$$

Nesse ponto, se percebe que há duas equações diferenciais de primeira ordem para Φ e u_c . A estratégia é transformar essas duas equações em uma equação de segunda ordem para Φ . Primeiro, se pode eliminar u'_c em (8.34) usando a equação da velocidade (8.32):

$$\left(\frac{2k^2}{3a^2H^2}\right)\Phi' + \left(\frac{iu_c}{2k} + \frac{2\Phi}{3aH}\right)\left(\frac{9a^2H^2}{2} + k^2\right) = 0. \quad (8.35)$$

Se a equação de segunda ordem for da forma $\alpha\Phi'' + \beta\Phi' = 0$, ou seja, se não tiver termos proporcionais a Φ , então $\Phi = \text{constante}$ é uma solução das equações (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Então, derivando a equação acima em relação a η , considerado apenas os termos proporcionais a Φ , descartando todos os termos proporcionais a derivadas de Φ e usando o fato de que $d[(aH)^{-1}]/d\eta = 1/2$ durante a dominação da matéria, tem-se que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{iu'_c}{k} + \frac{\Phi}{3}\right)\left(\frac{9a^2H^2}{2} + k^2\right) + \left(\frac{iu_c}{2k} + \frac{2\Phi}{3aH}\right)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{9a^2H^2}{2}\right) \\ = -\left(\frac{iaHu_c}{k} + \frac{2\Phi}{3}\right)(9a^2H^2 + k^2). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Note que a velocidade u_c foi reescrita na equação acima através de (8.32). No entanto, a expressão (8.34) mostra que o primeiro termo entre parênteses à direita é proporcional a Φ' . Portanto, não existem termos proporcionais a Φ e os potenciais constantes são, portanto, uma solução na era dominada pela matéria.

Os potenciais permanecem constantes enquanto o Universo for dominado pela matéria e, nessas épocas, as flutuações de potencial se equilibram delicadamente de modo a permanecerem constantes. Por outro lado, quando a energia escura passa a dominar (em $a > 0,1$), esse equilíbrio é destruído e os potenciais decaem. A partir desses argumentos, se pode inferir que a função de transferência (8.2) esteve muito próxima de 1 em todas as escalas que entraram no horizonte depois que o Universo se tornou dominado pela matéria, ou seja, é igual a 1 para todo $k \ll a_{eq}H(a_{eq})$.

A escala de números de onda associada a essas épocas é: $k_{eq} = 0,073 \text{ Mpc}^{-1}\Omega_m h^2 = 0,010 \text{ Mpc}^{-1}$. Na escala trabalhada, onde bárions e tensões anisotrópicas são negligenciados, a função de transferência $T(k)$ depende unicamente do quociente k/k_{eq} (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

8.5 A evolução das pequenas escalas

A descrição da evolução das perturbações de grande escala só foi possível porque os modos cruzaram o horizonte bem após a época da igualdade. Portanto, o problema é nitidamente dividido em: modos de super-horizonte que atravessam a época da igualdade e modos da era dominada pela matéria que atravessam o horizonte. Para os modos de pequena escala, se sabe que eles cruzam o horizonte quando o Universo está profundamente

na era da radiação. Dessa maneira, o problema se divide em: modos na era da radiação cruzando o horizonte e modos de sub-horizonte passando pela época da igualdade. Não é possível tratar analiticamente os modos que entraram no horizonte em torno da época da igualdade, no entanto, nada é fisicamente diferente nesses modos, eles simplesmente não são passíveis dos limites matemáticos aproximativos.

8.5.1 Mais sobre o cruzamento do horizonte

Quando o Universo foi dominado pela radiação, o potencial era determinado por perturbações na radiação. As perturbações da matéria escura são determinadas pelo potencial gravitacional, mas não influenciam no potencial Φ . Portanto, as perturbações de radiação e o potencial gravitacional afetam um ao outro; por outro lado, as perturbações da matéria não afetam o potencial, embora sejam impulsionadas por ele.

Para analisarmos as perturbações da matéria nesta época, portanto, devemos: primeiro, resolver as equações acopladas para $\theta_{r,0}$, $\theta_{r,1}$ e Φ e, em seguida, resolver a equação para a evolução da matéria usando o potencial como uma força motriz externa. Para resolver o potencial na era dominada pela radiação, deve-se eliminar os termos da fonte de matéria na equação de Einstein para obter:

$$\Phi = \left(\frac{6a^2 H^2}{k^2} \right) \left(\theta_{r,0} + \frac{3aH}{k} \theta_{r,1} \right), \quad (8.37)$$

já que, pela equação de Friedmann, temos $H^2 = 8\pi G\rho_r/3$ e $aH = 1/\eta$ durante a era da radiação. Diante desses fatos, podemos usar a equação acima para eliminar $\theta_{r,0}$ das equações de (8.12) e (8.13). Essas relações se tornam:

$$\frac{-3}{k\eta} \theta'_{r,1} + k\theta_{r,1} \left(1 + \frac{3}{k^2\eta^2} \right) = -\Phi \left(1 + \frac{k^2\eta^2}{6} + \frac{k^2\eta}{3} \right), \quad (8.38)$$

$$\theta'_{r,1} + \frac{1}{\eta} \theta_{r,1} = -\frac{k}{3} \Phi \left(1 - \frac{k^2\eta^2}{6} \right). \quad (8.39)$$

É possível transformar essas duas equações de primeira ordem para Φ e $\theta_{r,1}$ em uma equação de segunda ordem para o potencial. Explicitar $\theta'_{r,1}$ na segunda equação, aplicar na primeira e derivar em relação ao tempo comóvel resulta em:

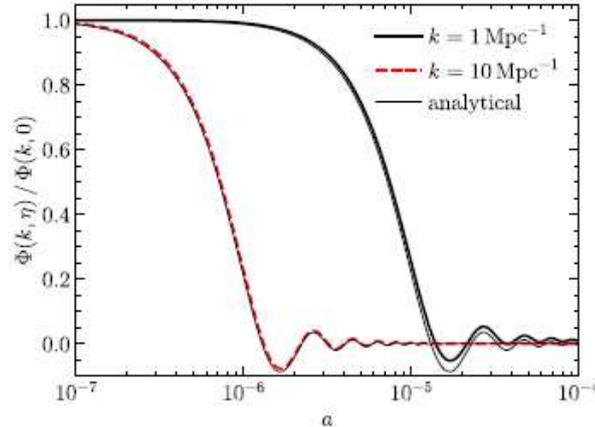
$$\Phi'' + \left(\frac{4}{\eta} \right) \Phi' + \left(\frac{k^2}{3} \right) \Phi = 0, \quad (8.40)$$

que é uma equação de onda escrita no espaço de Fourier, com um termo de amortecimento devido à expansão do Universo (as soluções devem, portanto, ter características oscilatórias). Para determinar o comportamento do potencial na era dominada pela radiação, devemos resolver a equação acima sujeita às condições iniciais em que Φ é constante. A solução passa pelas funções de Bessel e tem a forma (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\Phi(k, \eta) = 2 \left(\frac{\text{sen } x - x \cos x}{x^3} \right)_{x=\frac{k\eta}{3}} C(k), \quad (8.41)$$

cujo fator de 2 surge porque o limite $\eta \rightarrow 0$ da expressão entre parênteses é $1/3$ e a relação de super-horizonte entre Φ e C durante a dominação da radiação ($\eta \rightarrow 0$) é $\Phi = 2C/3$. Essa equação mostra que, assim que um modo k entra no horizonte durante a era dominada pela radiação, seu potencial começa a oscilar e decair, assim como as perturbações de densidade no fluido bário de fótons.

Figura 22 – A evolução do potencial durante o cruzamento do horizonte.



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

Veja a Figura 22. Esse gráfico mostra a evolução do potencial Φ na era dominada pela radiação. Para dois modos de pequena escala que entram no horizonte bem antes da igualdade, a solução numérica é mostrada junto com a solução analítica aproximada (linhas finas). É importante lembrar que o número de neutrinos foi adotado como zero no cálculo numérico (se considerássemos os neutrinos, teríamos um amortecimento adicional das oscilações). Esse comportamento está de acordo com o argumento qualitativo alusivo à capacidade da pressão de neutralizar a gravidade e, fisicamente, as oscilações são ondas sonoras que são impulsionadas pelas perturbações do potencial gravitacional quando estas entram no horizonte.

Cabe destacar que um único modo de Fourier está sendo considerado, cuja dependência de x é e^{ikx} , de modo que o potencial induzido por uma única perturbação de onda plana é, para $k\eta \gg 1$, descrito aproximadamente por:

$$\Phi(x, \eta) \approx 6 \left[\frac{C(k)}{k^2 \eta^2} \right] \cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) \cos(kx), \quad (8.42)$$

que é a solução para uma onda estacionária amortecida.

A pressão evita, assim, o crescimento das superdensidades: se as perturbações na componente dominante (no caso, a radiação) não crescerem, então o potencial em um Universo em expansão começará a decair. Isso fica evidente na relação (8.37), que (desprezando o dipolo no horizonte) diz que $\Phi \sim \theta_0/\eta^2$. Como θ_0 oscila com amplitude fixa, o potencial também oscila, mas com uma amplitude decrescente com η^{-2} , o que é

precisamente o limite de $k\eta$ grande dado pela equação (8.42). O decaimento e a oscilação do potencial são mostrados na Figura 22, com as soluções analítica e numérica (que inclui as perturbações da matéria). Note que a aproximação (que negligencia o efeito da matéria escura no potencial) levou a desvios que são claramente visíveis para o modo de grande escala: a solução numérica é ligeiramente deslocada para valores positivos em relação ao resultado analítico.

De posse do conhecimento do potencial na era dominada pela radiação, torna-se possível determinar a evolução das perturbações da matéria. Para isso, vamos recorrer às equações (8.14) e (8.15) para construir uma equação de segunda ordem com os potenciais servindo como fonte externa. Derivando (8.14) em relação a η e usando (8.15) para eliminar u'_c , tem-se:

$$\delta_c'' + ik \left(ik\Phi - \frac{a'}{a}u_c \right) = -3\Phi''. \quad (8.43)$$

Usando (8.14) para eliminar u_c , vem:

$$\delta_c'' + \frac{1}{\eta}\delta_c' = S(k, \eta), \quad (8.44)$$

onde: $S(k, \eta) = -3\Phi'' + k^2\Phi - 3/\eta\Phi'$. As duas soluções da equação homogênea associada são:

$$\delta_c = \text{constante}, \quad (8.45)$$

$$\delta_c = \ln(\eta). \quad (8.46)$$

A partir dessas soluções se percebe o crescimento logarítmico de δ_c durante a era da radiação. Em geral, a solução de uma equação de segunda ordem é uma combinação linear das duas soluções homogêneas e uma solução particular. Na ausência de uma solução particular, pode-se construí-la a partir das duas soluções homogêneas e dos termos de origem. Essa solução particular é a integral do termo fonte ponderado pela função de Green, dada por (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\delta_c(k, \eta) = K_1 + K_2 \ln(k\eta) - \int_0^\eta \{ S(k, \eta') \eta' [\ln(k, \eta') - \ln(k\eta)] \} d\eta'. \quad (8.47)$$

Os fatores k nos argumentos dos logaritmos foram adicionados por conveniência e os termos em linha não significam derivadas em relação ao tempo comóvel, mas é somente uma forma de distinguir a variável de integração. Em tempos muito antigos a integral é pequena, então as condições iniciais ($\delta_c = \text{constante}$) ditam que o coeficiente K_2 se anula e que $K_1 = \delta_c(k, \eta = 0) = C$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Com respeito à integral, se sabe que a função de fonte decai para zero junto com o potencial à medida em que o modo entra no horizonte e, portanto, a contribuição dominante para a integral vem das épocas durante as quais $k\eta \sim 1$. Diante disso, a integral de $S(\eta') \ln(k, \eta')$ será assintótica para

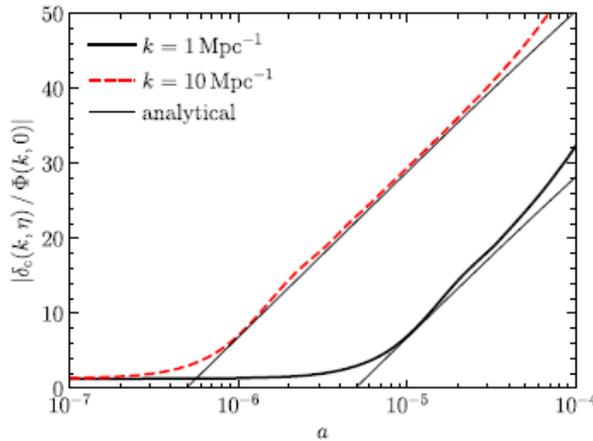
alguma constante, enquanto que a integral de $S(\eta') \ln(k, \eta)$ levará a um termo proporcional a $\ln(k\eta)$. Ao fim, a solução será:

$$\delta_c(k, \eta) = AC \ln(B) + AC \ln(k\eta). \quad (8.48)$$

Observe que em ambas as integrais o limite superior tende ao infinito, em concordância com a expectativa das integrais convergirem para algum valor constante em η grande. Da definição de $S(k, \eta)$ e das aproximações analíticas para o potencial, se pode calcular as integrais e determinar as constantes A e B (resultados precisos indicam que $A = 6,40$ e $B = 0,44$) (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Considere a Figura 23, que mostra a solução numérica para δ_c na era da radiação junto com a aproximação analítica, isto é, que mostra a evolução das perturbações na matéria escura na era dominada pela radiação.

Figura 23 – A evolução de δ_c em função do fator de escala durante o cruzamento do horizonte.



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

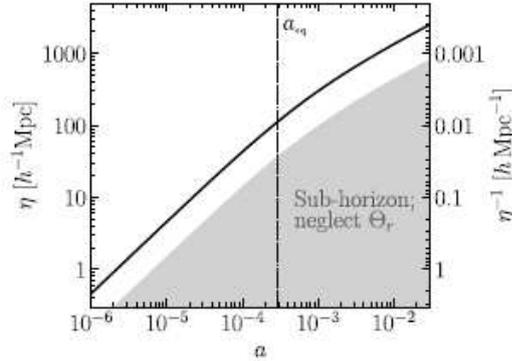
Note que os dois modos mostrados entram no horizonte na era da radiação e apresentam crescimento logarítmico. As curvas mais grossas são as soluções numéricas, enquanto as curvas finas mostram o modo logarítmico calculado anteriormente. As perturbações foram normalizadas pelo valor de Φ nos tempos iniciais.

Diante dessa figura, se percebe que as perturbações de matéria escura crescem mesmo durante a era da radiação, em contraste com as dos bárions, que decaem e oscilam. A razão para isso é que a matéria escura não tem nenhuma pressão negativa para neutralizar o efeito da gravidade (DODELSON; SCHMIDT, 2021). O crescimento não é tão proeminente como durante a era da matéria (quando os potenciais constantes implicam em $\delta_c \propto a$) devido à expansão mais rápida do Universo quando a radiação domina. Para ambos os modos mostrados na Figura 23, as perturbações seguem o modo de crescimento logarítmico assim que entram no horizonte. À medida em que o Universo se aproxima do domínio da matéria, porém, a expansão diminui e as perturbações começam a crescer mais rapidamente.

8.5.2 Sobre a evolução do sub-horizonte

Conforme visto anteriormente, a pressão de radiação faz com que os potenciais gravitacionais decaiam à medida em que os modos k entram no horizonte durante a era da radiação (isso nos permite esperar que a pressão suprima qualquer crescimento em $\theta_{r,0}$). Esse pensamento está coerente com as perturbações da matéria, que crescem logaritmicamente: embora o potencial inicialmente seja determinado pela radiação (já que o Universo é dominado pela radiação), eventualmente, o crescimento nas perturbações da matéria mais do que compensa a maior densidade média de radiação. Em outras palavras, eventualmente, $\rho_c \delta_c$ se torna maior que $\rho_r \theta_{r,0}$, mesmo que ρ_c seja menor que ρ_r . Se isso acontece, o potencial gravitacional Φ e as perturbações da matéria escura δ_c evoluem juntos, independentemente do que ocorra com a radiação, conforme mostra a Figura 24.

Figura 24 – A evolução do sub-horizonte (região hachurada em cinza).



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

Esse gráfico mostra a evolução de modos distantes no horizonte, onde o efeito de perturbações de radiação θ_r pode ser desprezado. Partindo novamente do conjunto de equações que governam a evolução da matéria escura, (8.14) e (8.15), e da equação algébrica para o potencial gravitacional (8.20), se pretende reduzir este conjunto de três equações (duas das quais são equações diferenciais de primeira ordem) a uma equação de segunda ordem. Além disso, como as perturbações da matéria escura no sub-horizonte através da época da igualdade serão estudadas, então se torna mais conveniente usar a variável de evolução y . Dessa forma, em termos de y , as três equações se tornam:

$$\frac{d\delta_c}{dy} + \left(\frac{ik}{aHy}\right) u_c = -3\frac{d\Phi}{dy}, \quad (8.49)$$

$$\frac{du_c}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right) u_c = \left(\frac{ik}{aHy}\right) \Phi, \quad (8.50)$$

$$k^2 \Phi = \left[\frac{3ya^2 H^2}{2(y+1)} \right] \delta_c. \quad (8.51)$$

Primeiro, observe que as derivadas temporais nas duas primeiras equações foram substituídas por derivadas em relação a y , e essa transformação leva aos fatores de aHy

nos denominadores dos outros termos. Em segundo lugar, o potencial gravitacional Φ agora está sendo expresso apenas em termos de δ_c : não há dependência de perturbações de radiação por causa da argumentação anterior de que estas são subdominantes e não há dependência de aHu_c/k porque as perturbações estão bem dentro do horizonte, logo, $aH/k \ll 1$. Finalmente, o coeficiente do termo fonte δ_c é $4\pi G\rho_c a^2 \rightarrow 3a^2 H^2 y/2(y+1)$, negligenciando os bárions e a energia escura. Como a energia escura é desprezível em tempos iniciais, então haverá algumas diferenças do resultado numérico correto (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Nesse ponto, vamos derivar ambos os lados de (8.49) em relação a y e aplicar em (8.50), no intuito de transformá-las em uma só equação de segunda ordem para δ_c :

$$\frac{d^2\delta_c}{dy^2} - \left[\frac{ik(2+3y)}{2aHy^2(y+1)} \right] u_c = -3 \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left(\frac{k}{aHy} \right)^2 \Phi. \quad (8.52)$$

A derivada du_c/dy foi eliminada usando a equação da velocidade u_c e observamos o fato de que: $d(1/aHy)/dy = -(1+y)^{-1}(2aHy)^{-1}$. O primeiro termo à direita é muito menor do que o segundo, que é multiplicado por $(k/aH)^2$ e, portanto, pode ser descartado. Usando a equação (8.51) notamos que o segundo termo resulta em: $3\delta_c/[2y(y+1)]$. Nessa linha, podemos reescrever a velocidade à esquerda em (8.49), mas desprezando o potencial Φ , que em escalas sub-horizontes é muito menor que δ_c . Assim, a combinação iku_c/aHy pode ser simplesmente substituída por $-d\delta_c/dy$, logo:

$$\frac{d^2\delta_c}{dy^2} - \left[\frac{(2+3y)}{2y(y+1)} \right] \frac{d\delta_c}{dy} - 3 \left[\frac{3}{2y(y+1)} \right] \delta_c = 0. \quad (8.53)$$

Esta é a equação de Meszaros, que governa a evolução das perturbações da matéria escura no sub-horizonte, uma vez que as perturbações de radiação se tornaram insignificantes nessas épocas. Para entender o crescimento das perturbações da matéria escura é preciso obter as duas soluções linearmente independentes para as equações de Meszaros e então combinar com o modo logarítmico estabelecido anteriormente.

Para resolver essa equação diferencial, se usa o conhecimento da solução nas profundezas da era da matéria. Como as perturbações do sub-horizonte na era da matéria crescem com o fator de escala, então uma das soluções para essa equação é um polinômio em y de ordem 1. Portanto, para pelo menos um modo, $d^2\delta_c/dy^2$ se anula. A equação que governa este primeiro modo, o modo crescente, é (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{\delta'_{c,+}}{\delta_{c,+}} = \frac{3}{2+3y} \quad \rightarrow \quad \delta_{c,+} \propto y + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad D_+(a) = a + \frac{2}{3}a_{eq}. \quad (8.54)$$

Escrita dessa maneira, a solução descreve o crescimento independente de escala e se aproxima de $D_+ = a$ quando $a \gg a_{eq}$. Assim identificamos esse fator como o fator de crescimento D_+ . Como está se assumindo que apenas a matéria é relevante (e, portanto

ignorando as perturbações de curvatura e na energia escura), então a expressão para o fator de crescimento será válida apenas quando $a < 0,1$. Para encontrar a segunda solução, podemos seguir procedimento semelhante e obter:

$$D_-(y) = \left(y + \frac{2}{3}\right) \ln \left(\frac{\sqrt{y+1} + 1}{\sqrt{y+1} - 1} \right) - 2\sqrt{y+1}. \quad (8.55)$$

Perceba que, em tempos primitivos (onde $y \ll 1$), tem-se $D_+ = \text{constante}$ e $D_- \propto \ln(y)$. Por outro lado, em tempos tardios (quando $y \gg 1$), a solução crescente D_+ aumenta com y , enquanto o modo de decaimento D_- decresce com $y^{-\frac{3}{2}}$. A solução geral para a equação de Meszaros é, portanto, uma combinação linear desses dois modos:

$$\delta_c(k, y) = K_1 D_+(y) + K_2 D_-(y). \quad (8.56)$$

Para $y \gg y_H$, em que $y_H = a_H/a_{eq}$, o fator de escala quando o modo entra no horizonte a_H dividido pelo fator de escala na igualdade a_{eq} . Para determinar as constantes K_1 e K_2 podemos utilizar a solução logarítmica de δ_c , obtida anteriormente. Essa solução é válida dentro do horizonte, mas antes da seguinte desigualdade: $y_H \ll y \ll 1$. Assim, pode-se chegar a uma aproximação razoável para a evolução das perturbações da matéria escura apenas para aqueles modos que entram no horizonte antes da igualdade. Para esses modos, combinando as duas soluções e suas primeiras derivadas, tem-se:

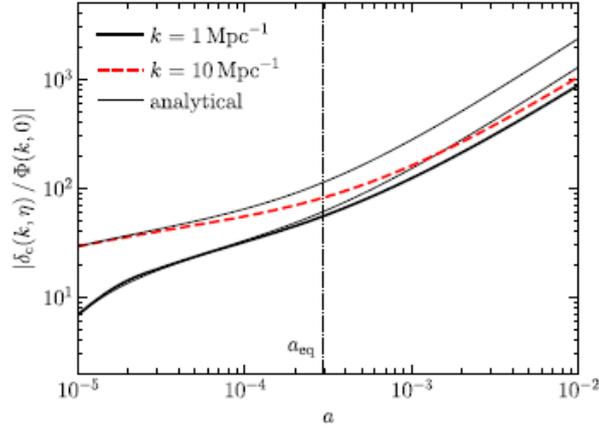
$$K_1 D_+(y_m) + K_2 D_-(y_m) = AC \ln \left(B \frac{y_m}{y_H} \right), \quad (8.57)$$

$$K_1 D'_+(y) + K_2 D'_-(y) = \frac{AC}{y_m}, \quad (8.58)$$

onde a época correspondente a y_m deve satisfazer a condição $y_H \ll y_m \ll 1$. Observe que o argumento $k\eta$ do logaritmo foi substituído por y/y_H , que é uma manipulação válida, desde que a época correspondente esteja na era da radiação (DODELSON; SCHMIDT, 2021). A Figura 25 mostra a evolução das perturbações na matéria escura em pequena escala, sub-horizonte e descreve o comportamento de dois modos k juntamente com as soluções analíticas para a equação de Meszaros com coeficientes definidos pelas condições supracitadas nas equações (condições de emparelhamento).

As curvas grossas são soluções numéricas e as curvas finas mostram a solução de Meszaros com coeficientes dados pelas condições de contorno aplicadas em $y_m = 3y_H$. O afastamento da solução numérica em tempos tardios (onde $a > a_{eq}$) deve-se à presença de bárions (que foram negligenciados). Após a época da igualdade, a contribuição dos bárions para o potencial gravitacional não é desprezível, mas eles se aglomeram menos do que a matéria escura devido ao seu acoplamento aos fótons até a recombinação (essa solução analítica superestima o crescimento da matéria escura).

Figura 25 – Evolução das perturbações na matéria escura no sub-horizonte.



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

8.6 A função de transferência

8.6.1 Algumas propriedades estatísticas

Um dos grandes objetivos dos modelos contemporâneos é prever o valor (atual) das perturbações cosmológicas, através de uma evolução numérica e de acordo com determinado estado inicial do Universo. Como vimos, as perturbações cosmológicas são campos tridimensionais aleatórios e têm, naturalmente, flutuações de valores, que fazem com que duas medições divirjam. Desse modo, devemos trabalhar com os valores esperados do campo.

Para separar a parte estocástica das perturbações de sua evolução determinística, introduzimos o conceito de função de transferência. A função de transferência de um determinado campo cosmológico é um operador que mapeia o comportamento do campo no início do Universo para o seu estado atual. O processo estocástico está associado ao comportamento inicial do campo, que é extraído da distribuição de probabilidade de qualquer física que tenha ocorrido no início do Universo. A função de transferência, por outro lado, é completamente determinística, pois descreve os processos físicos subsequentes, que são ditados pelas equações de Einstein e Boltzmann (PETTINARI, 2016).

Em termos matemáticos devemos expressar um campo de perturbação X em termos de suas funções de transferência linear e de segunda ordem, denominadas $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$, respectivamente, como (PETTINARI, 2016):

$$X(k, \eta) = T_X^{(1)}(k, \eta)\Phi(k, \eta_{in}) + Q(T_X^{(2)}(k, k_1, k_2, \eta)\Phi(k_1, \eta_{in})\Phi(k_2, \eta_{in})), \quad (8.59)$$

onde $\Phi(k, \eta_{in})$ é o potencial de curvatura no tempo inicial η_{in} , uma quantidade aleatória, que deve ser escolhido de modo a estar dentro da era da radiação, onde a evolução das

perturbações é conhecida analiticamente. O parâmetro Q é dado por:

$$Q[f] \equiv \int \frac{1}{(2\pi)^3} f(k_1, k_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2. \quad (8.60)$$

À primeira vista percebemos que a perturbação X é dada por uma soma de infinitos termos, cada um associado a uma função de transferência de ordem superior e a um potencial primordial extra. Geralmente se trunca a soma em $T^{(2)}$ porque todos os outros termos são pelo menos de terceira ordem. A escolha de Φ como campo de referência é arbitrária e a escolha de outra perturbação resulta em um simples redimensionamento das funções de transferência. Observe que, ao contrário de Φ e de X , as funções de transferência linear (e não-linear) não são grandezas perturbadas e são de ordem um (PETTINARI, 2016).

A partir de (8.59) e com base na teoria de perturbação podemos inferir que a evolução da parte de primeira ordem de uma perturbação pode ser determinada apenas pela sua função de transferência de ordem linear:

$$X^{(1)}(k, \eta) \equiv T_X^{(1)}(k, \eta) \Phi(k, \eta_{in}). \quad (8.61)$$

Para obtermos a evolução temporal das funções de transferência, não é necessário conhecer os detalhes do campo primordial $\Phi(k, \eta_{in})$, porque definimos as funções de transferência no espaço de Fourier (do contrário, não seria possível fatorarmos o potencial primordial, porque ele dependeria do tempo).

Os termos de segunda ordem das perturbações podem ser determinados pelas funções de transferência linear e de segunda ordem:

$$X^{(2)}(k, \eta) = T_X^{(1)}(k, \eta) \Phi^{(2)}(k, \eta_{in}) + Q(T_X^{(2)}(k, k_1, k_2, \eta) \Phi^{(1)}(k_1, \eta_{in}) \Phi^{(1)}(k_2, \eta_{in})). \quad (8.62)$$

Similarmente ao caso linear de (8.61), a evolução das funções de transferência de segunda ordem é determinística e independente do potencial primordial. Resumidamente se tem expressões onde k_1 e k_2 aparecem como parâmetros externos, no mesmo nível de k . A partir disso se pode dividir essas expressões por $\Phi_1(\eta_{in}) \Phi_2(\eta_{in})$ e fatorar os termos puramente de segunda ordem do potencial Φ . Por outro lado, as fontes quadráticas S se tornam (PETTINARI, 2016):

$$S \rightarrow \frac{S(k_1, k_2)}{\Phi_1(\eta_{in}) \Phi_2(\eta_{in})}. \quad (8.63)$$

Após isso, as equações podem ser resolvidas numericamente para produzir a evolução de $T^{(2)} \Phi(k, k_1, k_2)$ e o mesmo se aplica a todas as outras equações de segunda ordem. As funções de transferência de segunda ordem $T^{(2)} X(k, k_1, k_2)$ são objetos matemáticos introduzidos para parametrizar a evolução das perturbações de segunda ordem. Sendo definidas dentro de uma integral de convolução onde k_1 e k_2 são variáveis fictícias, elas não são únicas nem observáveis. As quantidades observáveis, como os espectros de potência,

dependerão das perturbações reais que resultam da convolução das funções de transferência com as condições iniciais por meio de (8.62) (PETTINARI, 2016).

8.6.2 A função $T(k)$

Com base nos resultados anteriores se pode ter uma ideia da forma da função de transferência $T(k)$. Primeiro, vamos tomar como base as expressões (8.56), (8.57) e (8.58) para obter uma expressão para a função de transferência, que é determinada pelo comportamento de δ_c bem após a igualdade, quando o modo de decaimento há muito tempo desapareceu. Com isso, se pode extrair uma forma ainda mais simples para δ_c no limite a_{eq} : a constante de interesse nesse caso é K_1 , o coeficiente do modo de crescimento. Multiplicando (8.56) por D'_- , (8.58) por D_- e subtraindo-as, chegamos a:

$$K_1 = \frac{D'_-(y_m) \ln\left(\frac{By_m}{y_H}\right) - \frac{D_-(y_m)}{y_m}}{D'_-(y_m)D_+(y_m) - D'_+(y_m)D_-(y_m)} \quad (8.64)$$

que, após algumas aproximações para pequenos valores de y_m , fornece:

$$K_1 \rightarrow -\frac{9}{a}AC \left[2 - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{By_m}{y_H}\right) - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{4}{y_m}\right) \right]. \quad (8.65)$$

Portanto, nos últimos tempos, a solução aproximada para as perturbações da matéria escura em pequena escala é da forma:

$$\delta_c(k, a) = \frac{3}{2}AC(k) \ln\left(\frac{4Be^{-3}a_{eq}}{a_H}\right) D_+(y) \quad \text{para } a \gg a_{eq}. \quad (8.66)$$

Em escalas muito pequenas, o argumento do logaritmo foi simplificado porque $a_{eq}/a_H = \sqrt{2k}/k_{eq}$. Também é necessário lembrar que os bárions foram ignorados e, portanto, dentro dessa aproximação, se definiu a perturbação da densidade total como a perturbação na matéria escura: $\delta_m = \delta_c$. Comparando a definição de função de transferência com a equação acima, chega-se a uma expressão analítica para a função de transferência em pequenas escalas:

$$T(k) = 12 \left(\frac{k_{eq}}{k}\right)^2 \ln\left(0, 12 \frac{k}{k_{eq}}\right) \quad \text{para } k \gg k_{eq}, \quad (8.67)$$

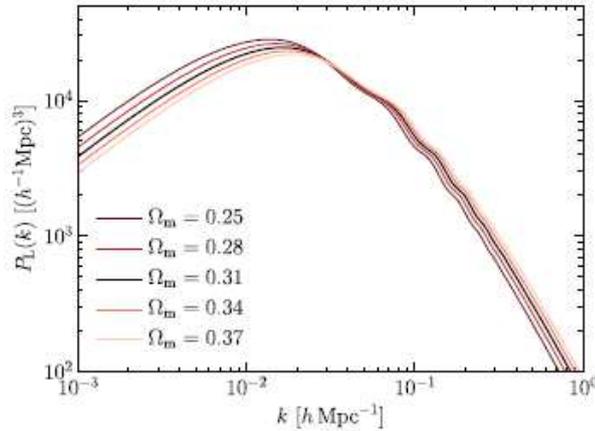
em que: $k_{eq} = a_{eq}H(a_{eq})$, $A = 6, 4$ e $B = 0, 44$.

Esta aproximação analítica para a função de transferência só é precisa em escalas muito pequenas, quando $k > 1h\text{Mpc}^{-1}$. É importante ressaltar que as expressões analíticas nos permitem entender a origem do comportamento assintótico em pequena escala da função de transferência $T(k)$. Se não houvesse crescimento logarítmico na era da radiação, os modos que entraram muito cedo não teriam crescido desde a entrada no horizonte até a época da igualdade e, além disso, suas amplitudes em relação aos modos de grande escala

teriam então sido suprimidas por um fator de ordem $(k_{eq}/k)^2$. O modo de crescimento logarítmico na era da radiação melhora essa supressão.

A Figura 26 mostra o espectro de potência da matéria escura em um Universo fiducial euclidiano, bem como o efeito de mudar Ω_m (ainda para uma cosmologia euclidiana) exigindo $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ e mantendo h fixo:

Figura 26 – O espectro de potência linear dos modos k .



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

Claramente a forma do espectro de potência linear e, em particular, a escala de inversão k_{eq} dependem de Ω_m : para um valor de Ω_m mais baixo, a igualdade matéria-radiação muda para tempos posteriores, de modo que k_{eq} é empurrado para valores mais baixos, e o oposto acontece quando se aumenta Ω_m . Como a densidade da matéria física é controlada pela combinação de parâmetros $\Omega_m h^2$, então o modo k_{eq} e a forma do espectro de potência da matéria dependem principalmente dessa combinação.

Com isso, descobrimos que a função de transferência $T(k)$ (com k em Mpc^{-1}) depende apenas da densidade de bárions $\Omega_b h^2$ e da densidade de matéria $\Omega_m h^2$ que são bem determinadas pelos picos acústicos da CMB. Características no espectro de potência da matéria, especialmente as oscilações de bárions, servem como régua padrão para medições de distância (HU, 2008).

Para tornar as distâncias independentes da constante de Hubble, as escalas de comprimento são convencionalmente multiplicadas por h , e os números de onda correspondentemente divididos por h . Como k_{eq} é proporcional a $\Omega_m h^2$ em unidades físicas (ou seja, em Mpc^{-1}), a combinação de parâmetros que controla k_{eq} em unidades de $h\text{Mpc}^{-1}$ é $\Omega_m h$. A combinação $\Omega_m h$, às vezes, é chamada de “parâmetro de forma”, mas, em termos de escalas físicas, o parâmetro relevante é $\Omega_m h^2$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Existem vários efeitos físicos no Universo real que foram negligenciados no tratamento analítico. Por exemplo, não se considerou nenhuma tensão anisotrópica ($\Phi = -\Psi$), o que altera o fator de 9/10 pelo qual o potencial cai (para modos de larga escala) para apro-

ximadamente 0,86, resultando em um aumento correspondente na função de transferência de pequena escala (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Além disso, devemos considerar que incluir o efeito dos bárions leva a mudanças ainda mais significativas em pequena escala. Por fim, cabe destacar que, em tempos tardios, o fator de crescimento depende de outros constituintes além de matéria e radiação, como a energia escura.

8.7 O fator de crescimento

Após o conhecimento da função de transferência podemos iniciar o tratamento do fator de crescimento independente de escala. Como se sabe, em tempos tardios, o horizonte era muito maior do que os modos de interesse.

Para começar os cálculos, se deve dar atenção ao regime de interesse: além do limite do sub-horizonte, também se pode desprezar a pressão dos bárions em momentos tardios, ou seja, após o desacoplamento (isso significa que os bárions seguem equações que se parecem com as da matéria escura). Além disso, embora comecem com diferentes condições iniciais, os bárions seguem de perto a matéria escura em tempos tardios, de modo que se torna possível descrever o setor de matéria com a perturbação total da matéria, definida por $\rho_m \delta_m = \rho_c \delta_c + \rho_b \delta_b$, e similarmente para a velocidade mássica $u_m = (\rho_c u_c + \rho_b u_b) / \rho_m$. Nessa análise, a massa de neutrinos, cujo efeito complica a evolução tardia da estrutura, será negligenciada.

Multiplicando (8.14) por a , derivando em relação a η , negligenciando o lado direito (que é desprezível em escalas de sub-horizontes) e combinando-a com (8.15), tem-se:

$$[a\delta'_m(k, \eta)]' = ak^2\Phi(k, \eta). \quad (8.68)$$

Agora, se pode complementar essa relação com uma das equações de Einstein para Φ . Considere a seguinte equação de Poisson generalizada:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 [\rho_m(\eta)\delta_m(k, \eta)], \quad (8.69)$$

em que foram desprezados as perturbações de radiação e os termos do lado esquerdo que são pequenos quando $k \gg aH$. Observe que essa expressão é igual à equação de Poisson generalizada para $a > a_{tarde}$ e $k \gg aH$. Usando o fato de que $\rho_m \propto a^{-3}$ e a definição de Ω_m , finalmente se obtém a primeira versão da equação de crescimento para δ_m :

$$(a\delta'_m)' = \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 \delta_m. \quad (8.70)$$

Em geral, essa expressão precisa ser resolvida numericamente. No entanto, existem alguns casos especiais (importantes) em que se consegue progredir analiticamente: se os únicos componentes relevantes além da matéria forem uma constante cosmológica Λ e uma

curvatura, se pode obter a seguinte solução integral (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$D_+(a) \propto H(a) \int_0^a \frac{1}{[aH(a)]^3} da'. \quad (8.71)$$

A constante de proporcionalidade é fixada pela definição de fator de crescimento que mostra que, no início, quando a matéria ainda dominava (aproximadamente em: $z \sim 10$), o fator D_+ deve ser igual a a . Nesses momentos, temos $H = H_0 \Omega_m^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$, então o fator de crescimento é:

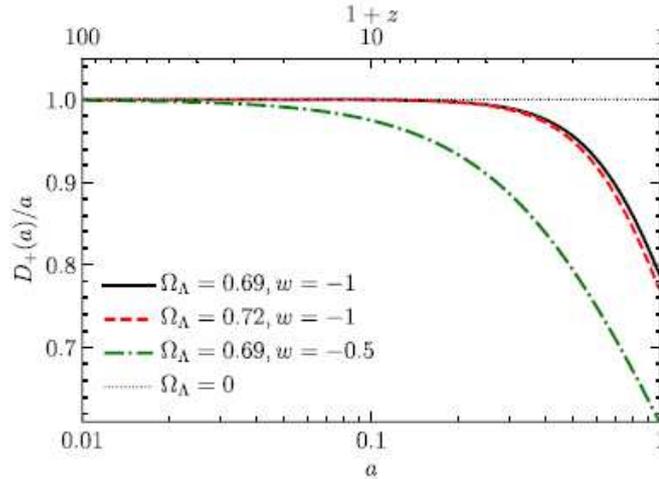
$$D_+(a) = \left(\frac{5\Omega_m}{2} \right) \left(\frac{H(a)}{H_0} \right) \int_0^a \left[\frac{H_0}{a'H(a')} \right]^3 da'. \quad (8.72)$$

Se a energia escura não for uma constante cosmológica, então a expressão acima não é uma solução para a equação de crescimento de segunda ordem, que precisa ser resolvida diretamente. No entanto, para a taxa de crescimento f , que é a derivada logarítmica do fator de crescimento, existe uma fórmula de ajuste empírico que é precisa mesmo na presença de energia escura dinâmica. Essa fórmula é (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$f(a) \equiv \frac{d[\ln(D_+(a))]}{d(\ln a)} \sim [\Omega_m(a)]^{0,55}, \quad (8.73)$$

onde $\Omega_m(a) \equiv 8\pi G\rho_m(a)/3H^2(a)$ é o parâmetro de densidade de matéria dependente do tempo (que se reduz à constante Ω_m se $a = 1$).

Figura 27 – Evolução do fator de crescimento em função do fator de escala a .



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

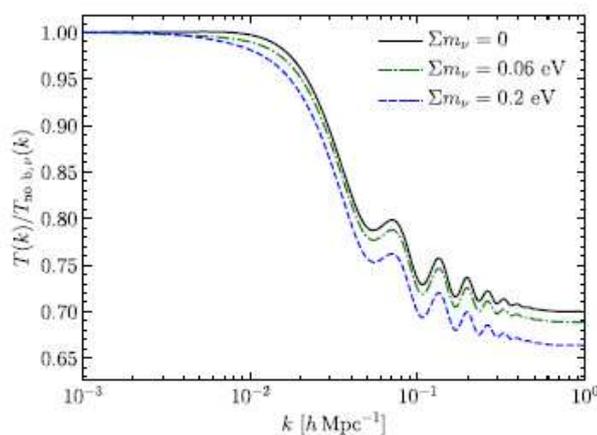
A Figura 27 mostra o fator de crescimento (dividido por a , para melhor mostrar as tendências em tempos tardios) para três cosmologias euclidianas diferentes. A linha contínua mostra a cosmologia fiducial. Note que aumentar a quantidade de energia escura (ou aumentar sua equação de estado acima de -1), leva a uma maior supressão do crescimento em tempos tardios. Como se sabe, se o Universo é euclidiano e dominado pela matéria, então o fator de crescimento é simplesmente igual ao fator de escala. Na presença de energia escura, no entanto, o crescimento é suprimido em quantidades variáveis, dependendo da quantidade e da equação do estado.

8.8 Fechando a análise: bárions, neutrinos massivos e matéria escura

Embora se acredite que a matéria escura fria seja a principal componente da matéria, de modo que a função de transferência deduzida anteriormente seja uma aproximação razoável da realidade, há mais no Universo real do que apenas matéria escura fria, como: os bárions (que constituem cerca de 16 por cento da matéria total na função de transferência), os neutrinos (que têm massa) e a energia escura.

Inicialmente, considere o gráfico da Figura 28, que representa a razão da função de transferência no redshift zero para o caso sem bárions (ou seja, $\Omega_c = \Omega_m$) e neutrinos sem massa:

Figura 28 – Evolução da função de transferência em função do fator de escala para diferentes massas de neutrinos



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

A linha preta sólida mostra o efeito dos bárions. As outras linhas mostram o efeito adicional de massas finitas de neutrinos. Nesse gráfico se assumiu massas iguais para os três sabores de neutrinos (do tau, do elétron e do múon). Enquanto o efeito dos bárions é essencialmente independente do redshift, os neutrinos massivos levam a uma dependência do redshift na função de transferência.

Analisando a linha preta sólida acima percebemos duas assinaturas da presença de bárions. A primeira é que a função de transferência é suprimida em relação ao caso sem bárions em pequenas escalas, pois nos primeiros tempos, antes do desacoplamento, os bárions estavam fortemente acoplados aos fótons. Uma vez que as perturbações de radiação não cresceram dentro do horizonte, as superdensidades de bárions também foram suprimidas em comparação com a matéria escura. Após o desacoplamento, os bárions são liberados do campo de radiação e caem nos potenciais gravitacionais dominados pela matéria escura.

O segundo efeito visível na Figura 28 advém do fato de os bárions levarem a pequenas oscilações na função de transferência em torno de $k \sim 0,1 h \text{Mpc}^{-1}$. Esse efeito é

uma manifestação das oscilações acústicas (ondas sonoras) que o fluido de bárions-fótons experimenta antes do desacoplamento. As oscilações no potencial refletem diretamente na densidade do fluido de bárions-fótons, que é uma onda de plasma acústico.

Anteriormente foi argumentado que os bárions eventualmente seguem o comportamento da matéria escura após o desacoplamento. Com base no sistema de equações de Einstein-Boltzmann e no fato de que, após o desacoplamento, os bárions ficaram livres de seu acoplamento aos fótons e tiveram pressões desprezíveis (pois suas temperaturas eram baixas), se pode inferir que eles obedecem às mesmas equações que a matéria escura, logo:

$$\delta'_{bc} + (ik)u_{bc} = 0, \quad (8.74)$$

$$u'_{bc} + \left(\frac{a'}{a}\right)u_{bc} = 0. \quad (8.75)$$

O subscrito bc representa os bárions (b) e a matéria escura (c). Observe que o potencial gravitacional é nulo em ambas as equações: isso se deve ao fato de que a gravidade “se preocupa” apenas com a quantidade total de matéria do Universo, não com quanto dela é bárion ou matéria escura. As duas soluções das equações acima são facilmente identificadas: primeiro, tem-se $\delta_{bc} = C_\delta$ e $u_{bc} = 0$. Esse resultado corresponde a uma constante de perturbação da densidade relativa entre bárions e matéria escura fria, mantendo a quantidade total de matéria fixa, e ambos viajando com a mesma velocidade.

Em segundo lugar, a equação da velocidade relativa admite uma solução $u_{bc} = Cu/a$, com $\delta_{bc} \propto Cu \int d\eta/a$. Esta solução corresponde a dar um “empurrão” inicial nos bárions, para que adquiram uma velocidade relativa em relação à matéria escura. Ambos os modos são gerados pela evolução diferente dos bárions e da matéria escura que levam ao desacoplamento. A principal característica, porém, é que esses modos são constantes ou têm caráter de decaimento e, portanto, tornam-se pequenos nos últimos tempos em comparação com o modo de crescimento. Ou seja, mesmo que no desacoplamento a perturbação relativa δ_{bc} seja comparável a δ_m , ela é suprimida por um fator de $D(a_*)/D(a) < 0,01$ no Universo tardio (a supressão de u_{bc} foi ainda mais forte) (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Por outro lado, sabe-se que existem neutrinos e que o modelo de concordância da cosmologia faz uma previsão definitiva de quantos existem no Universo. Apenas sua massa permanece incerta. Uma medição precisa do espectro de potência da matéria pode permitir inferir as massas de neutrinos.

As massas de neutrinos afetam o crescimento da estrutura de duas maneiras. Primeiro, eles afetam a evolução da densidade de energia de neutrinos, que inicialmente decai com a^{-4} , mas depois transita para a^{-3} , o que modifica a taxa de expansão através da equação de Friedmann e altera o fator de crescimento, uma vez que $H(a)$ entra na equação de crescimento. O segundo efeito tem a ver com o movimento dos neutrinos: como

se movem rapidamente e saem de regiões de alta densidade, eles amortecem o crescimento da estrutura em pequena escala.

Portanto, as perturbações em escalas menores do que a distância típica que os neutrinos viajam (a escala de fluxo livre) são suprimidas. Com base nisso, o número de onda de fluxo livre k_{fs} , é dado por (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$k_{fs}(a) \sim 0,063hMpc^{-1} \left(\frac{m_\nu}{0,1eV} \right) \left(\frac{a^2 H(a)}{H_0} \right). \quad (8.76)$$

Os neutrinos mais massivos contribuem mais para a densidade total, de modo que suprimem as pequenas escalas mais do que os neutrinos mais leves. No entanto, há um efeito menor, quase imperceptível para $k < 0,004hMpc^{-1}$, que funciona de maneira oposta: os neutrinos menos massivos viajam mais rapidamente e, portanto, fluem livremente para fora de regiões maiores, como indicado equação de k_{fs} e, portanto, a função de transferência para $\sum m_\nu = 0,06eV$ é ligeiramente menor do que para $\sum m_\nu = 0,2eV$ em escalas muito grandes. Com isso, note que o fator de crescimento se torna dependente da escala na presença de neutrinos massivos.

Por fim, a partir dos argumentos anteriores, se tem evidências contundentes de que a energia escura domina o quantitativo de energia do Universo hoje. O efeito físico direto da energia escura é o impacto no fator de crescimento D_+ . Seguindo a definição desse fator, inferimos que o crescimento das perturbações em tempos tardios depende diretamente da evolução da taxa de Hubble, que por sua vez depende da quantidade e da evolução da energia escura. Assim, diferentes modelos de energia escura prevêm diferentes fatores de crescimento. Se a energia escura for parametrizada por uma equação de estado w , e se w for constante, então a taxa de Hubble em um Universo euclidiano evolui como (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_{de}}{a^{3(1+w)}}}, \quad (8.77)$$

em tempos tardios. Usando essa dependência do tempo é fácil resolver (8.70) numericamente. Este efeito forma a base para as restrições atuais sobre a densidade de energia escura e a equação de estado da estrutura em grande escala.

Dois efeitos indiretos adicionais da energia escura devem ser considerados pelo fato de se estar trabalhando com um Universo euclidiano (onde se tem: $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda$). Primeiro, a forma do espectro de potência da matéria depende indiretamente da quantidade de energia escura, uma vez que a escala de igualdade depende de Ω_m . Em segundo lugar, para uma amplitude fixa de perturbações potenciais (que é o que as anisotropias da CMB de grande ângulo restringem) as perturbações de densidade fracionária são proporcionais a Ω_m^{-1} , de acordo com a equação de Poisson generalizada (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Após obtermos uma previsão para o espectro de potência linear da matéria (solucionando as equações de evolução para cada modo de Fourier), podemos construir o espectro

de potência da matéria em função do fator de escala (e do redshift). Para o caso das grandes escalas cosmológicas, os resultados obtidos desse espectro podem ser comparados com os oriundos de observações de aglomerados e de lentes gravitacionais de galáxias. Esse procedimento não pode, no entanto, ser repetido para as pequenas escalas, uma vez que a matéria torna-se não-linear nas pequenas escalas do Universo tardio.

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 09 O FÓSSIL COSMOLÓGICO: A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

“A astronomia nos leva a um evento único: um Universo que foi criado “do nada” e que é delicadamente equilibrado para fornecer exatamente as condições necessárias para sustentar a vida”.

(Arno Allan Penzias)

9 O fóssil cosmológico: a Radiação Cósmica de Fundo

9.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“O fóssil cosmológico: a Radiação Cósmica de Fundo” inicia a discussão sobre a CMB propriamente dita. Nesse capítulo são abordados os seguintes pontos: a história da descoberta, a origem cósmica da radiação, o contexto cosmológico de formação da radiação, as oscilações e perturbações de temperatura e as características físicas e estatísticas da CMB. Esta parte é escrita com o intuito de introduzir, da maneira mais suave possível, o tratamento físico e matemático da CMB.

9.2 A história da descoberta

9.2.1 O contexto teórico da Cosmologia na época

Apesar do fato da Cosmologia estar na periferia das ciências físicas em meados dos anos 60, haviam importantes trabalhos em desenvolvimento na área, como os artigos que tratavam de modelos cosmológicos (e as observações que poderiam ser usadas para testá-los) e das capacidades de varredura dos telescópios. Em síntese, pode-se dizer que o principal objetivo dos modelos cosmológicos da década de 1960 era a medição da taxa de expansão do Universo.

Durante esse período da história da Física havia um grande debate entre os adeptos da cosmologia do Big Bang, formulada por Gamow e seus colegas, e os que defendiam o modelo do Universo estacionário de Bondi, Gold e Hoyle ([PARTRIDGE, 2006](#)). No início da década de 60, as observações ópticas planejadas e realizadas ainda não eram capazes de decidir qual dos lados estava correto.

Em outra perspectiva, dados oriundos de fontes de rádio, embora controversos, sugeriram que essas radiações evoluíram em número (ou em luminosidade), e então o Universo devia ter mudado com o tempo. A Cosmologia dessa época estava, portanto, necessitando urgentemente de dados e se encontrava em um cenário controverso sobre uma propriedade fundamental do Universo (a expansão ou não).

9.2.2 A previsão teórica da CMB

Ao fim das discussões, o modelo cosmológico do Big Bang proposto por Gamow venceu. Em resumo, Gamow introduziu o Hot Big Bang em 1946 como um meio de construir

núcleos mais pesados que o 1H . Ele reconheceu que seriam necessárias temperaturas da ordem de 10^9 a 10^{10} K (para garantir que kT fosse aproximadamente igual à energia de ligação dos núcleos). Originalmente, ele esperava que a síntese do Big Bang pudesse explicar a abundância de todos os elementos observados nos espectros estelares.

Entretanto, no ano de 1949, os físicos Fermi e Turkevich apontaram que, uma vez que não existe nenhum núcleo estável de massa atômica 5, um acúmulo gradual de núcleos cada vez mais pesados terminaria no isótopo do hélio 4He (PARTRIDGE, 2006). Posteriormente, diversos cálculos confirmaram este resultado e produziram previsões específicas da razão $^4He/^1H$ para materiais emergentes do Big Bang. Nesse sentido, Gamow e colaboradores, baseando-se em uma expressão empregada por Alpher e Herman (em 1949), propuseram que o Universo tinha uma temperatura de cerca de 10K (EVANS, 2015).

Com o passar do tempo, os modelos do Big Bang permaneceram em evidência, mas a esperança de Gamow de sintetizar todos os elementos pesados em um Hot Big Bang foi enfraquecida por Fermi e Turkevich (1949) e por Burbidge, Burbidge, Fowler e Hoyle (1957), que mostraram, de forma consistente, como os elementos mais pesados foram construídos no interior das estrelas (PARTRIDGE, 2006).

Apesar do reconhecimento de que a maioria dos elementos são sintetizados no interior das estrelas, o modelo do Hot Big Bang não perdeu força. No ano de 1965, os físicos Hoyle e Tayler observaram que a grande abundância de 4He em relação a elementos mais pesados era melhor explicada através de uma combinação da síntese do Big Bang dos núcleos leves (como o próprio 4He) com a nucleossíntese estelar, em vez de somente pela síntese estelar (PARTRIDGE, 2006). Com isso, o modelo do Hot Big Bang assumiu importante papel na explicação da abundância de elementos leves (especialmente aqueles cuja massa atômica é menor que 4).

Por fim, em termos teóricos, cabe destacarmos que Alpher e Herman propuseram uma “temperatura de fundo” para o Universo, mas não reconheceram que essa temperatura diferente de zero poderia ser devida à presença de radiação térmica (mais ou menos isotrópica), que poderia ser detectada (ALPHER; HERMAN, 1950).

9.2.3 As detecções “cegas” da CMB e as técnicas de medição

Como vimos, a existência de um campo de radiação térmica foi prevista em meados de 1948, mas nenhuma tentativa experimental foi feita para confirmá-la. Essas previsões teóricas foram feitas por astrônomos e permaneceram esquecidas até 1965 e, mais surpreendentemente, os radioastrônomos haviam medido em várias ocasiões (antes de 1964) ou estabelecido limites para uma radiação isotrópica de fundo (EVANS, 2015). Porém, os especialistas não conseguiam interpretar adequadamente os dados obtidos: a CMB estava sendo detectada, mas não estava sendo reconhecida.

Uma das técnicas mais utilizadas na espectroscopia da época se baseava na observação de nuvens de moléculas entre a Terra e as estrelas próximas, que produziam linhas de absorção no espectro dessas estrelas. Em praticamente todos os casos, essas linhas se originam apenas dos estados fundamentais das moléculas absorventes.

No entanto, em 1941, a molécula de cianogênio (CN) foi reconhecida como uma exceção: linhas de absorção fracas originadas do primeiro estado rotacional excitado, cerca de 5×10^{-4} eV acima do estado fundamental, foram detectadas. A partir de observações das linhas de absorção do CN, McKellar (em 1941) estimou-se uma temperatura cósmica de 2,3 K (PARTRIDGE, 2006). Baseando-se no estudo de diversos casos de moléculas CN excitadas (em várias núvens moleculares), a suposta radiação cósmica deveria ser difundida por toda a galáxia, se não por todo o Universo.

Sob motivação da Segunda Guerra Mundial houve um notável desenvolvimento de receptores de rádio nos Estados Unidos e um líder desse esforço foi Robert Dicke, que projetou e construiu receptores de rádio operando em comprimentos de onda $\lambda = 1$ a 1,5 cm. Esse cientista também introduziu, em 1946, a convenção de medir a intensidade de rádio em termos de uma temperatura equivalente e, mais especificamente, ele fez uma medição da temperatura do céu em $\lambda = 1,25$ cm. Ele e seus colegas, Beringer, Kyhl e Vane (ainda em 1946) determinaram um limite superior de $T = 20\text{K}$ em qualquer radiação isotrópica “cósmica” de fundo (PARTRIDGE, 2006). A técnica que eles empregaram não foi capaz de detectar uma temperatura de fundo isotrópica tão baixa quanto 3K, porém, os primeiros trabalhos de Dicke pressagiaram muitas das observações posteriores.

Com isso, no início da década de 60, os receptores de rádio operando em comprimentos de onda da ordem de centímetros haviam sido aprimorados a ponto de permitir medições de temperatura com precisão de alguns décimos de kelvin. Particularmente, muito progresso ocorreu nos laboratórios da companhia Bell Telephones, que eram impulsionados por desenvolvimentos em telecomunicações usando satélites. Nesses laboratórios, os receptores eram combinados com antenas e fontes de calibração de baixa temperatura e, além disso, se investia largamente na identificação e redução (ou eliminação) de fontes de erros sistemáticos e ruídos.

Os funcionários dos laboratórios Bell (incluindo Penzias e Wilson) começaram a enfrentar um problema irritante: um excesso de ruído entrando em suas antenas sempre que eram apontadas para o céu. A primeira referência registrada a esse problema está em um artigo técnico de Ohm (de 1961), onde o excesso de ruído foi efetivamente absorvido pelos erros atribuídos a outros sinais (EVANS, 2015). Uma análise mais cuidadosa para as várias fontes de erro sistemático (feita após a descoberta da CMB) mostra que Ohm de fato detectou involuntariamente a CMB naquela época (porém houve uma má interpretação dos sinais) (PARTRIDGE, 2006).

Naquela época, muitos acreditavam que as contribuições para o sinal detectado

pelas antenas eram oriundas da radiação de micro-ondas da atmosfera terrestre. Com base nisso, dois cosmólogos soviéticos, Doroshkevich e Novikov (em 1964), observaram o artigo de Ohm, mas interpretaram mal a temperatura celeste, levando-os a incluir tanto a emissão atmosférica quanto qualquer possível fundo isotrópico (EVANS, 2015). Uma vez que a temperatura celeste medida correspondia ao sinal atmosférico calculado sozinho, eles chegaram à conclusão errônea de que qualquer fundo cósmico e isotrópico possível deve ter temperatura menor ou igual a 1K e isso influenciou o cosmólogo Y. B. Zel'dovich (em 1965) a negar a teoria do Hot Big Bang, afirmando que os dados radioastronômicos mostraram que a temperatura das ondas de rádio térmicas não devia exceder 1K (PARTRIDGE, 2006).

Ainda em meados da década de 1960, Wall, Chu e Yen (em artigo de 1970) tentaram medir o brilho absoluto do céu de rádio em dois comprimentos de onda para determinar o espectro de rádio da galáxia. Os físicos esperavam que a emissão galáctica variasse com o comprimento de onda $\lambda^{0,7}$, como ocorria em muitas galáxias. No entanto, os dados obtidos sugeriram uma dependência de comprimento de onda muito mais fraca, da ordem de $\lambda^{0,2}$ (PARTRIDGE, 2006). Só mais tarde foi reconhecida a causa dessa aparente discrepância: eles haviam medido, sem saber, uma combinação da emissão galáctica com a CMB (que tem um espectro variando com λ^{-2}). Novamente, este experimento teve a sensibilidade para detectar a CMB, mas a inferência crucial não foi feita.

9.2.4 O “chiado” de Penzias e Wilson

No trabalho de Ohm e seus colegas dos laboratórios Bell, diversos erros sistemáticos disfarçaram o sinal da CMB. No ano de 1964, um radiotelescópio de menor ruído e melhor calibrado foi construído nos laboratórios Bell: ele operava no comprimento de onda de 7,35cm e era acoplado a uma grande antena. Um elemento crucial no novo design era um interruptor, que tinha um calibrador estável de baixa temperatura e que permitia uma melhor visualização da emissão do céu (PARTRIDGE, 2006). Com muito cuidado e diligência, Penzias e Wilson rastreamos muitas fontes de erro sistemático, desde sinais de rádio da cidade de Nova York, passando por possíveis efeitos posteriores de testes nucleares na atmosfera, até esterco de pombo em sua antena.

O “chiado” do céu, um excesso de ruído a uma temperatura de 3,5K e de comprimento de onda de 7,35 cm, permaneceu depois que todas os elementos técnicos foram devidamente ajustados. O que diferenciou este trabalho dos demais foi: a sensibilidade do receptor, o grande cuidado e persistência de Penzias e Wilson (que dedicaram meses para excluir os fatores não-cósmicos que levavam ao ruído excessivo) e um certo telefonema.

Próximo aos Laboratórios Bell, em 1964, Robert Dicke e seus colegas de Princeton estavam ocupados reinventando o Hot Big Bang e projetando um receptor sensível para detectar o fundo térmico deixado por ele (EVANS, 2015). Eles, aparentemente, desco-

nheciam todo o trabalho teórico e observacional de Penzias e Wilson. A motivação de Dicke para um Hot Big Bang não era construir elementos mais pesados que o hidrogênio, mas destruí-los. Dicke argumentou que um modelo fechado (oscilante) do Big Bang pode “saltar” no final de seu colapso e então se reexpandir. Para “limpar” o Universo, um estado de alta temperatura é necessário a cada salto para desintegrar (através de fótons) os núcleos complexos (PARTRIDGE, 2006).

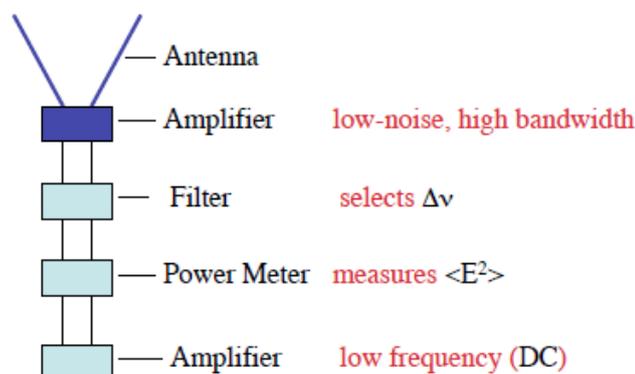
Nesse sentido, Dicke e Jim Peebles calcularam a temperatura necessária para esses processos e estimaram seu valor atual cerca de 10^{10} anos após o “salto” mais recente, obtendo $T_0 \sim 10\text{K}$ (EVANS, 2015). Eles também explicaram independentemente a síntese de elementos leves nos primeiros minutos de expansão após um “salto”. Finalmente, esses dois experimentais planejaram um teste do Hot Big Bang: Dicke sugeriu a construção de um pequeno radiotelescópio para detectar a radiação remanescente da fase inicial quente do Universo e Peter Roll e David Wilkinson assumiram essa tarefa no ano de 1964.

Em síntese, o radiotelescópio utilizado por Dicke em seus estudos da CMB era composto por (WINSTEIN, 2003):

- Uma antena, que tinha um padrão de aceitação particular no céu.
- Um amplificador, que devia ser de baixo ruído e de alta largura de banda.
- Um filtro, que selecionava a banda de frequência de interesse.
- Um medidor de potência, que determinava a medida do quadrado do campo elétrico.
- Um amplificador (essencialmente de corrente contínua).

Uma ilustração do instrumento utilizado por Dicke pode ser vista na Figura 29.

Figura 29 – Esquema simplificado de um radiotelescópio da época.



Fonte: WINSTEIN (2003).

Enquanto isso, membros do grupo de Princeton apresentavam suas ideias e cálculos em reuniões científicas. Um dos pais fundadores da radioastronomia nos EUA, Bernie

Burke, ouviu uma palestra de Jim Peebles sobre o Hot Big Bang, a importância da radiação no início do Universo e a possibilidade de detectar essa radiação agora. Mais tarde, conversando com Arno Penzias, Burke ouviu falar sobre o problema de “excesso de ruído” a 3,5 K encontrado nos Laboratórios Bell e referiu-se às ideias de Dicke e seus colegas. Com a intenção de seguir qualquer explicação possível para o “chiado” a 3,5K, Penzias telefonou para Dicke. Esse telefonema veio enquanto o grupo de Princeton estava reunido para um almoço semanal no escritório de Dicke. Como Dave Wilkinson relata aquele telefonema, Dicke ouvia principalmente, mas ocasionalmente repetia frases cruciais, como: “antena de corneta”, “calibrador de hélio líquido”, “excesso de ruído” ou semelhantes. No final, Dicke desligou, virou-se para Peebles, Roll e Wilkinson e disse: “Bem, rapazes, fomos enganados” (EVANS, 2015). No dia seguinte, Dicke e seus colegas se dirigiram aos laboratórios Bell e voltaram convencidos de que o “chiado” era a relíquia do Hot Big Bang que eles procuravam. A CMB havia sido descoberta (PARTRIDGE, 2006).

Posteriormente, os dois grupos concordaram em publicar artigos adjacentes no *The Astrophysical Journal Letters*. A carta de Penzias e Wilson não faz referência à origem da radiação que eles detectaram, pois, nas palavras do próprio Wilson (em 1979): “Arno (Penzias) e eu tivemos o cuidado de excluir qualquer discussão sobre a teoria cosmológica da origem da radiação de fundo de nossa carta porque não estávamos envolvidos em nenhum desses trabalhos. Pensamos, além disso, que nossa medição era independente da teoria e poderia sobreviver a ela. Ficamos satisfeitos que o ruído misterioso que aparece em nossa antena tenha uma explicação de qualquer tipo, especialmente uma com implicações cosmológicas tão significativas. Nosso humor, no entanto, permaneceu de otimismo cauteloso por algum tempo” (PARTRIDGE, 2006).

9.2.5 A coerência com as previsões teóricas

A explicação de Dicke para o “chiado” de Penzias e Wilson era que se tratava de um fundo cósmico térmico, uma relíquia do Hot Big Bang. Várias outras explicações (não relacionadas ao Big Bang) foram rapidamente propostas e logo a comunidade foi convencida de que havia dois testes cruciais da hipótese do Big Bang: primeiro, se a radiação fosse mesmo oriunda do Hot Big Bang deveria ter um espectro térmico e, segundo, essa radiação deveria ser mais ou menos isotrópica (isto é, de igual intensidade em todas as direções). Além disso, percebeu-se que a sua distribuição angular não devia estar correlacionada com fontes locais de emissão de rádio, como o sistema solar ou o plano da galáxia.

No final do ano de 1965, os físicos Roll e Wilkinson completaram suas medições da intensidade da CMB. O grupo de Princeton escolheu um comprimento de onda diferente daquele usado por Penzias e Wilson ($\lambda = 3\text{cm}$). Roll e Wilkinson (em 1966 e 1967) projetaram cuidadosamente seus instrumentos para permitir uma boa calibração, já que não havia como “desviar o olhar” de um fundo isotrópico. A intensidade medida em

$\lambda = 3\text{cm}$ correspondeu à emissão térmica em $3,0 \pm 0,5\text{K}$, em excelente concordância com o resultado dos laboratórios Bell (PARTRIDGE, 2006). Essas duas medições estabeleceram um espectro aproximado para a CMB, que era consistente com a temperatura do fundo térmico (de 3 a 3,5K), mas que era totalmente inconsistente com a possibilidade de que o “chiado” fosse devido à emissão de rádio da galáxia.

Antes que novas medições da CMB surgissem, as antigas foram comparadas às obtidas através de medidas do espectro das moléculas de CN. Os físicos Field e Hitchcock (1966) retornaram aos dados antigos e derivaram novamente os limites de T_0 em $\lambda = 2,64\text{cm}$: $2,7 \leq T_0 \leq 3,4\text{K}$, de acordo com um espectro térmico (PARTRIDGE, 2006).

Os resultados oriundos das moléculas de CN também estabeleceram consistentemente que a CMB não estava localizada no sistema solar, mas que estava presente por toda a galáxia. Paralelamente, radioastrônomos de vários observatórios juntaram-se na tentativa de determinar o espectro da CMB, modificando os receptores existentes e/ou inventando novas técnicas para medir a temperatura T_0 da radiação.

Nessa linha, os próprios Penzias e Wilson (1967) mediram $T_0 = 3,2 \pm 1,0\text{K}$ a $\lambda = 21\text{cm}$. Astrônomos em Cambridge, Inglaterra, fizeram medições em cerca de $\lambda = 21\text{cm}$ e na faixa de $49 \leq \lambda \leq 74\text{cm}$, obtendo $T_0 = 2,8 \pm 0,6\text{K}$ e $T_0 = 3,7 \pm 1,2\text{K}$, respectivamente (PARTRIDGE, 2006). Esses resultados de comprimento de onda longo estavam em concordância razoável com $T_0 \sim 3\text{K}$. Assim, em 1967, o espectro observado era conhecido por ser térmico em uma faixa de comprimento de onda de cerca de 300cm.

Como Penzias e Wilson já haviam estabelecido um limite superior de aproximadamente 20% em qualquer anisotropia na CMB em $\lambda = 7,35\text{cm}$, os pesquisadores procuraram melhorar esse limite em algumas ordens de grandeza. Nesse sentido, diversos instrumentos foram projetados especificamente para medir pequenas diferenças na intensidade da CMB, e não o seu valor absoluto. No ano de 1967, os limites superiores da anisotropia em larga escala (em escalas angulares de 15° a 180°), foram estabelecidos em $1 \times 10^{-3} \leq \Delta T/T_0 \leq 3 \times 10^{-3}$. Portanto, o segundo teste para a teoria do Big Bang também havia sido aprovado.

Conforme mencionamos, existiram vários cientistas que se empenharam em medir a temperatura da CMB. Os dados obtidos por esses pesquisadores, antes de Penzias e Wilson, podem ser sintetizados na Tabela 2 (MARQUES, 2012).

9.2.6 As consequências da descoberta da CMB

Se admitirmos que a CMB é, de fato, uma relíquia do Hot Big Bang, podemos obter algumas respostas:

- As distorções sistemáticas no espectro da CMB revelariam processos de liberação de

Tabela 2 – Alguns resultados experimentais obtidos para a temperatura da CMB.

Ano	Pesquisador	Temperatura da CMB
1886	Guillaume	5K
1926	Eddington	3,2K
1933	Regener	2,8K
1937	Nernst	2,8K
1949	Gamow	5K
1953	Gamow	7K
1954	Finlay-Freundlich	6K
1961	Gamow	50K
1965	Penzias e Wilson	3,5K

energia em qualquer época até $z \approx 10^6$;

- As medições da distribuição angular em larga escala da CMB podem determinar a velocidade da Terra em relação ao Universo e estabelecer se a expansão do Universo é isotrópica e livre de “atrito”;
- As não-homogeneidades na distribuição ou a velocidade da matéria no Universo primordial introduziriam anisotropias ou flutuações de pequena escala na CMB. Em particular, o mapeamento da CMB nos permite “ver” a distribuição da matéria em $z \approx 1000$, assim que o processo de formação das galáxias começou;
- Como o Universo está cheio de fótons térmicos, então os raios cósmicos de alta energia irão interagir com eles e isso resultará em certos cortes nos espectros dos raios γ e dos raios cósmicos carregados;
- Finalmente, conhecer a temperatura T_0 nos permite calcular a fração do isótopo ${}^4\text{He}$ que emergiu do Big Bang. Esses cálculos, por sua vez, foram outro teste da hipótese do Hot Big Bang.

Diante dessa descoberta, a comunidade científica voltou fortemente a atenção à CMB, no intuito de obter informações sobre o passado do Universo.

9.3 A radiação que estamos tratando é, de fato, cósmica?

Uma questão que geralmente aparece durante o estudo da CMB é relativa à origem dessa radiação: ela é mesmo um ente físico que advém do cosmos ou é oriunda de alguma fonte “secundária” presente no Universo? Diante disso, existem alguns indícios que baseiam o argumento da origem cosmológica dessa radiação em microondas. São eles:

- O primeiro, e mais simples, provém da uniformidade em grande escala dessa radiação. Não obstante a direção para a qual se aponte o detector, ter-se-á a medida de um

mesmo fluxo, não se podendo, por conseguinte, indicar uma fonte em particular que seja responsável por essa emissão: todo o Universo brilha em microondas (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).

- Outro indício vem da presença de um dipolo, o qual indica que fazemos parte de um grupo de objetos que se move em relação ao referencial em que a radiação de 2,7K é perfeitamente isotrópica. Esse efeito apresenta a mesma configuração que outros dipolos encontrados em observáveis independentes, como em contagens de radiogaláxias e quasares ou em mapeamentos da emissão difusa em raios-X. A forma como a matéria está distribuída na Via Láctea não poderia gerar uma emissão com esse padrão de dipolo (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).
- O espectro da CMB, caracterizando um corpo negro de 2,7K, é o melhor argumento de que o Universo apresentou um estágio de equilíbrio térmico entre matéria e radiação, num estado conhecido como plasma primordial. Devido à expansão do Universo, com o consequente resfriamento do plasma, houve o desacoplamento entre a radiação e a matéria, tão logo a temperatura atingiu 3000K. O Universo continuou se expandindo e assim a radiação foi resfriando até atingir a temperatura atualmente medida. Caso este cenário seja o correto, deveria ser possível medir o efeito de uma radiação de fundo “mais quente” observando-se objetos distantes. Isso de fato ocorre, mostrando-se a mais conclusiva prova da natureza cosmológica da CMB (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).
- Dados sobre diversas nuvens moleculares – compostas por moléculas de hidrogênio e de CN, por exemplo – mostram que elas estão envoltas por um fluxo de fótons uniforme e constante, que impede que as moléculas se mantenham em seus níveis mais baixos de energia. A energia necessária para se manter este mínimo de excitação é exatamente aquela fornecida pelos fótons da CMB (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).
- Podemos ainda falar da distribuição angular das flutuações de temperatura que, segundo medidas recentes e bastante precisas, concordam exatamente com a previsão do modelo inflacionário, isto é, essas flutuações são resultados de perturbações de densidade produzidas nos primeiros instantes do Universo. Assim, teorias alternativas que tratavam a CMB como resultado da emissão de uma distribuição difusa de grãos de poeira no espaço interestelar encontram-se fadadas ao esquecimento (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).

9.4 O contexto cosmológico de formação da radiação

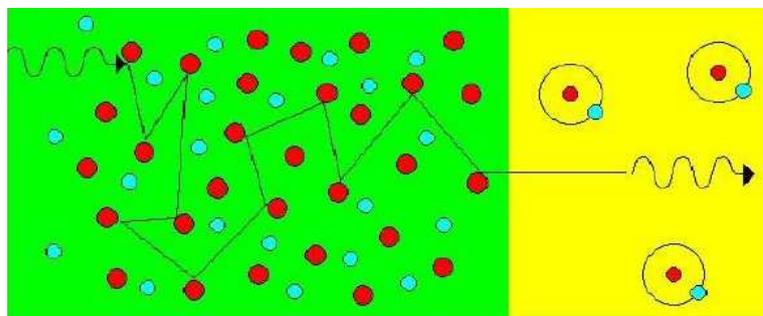
Depois que a nucleossíntese se completou, a matéria comum no Universo era composta por prótons, elétrons, fótons, núcleos de hélio e vestígios de núcleos mais pesados

(além disso, os neutrinos já se encontravam desacoplados e praticamente não interagem mais). O desacoplamento se iniciou quando o espalhamento Compton entre fótons e elétrons não foi mais suficiente para manter os fótons firmemente ligados aos bárions (por outro lado, elétrons e bárions permaneceram ligados pela força eletromagnética).

Essa época ocorre quando a temperatura cai abaixo de $T \sim 1\text{eV}$, o que fez o número de elétrons livres cair consideravelmente (mas, nessa época, ainda havia muito pouco hidrogênio neutro). Em termos de energia, a produção de hidrogênio neutro (com uma energia de ligação de $\epsilon_0 = 13,6\text{eV}$) é favorecida nessas temperaturas, mas a razão fóton/bárion ainda era alta, em virtude do grande número de fótons de alta energia, que garantiu que qualquer átomo de hidrogênio produzido fosse imediatamente ionizado.

Com o desenvolver do processo de desacoplamento, o número de fótons com energia acima de ϵ_0 mudou o suficiente para que se pudesse formar hidrogênio neutro. Essa época é conhecida como recombinação, embora esse termo não seja tão adequado: elétrons e prótons se combinam, mas não se recombinam, pois esta é a primeira vez que átomos neutros se formam no Universo.

Figura 30 – Desacoplamento da matéria e radiação, quando $T \approx 3000\text{K}$: após o desacoplamento, os fótons (setas onduladas) se propagaram livremente, uma vez que os elétrons e os prótons se combinaram para formar átomos de Hidrogênio



Fonte: WUENSCHÉ (1994).

A análise feita acima também é válida para o hélio, que capturou elétrons muito mais cedo do que os átomos de hidrogênio, já que a energia de ligação associada é: $Z^2\epsilon_0 = 54,4\text{eV} = 4(13,6\text{eV})$, em que Z representa o número atômico do hélio. A energia de ligação do segundo elétron (aquele que torna o hélio neutro) a uma temperatura de 24eV também é maior que $13,6\text{eV}$, de modo que a recombinação completa do hélio neutro ocorre mais cedo do que a do hidrogênio neutro (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Apesar disso, a grande maioria dos elétrons permanece livre, uma vez que a recombinação do hélio influencia muito pouco nesse sentido e que, portanto, pode ser negligenciada no momento (no entanto, as previsões para as anisotropias da CMB, que estudaremos mais adiante, precisam levar em conta essa recombinação).

Em relação às densidade numéricas, podemos ressaltar que enquanto o processo $e^- + p \longleftrightarrow H + \gamma$ permanece em equilíbrio, a aproximação de Saha garante que (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}, \quad (9.1)$$

onde n_s é a densidade numérica de uma determinada espécie de partícula e $n_s^{(0)}$ é a densidade numérica dependente da espécie (isto é, a densidade numérica quando o potencial químico $\mu_s = 0$), definidas como:

$$n_s = g_s e^{\frac{\mu_s}{T}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-\frac{E_s(p)}{T}} d^3p, \quad (9.2)$$

$$n_s^{(0)} = g_s \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-\frac{E_s(p)}{T}} d^3p, \quad (9.3)$$

em que g_s representa o fator de degenerescência da espécie s , que significa, basicamente, o número de possíveis estados quânticos de uma determinada partícula. Considerando a neutralidade do Universo ($n_e = n_p$) podemos definir a fração de elétrons livres X_e da seguinte forma:

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_e + n_H} = \frac{n_p}{n_p + n_H}, \quad (9.4)$$

em que o denominador acima é igual ao número total de bárions (note que o hélio foi negligenciado, nesse caso). Usando a definição de $n_s^{(0)}$ para partículas não-relativísticas ($m_s \gg T$), o lado direito de (9.1) nos fornece:

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{X_e^2}{1 - X_e}. \quad (9.5)$$

Perceba que a pequena diferença de massa entre H e p foi desprezada. O argumento do exponencial é $-\frac{\epsilon_0}{T}$ (lembrando que ϵ_0 é a energia de ligação do hidrogênio) e o denominador $n_e + n_H$ (ou $n_p + n_H$) é igual à densidade numérica bariônica n_b . Dessa maneira, quando a temperatura é da ordem de ϵ_0 , o lado direito da equação acima é de ordem $10^9 \left(\frac{m_e}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \sim 10^{15}$. Nesse caso, a expressão (9.5) só pode ser satisfeita se o denominador da esquerda for muito pequeno, ou seja, se X_e estiver muito próxima de 1: o que significa que todo hidrogênio se encontra ionizado.

Somente quando a temperatura cai muito abaixo de ϵ_0 ocorre uma recombinação considerável. Nessa linha, à medida em que X_e cai, a taxa de recombinação também cai, de modo que o equilíbrio se torna mais difícil de se manter. Assim, para se descrever a fração de elétrons livres com precisão é necessário resolver a equação de Boltzmann, que nos fornece a evolução temporal da fração de elétrons livres (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{dX_e}{dt} = (1 - X_e)\beta - n_b X_e^2 \alpha^2, \quad (9.6)$$

em que β representa a taxa de ionização e α é a taxa de recombinação, dadas por:

$$\beta \equiv \langle \sigma v \rangle \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\epsilon_0}{T}}, \quad (9.7)$$

$$\alpha^{(2)} \equiv \langle \sigma v \rangle, \quad (9.8)$$

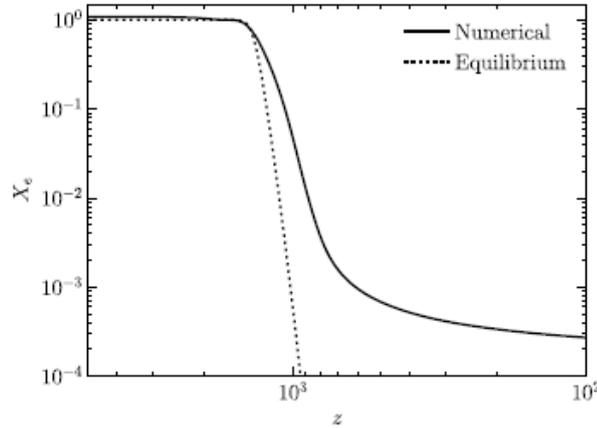
$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle = & \frac{1}{2n_1^0 n_2^0} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_2(p_1)} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2(p_2)} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3(p_3)} \\ & \times \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4(p_4)} e^{-\frac{E_1+E_2}{T}} (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}(p+q-p'-q') \delta_D^{(1)}[E_1+E_2-E_3-E_4] |M|^2. \end{aligned} \quad (9.9)$$

A taxa de recombinação α tem sobrescrito (2) porque a recombinação para o estado fundamental ($n = 1$) não é relevante, pois levam à produção de fótons ionizantes, que imediatamente ionizam um átomo neutro e o efeito líquido deles para a recombinação é zero: nenhum novo átomo neutro é formado dessa maneira. Diante disso, a única maneira da recombinação prosseguir é através da captura para um dos estados excitados do hidrogênio e uma boa aproximação para a taxa de recombinação é (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\alpha^{(2)} = 9,78 \left(\frac{\alpha}{m_e} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right). \quad (9.10)$$

A evolução detalhada de X_e é obtida integrando numericamente a equação (9.6). Os resultados dessa integração, considerando algumas complicações adicionais na taxa de recombinação (bem como a presença do hélio), são mostrados na Figura 31.

Figura 31 – A fração de elétrons livres em função do redshift z



Fonte: DODELSON e SCHMIDT (2021).

A linha contínua mostra a solução numérica completa, enquanto a linha pontilhada é o resultado do equilíbrio (oriundo da aproximação de Saha). A recombinação ocorre em $z \sim 1000$ correspondendo a uma temperatura $T \approx 0,23\text{eV}$. O resultado de equilíbrio identifica corretamente o redshift da recombinação, mas não a evolução de X_e , que é importante para uma previsão precisa das anisotropias da CMB.

Assim como a razão nêutron/próton afeta a abundância de elementos leves hoje, a evolução da abundância de elétrons livres tem grande importância para a Cosmologia. A

recombinação em $z_* \sim 1000$ está ligada ao desacoplamento de fótons da matéria e essa dissociação afeta diretamente o padrão de anisotropias na CMB observadas hoje.

A partir do conhecimento de X_e , portanto, podemos investigar com mais precisão o que ocorreu na época do desacoplamento, que se iniciou aproximadamente quando a taxa de fótons para o espalhamento Compton com elétrons se tornou menor do que a taxa de expansão. A taxa de espalhamento é, por definição:

$$n_e \sigma_T = (X_e n_b) \sigma_T, \quad (9.11)$$

onde $\sigma_T = 0,665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ é a seção de choque de Thomson. Negligenciando novamente a recombinação do hélio, assumindo que o número total de núcleos de hidrogênio (isto é, prótons livres + átomos de hidrogênio) é aproximadamente igual ao número total de bárions e observando que a razão entre a densidade bariônica e a densidade crítica é: $\frac{m_p n_b}{\rho_{cr}} = \Omega_b a^{-3}$, então a densidade numérica de bárions n_b pode ser escrita na equação acima em termos de Ω_b (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$n_e \sigma_T = (7,477 \cdot 10^{-30}) \Omega_b h^2 a^{-3} X_e. \quad (9.12)$$

O número que precede as variáveis é dado em centímetros. Dividindo esses termos pela taxa de expansão e rearranjando os termos, vem:

$$\frac{n_e \sigma_T}{H} = 123 X_e \left(\frac{\Omega_b h^2}{0,022} \right) \left(\frac{0,14}{\Omega_m h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+z}{1000} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{1+z}{3360} \right) \left(\frac{0,14}{\Omega_m h^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.13)$$

Ou seja, para grandes valores de redshift ($z \gg 10^3$), tem-se que: $X_e = 1$, então, a taxa de espalhamento é muito maior que a taxa de expansão. À medida em que z cai à 10^3 , a fração X_e começa a diminuir consideravelmente e a equação acima mostra que a taxa de espalhamento se torna menor que a taxa de expansão quando X_e cai abaixo de 10^{-2} . Essa é a época em que os fótons se desacoplam e a CMB é produzida.

A partir da Figura 31 observamos que a fração X_e cai assintoticamente quando $X_e \sim 10^{-3}$. Portanto, se pode inferir que o desacoplamento ocorre, de fato, durante o período de recombinação. Para o caso particular de um Universo que permanece ionizado ao longo de sua história, se teria $X_e = 1$, e a equação acima pode ser resolvida facilmente para encontrar o redshift z_D do desacoplamento. Se o lado direito for igual a 1 chega-se à uma expressão para a não-recombinação:

$$z_D = 39 \left(\frac{0,022}{\Omega_b h^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\Omega_m h^2}{0,14} \right)^{\frac{1}{3}} - 1, \quad (9.14)$$

em que, conforme mencionamos, z_D representa o redshift do desacoplamento. Essa equação informa que mesmo se o gás tivesse permanecido ionizado ao longo da história do Universo, os fótons eventualmente teriam se desacoplado simplesmente porque a expansão tornou mais difícil encontrar os elétrons livres.

A maior parte do gás difuso no Universo hoje é ionizado. Esse fato indica que, em algum momento da história do Universo, houve a reionização do hidrogênio: algumas observações de quasares mais distantes sugerem que a reionização ocorreu em um redshift $z > 6$. Além disso, resultados experimentais indicam que o espalhamento Compton de fótons é ativado após a reionização e isso leva a impressões na CMB, que podem ser usadas para restringir quando a reionização aconteceu (as melhores medições atuais apontam para um reionização em $z < 10$). No entanto, a última transição de fase do Universo ainda é uma questão que está em aberto (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Após a era da recombinação, a quantidade de elétrons livres caiu significativamente, levando a um livre caminho médio muito maior do que o comprimento de Hubble H_0^{-1} (que expressa a distância que um fóton teria que percorrer para alcançar um observador hoje). A partir desse período, os fótons viajam quase livremente de todos os pontos do espaço e em todas as direções.

9.5 O papel das oscilações e das perturbações de temperatura na CMB

Conforme vimos, o Universo primordial era preenchido por um fluido quente e denso: o fluido de bárions-fótons. O entendimento das oscilações e das flutuações gravitacionais desse fluido é extremamente importante para o estudo da origem da CMB. Para iniciar a análise do fluido de bárions-fótons, vamos considerar uma versão simplificada da equação que governa as perturbações dos fótons:

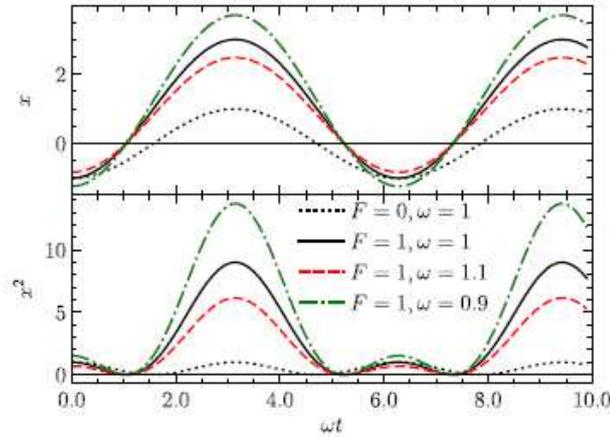
$$\theta_0'' + (k^2 c_s^2)\theta_0 = F, \quad (9.15)$$

em que F representa a força externa (de natureza gravitacional) que movimenta o fluido e c_s é a velocidade do som no fluido bárion-fóton. Essa é a equação de um oscilador harmônico forçado, que prevê, de maneira qualitativa, as oscilações. Nesse sentido, a frequência de um oscilador é determinada pela razão entre a “constante elástica” e a massa. Para o caso do fluido de bárions-fótons, essa relação fornece uma frequência de oscilação que aumenta quando diminuimos a carga de massa do fluido: a densidade bariônica Ω_b .

A força externa F é responsável por uma assimetria nos picos das oscilações: quanto maior for o valor de F e quanto menor a frequência, maior a assimetria entre os picos. Vamos considerar uma superdensidade inicial, de modo que F tenha a tendência de aumentar a superdensidade. Quando o fluido de bárions-fótons começou a se contrair, sua autogravidade e a força externa agiram em conjunto, levando a uma contração mais forte do que no caso $F = 0$. Por outro lado, à medida em que a pressão interna vence e empurra o plasma para fora (expansão máxima) ele age contra a força externa e, portanto,

leva a uma superdensidade com amplitude menor do que atingiria se $F = 0$. Observe a Figura 32.

Figura 32 – As soluções do oscilador harmônico amortecido para diferentes valores de força e frequência.



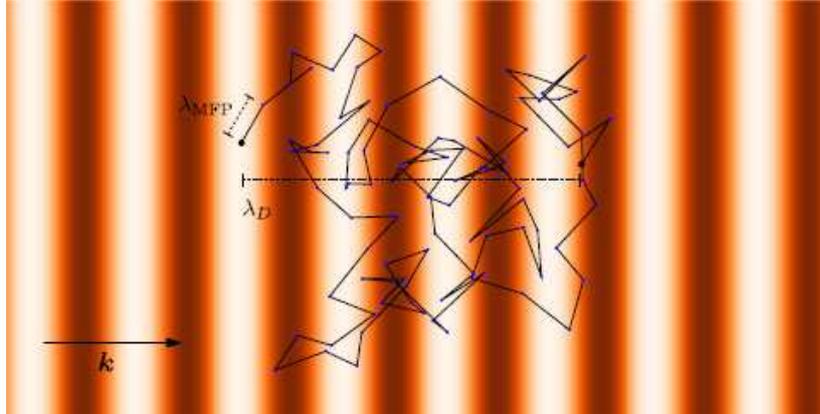
Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

No caso do fluido de bárions-fótons antes da época do desacoplamento, a aceleração externa era fornecida pelos gradientes de potenciais gravitacionais oriundos da matéria escura. Portanto, a assimetria entre picos é uma consequência direta da quantidade de matéria escura do Universo, mas também se acredita que o aumento do amortecimento e a dependência do tempo de F (que se assumiu ser constante) também influenciam nesse sentido (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Além das oscilações, o amortecimento observado nas pequenas escalas (onde $k\eta_0$ é maior ou da ordem de 500 para baixos valores de Ω_b) é outro efeito importante na física das perturbações de radiação. Para entender isso é necessário lembrar que a aproximação dos fótons e bárions se movendo juntos como um único fluido só é válida se a taxa de dispersão dos fótons pelos elétrons (e vice-versa) for infinita, condição que não é satisfeita na prática: os fótons percorrem uma distância finita entre duas colisões. Para ilustrar, considere o caminho de um único fóton à medida em que se espalha por um mar de elétrons, como ilustrado na Figura 33.

Note que o fóton percorre uma distância comóvel média λ_γ (ou um livre caminho médio, se preferir) entre duas dispersões. No caso analisado, o valor dessa distância é: $(n_e\sigma_T H^{-1}a)^{-1} = -\frac{1}{\tau}$, onde τ representa a profundidade óptica. Se a densidade n_e de elétrons for muito grande, então o caminho livre médio é correspondentemente pequeno. A partir disso podemos estimar que, ao longo de um tempo de Hubble H^{-1} , um fóton se espalha de ordem de $n_e\sigma_T H^{-1}$ vezes (simplesmente o produto da taxa de colisões pelo tempo), realizando um passeio aleatório. Como a distância total percorrida em uma trajetória aleatória é igual ao livre caminho médio vezes a raiz quadrada do número total

Figura 33 – Representação de um fóton que é dispersado diversas vezes em um mar de elétrons.



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

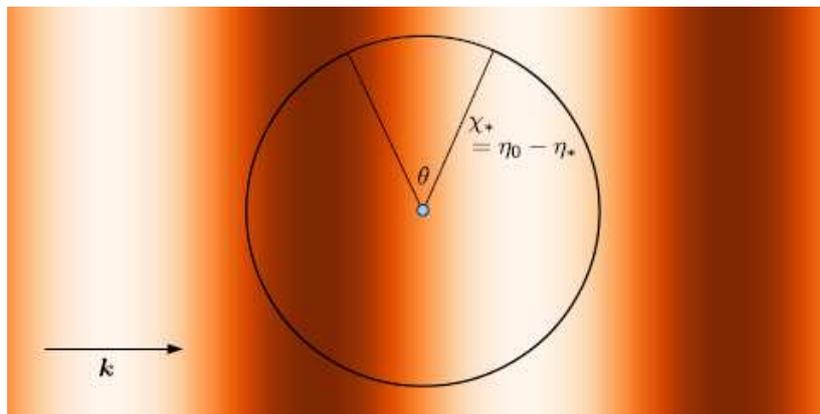
de colisões, um fóton cosmológico se move uma distância comóvel média de:

$$\lambda_T \sim \lambda_\gamma \sqrt{n_e \sigma_T H^{-1}} = \left(\frac{1}{n_e \sigma_T a} \right) \sqrt{n_e \sigma_T H^{-1}} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{n_e \sigma_T H}}, \quad (9.16)$$

em um tempo de Hubble. Pode-se esperar que qualquer perturbação em escalas menores que λ_T seja eliminada, porque os muitos fótons que se difundem sobre uma região de ordem λ_T terão restaurado a região a uma única temperatura média (DODELSON; SCHMIDT, 2021). No espaço de Fourier este efeito corresponde ao amortecimento de todos os modos mais altos que k . Esta análise qualitativa prevê uma dependência de Ω_b consistente com a que mostra a figura acima: reduzir a densidade bariônica leva a um λ_T maior (uma vez que a densidade numérica de elétrons n_e é proporcional a Ω_b quando o Universo é ionizado) e, portanto, se espera um amortecimento mais forte.

O passo final dessa análise é relacionarmos as perturbações na recombinação com as anisotropias observadas hoje. Considere um modo de Fourier, ou seja, uma perturbação de onda plana e observe a Figura 34.

Figura 34 – Perturbações na temperatura de uma onda plana com número de onda k .



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Após a recombinação, os fótons dos pontos quentes e frios viajam livremente, indicados pelo ponto azul no centro. Os modos k desses fótons contribuem com as anisotropias em uma distância angular $\Theta \sim k^{-1}/\chi_*$, onde $\chi_* = \eta_0 - \eta_*$ representa a distância comóvel até a superfície de último espalhamento (o raio do círculo acima). Os fótons de pontos quentes e frios separados por uma distância comóvel típica k^{-1} chegam aos detectores vindos de uma separação angular Θ e, se o campo de temperaturas for decomposto em momentos multipolares, então uma escala angular Θ corresponde aproximadamente a $1/l$. Assim, usando o fato de que $\eta_* \ll \eta_0$, podemos estimar as heterogeneidades nas escalas k em anisotropias nas escalas angulares usando a relação: $l \sim k\eta_0$.

Perceba que, nessa análise, assumimos implicitamente que nada acontece com os fótons em sua jornada da superfície de último espalhamento até a Terra, mas isso não é completamente verdadeiro: embora os potenciais gravitacionais sejam constantes no domínio da matéria, eles evoluem logo após a recombinação (devido à presença de radiação) e em momentos tardios (devido à energia escura). Os potenciais em evolução produzem perturbações adicionais aos fótons através do efeito Sachs-Wolfe Integrado (ISW), que voltaremos a falar mais tarde. Além disso, o Universo não é mais completamente neutro em redshifts z menores ou da ordem de 10, e a presença de elétrons livres leva à dispersão dos fótons da CMB que, por sua vez, amortece ligeiramente as anisotropias, modificando as perturbações primordiais e o espectro de anisotropias atual (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

9.6 Características físicas e estatísticas da CMB

O satélite COBE, lançado em novembro de 1989, forneceu pela primeira vez uma medição de céu completo das anisotropias CMB e ele também mediu pela primeira vez o espectro de potência da radiação de fundo de microondas. A observação revelou que o espectro da CMB é um corpo negro quase perfeito (ROSSMANITH, 2013). A partir desse espectro de corpo negro podemos concluir que, antes da era da recombinação, o Universo se encontrava em equilíbrio térmico devido às rápidas colisões de fótons com elétrons livres (e isso se manteve durante e após a recombinação).

9.6.1 Algumas propriedades da CMB

Apesar da CMB ter sido sintetizada em altas energias, ela atualmente apresenta uma temperatura de apenas $T_0 \approx 2,725K$ e um espectro de corpo negro, que é característico processos em equilíbrio térmico (ROSSMANITH, 2013). Em virtude disso, a sua temperatura é inversamente proporcional ao comprimento de onda λ no pico do espectro: $T \propto \lambda^{-1}$. Por sua vez, o comprimento λ é diretamente proporcional ao fator de escala, porque ele está inserido em um Universo em expansão: $\lambda \propto a(t)$. Com base nisso, podemos

obter uma relação direta entre a razão de temperaturas e a razão dos fatores de escala atual (em t_0) e no tempo de desacoplamento (em t_*):

$$\frac{T(t_*)}{T(t_0)} = \frac{a(t_0)}{a(t_*)}. \quad (9.17)$$

Com a ajuda dessas dependências, o redshift do desacoplamento z_* pode ser obtido a partir da temperatura da CMB nessa época e a sua temperatura observada atualmente:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \rightarrow z_* = \frac{T(t_*)}{T(t_0)} - 1. \quad (9.18)$$

As últimas observações determinam $z_* \approx 1090$ (ROSSMANITH, 2013).

Antes da era da recombinação, o espalhamento de Thomson dominava as interações entre os elétrons e os fótons. Este processo (elástico) mudou as direções dos fótons, mas não alterou a sua quantidade. Os processos que alteram o número de fótons são os espalhamentos *Bremstrahlung* e Compton, que têm espectros arbitrários em $z \approx 10^6$ e que termalizariam os fótons. Se não houver tempo suficiente para que os números de fótons mudem de temperatura, então o espectro deve se parecer com um corpo negro, mas com um deslocamento linear y para frequências mais altas (WINSTEIN, 2003).

A distribuição do número de fótons para um corpo negro puro é regida pela distribuição de Bose-Einstein e o espectro da CMB se ajusta a um corpo negro. Os limites correspondentes nas distorções espectrais são: $y < 15 \times 10^{-6}$ e $|\mu| < 9 \times 10^{-5}$, em que μ é o potencial químico. Esses valores e a proximidade entre os espectros da CMB e o de um corpo negro perfeito dão grande confiança de que nenhuma “injeção” de energia incomum ou inesperada, no nível de 10^{-5} vezes a energia total nos fótons, ocorreu depois de $z \approx 10^6$ (alguns meses após o Big Bang) (WINSTEIN, 2003).

Na Figura 35, segue a representação gráfica do espectro de corpo negro.

A relação matemática que melhor descreve o comportamento do gráfico dessa figura e, portanto, da intensidade da radiação de um corpo negro (como a CMB) em função do comprimento de onda é a lei de Planck (EVANS, 2015):

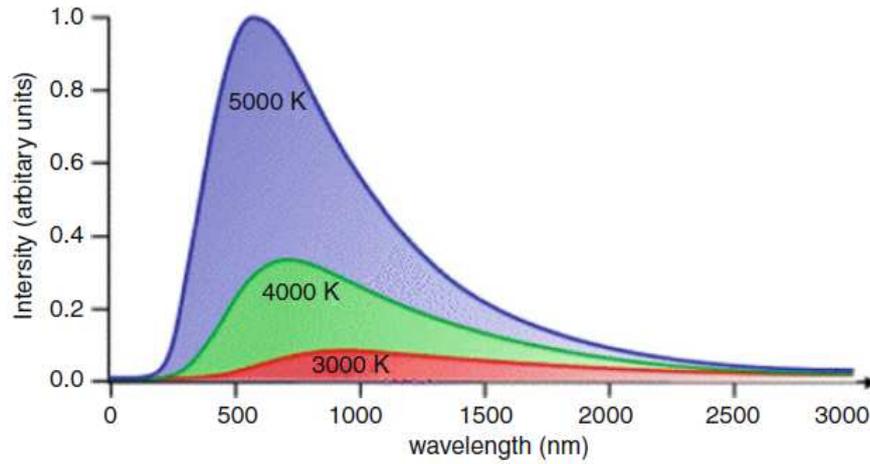
$$I(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}, \quad (9.19)$$

em que λ representa o comprimento de onda da radiação. Como o desacoplamento ocorreu em todos os pontos do espaço e ao mesmo tempo, vimos que a CMB é praticamente isotrópica e que as observações confirmam esta expectativa: as flutuações de temperatura T da radiação medida são cerca de cinco magnitudes menores que sua média:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}. \quad (9.20)$$

Para os casos de medições que negligenciam o dipolo da CMB, que é induzido pelo movimento relativo entre a Terra e o fundo de microondas e é cerca de cem vezes maior

Figura 35 – O espectro de corpo negro de três corpos de diferentes temperaturas (a posição do pico depende da temperatura T e a área sob a curva depende de T^4).



Fonte: EVANS (2015).

do que as flutuações de temperatura usuais (ROSSMANITH, 2013):

$$\frac{\Delta T_{\text{dipolo}}}{T} \approx 10^{-3}. \quad (9.21)$$

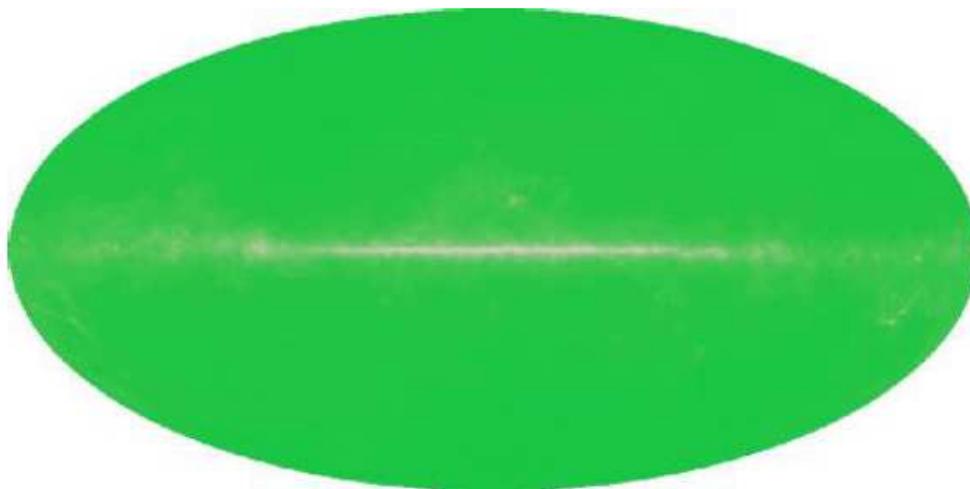
O estudo detalhado de alguns parâmetros cosmológicos da era da recombinação fornece os seguintes valores: $z = 1088 \pm 2$, $\delta z = 195 \pm 2$, $t = (379 \pm 8)10^3$ anos e $T_{\text{hoje}} = 2.728$ K (WINSTEIN, 2003).

A astrofísica aproveitou o espectro de corpo negro da CMB do seguinte modo: os telescópios medem a intensidade da radiação que chega de uma determinada fonte. Conhecendo essa intensidade e supondo que a fonte possa ser comparada a um corpo negro, podemos estimar quanta energia ela emite na frequência na qual estamos observando. Usando então a lei de Planck, determinamos a temperatura da fonte (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).

As Figuras 36, 37 e 38 apresentam os mapas das anisotropias da CMB na forma de um mapa do céu completo medido pelo WMAP e a Figura 39 representa as medições feitas pelo satélite Planck (MIRANDA, 2017).

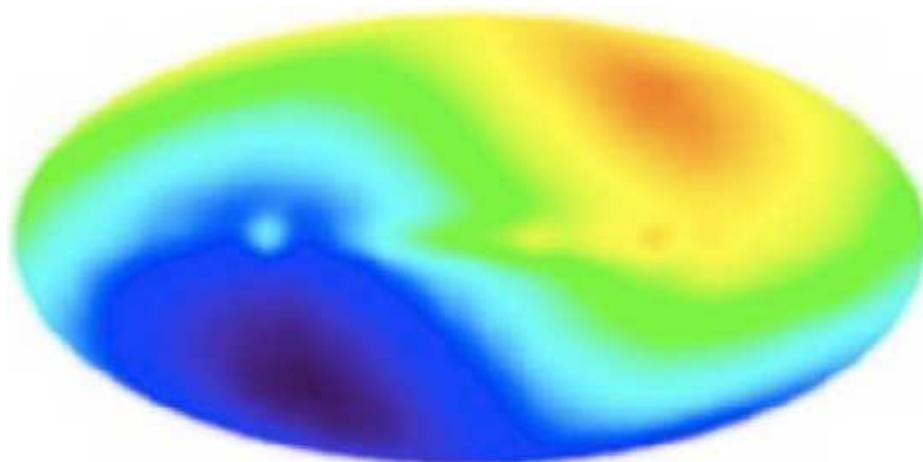
Agora, vamos considerar a Figura 40. A região vermelha no centro da elipse corresponde ao centro galáctico, que distorce fortemente as medições da CMB. Se desconsiderarmos o centro galáctico, podemos observar, à uma primeira vista, que a temperatura se mostra altamente isotrópica, apesar da presença de pequenas anisotropias (que representam as “sementes” do passado que formaram as estruturas cosmológicas de hoje). Estas anisotropias são uma consequência de pequenas flutuações de densidade durante o período da recombinação, cujos potenciais gravitacionais associados tiveram que ser “superados” pelos fótons da radiação.

Figura 36 – Monopolo da CMB observado pelo WMAP.



Fonte: MIRANDA (2017).

Figura 37 – Dipolo da CMB e redshift associado ao movimento relativo entre a via láctea e o grupo local observados pelo WMAP.

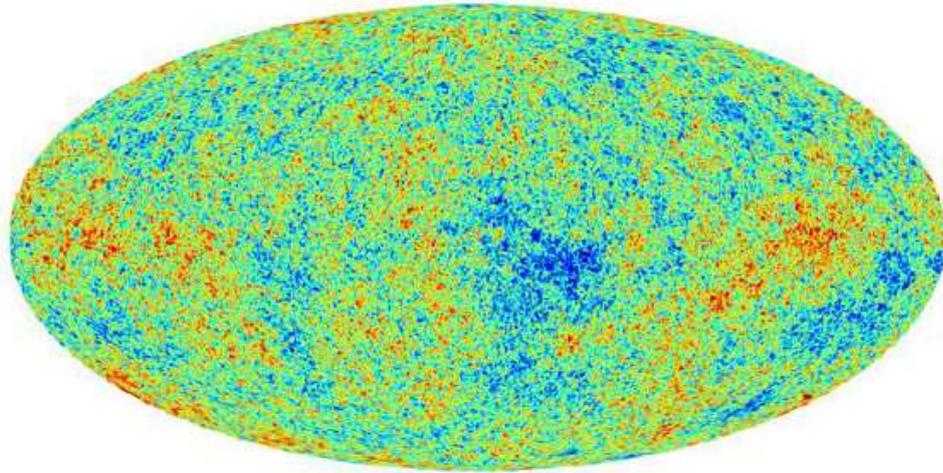


Fonte: MIRANDA (2017).

Uma das questões essenciais na Cosmologia hoje é se o fundo de microondas medido satisfaz os requisitos que a estrutura teórica exige: isotropia e gaussianidade (ROSSMANNITH, 2013). Embora essas duas propriedades frequentemente apareçam combinadas, elas descrevem efeitos diferentes:

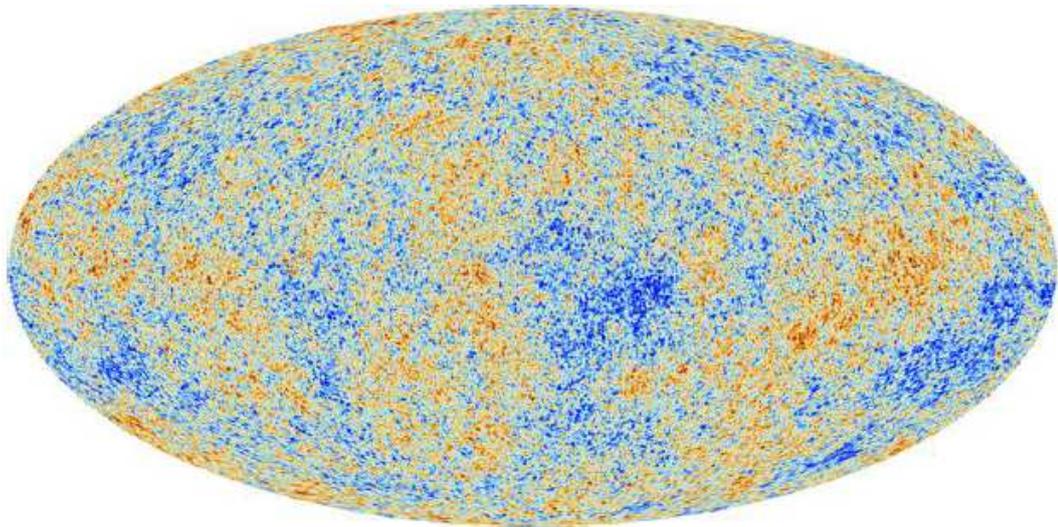
- A isotropia exige que não haja uma direção preferencial com características estruturais particulares. Quando este conceito é combinado com o Princípio de Copérnico (que postula a não excepcionalidade da nossa posição espacial) leva à homogeneidade. Com base nisso, dizemos que há anisotropias se existir pelo menos uma direção com desvios significativos do comportamento estrutural usual;
- A gaussianidade refere-se, neste mesmo contexto, à suposição de que os coeficientes dos harmônicos esféricos são variáveis aleatórias gaussianas independentes, isto é,

Figura 38 – Flutuações de temperatura da CMB observadas pelo WMAP.



Fonte: MIRANDA (2017).

Figura 39 – Flutuações de temperatura da CMB obtidas pelo Planck.

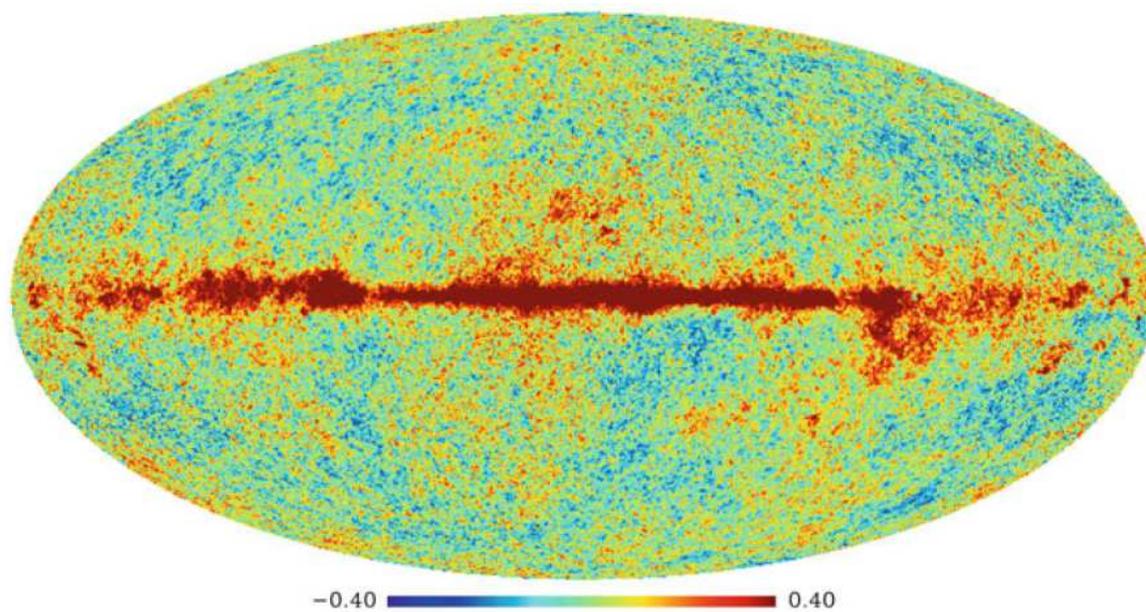


Fonte: MIRANDA (2017).

que são distribuídos da seguinte maneira:

$$P(a_{lm})da_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi C_l}} e^{-\frac{a_{lm}^2}{2C_l}} da_{lm}. \quad (9.22)$$

A variância pode ser expressa pelo respectivo valor do espectro de potência e, portanto, se a propriedade de gaussianidade for válida, o espectro de potência nos traz toda a informação que está contida na CMB. Matematicamente, isso significa que as amplitudes $|a_{lm}|$ devem seguir uma distribuição de Rayleigh, enquanto as fases ϕ_{lm} seguem uma distribuição uniforme no intervalo $[-\pi, \pi]$. Não há uma definição específica para a não-gaussianidade, mas podemos entendê-la como qualquer desvio possível da gaussianidade.

Figura 40 – Anisotropias da CMB ΔT (em μK) medida pela sonda WMAP.

Fonte: ROSSMANITH (2013).

9.6.2 Os efeitos que influenciam a CMB

Como vimos, a isotropia e a gaussianidade são características consequentes da física da inflação lenta de campo único, no entanto, outras teorias inflacionárias poderiam induzir anisotropias ou não-gaussianidades. Além disso, podem existir defeitos topológicos como cordas cósmicas ou fenômenos particulares como a ocorrência de grandes vazios, que podem gerar desvios das afirmações acima (ROSSMANITH, 2013). Diante disso, a detecção (ou não detecção) de anisotropias e de não-gaussianidades é de grande interesse físico, pois nos permite verificar a validade de diferentes modelos inflacionários e, com isso, esclarecer as condições básicas do Universo.

Por outro lado, existem alguns efeitos conhecidos que influenciam a gaussianidade e a isotropia, que podem ser divididos em efeitos relativos: à física do Universo primitivo (isto é, à CMB primordial) e às interações com o fundo de microondas durante a propagação dos fótons (as anisotropias secundárias).

A CMB primordial é afetada também pelo efeito Sachs-Wolfe, que descreve a existência de flutuações de densidade no Universo primitivo e de cujos poços potenciais os fótons precisaram escapar. Além disso, devemos considerar o amortecimento dos modos, uma vez que a recombinação não ocorreu instantaneamente.

Em contraste com isso, existem os efeitos na CMB que ocorreram após o desacoplamento, como o efeito Sachs-Wolfe integrado (ISW), que se refere aos campos gravitacionais dependentes do tempo e cujos poços de potencial diminuíram devido à expansão do Universo, o que levou a um desvio para o azul nos fótons que passam por esses campos. Outro efeito relevante é o efeito Sunyaev-Zel'dovich (SZ), que pode ser dividido em uma

parte térmica (que denota o espalhamento Compton dos fótons da CMB por gás de elétrons quentes em aglomerados de galáxias) e uma parte cinética (que descreve diversos espalhamentos devido ao movimento do gás nesses aglomerados). Como resultado das interações gravitacionais com a matéria, as lentes gravitacionais também são uma parte importante das anisotropias secundárias. Além desses efeitos, existem outras dificuldades técnicas que distorcem o sinal da CMB e, portanto, podem influenciar a isotropia e a gaussianidade medidas (ROSSMANITH, 2013).

9.6.3 Sobre o ferramental matemático

Existe mais de uma possibilidade de expressar as anisotropias da CMB formalmente. Uma maneira de se fazer isso é escrever as anisotropias como flutuações de temperatura $\Delta T(\vec{x}) = T(\vec{x}) - \langle T(\vec{x}) \rangle$, em que x representa a direção na qual a temperatura é medida. Uma observação importante é que os dados oriundos de diversos satélites (como o WMAP) são disponibilizados em um céu pixelizado e as mudanças de temperatura são escritas como: $\Delta T(x_i)$, com $i = 1, \dots, N$, onde N denota o número de pixels.

Por outro lado, podemos lembrar que os fótons atingem o observador de todas as direções, logo, o fundo de microondas pode ser encarado como a superfície de uma esfera S . Baseando-se nisso, podemos inferir que o mapa de temperaturas $\Delta T(\vec{x})$ pode ser expresso em termos dos harmônicos esféricos $Y_{lm} : S \rightarrow \mathbb{C}$ (os análogos esféricos das séries de Fourier) e de seus coeficientes a_{lm} (com $l \geq 0$ e $-l \leq m \leq l$) como segue:

$$T(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vec{x}). \quad (9.23)$$

Além disso, por conveniência, o vetor direcional \vec{x} pode ser substituído por uma combinação dos ângulos azimutal e planar $\vec{x} = (\theta, \phi)$ do sistema de coordenadas esféricas. A primeira soma em (9.23) teoricamente varia até o infinito, mas é usual estabelecer um máximo $l \leq l_{max}$. Assim, obtemos $(l_{max} + 1)^2$ harmônicos Y_{lm} diferentes no total (ROSSMANITH, 2013). Os harmônicos Y_{lm} formam uma base completa e ortonormal de funções complexas na esfera e são definidos através dos polinômios de Legendre $P_l^m(x)$ como:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l + 1(l - m)!}{4\pi(l + m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (9.24)$$

onde temos:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l. \quad (9.25)$$

O índice m especifica a orientação angular do harmônico esférico, enquanto o índice l está associado ao tamanho angular característico e é, portanto, isotrópico. Cada harmônico Y_{lm} tem a si associado um parâmetro a_{lm} , que pode ser calculado como uma

integral sobre a esfera completa S (e, portanto, sobre um ângulo sólido Ω):

$$a_{lm} = \int_S \bar{Y}_{lm}(\vec{x}) T(\vec{x}) d\Omega. \quad (9.26)$$

Nessa equação, o termo \bar{Y}_{lm} denota o complexo conjugado de Y_{lm} . Os parâmetros a_{lm} também possuem valores complexos e podem ser escritos como $a_{lm} = |a_{lm}| e^{i\phi_{lm}}$, cuja amplitude é $|a_{lm}|$ e cuja fase é ϕ_{lm} . Como o mapa resultante $T(\vec{x})$ contém apenas valores reais (observáveis), ele deve conter:

$$Y_{lm}(x) = (-1)^{|m|} \bar{Y}_{l,-m}(x). \quad (9.27)$$

Combinando essa expressão com (9.24), chegamos a:

$$a_{lm}(x) = (-1)^{|m|} \bar{a}_{l,-m}(x). \quad (9.28)$$

Desconsiderando a simplificação devido a l_{max} , o conjunto de a_{lm} 's contém todas as informações sobre o mapa de flutuações de temperatura $T(\vec{x})$ (ROSSMANITH, 2013).

Outra grandeza muito importante neste contexto é o espectro de potência, dado por:

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}|^2. \quad (9.29)$$

Em síntese, esse parâmetro representa a soma das amplitudes dos coeficientes de Fourier e descreve a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos. Como o espectro de potência (9.26) é baseado na suposição de que a CMB é isotrópica, então a distribuição dos a_{lm} 's deve ser independente do índice m (que está associada à direção de detecção dos fótons).

O espectro de potência é uma ferramenta muito útil em cosmologia e oferece uma infinidade de aplicações. A principal razão para isso é o fato de que, se a CMB for gaussiana, o espectro de potência caracteriza completamente todas as informações das anisotropias de temperatura $T(\vec{x})$. Desse modo, a gaussianidade da CMB proporcionaria uma imensa simplificação, tendo em vista que todas as informações sobre as propriedades estruturais da CMB seriam comprimidas nesse espectro.

Porém, a gaussianidade da CMB é controversa e a forma do espectro de potência está ligada à física dos primórdios do Universo. No plasma de bárions-fótons existente, a atração gravitacional e a repulsão da radiação nas regiões de superdensidade atuaram juntas para produzir oscilações acústicas e isso criou flutuações de temperatura na CMB, que refletem diretamente no perfil oscilatório do espectro de potência (ROSSMANITH, 2013).

Os dados do satélite WMAP mais recentes detectam três picos em $l \approx 200, 550, 800$, onde no primeiro é o mais pronunciado. Ao medir a forma e a localização desses picos, uma gama de inferências para parâmetros cosmológicos pode ser feita, principalmente

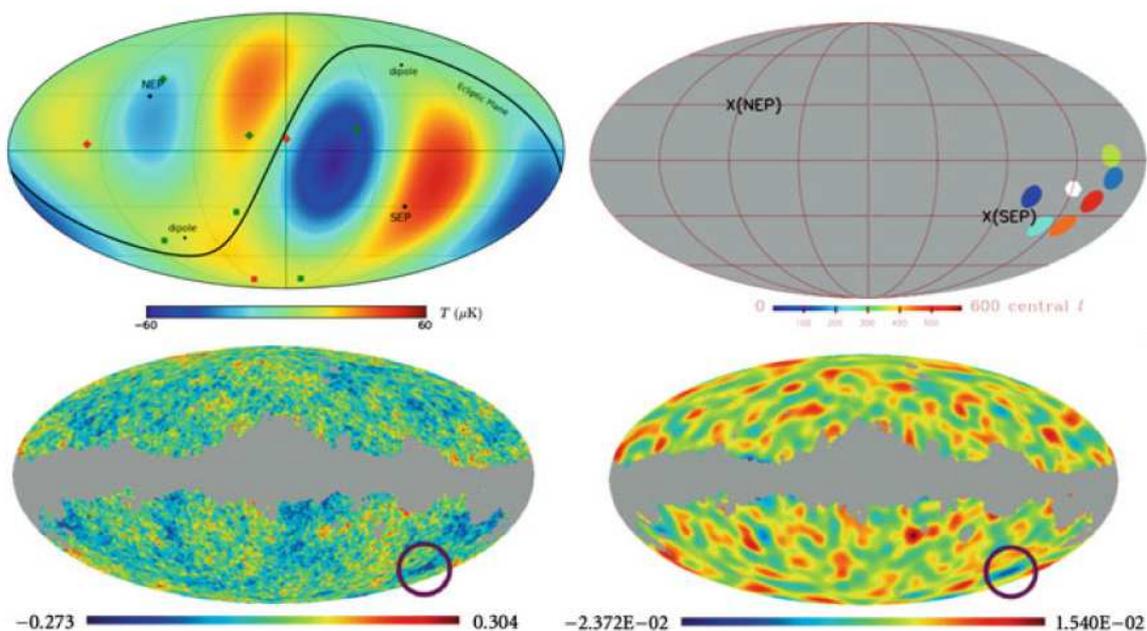
assumindo um modelo Λ CDM adiabático plano e ajustando seus parâmetros de forma que o espectro de potência resultante esteja de acordo com as medições (ROSSMANITH, 2013). Com base nesses procedimentos podemos obter diversas restrições sobre importantes parâmetros cosmológicos, como: as densidades de bárions Ω_b e de matéria total Ω_m , a idade t_0 e a curvatura k do Universo, o redshift da época da igualdade radiação-matéria z_{eq} e a fração de massa do hélio primordial Y_{He} .

9.6.4 Algumas discordâncias científicas e anomalias da CMB

Atualmente, uma grande parte da comunidade científica acredita que a CMB é isotrópica e não-gaussiana, pois as flutuações $T(\vec{x})$ da radiação de fundo parecem concordar com a previsão teórica à primeira vista, mas podemos destacar que há também um número crescente de análises que detectam inconsistências nos dados. Há uma infinidade de análises que descobriram desvios da gaussianidade em um sentido geral, mas também existem algumas características anômalas mais específicas na CMB, que foram objeto de muitas investigações. Os mais importantes são o alinhamento dos grandes multipolos, a assimetria de potência das flutuações de temperatura e a “mancha fria” (ROSSMANITH, 2013).

As detecções de um alinhamento anômalo do quadrupolo ($l = 2$) e do octopolo ($l = 3$) já foram relatada e descobriu-se que esse alinhamento envolve toda a faixa multipolar (de $l = 2$ até $l = 5$) e, desde então, é um tópico de várias investigações.

Figura 41 – Três diferentes anomalias (atualmente ainda inexplicadas) na CMB que foram detectadas nos últimos anos. As figuras da esquerda foram obtidas do WMAP e as da direita da análise Wavelet.



Fonte: ROSSMANITH (2013).

Considere a Figura 41. No canto superior esquerdo, o alinhamento anômalo do

quadrupolo e do octopolo é mostrado como um gráfico das anisotropias de temperatura de apenas esses dois multipolos e a curva preta marca a posição do plano da elipse. A probabilidade desse alinhamento acontecer por acaso é de cerca de 0,1% (ROSSMANITH, 2013). Além disso, o plano da elipse parece estar correlacionado a esse alinhamento e separa um ponto quente no céu do norte e uma “mancha fria” no sul.

A imagem do canto superior direito refere-se à assimetria de potência, que é ilustrada pelas direções dos dipolos das distribuições de potência estimadas ao considerar blocos de 100 multipolos cada. As cores dos discos especificam os centros das faixas multipolares, enquanto o hexágono branco indica a direção do dipolo do intervalo completo $l \in [2, 600]$, e as cruces marcam os polos eclípticos norte e sul, respectivamente. De acordo com a figura, os dipolos estão muito próximos uns dos outros, mas também próximos ao polo sul da elipse e ao dipolo do intervalo completo $l \in [2, 600]$ e isso implica que o hemisfério centrado nessas direções contém mais potência do que o hemisfério oposto. Além disso, os diferentes multipolos parecem estar correlacionados entre si. Nenhum efeito sistemático conhecido é capaz de explicar essa assimetria (ROSSMANITH, 2013).

No tocante às características locais, podemos destacar a famosa “mancha fria”, cuja detecção original foi realizada por meio de uma análise das anisotropias de temperatura da CMB e é mostrada nas figuras inferiores. No mapa inferior à direita (obtida da análise Wavelet), a “mancha fria” é claramente visível. Os efeitos sistemáticos ou contaminantes foram descartados como responsáveis por essa feição local e sua chance de ocorrer acidentalmente é em torno ou menor que 1%. Essa anomalia também carece de explicações (ROSSMANITH, 2013).

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 10 AS ANISOTROPIAS DA CMB

“A coisa mais importante realizada pela descoberta da CMB foi forçar todos nós a levar a sério a ideia de que havia um Universo primitivo”.

(Steven Weinberg)

10 As anisotropias da CMB

10.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“As anisotropias da CMB” traz à tona um dos elementos mais ricos em informação cosmológica da CMB: as não-homogeneidades na distribuição de temperaturas, isto é, as anisotropias. Nesse sentido, esta parte versa sobre os mais diversos tipos de anisotropias e apresenta e discute a estrutura do espectro de potência da CMB. A relevância desse capítulo vem à tona quando aprendemos que o espectro de potência fornece informações sobre a geometria, a história e a composição do Universo.

10.2 Algumas considerações iniciais

Como vimos, as perturbações primordiais criadas durante a inflação se manifestam tanto na distribuição da matéria quanto na radiação e, particularmente, ao compreendermos a evolução das perturbações (que são descritas pelas equações de Boltzmann-Einstein) dos fótons, podemos fazer previsões para o espectro de potência das anisotropias da CMB. A resolução numérica dessas equações produzem resultados (aproximados) que condizem com os dados experimentais.

Muito embora pareça ser extremamente uniforme, quando os instrumentos de medida permitiram um contraste maior nos mapas da CMB, visualizamos uma anisotropia que vem do movimento do sistema solar em relação à direção de propagação dos fótons. Aumentando ainda mais o contraste, observamos mais anisotropias na CMB que são causadas por processos físicos que ocorreram no caminho dos fótons, variações de potencial gravitacional na última superfície de espalhamento e até mesmo pelas inhomogeneidades causadas pela inflação. Ocorrendo a interação com o plasma quente dos momentos anteriores à recombinação e com as perturbações do espaço-tempo, a CMB também apresenta dois modos de polarização ([GUAITOLINI JUNIOR, 2012](#)).

Tecnicamente, a primeira anisotropia foi observada no final da década de 1970, decorrente do movimento do Sol através do campo de radiação de micro-ondas, criando um dipolo de magnitude 10^{-3} . Mas a anisotropia verdadeira (primordial) foi detectada primeiro pelo satélite COBE em 1992. O detector tinha um “feixe” de 7 graus, então as anisotropias só podiam ser detectadas em escalas maiores que esta. Regiões tão distantes nunca estiveram em contato causal umas com as outras (pelo menos não no modelo padrão do Big-Bang), então as anisotropias detectadas, da ordem de 10^{-5} ou $30\mu\text{K}$, precisam ser consideradas como “condições iniciais” ([WINSTEIN, 2003](#)).

As anisotropias na distribuição angular da CMB são o retrato do Universo na época da recombinação, mas sua forma geral foi estabelecida cerca de um picossegundo (10^{-12} segundos) após o Big-Bang. Já a componente tensorial da polarização da CMB está ligada à deformação do espaço-tempo causada pelas ondas gravitacionais primordiais geradas ao final da era de Planck, cerca de 10^{-43} s após o Big-Bang (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004).

Se conseguíssemos voltar à época em que tivemos a superfície de último espalhamento, observaríamos que esta era da ordem de 1° (um grau). Dessa maneira, através de informações que conseguimos obter via dados da CMB, podemos inferir que existiam inhomogeneidades na densidade do Universo primordial, uma vez que as anisotropias na temperatura da CMB superam a escala de um grau. Em outras palavras, ou essas inhomogeneidades já existiam antes do desacoplamento da CMB, ou estaríamos violando o princípio da causalidade (MONTEIRO, 2021).

Precisamos buscar explicar como essas inhomogeneidades foram inicialmente produzidas e como se desenvolveram a ponto de gerar o Universo como o conhecemos atualmente. Podemos encarar tais perturbações como “sementes” que se desenvolveram à medida em que o tempo passasse, visto que essas “sementes” tornam-se regiões nas quais a matéria se aglutina. Na época em que temos o Universo dominado por matéria, tais inhomogeneidades se desenvolvem via instabilidade de Jeans (MONTEIRO, 2021).

10.3 As anisotropias de larga escala angular

Acerca da CMB, vamos começar analisando-a em largas escalas: para encontrarmos a solução em larga escala para as perturbações do fóton, vamos partir da equação do super-horizonte: $\theta'_{r,0} = -\Phi'$. Após uma integração, obtemos: $\theta_0(\eta = 0) = \Phi(\eta = 0)/2$, com uma constante de integração C , que pode ser interpretada como a perturbação da curvatura, definida durante a inflação. Com base nisso, podemos reescrever o potencial Φ em termos da variável de evolução y e considerar o fato de que a recombinação ocorre muito depois da época da igualdade de densidades (quando $\rho_m \gg \rho_r$ e, portanto, $y \gg 1$) para obter:

$$\theta_0(k, \eta_*) = \frac{2}{3}\Phi(k, \eta_*). \quad (10.1)$$

A anisotropia de larga escala que é observada é $\theta_0 + \Psi$, que pode ser escrita como $\theta_0 - \Phi$, uma vez que podemos aproximar $\Psi \approx -\Phi$. Desse modo:

$$(\theta_0 + \Psi)(k, \eta_*) = -\frac{1}{5}C(k), \quad (10.2)$$

em que: $\Phi = \frac{3}{5}C(k)$ no domínio da matéria. Essa equação é útil para o cálculo do espectro de anisotropias em larga escala.

Outra maneira útil de expressar as perturbações em grande escala na recombinação é em termos do campo de perturbações da matéria escura. Como vimos, as condições iniciais nesses casos afirmam que: $\delta_c = C$. Integrando a equação de evolução em grande escala ($\delta'_c = -3\Phi'$), temos:

$$\delta_c(k, \eta_*) = \int_{\eta_{sh}}^{\eta_*} -3\Phi' d\eta = -3 \left[\Phi(k, \eta_*) - \frac{2}{3}C(k) \right] + C(k), \quad (10.3)$$

em que η_{sh} representa o tempo comóvel de super-horizonte. Note que o fator entre colchetes se reduz a zero quando $\eta_* \rightarrow 0$, coerentemente com as condições iniciais. Então, a anisotropia observada pode ser expressa em termos da superdensidade de matéria escura como:

$$(\theta_0 + \Psi)(k, \eta_*) = -\frac{1}{6}\delta_c(k, \eta_*). \quad (10.4)$$

Esta relação nos diz que a perturbação de temperatura observada em uma região superdensa é, surpreendentemente, negativa. Regiões superdensas de grande escala contêm fótons mais quentes na recombinação do que regiões subdensas: ou seja, $\theta_0 > 0$ quando $\Psi < 0$. No entanto, para chegar aos detectores, esses fótons devem sair de seus poços potenciais e, ao fazerem isso, os fótons perdem energia: essa é a explicação para as manchas frias do espectro de temperaturas. Por outro lado, essa perda de energia mais do que compensa o fato de que os fótons eram inicialmente mais quentes que a média, então $\theta_0 + \Psi$ era realmente negativo quando $\Psi < 0$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Em síntese, quando se observa pontos quentes em grande escala no céu da CMB hoje, estamos observando, na verdade, regiões que eram subdensas no momento da recombinação.

A outra característica importante da equação acima é o coeficiente $1/6$, que permite relacionar as variações fracionárias na temperatura $\Delta T/T$ (o lado esquerdo) com as variações fracionárias na densidade $\Delta\rho/\rho$ (o lado direito). A grosso modo, uma anisotropia de ordem 10^{-5} corresponde a uma superdensidade de $6 \cdot 10^{-5}$. O fator de 6 acima é importante na verificação de consistência das perturbações de densidade de matéria necessárias para formar a estrutura observada até hoje (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

10.4 Sobre as oscilações acústicas

Antes de elétrons e núcleos começarem a formar átomos (na era da recombinação, em η_*), o livre caminho médio de um fóton era muito menor que o horizonte. O espalhamento Compton fez com que o fluido de elétrons e prótons ficasse fortemente acoplado aos fótons. Para a análise física deste regime, podemos novamente utilizar as equações de Boltzmann.

10.4.1 A equação de Boltzmann e o acoplamento forte

Em síntese, o limite de acoplamento forte se aplica quando o livre caminho médio dos fótons é muito menor do que as escalas de interesse (essencialmente, isso é equivalente

a uma profundidade óptica $\tau \gg 1$). Nesse ponto, podemos admitir que, no limite $\tau \gg 1$, os únicos momentos θ_l não-desprezíveis são o monopolo ($l = 0$) e o dipolo ($l = 1$). Baseando-se nisso, podemos admitir que os fótons se comportam como um fluido, que pode ser descrito com apenas duas variáveis: a densidade ρ e a velocidade mássica (longitudinal) u . Para mostrar isso, se pode recorrer à equação de Boltzmann para fótons, transformando-a em um conjunto de equações acopladas para $\theta_l(k, \eta)$:

$$\theta' + (ik\mu)\theta = -\Phi - (ik\mu)\Psi - \tau' \left[\theta_0 - \theta + \mu u_b - \frac{1}{2} P_2(\mu) \Pi \right]. \quad (10.5)$$

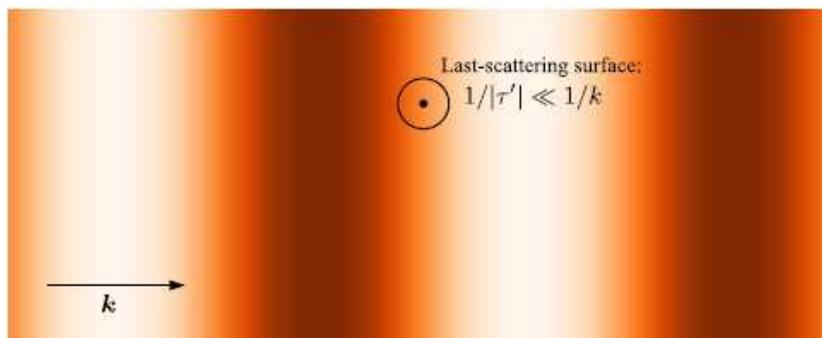
A estratégia é multiplicar essa relação pelos polinômios de Legendre $P_l(\mu)$, integrar em μ e usar a equação de Boltzmann para $l > 2$:

$$\theta_l \sim -\frac{k}{\tau'} \frac{l}{2l+1} \theta_{l-1}. \quad (10.6)$$

Como o livre caminho médio é definido como $\lambda_\gamma = -1/\tau'$, então o pré-fator acima é $k\lambda_\gamma$. Assim, para todos os modos k com comprimentos de onda muito maiores que o caminho livre médio, tem-se que: $\theta_l \ll \theta_{l-1}$ e isso mostra o porquê de podermos descartar o termo θ_{l+1} . Com base nessas considerações, presumimos que todos os momentos com $l > 1$ são muito pequenos em comparação com o monopolo e o dipolo.

Para entender a razão de momentos θ mais altos que o dipolo serem amortecidos em um ambiente rigidamente acoplado, considere uma perturbação de onda plana, conforme ilustrado na Figura 42.

Figura 42 – Anisotropias do acoplamento forte, para uma perturbação de escala muito maior do que o caminho livre médio dos fótons $1/|\tau'|$.

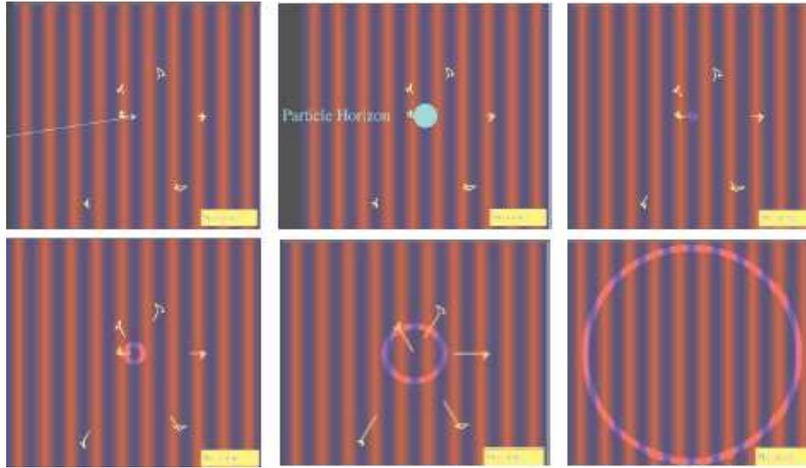


Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Os fótons medidos por um observador (indicado pelo ponto) vêm de uma distância da ordem do caminho livre médio $1/|\tau'|$, que é muito menor do que o comprimento de onda do modo. Assim, um observador vê fótons chegando de todos os ângulos com temperaturas praticamente idênticas: ele vai detectar um monopolo e um dipolo pequeno, com todos os momentos mais altos sendo desprezíveis (uma vez que a temperatura é praticamente constante dentro da região de origem dos fótons observados). Esse argumento não vale para

perturbações com comprimentos de onda muito pequenos (com $k/|\tau'| \sim 1$), porque esses modos são fortemente amortecidos pela difusão de fótons, uma vez que seus comprimentos de onda são muito menores que a escala de amortecimento (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Figura 43 – Assinaturas oriundas de um modo "congelado" após o desacoplamento matéria-radiação.



Fonte: WINSTEIN (2003).

De maneira ainda mais geral, podemos entender a evolução temporal dos multipolos de radiação (baseando-se na teoria da inflação) a partir da Figura 43. Estas ilustrações mostram, da esquerda para a direita, de cima para baixo: (1) um modo de temperatura T logo após o desacoplamento com o observador para onde a seta está apontando; (2) o horizonte de partículas do observador neste momento, quando apenas o monopolo pode ser detectado; (3) algum tempo depois, o quadrupolo é visto pela primeira vez; (4) em tempos ainda mais tardios, o quadrupolo passa a ser bem detectado; (5) muito mais tarde, o octupolo é detectado; (6) “hoje” é detectado um multipolo muito alto e bem alinhado. Todo esse raciocínio é válido apenas para um único modo k , no entanto (segundo o modelo inflacionário), acredita-se que no desacoplamento haviam vários modos k igualmente excitados (isto é, extraídos de uma mesma distribuição gaussiana) em todas as direções como condições iniciais (WINSTEIN, 2003).

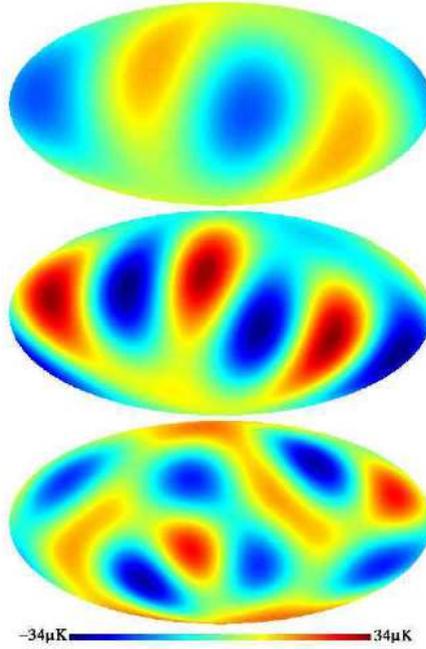
Na prática, os multipolos de radiação aparecem na esfera celeste da maneira ilustrada na Figura 44.

Com base nesse conhecimento, se pode voltar às equações que relacionam o monopolo e o dipolo que, após descartar o quadrupolo θ_2 , se tornam:

$$\theta'_0 + k\theta_1 = -\Phi', \quad (10.7)$$

$$\theta'_1 + \left(\frac{k}{3}\right)\theta_0 = \left(\frac{k}{3}\right)\Psi + \tau' \left(\theta_1 - \frac{i}{3}u_b\right). \quad (10.8)$$

Figura 44 – Representação do quadrupolo ($l = 2$), hexapolo ($l = 3$) e octupolo ($l = 4$) de radiação.



Fonte: WINSTEIN (2003).

Essas relações foram obtidas multiplicando a equação de Boltzmann para fótons por $P_0(\mu)$ e $P_1(\mu)$ e integrando sobre μ . Essas equações são complementadas pelas equações do fluido de bárions-fótons e, a partir disso, podemos obter uma expressão para a velocidade:

$$u_b \sim -3i\theta_1 + \frac{C}{\tau'} \left[-3i \left(\theta'_1 + \frac{a'}{a} \theta_1 \right) + ik\Psi \right]. \quad (10.9)$$

Nesse ponto, vamos aplicar (10.9) em (10.8) e obter uma nova equação:

$$\theta'_1 + \frac{a'}{a} \left(\frac{C}{C+1} \right) \theta_1 - \frac{1}{3} \left(\frac{k}{C+1} \right) \theta_0 = \left(\frac{k}{3} \right) \Psi. \quad (10.10)$$

Após isso, vamos derivar (10.7), isolar θ'_1 e aplicar em (10.10) para obter a seguinte equação de segunda ordem:

$$\theta''_0 + \frac{a'}{a} \left(\frac{C}{C+1} \right) \theta'_0 + k^2 c_s^2 \theta_0 = F(k, \eta), \quad (10.11)$$

onde se definiu a função de força F e a velocidade do som do fluido c_s como:

$$F(k, \eta) = -\frac{k^2}{3} \Psi - \frac{a'}{a} \left(\frac{C}{C+1} \right) \Phi' - \Phi'', \quad (10.12)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3}[1 + C(\eta)]}. \quad (10.13)$$

A velocidade do som no fluido depende da densidade de bárions no Universo: se a densidade do bárion é desprezível em comparação com a da radiação, então c_s tem o valor padrão para um fluido relativístico ($c_s = 1/\sqrt{3}$). A presença de bárions torna o fluido mais

pesado, diminuindo assim a velocidade do som, um comportamento análogo ao do termo $(k/m)x$ do oscilador harmônico forçado. O fluido de bárions-fótons oscila tanto no espaço quanto no tempo, com um período determinado pela velocidade do som e, portanto, pela densidade bariônica (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Por fim, observe que Φ entra à direita e θ_0 entra à esquerda e que existe uma versão alternativa de (10.11) que explora isso:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \left(\frac{C'}{C+1} \right) \frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2 \right] [\theta_0 + \Phi](k, \eta) = \frac{k^2}{3} \left[\frac{1}{C+1} \Phi - \Psi \right](k, \eta). \quad (10.14)$$

Observe que a combinação $\theta_0 + \Phi$, que é conveniente no contexto de acoplamento rígido, é diferente da combinação $\theta_0 + \Psi \sim \theta_0 - \Phi$, que produz a temperatura CMB observada hoje.

10.4.2 As soluções do acoplamento forte

A equação (10.14) governa as oscilações acústicas do fluido de bárions-fótons e é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para resolvê-la, se pode usar o método de Green: primeiro temos que encontrar as duas soluções para a equação homogênea e então conseguimos construir uma solução particular.

Primeiramente podemos observar que o termo de arrasto é de ordem $C(\theta_0 + \Phi)/\eta^2$, enquanto o termo de pressão é muito maior, de ordem $k^2 c_s^2 (\theta_0 + \Phi)$: mais precisamente, esse termo é maior quando os modos estão dentro do horizonte ou quando C é pequeno. Fisicamente, a escala de tempo das oscilações induzidas pela pressão é muito menor do que o tempo de expansão sobre o qual o arrasto opera.

Para uma primeira aproximação, então, se pode desprezar o termo de arrasto e simplesmente obter as soluções oscilantes:

$$S_1(k, \eta) = \text{sen}[kr_s(\eta)], \quad (10.15)$$

$$S_2(k, \eta) = \text{cos}[kr_s(\eta)], \quad (10.16)$$

$$r_s(\eta) \equiv \int_0^\eta c_s(\eta') d\eta', \quad (10.17)$$

onde os termos η' acima são postos somente para diferenciar a variável de integração e $r_s(\eta)$ é o horizonte sonoro. Como c_s é a velocidade do som no fluido, o horizonte sonoro representa a distância comóvel percorrida por uma onda sonora no tempo η . A solução fortemente acoplada para a temperatura do fóton pode ser construída (pelo método de Green) a partir das soluções homogêneas acima (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$[\theta_0 + \Phi](k, \eta) = [\theta_0 + \Phi](k, 0) \text{cos}(kr_s) - \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta \text{sen}[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')] [\Phi - \Psi](k, \eta') d\eta'. \quad (10.18)$$

Essa é uma expressão para a anisotropia no regime fortemente acoplado, que mostra as características das condições iniciais da inflação. O termo em cosseno decorre diretamente do fato de que as perturbações foram geradas quando saíram do horizonte durante a inflação e permaneceram constantes fora do horizonte. As condições iniciais do cosseno levam a oscilações coerentes em $\theta + \Phi$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

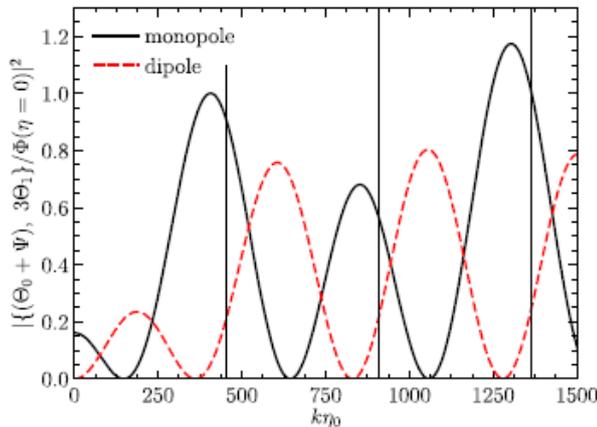
De fato, a equação (10.18) prediz com precisão as posições de pico obtidas de uma solução numérica completa, ou seja, os extremos de $\theta + \Psi$ em $\eta = \eta_*$ em função de k . Para avaliar (10.18) é necessário calcular a integral numérica de $(\Phi - \Psi)(k, \eta')$ no segundo termo. Para simplificar os cálculos, vamos considerar o limite em que o primeiro termo da equação acima domina, no qual os picos devem aparecer nos extremos de $\cos(kr_s)$, ou seja, nos valores de k tais que: $k_{pk} = n\pi/r_s$ (com $n = 1, 2, \dots$). Como vimos, além do monopolo, a distribuição de fótons tem um dipolo não-desprezível na recombinação.

Derivando (10.18) e usando a expressão de θ_0 de (10.7), chegamos a uma solução analítica para o dipolo:

$$\theta_1(k, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{3}}[\theta_0 + \Phi](k, 0) \text{sen}(kr_s) - \frac{k}{3} \int_0^\eta \cos[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')] [\Phi - \Psi](k, \eta') d\eta'. \quad (10.19)$$

Note que o primeiro termo está completamente fora de fase com o monopolo (pois um termo tem seno e o outro cosseno). A Figura 45 mostra que esta característica permanece mesmo após o cálculo da integral: esta incompatibilidade de fase tem implicações importantes no espectro de anisotropias final.

Figura 45 – Comportamento do monopolo $\theta + \Psi$ e do dipolo $3\theta_1$ na recombinação na cosmologia fiducial.



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

As posições de máximo são indicadas e o k_{pk} previsto está dentro de 10% do resultado numérico completo (DODELSON; SCHMIDT, 2021). As linhas verticais tracejadas indicam as localizações dos picos analíticos aproximados de k_{pk} . Perceba que o dipolo está

completamente fora de fase com o monopolo e desaparece para os modos de comprimentos de onda mais longos que não entraram no horizonte na recombinação.

10.5 O amortecimento da difusão

Outro aspecto essencial na análise dos espectros da CMB é o amortecimento da difusão. Para analisar quantitativamente a difusão, vamos retornar às equações dos momentos da distribuição de fótons (10.7) e (10.8). Até agora, o quadrupolo θ_2 e todos os momentos superiores foram negligenciados. Por outro lado, o fenômeno de difusão é caracterizado por um quadrupolo pequeno, mas não desprezível. Portanto, neste caso, devemos complementar o conjunto de equações escritas com uma expressão para o quadrupolo θ_2 .

Como os fenômenos de difusão ocorrem apenas em pequenas escalas, então os potenciais gravitacionais Φ e Ψ são muito menores que as perturbações de radiação: especificamente, eles são menores por um fator de $(aH/k)^2$. Além disso, temos que considerar novamente a hierarquia de momentos θ no regime fortemente acoplado, isto é, devemos levar em conta que cada momento sucessivo é suprimido por uma potência mais alta de $1/\tau'$. Assim, é necessário manter somente o momento $l = 2$, e todos os superiores podem ser desprezados. Com essas aproximações, chegamos às seguintes relações:

$$\theta'_0 + k\theta_1 = 0, \quad (10.20)$$

$$\theta'_1 + k \left(\frac{2}{3}\theta_2 - \frac{1}{3}\theta_0 \right) = \tau'(\theta_1 - \frac{i}{3}u_b), \quad (10.21)$$

$$\theta'_2 - \frac{2k}{5}\theta_1 = \frac{9}{10}\tau'\theta_2, \quad (10.22)$$

sem considerar a polarização. Para obtermos o ferramental matemático completo para a descrição do amortecimento, precisamos complementar essas equações com uma expressão para a velocidade mássica u_b . Para isso, vamos reescrever a expressão (10.9) da seguinte maneira:

$$3i\theta_1 + u_b = \frac{C}{\tau'} \left(u'_b - \frac{a'}{a}u_b \right), \quad (10.23)$$

onde, novamente, o potencial gravitacional foi negligenciado. Nesse ponto, vamos supor uma expressão para a velocidade mássica (dependente da frequência de oscilação ω) da forma: $u_b(\omega) \propto e^{i \int \omega d\eta}$. A partir disso e considerando as particularidades do regime fortemente acoplado, chegamos às expressões das perturbações e da velocidade mássica em termos da frequência ω :

$$u_b = -3i\theta_1 \left(1 - i\omega \frac{R}{\tau'} \right)^{-1} \sim -3i\theta_1 \left[1 + i\omega \frac{R}{\tau'} - \left(\frac{\omega C}{\tau'} \right)^2 \right], \quad (10.24)$$

$$\theta_2 = -4 \frac{k}{9\tau'} \theta_1, \quad (10.25)$$

$$\theta'_1 = i\omega\theta_1, \quad (10.26)$$

$$\theta_0 = - \left(\frac{k}{i\omega} \right) \theta_1. \quad (10.27)$$

Aplicando essas quatro equações em (10.21) e rearranjando os termos, chegamos à relação de dispersão:

$$\omega^2(1 + C) - \frac{k^2}{3} + \frac{i\omega}{\tau'} \left(\omega^2 C^2 + \frac{8k^2}{27} \right) = 0. \quad (10.28)$$

Os dois primeiros termos à esquerda (os principais na expansão de $1/\tau'$) recuperam os resultados anteriores: a frequência é o número de onda vezes a velocidade do som (não há termo de força nesse caso, pois os potenciais em pequenas escalas foram negligenciados). Com isso, se torna possível expressar a frequência como um termo de ordem zero mais uma correção de primeira ordem $\delta\omega$. Então, diferenciando a expressão de ω acima, tem-se que:

$$\delta\omega = -\frac{ik^2}{2(C+1)\tau'} \left(c_s^2 C^2 + \frac{8}{27} \right). \quad (10.29)$$

Portanto, a dependência temporal das perturbações monopolar e dipolar é: $\theta_0, \theta_1 \sim e^{ik \int c_s(\eta) d\eta} e^{-\frac{k^2}{k_D^2}}$, onde o número de onda de amortecimento $k_D(\eta)$ é definido segundo a expressão (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\frac{1}{k_D^2(\eta)} \equiv \int_0^\eta \frac{1}{6(C+1)n_e\sigma_T a(\eta')} \left(\frac{C^2}{C+1} + \frac{8}{9} \right) d\eta'. \quad (10.30)$$

Como primeira estimativa da escala de amortecimento, podemos trabalhar no regime de pré-recombinação, no qual todos os elétrons (exceto os do hélio) estão livres. Se a fração de massa de hélio (que é aproximadamente 0,24) for denotada como Y_{He} e como cada núcleo de hélio contém quatro núcleons, então a razão de hélio para o número total de núcleos é $Y_{He}/4$. Cada um deles absorve dois elétrons (um para cada próton) e, portanto, ao contar o número de elétrons livres antes da recombinação do hidrogênio, se deve multiplicar a estimativa por $1 - Y_{He}/2$. Usando o fato de que $H_0 = 3,33 \cdot 10^{-4} h \text{Mpc}^{-1}$, tem-se, muito antes da recombinação, que:

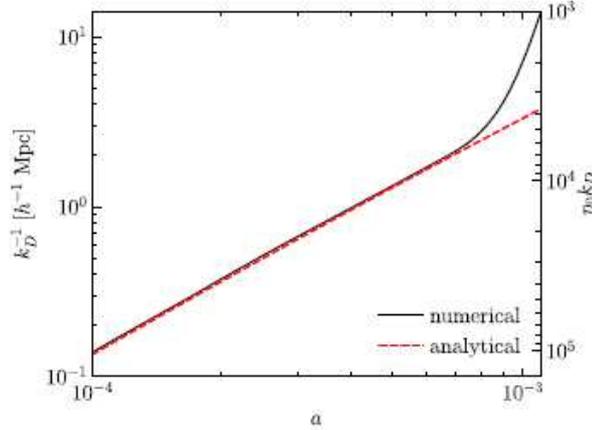
$$n_e\sigma_T a = (2,3 \cdot 10^{-5} \text{Mpc}^{-1} \Omega_b h^2 a^{-2}) \left(1 - \frac{Y_{He}}{2} \right). \quad (10.31)$$

Usando esse resultado, se pode fazer a seguinte aproximação para o número de onda de amortecimento (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$k_D^{-2} \approx \left[3,1 \cdot 10^6 \text{Mpc}^2 (\Omega_b h^2)^{-1} f_D \left(\frac{a}{a_{eq}} \right) a^{\frac{5}{2}} \right] \left(1 - \frac{Y_{He}}{2} \right)^{-1} (\Omega_m h^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10.32)$$

em que f_D é um parâmetro que tende a 1 quando a/a_{eq} fica grande. Considere a Figura 46, que mostra a evolução da escala de amortecimento antes da recombinação:

A linha sólida acima é obtida a partir da integração numérica, enquanto a curva tracejada usa a aproximação da equação acima para k_D^{-2} , que assume que os elétrons permanecem ionizados. O eixo da direita mostra o $k_D \eta_0$ equivalente: o amortecimento ocorre em pequenas escalas angulares, isto é, quando $k_D \eta_0 < 1$. Observe que desprezar a recombinação é uma boa aproximação em tempos iniciais, mas, como esperado, leva a

Figura 46 – Comportamento de k_D^{-1} em relação ao fator de escala a .

Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

erros consideráveis em tempos próximos de η_* , quando a relação de $n_e \sigma_T a$ é usada, porque a densidade eletrônica livre não leva em conta os elétrons capturados pelo próton do hidrogênio.

10.6 Heterogeneidades importantes

Conforme visto, é possível prever o comportamento de $\theta_0(k, \eta_*)$ e $\theta_1(k, \eta_*)$, dadas as condições iniciais $\Phi(k, 0)$, ou equivalentemente $C(k)$. Nesse ponto, podemos transformar esse entendimento em previsões para o espectro de anisotropias hoje: para isso, temos que resolver o momento θ_l no tempo η_0 e relacionar esses momentos com os observáveis. Após isso devemos vincular os momentos θ de hoje com o monopolo e o dipolo na recombinação e, com isso, expressar o espectro de potência da CMB em termos dos momentos observados hoje.

10.6.1 O fluxo livre

Como foi mencionado acima, o nosso objetivo é encontrar uma solução para os momentos do fóton hoje $\theta_l(k, \eta_0)$ em termos do monopolo e do dipolo na recombinação. Uma solução formal pode ser obtida retornando à equação de Boltzmann para fótons (6.39) e subtraindo o termo $\tau'\theta$ de ambos os lados:

$$\theta' + (ik\mu - \tau')\theta = \hat{S}, \quad (10.33)$$

onde \hat{S} representa a função de origem, que é definida como (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\hat{S} \equiv -\Phi' - (ik\mu)\Psi - \tau' \left[\theta_0 + \mu u_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right]. \quad (10.34)$$

Nesse ponto consideramos que o tempo inicial η_{ini} é pequeno o suficiente para que a profundidade óptica $\tau(\eta_{ini})$ seja extremamente grande e para que qualquer anisotro-

pia inicial seja completamente apagada pelo espalhamento Compton. Baseando-se nisso encontramos a solução para as anisotropias:

$$\theta(k, \mu, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} \hat{S}(k, \mu, \eta) e^{ik\mu(\eta - \eta_0 - \tau(\eta))} d\eta. \quad (10.35)$$

É possível notar que toda a dependência da direção do fóton está no argumento μ do lado direito (lembrando que μ é o cosseno do ângulo que o fóton faz com o gradiente de temperaturas). Então, toda a complicação matemática está oculta na função de origem \hat{S} . Para contornar isso, vamos ignorar a dependência de \hat{S} de μ por enquanto e transformar imediatamente a expressão acima em uma equação para cada um dos θ_l . Multiplicando cada lado pela metade do polinômio de Legendre $P_l(\mu)$ e integrando sobre todos os μ , teremos:

$$\theta_l(k, \eta_0) = (-1)^l \int_0^{\eta_0} \hat{S}(k, \eta) e^{i\tau(\eta)} j_l[k(\eta - \eta_0)] d\eta, \quad (10.36)$$

onde j_l representa as funções de Bessel. Calculando as integrais por partes, fazendo $\mu \rightarrow (-1/ik)(d/d\eta)$ e observando que a derivada não atua na parte oscilante da exponencial, chegamos a:

$$\theta_l(k, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} \hat{S}(k, \eta) j_l[k(\eta - \eta_0)] d\eta. \quad (10.37)$$

Nesta fase, é útil introduzir a função de visibilidade:

$$g(\eta) \equiv -\tau'(\eta) e^{-\tau(\eta)}. \quad (10.38)$$

Tendo em vista, por definição, que $\int_0^{\eta_0} g(\eta) d\eta = 1$, então se pode encarar a função de visibilidade como uma densidade de probabilidade: $g(\eta)$ é a probabilidade de que um fóton tenha se espalhado pela última vez em η (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Como τ é grande no início, essa probabilidade está próxima de zero para η antes da recombinação e decai rapidamente após a recombinação, porque $-\tau'$, a taxa de espalhamento, é bem pequena.

Com base na definição, podemos escrever a função de origem em termos da função de visibilidade. Calculando as derivadas de $S(k, \eta)$ e descartando o tensor de polarização na fonte (que é muito pequeno), a função de origem se torna:

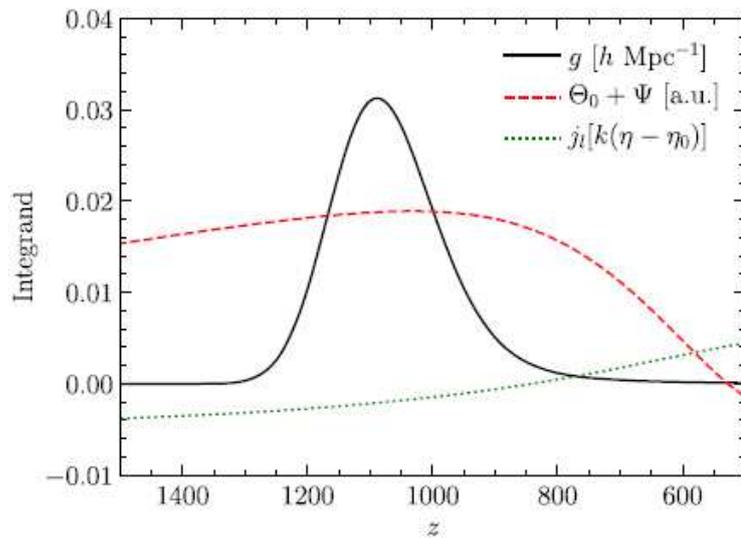
$$S(k, \eta) \sim g(\eta)[\theta_0(k, \eta) + \Psi(k, \eta)] + \frac{i}{k} \frac{d}{d\eta} [u_b(k, \eta)g(\eta)] + e^{-\tau} [\Psi'(k, \eta) - \Phi'(k, \eta)]. \quad (10.39)$$

Com esse resultado é possível levar a solução analítica um passo adiante calculando a integral de tempo comóvel em (10.37). A função de origem (proporcional a u_b) é melhor tratada integrando por partes, então:

$$\begin{aligned} \theta_l(k, \eta_0) &= \int_0^{\eta_0} g(\eta) [\theta_0(k, \eta) + \Psi(k, \eta)] j_l[k(\eta - \eta_0)] d\eta \\ &\quad - \frac{i}{k} \int_0^{\eta_0} u_b(k, \eta) g(\eta) \frac{d}{d\eta} \{j_l[k(\eta - \eta_0)]\} d\eta \\ &\quad + \int_0^{\eta_0} e^{-\tau} [\Psi'(k, \eta) - \Phi'(k, \eta)] j_l[k(\eta - \eta_0)] d\eta. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Existem dois tipos de termos equação acima: as duas primeiras integrais são ponderadas pela função de visibilidade (esses são os termos dominantes) e a última integral, por outro lado, é ponderada por $e^{-\tau}$, de modo que o integrando contribui em todos os momentos após a recombinação (pois $\tau < 1$). Observe que, se os potenciais forem constantes após a recombinação, que é o caso durante a dominação da matéria, a terceira integral desaparece (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Como a função de visibilidade tem um pico acentuado, as integrais nos dois primeiros termos se tornam muito simples. Para encher o porquê disto, considere a Figura 47, que mostra as três partes do integrando do primeiro termo (o “monopolo”) na equação (10.40).

Figura 47 – Os comportamentos dos integrandos de θ_l .



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Essa figura é uma comparação dos comportamentos da função de visibilidade $g(\eta)$ (a linha sólida preta) com os outros dois componentes do integrando na primeira linha da expressão (10.40). Perceba que a função de visibilidade tem um pico acentuado, de forma a mudar rapidamente em relação ao monopolo $\theta_0 + \Psi$ (em unidades arbitrárias) e à função de Bessel $j_l(k[\eta - \eta_0])$. Os resultados mostrados acima são para $l = 220$ e $k = 0,02 \text{ Mpc}^{-1}$, correspondendo ao primeiro pico do espectro de anisotropias da CMB.

Como a função de visibilidade muda rapidamente em comparação com as outras duas funções, podemos avaliar essas outras funções no pico da função de visibilidade (ou seja, em $\eta = \eta_*$) e removê-las da integral. No entanto, a integral se torna simplesmente

$\int_0^{\eta_0} g(\eta) d\eta = 1$ e se obtém (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$\begin{aligned} \theta_l(k, \eta_0) \simeq & [\theta_0 + \Psi](k, \eta) j_l[k(\eta - \eta_0)] \\ & + 3\theta_1(k, \eta_*) \left(j_{l-1}[k(\eta - \eta_*)] - (l+1) \frac{j_l[k(\eta - \eta_*)]}{k(\eta - \eta_*)} \right) \\ & + \int_0^{\eta_0} e^{-\tau} [\Psi'(k, \eta) - \Phi'(k, \eta)] j_l[k(\eta - \eta_0)] d\eta. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Em escalas muito menores, a soma $\theta_0 + \Psi$ muda mais rapidamente devido à rápida variação na escala de amortecimento em torno da recombinação. Uma aproximação representativa das mudanças rápidas na escala de amortecimento pode ser feita mudando-se o fator de multiplicação para:

$$e^{-\frac{k^2}{k_D^2(\eta_*)}} \rightarrow \int g(\eta) e^{-\frac{k^2}{k_D^2(\eta)}} d\eta. \quad (10.42)$$

A equação (10.41) é a base para cálculos semi-analíticos de espectros de anisotropia que concordam com as soluções numéricas dentro de uma tolerância $\sim 10\%$. Dessa equação se percebe que, para resolver as anisotropias hoje, se deve conhecer o monopolo (θ_0), o dipolo (θ_1) e o potencial (Ψ) no momento da recombinação. Além disso, haverá correções - representadas na última linha de (10.41) - se os potenciais forem dependentes do tempo, que são chamadas de termos integrados de Sachs-Wolfe.

O termo de monopolo em (10.41) é precisamente o que se esperava: primeiro, envolve a combinação $\theta_0 + \Psi$ da anisotropia de temperatura e do redshift gravitacional e, segundo, as funções de Bessel $j_l[k(\theta_0 - \eta_*)]$, que determinam quanta anisotropia em uma escala angular $l - 1$ é produzida por uma onda plana com número de onda k (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Em escalas angulares muito pequenas (quando $x/l \rightarrow 0$), tem-se que:

$$j_l(x) \rightarrow \frac{1}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^{l-\frac{1}{2}}. \quad (10.43)$$

Ou seja, $j_l(x)$ é extremamente pequeno para grandes valores de l , quando $x < l$. Esse resultado significa que $\theta_l(k, \eta_0)$ é muito próximo de zero para $l > k\eta_0$. Isso faz sentido fisicamente, pois se observa que escalas angulares muito pequenas “detectam” pouca anisotropia de uma perturbação com um grande comprimento de onda. E a recíproca também é verdadeira: escalas angulares maiores que $1/(k\eta_0)$ “detectam” pouca contribuição de perturbações de pequenas escalas. Resumindo, uma perturbação com número de onda k contribui predominantemente em escalas angulares de ordem $l \sim k\eta_0$.

10.6.2 O espectro de potência angular

Nesse ponto temos condições de saber como o padrão de anisotropias observado hoje está relacionado com os momentos $\theta_l(k, \eta_0)$ de perturbação de uma onda plana k . Em primeiro lugar, devemos obter uma expressão que nos forneça a maneira pela qual o campo

de temperaturas é descrito hoje e depois relacionar essa caracterização a θ_l . Baseando-se nisso, vamos escrever a temperatura do campo de radiação da CMB no Universo como:

$$T(x, \hat{p}, \eta) = T(\eta)[1 + \theta(x, \hat{p}, \eta)]. \quad (10.44)$$

Embora o campo T seja definido em cada ponto do espaço-tempo, só podemos observá-lo aqui (em x_0) e agora (em η_0), ou seja, a única abordagem possível sobre as anisotropias da CMB está na dependência da direção dos fótons que chegam \hat{p} . Assim, todas as informações relevantes advêm das mudanças de temperatura à medida em que o vetor direção \hat{p} muda.

Os observadores normalmente fazem mapas nos quais a temperatura é relatada em várias direções de entrada, ou “locais no céu”, que são rotulados não pelos componentes $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ de \hat{p} , mas sim pelas coordenadas esféricas θ e ϕ e, como vimos, se pode expandir a perturbação da temperatura em termos dos harmônicos esféricos. Todas as informações contidas no campo de temperaturas T também estão contidas em a_{lm} , as amplitudes dependentes de (x, η) (DODELSON; SCHMIDT, 2021). No entanto, de maneira análoga ao que acontece com as perturbações de densidade, não podemos prever qualquer valor de a_{lm} em particular, mas apenas a função de distribuição da qual esses coeficientes são extraídos.

É muito importante notar que, para um dado valor de l , cada a_{lm} tem a mesma variância, por exemplo: se $l = 100$, todos os 201 $a_{100,m}$ são extraídos da mesma distribuição e quando se mede esses 201 coeficientes se obtém um bom controle da variância subjacente da distribuição. Por outro lado, se as cinco componentes do quadrupolo ($l = 2$) forem medidas, então se terá muito menos precisão estatística na variância subjacente $C(2)$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Assim sendo, há uma incerteza fundamental (mais pronunciada em valores baixos de l) associada ao $C(l)$, que é chamada de variância cósmica. Quantitativamente, a incerteza aumenta como o inverso da raiz quadrada do número de amostras e, mais precisamente, a variância cósmica é a incerteza na estimativa de $C(l)$ depois de colher $n = 2l + 1$ amostras:

$$\text{Variância cósmica} = \frac{\Delta C(l)}{C(l)} = \sqrt{\frac{2}{2l + 1}}. \quad (10.45)$$

Na prática, esse limite nunca é totalmente alcançado, porque mesmo que um instrumento observe o céu inteiro (como os experimentos de satélite COBE, WMAP e Planck), a grande emissão da Via Láctea “mascara” algumas partes do céu (a galáxia é o nosso principal contaminante). Para uma medição baseada em uma fração f do céu completo, a amplitude de erro é aumentada em aproximadamente um fator $1/f$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

A função de transferência pode ser definida como (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$T(k, \hat{p}) \equiv \frac{\theta(k, \hat{p}, \eta_0)}{C(k)}. \quad (10.46)$$

Podemos, ainda, calcular o valor esperado das perturbações θ :

$$\langle \theta(k, \hat{p}) \theta^*(k', \hat{p}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(k - k') P_C(k) T(k, \hat{p}) T^*(k, \hat{p}'), \quad (10.47)$$

e obtermos, a partir da expressão de a_{lm}^2 , os termos $C(l)$:

$$C(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 P_C(k) |T_l(k)|^2 dk. \quad (10.48)$$

Para um dado l , então, a variância $C(l)$ é uma integral sobre todos os modos de Fourier da variância de $\theta_l(k)$, que é dada por $|T_l(k)|^2$ vezes a variância das perturbações de curvatura $P_C(k)$. Portanto, se pode utilizar as expressões (10.41) e (10.48) para calcular o espectro de anisotropias hoje.

10.7 O espectro de potência da CMB

10.7.1 As grandes escalas angulares

As anisotropias da CMB de grande ângulo são determinadas por modos de escalas extremamente grandes que entraram no horizonte em tempos recentes. Em função disso, esses modos oferecem uma maneira particularmente direta de medir as condições iniciais.

Nas grandes escalas angulares podemos negligenciar a presença dos dipolos e, desse modo, as anisotropias de grandes ângulos são determinadas pela soma $\theta_0 + \Psi$ avaliada na recombinação, além do último termo da expressão (10.41). A solução em larga escala encontrada afirma que a combinação $\theta_0 + \Psi$ é igual a $-C/5$, que pode ser encarada como uma expressão para $\theta_0 + \Psi$ (na recombinação) a ser inserida no termo monopolo de (10.41). Para obter o espectro de anisotropia hoje, se pode integrar semelhantemente ao feito em (10.48) para obter (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

$$C(l)^{SW} \sim \frac{2}{25\pi} \int_0^\infty k^2 P_C(k) |j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]|^2 dk, \quad (10.49)$$

em que o sobrescrito SW denota a presença do efeito Sachs-Wolfe. Aqui, podemos usar o fato de que $\eta_* \ll \eta_0$ e se definir uma nova variável de integração: $x \equiv k\eta_0$. Então, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$C(l)^{SW} \sim \frac{4\pi}{25} A_s (\eta_0 k_p)^{1-n_s} \int_0^\infty x^{n_s-2} j_l^2(x) dx. \quad (10.50)$$

Em que n_s é o índice espectral escalar e A_s representa o fator de normalização do espectro primordial. Com algumas manipulações algébricas envolvendo as funções de Bessel, chegamos a:

$$l(l+1)C(l)^{SW} = \frac{8}{25} A_s. \quad (10.51)$$

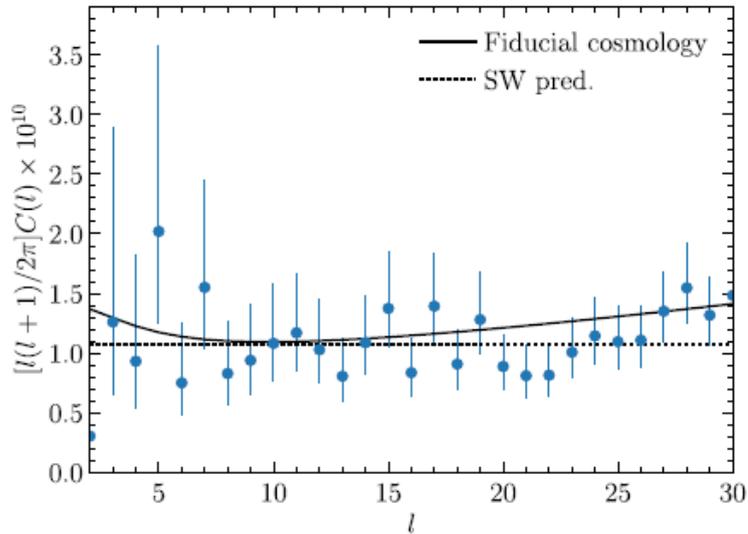
Conforme sabemos, o inflaton estava em um regime de slow-roll. Sendo assim, os valores de campo ϕ e de potencial V associados se alteram quando tratamos de modos que

cruzam o horizonte em épocas distintas. Diante de tais observações, temos que encontrar uma quantidade que estime esse desvio da escala invariante. Tal desvio é dado pelo índice espectral escalar n_s . Por outro lado, o fator A_s corresponde à amplitude dos modos k (uma escala que pode ser medida na CMB) (MONTEIRO, 2021).

O termo $l(l+1)C(l)$ representa a variância das anisotropias de temperatura por intervalo logarítmico de l , analogamente ao que ocorre com $k^3P_C(k)$ para o espectro de potência tridimensional. Como esse último termo é uma constante (se o índice espectral $n_s = 1$) é de se esperar que $l(l+1)C(l)$ se torne uma constante neste caso (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Por conveniência, traçamos o termo $l(l+1)C(l)$ em função de l em uma escala logarítmica, que o faz se tornar aproximadamente constante em valores baixos de l . A Figura 48 mostra as medidas do satélite Planck das anisotropias de grande escala angular junto com as soluções de Boltzmann do modelo fiducial euclidiano:

Figura 48 – A linha pontilhada mostra o platô de Sachs-Wolfe invariante de escala, que é previsto pela expressão (10.51).



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

O desvio de uma constante é devido ao efeito Sachs-Wolfe e a contribuição do dipolo, que se torna considerável em valores mais altos de l . Apesar disso, note, a equação (10.51) fornece uma aproximação razoável. Como o eixo y fornece a variância associada a uma dada escala l , se pode obter um valor para a amplitude das flutuações de grande escala angular: aproximadamente, $\langle \Delta T/T_0 \rangle^2 \sim 10^{-10}$, e então as flutuações RMS são a raiz quadrada disso (de ordem $10^{-5}T_0 = 27\mu\text{K}$).

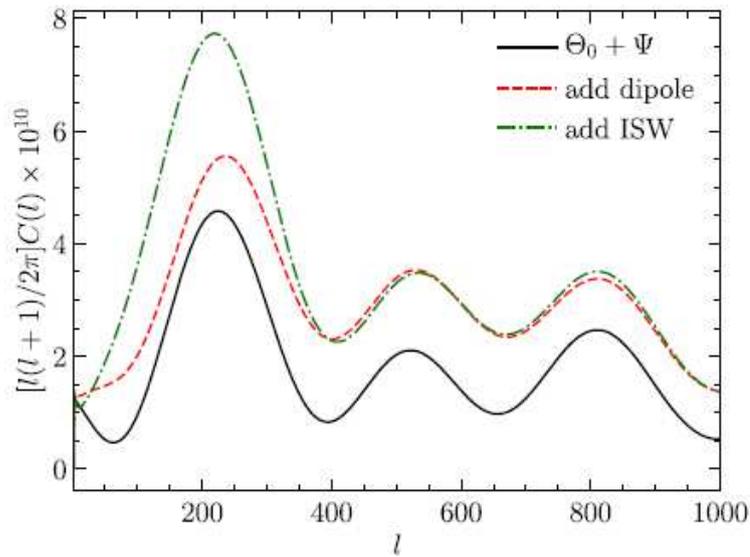
Indo além do caso invariante de escala, seguindo o resultado analítico, o espectro de potência multiplicado por $l(l+1)$ deve ser dimensionado como $(l/l_p)^{n_s-1}$, onde l_p é o número de onda angular correspondente aproximadamente à escala k_p (DODELSON;

SCHMIDT, 2021). Se observa, em (10.50), que o integrando tem um pico em $x \sim l$, então aproximadamente todos os termos x podem ser substituídos por l . A generalização do integrando de $x - 1$ para x^{n_s-2} , portanto, leva a uma mudança no espectro que é proporcional a l^{n_s-1} . Dada a pequenez de $n_s - 1$, esta escala é, no entanto, mascarada por outras contribuições. Para obter restrições para o índice espectral, bem como para a amplitude, os dados devem abranger uma faixa maior em l , ou seja, se deve incluir as anisotropias de escalas menores.

10.7.2 Os picos acústicos

Em escalas menores, ou seja, naquelas que estão dentro do horizonte na recombinação, o espectro de anisotropias passa a depender de todos os termos da equação (10.41): do monopolo θ_0 , do dipolo θ_1 e do efeito Sachs Wolfe integrado (que é proporcional à integral: $\int(\Psi - \Phi)'d\eta$).

Figura 49 – Comportamento de $\theta_0 + \Psi$ em função de l .



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

A Figura 49 mostra todas essas contribuições para o espectro de potência angular. O monopolo na recombinação $(\theta_0 + \Psi)(k, \eta_*)$ flui livremente hoje, criando anisotropias em escalas angulares $l \sim k\eta_0$. Existem duas características importantes do aspecto quantitativo no fluxo livre. Primeiro, observe que os “vales” no espectro do monopolo, em $l \sim 70, 400, 650$ e 1000 , são suavizados porque muitos modos de Fourier contribuem para a anisotropia em uma determinada escala angular. Por exemplo, se apenas os modos $k = 200/\eta_0$ contribuíssem para a anisotropia em $l = 200$, então $C(200)$ seria realmente zero. Mas muitos modos diferentes de zero, com números de onda diferentes de $200/\eta_0$, contribuem e isso altera o zero para um vale no espectro $C(l)$.

A segunda característica importante do fluxo livre é que a estimativa inicial das posições dos picos não está exatamente correta: a falta de homogeneidade na escala k não aparece como anisotropia precisamente na escala angular $l = k\eta_0$, em vez disso, há uma mudança perceptível, sugerindo que um determinado modo k contribui para l um pouco menos do que era previsto. Este desvio surge parcialmente da função de Bessel da expressão (10.41): o pico na função de Bessel não ocorre quando $l = k\eta_0$, mas sim em valores ligeiramente menores de l . Uma melhor aproximação para a primeira posição de pico é $l_p \sim 0,75\pi\eta_0/r_s$. Além disso, sabe-se que o dipolo na recombinação é menor que o monopolo e que está fora de fase com ele. A linha tracejada na figura acima mostra que o efeito de considerá-lo é aumentar o nível geral de anisotropias, mais em particular na região dos vales, diminuindo a proeminência dos picos. Esta é uma manifestação direta do dipolo e do monopolo estarem fora de fase um com o outro, ou seja, nos locais onde o monopolo contribui menos para as anisotropias, em seus vales, o dipolo contribui mais. Outra característica das contribuições do monopolo e do dipolo é que elas se somam de forma incoerente, isto é, o termo cruzado de θ_l do monopolo multiplicado pelo θ_l do dipolo desaparece após a integração em todos os modos k na obtenção de $C(l)$. A incoerência implica que o dipolo não influi muito no espectro de potência: a amplitude do dipolo é cerca de 30% daquela do monopolo na recombinação e a contribuição do dipolo para o $C(l)$ é de apenas 10% (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

A terceira contribuição é do efeito Sachs-Wolfe integrado devido à evolução temporal dos potenciais após a recombinação, que se deve principalmente ao fato de que a densidade de energia na radiação não é totalmente desprezível na recombinação (se o Universo fosse puramente dominado pela matéria, tal efeito não existiria). Apesar da transição para o domínio da matéria não ter sido abrupta (e mesmo que $a_{eq} \sim 10^{-4}$), o efeito Sachs-Wolfe ocorreu logo após a recombinação.

Para analisarmos quais escalas foram afetadas pelo efeito Sachs-Wolfe, vamos considerar a integral na equação (10.41). Suponha que o potencial evolua no tempo η_c , com todas as escalas de sub-horizonte ($k\eta_c > 1$) sendo afetadas. A função de Bessel tem um pico em $l \sim k(\eta_0 - \eta_c)$, então todas as escalas angulares $l > (\eta_0 - \eta_c)/\eta_c$ foram afetadas. Este efeito Sachs-Wolfe inicial é particularmente importante porque se adiciona de forma coerente com o monopolo. Para ver isso, se pode integrar o último termo de (10.41) por partes. A contribuição dominante vem de $\eta \sim \eta_*$, então a função de Bessel pode ser avaliada nesse instante, deixando a integral trivial (DODELSON; SCHMIDT, 2021):

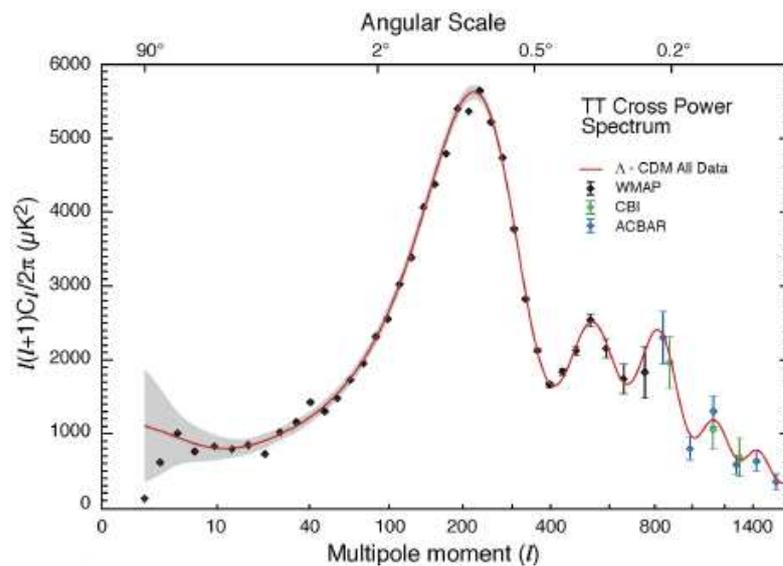
$$\theta_l(k, \eta_0) = [\Psi(k, \eta_0) - \Psi(k, \eta_*) - \Phi(k, \eta_0) + \Phi(k, \eta_*)]j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]. \quad (10.52)$$

Esse termo se soma exatamente em fase com o monopolo (que é proporcional à mesma função de Bessel), de modo que, embora a magnitude do efeito em l seja muito menor do que o dipolo, o efeito no espectro de anisotropias é comparável: por exemplo, um dipolo de 30% leva a um deslocamento de 10% no $C(l)$, enquanto um efeito Sachs-Wolfe de 5%

leva ao mesmo deslocamento de 10% no $C(l)$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021). A linha pontilhada na figura anterior mostra que as anisotropias em grandes escalas, aquelas com $l < \eta_0/\eta_*$, receberam um grande impulso deste efeito Sachs-Wolfe inicial.

Posteriormente, o efeito Sachs-Wolfe tardio ocorreu quando os potenciais decaíram durante a época de energia escura em $z < 1$. Esse efeito tardio, portanto, é restrito a escalas extremamente grandes ($l < 30$) e é pouco visível ao plotar $C(l)$ em uma escala linear em l . A maneira mais direta de detectar esse efeito é correlacionar as anisotropias da CMB de grandes escalas angulares com a estrutura de grande escala em baixos valores de redshift. Aliando isso a uma escala logarítmica de l , chegamos ao resultado da Figura 50.

Figura 50 – O espectro de potência da CMB.



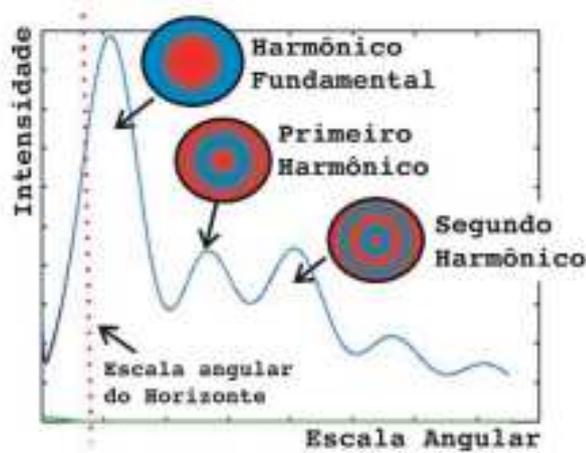
Fonte: WINSTEIN (2003).

Os picos são reflexos das oscilações acústicas no plasma. Podemos associá-los com os modos harmônicos dessa oscilação. O primeiro pico representa o harmônico fundamental – a maior onda que poderia aparecer no meio. Sendo assim, ela define o tamanho do Universo observável, ou escala angular do horizonte. Os outros picos estão ligados aos outros harmônicos. A consequência dessa associação é que podemos determinar algumas das quantidades fundamentais do Universo (idade, composição, geometria) com base no número, largura, altura e posição dos picos (VILLELA; FERREIRA; WUENSCHÉ, 2004). Podemos ilustrar essa representação como na Figura 51.

10.8 Os parâmetros cosmológicos

A estrutura do espectro de potência das anisotropias da CMB depende de vários parâmetros cosmológicos. Desse modo, ao medi-lo com precisão, podemos restringir diversos parâmetros importantes que, em muitos casos, apresentam degenerescências parciais (o

Figura 51 – Representação do espectro de flutuações de temperatura.



Fonte: VILLELA, FERREIRA e WUENSCHÉ (2004).

efeito de variar um parâmetro pode ser imitado variando outros parâmetros de maneiras específicas). Considere os sete parâmetros da CMB a seguir:

- Parâmetro de curvatura, $\Omega_K \equiv 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$ (geralmente definido como sendo zero no modelo de concordância).
- Amplitude do espectro primordial A_s .
- Índice espectral escalar n_s .
- Constante cosmológica, parametrizada por Ω_Λ .
- Profundidade óptica na recombinação τ_{rei} .
- Densidade de bárions $\Omega_b h^2$.
- Densidade de matéria escura $\Omega_c h^2$.

Em primeiro lugar, obviamente, não estão inclusos nessa lista todos os parâmetros cosmológicos possíveis, como as massas de neutrinos (cujo valor mínimo experimentalmente permitido é $\sum m_\nu = 0,06\text{eV}$), a equação de estado para energia escura w (fixada, nesse caso, em -1 correspondendo a uma constante cosmológica) e os modos tensoriais (de amplitude fixada em zero) (DODELSON; SCHMIDT, 2021). A principal razão para essas omissões de parâmetros é que os mesmos não são diretamente limitados pelo espectro de potência da CMB: os efeitos dos neutrinos massivos e dos parâmetros ligados à energia escura são muito pequenos nos primeiros tempos.

Outro ponto importante é que se escolheu deliberadamente combinações específicas de alguns desses parâmetros, por exemplo, $\Omega_b h^2$, e não Ω_b e h separadamente. Observe que, ao se adotar Ω_K e Ω_Λ além de $\Omega_m h^2 = (\Omega_b + \Omega_c) h^2$, se considera efetivamente o parâmetro

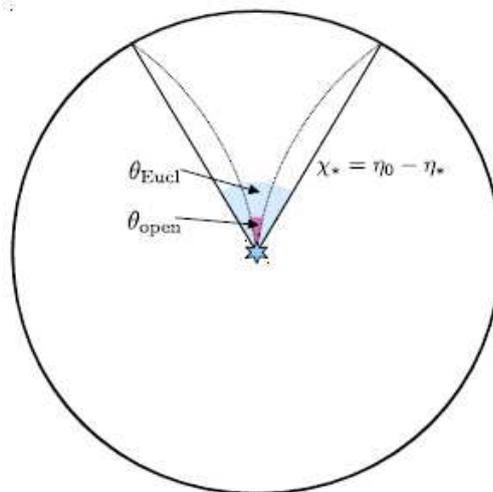
de Hubble, pois Ω_m é fixado pela restrição $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_K$. As densidades de matéria física são muito mais relevantes para as anisotropias da CMB do que, por exemplo, o parâmetro de densidade Ω_m , e o mesmo vale para os bárions. Finalmente, a densidade de energia física de fótons $\Omega_\gamma h^2$ pode ser determinada através da temperatura da CMB. Diante disso, podemos inferir que a época da igualdade a_{eq} é essencialmente uma função apenas do parâmetro $\Omega_m h^2$.

10.8.1 A curvatura e Λ

O primeiro pico do espectro está associado à curvatura e à energia escura. A comparação entre a escala de pico acústico prevista e a sua extensão angular fornece uma medição da distância do diâmetro angular até a recombinação. A distância do diâmetro angular, por sua vez, depende da curvatura espacial e da história de expansão do Universo. A sensibilidade ao histórico de expansão durante a época de aceleração ocorre através da distância radial que um fóton percorre ao longo da linha geodésica. Com as densidades de matéria e energia de radiação medidas, o contribuinte restante para a taxa de expansão $H(z)$ é justamente a energia escura (HU, 2008).

Se o Universo não for euclidiano, então as linhas geodésicas de fótons (que começam paralelas entre si) convergem ou divergem. Vamos supor que o padrão de heterogeneidades estivesse em vigor na recombinação tanto em um Universo euclidiano quanto em um Universo aberto (uma aproximação muito boa para pequenos valores de Ω_K) (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Conforme mostrado na Figura 52, uma escala fixa (como a do primeiro pico do espectro de potência, por exemplo) é projetada em uma escala angular muito menor em um Universo aberto. Os picos, portanto, mudam para um valor de l mais alto e o oposto acontece em um Universo fechado.

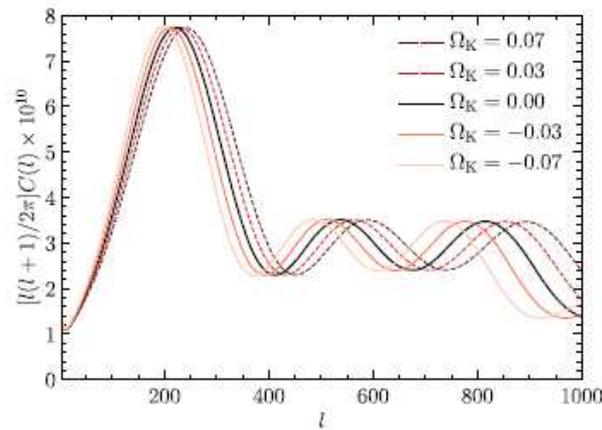
Figura 52 – Diferentes comportamentos geométricos do Universo.



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Perceba que, em coordenadas comóveis (x, η) , as trajetórias de fótons em um Universo euclidiano são linhas retas (sólidas), enquanto aquelas em um Universo aberto divergem (tracejadas). Note também que as perturbações oriundas da época da superfície de último espalhamento aparecem em escalas menores em um Universo aberto (θ_{Open}) do que em um Universo euclidiano (θ_{Euc}). Conforme mostrado na Figura 53, é exatamente esse resultado que é obtido do cálculo numérico. Essa figura mostra os espectros de anisotropias

Figura 53 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de Ω_K .



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

em Universos euclidianos, abertos e fechados. Note que o padrão de picos e vales persiste em Universos curvos, mas é deslocado para escalas menores para Universos abertos ($\Omega_K > 0$), enquanto o oposto acontece para Universos fechados ($\Omega_K < 0$). Apenas Ω_K e Ω_Λ são variados nesta figura, enquanto todos os outros parâmetros são fixados em seus valores para a cosmologia fiducial.

Em uma geometria curvada positivamente, os objetos estão mais longe do que parecem. Em um Universo negativamente curvado, os objetos estão mais próximos do que parecem. Desde a detecção do primeiro pico acústico, ficou claro que o Universo é quase plano (HU, 2008). Em virtude da grande distância até a superfície de último espalhamento, os picos da CMB respondem de forma muito sensível à curvatura, resultando em uma restrição. As melhores restrições atuais para Ω_K , obtidas pela combinação da CMB e as sondas de estrutura de grande escala, estão no nível de $|\Omega_K| < 0,002$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Um Universo euclidiano é apenas um ponto no espaço de parâmetros, o ponto cuja soma das densidades de energia é exatamente igual à densidade crítica (e somente neste único ponto). Esperamos, com isso, observar uma curvatura muito pequena (mas diferente de zero), mesmo com o paradigma inflacionário. A inflação produz perturbações em todas as escalas, incluindo aquelas apenas em nosso horizonte atual e a parte isotrópica de tal perturbação na escala de horizonte aparece precisamente como curvatura, com

$\Omega_K \sim (k/a_0 H_0)^2 C(k)$ avaliado em $k = H_0$ (isso fornece mais uma justificativa para o nome “perturbação de curvatura”). Dado o espectro invariante de escala aproximado para $C(k)$, a inflação prevê que Ω_K deve ser um número aleatório com valor RMS de ordem $\sqrt{A_s} \sim 10^{-4}$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Alterar a constante cosmológica tem um efeito semelhante à curvatura, pois muda as localizações dos picos devido à mudança na distância do diâmetro angular até a superfície de último espalhamento (lembre-se de que também se modifica H_0 ao variar Ω_Λ , enquanto se mantém $\Omega_m h^2$ fixo, afinal, ambos são fenômenos tardios que não influenciam na recombinação) e esse argumento explica por que a restrição da CMB para Ω_K é parcialmente degenerada com aquela para Ω_Λ . Além disso, a mudança também afeta a contribuição do efeito Sachs-Wolfe integrado em $l < 30$, com os aumentos de Λ e de $C(l)$ nessas escalas, embora o poder de restrição desse efeito seja limitado devido à variância cósmica.

10.8.2 Amplitude, índice espectral e profundidade óptica

O espectro de potência da CMB determina o índice de normalização inicial n_s e assim fornece um meio para testar o efeito da aceleração na função de crescimento $D(a)$. A precisão desta determinação é largamente definida pela reionização (HU, 2008). O efeito de mudar a amplitude A_s e os índices espectrais n_s das perturbações primordiais é bastante simples de entender: mudar A_s por um fator α significa multiplicar todos os $C(l)$ pelo mesmo fator. Por outro lado, mudando $n_s \rightarrow n_s + \alpha$ altera a pequena escala $C(l)$ por um fator $(l/l_p)^\alpha$, onde l_p é o número de onda angular correspondente à escala k_p (DODELSON; SCHMIDT, 2021). O WMAP forneceu os primeiros indícios de um pequeno desvio no espectro invariante de escala e as restrições atuais são $n \approx 0,965 \pm 0,015$ (HU, 2008).

A opacidade fornecida pelos elétrons após a reionização (que se associa à profundidade óptica τ) suprime a amplitude observada dos picos em relação à amplitude inicial (HU, 2008). Com isso, devemos considerar o efeito da profundidade óptica. Após a época da recombinação, o gás no Universo era neutro, no entanto, a maior parte do gás que se observa no Universo tardio é ionizado: não se tem evidências de gás neutro nos espectros de absorção de quasares de redshift até $z \sim 6$ (então, em algum momento, o gás teve que ser reionizado: atualmente se acredita que isso aconteceu entre os redshifts $z = 15$ e $z = 6$) (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Após a reionização, os fótons da CMB puderam espalhar os elétrons (agora livres) novamente e, se o espalhamento fosse eficiente o suficiente ou, em outras palavras, se a profundidade óptica na reionização $\tau_{rei} \equiv \tau(\eta_{após})$ para algum tempo $\eta_{após}$ após o final da época de recombinação for alta o suficiente, a isotropia seria restaurada e, de forma equivalente, as anisotropias primordiais seriam eliminadas.

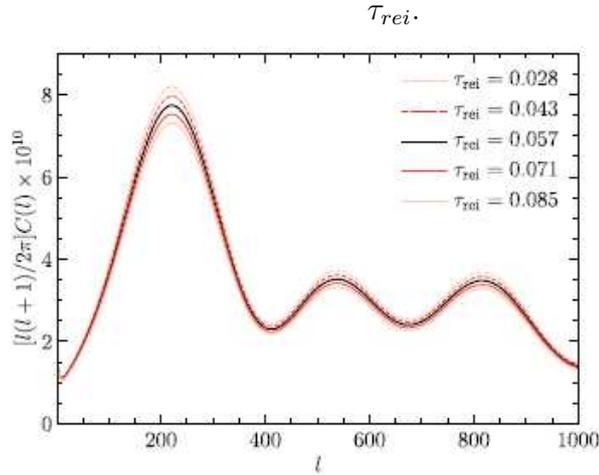
Para estudar isso quantitativamente, vamos imaginar um fóton viajando na direção da Terra com uma temperatura $T(1+\theta)$, onde T é a temperatura de fundo e θ é a perturba-

ção. Se esses fótons atingirem uma região com profundidade óptica τ_{rei} , apenas uma fração $e^{-\tau_{rei}}$ escapará e continuará se propagando. Além destes, se observa uma fração $1 - e^{-\tau_{rei}}$ espalhada no feixe enquanto percorre a região ionizada (já que o espalhamento conserva o número total de fótons) (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Esses fótons espalhados vêm de todas as direções, então pode-se supor que eles têm temperatura média T . Então a temperatura observada hoje é:

$$T(1 + \theta)e^{-\tau_{rei}} + T(1 - e^{-\tau_{rei}}) = T(1 + \theta)e^{-\tau_{rei}}. \quad (10.53)$$

Subtraindo disso a temperatura média T , obtém-se que a anisotropia fracionária será a primordial estabelecida em $z \sim 1100$ multiplicada por $e^{-\tau_{rei}}$. O espalhamento, entretanto, afeta somente aquelas perturbações dentro do horizonte no momento da reionização, então somente multipolos l maiores que η_0/η_{rei} serão suprimidos por $e^{-\tau_{rei}}$: pequenos valores de l não serão afetados. Podemos ilustrar isso na Figura 54, que mostra o efeito no espectro de potência da CMB da variação da profundidade óptica para reionização τ_{rei} .

Figura 54 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Perceba que o aumento de τ_{rei} suprime as anisotropias em pequenas escalas, mas as deixa inalteradas para $l < 100$. Isso explica por que consideramos o efeito da profundidade óptica na reionização junto com a amplitude e com o índice espectral: uma mudança em A_s , juntamente com n_s , pode imitar amplamente o efeito de τ_{rei} (isto é, são variações degeneradas), especialmente considerando o fato de que o erro oriundo da variância cósmica no $C(l)$ é maior em valores de l baixos.

Por outro lado, a profundidade óptica quantifica como a amplitude do espectro de potência primordial da CMB para altos valores de l é suprimida. Os dados obtidos desse espectro para altos valores de l restringem, não o valor de A_s , mas sim o da combinação de parâmetros $A_s e^{-2\tau_{rei}}$. Com os dados do Planck podemos restringir τ_{rei} (e, portanto, A_s) usando os dados de polarização, mas também estimar os resultados finais para $A_s e^{-2\tau_{rei}}$

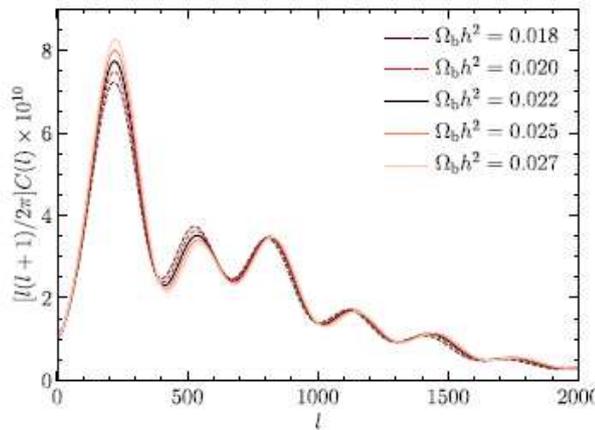
que é medido de forma robusta pelos espectros de alta independentemente do histórico de reionização (LEMOS; LEWIS, 2023).

10.8.3 As densidades bariônica e de matéria escura

O segundo pico do espectro de potência da CMB está relacionado aos bárions. A razão entre as densidades numéricas de bárions e fótons controla a modulação das alturas dos picos ímpares por meio do efeito de carga de bárions (aumento da densidade de momento do fluido de bárions-fótons). O segundo pico representa a diminuição da onda acústica em um potencial gravitacional e, portanto, há supressão na amplitude da onda devido à inércia dos bárions. Desde a primeira tentativa de detecção do segundo pico, a CMB colocou limites na densidade bariônica: atualmente, sua medição, em grande parte do WMAP fornece $\Omega_b h^2 = 0,0227 \pm 0,0006$. Isso é suficientemente restrito para que os erros associados ao horizonte sonoro e à forma do espectro de potência da matéria sejam pequenos (HU, 2008).

Nesse caso vamos considerar um Universo euclidiano e compensar a mudança nos parâmetros de densidade através de Ω_Λ . Essas mudanças levam a variações consideráveis no espectro de anisotropias: elas induzem um pequeno deslocamento relativo nas localizações dos picos e dos vales no espectro, bem como alteram suas amplitudes. Para entender esses efeitos devemos lembrar que, como as heterogeneidades nas escalas k aparecem em $l = k\eta_0$ em um Universo euclidiano, então os picos em um Universo euclidiano aparecerão em $l_p \sim k_p \eta_0 \sim n\pi\eta_0/r_s(\eta_*)$, embora o valor real de l_p seja da ordem de 25% menor) (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Os efeitos da mudança da densidade bariônica são ilustrados na Figura 55.

Figura 55 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de $\Omega_b h^2$.



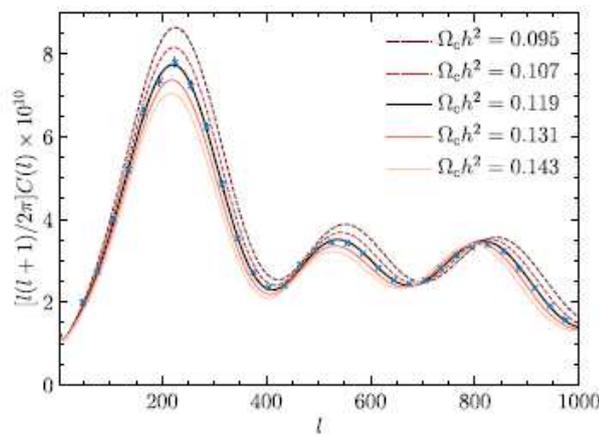
Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Nessa figura percebemos que os efeitos das variações na densidade bariônica são uma mudança nas localizações dos picos, devido à mudança no horizonte sonoro $r_s(\eta_*)$,

bem como modificações nas alturas dos picos. Além disso, nota-se que a razão entre as alturas dos picos ímpares e pares é maior quando a densidade de bárions é grande. Outra mudança provocada por $\Omega_b h^2$ é a redução do comprimento de onda da difusão (pois aumenta o modo de amortecimento k_D), portanto, uma densidade de bárions maior significa que o amortecimento se move para escalas angulares menores, de modo que o espectro de anisotropias em escalas $l > 1000$ é maior em um modelo de altos valores de $\Omega_b h^2$. Essa combinação característica de efeitos permite restrições muito rígidas para $\Omega_b h^2$.

O terceiro pico do espectro está relacionado à matéria escura. Esse pico começa a mostrar os efeitos da relação matéria-radiação nas amplitudes dos picos acústicos. Além disso, o decaimento do potencial gravitacional durante a dominação da radiação reduz o efeito de carga de bárions e altera as proporções entre as alturas do segundo e terceiro picos. Restrições associadas ao terceiro pico do experimento DASI representaram a primeira evidência direta de matéria escura na época de recombinação. As restrições atuais de uma combinação de WMAP e dados baseados em balão de alta resolução produzem $\Omega_m h^2 = 0,135 \pm 0,007$ (HU, 2008).

Figura 56 – Comportamento do espectro de potência da CMB em função dos valores de $\Omega_c h^2$.



Fonte: DODELSON E SCHMIDT (2021).

Graficamente, o efeito de alterar a densidade de matéria escura fria $\Omega_c h^2$ é o ilustrado na Figura 56. Primeiramente notamos que as barras de erro são tão pequenas que só são discerníveis para l ao redor e abaixo do primeiro pico (com isso, os parâmetros $\Omega_b h^2$ e $\Omega_c h^2$ podem ser determinados com muita precisão). Nesse sentido, se percebe que parte do efeito está mudando as oscilações acústicas (uma vez que o potencial gravitacional é dominado pela matéria escura), que é um efeito semelhante a uma modificação na densidade de bárions. Além disso, como a matéria escura afeta consideravelmente a época de igualdade matéria-radiação, influi diretamente na evolução das perturbações (onde há mais crescimento para maiores valores de $\Omega_c h^2$) e no efeito Sachs-Wolfe integrado (que diminui para maiores valores de $\Omega_c h^2$, porque os potenciais decaem menos após a

recombinação). Por conseguinte, a variância $C(l)$ é igualmente sensível às variações dos valores de $\Omega_b h^2$ e $\Omega_c h^2$.

Outra região importante do espectro de potência da CMB é a cauda de amortecimento. Com base na história térmica padrão do Universo e nas estimativas de teor de matéria, os parâmetros que controlam os primeiros 3 picos também determinam a estrutura da cauda de amortecimento em $l > 10^3$: a distância do diâmetro angular até a recombinação, a densidade bárions $\Omega_b h^2$ e a densidade de matéria $\Omega_m h^2$. Quando a cauda de amortecimento foi descoberta pela primeira vez pelo experimento Cosmic Background Imager (CBI), ela forneceu suporte convincente para a modelagem teórica padrão da física na recombinação. Atualmente, as melhores restrições na cauda de amortecimento são do experimento Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver (ACBAR). A coerência entre os picos de baixa ordem e a cauda de amortecimento pode ser usada para fazer testes de precisão de recombinação e qualquer física além do modelo padrão naquela época (como restrições na evolução da constante de estrutura fina) (HU, 2008).

Com base nisso, conseguimos entender como se dá o processo de obtenção de valores dos parâmetros cosmológicos a partir do espectro de potência da CMB: primeiramente obtém-se a curva experimental (através dos dados captados pelos satélites e/ou antenas) e, em seguida, através dos modelos teóricos (e, naturalmente, com o auxílio de computadores) vai-se alterando os valores dos parâmetros cosmológicos. Os valores que fornecerem a curva que melhor se ajusta à curva experimental são tidos como os que melhor representam a realidade.

Nesse sentido, o conjunto de dados obtidos pelo Planck trouxe uma maior solidez ao o modelo cosmológico, por exemplo, delimitando alguns valores para os parâmetros cosmológicos supracitados (LEMOS; LEWIS, 2023), conforme listados na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores atuais de importantes parâmetros cosmológicos.

Parâmetro	Símbolo	Intervalo de valores (Λ CDM)
Densidade bariônica	$\Omega_b h^2$	$0,02218 \pm 0,00013$
Densidade de matéria escura	$\Omega_c h^2$	$0,1198 \pm 0,0012$
Constante de Hubble	H	$67,22 \pm 0,45 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
Amplitude do espectro primordial	$A_s e^{-2\tau_{rei}} 10^9$	$1,877 \pm 0,010$
Índice de normalização espectral	n_s	$0,9633 \pm 0,0039$

As flutuações de todos os testes parecem ser derivadas de distribuições Gaussianas, apesar da probabilidade de exceder esse valor ser inferior a 5%. Além disso, cabe destacar que o WMAP confirmou a observação do COBE de uma potência inesperadamente baixa nos múltiplos mais baixos. A equipe do WMAP afirma que este efeito vai muito além das estatísticas: o quadrupolo tem pouca potência e parece estar “alinhado” com o octupolo (WINSTEIN, 2003). Esse fenômeno é conhecido como “quadrupolo anômalo” e pode estar

associado à variância cósmica.

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 11 A POLARIZAÇÃO DA CMB

*“A CMB é a encarnação da luz restante de um
Universo primitivo deslumbrante e escaldante”.*
(Neil deGrasse Tyson)

11 A polarização da CMB

11.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“A polarização da CMB” tem o objetivo de trazer uma abordagem mais quantitativa acerca da propriedade de polarização da CMB, que é de extrema importância para a obtenção de restrições para os valores dos parâmetros cosmológicos. Além disso, esta parte contém detalhes matemáticos essenciais para a obtenção das expressões de $C(l)$ e de $\delta T/T$ e, por fim, apresenta e caracteriza diversos poluentes cosmológicos, que influenciam diretamente no sinal da CMB detectado nos experimentos.

11.2 Os parâmetros de Stokes

A CMB, juntamente com as demais ondas eletromagnéticas, tem a possibilidade de ser polarizada, isto é, de ter algumas de suas orientações de vibração “selecionadas”. Por exemplo, se considerarmos que o vetor unitário \hat{k} (que está na mesma direção do eixo z) determina a direção de propagação de uma onda, então a extremidade do vetor campo elétrico \vec{E} da onda eletromagnética pode descrever: uma linha reta (polarização linear), um círculo (polarização circular) ou uma elipse no plano xy (polarização elíptica).

Primeiramente podemos decompor \vec{E} em duas direções ortogonais quaisquer, determinadas por uma base de vetores unitários composta por \hat{e}_1 e \hat{e}_2 (no plano xy , digamos). A partir disso, podemos definir:

$$\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2, \quad (11.1)$$

onde:

$$E_1 = a_1\text{sen}(\omega t - kz), \quad (11.2)$$

$$E_2 = a_2\text{sen}(\omega t - kz - \delta). \quad (11.3)$$

Destacamos que a_1 e a_2 representam as amplitudes de \vec{E} nas direções \hat{e}_1 e \hat{e}_2 , ω é a frequência angular da oscilação, k é o número de onda e δ representa a diferença de fase entre E_1 e E_2 . Perceba que não estamos levando em conta o comportamento do campo magnético, mas isso não tem relevância, pois podemos selecionar \vec{E} ou \vec{B} para estudar a polarização da CMB (em razão das interações elétricas serem mais intensas que as magnéticas, estamos escolhendo trabalhar com \vec{E}). Porém, se for desejado, podemos obter um a partir do outro usando a relação:

$$\vec{B}_l = \sqrt{\epsilon\mu}(\hat{k} \times \vec{E}_l), \quad (11.4)$$

em que ϵ representa a permissividade elétrica do meio, μ é a permeabilidade magnética e $l = 1, 2$.

Para entendermos satisfatoriamente como funciona a polarização da CMB, se torna conveniente fazermos uso dos parâmetros de Stokes, definidos como:

$$I = a_1^2 + a_2^2, \quad (11.5)$$

$$Q = a_1^2 - a_2^2, \quad (11.6)$$

$$U = 2a_1a_2 \cos(\delta), \quad (11.7)$$

$$V = 2a_1a_2 \sin(\delta). \quad (11.8)$$

Nesse ponto, vamos calcular a razão entre os campos elétricos e suas amplitudes em (11.2) e em (11.3), aplicar uma relação na outra e obter:

$$\frac{E_1^2}{a_1^2} - \left(\frac{2E_1E_2}{a_1a_2} \right) \cos(\delta) + \frac{E_2^2}{a_2^2} = \sin^2(\delta). \quad (11.9)$$

Aqui, notamos que a expressão acima é a equação de uma elipse (a elipse de polarização) cujos eixos maior e menor não coincidem com os eixos do sistema de coordenadas e que pode ser representada matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & -\frac{\cos(\delta)}{a_1a_2} \\ -\frac{\cos(\delta)}{a_1a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \sin^2(\delta). \quad (11.10)$$

Se queremos estudar as propriedades de uma elipse, a melhor forma de fazê-lo é colocando a elipse na forma canônica. A equação canônica dessa elipse seria (GUAITOLINI JUNIOR, 2012):

$$\frac{E_1'^2}{A_1^2} - \frac{E_2'^2}{A_2^2} = \sin^2(\delta), \quad (11.11)$$

com $\sin(\delta) \neq 0$ ou, na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E_1' & E_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \sin^2(\delta). \quad (11.12)$$

Assim, vamos buscar relações entre os dois sistemas de coordenadas (com linha e sem linha) que nos permitam descrever a elipse de polarização, em termos de E_1 e E_2 ou de E_1' e E_2' . Se ψ for o ângulo de rotação do sistema de coordenadas (E_1, E_2), então para obter a equação da elipse na forma canônica podemos fazer a associação:

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \quad (11.13)$$

Aplicando (11.13) em (11.12), calculando os determinantes associados às matrizes que representam a elipse de polarização e observando que eles são invariantes sob uma transformação de sistema de coordenadas, chegamos à relação:

$$A_1^2 A_2^2 \sin^2(\delta) = a_1^2 a_2^2. \quad (11.14)$$

Analogamente ao caso do determinante, o traço da matriz também é invariante sob transformações de sistema de coordenadas. Se igualarmos os traços das matrizes nos dois sistemas de coordenadas e realizarmos algumas manipulações algébricas, teremos o seguinte resultado:

$$\frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{A_1^2 A_2^2}{A_1^2 + A_2^2}. \quad (11.15)$$

Agora, vamos aplicar (11.14) em (11.10) para determinar o ângulo para o qual a matriz assume uma forma diagonal, de uma elipse canônica. Para isso, devemos ter:

$$\frac{1}{2} \sin(2\psi) \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - \frac{\cos(\delta) \cos(2\psi)}{a_1 a_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \tan(2\psi) = \left(\frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \right) \cos(\delta). \quad (11.16)$$

Manipulando essa expressão, obtemos:

$$\sin(2\chi) = \sin(2\alpha) \sin(\delta), \quad (11.17)$$

em que: $\tan(\alpha) = a_2/a_1$ e $\tan(\chi) = \pm A_2/A_1$. Para relacionarmos esses termos com os parâmetros de Stokes, vamos tomar (11.5) como sendo a intensidade total do vetor campo elétrico e realizar algumas manipulações para compará-la com (11.16) e com (11.17) para obter:

$$(a_1^2 - a_2^2)^2 = I^2 \cos^2(2\psi) \cos^2(2\chi) \quad \rightarrow \quad Q = I \cos(2\psi) \cos(2\chi). \quad (11.18)$$

Novamente utilizando a expressão (11.16) e a relação acima, vem:

$$2a_1 a_2 \cos(\delta) = I \sin(2\psi) \cos(2\chi). \quad (11.19)$$

Com base nisso, podemos agrupar os termos anteriores e formar o vetor de Stokes:

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 \\ 2a_1 a_2 \cos(\delta) \\ 2a_1 a_2 \sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I \cos(2\psi) \cos(2\chi) \\ I \sin(2\psi) \cos(2\chi) \\ I \sin(2\chi) \end{pmatrix}. \quad (11.20)$$

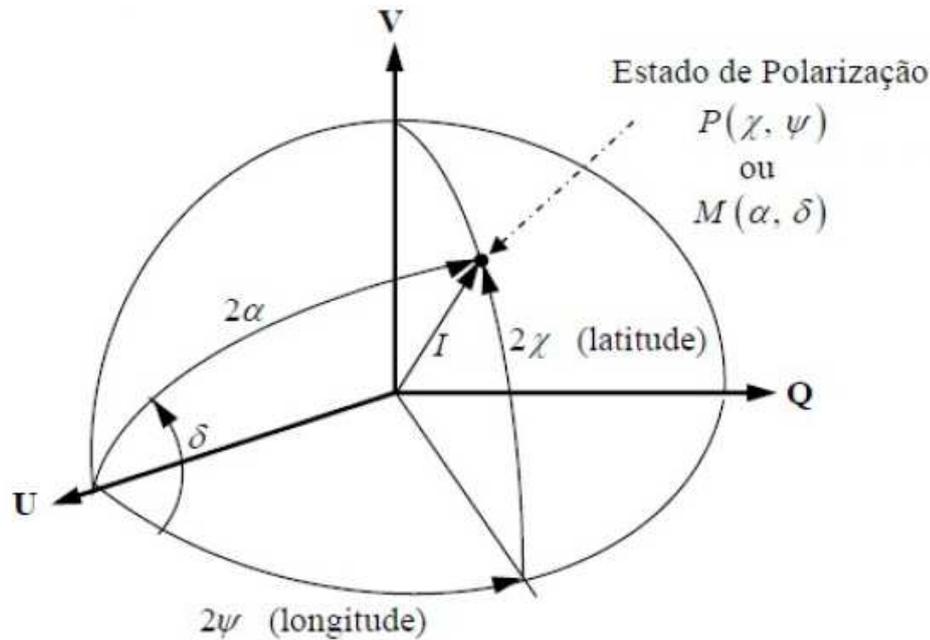
11.3 A esfera de Poincaré

A partir das definições dos parâmetros de Stokes percebemos que todos têm a mesma unidade de medida (que é a unidade de medida de campo elétrico ao quadrado). Além disso, vimos que apenas três parâmetros definem a elipse de polarização, podendo ser

os valores dos semi-eixos maior e menor e o ângulo de inclinação ou então os valores das amplitudes do campo elétrico em cada eixo e a diferença de fase entre eles (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

A primeira relação que conecta os parâmetros de Stokes é: $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$. No entanto, cabe destacarmos que essa expressão é válida somente quando a onda eletromagnética se encontra completamente polarizada porque, nesses casos, os parâmetros Q , U e V podem ser representados pelas coordenadas de um ponto sobre uma superfície esférica de raio I . A referida superfície esférica, que conecta todos os parâmetros de Stokes e que nos permite analisar o estado de polarização de uma onda eletromagnética, é chamada de esfera de Poincaré. Observe a Figura 57.

Figura 57 – Coordenadas de um ponto na esfera de Poincaré.



Fonte: JÚNIOR (2012).

É possível estudarmos a polarização da onda eletromagnética utilizando um sistema de coordenadas no qual a elipse está rotacionada (cujas variáveis a serem consideradas seriam δ e α) ou aquele no qual a elipse está na forma canônica (cujas variáveis a serem consideradas seriam χ e ψ). Nesse último caso podemos determinar um ponto na esfera de Poincaré pela sua longitude 2ψ e pela sua latitude 2χ (ponto P) ou então por α e δ (ponto M), ambos representados na Figura 57.

Outro elemento importante no estudo da polarização da CMB é o grau de polarização da onda, definido como:

$$G = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}. \quad (11.21)$$

Quando o vetor de Stokes corresponde a uma onda não polarizada teremos $Q = U = V = 0$, que é exatamente o centro da esfera de Poincaré, e nesse caso $G = 0$. Se

$V = 0$, então χ deve ser igual a 0 ou então a $\pm\frac{\pi}{2}$ e nesse caso o campo elétrico fica em um dos eixos principais, sendo linearmente polarizado (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). A partir disso podemos inferir que a polarização será completamente determinada pelos parâmetros Q e U e que o grau de polarização linear pode ser escrito assim:

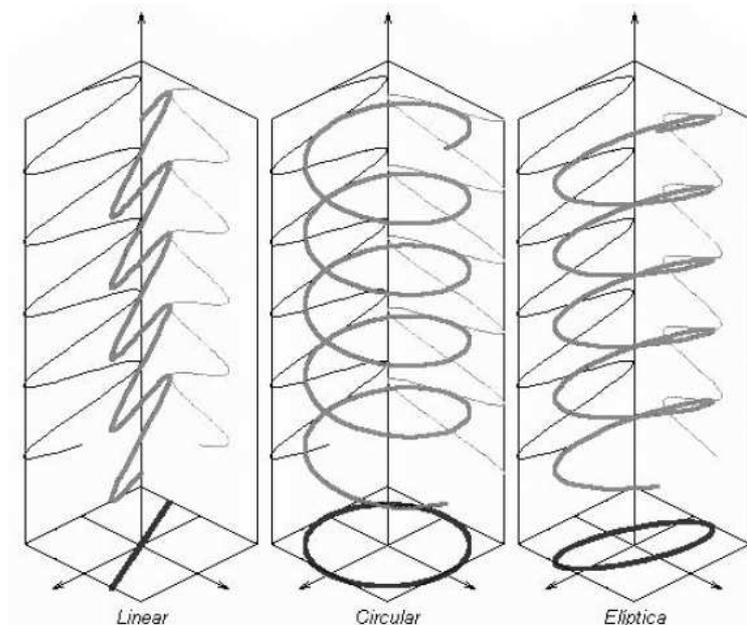
$$G_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}. \quad (11.22)$$

Com isso, percebemos que os pontos do equador da esfera de Poincaré representam as ondas que estão polarizadas linearmente. Se tivermos $Q = U = 0$, então teremos que ψ deve ser igual a $\pm\frac{\pi}{4}$ e, nos casos em que os semi-eixos são iguais, o campo elétrico descreve um círculo e dizemos que a luz é circularmente polarizada. Como, nesse último caso, apenas o parâmetro V se torna relevante, então podemos escrever o grau de polarização circular como:

$$G_C = \frac{V}{I}. \quad (11.23)$$

Na esfera de Poincaré as polarizações circulares são representadas pelo polo norte e pelo polo sul. Além disso, o grau de polarização G é dado pela distância do ponto P (ou M , dependendo do sistema de coordenadas utilizado) ao centro da esfera de Poincaré. Já o sinal de χ irá determinar se a polarização está orientada para a direita ou para a esquerda. O hemisfério superior ($\chi > 0$) representa polarizações orientadas para a esquerda, enquanto o hemisfério inferior ($\chi < 0$) apresenta as polarizações orientadas para a direita (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

Figura 58 – Possíveis estados de polarização de uma onda eletromagnética.



Fonte: JÚNIOR (2012).

A Figura 58 ilustra os três estados de polarização citados anteriormente. Nessa figura, os padrões observados por um referencial frontal à propagação da onda são representados

nos planos horizontais em cada uma das polarizações: perceba que na figura da esquerda o campo elétrico descreve uma linha reta (e a polarização é dita linear), na figura do centro descreve um círculo (polarização circular) e na figura da direita o campo descreve uma elipse (a polarização é elíptica).

Por outro lado, quando estivermos analisando uma radiação parcialmente polarizada, então a equação que conecta os parâmetros de Stokes deve se tornar uma desigualdade:

$$I^2 > Q^2 + U^2 + V^2, \quad (11.24)$$

o que representa um ponto interior à esfera de Poincaré.

No laboratório, os parâmetros de Stokes são medidos através da análise das intensidades transmitidas por combinações de polarizadores. Contudo, em situações práticas não conseguimos medir o vetor campo elétrico ciclo a ciclo, uma vez que estamos lidando com frequências muito elevadas e a luz geralmente é formada por uma superposição de muitas ondas de frequências diferentes, não possuindo uma relação de fase fixa entre si. Por isso tomamos apenas médias temporais desses parâmetros (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

Quando pudermos considerar o campo elétrico total como uma superposição dos campos elétricos elipticamente polarizados de cada onda, então os parâmetros de Stokes são independentes, devem ser medidos separadamente e obedecem à relação (11.24). Por exemplo, quando $Q = U = 0$, não necessariamente teremos $I = V$ e $G_C = 1$ (isso ocorreria somente se os parâmetros estivessem conectados, ou seja, se a expressão (11.24) fosse uma igualdade). Apesar disso, os parâmetros de Stokes aparecem como um ferramental importante no estudo da polarização e, conseqüentemente, das propriedades físicas da CMB.

11.4 A polarização de campo da CMB

11.4.1 Alguns elementos das polarizações

Como já mencionado, existem três tipos de perturbações: escalares, vetoriais e tensoriais. Da mesma maneira que uma onda eletromagnética, uma perturbação tensorial $h_{ij}(x, \eta)$ pode ser decomposta em duas polarizações lineares da seguinte maneira:

$$h_{ij}(x, \eta) = \sum_{\lambda} h_{(\lambda)}(x, \eta) \epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k}), \quad (11.25)$$

onde $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k})$, com $\lambda = \oplus$ e \otimes , representa os dois estados de polarização linear possíveis, obedecendo à relação: $\epsilon_{ij}^{(\lambda)} \epsilon_{ij}^{(\lambda')} = 2\delta^{\lambda\lambda'}$ (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). Se adotarmos um conjunto de três vetores ortonormais, composto pelo vetor \hat{k} (que indica a direção de propagação) e por dois outros vetores \hat{a} e \hat{b} , podemos definir:

$$\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) = (\hat{a}_i \hat{a}_j - \hat{b}_i \hat{b}_j), \quad (11.26)$$

$$\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k}) = (\hat{a}_i \hat{b}_j + \hat{a}_j \hat{b}_i), \quad (11.27)$$

em que \hat{a}_i representa a i -ésima componente do vetor \hat{a} .

Como exemplo, vamos admitir que a direção de propagação da onda coincide com a de \hat{z} e que os vetores unitários \hat{k} , \hat{a} e \hat{b} podem ser escolhidos como: $\hat{k} = (0, 0, 1)$, $\hat{a} = (1, 0, 0)$ e $\hat{b} = (0, 1, 0)$. Desse modo, de acordo com o que definimos para os vetores $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k})$, teremos os seguintes resultados: $\epsilon_{xx}^{\oplus} = 1$, $\epsilon_{yy}^{\oplus} = -1$, $\epsilon_{xy}^{\otimes} = 1$ e $\epsilon_{yx}^{\otimes} = -1$, $\epsilon_{xy}^{\oplus} = \epsilon_{yx}^{\oplus} = \epsilon_{xx}^{\otimes} = \epsilon_{yy}^{\otimes} = 0$.

Nesse ponto, vamos elevar a perturbação (11.25) ao quadrado e usar a propriedade dos vetores polarização $\epsilon_{ij}^{(\lambda)} \epsilon_{ij}^{(\lambda')} = 2\delta^{\lambda\lambda'}$ para obter:

$$h_{ij}(x, \eta)h_{ij}(x, \eta) = 2\{[h_{\oplus}(x, \eta)]^2 + [h_{\times}(x, \eta)]^2\}. \quad (11.28)$$

Às vezes queremos “converter” uma polarização linear em uma circular, e podemos fazer isso usando a seguinte relação:

$$\epsilon_{ij}^{(Esq.)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) + i\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k})], \quad (11.29)$$

$$\epsilon_{ij}^{(Dir.)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\epsilon_{ij}^{\oplus}(\hat{k}) - i\epsilon_{ij}^{\otimes}(\hat{k})]. \quad (11.30)$$

Aqui, podemos notar que os vetores polarização supracitados são o complexo conjugado um do outro: $\epsilon_{ij}^{(Esq.)} * = \epsilon_{ij}^{(Dir.)}$ e $\epsilon_{ij}^{(Dir.)} * = \epsilon_{ij}^{(Esq.)}$. No entanto, esperamos que a rotação de um ângulo α no plano ortogonal a $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ produzirá também uma transformação nos vetores unitários \hat{a} e \hat{b} :

$$\hat{a}' = \cos(\alpha)\hat{a} + \text{sen}(\alpha)\hat{b}, \quad (11.31)$$

$$\hat{b}' = -\text{sen}(\alpha)\hat{a} + \cos(\alpha)\hat{b}. \quad (11.32)$$

Na mesma linha, esperamos também que as transformações mudem os vetores polarização ϵ , que devem se tornar:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus} = \cos(2\alpha)\epsilon_{ij}^{\oplus} + \text{sen}(2\alpha)\epsilon_{ij}^{\otimes}, \quad (11.33)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes} = -\text{sen}(2\alpha)\epsilon_{ij}^{\oplus} + \cos(2\alpha)\epsilon_{ij}^{\otimes}, \quad (11.34)$$

onde $\tilde{\epsilon}_{ij}^{\oplus}$ e $\tilde{\epsilon}_{ij}^{\otimes}$ representam as duas polarizações lineares transformadas. Em relação às polarizações circulares, teremos as seguintes transformações:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{(Esq.)} = e^{-2i\alpha}\epsilon_{ij}^{(Esq.)}, \quad (11.35)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{(Dir.)} = e^{2i\alpha}\epsilon_{ij}^{(Dir.)}. \quad (11.36)$$

A partir dessas relações de transformação da polarização circular do campo eletromagnético podemos construir entes físicos importantes no estudo da CMB, como os modos E e B .

11.4.2 Sobre a polarização da CMB

Vamos iniciar o estudo da polarização da CMB admitindo que um campo de radiação eletromagnética pode ser representado pelo tensor de polarização Π_{ij} , dado por:

$$\Pi_{ij} = E_i E_j^*, \quad (11.37)$$

em que E_i e E_j representam as componentes do vetor campo elétrico. Por conveniência, vamos fazer a direção i coincidir com o eixo x , a direção j coincidir com o eixo y e a direção de propagação sendo \hat{z} . Com base nisso, as componentes do tensor de polarização assumem a forma matricial:

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 & E_x E_y^* \\ E_y E_x^* & |E_y|^2 \end{pmatrix}. \quad (11.38)$$

Nesses termos, os parâmetros de Stokes podem ser reescritos como:

$$I = |E_x|^2 + |E_y|^2, \quad (11.39)$$

$$V = 2\text{Im}[E_y E_x^*], \quad (11.40)$$

$$U = 2\text{Re}[E_x^* E_y], \quad (11.41)$$

$$Q = |E_x|^2 - |E_y|^2, \quad (11.42)$$

de onde podemos obter:

$$|E_x|^2 = \frac{I + Q}{2}, \quad (11.43)$$

$$|E_y|^2 = \frac{I - Q}{2}, \quad (11.44)$$

$$\text{Re}[E_x^* E_y] = \frac{U}{2}, \quad (11.45)$$

$$\text{Im}[E_y E_x^*] = \frac{V}{2}, \quad (11.46)$$

$$E_x^* E_y = \frac{U + iV}{2} \rightarrow (E_x^* E_y)^* = \frac{U - iV}{2}. \quad (11.47)$$

A partir disso, podemos modificar a relação (11.38) para:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}, \quad (11.48)$$

que, com algumas manipulações, pode ser escrita em termos das matrizes σ de Pauli:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} V \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.49)$$

Ou ainda:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} (I + U\sigma_1 + V\sigma_2 + Q\sigma_3). \quad (11.50)$$

Nesse ponto podemos efetuar uma rotação de um ângulo α no plano ortogonal à direção de \hat{k} , transformando os parâmetros de Stokes. Após essa operação observamos que os parâmetros I e V são invariantes sob rotações e que, do contrário, os parâmetros Q e U se transformam com α da seguinte maneira:

$$\tilde{U} = \cos(2\alpha)Q + \sin(2\alpha)U, \quad (11.51)$$

$$\tilde{Q} = -\sin(2\alpha)Q + \cos(2\alpha)U. \quad (11.52)$$

As relações (11.51) e (11.52) mostram que a polarização dos fótons observados muda para uma rotação no plano ortogonal à direção de propagação. O que nós queremos nesse ponto é construir grandezas que sejam invariantes sob tal rotação, e que as ondas eletromagnéticas observadas permaneçam com a mesma polarização independente de uma possível rotação do eixo de observação, por exemplo. Com uma tal grandeza, quaisquer dois observadores efetuando medições corretas devem concordar em suas observações, independente da montagem de seu aparato observacional (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). Da mesma maneira que fazemos na eletrostática (onde $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$), vamos tentar construir entes invariantes sob transformações no sistema de coordenadas: os modos E e B de polarização.

11.5 Os modos E e B

Os modos de polarização que iremos construir a seguir surgem das propriedades primordiais do nosso Universo. O modo E de polarização dos fótons surge naturalmente do espalhamento Thomson em um plasma heterogêneo. Já o modo B de polarização não é causado apenas pelo espalhamento no plasma, mas também é um sinal da inflação, sendo uma maneira indireta de determinar a densidade de ondas gravitacionais primordiais. Contudo, o modo B ainda não foi medido e deve ser um sinal muito fraco (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

Como vimos anteriormente, os parâmetros de Stokes nos fornecem informações sobre os estados de polarização da radiação eletromagnética. Com base nisso, se existem flutuações na geometria do espaço-tempo, então esperamos que os estados de polarização sofram alterações e que as medições sejam modificadas em relação ao caso sem perturbações. Nessa linha, os experimentos com a CMB buscam compreender as flutuações dos parâmetros de Stokes, devidas às perturbações da geometria. As flutuações Δ dos parâmetros podem ser decompostas em combinações lineares dos modos escalares (E), vetoriais (V) e tensoriais (T):

$$\Delta_I(\hat{n}, \eta) = \Delta_I^{(T)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_I^{(V)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_I^{(E)}(\hat{n}, \eta), \quad (11.53)$$

$$\Delta_Q(\hat{n}, \eta) = \Delta_Q^{(T)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_Q^{(V)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_Q^{(E)}(\hat{n}, \eta), \quad (11.54)$$

$$\Delta_U(\hat{n}, \eta) = \Delta_U^{(T)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_U^{(V)}(\hat{n}, \eta) + \Delta_U^{(E)}(\hat{n}, \eta). \quad (11.55)$$

Perceba que não há uma equação para a perturbação do parâmetro V , porque não esperamos uma polarização circular para a CMB. Nesse ponto, vamos definir as expressões:

$$\Delta_+(\hat{n}, \eta) = \Delta_Q(\hat{n}, \eta) + i\Delta_U(\hat{n}, \eta), \quad (11.56)$$

$$\Delta_-(\hat{n}, \eta) = \Delta_Q(\hat{n}, \eta) - i\Delta_U(\hat{n}, \eta), \quad (11.57)$$

e observar que elas se transformam como (11.35) e (11.36), ou seja:

$$\tilde{\Delta}_\pm(\hat{n}, \eta) = e^{\mp 2i\alpha} \tilde{\Delta}_\pm(\hat{n}, \eta). \quad (11.58)$$

Esse tipo de transformação é característico de funções com peso de spin 2, de maneira que $\tilde{\Delta}_\pm(\hat{n}, \eta)$ poderão ser decompostos em uma base formada por esféricos harmônicos de spin 2. Isso ocorre pois essas quantidades apresentam caráter tensorial (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). Portanto, se trabalhamos com as perturbações de intensidade do campo eletromagnético, então podemos fazer uma expansão em termos dos harmônicos esféricos usuais (de spin 0) como:

$$\Delta_I(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} a_{lm}^T Y_{lm}(\hat{n}), \quad (11.59)$$

onde temos:

$$a_{lm}^T = \int Y_{lm}^* \Delta_I(\hat{n}, \eta) d\hat{n}. \quad (11.60)$$

Analogamente, para o caso de Δ_\pm podemos fazer a seguinte expansão:

$$\Delta_\pm(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} a_{\pm 2, lm} Y_{\pm 2, lm}(\hat{n}), \quad (11.61)$$

em que:

$$a_{\pm 2, lm}^T = \int Y_{\pm 2, lm}(\hat{n}) \Delta_\pm(\hat{n}, \eta) d\hat{n}. \quad (11.62)$$

A expansão nesse caso foi feita utilizando uma base formada por harmônicos esféricos de spin 2 ($Y_{\pm 2, lm}$). A partir desses objetos matemáticos com peso de spin 2 podemos obter quantidades com peso de spin 0, utilizando operadores que atuam nos harmônicos esféricos de maneira análoga à atuação dos operadores de criação e aniquilação em autoestados na mecânica quântica. Com base nisso, tendo em mãos os operadores (GUAITOLINI JUNIOR, 2012):

$$L_+^s(\hat{n}) = -(\text{sen}\theta)^s \left[\partial_\theta + \left(\frac{i}{\text{sen}\theta} \right) \partial_\phi \right] \frac{1}{(\text{sen}\theta)^s}, \quad (11.63)$$

$$L_-^s(\hat{n}) = -\frac{1}{(\text{sen}\theta)^s} \left[\partial_\theta - \left(\frac{i}{\text{sen}\theta} \right) \partial_\phi \right] (\text{sen}\theta)^s, \quad (11.64)$$

podemos construir as seguintes quantidades com peso de spin 0:

$$\Delta_E(\hat{n}, \eta) = -\frac{1}{2} \left\{ L_-^{(1)}(\hat{n}) [L_-^{(2)}(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta)] + L_+^{(-1)}(\hat{n}) [L_+^{(-2)}(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta)] \right\}, \quad (11.65)$$

$$\Delta_B(\hat{n}, \eta) = \frac{i}{2} \left\{ L_-^{(1)}(\hat{n}) [L_-^{(2)}(\hat{n}) \Delta_+(\hat{n}, \eta)] - L_+^{(-1)}(\hat{n}) [L_+^{(-2)}(\hat{n}) \Delta_-(\hat{n}, \eta)] \right\}. \quad (11.66)$$

Essas grandezas são chamadas de modo E e modo B de polarização. Esses parâmetros podem ser escritos em termos de séries de harmônicos esféricos usuais:

$$\Delta_E(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} N_l^{-1} a_{lm}^{(E)} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (11.67)$$

$$\Delta_B(\hat{n}, \eta) = \sum_{lm} N_l^{-1} a_{lm}^{(B)} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (11.68)$$

em que: $N_l = \sqrt{(l-2)!/(l+2)!}$. E seus coeficientes a_{lm} são:

$$a_{lm}^{(E)} = -\frac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm}), \quad (11.69)$$

$$a_{lm}^{(B)} = \frac{i}{2}(a_{2,lm} - a_{-2,lm}). \quad (11.70)$$

Após isso, podemos utilizar os operadores L_+ e L_- para obter:

$$a_{lm}^{(E)} = -\frac{N_l}{2} \int Y_{lm}^*(\hat{n}) \{L_-^{(1)}(\hat{n})[L_-^{(2)}(\hat{n})\Delta_+(\hat{n}, \eta)] + L_+^{(-1)}(\hat{n})[L_+^{(-2)}(\hat{n})\Delta_-(\hat{n}, \eta)]\} d\hat{n}, \quad (11.71)$$

$$a_{lm}^{(E)} = \frac{iN_l}{2} \int Y_{lm}^*(\hat{n}) \{L_-^{(1)}(\hat{n})[L_-^{(2)}(\hat{n})\Delta_+(\hat{n}, \eta)] - L_+^{(-1)}(\hat{n})[L_+^{(-2)}(\hat{n})\Delta_-(\hat{n}, \eta)]\} d\hat{n}. \quad (11.72)$$

A partir dos coeficientes a_{lm} da expansão em harmônicos esféricos das temperaturas dos modos E e B podemos obter os espectros de potência angular $C(l)$ associados a cada uma dessas grandezas (correlacionando TT, EE ou BB) ou ao cruzamento delas (correlacionando TE, TB ou EB). De maneira geral, temos que:

$$C_l^{(ij)} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \langle a_{lm}^{(i)*} a_{lm}^{(j)} \rangle, \quad (11.73)$$

em que: i e $j = T, E$ ou B . É importante ressaltar que o modo B de polarização não é gerado por perturbações de densidade de matéria, mas apenas por flutuações tensoriais, que estão associadas às ondas gravitacionais.

11.6 Comentários sobre o cálculo de $\delta T/T$ e dos $C(l)$'s

O nosso objetivo nessa seção é trazer tópicos importantes na dedução de dois parâmetros fundamentais para o entendimento do espectro de potência da CMB: a variação fracionária de temperatura do Universo ($\delta T/T$) e o espectro de potência angular ($C(l)$). Em razão de o desenvolvimento matemático para a dedução desses entes ser robusto, não é conveniente trazê-lo com detalhes nesse trabalho, mas citamos que uma dedução mais detalhada pode ser encontrada em (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

11.6.1 Uma breve revisão

De maneira geral esperamos que os fótons que foram emitidos de diferentes pontos da última superfície de espalhamento sejam detectados com energias distintas, a depender das interações com as não-homogeneidades existentes no caminho até a Terra. Além disso, como o planeta (que é o observador) possui certa velocidade em relação ao referencial comóvel, então os fótons que vêm de diferentes regiões celestes vão sofrer desvios, o que nos leva a crer que existe uma dependência angular nas observações. Por outro lado, se a radiação sofrer algum espalhamento no caminho e se a matéria que a espalhou também possuir uma velocidade, então existirá um efeito semelhante ao caso anterior. Todos esses fenômenos que discutimos causam desvios na temperatura do espectro, em relação à temperatura T_0 do Universo hoje, de acordo com a direção observada do céu e essa dependência direcional da temperatura pode ser representada por $T = T(\theta, \phi)$.

Nessa direção, as anisotropias da CMB são ditas primárias quando as perturbações se originaram antes (ou durante) o desacoplamento da radiação. Um exemplo desse tipo de anisotropia pode ter ocorrido quando o potencial gravitacional variou na superfície de último espalhamento: isso causou a emissão de fótons de diferentes poços de potencial, que sofreram diferentes perdas de energia de acordo com o local da emissão. Além disso, classificamos as anisotropias como secundárias quando as perturbações surgiram após o desacoplamento entre matéria e radiação. Como exemplo de anisotropias secundárias podemos citar os processos astrofísicos (que perturbam a radiação) que ocorrem no caminho percorrido pelos fótons até a Terra, resultando em desvios de um espectro de corpo negro perfeito.

Trabalhando em um espaço-tempo regido pela métrica FLRW perturbada:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[\delta_{ij} - h_{ij}(x, t)]dx^i dx^j, \quad (11.74)$$

conseguimos encontrar expressões para as anisotropias angulares devidas ao movimento relativo entre a Terra e o referencial comóvel e também podemos estimar as flutuações devidas aos diferentes potenciais gravitacionais que atuaram sobre o fóton (tanto no momento de sua emissão quanto de sua detecção). O termo h_{ij} acima é a perturbação (linear, isto é, os termos de segunda ou maior ordem serão desprezados) da métrica de um Universo homogêneo, isotrópico e plano. O fóton foi emitido em um tempo $t = t_e$ e chega ao observador em $t = t_0$, viajando sempre em uma linha geodésica nula.

Por fim, cabe lembrarmos que um observador na origem de um sistema de coordenadas vai observar que o fóton está, em algum tempo t , na posição:

$$x^i = n^i \eta(t), \quad (11.75)$$

em que o vetor n^i representa um vetor unitário cuja direção coincide com a da geodésica nula.

11.6.2 Sobre a variação fracionária de temperatura $\delta T/T$

Se existem dois observadores analisando determinado fóton, localizados ao longo de sua trajetória, um em x^i e o outro em $x^i + \delta x^i$, a expressão que nos dá a distância própria entre eles em função de t será (GUAITOLINI JUNIOR, 2012):

$$\delta l = (-g_{ij}x^i x^j)^{\frac{1}{2}} = a[(\delta_{ij} - h_{ij})\delta x^i \delta x^j]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.76)$$

Como vimos anteriormente, $x^i \propto n^i$, então, se considerarmos apenas o primeiro termo (o linear) da expansão acima, chegamos a:

$$\delta l \propto a \left(1 - \frac{1}{2}h_{ij}n^i n^j\right), \quad (11.77)$$

Portanto, a velocidade relativa entre os dois observadores é:

$$v = \frac{d\delta l}{dt} = \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}n^i n^j\right)(\delta t), \quad (11.78)$$

em coordenadas naturais ($c = 1$) e onde δt representa o tempo que o fóton leva para percorrer uma distância δl . Para relacionar o desvio na frequência $\delta\nu$ medido para um fóton com a componente espacial da quadrivelocidade relativa entre dois observadores, vamos considerar perturbações de primeira ordem e escrever (GUAITOLINI JUNIOR, 2012):

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -v = -\frac{\dot{a}}{a}\delta t + \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}n^i n^j \delta t. \quad (11.79)$$

O primeiro termo acima representa o desvio oriundo de um Universo descrito pela métrica FLRW. Podemos, ainda, reescrever a equação acima como:

$$\frac{\delta(\nu a)}{\nu a} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}n^i n^j \delta t. \quad (11.80)$$

Aqui podemos lembrar que a Lei de Wien para corpos negros nos diz que o produto do comprimento de onda pela temperatura absoluta é constante, de modo que podemos escrever a relação $\delta T \propto \delta\nu$ e obter, com isso:

$$\frac{\delta(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}n^i n^j \delta t. \quad (11.81)$$

Integrando temporalmente esse resultado (em todo o caminho percorrido pelo fóton), desde a sua emissão (em t_e) até sua observação em (t_0), teremos:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{d(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij}n^i n^j dt \rightarrow \ln\left(\frac{T_{obs}a_{obs}}{T_e a_e}\right) = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij}n^i n^j dt. \quad (11.82)$$

Se não existem perturbações, $\nu \propto a^{-1}$ e a partir da Lei de Wien vemos que a temperatura pode ser colocada simplesmente como $T \propto a^{-1}$, fato já utilizado quando descrevemos a perda de energia da CMB. Os fótons emitidos quando a temperatura do Universo era T_e apareceriam hoje como uma radiação de corpo negro com temperatura

$T_e a_e / a_{obs} \equiv T_0$ (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). Em função disso observamos a CMB com uma temperatura tão baixa, embora ela tenha sido emitida em uma época de altíssimas temperaturas: ele viajou todo o caminho “lutando contra” a expansão do Universo e perdendo energia, até ser detectada na Terra.

Matematicamente podemos expandir o logaritmo de (11.82) assim:

$$\ln \left(\frac{T_{obs} a_{obs}}{T_e a_e} \right) = \ln \left(\frac{T_{obs}}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{T_0 + \delta T}{T_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{\delta T}{T_0} \right) \approx \frac{\delta T}{T_0}, \quad (11.83)$$

e obter:

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} n^i n^j \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij} dt = \frac{1}{2} n^i n^j \int_{t_e}^{t_0} \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}(t, n^k, \eta) \right] dt. \quad (11.84)$$

Essa expressão é geral e é válida para qualquer modelo cosmológico com curvatura $k = 0$. A partir dela, uma vez que conhecemos a forma das perturbações h_{ij} , podemos calcular $\delta T/T_0$ e confrontar os resultados teóricos oriundos do modelo adotado com os dados observacionais obtidos experimentalmente.

11.6.3 Sobre o espectro de potência angular $C(l)$

O cálculo dos $C(l)$'s é extremamente relevante para o estudo das anisotropias da CMB, pois é a partir do formato desse termo que podemos comparar teoria e observação e, com isso, selecionarmos os melhores modelos cosmológicos. Em termos matemáticos, vamos partir da equação (11.84) modificada, onde deixaremos de trabalhar com o tempo cósmico t e passaremos a usar o tempo comóvel η . Considerando, novamente, que os fótons foram emitidos em um tempo η_e e detectados em η_r , então a variação da temperatura com relação ao valor T (não perturbado) é dada por:

$$\frac{\delta T}{T}(\vec{e}) = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_1} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} e^i e^j \right) d\omega. \quad (11.85)$$

em que $\omega_1 = \eta_r - \eta_e$, $\omega = \eta_r - \eta$ e \vec{e} é um vetor unitário que caracteriza uma direção particular de observação. Dessa maneira, podemos escrever de forma geral (GUAITOLINI JUNIOR, 2012):

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) = & -\frac{1}{2} C \int_0^{\omega_1} \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_{ij}^s(\vec{k})}{\sqrt{2k}} \left[f_k^s(\omega) c_k^s(\eta_0) e^{ik_i(e_1^i \omega + x^i)} \right. \\ & \left. + f_k^{s*}(\omega) c_k^{s\dagger}(\eta_0) e^{-ik_i(e_1^i \omega + x^i)} \right] d\vec{k} d\omega, \end{aligned} \quad (11.86)$$

onde C representa uma constante de normalização que depende do comprimento de Planck, por estar relacionada com a quantização de ondas gravitacionais e \vec{k} é o vetor de onda adimensional e independente do tempo (GUAITOLINI JUNIOR, 2012). Perceba que o somatório acima leva em conta todos os possíveis estados de polarização linear: $s = \oplus$ e

⊗. Além disso, cabe destacar que $f_k^s(\omega)$ e $f_k^{s*}(\omega)$ são funções que obedecem às seguintes equações:

$$f_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f_k = 0, \quad (11.87)$$

$$f_k f_k'^* + f_k' f_k^* = i. \quad (11.88)$$

Por outro lado, os entes $c_k^s(\eta)$ e $c_k^{s\dagger}(\eta)$ representam os operadores quânticos de aniquilação e de criação associados às classes e estados de polarização, definidos como:

$$\frac{d}{d\eta} c_k^s \equiv -i[c_k^s, H], \quad (11.89)$$

$$\frac{d}{d\eta} c_k^{s\dagger} \equiv -i[c_k^{s\dagger}, H], \quad (11.90)$$

que são as equações de Heisenberg do movimento, onde H é a hamiltoniana que determina a dinâmica do sistema em questão. Quando o operador c_k^s atua sobre $|0\rangle$ o resultado é igual a zero. Nessas situações $|0\rangle$ é o estado de vácuo do sistema e η_0 é algum tempo inicial onde os operadores foram tomados (GUAITOLINI JUNIOR, 2012).

O próximo passo é a obtenção da função de correlação angular entre dois pontos cujas direções são separadas por um ângulo δ no céu:

$$\langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle, \quad (11.91)$$

que, usando a equação (11.86) para as direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , fornece:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{C^2}{4} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k}\sqrt{2p}} \sum_s \sum_t \epsilon_{ij}^s(\vec{k}) \epsilon_{kl}^t(\vec{p}) \\ &\times \langle 0 | c_k^s(\eta_0) c_p^{t\dagger}(\eta_0) | 0 \rangle f_k^s(\omega) f_p^{t*}(\bar{\omega}) e^{ik_i(e_1^i \omega + x^i)} e^{-ip_i(e_2^i \bar{\omega} + x^i)} \\ &\times e_1^i e_1^j e_2^k e_2^l d\omega d\bar{\omega} d\vec{p} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (11.92)$$

Rearranjando e calculando alguns dos termos acima, chegamos a:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle &= \frac{C^2}{4} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k^s(\omega) f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k} \sqrt{2k}} \\ &\times e^{ik_i(e_1^i \omega - e_2^i \bar{\omega})} \sum_s [\epsilon_{ij}^s(\vec{k}) e_1^i e_1^j] [\epsilon_{kl}^s(\vec{k}) e_2^k e_2^l] d\omega d\bar{\omega} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (11.93)$$

Nesse ponto se pode calcular os vetores ϵ de polarização, definir três coordenadas para os vetores $\vec{e}_1 = (a, b, c)$ e $\vec{e}_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$, transformar a integral espacial de k em $4\pi k^2 dk$ (usando a simetria esférica) e calcular alguns produtos escalares e integrais para chegar a:

$$\langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_1) \frac{\delta T}{T}(\vec{e}_2) | 0 \rangle = 8\pi c^2 \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \frac{f_k^s(\omega) f_k^{s*}(\bar{\omega})}{\sqrt{2k} \sqrt{2k}} W d\omega d\bar{\omega} dk, \quad (11.94)$$

em que:

$$W = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \delta - 1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{5}{2}} J_{\frac{5}{2}}(z) + (k\bar{\omega})(k\omega) \cos \delta (\cos^2 \delta - 1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{7}{2}} J_{\frac{7}{2}}(z) + \frac{1}{8}(k\bar{\omega})^2(k\omega)^2(\cos^2 \delta - 1)^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{9}{2}} J_{\frac{9}{2}}(z), \quad (11.95)$$

e também:

$$J = \sum_s [\epsilon_{ij}^s(\vec{k}) e_1^i e_1^j] [\epsilon_{kl}^s(\vec{k}) e_2^k e_2^l]. \quad (11.96)$$

Calculando os termos de W , usando os polinômios $P_l(\cos \alpha)$ de Legendre e observando a relação do espectro de potência angular:

$$C(\alpha) = \langle 0 | \frac{\delta T}{T}(\theta_1 \phi_1) \frac{\delta T}{T}(\theta_2 \phi_2) | 0 \rangle = \sum_{l_1} \frac{2l+1}{4\pi} C_{l_1} P_{l_1}(\cos \alpha). \quad (11.97)$$

tem-se:

$$C(l) = 2\pi^3 C^2 [l(l+1) - 2] l(l+1) \int_0^\infty k^2 \left| \int_0^{\omega_1} \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(k\omega)}{(k\omega)^{\frac{5}{2}}} d\omega \right|^2 dk. \quad (11.98)$$

Usando a relação entre as funções de Bessel j_l e J :

$$j_l(k\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2k\eta}} J_{l+\frac{1}{2}}(k\omega), \quad (11.99)$$

podemos escrever o espectro de potência angular da CMB em termos de funções de Bessel esféricas:

$$C(l) = 4\pi^2 C^2 [l(l+1) - 2] l(l+1) \int_0^\infty k^2 \left| \int_0^{\omega_1} \frac{f_k^s(\omega)}{\sqrt{2k}} \frac{j_l(k\omega)}{(k\omega)^2} d\omega \right|^2 dk. \quad (11.100)$$

De posse desse resultado analítico podemos confrontar as previsões teóricas com os dados experimentais disponíveis.

11.7 A poluição cósmica: os contaminantes da CMB

Nas discussões anteriores apresentamos uma visão simplificada da CMB, na qual as anisotropias foram produzidas na superfície de último espalhamento, situada nas proximidades de $z = 1100$. Esta visão corresponde, em partes, à realidade, mas não é toda a história. Existem diversos tipos de entes físicos (das mais variadas naturezas) no Universo que interferem diretamente na CMB observada hoje (em especial, atuam no sentido de gerar anisotropias e outras distorções nos sinais). A partir disso surge a importância de estudarmos quais são esses “contaminantes” e como eles agem modificando a CMB para que possamos, através de alguns métodos, obter dados cada vez mais “limpos”.

11.7.1 O efeito Sachs-Wolfe e as lentes gravitacionais

Conforme já estudamos, em tempos primordiais ($z \leq 1100$), o Universo era quase completamente ionizado e os fótons se espalhavam frequentemente com partículas carregadas livres, principalmente com elétrons, tendo em vista que a seção de choque do espalhamento próton-fóton era suprimida por um fator de (m_e/m_p) (BUCHER, 2015). Nesse período da história cosmológica, o plasma (que era composto de bárions, léptons e fótons) podia ser tratado como um único fluido fortemente acoplado, mas com uma viscosidade relevante nas pequenas escalas para o cálculo da temperatura da CMB e das anisotropias de polarização. À medida em que o Universo esfriou, os elétrons, os prótons e alguns núcleos se combinaram para formar átomos neutros, cujo tamanho era muito maior que o comprimento de onda térmico dos fótons e isso tornou o Universo quase transparente à radiação eletromagnética. A partir dessa época, chamada “recombinação”, os fótons pararam de se reespalhar e passaram a fluir livremente ao longo do cósmos.

A afirmação acima é apenas 90% precisa, pois estima-se que a reionização, que começou na faixa de redshift $z \approx 6 - 7$, fez com que cerca de 10% dos fótons da CMB fossem reespalhados. Esse fenômeno de reespalhamento influencia diretamente no estudo da CMB em torno de $z \approx 1100$, época na qual as anisotropias de polarização e de temperatura da CMB foram produzidas (BUCHER, 2015). Desse modo, ao observarmos as anisotropias de micro-ondas hoje, estamos analisando as condições físicas de uma esfera conhecida como superfície de último espalhamento.

A transição de um Universo completamente opaco para um transparente aos fótons não foi instantânea e isso nos faz inferir que a superfície de último espalhamento possui uma largura finita que deve ser levada em conta para o cálculo das anisotropias da CMB em pequenas escalas angulares, porque essa espessura finita espalha as não-homogeneidades tridimensionais à medida em que são projetadas na esfera celeste bidimensional.

Com base nisso, o primeiro cálculo para as anisotropias de temperatura da CMB previstas em um Universo com perturbações cosmológicas lineares foi dado por Sachs e Wolfe em 1967. Esses cientistas pensaram a superfície de último espalhamento como a superfície de uma esfera tridimensional, ou seja, admitiram que a transição do acoplamento rígido para a transparência não foi instantânea. Localmente, nesta superfície, o fluido de bárions-fótons estava sujeito a dois tipos de perturbações: as perturbações na densidade δ_b (flutuações na temperatura do corpo negro do fóton T_γ em relação ao valor médio da temperatura na superfície de último espalhamento \bar{T}_γ) e as perturbações na velocidade mássica u_b (deslocamento Doppler da temperatura da CMB). Se não houver perturbações na métrica, teremos (BUCHER, 2015):

$$\frac{\delta T_f(\hat{p})}{\bar{T}_f} - \frac{\delta T_i(\hat{p})}{\bar{T}_i} = -\frac{1}{c} \delta u_\gamma \cdot \hat{p}. \quad (11.101)$$

Enquanto a anisotropia final observada $\delta T_\gamma/\bar{T}_\gamma$ é a mesma em todos os sistemas de coordenadas (com exceção dos termos monopolo e dipolo), a atribuição de anisotropias entre os termos (flutuações intrínsecas de temperatura, efeito Doppler, gravidade-redshift, efeito Sachs-Wolfe integrado, etc.) depende da escolha das coordenadas. A solução para essa situação é usar o formalismo “invariante de calibre”, que é equivalente a escrever as expressões usando o calibre newtoniano (BUCHER, 2015). Podemos simplificar (11.101) assumindo que apenas o modo de crescimento adiabático foi excitado. Usando o fato de que δT_i e u dependem do potencial Φ , obtemos o resultado frequentemente citado:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{\Phi}{3} - u \cdot \hat{p} + \int (\Phi' + \Psi') d\eta. \quad (11.102)$$

O último termo acima é a representação matemática do efeito Sachs-Wolfe Integrado (ISW), que consiste na mudança de energia dos fótons propagados através de um potencial gravitacional em evolução. Isso acontece durante o início da dominação da matéria (ISW inicial) e durante a dominação da energia escura (ISW tardio). O sinal do ISW tardio é impresso na escala dos potenciais gravitacionais em evolução que o geram. Em pequenas escalas, há um quase cancelamento entre múltiplas perturbações ao longo da linha de visão, de modo que o sinal só é importante em escalas relativamente grandes (LEMOS; LEWIS, 2023).

Na escala do horizonte atual há alguma correlação entre o ISW e as perturbações primordiais, mas em $l \geq 30$ as perturbações são espacialmente separadas e, portanto, o sinal ISW não é correlacionado, contribuindo para o espectro de potência de temperatura de forma aditiva. Podemos “cortar” cuidadosamente o espectro de temperatura em $l < 30$ para remover o sinal principal desse efeito e, em escalas menores, podemos usar um modelo aditivo com amplitude que decai com $l(l+1)C(l) \propto l^{-2}$, que é um ajuste razoável para o sinal de decaimento rápido em modelos com diferentes equações de estado. Para qualquer modelo plausível com um sinal ISW permitido pelos dados muito baixos, em $l \geq 30$ deve ser pequeno e, portanto, não precisa ser modelado com precisão, dada a variância cósmica substancial nesta região. Em multipolos $l \geq 30$, portanto, admitimos que o espectro total é resultado da soma do modelo ISW de amplitude livre com a previsão teórica (com ISW definido como zero) para redshifts $z < 30$ (LEMOS; LEWIS, 2023).

Em grandes escalas angulares, o primeiro termo de (11.102) domina. Como vimos, os modos k obedecem a um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) acopladas e, no Big Bang, cada modo começa com uma fase correspondente à parte do ciclo em que $u = 0$ e foi apenas no cruzamento do horizonte que a fase evoluiu suficientemente para que o termo de velocidade contribuísse de maneira apreciável para as anisotropias da CMB. Um cálculo mais preciso da evolução dos modos adiabáticos até a superfície de último espalhamento pode ser feito a partir da aproximação de fluido, que assume que o conteúdo de pressão-energia do Universo pode ser descrito por um fluido consistindo de dois componentes acoplados entre si apenas pela gravidade, como já vimos.

O espalhamento Thomson é dependente da polarização e isso leva a uma polarização das anisotropias da CMB, quando consideramos que a recombinação não ocorre instantaneamente. Matematicamente, para levarmos em conta esse efeito, vamos considerar a seção transversal do espalhamento Thomson (de um fóton sobre um elétron), que é dada por (BUCHER, 2015):

$$\frac{d\sigma}{dp} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (\hat{\epsilon}_i \cdot \hat{\epsilon}_f)^2, \quad (11.103)$$

onde $\hat{\epsilon}_i$ e $\hat{\epsilon}_f$ representam os vetores de polarização inicial e final, respectivamente. Nesse ponto podemos entender qualitativamente como ocorre a polarização da CMB, supondo que os fótons vindos da penúltima superfície de espalhamento não são polarizados e estimando a polarização introduzida no último espalhamento. Um medidor de fótons com uma polarização linear (por exemplo, com \oplus) seleciona os fótons que se propagaram da penúltima à última superfície em um pequeno ângulo em relação ao eixo da polarização linear, enquanto que os fótons com a outra polarização linear (\otimes) tendem a vir da penúltima à última superfície com um pequeno ângulo com o outro eixo.

Conseqüentemente, medir a polarização equivale a medir o quadrupolo de temperaturas “visto” pelo elétron da última superfície. Se admitirmos que a radiação emanada da penúltima superfície não é polarizada, obtemos a seguinte expressão para os parâmetros de Stokes a partir da polarização linear (BUCHER, 2015):

$$\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} = \int_{\rho=0}^{\rho=\rho_{\max}} \sin^2\theta T(\rho \sin\theta \cos\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, r + \rho \cos\theta) \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} d(-e^{-\tau(r+\rho)}) d\hat{p}. \quad (11.104)$$

Aqui, calculamos o vetor na superfície de último espalhamento, assumimos que a linha de visão está ao longo do eixo z e denotamos r a distância até a superfície. A expressão acima nos fornece duas das cinco componentes do momento quadrupolar de temperaturas do elétron no último espalhamento e, após a integração ao longo da linha de visão, teremos a polarização linear total (com a polarização na penúltima superfície negligenciada).

As não-homogeneidades na distribuição da matéria (particularmente em tempos tardios, quando o agrupamento da matéria se tornou não-linear) atuaram no sentido de encurvar as trajetórias dos fótons e isso distorceu a aparência da superfície de último espalhamento que vemos hoje. Isso é devido às lentes gravitacionais, que, como o próprio nome sugere, se trata de um efeito gravitacional que desvia os fótons de sua trajetória retilínea (em razão da distorção do espaço-tempo causada por um objeto massivo).

A lente altera o caminho dos fótons, remapeando a superfície de último espalhamento nas anisotropias observadas e esse efeito suaviza os picos acústicos dos espectros CMB, apesar das variações locais fornecerem informações que podem ser usadas para a reconstrução de lente. Como o efeito de suavização é apenas a média do céu do efeito de

lenteamento local, uma reconstrução de lente pode ser usada para prever a quantidade de suavização. As lentes gravitacionais na CMB transferem potência para as pequenas escalas e impactam consideravelmente os parâmetros cosmológicos: negligenciar as lentes modificaria os parâmetros por muitos sigmas na sensibilidade dos satélites (LEMOS; LEWIS, 2023).

A lente gravitacional da CMB é um efeito pequeno, mas essencial para compararmos corretamente os modelos do Universo primordial com as observações. Além disso, as lentes gravitacionais da CMB são efeitos incômodos de serem removidos, mas também podem ser consideradas uma ferramenta inestimável para estudar as heterogeneidades da distribuição de matéria entre nós e a superfície de último espalhamento. Nessa direção, as informações oriundas das lentes gravitacionais da CMB podem ser contrastadas com aquelas das sondas de lente fraca, em que: para a CMB, as fontes (ou seja, os objetos sendo ampliados) são as mais distantes possíveis, situadas em $z \approx 1100$ e, por causa disso, as lentes gravitacionais da CMB são sensíveis a redshifts maiores (e menos sensível, portanto, às correções não-lineares). Por fim, ao contrário das observações das correlações elípticas das galáxias, onde há erros sistemáticos devido aos alinhamentos intrínsecos, as lentes gravitacionais da CMB não apresentam desvios (BUCHER, 2015).

Na teoria linear do crescimento das estruturas, a detecção por lenteamento pode ser descrita por meio de um potencial de lenteamento, definido em função da posição na esfera celeste. A primeira descoberta das lentes gravitacionais da CMB envolveu a detecção de uma correlação cruzada diferente de zero e estatisticamente significativa entre um mapa de lente reconstruído usando os dados WMAP e de galáxias infravermelhas (o uso de uma correlação cruzada permite detectar um pequeno sinal dentro de um mapa ruidoso). No futuro, quando surgirem observações com maior sensibilidade (especialmente as relativas aos modos B em pequenas escalas), as lentes prometem se tornar uma poderosa sonda do agrupamento de matéria da determinação de parâmetros cosmológicos importantes, como as massas absolutas dos neutrinos e as estruturas dos modos B de polarização (BUCHER, 2015).

Para separar o efeito das lentes usamos o fato de que o espectro de potência delas pode ser restringido (de maneira quase independente do modelo) usando o espectro de potência de estimadores quadráticos para o potencial de lente. Como as lentes são sensíveis a redshifts maiores, assumimos que o espectro pode ser modelado por uma função suave. A partir disso adota-se alguns valores de l em diferentes escalas e, nesses pontos, se compara os valores do espectro das lentes que são obtidos. Esse procedimento é limitado pelos dados de reconstrução de lente e usado para uma previsão consistente de espectro de potência da CMB que considera as lentes gravitacionais (LEMOS; LEWIS, 2023).

11.7.2 A emissão síncrotron galáctica

Os mapas de temperatura fornecidos pelo Planck sugerem que a frequência de 70 GHz é a que gera dados mais limpos, uma vez que o excesso de emissão em torno do plano galáctico é mais estreito neste valor específico. Em frequências mais baixas, no entanto, a região onde a contaminação galáctica domina as anisotropias primordiais da CMB se amplia e isso é devido principalmente à emissão síncrotron galáctica (BUCHER, 2015). Basicamente, esse efeito é resultado do movimento em espiral de elétrons relativísticos no campo magnético galáctico.

Os raios cósmicos acelerados que são remanescentes de supernovas são capazes de explicar espectros com tal forma. Se as partículas carregadas não fossem relativísticas, então a sua radiação seria emitida na frequência $\omega_c = eB/mc$, teria muito pouca emissão em harmônicos mais altos e não se poderia explicar a emissão de alta frequência que é observada. Por outro lado, se as partículas carregadas forem relativísticas, a maior parte da radiação será emitida em harmônicos de ordem muito alta, o que permite a explicação da emissão de altas frequências para valores razoáveis do campo magnético galáctico. Em síntese, o espectro síncrotron é suave em frequência e as previsões teóricas indicam que a emissão síncrotron é altamente polarizada. A partir da aproximação relativística se pode inferir que a emissão é predominantemente polarizada de maneira linear, mas que há também uma componente menor que é circularmente polarizada (BUCHER, 2015).

A emissão síncrotron galáctica, cuja temperatura aumenta com a diminuição da frequência, torna extremamente difícil medir as anisotropias da CMB em frequências abaixo de 20 GHz, especialmente perto do plano galáctico onde a emissão síncrotron galáctica é mais intensa (BUCHER, 2015). Essa proporção $T \propto \nu^{-1}$ é consequência do fato da profundidade óptica τ do síncrotron ser muito menor que um e aumentar com a diminuição da frequência.

11.7.3 A emissão free-free

Outra fonte de contaminação galáctica de baixa frequência é a emissão free-free, que é decorrente de fótons emitidos (em maior parte) por colisões elétron-elétron no meio interestelar ou (em menor grau) por colisões elétron-íon (BUCHER, 2015). Assim, a temperatura da emissão free-free cai com a frequência, bem como acontece com a emissão síncrotron galáctica, mas a queda da emissão free-free é mais lenta.

Esse tipo de contaminante cósmico não é polarizado e a emissão de hidrogênio ionizado resultante da recombinação pode ser usada como um modelo para remover a componente free-free, porque ela também é proporcional ao quadrado da densidade eletrônica. No entanto, como os torques associados ao hidrogênio e à emissão free-free não têm uma dependência idêntica da temperatura, a remoção do efeito free-free usando

um modelo com H tem erros intrínsecos. O torque $\Gamma_H(T)$ é definido como a constante de proporcionalidade na relação de emissividade: $\epsilon_H = \Gamma_H(T)n_e^2$, em que ϵ_H representa a emissividade bolométrica (que tem unidade de potência por unidade de volume) e n_e é a densidade de elétrons livres (BUCHER, 2015). Da mesma forma, temos que: $\epsilon_{free-free} = \Gamma_{free-free}(T)n_e^2$ onde a emissividade tem unidades de potência por unidade de frequência por unidade de volume por unidade de ângulo sólido.

11.7.4 A emissão de poeira térmica

Os poluentes galácticos, como a poeira, podem ser amplamente separados da CMB usando sua dependência de frequência. Embora os poluentes extragalácticos sejam, em princípio, previsíveis (dado um modelo cosmológico), para as análises atuais, eles geralmente são eliminados ou modelados empiricamente por meio de modelos espectrais suaves. A consistência desses modelos empíricos pode ser facilmente verificada por meio de diferenças de frequência e a limpeza dos mapas ruidosos da CMB deixará algum sinal residual, mas isso também pode ser modelado empiricamente usando modelos espectrais suaves (LEMOS; LEWIS, 2023).

A emissão térmica da poeira interestelar, cuja temperatura aumenta com a frequência, influencia significativamente no espectro das micro-ondas. O comportamento $T \propto \nu$ ocorre porque, nas micro-ondas, o comprimento de onda é muito maior que o tamanho típico de um grão de poeira. Em comprimentos de onda longos, a seção transversal para absorver ou espalhar elasticamente a radiação eletromagnética é muito menor do que a seção transversal geométrica $\sigma_{geo} \approx r^2$, em que r é o raio efetivo do grão.

Diante disso, os grãos de poeira podem ser considerados dipolos nesta faixa de frequência, porque os multipolos superiores são irrelevantes. A dependência da frequência observada na seção transversal pode ser entendida a partir do momento de dipolo elétrico do grão: podemos considerá-lo um oscilador harmônico amortecido em que a frequência ressonante é muito maior do que as frequências de micro-ondas. Essa aproximação é válida para os casos de absorção e de espalhamento elástico e as seções de choque associadas são (BUCHER, 2015):

$$\sigma_{abs} \sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 a^2, \quad (11.105)$$

$$\sigma_{esp} \sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 a^2. \quad (11.106)$$

O conhecimento sobre poeira interestelar deriva da combinação de diferentes observações abrangendo uma ampla gama de frequências, a fim de se montar um modelo teórico consistente capaz de dar conta, de maneira simultânea, de todas as observações. Uma lei empírica comumente usada para modelar a emissão de poeira térmica em baixas frequências é um espectro de corpo negro de Planck modulado por uma emissividade de

lei de potência (BUCHER, 2015):

$$I_P(\nu) = I_P(\nu_0) \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^\beta \frac{I(\nu, T_P)}{I(\nu_0, T_P)}. \quad (11.107)$$

Nessa relação, os subíndices P indicam as grandezas associadas à poeira e I é a intensidade de radiação (dada pela lei de Planck). O argumento simples, sujeito a algumas ressalvas, sugere que $\beta = 2$, no entanto, os dados observacionais não confirmam essa previsão e, em vez disso, são melhores por uma lei de potência com β estando na faixa $\beta \approx 1,4 - 1,6$ (BUCHER, 2015).

Para as observações da polarização primordial da CMB, a remoção da contaminação da emissão de poeira térmica polarizada é de extrema importância. O problema é que poucos dados estão atualmente disponíveis sobre a emissão de poeira polarizada em frequências de micro-ondas e os modelos atuais de poeira polarizada envolvem um alto grau de extrapolação e são em grande parte guiados pela simplicidade (por exemplo, não há razão a priori para acreditar que a emissão polarizada da poeira deva seguir o mesmo espectro de frequência que sua emissão em intensidade) (BUCHER, 2015). Além disso, não está claro que deva haver uma simples proporcionalidade entre a polarização e a intensidade do campo magnético.

Outro ponto que cabe destaque diz respeito à dinâmica dos grãos, como o alinhamento e o movimento de rotação. Matematicamente, os casos mais simples de se analisar são os de um grão de poeira alongado (agulhado) ou oblato (esférico) com um eixo de simetria azimutal. Neste caso, os movimentos podem ser resolvidos em termos de algumas funções elementares. Já para o caso mais geral (de um grão assimétrico), a integração das equações de movimento na ausência de torques é mais difícil, mas pode ser alcançada usando funções elípticas jacobianas (BUCHER, 2015). Em um referencial não-inercial girando com o grão de poeira surgem dois tipos de forças inerciais: uma força centrífuga e uma força de Coriolis (devidas ao referencial rotativo).

11.7.5 Os efeitos magnéticos

Além dos efeitos resultantes da interação dos fótons com a poeira cósmica há também os efeitos relacionados aos campos magnéticos dos grãos e da própria galáxia. Basicamente existem dois efeitos geram um momento magnético ao longo de L (o momento angular total do grão): a distribuição não-homogênea de cargas elétricas no grão de poeira, que induz um momento de dipolo magnético à medida em que o grão gira em torno desse eixo, e o efeito Barnett, que minimiza a energia rotacional e tende a alinhar os spins dos grãos com a direção da rotação (em substâncias não-ferromagnéticas, esse efeito geralmente é desprezível) (BUCHER, 2015).

Outros efeitos magnéticos relevantes nessa análise são (BUCHER, 2015):

- **Precessão magnética:** Como os grãos de poeira em rotação têm um momento magnético paralelo ao seu momento angular (alinhado com o eixo principal do maior autovalor do tensor do momento de inércia), então esse vetor precessa (devido à atuação de um torque externo) a uma frequência $\omega_{prec} = \mu|B|/L$ (em que μ é o momento magnético) em torno do campo magnético. Sob esta precessão, o ângulo entre L e μ permanece constante, significando que este efeito não alinha nem desalinha o grão em relação à direção do campo magnético local.
- **Dissipação de Barnett:** Esse efeito alinha o corpo de modo que o eixo do momento de inércia máximo seja paralelo ao vetor momento angular L . A magnitude da dissipação de Barnett é maior que a dissipação mecânica e dois tipos de spins participam desse efeito: o eletrônico e o nuclear. Os spins eletrônicos são muito mais relevantes para estabelecer um momento magnético ao longo de L , porque os momentos magnéticos dos elétrons são maiores do que os momentos magnéticos dos núcleos por um fator de aproximadamente (m_p/m_e) . Por outro lado, os spins nucleares contribuem predominantemente para a dissipação de Barnett.
- **A dissipação magnética de Davis-Greenstein:** Se um grão gira com uma velocidade angular ao longo da direção do campo magnético, no referencial rotativo com o grão, o campo magnético é independente do tempo. Já a componente da velocidade angular perpendicular ω_{\perp} ao campo magnético dá origem a um campo magnético oscilante de frequência angular ω_{\perp} . Admitindo que o alinhamento do corpo com o momento angular é rápido, então a evolução do torque projetado no eixo do momento de inércia máximo se torna relevante para o movimento. Dessa forma, enquanto o grão gira, a sua direção é relativamente estável contra torques externos, mas quando a sua velocidade de rotação está no processo de mudança de sinal e quando ela é da mesma ordem que a velocidade de rotação “térmica”, o grão se torna suscetível à mudança de orientação como resultado de torques externos.
- **Alinhamento ao longo de B sem dissipação de Davis-Greenstein:** Se o campo magnético galáctico for suficientemente forte, a sua direção irá definir a direção do alinhamento dos grãos de poeira. Esse mecanismo pode acomodar uma grande quantidade de energia (em pequenas escalas) e tornar a poeira polarizada, mesmo que o campo magnético galáctico e a densidade de poeira sejam pequenos. Com isso podemos esperar que o campo que caracteriza a tendência de alinhamento radiativo $\bar{L}(x)\hat{n}(x)$ (o valor médio de L na direção \hat{n}) inclua uma componente que varia em pequenas escalas.
- **Torques radioativos:** A radiação eletromagnética espalhada (ou absorvida) pelo grão de poeira produz um torque sobre ele, cuja direção é constante no referencial rotativo do corpo. Há poucas informações detalhadas sobre os grãos e suas propriedades,

mas se pode estudar numericamente as formas irregulares dos grãos usando o torque radioativo (em função da direção) e a frequência da iluminação. A partir dos estudos numéricos se infere que os torques radioativos podem alinhar os grãos de poeira interestelar com o campo magnético e, com isso, oferecer uma alternativa promissora ao mecanismo de dissipação magnética de Davis-Greenstein (que pode ser muito demorado para fornecer o grau de alinhamento necessário).

Além desses efeitos podemos citar a influência dos grãos de poeira na emissão anômala de micro-ondas. A emissão térmica de grãos de poeira interestelar é baseada na suposição de que seu estado térmico pode ser caracterizado por uma temperatura média (em torno de 20 K) e que flutuações em torno dessa temperatura subsequentes à absorção de um fóton ultravioleta (UV) constituem uma correção insignificante. Se um grão de poeira for suficientemente grande, esta é uma boa aproximação, mas para moléculas pequenas um fóton UV pode elevar momentaneamente a temperatura do grão em uma ordem de grandeza ou mais, permitindo a emissão de radiação em bandas onde quase não haveria emissão para um grão em sua temperatura média. A maior parte da energia absorvida do fóton UV é rapidamente reemitida em infravermelho (IV), enquanto a molécula esfria rapidamente de volta à sua temperatura média (BUCHER, 2015).

Um modelo para a população de grãos pequenos pode ser construído usando mapas UV em faixas de comprimentos de onda nas quais a emissão térmica de grãos grandes não contribui. Como a emissão de comprimento de onda curto dos grãos de poeira é proporcional à densidade do fluxo UV local, e esses modelos podem, em princípio, ser melhorados dividindo essa densidade para obter um mapa mais preciso dos pequenos grãos de poeira, que por sua vez pode ser correlacionada com a emissão anômala de micro-ondas em baixas frequências. Também seria esperado que tal população de grãos de poeira muito pequenos gire extremamente rápido, dando origem à emissão de dipolo elétrico em sua frequência de rotação e possivelmente em harmônicos mais altos (BUCHER, 2015).

Observacionalmente, a emissão em baixas frequências, onde a emissão de poeira térmica difusa deveria ser minúscula, foi correlacionada com mapas de poeira de alta frequência e tal emissão seria consistente com a emissão dipolo de pequenos grãos de poeira em rápida rotação. Como explicação para essa correlação foi proposto que regiões de emissão free-free poderiam ser correlacionadas com regiões de emissão de poeira térmica. No entanto, descobriu-se que esse contaminante de baixa frequência não está correlacionado com a emissão da linha H , que serve como um indicador de emissão free-free (BUCHER, 2015).

11.7.6 As fontes compactas

Os processos anteriores referem-se principalmente à difusão da emissão galáctica, que contamina o sinal da CMB primordial mais severamente em baixos números multi-polares l : em escalas menores, no entanto, as fontes compactas são mais preocupantes e, eventualmente, tornam-se a contribuição dominante em todas as frequências. As fontes compactas podem ser entendidas tanto como as fontes pontuais não resolvidas como as fontes localizadas que são parcialmente resolvidas. O espectro de potência angular de fontes pontuais distribuídas de acordo com uma distribuição de Poisson aumentaria com l como l^0 : se ignorarmos a estrutura das oscilações acústicas, pode-se aproximar o espectro CMB primordial como tendo a forma l^{-2} . Com isso, podemos inferir que as fontes compactas são as maiores responsáveis pelas contaminações em altos valores de l : por causa do amortecimento combinado com a largura da última superfície de espalhamento, a queda da CMB para grandes valores de l é ainda mais rápida. O fato de que as fontes pontuais são agrupadas em vez de distribuídas de maneira poissoniana faz com que o espectro de potência da fonte pontual seja agrupado, levando a um excesso de potência em pequenos valores de l em comparação com uma lei de potência l^0 (BUCHER, 2015).

As principais fontes compactas são (BUCHER, 2015):

- Radiogaláxias: A emissão síncrotron também está em funcionamento em outras galáxias além da nossa, especialmente nas radiogaláxias com alto desvio para o vermelho, em que processos extremos (geralmente alimentados pelos buracos negros supermassivos centrais) dão origem a intensas emissões síncrotron, de rádio e de microondas. Uma vez que cada fonte difere ligeiramente em suas propriedades espectrais, a estratégia técnica para “limpar” a CMB é mascarar as fontes mais brilhantes e os resíduos provenientes das fontes não mascaradas que restam.
- Galáxias infravermelhas: Todas as galáxias contribuem com alguma emissão de poeira térmica, no entanto, as galáxias com alto desvio para o vermelho (onde a formação de estrelas está ocorrendo em uma taxa rápida) contribuem predominantemente para a emissão de poeira térmica na faixa das micro-ondas. A maior parte da radiação dessas galáxias é emitida no infravermelho, porque a luz e os UV emitidos são absorvidos pela poeira, que se aquece e por sua vez reemite no infravermelho. Apesar disso, as galáxias infravermelhas, em geral, não apresentam o mesmo espectro de frequência, porque estão espalhadas por uma ampla gama de desvios para o vermelho.

11.7.7 Outros efeitos poluentes

Além dos efeitos supracitados, ainda há os seguintes (BUCHER, 2015):

- Reionização irregular: Um gás isotrópico e de densidade de elétrons livres n_e dependente apenas do redshift é uma boa aproximação para representar o efeito da reionização no espectro de potência da CMB para baixos valores de l , porém, o cenário de reionização mais próximo da realidade é aquele no qual o Universo torna-se reionizado de maneira não-homogênea. À medida em que as primeiras estrelas e quasares se formaram, a radiação UV criou ao seu redor esferas de hidrogênio quase completamente ionizados que cresceram e se fundiram. Essas esferas transformaram a potência de grandes escalas angulares da CMB primordial em potência de pequenas escalas.
- Linhas moleculares: Todas as fontes de emissão galáctica têm um amplo espectro de emissão contínua, mas também existem linhas moleculares (principalmente de transições rotacionais de moléculas), que emitem radiação na faixa das micro-ondas, a exemplo do CO (no mínimo, 115,3 GHz). Como o CO é uma molécula linear, também existem transições em múltiplos inteiros dessa frequência (harmônicos) e remover a sua interferência dos dados do Planck é muito complexo.
- Emissão zodiacal: Além dos planetas e asteróides, o Sistema Solar está repleto de grandes grãos de poeira (conhecidos como poeira zodiacal), que em média são muito maiores que os grãos de poeira interestelar e que se manifestam por uma variedade de meios. Na faixa do visível, por exemplo, eles espalham a luz do Sol e isso deve ser subtraído ao analisarmos a emissão difusa nas faixas óptica e infravermelha. Admitir que a poeira zodiacal está concentrada em torno do plano da elipse orbital é uma aproximação boa (mas não perfeita) para modelar a distribuição de poeira zodiacal assumindo uma simetria azimutal. A temperatura da poeira zodiacal é muito superior à da poeira interestelar e é aproximadamente proporcional ao inverso do quadrado da distância do Sol. Além disso, a subtração da emissão zodiacal é desafiadora porque sua contribuição para um determinado ponto na esfera celeste depende da época do ano em que a observação é feita, porque as observações em diferentes épocas do ano olham através de diferentes colunas de poeira, mesmo quando a simetria azimutal é assumida.

A maioria dos contaminantes mencionados, com exceção das lentes gravitacionais e do efeito Sachs-Wolfe, dependem da frequência que difere daquela das anisotropias primárias da CMB. Isso pode ser explorado para remover esses contaminantes não-primordiais e está no centro de todas as técnicas de separação de componentes. Por exemplo, se houver N contaminantes distintos, cada um caracterizado por um espectro de frequência fixo na ausência de ruídos, então uma separação perfeita desses componentes é possível usando mapas do céu em N faixas de frequência.

A estratégia de separação de componentes mencionada acima tem como base um

modelo linear, mas esta não é a única maneira de limpar mapas. Modelos não-lineares mais sofisticados podem ser formulados, geralmente baseados ou inspirados em estatísticas bayesianas que exploram outras propriedades, como a positividade de certos componentes, variação espacial de índices espectrais e assim por diante (BUCHER, 2015).

OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

CAPÍTULO 12
ALGUMAS PERSPECTIVAS FUTURAS SOBRE O
ESTUDO DA CMB

*“Medições mais sensíveis da radiação de fundo no futuro
nos permitirão descobrir fatos adicionais sobre o Universo”.*

(Robert Woodrow Wilson)

12 Algumas perspectivas futuras sobre o estudo da CMB

12.1 O que iremos estudar neste capítulo?

“Algumas perspectivas futuras sobre o estudo da CMB” é um capítulo que mostra quais são as expectativas teóricas e experimentais acerca da CMB (na busca por dados mais precisos), trazendo uma visão futura do instrumental a ser utilizado e das missões (algumas já em planejamento). Um dos pontos mais importantes de um estudo é a sua continuidade, daí vem a significância de escrever esta parte.

12.2 O panorama atual

Os 15 anos posteriores à descoberta das anisotropias da CMB pelo COBE testemunharam um progresso notável, que inaugurou a época atual da cosmologia de precisão. Desde as detecções preliminares de potência na escala angular até as medições atuais de 5 picos acústicos, a cauda de amortecimento e a polarização, os marcos na verificação observacional de nossa compreensão teórica do Universo em recombinação foram constantemente ultrapassados. Correspondentemente, as medições dos conteúdos de densidade de energia do Universo na recombinação e a distância e, portanto, a taxa de expansão desde a recombinação melhoraram de restrições de unidade de ordem para várias determinações de nível percentual (HU, 2008).

Nesse sentido, os resultados do BOOMERANG, MAXIMA-1, ARCHEOPS, CBI (Cosmic Background Imager), DASI e WMAP foram tão importantes que entraram em campo na era da cosmologia de precisão. Esses estudos produziram restrições impressionantes em muitos parâmetros cosmológicos fundamentais e levaram a uma imagem muito definida da estrutura e da evolução do Universo. No entanto, queremos enfatizar que, mesmo após esses projetos notáveis, o estudo da física da CMB não está chegando ao fim. Ainda existem muitos problemas não resolvidos na cosmologia, e é necessária outra geração de experimentos com satélites, bem como experimentos terrestres e em balões (NASELSKY; NOVIKOV; NOVIKOV, 2006).

12.3 O que está no horizonte?

As possibilidades para aplicações de física teórica em cosmologia são ilimitadas: hoje em dia a qualidade das observações é tal que podemos seriamente fazer com precisão

matemática. Os limites do Universo observável estão sendo levados rapidamente à frente. Novos fatos estão sendo adicionados dia a dia. Novas observações estão à nossa espera (MARQUES, 2012).

A próxima geração de experimentos talvez detecte a única previsão notável da época de recombinação: a polarização do modo B das ondas gravitacionais da inflação. Da mesma forma, a faixa aprimorada de medições de precisão do espectro de potência trará medições do espectro de perturbações escalares ao nível percentual e testará ainda mais a física da inflação. Esses experimentos também testarão a temperatura secundária e a anisotropia de polarização da reionização, lentes e aglomerados de galáxias, bem como a gaussianidade das condições iniciais. Combinadas, essas medições testarão o modelo cosmológico padrão com precisão sem precedentes (HU, 2008).

Assim, o futuro desse campo depende criticamente das perspectivas de sensibilidades observacionais para esses sinais no futuro próximo. Abordamos essa questão no contexto dos dados de polarização do modo E da CMB, que serão atualizados em breve por experimentos como o Simons Observatory, LiteBIRD (Light satellite for the studies of B-mode polarization and Inflation from cosmic background Radiation Detection) e CMB S4. Devido às suas funções de transferência mais nítidas, os modos E carregam mais informações sobre os recursos do que os modos tensoriais e, portanto, espera-se que melhorem nosso conhecimento sobre os recursos (BRAGLIA et al., 2023).

Há também várias missões espaciais propostas para as agências espaciais NASA, ESA (European Space Agency) e JAXA (Japanese Space EXploration Agency), incluindo o satélite LiteBIRD, que mediria a polarização em grandes escalas angulares, e o satélite PIXIE (Polar Ionosphere X-Ray Imaging Experiment), que mediria o CMB em centenas de comprimentos de onda usando um espectrômetro. Um satélite pode ser a única rota para medir os sinais de maior escala, mas o caminho para novas descobertas à frente provavelmente envolverá um conjunto coordenado de experimentos usando diferentes plataformas (DUNKLEY, 2015).

Olhando além, exigimos medições de grandes áreas atingindo níveis de ruído de $1 \mu\text{K}/\text{arcmin}$ ou melhor, com cobertura de frequência suficiente para remover foregrounds e controle de incertezas sistemáticas. Para isso, está previsto um ambicioso projeto terrestre, atualmente conhecido como CMB-S4, que visa reunir grupos para colocar em campo cerca de 100000 detectores em vários telescópios (DUNKLEY, 2015).

O CMB-S4 está planejando colocar uma série de telescópios de microondas em dois locais que foram avaliados por seu valor científico: o Planalto de Atacama no Chile e o Pólo Sul. O Observatório Simons, em construção no Chile, e o Observatório do Pólo Sul, operando na Antártida, estão entre os experimentos CMB precursores do “Estágio 3” que podem fornecer uma base sólida para o desenvolvimento do CMB-S4. Para cumprir alguns dos objetivos científicos do CMB-S4, os cientistas precisarão olhar para o mesmo

pedaço de céu por um longo tempo, e o Pólo Sul é convenientemente orientado para isso, já que sua visão do céu muda muito pouco ao longo do curso ano. Os cientistas planejam hospedar pelo menos 9 telescópios de pequena abertura de 0,5 metros de diâmetro e um telescópio de grande abertura de 5 metros no local do Pólo Sul do CMB-S4 para realizar uma pesquisa ultraprofunda de 3% do céu (O'KEEFE, 2022).

Outros objetivos exigem que os cientistas colem dados de uma área muito grande do céu e o deserto do Atacama (no Chile) é adequado para isso. No local do CMB-S4 os cientistas planejam usar dois telescópios de 6 metros de grande abertura para realizar uma pesquisa profunda e ampla de 70% do céu. A colaboração CMB-S4 planeja usar centenas de milhares de bolômetros supercondutores como seus detectores. O design do CMB-S4 oferece um grande avanço na sensibilidade, o que permite analisar elementos que os outros experimentos não conseguiram (O'KEEFE, 2022).

Três grandes estudos endossaram o CMB-S4. Foi recomendado em 2014 pelo Painel de Priorização de Projetos de Física de Partículas, que define prioridades para a física de partículas dos EUA; em 2015 pelo relatório da National Academies, A Strategic Vision for NSF Investments in Antarctic and Southern Ocean Research, que define as metas para o National Science Foundation Office of Polar Programs; e em novembro de 2021 pelo relatório da National Academies Pathways to Discovery in Astronomy and Astrophysics, que descreve as prioridades para a astronomia e astrofísica dos EUA na próxima década (O'KEEFE, 2022).

A equipe do CMB-S4 está planejando que o projeto seja uma parceria entre a National Science Foundation e o Departamento de Energia dos EUA. Em 2019, o DOE estabeleceu formalmente a necessidade científica do CMB-S4 e, em 2020, designou o Lawrence Berkeley National Lab como o laboratório anfitrião. As agências financiadoras exigem revisões adicionais antes de aprovar o início da construção. A equipe do CMB-S4 também deve considerar a alocação dos recursos limitados disponíveis na Estação Pólo Sul, que devido ao seu afastamento e ao frio extremo, só é acessível por alguns meses por ano. Para combinar de forma otimizada as capacidades do CMB-S4 com as restrições logísticas de implantação e operação dos telescópios no Pólo Sul, o equilíbrio entre o número de telescópios colocados em cada local está sendo reexaminado por meio de uma “análise de alternativas”, um dos muitos requisitos da agência antes de considerar e aprovar o projeto para construção (O'KEEFE, 2022).

Os responsáveis pelo experimento CMB-S4 estão analisando as diferentes mudanças nas configurações de instrumentos que se devem fazer para atender aos requisitos e também a questão logística para o projeto no geral. Após essa sondagem, se iniciará o processo de busca pelo financiamento do projeto e, com isso, avançar para os próximos estágios do projeto (especialmente a sua construção). As operações estão previstas para o início da década de 2030 (O'KEEFE, 2022).

*OLHANDO PARA O UNIVERSO ATRAVÉS DA
RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO*

*CAPÍTULO 13
A TÍTULO DE CONSIDERAÇÕES FINAIS*

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano”.

(Isaac Newton)

13 A título de considerações finais

Nessa monografia nos dedicamos a discutir sistematicamente a Física por trás da CMB, com base no modelo cosmológico padrão. Além disso, uma das finalidades desse trabalho foi fornecer uma ferramenta bibliográfica para facilitar o estudo da CMB por simpatizantes do assunto, a partir dos detalhamentos teórico e matemático apresentados. Buscamos, ainda, proporcionar (especialmente para os alunos de graduação) uma visão geral do campo da Cosmologia e abordar os conhecimentos essenciais para se compreender (através dos modelos cosmológicos) a origem e a evolução do cosmos.

Nesse sentido, motivados pelo leque de informações cosmológicas que pode ser extraído desta Radiação, procuramos apresentar detalhadamente os resultados mais importantes obtidos ao longo da história e a fenomenologia associada a eles. Para a obtenção desses resultados, estudamos tanto aspectos relacionados à CMB que são relativamente bem conhecidos (como: as não-homogeneidades do Universo primordial, as anisotropias da CMB e os efeitos dos parâmetros cosmológicos) quanto aqueles que ainda carecem de melhores comprovações experimentais (como: o modo B de polarização). Com o avanço dos instrumentos de medida (principalmente dos satélites e dos observatórios) esperamos obter dados mais precisos para restringir mais fortemente os valores dos parâmetros cosmológicos e, com isso, fortalecer a Física que descreve o comportamento do Universo.

Por outro lado, ainda buscamos responder a perguntas como: Qual é a natureza e a origem da energia escura? Como ela evoluiu/evolui? Qual é a real natureza da matéria escura? Nessa linha, em especial, temos que destacar outra questão (essa, relacionada à CMB propriamente dita) que permanece em aberto e que será objeto de estudo nos próximos anos: como se comporta o modo B de polarização da CMB? O modelo inflacionário prevê a existência de tal modo e acredita-se que medições de melhor precisão do que as do DASI e do WMAP poderão responder a esta pergunta e abrir uma nova janela para o Universo primordial. Estas questões são a principal motivação para que o estudo da CMB siga (e se fortaleça).

Referências

- ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. *The origin of chemical elements*. [S.l.]: Physical Review, v. 73, 04/1948, 1948. Citado na página [24](#).
- ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. *Theory of the origin and relative abundance distribution of the elements*. [S.l.]: Reviews of Modern Physics, v. 22, 04/1950, 1950. Citado 2 vezes nas páginas [24](#) e [158](#).
- BAUMANN, D.; MCALISTTER, L. *Inflation and string theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. Citado na página [25](#).
- BRAGLIA, M. et al. *Back to the features: assessing the discriminating power of future CMB missions on inflationary models*. [S.l.]: arXiv:2210.07028v2 [astro-ph.CO] 6 Mar 2023, 2023. Citado na página [244](#).
- BUCHER, M. *Physics of the cosmic microwave background anisotropy*. [S.l.]: Int. J. Mod. Phys., 2015. Citado 10 vezes nas páginas [230](#), [231](#), [232](#), [233](#), [234](#), [235](#), [236](#), [238](#), [239](#) e [241](#).
- CIÊNCIA, T. e. I. Ministério da. *Ensino à distância Cosmologia: da origem ao fim do universo*. [S.l.]: Observatório nacional, 2016. Citado 10 vezes nas páginas [30](#), [33](#), [34](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#), [39](#), [41](#) e [42](#).
- DIMOPOULOS, K. *Introduction to cosmic inflation and dark energy*. [S.l.]: CRC Press, 2021. Citado na página [25](#).
- DODD, J. E.; GRIPAIOS, B. *The Ideas of Particle Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. ISBN 9781108616270. Citado 7 vezes nas páginas [29](#), [30](#), [31](#), [33](#), [34](#), [38](#) e [48](#).
- DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Academic Press, 2021. ISBN 978-0-12-815948-4. Citado 79 vezes nas páginas [25](#), [72](#), [73](#), [76](#), [79](#), [80](#), [82](#), [83](#), [84](#), [86](#), [89](#), [90](#), [91](#), [92](#), [93](#), [97](#), [98](#), [103](#), [104](#), [105](#), [106](#), [109](#), [110](#), [112](#), [113](#), [115](#), [116](#), [117](#), [121](#), [122](#), [123](#), [127](#), [128](#), [129](#), [130](#), [131](#), [133](#), [135](#), [137](#), [138](#), [139](#), [141](#), [142](#), [144](#), [145](#), [149](#), [150](#), [151](#), [153](#), [154](#), [166](#), [167](#), [168](#), [169](#), [170](#), [171](#), [172](#), [173](#), [186](#), [188](#), [190](#), [191](#), [193](#), [194](#), [195](#), [196](#), [197](#), [198](#), [199](#), [200](#), [201](#), [202](#), [203](#), [204](#), [205](#), [206](#), [207](#), [208](#) e [209](#).
- DUNKLEY, J. *Perspective on the Cosmic Microwave Background*. [S.l.]: A letters journal exploring the frontiers of Physics, 2015. Citado na página [244](#).
- DURRER, R. *The Cosmic Microwave Background*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. Citado na página [25](#).
- EVANS, R. *The Cosmic Microwave Background: How It Changed Our Understanding of the Universe*. [S.l.]: Springer theses, 2015. ISBN 978-3-319-00308-5. Citado 7 vezes nas páginas [25](#), [158](#), [159](#), [160](#), [161](#), [162](#) e [174](#).
- FABRIS, J. C.; AL et. *The Cosmic Microwave Background*. [S.l.]: Springer International Publishing. v. 45, 2016. Citado na página [24](#).
- FIXSEN, D. J. *The temperature of the cosmic microwave background*. [S.l.]: The Astrophysical Journal, v. 707, 12/2009, 2009. Citado na página [24](#).

- GIOVANNINI, M. *A primer on the physics of the cosmic microwave background*. [S.l.]: World Scientific Publishing, 2008. Citado na página 25.
- GUAITOLINI JUNIOR, J. T. *Radiação Cósmica de Fundo: Anisotropias, Polarização e Parâmetros Cosmológicos*. [S.l.]: Universidade Federal do Espírito Santo, 2012. Citado 13 vezes nas páginas 24, 25, 184, 215, 217, 218, 219, 222, 223, 224, 226, 227 e 228.
- HU, W. *Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination*. [S.l.]: arXiv:0802.3688v1 [astro-ph], 2008. Citado 9 vezes nas páginas 149, 205, 206, 207, 209, 210, 211, 243 e 244.
- LE MOS, P.; LEWIS, A. *CMB constraints on the early universe independent of late time cosmology*. [S.l.]: arXiv:2302.12911v2 [astro-ph.CO] 16 May 2023, 2023. Citado 5 vezes nas páginas 209, 211, 231, 233 e 235.
- MARQUES, T. *Radiação Cósmica de Fundo: Características e Atualidades*. [S.l.]: CADERNO DE FÍSICA DA UEFS 10, (01 E 02): 45-52, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 76, 163 e 244.
- MIRANDA, W. L. de A. *A Radiação Cósmica de Fundo e a Interação entre Energia e Matéria Escuras*. [S.l.]: UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, INSTITUTO DE FÍSICA, Programa de Pós-Graduação em Física, 2017. Citado na página 175.
- MONTEIRO, L. C. *Cosmologia de Partículas no Universo Primordial: Repovoamento Pós-inflacionário via Preheating e Reheating*. [S.l.]: Universidade Federal da Paraíba; Centro de Ciências Exatas e da Natureza; Programa de Pós-Graduação em Física, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 99, 100, 103, 185 e 200.
- NASELSKY, P. D.; NOVIKOV, D. I.; NOVIKOV, I. D. *The Physics of the Cosmic Microwave Background*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 243.
- O'KEEFE, M. *The next stage of cosmic microwave background research*. [S.l.]: Symmetry dimensions of particle physics, 2022. Citado na página 245.
- PARTRIDGE, R. B. *3K: the cosmic microwave background radiation*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0531253541. Citado 21 vezes nas páginas 24, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 44, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 157, 158, 159, 160, 161, 162 e 163.
- PENZI AS, A. A.; WILSON, R. W. *A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s*. [S.l.]: The Astrophysical Journal, v. 142, 07/1965, 1965. Citado na página 24.
- PETTINARI, G. W. *The Intrinsic Bispectrum of the Cosmic Microwave Background*. [S.l.]: Springer International Publishing Switzerland, 2016. ISBN 978-3-319-21881-6. Citado 17 vezes nas páginas 25, 56, 57, 58, 60, 63, 64, 65, 77, 79, 86, 87, 88, 133, 146, 147 e 148.
- ROSSMANITH, G. *Non-linear Data Analysis on the Sphere: The Quest for Anomalies in the Cosmic Microwave Background*. [S.l.]: Springer theses, 2013. ISBN 978-3-319-09927-9. Citado 10 vezes nas páginas 24, 173, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181 e 182.
- VILLELA, T.; FERREIRA, I.; WUENSCH E, C. A. *Cosmologia observacional: a radiação cósmica de fundo em microondas*. [S.l.]: REVISTA USP, São Paulo, n.62, p. 104-115, junho/agosto 2004, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 165, 175, 185 e 203.

WINSTEIN, B. *THE COSMIC MICROWAVE BACKGROUND RADIATION*. [S.l.]: 31st SLAC Summer Institute on Particle Physics: Cosmic Connection To Particle Physics, 2003. Citado 6 vezes nas páginas [161](#), [174](#), [175](#), [184](#), [188](#) e [211](#).

WOLF, F. *Aula 18 - Equação de Boltzmann, método Lattice-Boltzmann e aplicações*. [S.l.: s.n.], 2021. Citado na página [68](#).

WUENSCHÉ, C. A. *A Radiação Cósmica de Fundo em Microondas e a Formação de Estruturas no Universo: Uma Visão Atual*. [S.l.]: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 1994. Citado na página [55](#).