



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Flutuações do Vácuo Quântico a Temperatura Finita na
Propagação da Luz em Meios Óticos Não Lineares**

Luciano Nascimento

Campina Grande-PB, Brasil.

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Flutuações do Vácuo Quântico a Temperatura Finita na
Propagação da Luz em Meios Óticos Não Lineares**

Luciano Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos e Gravitação.

Subárea de Concentração: Física Matemática/Teoria Quântica de Campos em Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos.

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa.

Campina Grande-PB, Brasil.

2022

N244f Nascimento, Luciano.
Flutuações do vácuo quântico a temperatura finita na propagação da luz em meios óticos não lineares / Luciano Nascimento. – Campina Grande, 2022.
96 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa".

Referências.

1. Física – Flutuações do Vácuo Quântico. 2. Campo Elétrico. 3. Propagação da Luz. 4. Teoria Quântica de Campos. 5. Gravitação. 6. Física Matemática. 7. Teoria Quântica de Campos em Matéria Condensada. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Bessa, Carlos Heitor Gomes. III. Título.

CDU 530.145(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

LUCIANO NASCIMENTO

Flutuações do Vácuo Quântico a Temperatura Finita na Propagação da Luz em Meios Óticos não Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 22/07/2022

Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Presidente da Comissão e Orientador

Carlos Heitor Gomes Bessa
Coorientador

Marcos Antônio Anacleto
Examinador Interno

Lincoln Rodrigues Sampaio de Araújo
Examinador Externo



Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS, PROFESSOR 3 GRAU**, em 02/08/2022, às 12:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

Documento assinado eletronicamente por **LINCOLN RODRIGUES SAMPAIO DE ARAUJO, COORDENADOR(A) DE GRADUACAO**, em 02/08/2022, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 04/08/2022, às 09:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **2557077** e o código CRC **B161E615**.

Referência: Processo nº 23096.047279/2022-92

SEI nº 2557077

Entrega o teu caminho ao senhor, confia nele e
ele tudo fará. (*Salmos 37:5*)

*O que eu mais amo em minha casa é quem divide
ela comigo, Anastasiia e Amália, amo vocês
duas...*

Luciano Nascimento (Físico)



As flutuações quânticas sempre existirão com as incertezas...

Agradecimentos

A Deus e ao Senhor Jesus Cristo, por ter me dado saúde, forças e coragem por superar todos os obstáculos da minha vida.

À minha esposa Anastasiia e a minha filha Amália, que me apoiou durante esta importante etapa de minha vida, e me deram suporte durante esses dois anos.

A você, minha esposa, Anastasiia, agradeço por tudo que faz e por estar comigo em todos os momentos da minha vida.

À meus sogros, Tetiana e Volodymyr pelo o carinho e amor, e acima de tudo sinto muita gratidão por ele ter colocado no mundo o amor da minha vida, Anastasiia.

A minha filha, Amália, com muito amor e carinho.

A minha família em especial minha mãe Maria Dalva Nascimento, pelo amor e o apoio aos meus estudos durante, em todas as etapas da minha vida; sou muito grato a você minha mãe, por ter me dado a vida, educação e forças para persistir nos meus sonhos conquistado e acreditar sempre nas promessas de Deus.

Dedico esse trabalho ao meu irmão Marcos Antônio Nascimento (*in memoriam*).

Aos meus irmãos com carinho...

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos e o Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Béssa, pelas orientações, paciência, ajuda, amizades e oportunidades de realização deste trabalho de mestrado.

Prof. Dr. Eduardo dos Passos e Prof. Dr. Carlos Béssa, meus agradecimento por todo o conhecimento acadêmico que transmitiram para mim durante estes dois anos, sou e serei grato em toda minha vida profissional. Obrigado por tudo...

A todos os professores desta Unidade Acadêmica de Física-UFCG que contribuíram com a minha formação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

Aos colegas de pós-graduação e funcionários pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade Acadêmica de Física da UFCG.

Lista de Figuras

2.1	Superfície gaussiana esférica centrada em Q	5
2.2	Lei de Gauss do magnetismo: as linhas de campo magnético \mathbf{B} são fechadas porque não existem cargas magnéticas monopulares.	6
2.3	Linhas de campo elétrico geradas pela variação temporal do campo magnético, conforme a Lei de Faraday, circulam em torno de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ e são fechadas.	7
2.4	Corrente de deslocamento entre duas placas paralelas com as cargas q e $-q$. O campo magnético no caminho C não depende da superfície ampèriana escolhida, o que implica a necessidade da corrente de deslocamento entre as placas.	9
2.5	Um pulso de luz que atravessa um meio ótico não linear.	14
3.1	Cristal não linear com parâmetro d que mede seu tamanho e b mede o quão rápido o efeito é “ligado e desligado”.	22
3.2	Gráficos da função $F_{b,d}(x)$	23
3.3	Módulo da transformada de Fourier de $\tilde{F}_{b,d}(x)$. Especificamente, a função $g(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{ \tilde{F}_{b,d}(k) }{d}$ é plotado como uma função de $z = kd$ para o caso $b = 0.01$	27
5.1	Estrutura da rede cristalina do cristal CdSe.	46
5.2	Flutuações no tempo de voo $\gamma = \langle \Delta t_d^2 \rangle_\beta - \langle \Delta t_d^2 \rangle_0 / \langle \Delta t_d^2 \rangle_0$ versus temperatura β para contribuição dos termos de segunda ordem do sistema total-vácuo para o Seleneto de Cádmio (CdSe).	47
A.1	Região fechada multiplamente conexa delineada pelos caminhos C e C_j	50
C.1	Contorno escolhido nos polos i) e ii).	58
C.2	Contorno escolhido no polo iii).	59
C.3	Contorno escolhido no polo iv).	60

C.4	Contorno escolhido no polo v).	60
C.5	Contorno escolhido no polo vi).	61
D.1	Contorno escolhido para realização da integral I_{11x}^T .	65
D.2	Contorno escolhido para realização da integral I_{12x}^T .	66
D.3	Contorno escolhido para realização da integral I_{21x}^T .	67
D.4	Contorno escolhido para realização da integral I_{22x}^T .	68
D.5	Contorno escolhido para realização da integral I_{23x}^T .	69
D.6	Contorno escolhido para realização da integral I_{24x}^T .	69
E.1	Contorno escolhido para realização da integral I_{21x}^M .	71
E.2	Contorno escolhido para realização da integral I_{22x}^M .	72
E.3	Contorno escolhido para realização da integral I_{23x}^M .	73
E.4	Contorno escolhido para realização da integral I_{24}^M .	74
E.5	Contorno escolhido para realização da integral I_{11x}^M .	75
E.6	Contorno escolhido para realização da integral I_{12x}^M .	76
E.7	Contorno escolhido para realização da integral I_{15x}^M .	77
E.8	Contorno escolhido para realização da integral I_{16x}^M .	78

Resumo

Nessa dissertação, vamos estudar os efeitos das flutuações quânticas e térmicas em meios materiais dielétricos. A ideia básica aqui será considerar um pulso de luz, chamado de pulso sonda, atravessando uma amostra de material dielétrico. No caso em questão, utilizaremos o Seleneto de Cádmio (CdSe). As não linearidades do material serão ativadas por um campo elétrico de fundo \mathbf{E}^0 . O resultado clássico diz que esse pulso irá atravessar a amostra de comprimento (d) num certo tempo de voo (t). No entanto, quando quantizado, \mathbf{E}^0 sofrerá efeitos de flutuações quânticas, as chamadas flutuações do vácuo. Mostraremos que tais flutuações irão alterar o tempo de voo do pulso sonda na amostra. Para tal, calcularemos a variância fracionária para o tempo de voo, e para uma amostra de CdSe de aproximadamente $10\mu m$ ela será de aproximadamente 10^{-8} . Tal resultado, poderia, em princípio, ser medido em laboratório. No entanto, num experimento físico real, flutuações de origem térmica também estão presentes e elas irão influenciar o resultado descrito acima. Sendo assim, também vamos levar em consideração os efeitos que as flutuações térmicas provocam em \mathbf{E}^0 e assim veremos como elas irão afetar o tempo de voo do pulso sonda que atravessa a amostra de CdSe. Em particular, encontramos que para uma temperatura $T < 46K$, as flutuações do vácuo quântico são dominantes com relação às flutuações de origem térmica. Para realizar tais cálculos, consideramos termos de até segunda ordem nas suscetibilidades da amostra de CdSe, pois é a partir desses termos que as não linearidades aparecem. Também consideramos uma função teste, da qual, do ponto de vista prático, regulariza integrais divergentes que aparecerão no decorrer da dissertação e do ponto de vista físico, modela a geometria do dielétrico.

Palavras-chave: Flutuações do Vácuo Quântico; Campo Elétrico; Propagação da Luz.

Abstract

In this dissertation, we will study the effects of quantum and thermal fluctuations in dielectric material media. The basic idea here will be to consider a pulse of light, called a probe pulse, passing through a sample of dielectric material. In this case, we will use Cadmium Selenide (CdSe). Material nonlinearities will be activated by a background electric field \mathbf{E}^0 . The classic result says that this pulse will cross the sample of length (d) in a certain time of flight (t). However, when quantized, \mathbf{E}^0 will suffer the effects of quantum fluctuations, the so-called vacuum fluctuations. We will show that such fluctuations will alter the time of flight of the probe pulse in the sample. To do so, we will calculate the fractional variance for the flight time, and for a sample of CdSe of approximately $10\mu m$ it will be approximately 10^{-8} . Such a result could, in principle, be measured in the laboratory. However, in a real physical experiment, fluctuations of thermal origin are also present and they will influence the result described above. Therefore, we will also consider the effects that thermal fluctuations have on \mathbf{E}^0 and then we will see how they will affect the flight time of the probe pulse that passes through the CdSe sample. In particular, we find that for a temperature $T < 46K$, quantum vacuum fluctuations are dominant over fluctuations of thermal origin. To perform such calculations, we consider terms of up to second order in the susceptibilities of the CdSe sample, since it is from these terms that the nonlinearities appear. We also consider a test function, which, from a practical point of view, regularizes divergent integrals that will appear in the course of the dissertation and from a physical point of view, models the geometry of the dielectric.

Keywords: Quantum Vacuum Fluctuations; Electric Field; Propagation of Light.

Sumário

1	Introdução	1
2	Eletromagnetismo Clássico	4
2.1	Equações de Maxwell na Forma Diferencial	4
2.2	Equações de Maxwell em Meios Materiais	10
2.2.1	Equação da Onda	11
2.2.2	Óptica Não Linear e Propagação da Luz	13
3	Flutuações do Vácuo	19
3.1	Flutuações no Tempo de Voo	19
3.2	Função Teste	21
3.3	Flutuações de Vácuo e Função Teste	23
3.4	Variância Fracionária no Tempo de Voo	24
4	Flutuações do Vácuo Quântico a Temperatura Finita	28
4.1	Flutuações Térmicas	28
4.1.1	Integrais para Contribuição Térmica	31
4.2	Flutuações Mixtas	33
4.2.1	Integrais para Contribuição Mixta	33
5	Estimativa Numérica	45
5.1	Seleneto de Cádmio (CdSe)	45
6	Conclusões e Perspectivas	49
A	Teorema do Resíduo	50
B	Função Digama	53

C	Integrais para Contribuição do Vácuo	55
D	Integrais para Contribuição Térmica	64
E	Integrais para Contribuição Mixta	71

Capítulo 1

Introdução

A reflexão filosófica sobre o vácuo é tão antiga quanto a própria filosofia [1]. Desde a antiguidade, filósofos gregos se dividiram quanto à existência ou não do vácuo clássico [2]. O vácuo é a ausência total de matéria [3]. No vácuo, não há qualquer resquício de matéria ou radiação, sendo completamente inativo e sem nenhuma característica física, e as suas únicas propriedades geométricas são homogeneidade, isotropia e dimensionalidade [4]. Os conceitos físicos, favorece a existência desse vácuo, como sendo uma estrutura da mecânica newtoniana, desprovida do eletromagnetismo de Maxwell, em que se postula a existência de um meio material bem sutil, o éter que preenche todo o espaço [5]. Com o advento da relatividade especial, o conceito de éter foi abandonado na física e substituído por um vácuo clássico [6].

Por fim, com a formulação da teoria quântica de campos, o vácuo clássico foi posto a mera aproximação do vácuo real, no que chamamos de vácuo quântico. Na teoria quântica de campos, a interação da radiação com a matéria causa excitações eletrônicas no seu estado assintótico [7]. Em determinada região que há ausência de matéria ou radiação o campo encontra-se em seu estado fundamental, que denominamos de vácuo do campo. Supõe-se que o momento, a energia e outros observáveis do campo são nulas neste estado, e quaisquer observações não são discutidas.

Contudo, pelo princípio da incerteza de Heisenberg (efeito análogo à Radiação Hawking, Flutuação do Cone de Luz, e etc.), o valor nulo desses observáveis é um certo valor médio, em torno do qual ocorrem flutuações constantes [8]. Sendo reais tais flutuações, podem sofrer certas influências externa de campos aplicados e reagir a tais influências de maneira a princípio e observável. Este conceito, em teoria quântica de campos deu

origem a explicação de diversos fenômenos por meio da influência direta das flutuações do vácuo quântico. Essas flutuações têm muitas consequências observáveis, dando origem a muitos fenômenos relevantes, como o efeito Casimir [9] (e o efeito Casimir dinâmico [10]), o desvio Lamb, a emissão espontânea de fótons e as perturbações cosmológicas [11]. Estudos recentes mostraram que, em diferentes circunstâncias, as flutuações quânticas no vácuo do campo podem induzir o movimento browniano de uma partícula de teste carregada causada por flutuações de vácuo eletromagnético quântico entre duas placas perfeitamente condutoras, como é possível ver em [12, 13]. São o que chamamos efeitos do das flutuações quânticas no vácuo. Estudos recentes mostraram que, em diferentes circunstâncias, as flutuações quânticas no vácuo do campo podem induzir o movimento browniano de uma partícula de teste carregada causada por flutuações de vácuo eletromagnético quântico entre duas placas perfeitamente condutoras, como é possível ver em [14, 15]. Notou-se que a presença do campo elétrico no vácuo está intimamente ligado às contribuições dos efeitos térmicos e mixtos das flutuações quânticas. Sendo assim, os efeitos do vácuo se apresentam mesmo em temperaturas finitas [16].

No entanto, apesar da ausência de dispersão do campo elétrico no vácuo, quando se trata do domínio do vácuo sobre os efeitos térmicos e mixtos em temperatura finita, sabemos que as flutuações do vácuo desempenham um papel importante para valores de temperatura inversa β , é definida como $\beta = \frac{1}{T}$ que são dominantes sobre as contribuições térmicas e mixtas [17, 18]. As flutuações de vácuo dominam as flutuações térmicas perto de um regime de baixas temperaturas. Alguns efeitos interessantes também foram revelados em modelos análogos da propagação de luz em materiais não lineares, e em outros cenários gravitacionais onde foi demonstrado que flutuações ativas e passivas, ou seja, flutuações no campo gravitacional ou no tensor energia-momento do espaço-tempo curvo, respectivamente, levam a flutuações no cone de luz [19, 20].

O objetivo deste trabalho é de investigar o comportamento das flutuações do vácuo quântico, no contexto de temperatura finita na propagação da luz no composto inorgânico do Seleneto de Cádmio (CdSe) com susceptibilidade elétrica de segunda ordem. A ideia é verificar a flutuação no tempo de certos pulsos de luz da sonda que surge de um índice de refração flutuante devido as flutuações eletromagnéticas do vácuo em um meio óptico não linear em termos da propagação clássica da luz, tal meio pode ser realizado em um cristal não linear, como no CdSe.

A dissertação segue no capítulo (2) onde será apresentada uma revisão sobre o eletromagnetismo clássico e em meios materiais. No capítulo (3) serão estudados os efeitos da propagação da luz num meio ótico não linear sob influência das flutuações quânticas do vácuo. No capítulo (4), apresentamos essa mesma discussão levando em conta o efeito das flutuações da temperatura. No capítulo (5), faremos uma estimativa numérica para o efeito discutido nos capítulos anteriores para o composto inorgânico Seleneto de Cádmio (CdSe) e no capítulo (6) é apresentada as conclusões e perspectivas. Em algumas partes dessa dissertação, vamos considerar as unidades de Lorentz-Heaviside com $\hbar = c = k_B = 1$ e $\epsilon_o = \mu_o = 1$, exceto quando indicado de outra forma [21].

Capítulo 2

Eletromagnetismo Clássico

Neste capítulo apresentaremos uma breve revisão do Eletromagnetismo Clássico, discutiremos as Equações de Maxwell em sua forma integral e diferencial em um meio não linear.

2.1 Equações de Maxwell na Forma Diferencial

As equações fundamentais do eletromagnetismo clássico são expressas pelas lei de Gauss para o campo elétrico e magnético, pela Lei de Faraday, lei de Ampère-Maxwell, que reunidas formam as Equações de Maxwell na sua forma diferencial [22]. A lei de Gauss estabelece a relação entre o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada e a carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície. A lei de Gauss no formato integral para campos elétricos é dada por [23]:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

Que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema da divergência:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

em que Q pode ser escrito em função da densidade de carga confinada dentro da superfície gaussiana fechada que delimita o volume dV :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (2.3)$$

A carga total Q se obtém pela integração através de

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (2.4)$$

Substituindo a eq. (2.4) na eq. (2.3), obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.5)$$

Observe que a divergência do campo na eq. (2.5) fornece a intensidade de alguma grandeza relacionada com a produção deste campo, i.e., mede a magnitude da fonte. Para compreender como a lei de Gauss relaciona o fluxo do campo elétrico no interior de uma superfície gaussiana com a carga no interior Q dessa mesma superfície, escolhe-se uma superfície qualquer com uma carga Q em seu interior, conforme ilustrado na superfície A da Figura 2.1. A Lei de Gauss do magnetismo, estabelece que o campo magnético \mathbf{B} tem

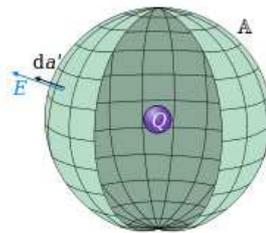


Figura 2.1: Superfície gaussiana esférica centrada em Q .

Fonte: [24].

divergente igual a zero, ou seja, que é um campo vetorial solenoidal [25]. A lei de Gauss no formato integral para campos magnéticos é dada por:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.6)$$

Podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema da divergência:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0, \quad (2.7)$$

gerando o seguinte,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

Isso é equivalente à afirmação da inexistência de monopólos magnéticos (cargas magnéticas) sendo novamente mostrada na Figura 2.2 abaixo. A Lei de indução de Faraday indica que um fluxo magnético variável pode induzir a formação de um campo elétrico

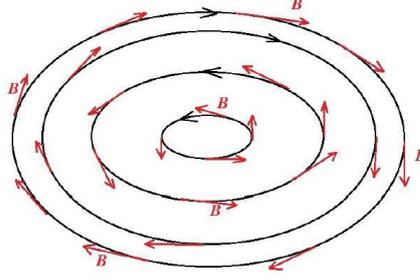


Figura 2.2: Lei de Gauss do magnetismo: as linhas de campo magnético \mathbf{B} são fechadas porque não existem cargas magnéticas monopolares.

Fonte: Arquivo Pessoal.

circulante e, por conseguinte, uma diferença de potencial e uma corrente elétrica [26]. A lei de Faraday no formato integral é dada por:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.9)$$

onde o fluxo de \mathbf{B} pode ser escrito como

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.10)$$

Substituindo a eq. (2.10) em (2.9), teremos

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \right), \quad (2.11)$$

que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema do rotacional:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \right), \quad (2.12)$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Aplicando o teorema de Stokes no primeiro membro da eq. (2.9) e rearranjando temos a seguinte eq. (2.12)

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (2.14)$$

que permite ser escrito como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.15)$$

O sinal “−” na eq. (2.15) do lado direito garante que a corrente induzida produz um campo magnético que se opõe a variação que lhe deu origem (Lei de Lenz). Matematicamente, lê-se que o rotacional do campo elétrico \mathbf{E} é igual ao negativo da variação temporal do campo magnético \mathbf{B} . Do ponto de vista físico, podemos afirmar que o sinal negativo da variação temporal do campo magnético, $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, atua como uma espécie de “densidade de corrente magnética” capaz de produzir um campo elétrico de natureza solenoidal (ou rotacional), cujas linhas devem ser fechadas. Em outras palavras, o campo elétrico tem fonte de circulação na variação temporal do campo magnético, que induz um campo elétrico de natureza solenoidal, cujas linhas devem ser fechadas. A Figura 2.3 ilustra a geração do campo elétrico não eletrostático, de natureza solenoidal, proveniente da lei de indução, tendo por fonte o vetor $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Note que as linhas do campo elétrico

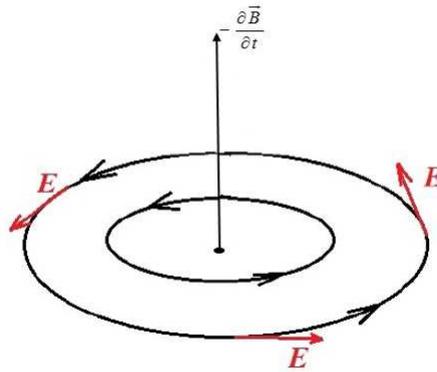


Figura 2.3: Linhas de campo elétrico geradas pela variação temporal do campo magnético, conforme a Lei de Faraday, circulam em torno de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ e são fechadas.

Fonte: Arquivo Pessoal.

circulam em torno de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ em cada ponto do espaço. A lei de Ampère no formato integral é dada por:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i, \quad (2.16)$$

que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema do rotacional:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.17)$$

Assim,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 i, \quad (2.18)$$

em que i pode ser escrito em função da densidade de corrente \mathbf{J} :

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.19)$$

indicando que o rotacional do campo magnético representa a densidade de corrente que atravessa a área delimitada pela curva fechada C .

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.20)$$

Maxwell propôs então que esta corrente de deslocamento deve ser adicionada à corrente de condução na Lei de Ampere descrito na eq. (2.16).

A carga acumulada é:

$$q = CV = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V = \varepsilon_0 AE, \quad (2.21)$$

que permite escrever que a variação de fluxo elétrico produz uma corrente de deslocamento i_d , onde podemos escrever:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = i_d = \varepsilon_0 \frac{\partial(AE)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Assim, lei de Ampère, a qual relaciona a integral linha de um campo magnético em caminho fechado com a corrente interceptada por uma superfície delimitada pelo contorno do loop em um curva C escolhido como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_d = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.23)$$

No caso geral, temos a lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Para obter o formato diferencial da lei de Ampère-Maxwell, aplicamos o teorema do rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{J}, \quad (2.25)$$

onde \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, \mathbf{B} é o vetor indução magnética, ρ é a densidade de carga elétrica, \mathbf{J} é o vetor densidade superficial de corrente, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Observe que, com essa adição, se estabelece uma simetria com a Lei de Faraday. Da mesma forma que a variação do fluxo magnético gera um campo elétrico, agora vemos que a variação do fluxo elétrico gera

um campo magnético. De fato, a lei de Ampère não faria sentido sem o termo extra de Maxwell. Pode-se usar a lei de Ampère para obter o campo magnético circulante nesse caminho.

Uma maneira simples de ver isso é imaginar uma superfície aberta S_1 definindo uma curva C , atravessada pela corrente de condução, e entretanto, se mantivermos a curva C mas deformarmos a superfície de tal forma que ela passe entre as duas placas paralelas com as cargas q e $-q$ e nunca seja atravessada pela corrente (isto é a superfície S_2), a Lei de Ampere original diria que a circulação do campo em C é nula, conforme ilustrado na Figura 2.4.

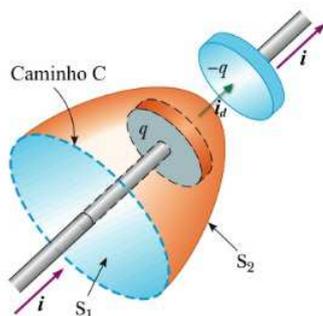


Figura 2.4: Corrente de deslocamento entre duas placas paralelas com as cargas q e $-q$. O campo magnético no caminho C não depende da superfície ampèriana escolhida, o que implica a necessidade da corrente de deslocamento entre as placas.

Fonte: [27].

Note que a variação espacial do campo magnético está relacionada com a variação temporal do campo elétrico. Em geral, apresentamos um resumo das equações de Maxwell na forma diferencial, sendo obtidas anteriormente nesta primeira seção (2.1),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{J}. \quad (2.29)$$

A seguir, apresentamos a descrição física das quatro equações de Maxwell :

1. Lei de Gauss para a eletricidade: “O fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada no vácuo é igual à soma das cargas internas à superfície dividida pela permissividade elétrica do vácuo”.
2. Lei de Gauss para o magnetismo: “O fluxo magnético resultante no interior de uma superfície fechada é zero”.
3. Lei de Faraday: “A variação do fluxo do campo magnético gera um campo elétrico”.
4. Lei de Ampère-Maxwell: “Um campo magnético \mathbf{B} pode ser produzido por uma corrente elétrica i ou pela variação (temporal) do fluxo do campo elétrico \mathbf{E} , Φ_E ”.

2.2 Equações de Maxwell em Meios Materiais

As equações de Maxwell em presença de uma densidade de carga elementar ρ_e e uma densidade de corrente J_e podem ser escritas em termos dos campos fundamentais microscópicos em meios lineares e isotrópicos [28], onde \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é o campo de indução magnética ¹. Essas são as equações de Maxwell na forma diferencial para meios materiais:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e. \quad (2.33)$$

Os campos ² envolvidos nas equações de Maxwell, podem ter dependências temporais das mais arbitrárias. Para um meio linear, isotrópico e homogêneo, significa que as propriedades elétricas do dielétrico são independentes da direção do campo elétrico \vec{E} . Como qualquer direção é completamente equivalente a outra, o vetor polarização \vec{P} deve ser necessariamente paralelo a \vec{E} de sorte que o vetor deslocamento elétrico \vec{D} satisfaz a relação [29],

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_o \vec{E} + \chi_e \epsilon_o \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.34)$$

¹Adotamos esta nomenclatura, para campos fundamentais macroscópicos a \mathbf{E} e \mathbf{H} .

²Os campos eletromagnéticos microscópicos e macroscópico para meios lineares, ou não lineares e isotrópicos que são descritos através das equações de Maxwell.

onde ϵ_o , χ_e e ϵ representam, respectivamente, a permissividade elétrica no vácuo, a suscetibilidade elétrica e a permissividade elétrica absoluta. De maneira similar, sendo μ_o , χ_m e μ , respectivamente, a permeabilidade magnética no vácuo, a suscetibilidade magnética e a permeabilidade magnética absoluta. Num meio homogêneo, linear e isotrópico, a magnetização (\vec{M}) é proporcional e paralela ao campo magnético \vec{H} , de sorte que [30],

$$\vec{B} = (\mu_o \vec{H} + \vec{M}) = \mu_o \vec{H} + \chi_m \mu_o \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (2.35)$$

Os campos \mathbf{D} e \mathbf{H} podem ser tratados matematicamente como os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} apenas nos casos especiais em que possuam análogos às leis de Gauss para o magnetismo de Faraday. Para que isto ocorra, as relações [31],

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (2.36)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

devem ser exatamente nulas. Desta forma [32],

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (2.38)$$

$$\nabla \times \mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (2.39)$$

Em muitas situações em que há simetrias, estas relações são naturalmente satisfeitas e podemos usar algumas técnicas desenvolvidas para deduzir \mathbf{E} e \mathbf{B} em meios não lineares.

2.2.1 Equação da Onda

Uma das consequências mais importantes das equações de Maxwell são as equações da propagação das ondas eletromagnéticas num meio material [33]. A equação para \mathbf{B} é deduzida, tomando-se o rotacional em ambos os lados da eq. (2.29):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_o c^2} \mathbf{J} \right), \quad (2.40)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\epsilon_o c^2} (\nabla \times \mathbf{J}). \quad (2.41)$$

Usando agora a seguinte identidade vetorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \quad (2.42)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\nabla \times \mathbf{J}), \quad (2.43)$$

pelo o fato de não existir cargas e correntes elétricas no vácuo, temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.45)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.46)$$

Vamos substituir as equações (2.45) e (2.46) em (2.41), obtendo o seguinte:

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\nabla \times \mathbf{J}), \quad (2.47)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\nabla \times \mathbf{J}). \quad (2.48)$$

Podemos escrever a densidade de corrente como:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Substituindo agora a eq. (2.49) em (2.48), temos que

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right), \quad (2.50)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{P}). \quad (2.51)$$

Agora vamos obter a dedução para \mathbf{E} , através da Lei de Faraday vamos tomar o rotacional em ambos os lados da eq. (2.46):

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \mathbf{B} \right), \quad (2.52)$$

usando a identidade vetorial da eq. (2.42) obtemos:

$$\left(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}). \quad (2.53)$$

temos que no meio material, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, e $\mathbf{J} = 0$, “**não tem cargas livres**” de (2.35), e o campo \mathbf{H} é chamado de campo magnético, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ e da (2.33).

Assim a intensidade do campo magnético como sendo $\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, onde definimos o vetor deslocamento elétrico como \mathbf{D} dado em (2.30) e na eq. (2.34), então:

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (2.54)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (2.55)$$

Definimos, portanto, o vetor do deslocamento elétrico do campo macroscópico como $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, e substituindo em eq. (2.55) teremos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \right], \quad (2.56)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \right], \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \right], \quad (2.58)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.59)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (2.60)$$

Podemos notar que $\mu_0 \epsilon_0$ deve ter a dimensão do inverso do quadrado da velocidade da luz ³.

Logo, substituindo na eq. (2.60), chegamos finalmente na equação da onda eletromagnética para o campo elétrico, \mathbf{E} , num meio linear com polarização:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (2.61)$$

Vamos assumir que no meio ótico em questão, o campo magnético não polariza o material, isto é, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, pois a susceptibilidade magnética é em geral muito menor que a susceptibilidade elétrica ($\chi_e \gg \chi_m$). Por isso não consideremos aqui. Logo, uma vez conhecida a relação funcional $\mathbf{P}(\mathbf{E})$, determinamos o campo elétrico \mathbf{E} como uma solução de (2.56), e alimentamos a eq. (2.51) com esta solução para determinar \mathbf{B} . Em outras palavras, a dinâmica do problema é completamente caracterizada pela eq. (2.56) [34].

2.2.2 Óptica Não Linear e Propagação da Luz

Nesta seção, vamos considerar um pulso de luz de um laser que atravessa um meio ótico não linear, pelo qual o detector capta as flutuações de vácuo causadas por um campo elétrico quantizado, conforme mostrado na Figura 2.5.

³A luz é uma forma de radiação eletromagnética, as equações de Maxwell prediz que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ é a velocidade da luz no vácuo.

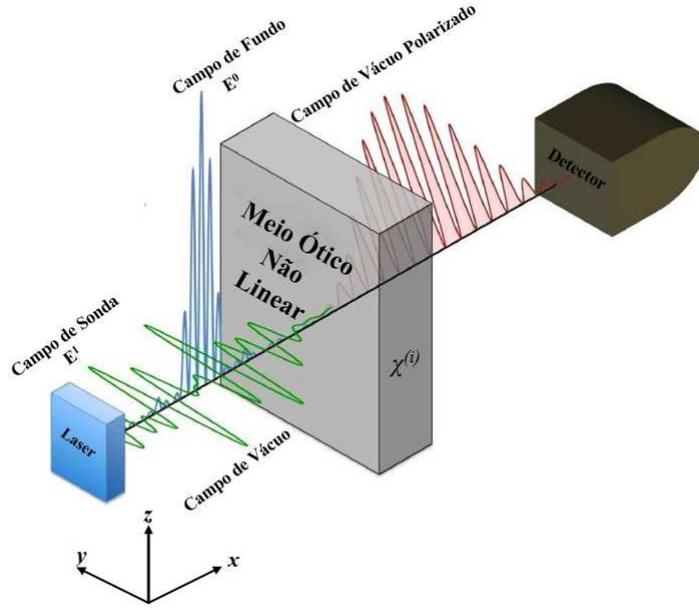


Figura 2.5: Um pulso de luz que atravessa um meio óptico não linear.

Fonte: Arquivo Pessoal.

Um material dielétrico não linear é aquele em que o vetor de polarização elétrica é uma função não linear do campo elétrico e pode ser escrito como [35],

$$P_i = \epsilon_o \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right), \quad (2.62)$$

onde definimos os tensores de susceptibilidades elétricas $\chi_{ij}^{(1)}$, $\chi_{ijk}^{(2)}$ e $\chi_{ijkl}^{(3)}$ de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente. De modo geral, $\chi^{(1)}$ é adimensional, $\chi^{(3)} = \left(\frac{m^2}{V^2}\right) \ll \chi^{(2)} = \left(\frac{m}{V}\right) \ll 1$ e portanto, esta aproximação é ótima para campos não intensos.

O componente do tensor de susceptibilidade linear $\chi_{ij}^{(1)}$ de primeira ordem do meio é aquele responsável pelos efeitos ópticos. O $\chi_{ijk}^{(2)}$ está presente nos materiais não centrosimétricos sendo responsável pelos efeitos ópticos não lineares. Os termos de ordem par da susceptibilidade estão associados com processos não lineares que levam à geração de segundo harmônico [36]. O termo de segunda ordem só é significativo para materiais que não exibem simetria de inversão no nível molecular [37]. O termo $\chi_{ijk}^{(3)}$ existe em meios com ou sem simetria de inversão que incluem a geração do terceiro harmônico, a mistura de frequências, o espalhamento Raman e Brillouin [38].

A suscetibilidade de segunda ordem leva a uma equação de onda não linear para o campo elétrico [39]. Todos os termos da susceptibilidade são uma característica intrínseca do material.

A equação de onda não linear para o campo elétrico pode ser expressa através da eq. (2.56) e eq. (2.62). Assim, temos que

$$\nabla^2 E_i - \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t} \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijj}^{(2)} E_j E_k \right). \quad (2.63)$$

Assumimos que o campo elétrico total pode ser escrito como a soma de um campo de fundo \mathbf{E}^0 e um campo de sonda menor, mas de variação mais rápida \mathbf{E}^1 (ambos representados na Figura 2.4) [40]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1, \quad (2.64)$$

onde $|E^0| \gg |E^1|$ mas $|\dot{E}^1/E^1| \gg |\dot{E}^0/E^0|$. Note que \mathbf{E}^0 e \mathbf{E}^1 satisfazem as equações não lineares, com um termo de acoplamento entre eles. No entanto, se a suscetibilidade de segunda ordem for suficientemente pequena, podemos considerar a equação para \mathbf{E}^0 aproximadamente linear [41]. Essas médias acopladas da não-linearidade de um campo elétrico externo aplicado do tipo $E_i^0(\mathbf{x}, t)$ é chamado de campo de fundo flutuante.

O campo elétrico associado ao pulso luminoso é denotado pelo vetor \mathbf{E}^1 , que escolhamos ser polarizado na direção \hat{z} e se propagando na direção \hat{x} , ou seja, $\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1(x, t) \hat{z}$. Além disso, assumimos que o campo de prova é menor em magnitude do que o campo de fundo, mas varia bem mais rapidamente. Vamos começar com a equação de onda do campo elétrico

$$\square^2 \mathbf{E} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \epsilon_0, \quad (2.65)$$

em que $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é operador de d'Alembert,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{E} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.66)$$

onde

$$\frac{P_i}{\epsilon_0} = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots, \quad (2.67)$$

Assim, retornando à eq. (2.66) temos que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}^0 - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{E}^0 \right) + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}^1 - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{E}^1 \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right]. \quad (2.68)$$

Como \mathbf{E}^0 é um campo de variação lenta, ele satisfaz a equação linear

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}^0 - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{E}^0 \right) = \frac{1}{c^2} \overleftrightarrow{\chi} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^0}{\partial t^2}. \quad (2.69)$$

Neste caso, o campo de sonda \mathbf{E}^1 é governado por uma equação de onda linearizada [42],

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) E^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\chi_{ij}^{(1)} E_j^1 + \chi_{ijk}^{(2)} (E_j^0 E_k^1 + E_j^1 E_k^0) \right], \quad (2.70)$$

onde desprezaremos termos da ordem de (2.70). Para simplificar nosso problema, podemos assumir que a polarização do campo de prova é ortogonal à direção de propagação, isto é, $\mathbf{E}^1 = E_{1z}(x, y) \hat{z} \equiv E^1(x, y) \hat{z}$. Nesse caso a eq. (2.70) torna-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\chi_{zz}^{(1)} E^1 + \chi_{zjk}^{(2)} (E_j^0 E^1 \delta_{kz} + E^1 \delta_{jz} E_k^0) \right], \quad (2.71)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\chi_{zz}^{(1)} + \chi_{zjz}^{(2)} E_j^0 + \chi_{zzk}^{(2)} E_k^0 \right] E^1, \quad (2.72)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} (1 + \chi_{zz}^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] E^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(\chi_{zjz}^{(2)} + \chi_{zzj}^{(2)}) E_j^0 \right] E^1. \quad (2.73)$$

Mais uma vez usamos $|\dot{E}^1| \gg |\dot{E}^0|$ e

$$\frac{\partial^2 E^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E^1}{\partial y^2} - \frac{1}{v_p^2} (1 + 2\epsilon_1) \frac{\partial^2 E^1}{\partial t^2} = 0, \quad (2.74)$$

onde temos que,

$$\epsilon_1 = \frac{1}{1 + \chi_{zz}^{(1)}} \left(\frac{\chi_{zjz}^{(2)} + \chi_{zzj}^{(2)}}{2} \right) E_j^0 = \gamma_j E_j^0. \quad (2.75)$$

A velocidade de fase do campo da sonda será dada por

$$v_p^2 = \frac{v}{\sqrt{1 + 2\epsilon_1}} \simeq v[1 - \epsilon_1], \quad (2.76)$$

e o índice de reflexão da luz é dado por

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{c}{v} (1 + 2\epsilon_1)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.77)$$

Logo

$$v_p^2 = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_{zz}^{(1)}}}, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial^2 E^1}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 E^1}{\partial t^2} = 0, \quad (2.79)$$

onde substituímos a eq. (2.64) em eq. (2.63). Aqui v_p^2 é a velocidade de fase da onda, que é dada por

$$v_p^2 = \frac{1}{n_p^2} (1 + 2\gamma_i E_i^0)^{-1}, \quad (2.80)$$

e

$$n_p = \left(1 + \chi_{zz}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.81)$$

onde na eq. (2.81), n_p é o índice de refração do meio medido pelo pulso da sonda, e definimos os seguintes coeficientes,

$$\gamma_i = \frac{1}{n_p^2} \left(\frac{\chi_{zzi}^{(2)} + \chi_{ziz}^{(2)}}{2} \right). \quad (2.82)$$

A eq. (2.79) mostra que o campo de fundo se acopla às não linearidades do meio, afetando a velocidade das ondas que se propagam por ele. Agora, vamos escrever a velocidade de fase $v_p = \frac{\omega}{k}$ e o índice de refração absoluto do meio como $n = \frac{c}{v_p}$, então teremos o seguinte $v_p = \frac{c}{n}$. Portanto, escrevendo a relação para $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, teremos:

$$\omega = c \left(\frac{k}{n} \right). \quad (2.83)$$

Derivando ω em função de k , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= \frac{c}{n^2} \left(n \frac{dk}{dk} - k \frac{dn}{dk} \right) \\ &= \frac{c}{n^2} \left(n - k \frac{dn}{dk} \right) \\ &= \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{dk}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Se o meio não é dispersivo, n não varia com k e $\frac{dn}{dk} = 0$ de modo que a velocidade de grupo de um pacote de ondas é aproximadamente igual à velocidade de fase, ou seja,

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} \equiv v_p. \quad (2.85)$$

Assim sendo, usando o fato de que $dx = v_p dt$, podemos calcular por integração direta o tempo de voo t_d que o pulso luminoso demora para atravessar o material, que supomos ter comprimento característico d na direção x [43], (ver a Figura 2.4)

$$t_d = \int_0^d \frac{1}{v_p} dx. \quad (2.86)$$

Substituindo v_p da eq. (2.80) teremos,

$$t_d = n_p \int_0^d \left(1 + \gamma_i E_i^0(\mathbf{x}, t)\right) dx. \quad (2.87)$$

Observe que os γ_i são coeficientes vinculados ao índice de refração e dos tensores de susceptibilidade elétrica do meio medido pelo pulso de sonda. Ao escrever a eq. (2.87),

assumimos que os efeitos não lineares são pequenos, de modo que podemos expandir numa série de Taylor do tipo $1/v_p$ na eq. (2.80). Além disto, se desconsideramos os termos não lineares na eq. (2.87) encontraremos $t = n_p x$, que é um pulso de luz viajando na velocidade $1/n_p$ sendo determinada pela susceptibilidade linear do meio material.

No próximo capítulo vamos utilizar a eq. (2.87) para estimar a variância no tempo de voo do pulso sonda. Veremos que essa variância é oriunda das flutuações quânticas do vácuo. No capítulo (4), levaremos em conta as flutuações de origem térmica e assim no capítulo (5) calcularemos para qual valor de temperatura as flutuações do vácuo são dominantes.

Capítulo 3

Flutuações do Vácuo

Neste capítulo, será apresentada uma descrição para a variância no tempo de voo de uma sonda teste que atravessa um meio ótico não linear. Veremos que essa variância é causada pelas flutuações quânticas do vácuo.

3.1 Flutuações no Tempo de Voo

Conforme vimos no capítulo 2 a eq. (2.87) é a expressão matemática para o tempo de voo de um campo de teste em um material não linear com dimensão característica d , na presença de um campo de fundo \mathbf{E}^0 que varia lentamente em comparação com o campo de prova \mathbf{E}^1 . Vamos considerar, que o campo de fundo vai sofrer flutuações de origem quânticas. Então, a eq. (2.87) mostra que o tempo de voo do campo de teste também sofrerá flutuações. A velocidade de um pulso de sonda em um meio com índice de refração efetivo n_p devido aos efeitos lineares vem da eq. (2.81) [44]

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_{zz}^{(1)}}} = \frac{1}{n_p}, \quad (3.1)$$

$$v_0 = \frac{v_p}{\sqrt{1 + 2\epsilon_1}} \cong v_p(1 - \epsilon_1), \quad (3.2)$$

onde χ é a suscetibilidade do meio, relacionada ao índice de refração n através da relação simples $n = \sqrt{1 + \chi}$ [45]. É fácil ver que neste caso as velocidades de grupo e de fase diferem [46]

$$v_b = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi} + \frac{\partial \omega}{\partial n} \frac{\partial \chi}{\partial \omega}}, \quad (3.3)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi}}, \quad (3.4)$$

onde no limite sem dispersão, v_p é constante e $v_g = v_p$. O meio pelo qual a v_g é a mesma para todas as frequências é dito não dispersivo, onde estamos trabalhando no meio não linear [47]. Se formarmos pacotes de ondas em uma faixa de frequência onde a dispersão é pequena, então v_p também será a velocidade de grupo destes pacotes. O tempo de voo de um pulso através de uma amostra de material é dado por uma integral da forma em eq. (2.87).

Fazendo $\epsilon_1 = \gamma_i E_0^j$ onde γ_i é dado por (2.48) e desconsiderando os termos proporcionais do tensores de susceptibilidades elétricas $\chi_{ijk}^{(3)}$ e $[\chi_{ijk}^{(2)}]^2$, para velocidade de fase do campo de prova. Assim, a eq. (2.87) ficará [48]:

$$t_d = n_p \int_0^d (1 + \epsilon_1) dx. \quad (3.5)$$

No entanto, estamos interessados em estudar a variância no tempo de voo que sofre flutuações em torno de um valor médio de $\langle t_d \rangle = \frac{d}{v}$ [49]. Esta variância é definida, como [35]

$$(\delta t)^2 = \langle t_d^2 \rangle - \langle t_d \rangle^2, \quad (3.6)$$

mas,

$$\langle t_d \rangle = \left\langle n_p \int_0^d (1 + \epsilon_1(x, t)) dx \right\rangle. \quad (3.7)$$

Para $\langle \mathbf{E}_0 \rangle = 0$, temos que

$$\langle t_d \rangle = \int_0^d \langle n_p \rangle dx - \int_0^d \langle \epsilon_1(x, t) \rangle dx = n_p \int_0^d dx = n_p d, \quad (3.8)$$

com, o seguinte valor de

$$\langle t_d \rangle^2 = n_p^2 d^2. \quad (3.9)$$

Agora, vamos fazer para $\langle t_d^2 \rangle$:

$$t_d^2 = \left[n_p \int_0^d (1 + \epsilon_1(x, t)) dx \right] \left[n_p \int_0^d (1 + \epsilon_1(x', t)) dx' \right], \quad (3.10)$$

tirando a média

$$\begin{aligned} (\delta t)^2 = \langle t_d^2 \rangle - \langle t_d \rangle^2 = n_p^2 \left[\int_0^d \int_0^d dx dx' \left\langle (1 + \epsilon_1(x, t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon_1(x', t) + \epsilon_1(x, t)\epsilon_1(x', t)) \right\rangle \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

teremos,

$$(\delta t)^2 = \langle t_d^2 \rangle - \langle t_d \rangle^2 = \cancel{n_p^2 d^2} + n_p^2 \int_0^d \int_0^d dx dx' (\langle \epsilon_1(x, t)\epsilon_1(x', t) \rangle) - \cancel{n_p^2 d^2}, \quad (3.12)$$

e, portanto

$$(\delta t^2) = \langle t_d^2 \rangle - \langle t_d \rangle^2 = n_p^2 \int_0^d dx \int_0^d dx' \langle \epsilon_1(x, t) \epsilon_1(x', t') \rangle. \quad (3.13)$$

Usando a definição de $\epsilon_1 = \gamma_i E_0^i$, chegamos a seguinte equação [41]

$$(\delta t^2) = n_p^2 \gamma_i \gamma_j \int_0^d dx \int_0^d dx' \langle E_0^i(x, t) E_0^j(x', t') \rangle. \quad (3.14)$$

3.2 Função Teste

Sendo assim, é sabido que quando utilizamos a expressão de $\langle E_0^i(x, t) E_0^j(x', t') \rangle$ na integral acima (3.14), uma vez que tomamos o limite de coincidência transversal das direções espaciais (y, z) , as funções de correlações do campo elétrico para um material isotrópico não dispersivo tornam-se [50],

$$\langle E_x^0(x, t) E_x^0(x', t') \rangle = \frac{1}{\pi^2 n_b^3 \left[(\Delta x)^2 - \frac{(\Delta t)^2}{n_b^2} \right]^2}, \quad (3.15)$$

$$\langle E_y^0(x, t) E_y^0(x', t') \rangle = \langle E_z^0(x, t) E_z^0(x', t') \rangle = \frac{(\Delta x)^2 + \frac{(\Delta t)^2}{n_b^2}}{\pi^2 n_b^3 \left[\frac{(\Delta t)^2}{n_b^2} - (\Delta x)^2 \right]^3}, \quad (3.16)$$

e

$$\langle E_i^0(x, t) E_j^0(x', t') \rangle = 0, i \neq j, \quad (3.17)$$

onde $\Delta x = x - x'$ e com $\Delta t = t - t' - i\varepsilon$ com $0 < \varepsilon \ll 1$ é real e n_b é o índice de refração medido pelo campo de fundo E_i^0 , o resultado das integrações irá divergir no limite de coincidência de $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ [51].

Em um material não linear, a presença de um campo de fundo, \mathbf{E}_0 , pode alterar o índice de refração efetivo e, portanto, a velocidade de propagação de um pulso de sonda através do material. Portanto, vamos associar o uso da função teste para modelar as flutuações quânticas conforme a geometria do sistema e assim, evitar tais divergências [52]. Considere,

$$f(x) = \Phi(x)\Phi(d-x) = \begin{cases} 0 & \text{se, } x < 0 \\ 1 & \text{se, } 0 < x < d, \\ 0 & \text{se, } x > d \end{cases} \quad (3.18)$$

que representa a função teste original do modelo, e $\Phi(x)$ é uma do tipo função degrau unitário. Desejamos escolher uma função suave adequada que represente as transições que ocorrem quando o pulso entra e sai do meio. Primeiro, note que o tamanho do cristal não pode interferir nos efeitos da borda. Isso sugere que apenas o tamanho do cristal não é um parâmetro bom para descrever a função teste. Na ilustração da Figura 3.1, fixamos um sistema de eixos ortogonais em um cristal não linear, em que x é a direção de propagação do feixe, e $E^1(x, t)$ é o pulso de sonda polarizada ao longo de z ($E^1(x, t)\hat{z}$).

Será útil ter dois parâmetros, um (d) que descreve a largura da amostra e outro ($b \ll d$) que descreve o comprimento efetivo ao longo do qual a não linearidade muda suavemente à medida que o pulso entra e sai. Ou seja, o parâmetro d mede o tamanho do cristal não linear e b é interface que mede o quão rápido o efeito é “ligado e desligado” conforme se observa na Figura 3.1 [53]. Existem várias opções para tal função. Aqui

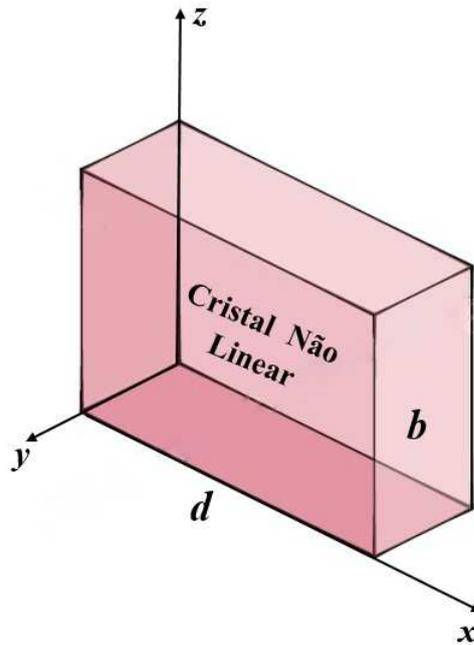


Figura 3.1: Cristal não linear com parâmetro d que mede seu tamanho e b mede o quão rápido o efeito é “ligado e desligado”.

Fonte: Arquivo Pessoal.

usamos uma função $F_{b,d}(x)$ definida por

$$F_{b,d}(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{b}\right) + \arctan\left(\frac{d-x}{b}\right) \right]. \quad (3.19)$$

A derivada desta função em relação a x é a soma de duas funções lorentzianas.

$$\frac{dF_{b,d}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right]. \quad (3.20)$$

Note que $F_{b,d}(x)$ é a integral de menos infinito até x da função definida pela diferença de duas lorentzianas, uma centrada na origem com parâmetro b e a outra deslocada de uma distância d da origem também com parâmetro b . A Figura 3.2 é ilustrada abaixo, ela apresenta alguns gráficos sobrepostos da função $F_{b,d}(x)$ para alguns valores da razão $\frac{b}{d}$. Observe que quando $b \rightarrow 0$ recuperamos uma função degrau, como esperado. Isso

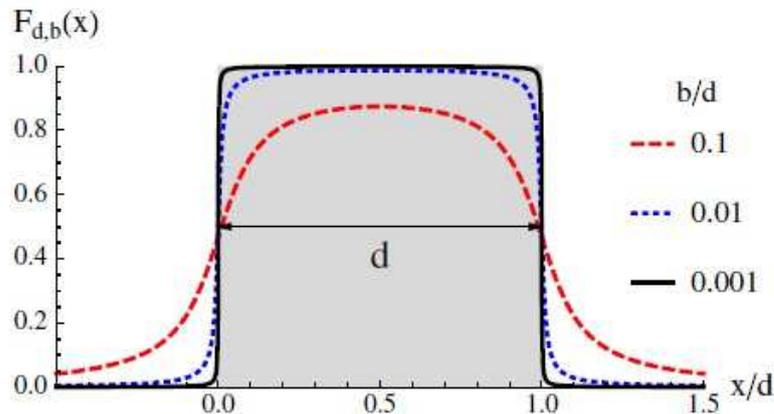


Figura 3.2: Gráficos da função $F_{b,d}(x)$.

Fonte: [54].

sugere que calculemos a distância entre os dois primeiros pontos de máxima curvatura do gráfico. Por esse motivo, se mantemos somente o primeiro \arccot , encontramos que esta distância é dada por um fator de $\frac{2b}{\sqrt{3}}$. A análise do parâmetro b mede o quão rápido a função $F_{b,d}(x)$ liga o efeito sobre o material.

3.3 Flutuações de Vácuo e Função Teste

Como vimos anteriormente, a eq. (2.87) é uma expressão que descreve o tempo de voo e estuda os efeitos das flutuações do campo elétrico do vácuo como um campo de fundo. Neste caso, \mathbf{E}^0 torna o operador campo elétrico quantizado e t_d definido na eq. (2.45) torna-se um operador, onde o termo quadrático em \mathbf{E}^0 é geralmente considerado normal ordenado do tipo: $E_i^0(\mathbf{x}, t) E_j^0(\mathbf{x}, t) \rightarrow E_i^0(\mathbf{x}, t) E_j^0(\mathbf{x}, t)$: [55]. Isso leva a um tempo de voo médio finito que no estado de vácuo é $\langle t_d \rangle = n_p d$ [56], e com variação do tempo de voo, $(\Delta t_d)^2 = \langle t_d^2 \rangle - \langle t_d \rangle^2$. Entretanto, se realizamos uma certa mudança no estado, e adicionar um certo número C , para o operador t_d , de tal modo que $t_d \rightarrow t_d + C$, facilmente verificado que o lado direito de $(\Delta t_d)^2$ não é alterado.

Uma mudança de estado de vácuo pode mudar ligeiramente o tempo de voo médio de atraso, $\langle t_d \rangle$ não alterando a variação do tempo de voo. No entanto, essa quantidade só é finita se a média dos operadores de campo foi calculada com uma função teste.

No presente contexto, o perfil de densidade da amostra de dielétrico define naturalmente uma função adequada. Seja $F(x)$ uma função de perfil que satisfaça a seguinte equação normalizada,

$$\frac{1}{d} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1. \quad (3.21)$$

Agora, o operador do tempo de voo pode ser escrito como

$$t_d = n_p \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \gamma_i E_i^0(x, t) \right] F(x) dx. \quad (3.22)$$

onde desprezamos os termos proporcionais a $\chi_{ijk}^{(3)}$ e $[\chi_{ijk}^{(2)}]^2$. Daí, a variação no tempo de voo se torna

$$\begin{aligned} (\Delta t_d)^2 = n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left[\gamma_i \gamma_j \langle E_i^0(\mathbf{x}, t) E_j^0(\mathbf{x}', t') \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assim, a variância do tempo de voo pode ser expressa como uma integral envolvendo as funções de correlação do campo elétrico. O campo de fundo está preparado em um dado estado quântico, e portanto sofre flutuações. A mudança no índice de refração efetivo pode ser linear no campo de fundo (efeito Pockels), ou quadrática neste campo (efeito Kerr) [57, 53]. Se o campo de fundo flutuar, a velocidade de propagação também estará sujeita a flutuações. Em princípio, as flutuações do tempo de voo são observáveis [58]. No entanto, este efeito é geralmente muito pequeno para ser observado.

Recentemente, Ford *et.al.*, propuseram que um meio não linear com um campo de fundo flutuante pode ser considerado como um sistema análogo para flutuações quânticas do cone de luz a temperatura ambiente [41].

3.4 Variância Fracionária no Tempo de Voo

Usando os resultados acima e lembrando que as integrações na eq. (3.23) são realizados ao longo do caminho do pulso de fundo, dado por $\Delta t = n_p \Delta x$, nós obtemos o seguinte

$$(\Delta t_d)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left[\frac{\alpha_1}{(\Delta x)^4} \right], \quad (3.24)$$

onde Δx é entendido como tendo uma pequena parte imaginária negativa. Aqui, definimos o parâmetro α_1 como

$$\alpha_1 = \frac{n_b n_p^2}{\pi^2 (n_p^2 - n_b^2)^2} \left[\gamma_x^2 + (\gamma_y^2 + \gamma_z^2) \frac{(n_p^2 + n_b^2)}{(n_p^2 - n_b^2)} \right], \quad (3.25)$$

Este resultado generaliza as contribuições da susceptibilidade não linear de segunda e terceira ordem, dando uma expressão geral para o tempo de voo descrito pelo perfil da função $F(x)$ [59]. As integrais que aparecem na eq. (3.25) pode ser avaliada por integração de contorno, com $\Delta x = x - x' - i\varepsilon$, onde ε é real e $0 < \varepsilon \ll 1$. Os resultados, e suas formas assintóticas quando $b \ll d$ pode ser visto no Apêndice (C) em (C.65). Logo temos o seguinte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dx' F_{b,d}(x) F_{b,d}(x') \frac{1}{\Delta x^4} \cong \frac{1}{12b^2} \quad (3.26)$$

se assumirmos que $b \ll d$, e usarmos as formas assintóticas acima, obtemos

$$(\Delta t_d)^2 \approx \frac{\alpha_1}{12b^2}, \quad (3.27)$$

e o desenvolvimento do cálculo desta eq. (3.26) se encontra no Apêndice (C). Definimos a variância fracionária quadrada no tempo de voo do campo de fundo como

$$\delta^2 = \frac{(\Delta t_d)^2}{\langle t_d \rangle^2} \approx \frac{\alpha_1}{12n_p^2 d^2 b^2}. \quad (3.28)$$

onde $\langle t_d \rangle^2 = n_p^2 d^2$. Para tal, considere a função teste $F_{b,d}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{b,d}(x) \hat{E}_i(x) dx. \quad (3.29)$$

Vamos utilizar a identidade de Parseval para transformar a integral do espaço de configuração para o espaço recíproco [60]. Portanto, qualquer função cuja transformada de Fourier supprime exponencialmente os modos de alta energia do campo ficam modulados através da transformada de Fourier de $F_{b,d}(x)$, que é adequada para regularizar as divergências. Dessa maneira, a análise da transformada transporta a informação significativa sobre o regime de validade [61]. Utilizando, o cálculo da transformada temos que [62],

$$\tilde{F}_{b,d}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{b,d}(x) e^{-ikx} dx. \quad (3.30)$$

Usando o fato que

$$f_{b,d}(x) = \frac{dF_{b,d}}{dx} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right], \quad (3.31)$$

vamos utilizar, a integração por partes, e reescrever $\tilde{F}_{b,d}$ como

$$\tilde{F}_{b,d}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{b,d}(x) e^{-ikx} dx \quad (3.32)$$

$$= \frac{iF_{b,d}(x)e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}k} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{b,d}(x) e^{-ikx} dx \quad (3.33)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \frac{b}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{b^2 + (x-d)^2} dx \right] \quad (3.34)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \frac{b}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} dx - e^{-ikd} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{b^2 + x^2} dx \right] \quad (3.35)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \frac{b}{\pi} (1 - e^{-ikd}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} dx, \quad (3.36)$$

para esta finalidade, é necessário considerar alguns casos, em que $k \geq 0$ e $k < 0$ separadamente. Assim, o resultado é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-|k|b}. \quad (3.37)$$

Finalmente,

$$\tilde{F}_{b,d}(k) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{ikd}) e^{-|k|b}, \quad (3.38)$$

e o módulo da transformada de Fourier de $F_{b,d}(x)$ representada pela eq. (3.31) é

$$\left| \tilde{F}_{b,d}(k) \right| = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \text{sen} \left(\frac{kd}{2} \right) \right| e^{-|k|b}. \quad (3.39)$$

A Figura 3.3 mostra um gráfico de $\left| \tilde{F}_{b,d}(k) \right|$ para $b = 0.01d$, conforme parâmetros descritos na Figura 3.1 para um cristal não linear. Observe, que o parâmetro b age como filtro sobre os modos do campo através do decrescimento exponencial. Note que podemos definir a variável adimensional como $z = kd$ e a função,

$$g(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left| \tilde{F}_{b,d}(k) \right|}{d}. \quad (3.40)$$

Observe que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \frac{1}{2}$ e que $g(z)$ cai exponencialmente à medida que z aumenta. Para o valor fixado de $b = 0.01d$, uma análise numérica revela que aproximadamente 90% da área total do gráfico ocorre para $0 \leq z \leq 18\pi$. As aproximações feitas, requer em (i) $|E^1| \ll |E^0|$, a dominância do campo de vácuo sobre o campo de fundo, (ii) $|\nabla E^0/E^0| \ll |\nabla E^1/E^1|$, que é equivalente a $\lambda_d < \lambda_b$, (iii) um intervalo de frequências nas quais o material pode ser considerado livre de dispersão, e (iv) um material que é aproximadamente isotrópico, pelo menos para as frequências que dão a contribuição primária para o campo de fundo [63].

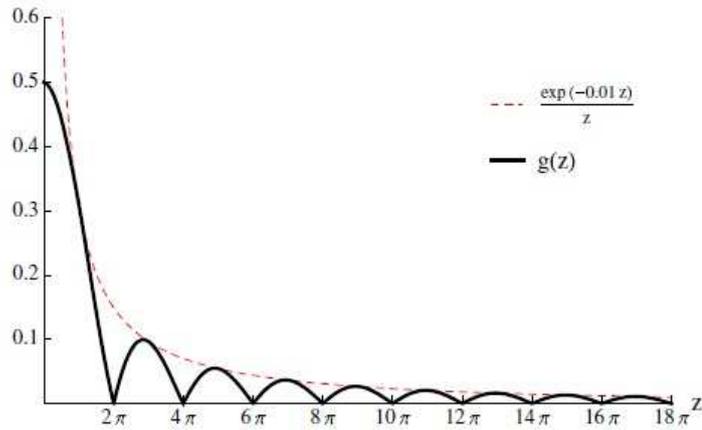


Figura 3.3: Módulo da transformada de Fourier de $\tilde{F}_{b,d}(x)$. Especificamente, a função $g(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|\tilde{F}_{b,d}(k)|}{d}$ é plotado como uma função de $z = kd$ para o caso $b = 0.01$.

Fonte: [54].

A taxa de decaimento da transformada de Fourier $\tilde{F}_{b,d}(k)$ nos permite testar as aproximações (ii) e (iii) [49]. O comportamento exponencialmente decrescente da transformada de Fourier desta função, representado na Figura 3.3, suprime os modos de alta energia do campo de fundo no meio material. Sendo assim, no capítulo (5) utilizaremos $b = 0.01d$ e faremos uma estimativa numérica para a eq. (4.12).

Capítulo 4

Flutuações do Vácuo Quântico a Temperatura Finita

Neste capítulo será apresentado o campo de fundo \mathbf{E}_0 , que quando quantizado sofrerá efeitos de flutuações quânticas no vácuo a temperatura finita. Mostraremos que tais flutuações irão afetar o tempo de voo do pulso sonda em \mathbf{E}_0 que atravessa a amostra de CdSe. Em particular, encontramos que para uma temperatura $T < 46K$, as flutuações do vácuo quântico são dominantes com relação às flutuações de origem térmicas. Com base nos cálculos feitos, será possível determinar as contribuições térmicas e mixtas para os termos de segunda ordem.

4.1 Flutuações Térmicas

No experimento realístico as flutuações de temperatura desempenha um papel crucial. Sendo assim, vamos acrescentar as flutuações térmicas, então ficamos com

$$(\Delta t_d)^2 = n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left[\gamma_i \gamma_k \langle E_i(x) E_k(x') \rangle_\beta \right]. \quad (4.1)$$

As funções de correlação do campo elétrico são obtidas agora levando em consideração flutuações térmicas

$$\begin{aligned} \langle E_i(x) E_k(x') \rangle_\beta &= \langle E_i(x) E_k(x') \rangle_0 + \\ &+ \langle E_i(x) E_k(x') \rangle_T + \\ &+ \langle E_i(x) E_k(x') \rangle_M. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Daqui em diante, as flutuações do tempo de voo são uma integração das funções de correlação do campo elétrico em termo da temperatura finita, onde $\langle E_j(x)E_k(x') \rangle_0$ é a contribuição do vácuo, $\langle E_j(x)E_k(x') \rangle_T$ é uma contribuição puramente térmica e por fim $\langle E_j(x)E_k(x') \rangle_M$ é uma contribuição mixta que surge devido as contribuições do vácuo e térmicas. Agora, substituindo a eq. (4.2) em eq. (4.1), obtemos o tempo de voo da seguinte forma:

$$(\Delta t_d)^2 = n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \gamma_i \gamma_k \left[\langle E_i(x)E_k(x') \rangle_0 + \langle E_i(x)E_k(x') \rangle_T + \langle E_i(x)E_j(x') \rangle_M \right] \right\}. \quad (4.3)$$

As funções de correlações do campo elétrico de um meio não dispersivo relevante para nossos propósitos são [64]:

$$\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_T = \langle E_y(x)E_y(x') \rangle_T = \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_T = \frac{2}{\pi^2 n_b^3} Re \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{(\Delta t + ip\beta)^4}{n_b^4}}, \quad (4.4)$$

e $\beta = \frac{1}{T}$ ¹ e T é a temperatura e a contribuição mixta

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M = -\frac{2n_b}{\pi^2} Re \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta t + ip\beta)^2 - n_b^2 \Delta x^2]^2} \\ \langle E_y(x)E_y(x') \rangle_M = \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M = -\frac{2n_b^3}{\pi^2} Re \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[(\Delta t + ip\beta)^2 + n_b^2 \Delta x^2]}{[(\Delta t + ip\beta)^2 - n_b^2 \Delta x^2]^3} \end{array} \right., \quad (4.5)$$

e as funções de correlações do campo elétrico para a contribuição do vácuo foi calculada no capítulo (3).

O movimento uniforme (MU) é o deslocamento determinado pela partícula $\Delta x = v\Delta t$, a partir de um referencial com velocidade constante, assim temos:

$$v_p = \frac{1}{n_p} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} = n_p, \quad (4.6)$$

onde $\Delta t = n_p \Delta x$ é definido como sendo o tempo de voo que mede as flutuações no cone de luz efetivo.

Assim, a eq. (4.4) fica:

$$\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_T = \frac{2n_b}{\pi^2} Re \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n_p \Delta x + ip\beta)^4} \right]. \quad (4.7)$$

¹ $\beta = \frac{1}{T}$ é uma grandeza numérica relacionada à temperatura termodinâmica, visto como uma conexão entre a interpretação estatística de um sistema físico e a termodinâmica.

Enquanto isso, as funções de correlações do campo elétrico para o caso mixto são

$$\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M = -\frac{2n_b}{\pi^2} Re \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{[(n_p \Delta x + ip\beta)^2 - n_b^2 \Delta x^2]^2}, \quad (4.8)$$

como o campo se propaga na direção x , e nas outras direções y e z temos

$$\langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M = \langle E_y(x)E_y(x') \rangle_M = -\frac{2}{\pi^2 n_b^3} Re \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[(n_p \Delta x + ip\beta)^2 + n_b^2 \Delta x^2] n_b^6}{[(n_p \Delta x + ip\beta)^2 - n_b^2 \Delta x^2]^3}. \quad (4.9)$$

Assim, os termos de segunda ordem térmicos para o tempo de voo, pode ser escritos como:

$$(\Delta t_d)_R^2 = (\Delta t_d)_M^2 + (\Delta t_d)_T^2, \quad (4.10)$$

onde o subíndice R vem do resto. Retornando a eq. (4.3), podemos escrever o termo de segunda ordem para o tempo de voo:

$$\begin{aligned} (\Delta t_d)_{seg.}^2 &= n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ (\gamma_x)^2 \left[\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_0 + \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_T + \right. \right. \\ &+ \left. \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M \right] + \\ &+ 2 \left[(\gamma_y)^2 + (\gamma_z)^2 \right] \times \\ &\times \left. \left[\langle E_z(x)E_z(x') \rangle_0 + \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_T + \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M \right] \right\}, \quad (4.11) \end{aligned}$$

aqui os γ_i são coeficientes nas direções x , y e z atrelados ao índice de refração do meio medido pelo pulso da sonda e dos tensores de susceptibilidades elétricas. Voltando para a eq. (4.11), os termos de segunda ordem relativo ao tempo de voo são:

$$(\Delta t_d)_{seg.}^2 = (\Delta t_d)_{(0)}^2 + (\Delta t_d)_{(R)}^2, \quad (4.12)$$

onde $(\Delta t_d)_{(0)}^2$ é o tempo de voo para o vácuo, que já foi calculado no capítulo (3)

$$\begin{aligned} (\Delta t_d)_{seg.(0)}^2 &= n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ (\gamma_x^2) \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_0 + \right. \\ &+ \left. 2 \left[(\gamma_y^2) + (\gamma_z^2) \right] \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_0 \right\}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\Delta t_d)_{seg.(R)}^2 &= n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ (\gamma_x^2) \left[\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_T + \right. \right. \\ &+ \left. \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M \right] + 2 \left(\gamma_y^2 + \gamma_z^2 \right) \left[\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_T + \right. \\ &+ \left. \left. \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M \right] \right\}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

O termo de segunda ordem para o tempo de voo no vácuo já foi calculado no capítulo (3), e pode ser escrito da seguinte forma

$$(\Delta t_d)_{seg.(0)}^2 = \frac{n_p^2 n_b}{\pi^2 (n_p^2 - n_b^2)^2} \left\{ (\gamma_x)^2 + 2 \left[(\gamma_y)^2 + (\gamma_z)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(n_b^2 + n_p^2)}{(n_p^2 - n_b^2)} \times \frac{12b^2 d^2 + d^4}{12b^2(4b^2 + d^2)^2} \right\}. \quad (4.15)$$

4.1.1 Integrais para Contribuição Térmica

Lembrando que na equação (3.19), a função $F_{d,b}(x)$ é descrita como uma função do tipo:

$$F_{d,b}(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{b}\right) + \arctan\left(\frac{d-x}{b}\right) \right], \quad (4.16)$$

e podemos escrever a derivada da função $F_{d,b}(x)$ como

$$\frac{dF_{d,b}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right]. \quad (4.17)$$

A seguir, iremos calcular as contribuições térmicas

$$(\Delta t_d)_{seg.(T)}^2 = n_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ (\gamma_x)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left[(\gamma_y)^2 + (\gamma_z)^2 \right] \right\} \langle E_x(x) E_x(x') \rangle_T. \quad (4.18)$$

As integrais para a contribuição térmica ficarão:

$$I_x^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \langle E_x(x) E_x(x') \rangle_T. \quad (4.19)$$

Vamos utilizar, a seguinte equação

$$\langle E_x(x) E_x(x') \rangle_T = \frac{2n_b}{\pi^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(n_p \Delta x + ip\beta)^4}, \quad (4.20)$$

e substituindo a eq. (4.20) na eq. (4.19), obtemos:

$$I_x^T = \frac{2n_b}{\pi^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{1}{[n_p(x-x') + ip\beta]^4}. \quad (4.21)$$

Após algumas manipulações algébricas, realizados no Apêndice (D) em (D.7) a (D.9) temos o seguinte:

$$I_x^T = -\frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{dF(x')}{dx'} \frac{1}{[n_p(x-x') + ip\beta]^2}, \quad (4.22)$$

e

$$I_x^T = -\frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{dF(x')}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{[n_p(x-x') + ip\beta]^2} \right\}, \quad (4.23)$$

onde podemos chamar, o termo de I_{1x}^T

$$I_{1x}^T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right] \right\} \frac{1}{[n_p(x-x') + ip\beta]^2}, \quad (4.24)$$

Assim, a nossa integral para contribuição térmica ficará

$$I_x^T = -\frac{n_b}{3\pi^2 n_b^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{dF(x')}{dx} I_{1x}^T. \quad (4.25)$$

Os procedimentos de cálculos para I_{1x}^T estão feitos no Apêndice (D). Agora, inserindo a eq. (4.17) na eq. (D.9) obtemos o seguinte

$$I_x^T = -\frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \times \\ \times \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x'^2} - \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{[n_p(ib-x') + ip\beta]^2} - \frac{1}{[n_p(d+ib-x') + ip\beta]^2} \right\}. \quad (4.26)$$

Observe que na eq. (4.26), os termos das quatro integrais que iremos resolvê-las posteriormente, estão no apêndice (D).

Dessa forma, devemos realizar a integração em x' , assim temos:

$$I_{2x}^T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[\frac{b}{b^2 + x'^2} - \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{[n_p(ib-x') + ip\beta]^2} - \frac{1}{[n_p(d+ib-x') + ip\beta]^2} \right\}. \quad (4.27)$$

O resultado da integração da contribuição térmica será:

$$I_x^T = \frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{[2n_p b + p\beta]^2} + \frac{1}{[n_p(d + 2ib) + ip\beta]^2} + \frac{1}{[n_p(-d + 2ib) + ip\beta]^2} \right\}. \quad (4.28)$$

Além do mais, usando os somatórios para a função digama, conforme no Apêndice

(B)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(a + bip)^2} = -\frac{\psi^{(1)}\left(\frac{b - ai}{b}\right)}{b^2}, \quad (4.29)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(a + bp)^2} = +\frac{\psi^{(1)}\left(\frac{b + a}{b}\right)}{b^2}, \quad (4.30)$$

finalmente, temos o resultado

$$I_x^T = \frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \text{Re} \left[2 \frac{\Psi^{(1)}\left(\frac{\beta + 2n_p b}{\beta}\right)}{\beta^2} - \frac{\Psi^{(1)}\left(\frac{\beta - n_p(d + 2ib)i}{\beta}\right)}{\beta^2} + \frac{\Psi^{(1)}\left(\frac{\beta + n_p(d - 2ib)i}{\beta}\right)}{\beta^2} \right], \quad (4.31)$$

onde $\Psi^{(1)}$ é a função digama (ver o apêndice (B)). O sistema, à temperatura $T = \beta^{-1}$, será agora descrito por um ensemble estatístico no regime termodinâmico de um sistema. Essa é a contribuição puramente térmica que afeta o tempo de voo do pulso que atravessa o dielétrico. As resoluções destas integrais encontram-se no apêndice (D).

4.2 Flutuações Mixtas

4.2.1 Integrais para Contribuição Mixta

A integral para a contribuição mixta, ficará:

$$I_x^M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \langle E_x(x) E_x(x') \rangle_M. \quad (4.32)$$

Porém quando introduzirmos a eq. (4.9) em (4.32) a integração por resíduos será mais complicada do que aquelas que foram feitas para os casos do vácuo e térmico. Nessa forma, vamos escrever a eq. (4.5) na sua forma integral :

$$\langle E_x(x) E_x(x') \rangle_M = \frac{2n_b}{\pi^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \times \frac{3}{4\pi^2} \int_1^{+\infty} (u^2 - 1) \left\{ \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) + n_b \Delta x]^4} + \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) - n_b \Delta x]^4} \right\} du. \quad (4.33)$$

Agora, resolvendo esta integração, fica mais simples realizar os cálculos utilizando o teorema dos resíduos,

$$\begin{aligned} \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M &= \frac{3n_b}{2\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du(u^2 - 1) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) + n_b\Delta x]^4} + \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) - n_b\Delta x]^4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Lembrando que $\Delta t = \Delta x n_p$ e substituindo na eq. (4.34), obtemos

$$\begin{aligned} \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M &= \frac{3n_b}{2\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du(u^2 - 1) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{[u(n_p\Delta x + ip\beta) + n_b\Delta x]^4} + \frac{1}{[u(n_p\Delta x + ip\beta) - n_b\Delta x]^4} \right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \langle E_x(x)E_x(x') \rangle_M &= \frac{3n_b}{2\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du(u^2 - 1) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{[(un_p + n_b)\Delta x + iup\beta]^4} + \frac{1}{[(un_p - n_b)\Delta x + iup\beta]^4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Vamos, substituir a eq. (4.36) na eq. (4.32), para obtermos:

$$\begin{aligned} I_x^M &= \frac{3n_b}{2\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du(u^2 - 1) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \left\{ \frac{1}{[(un_p + n_b)\Delta x + iup\beta]^4} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{[(un_p - n_b)\Delta x + iup\beta]^4} \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

definindo,

$$\begin{aligned} I_{1x}^M &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{[(un_p + n_b)\Delta x + iup\beta]^4} + \frac{1}{[(un_p - n_b)\Delta x + iup\beta]^4} \right\}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

como $\Delta x = x - x'$, temos

$$\begin{aligned} I_{1x}^M &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{[(un_p + n_b)(x - x') + iup\beta]^4} + \frac{1}{[(un_p - n_b)(x - x') + iup\beta]^4} \right\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde podemos notar que o termo entre chaves é do tipo $\frac{1}{[A(x-x')+iB]^4}$.

Portanto, teremos o seguinte

$$I_{1x}^M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \left\{ \frac{1}{[A(x-x') + iB]^4} + \frac{1}{[\tilde{A}(x-x) + iB]^4} \right\}, \quad (4.40)$$

com,

$$\begin{cases} A = un_p + n_b, n_p > n_b, A > 0 \\ \tilde{A} = un_p - n_b, n_p > n_b, \tilde{A} > 0 \end{cases}, \quad (4.41)$$

note que

$$\frac{1}{[A(x-x') + iB]^4} = -\frac{1}{3A} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \right). \quad (4.42)$$

Assim, podemos escrever

$$I_{1x}^M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \left\{ -\frac{1}{3A} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \right) - \frac{1}{3\tilde{A}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{[\tilde{A}(x-x') + iB]^3} \right) \right\}, \quad (4.43)$$

porém,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} F(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \right) &= \frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \right) + \\ &- \left(\frac{1}{A} \frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \right) \frac{dF(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dessa forma, a integral para a contribuição mixta é

$$\begin{aligned} I_{1x}^M &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx \times \\ &\times \left[\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \right) \right] + \\ &- \frac{1}{A[A(x-x') + iB]^3} \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{\tilde{A}} \frac{d}{dx} \left(F(x) \frac{1}{[\tilde{A}(x-x') + iB]^3} \right) + \\ &- \frac{1}{A[A(x-x') + iB]^3} \frac{dF(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Os termos de superfície não contribuem diretamente e, portanto

$$\begin{aligned} I_{1x}^M &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} \frac{dF(x)}{dx} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\tilde{A}[\tilde{A}(x-x') + iB]^3} \frac{dF(x)}{dx} \right\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Reagrupando os termos, temos que

$$I_{1x}^M = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \frac{1}{[A(x-x') + iB]^3} + \frac{1}{\tilde{A}[\tilde{A}(x-x') + iB]^3} \right\}. \quad (4.47)$$

Note que também,

$$\frac{1}{A[A(x-x') + iB]^3} = \frac{1}{2A^2} \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{[A(x-x') + iB]^2} \right). \quad (4.48)$$

Então, substituindo a eq. (4.48) na eq. (4.47) obteremos:

$$I_{1x}^M = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \frac{1}{2A^2} \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{[A(x-x') + iB]^2} \right) + \frac{1}{2\tilde{A}^2} \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{[\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \right) \right\}, \quad (4.49)$$

por sua vez,

$$F(x') \frac{d}{dx'} \left[\frac{1}{A^2[A(x-x') + iB]^2} \right] = \frac{d}{dx} \left[F(x') \frac{1}{A^2[A(x-x') + iB]^2} \right] + \frac{dF(x')}{dx'} \frac{1}{A^2[A(x-x') + iB]^2}. \quad (4.50)$$

Assim, integral para a contribuição mixta do termo I_{1x}^M será:

$$I_{1x}^M = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \times \left\{ \frac{d}{dx} \left(F(x') \frac{1}{A^2[A(x-x') + iB]^2} \right) + \frac{dF(x')}{dx'} \frac{1}{A^2[A(x-x') + iB]^2} + \frac{d}{dx'} \left[F(x') \frac{1}{\tilde{A}^2[\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \right] - \left(\frac{dF(x')}{dx'} \right) \frac{1}{\tilde{A}^2[\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \right\}, \quad (4.51)$$

Novamente, desprezando os termos de superfície teremos que integral para a contribuição mixta do termo I_{1x}^M

$$I_{1x}^M = -\frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{A^2[A(x-x') + iB]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2[\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \right\}. \quad (4.52)$$

A derivada da $F_{d,b}(x)$ da eq. (4.17) é da seguinte forma

$$\frac{dF_{d,b}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right]. \quad (4.53)$$

Substituindo a eq. (4.53) na eq. (4.52), obtemos a integral para a contribuição mixta do termo I_{1x}^M

$$\begin{aligned} I_{1x}^M = & -\frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x'^2} - \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right] \times \right. \\ & \times \frac{1}{A^2 [A(x-x') + iB]^2} + \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x'^2} - \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right] \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

que pode ser simplificada para a seguinte notação na integral para a contribuição mixta do termo I_{1x}^M

$$I_{1x}^M = -\frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} I_{2x}^M, \quad (4.55)$$

onde,

$$\begin{aligned} I_{2x}^M = & \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{A^2 [A(x-x') + iB]^2} \left[\frac{b}{b^2 + x'^2} - \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \left[\frac{b}{b^2 + x'^2} - \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

de tal forma que integral para a contribuição mixta do termo I_{2x}^M é

$$\begin{aligned} I_{2x}^M = & \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{A^2 [A(x-x') + iB]^2} \times \frac{b}{b^2 + x'^2} + \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{A^2 [A(x-x') + iB]^2} \times \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \times \frac{b}{b^2 + x'^2} + \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \times \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde podemos chamar cada integral de:

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{A^2 [A(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + x'^2} = I_{21x}^M, \quad (4.58)$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{A^2 [A(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} = I_{22x}^M, \quad (4.59)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + x'^2} = I_{23x}^M, \quad (4.60)$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} = I_{24x}^M, \quad (4.61)$$

de tal forma que integral para a contribuição mixta do termo I_{2x}^M

$$I_{2x}^M = I_{21x}^M + I_{22x}^M + I_{23x}^M + I_{24x}^M, \quad (4.62)$$

as integrais tabeladas são as integrais em u , onde foram resolvidas utilizando o teorema do resíduo e os cálculos podem ser verificados no Apêndice (E). Voltando para a eq. (4.57), temos

$$I_{2x}^M = \frac{\pi}{A^2 [A(x-ib) + iB]^2} - \frac{\pi}{A^2 [A(x-d+ib) + iB]^2} + \frac{\pi}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-ib) + iB]^2} - \frac{\pi}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-d+ib) + iB]^2}, \quad (4.63)$$

Substituído a eq. (4.63) em (4.55), obtemos o seguinte

$$I_{1x}^M = -\frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \left\{ \frac{\pi}{A^2 [A(x+ib) + iB]^2} - \frac{\pi}{A^2 [A(x-d+ib) + iB]^2} + \frac{\pi}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x+ib) + iB]^2} - \frac{\pi}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-d+ib) + iB]^2} \right\}. \quad (4.64)$$

Novamente substituindo a derivada de $F_{d,b}(x)$ da eq. (4.53), na eq. (4.64) teremos que

$$I_{2x}^M = -\frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right] \left\{ \frac{1}{A^2 [A(x+ib) + iB]^2} + \frac{1}{A^2 [A(x-d+ib) + iB]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x+ib) + iB]^2} - \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(x-d+ib) + iB]^2} \right\}, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}
I_{2x}^M = & \frac{1}{6\pi} \left[\frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2} + \right. \\
& - \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x - d + ib) + iB]^2} + \\
& + \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x + ib) + iB]^2} + \\
& - \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2} + \\
& - \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2} + \\
& + \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[A(x - d + ib) + iB]^2} + \\
& - \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x + ib) + iB]^2} + \\
& \left. + \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2} \right], \tag{4.66}
\end{aligned}$$

usando uma notação própria, teremos:

$$I_{1x}^M = -\frac{1}{6\pi} [(I_{11x}^M - I_{12x}^M + I_{13x}^M - I_{14x}^M - I_{15x}^M + I_{16x}^M - I_{17x}^M + I_{18x}^M)], \tag{4.67}$$

onde,

$$I_{11x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2}, \tag{4.68}$$

$$I_{12x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x - d - ib) + iB]^2}, \tag{4.69}$$

$$I_{13x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x + ib) + iB]^2}, \tag{4.70}$$

$$I_{14x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2}, \tag{4.71}$$

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2}, \tag{4.72}$$

$$I_{16x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2}, \tag{4.73}$$

$$I_{17x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x + ib) + iB]^2}, \tag{4.74}$$

$$I_{18x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x-d+ib) + iB]^2}. \quad (4.75)$$

O resultado de mais integrais estão no Apêndice (E). Portanto, substituindo as eqs. (E.45), (E.46), (E.48), (E.49), (E.51), (E.52), (E.54) e (E.55) na eq. (4.67) obtemos o seguinte resultado final:

$$I_{1x}^M = \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{A^2 [2ab + B]^2} + \frac{1}{A^2 [A(2ib - d) + iB]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [2\tilde{A}b + B]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(2ib - d) + iB]^2} + \frac{1}{A^2 [A(2ib + d) + iB]^2} + \frac{1}{A^2 [A(2ib + d) + iB]^2} \right\}, \quad (4.76)$$

onde,

$$A = un_p + n_b, \quad (4.77)$$

$$\tilde{A} = un_p - n_b, \quad (4.78)$$

$$B = up\beta. \quad (4.79)$$

Agora, voltando para a eq. (4.37) temos

$$I_x^M = \frac{3n_b}{2\pi^4} Re \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du (u^2 - 1) I_{1x}^M, \quad (4.80)$$

o resultado da integral I_x^M na eq. (4.37) de tal forma que, o desenvolvimento da integral está no Apêndice (E) na eq. (E.65) conforme estamos citando aqui em (4.81):

$$\int_1^{\infty} \frac{u^2 - 1}{(u+a)^2(u+c)^2} du = -\frac{1}{a^3 + 3c^2a - c^3 - 3a^2c} \left\{ -a^2 + 2\ln(a+1)ca + 2a - 2\ln(1-c)ca + c^2 - 2\ln(1+c) \right\} \quad (4.81)$$

$$= -\frac{1}{(a-c)^3} \left\{ 2[ca-1] \ln\left(\frac{a+1}{c+1}\right) + a(2-a) - c(2-c) \right\}, \quad (4.82)$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
I_{1x}^M = & \frac{n_b}{4\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du (u^2 - 1) \left\{ \frac{2}{A^2 [2Ab + B]^2} + \right. \\
& + \frac{1}{A^2 [A(2ib - d) + iB]^2} + \\
& + \frac{2}{\tilde{A}^2 [2\tilde{A}b + B]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(2ib - d) + iB]^2} + \\
& \left. + \frac{1}{A^2 [A(2ib + d) + iB]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(2ib + d) + iB]^2} \right\}, \quad (4.83)
\end{aligned}$$

utilizando a integral tabelada através do maplesoft, conforme o Apêndice (E) em

$$I_x^M = \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{I}_x^M, \quad (4.84)$$

onde, \tilde{I}_x^M é dado nas eqs. (E.121), (E.123), (E.125) e (E.127) conforme pode ser visto no Apêndice (E):

$$\begin{aligned}
I_x^M = & \frac{n_b}{2\pi^4 n_p^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2bn_p + p\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u + a_1)^2 (u + b_1)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{2(-n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u + a_2)^2 (u + b_2)^2} + \\
& + \frac{1}{(2n_p b + p\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - a_3)^2 (u - b_3)^2} + \\
& + \frac{1}{2(-n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - a_4)^2 (u - b_4)^2} + \\
& + \frac{1}{2(n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - a_5)^2 (u - b_5)^2} + \\
& \left. + \frac{1}{2(n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - a_6)^2 (u - b_6)^2} \right\}, \quad (4.85)
\end{aligned}$$

observe que em (4.85) utilizamos o $u^2 - 1$, com o resultado tabelado de acordo com (4.81), onde podemos chamar os valores, $a_1 = \frac{n_b}{n_p}, b_1 = \frac{2n_b b}{2bn_p + p\beta}, a_2 = a_1, b_2 = \frac{(2ibn_b - d)n_b}{(2ibn_p - dn_p + ip\beta)}, a_3 = a_1, b_3 = b_1, a_4 = a_1, b_4 = b_2, a_5 = a_1, b_5 = \frac{2ibn_b}{(2ibn_p + dn_p + ip\beta)}$ e $b_6 = \frac{2ibn_b + n_b d}{(2ibn_p + dn_p + ip\beta)}$, o resultado de cada integral da eq. (4.85) está resolvida no Apêndice (E).

Para a direção z as contribuições mixtas são:

$$\langle E_z(x) E_z(x') \rangle_M = -\frac{2n_b}{\pi^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[(\Delta t + ip\beta)^2 + n_b^2 + \Delta x^2]}{[(\Delta t + ip\beta)^2 - n_b^2 + \Delta x^2]^3}. \quad (4.86)$$

A qual também, pode ser reescrita na forma integral:

$$\begin{aligned} \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M &= -\frac{2n_b}{\pi^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ -\frac{3}{8\pi^2} \int_1^{+\infty} du(u^2 + 1) \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) + n_b\Delta x]^4} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) - n_b\Delta x]^4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M &= \frac{3n_b}{4\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du(u^2 + 1) \times \left\{ \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) + n_b\Delta x]^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[u(\Delta t + ip\beta) - n_b\Delta x]^4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Lembrando anteriormente tínhamos que $n_p = \frac{\Delta t}{\Delta x} \Rightarrow \Delta t = n_p\Delta x$,

$$\begin{aligned} \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M &= \frac{3n_b}{4\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \int_1^{+\infty} du(u^2 + 1) \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{[(un_p + n_b)\Delta x + ip\beta]^4} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{[(un_p - n_b)\Delta x + ip\beta]^4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

sendo equivalente a eq. (4.36). Utilizando a eq. (4.89) para a direção z

$$I_z^M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \langle E_z(x)E_z(x') \rangle_M, \quad (4.90)$$

ou de forma explícita

$$\begin{aligned} I_z^M &= \frac{3n_b}{4\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \times \\ &\quad \times \int_1^{+\infty} du(u^2 + 1) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \left\{ \frac{1}{[(un_p + n_b)\Delta x + iup\beta]^4} + \frac{1}{[(un_p - n_b)\Delta x + iup\beta]^4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

As integrais da eq. (4.91) em x e x' são idênticas as integrais da eq. (4.37) em x e x' . Portanto, podemos utilizar o resultado de eq. (4.37) e obtemos uma expressão similar

a eq. (4.72),

$$\begin{aligned}
I_z^M = & \frac{3n_b}{8\pi^4} Re \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du (u^2 + 1) \left\{ \frac{2}{A^2 [2Ab + B]^2} + \frac{1}{A^2 [A(2ib - d) + iB]^2} \right. \\
& + \frac{2}{\tilde{A}^2 [2\tilde{A}b + B]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(2ib - d) + iB]^2} \\
& \left. + \frac{1}{A^2 [A(2ib + d) + iB]^2} + \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(2ib + d) + iB]^2} \right\}, \tag{4.92}
\end{aligned}$$

onde A , \tilde{A} e B podem ser definidos nos Apêndices (D) e (E). Vamos apenas sinalizar que os apêndices que estamos tratando nesta dissertação são : Apêndice (C) : Vácuo, Apêndice (D) : Térmico e o Apêndice (E) : Mixto. Portanto, I_z^M será da seguinte forma,

$$I_z^M = Re \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{I}_z^M, \tag{4.93}$$

onde, \tilde{I}_z^M são equivalentes as eqs. (E.76) e (E.116). Comparando I_z^M com I_x^M em eq. (4.93) teremos

$$I_z^M = \frac{1}{2} I_x^M, \tag{4.94}$$

note que a diferença está apenas na troca do integrando em u por $u^2 - 1$ para $u^2 + 1$.

Assim, iremos ter integrais deste tipo:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{u^2 + 1}{(u + a)^2 (u + c)^2} du = & -\frac{1}{(1 + c)(1 + a)(a - c)^3} \left[- (a - c) \left[(1 + a)c^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + (a^2 + 1)c + 2(1 + c)(1 + a)(1 + ac) \ln \left\{ \frac{(1 + a)}{(1 + a)} \right\} \right] \right]. \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Pois,

$$\begin{aligned}
I_z^M = & \left(\frac{n_b^2}{2} \right) \frac{n_b}{2\pi^4 n_p^2} Re \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2bn_p + p\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 + 1)}{(u + a_1)(u + b_1)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{2(-n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 + 1)}{(u + a_1)^2 (u + b_2)^2} + \\
& + \frac{1}{(2n_p b + p\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 + 1)}{(u - a_1)^2 (u - b_1)^2} + \\
& + \frac{1}{2(-n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 + 1)}{(u - a_1)^2 (u - b_2)^2} + \\
& + \frac{1}{2(n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 + 1)}{(u + a_1)^2 (u + b_5)^2} + \\
& \left. + \frac{1}{2(n_p d + 2ibn_p + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 + 1)}{(u - a_1)^2 (u - b_6)^2} \right\}. \tag{4.96}
\end{aligned}$$

No capítulo (5), vamos encontrar algumas estimativas numéricas para o Seleneto de Cádmio (CdSe). Sendo assim, os somatórios que aparecem em (4.85) e (4.96) serão resolvidas numericamente. Como $\langle \Delta t_d \rangle = \langle \Delta t_d \rangle_0 + \langle \Delta t_d \rangle_T + \langle \Delta t_d \rangle_M$ nosso objetivo será encontrar valores de $\frac{1}{\beta}$, onde a contribuição do vácuo $\langle \Delta t_d \rangle_0$ seja maior que as térmicas.

A parte térmica dada na eq. (4.31), o termo de vácuo indica a contribuição devido ao vácuo causado pela presença de flutuações na fronteira, e a parte mixta é a contribuição da fronteira com a temperatura. Além disso, demonstramos que, na contribuição térmica, os efeitos do vácuo são apresentados em temperaturas finitas, como valores negativos, devido à dominância do vácuo para as flutuações quânticas no vácuo.

Capítulo 5

Estimativa Numérica

Nesta capítulo, vamos fazer uma estimativa numérica para determinar a magnitude da variação fracionária do tempo de voo para o Seleneto de Cádmio (CdSe).

5.1 Seleneto de Cádmio (CdSe)

Seleneto de cádmio (Grupo Espacial: $P63mc$ (186), $a = 4.30\text{Å}$, $c = 7.01\text{Å}$) e uma estrutura hexagonal é empregado principalmente para detectores de radiação nuclear operando em temperatura ambiente, dispositivos ópticos não lineares e como substrato para crescimento epitaxial [65]. Além disso, possui um índice de refração de $n_b = 2.43$ e um comprimento de onda $\lambda_b = 10,6\mu m$ [66], susceptibilidade de segunda ordem $\chi_{zzz}^{(2)} = \chi^{(2)} = 1.1 \times 10^{-10} mV^{-1}$ para um índice de refração do pulso dado por $n_p = 2.54$ e o comprimento de onda do campo da sonda é $\lambda_p = 1,06\mu m$ [67].

O Seleneto de Cádmio (CdSe), um tipo de nanocristal semiconductor II-VI; Isso consiste de um elemento da coluna II da tabela periódica e um elemento da coluna VI. O átomo de cádmio é do tipo II, e tem dois elétrons de valência em um orbital s : [Cd] $4d^{10}5s^2$ [68].

O átomo de selênio é do tipo VI, e tem seis valências elétrons nos orbitais s e p : [Se] $3d^{10}4s^24p^6$ e o banda de valência do cristal de CdSe é composta essencialmente dos orbitais p do selênio e do orbital da banda de condução dos orbitais s do cádmio [69]. O material sólido CdSe existe em duas formas cristalinas. O material sólido do CdSe existe em duas formas cristalinas. Estruturas de wurtzita (cadmoselita (CdSe), greenockita (CdS) e rambergita (MnS)) e a blenda de zinco (ZnS) em que as duas submatrizes de

Cd e Se que formam um cristal com estrutura hexagonal compacta [70]. A outra forma é a estrutura da esfalerita (tipo blenda de zinco), em que as duas submatrizes são cúbicas de face centrada, deslocadas com um quarto em relação à outra [71]. O CdSe é um dos materiais importantes no semicondutor II-VI, e mais significativamente, que apresenta propriedades físicas consideráveis com um potencial de aplicação em várias tecnologias modernas de dispositivos de estado sólido, como células solares, transistores de filme fino de alta eficiência, diodos emissores de luz e na e biologia [72].

A Figura 5.1 mostra a estrutura da rede cristalina do cristal CdSe. A espessura

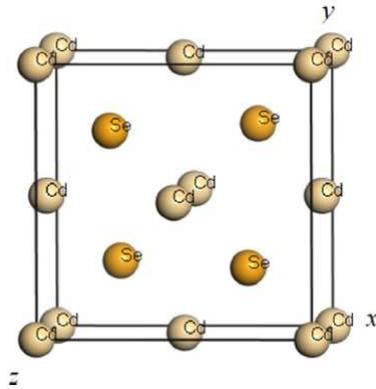


Figura 5.1: Estrutura da rede cristalina do cristal CdSe.

Fonte: [73].

do filme de CdSe para análise experimental em óptica não linear, tem uma variação de $d = 0.10 - 1.80 \mu m$, sendo medido usando um método interferométrico (métodos de franjas de Fizeau para franjas de igual espessura) [74]. Agora, definindo o comprimento de onda do campo de fundo como $\lambda_p = 1.06 \mu m$, para o qual $n_p = 2.54$, e definindo o parâmetro $b = 0.01d$, conforme a discussão do capítulo (3), vamos estimar a contribuição do vácuo quântico [75].

Através da eq. (4.12), obtemos a variação fracionária do tempo de voo para os valores acima citados, com o modelo onde uma distribuição lorentziana idealizada é utilizada em resultado mostra que na situação descrito por $F_{b,d}(x)$, com $b = 0.01d$, o efeito previsto é cerca de 100 vezes mais forte [44].

$$\delta \approx 1.3 \times 10^{-6} \left(\frac{10 \mu m}{d} \right)^2. \quad (5.1)$$

As contribuições do resto (mixto mais térmico) envolve dispersões nas distribuições térmicas, que consistem na contribuição total, ou seja, a contribuição total do sistema

(resto mais vácuo) para termos de segunda ordem. O gráfico ilustrado na Figura 5.2 abaixo foi obtido a partir das equações (4.11), (4.31), (4.91), (4.96) e (4.85) onde os somatórios presentes em (4.85) e (4.96) foram considerados no intervalo $1 < p < 500$ para a estrutura hexagonal do CdSe.

O resultado gráfico da Figura 5.2, foi gerado utilizando-se maplesoft para simulação do cálculo com os valores para n_p , n_b , $\chi^{(2)}$, b e d dados acima. Note que, para $\gamma = \langle \Delta t_d^2 \rangle_\beta - \langle \Delta t_d^2 \rangle_0 / \langle \Delta t_d^2 \rangle_0$ as contribuições do vácuo são dominantes em unidades para valores negativos, apenas representamos no eixo vertical com a letra γ para representar a expressão:

$$\gamma = \frac{\langle \Delta t_d^2 \rangle_\beta - \langle \Delta t_d^2 \rangle_0}{\langle \Delta t_d^2 \rangle_0}, \quad (5.2)$$

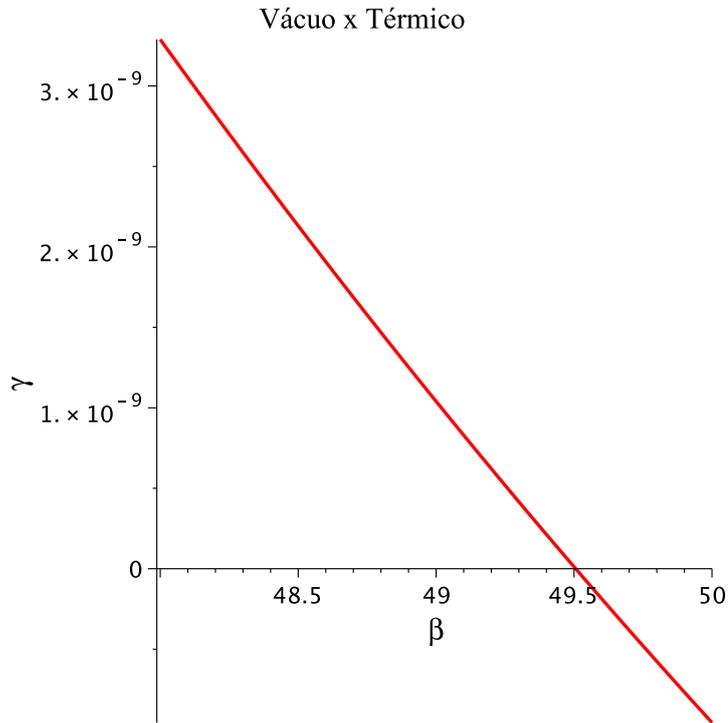


Figura 5.2: Flutuações no tempo de voo $\gamma = \langle \Delta t_d^2 \rangle_\beta - \langle \Delta t_d^2 \rangle_0 / \langle \Delta t_d^2 \rangle_0$ versus temperatura β para contribuição dos termos de segunda ordem do sistema total—vácuo para o Seleneto de Cádmiio (CdSe).

Fonte:Arquivo Pessoal.

De acordo, com a Figura 5.2 isso ocorre a partir de $\beta > 49.5\mu m$ e portanto a temperatura T é

$$\beta > 49.5\mu m = 49.5 \cdot 10^{-6}m, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{T} > 49.5\mu m \rightarrow T < 2 \cdot 10^4 m^{-1}, \quad (5.4)$$

os valores negativos mostram que as contribuições do vácuo são dominantes em unidades de temperatura, onde temos que $1K = 4.37 \cdot 10^2 m^{-1}$ assim :

$$T < \frac{2 \cdot 10^4 m^{-1}}{4.37 \cdot 10^2 m^{-1}} K \rightarrow T < 46K. \quad (5.5)$$

Note, que quando $\beta \rightarrow \infty$ as contribuições térmicas e mixtas são suprimidas exponencialmente e único termo restante de região contorno na temperatura é zero, isso recupera o nosso resultado.

Quando $\beta \rightarrow 0$ a parte mixta é igual à térmica em valores positivos; isso ocorre para altas temperaturas à medida que β aumenta a divergência, sendo de tal forma regularizada para este valor da contribuição de vácuo para as flutuações quânticas que são enfraquecidas.

Então a contribuição térmica será apenas as flutuações residuais constantes, que também podem ser zero para valores de $\langle \Delta t_d \rangle^2$ suficientemente altos.

A temperatura encontrada (5.5) e na Figura 5.2 é aquela relação para as flutuações no vácuo são dominantes com relação as flutuações térmicas e mixtas, para a nossa amostra em questão que é o seleneto de cádmio (CdSe). Lembramos que trabalhamos sempre no limite onde as dispersões são desprezíveis. Portanto, o valor da variância fracionária para o tempo de voo da luz que atravessa uma amostra do CdSe está sujeito a flutuações de origem quântica do vácuo foi encontrada na eq. (5.1).

A contribuição de vácuo é apenas com termos de segunda ordem na soma convergente, a contribuição é suprimida mais cedo, e o vácuo dominante torna-se proeminente. Esses efeitos de vácuo dominarão as flutuações térmicas para temperaturas $T < 46K$. Esses resultados podem, em princípio, ser testados em laboratório.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho estudamos as flutuações do campo elétrico do vácuo, sofrem variações no tempo de voo do pulso de luz através de um material com índice de refração efetivo. Porém, as flutuações térmicas e mixtas são inevitáveis em um experimento real, pois elas contibuem fortemente para as flutuações do tempo de voo em um material que apresenta susceptibilidades de primeira $\chi^{(1)}$ e segunda ordem $\chi^{(2)}$.

Vimos também que os materiais com susceptibilidade de segunda ordem, $\chi^{(2)}$, fornecem os melhores resultados para essas flutuações, onde o cálculo das contribuições de vácuo, para as distribuições de flutuações térmicas e mixtas também estão associadas por uma função teste do tipo lorentziana, que é determinada pela geometria do cristal não linear de CdSe.

O valor da estimativa numérica da temperatura obtida de $T < 46K$, para o composto inorgânico de CdSe, mostra que as contribuições das flutuações térmicas são pequenas nesse regime em comparação com as flutuações do vácuo. Por fim, a principal motivação para esta dissertação foi propor um modelo teórico onde os efeitos das flutuações do vácuo possam ser observados num experimento real.

Como numa perspectiva há, pelo menos, dois problemas que gostaríamos sugerir e investigar as flutuações quânticas de um meio ótico não linear dispersivo em outros materiais e , como na natureza existem materiais cujo $\chi^{(2)} = 0$, materiais centrosimétrico, também seria interessante fazer a nossa análise da mudança de fase geométrica para materiais onde o termo não-linear dominante é o $\chi^{(3)}$ como é o caso do silício (Si) e do germânio (Ge).

Apêndice A

Teorema do Resíduo

Neste apêndice A, apresentaremos o Teorema do Resíduo e sua demonstração.

Teorema 1 (Teorema do Resíduo). *Se f é regular e univalente numa região simplesmente conexa R , exceto em um número finito de singularidades isoladas, z_0, z_1, \dots, z_n , então*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi \sum_{j=0}^n \text{Res}(f, z_j) \quad (\text{A.1})$$

onde C é um contorno fechado de R , envolvendo z_0, z_1, \dots, z_n uma vez no sentido positivo [76].

Demonstração. Sejam C_i ($j = 0, 1, \dots, n$) caminhos fechados simples, envolvendo uma vez no sentido positivo as singularidades z_0, z_1, \dots, z_n , respectivamente, e totalmente contidas no interior de C . Além disto, suponhamos que dois qualquer destes caminhos não se intersectam. Juntos, cada C_j e C forma uma região fechada multiplamente conexa na qual f é regular (ver a Figura A.1). Uma vez que f é regular no interior e sobre cada C_j ,

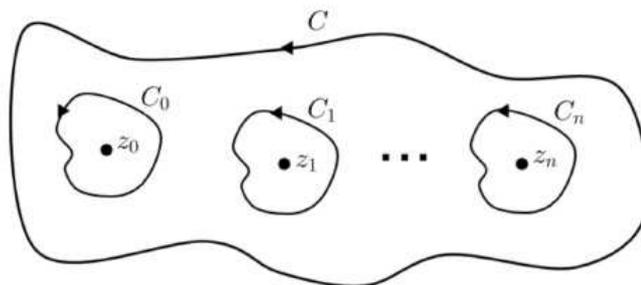


Figura A.1: Região fechada multiplamente conexa delineada pelos caminhos C e C_j .

Fonte: [77].

exceto nos pontos z_j as hipóteses são satisfeitas, para um número finito de de potências

negativas, isto é, existe $m > 0$ tal que $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ para $n > m$. Então, se reduz a

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0, \quad (\text{A.2})$$

e desse modo,

$$Res(f, z_j) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(z) dz \Rightarrow \int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i Res(f, z_j). \quad (\text{A.3})$$

como f é regular em todos os caminhos e na região multiplamente conexa consistindo dos pontos interiores a C e exteriores a cada C_j , então

$$\int_C f(z) dz + \sum_{j=0}^n \int_{C_j} f(z) dz = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde podemos obter o seguinte,

$$\int_C f(z) dz - \int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz = 0, \quad (\text{A.5})$$

o que é equivalente a

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz + \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi Res(f, z_0) + 2\pi Res(f, z_1) + \dots + 2\pi Res(f, z_n), \quad (\text{A.7})$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i [Res(f, z_0) + Res(f, z_1) + \dots + Res(f, z_n)], \quad (\text{A.8})$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=0}^n Res(f, z_j). \quad (\text{A.9})$$

No caso, para obtemos polos simples z_0 , temos

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad (\text{A.10})$$

numa vizinhança de z_0 de onde

$$f(z)(z - z_0) = +a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots. \quad (\text{A.11})$$

Logo, neste caso o resíduo a_{-1} é dado por

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]. \quad (\text{A.12})$$

Seja agora z_0 um pólo duplo da função f de tal forma que,

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_1)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad (\text{A.13})$$

numa vizinhança de z_0 . Daqui, obtemos:

$$f(z)(z - z_0)^2 = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \dots, \quad (\text{A.14})$$

logo,

$$\frac{d}{dz} (f(z)(z - z_0)^2) = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + \dots. \quad (\text{A.15})$$

Vemos, então, que se z_0 é um pólo duplo de f , o resíduo correspondente é dado por:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]. \quad (\text{A.16})$$

□

Apêndice B

Função Digama

A Função digama defini-se como [78] :

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)), \quad (\text{B.1})$$

ou pode ser representada também, como

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{(-1)^{k-1} \prod_{j=1}^k (z-j)}{k!} \right) \quad (\text{B.2})$$

sendo assim, observamos que

$$\psi(x) = \frac{d\Gamma(x)}{\Gamma(x)dx} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1} \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1}{t} e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{1-e^t} \right) dt, \quad (\text{B.4})$$

onde, temos o seguinte

$$\gamma = -\Gamma'(1) = - \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{B.5})$$

Abaixo temos, algumas principais identidades usadas da função digama:

1. Fórmulas para somas parciais:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(a+ibp)^2} = -\frac{\psi^{(1)}\left(1-\frac{ia}{b}\right)}{b^2}, \quad (\text{B.6})$$

quando $b \neq 0$.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+ibp)^2} \right) = \frac{\psi^{(1)}\left(\frac{-ia}{b} + n + 1\right) - \psi^{(1)}\left(1 - \frac{ia}{b}\right)}{b^2} \quad (\text{B.7})$$

para $b \neq 0$.

1. Representações em Séries:

$$-\frac{\psi^{(1)}\left(1 - \frac{ia}{b}\right)}{b^2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(1 - i\frac{a}{b} + k\right)^2}\right)}{b^2}, \quad (\text{B.8})$$

quando $b \neq 0$.

$$-\frac{\psi^{(1)}\left(1 - \frac{ia}{b}\right)}{b^2} = -\frac{1}{\left(1 - i\frac{a}{b}\right)^2 b^2} - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - i\frac{a}{b}\right)^k \psi^{(1+k)(1)}}{k! b^2}, \quad (\text{B.9})$$

para $\left|1 - i\frac{a}{b}\right| < 1$, e $b \neq 0$.

$$\frac{\psi^{(1)}\left(1 - i\frac{a}{b}\right)}{b^2} = -\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(1+k)}(z_0) \frac{\left(1 - i\frac{a}{b}\right)^k}{k!}}{b^2}, \quad (\text{B.10})$$

para (não $(z_0 \in \mathbb{R}, -\infty < z_0 \leq 0)$) e $b \neq 0$.

$$-\frac{\psi^{(1)}\left(1 - i\frac{a}{b}\right)}{b^2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1 - i\frac{a}{b} - z_0\right)^k \psi^{(1)(0,k)}(z_0)}{k!}}{b^2}, \quad (\text{B.11})$$

para (não $(z_0 \in \mathbb{R}, -\infty < z_0 \leq 0)$) e $b \neq 0$.

Apêndice C

Integrais para Contribuição do Vácuo

Lembrando que na equação (3.19), a função $F_{d,b}(x)$ é descrita como uma função lorentziana do tipo:

$$F_{d,b}(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{b}\right) + \arctan\left(\frac{d-x}{b}\right) \right], \quad (\text{C.1})$$

e podemos escrever a derivada da função $F_{d,b}(x)$ como

$$\frac{dF_{d,b}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x-d)^2} \right]. \quad (\text{C.2})$$

Vamos escrever as integrais para a contribuição do vácuo nas direções \hat{x} e \hat{z} .

- Direção \hat{x}

$$I_x^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \langle E_x(x) E_x(x') \rangle_0, \quad (\text{C.3})$$

a função de correlação do campo elétrico é escrita como:

$$\langle E_x(x) E_x(x') \rangle_0 = \frac{1}{\pi^2 n_b^3 \left[\Delta x^2 - \frac{\Delta t^2}{n_b^2} \right]^2}, \quad (\text{C.4})$$

e a dependência de Δt do pulsos de teste que viaja uma distância Δx é dada por

$$\Delta t = n_b \Delta x, \quad (\text{C.5})$$

e

$$v = \frac{1}{n_p} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (\text{C.6})$$

substituindo (C.5) em (C.4) teremos

$$\langle E_x(x) E_x(x') \rangle_0 = \frac{1}{\pi^2 n_b^3 \left[1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 n_b^2} \right]^2 \Delta x^4}, \quad (\text{C.7})$$

$$\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_0 = \frac{1}{\pi^2 n_b^3 \left[1 - \frac{n_p^2}{n_b^2}\right]^2 \Delta x^4}, \quad (\text{C.8})$$

e assim, ficamos com

$$\langle E_x(x)E_x(x') \rangle_0 = \frac{n_p}{\pi^2 [n_p^2 - n_b^2]^2 \Delta x^4}. \quad (\text{C.9})$$

Substituindo (C.8) em (C.3), teremos o seguinte:

$$I_x^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{n_p}{\pi^2 [n_p^2 - n_b^2]^2 \Delta x^4}, \quad (\text{C.10})$$

$$I_x^0 = \underbrace{\frac{n_p}{\pi^2 [n_p^2 - n_b^2]^2}}_{=A} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{1}{\Delta x^4}, \quad (\text{C.11})$$

onde podemos chamar $A = \frac{n_p}{\pi^2 [n_p^2 - n_b^2]^2 \Delta x^4}$, assim ficamos com a nossa expressão:

$$I_x^0 = A \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{1}{\Delta x^4}, \quad (\text{C.12})$$

e a nossa integral de contribuição no vácuo ficará

$$I_x^0 = A \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{1}{(x - x')^4}. \quad (\text{C.13})$$

mas

$$\frac{1}{(x - x')^4} = -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(x - x')^3} \right], \quad (\text{C.14})$$

assim, substituindo (C.4) em (C.3) ficamos com

$$I_x^0 = -\frac{A}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{(x - x')^3}, \quad (\text{C.15})$$

e como

$$F(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{(x - x')^3} = \frac{d}{dx} \left[F(x) \frac{1}{(x - x')^3} \right] - \frac{1}{(x - x')^3} \frac{dF(x)}{dx}, \quad (\text{C.16})$$

substituindo (C.16) em (C.15), temos o seguinte :

$$I_x^0 = -\frac{A}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx} \left[F(x) \frac{1}{(x - x')^3} \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x - x')^3} \frac{dF(x)}{dx} \right\}, \quad (\text{C.17})$$

e ainda

$$I_x^0 = -\frac{A}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \frac{F(x)}{(x - x')^3} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - x')^3} \frac{dF(x)}{dx} \right\}, \quad (\text{C.18})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x')^3} \frac{dF(x)}{dx}, \quad (\text{C.19})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \frac{1}{(x-x')^3}, \quad (\text{C.20})$$

fazendo

$$\frac{1}{(x-x')^3} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx'} \frac{1}{(x-x')^2}, \quad (\text{C.21})$$

novamente, vamos substituir (C.22) em (C.21) para encontrar :

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \frac{d}{dx'} \frac{1}{(x-x')^2}, \quad (\text{C.22})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \frac{d}{dx'} \frac{1}{(x-x')^2}, \quad (\text{C.23})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left(\frac{d}{dx'} \left[F(x') \frac{1}{(x-x')^2} \right] - \frac{1}{(x-x')^2} \right) \frac{dF(x')}{dx'} \right\}, \quad (\text{C.24})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dF(x)}{dx} \left\{ \left[\frac{F(x')}{(x-x')^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{(x-x')^2} \frac{dF(x')}{dx'} \right\}, \quad (\text{C.25})$$

ficaremos com

$$I_x^0 = -\frac{A}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{df(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{F(x')}{dx'} \frac{1}{(x-x')^2}, \quad (\text{C.26})$$

$$I_x^0 = -\frac{A}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{df(x)}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left(\frac{b}{b^2-x'^2} - \frac{b}{b^2-(x'-d)^2} \right) \frac{1}{(x-x')^2}, \quad (\text{C.27})$$

equação acima (C.14) tem pólos em

- Pólos i) e ii)

$$\begin{cases} x' = \pm ib & (1^\circ \text{ordem}) \\ x' = \pm ib + d & (1^\circ \text{ordem}), \\ x' = x - i\varepsilon x' & (2^\circ \text{ordem}) \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

escolhendo o contorno indicado na Figura C.1, e efetuando o cálculo dos resíduos de funções com os polos da eq. (C.28), em ambos os casos optou-se pelo contorno superior para evitar o pólo mais alto, para isso usamos o Teorema dos Resíduos no Apêndice (A) logo:

$$i) = 2\pi i \lim_{x' \rightarrow ib} (x' - ib) \frac{b}{(x' - ib)(x' + ib)} \frac{1}{(x - x')^2} \quad (\text{C.29})$$

$$= 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{(x - ib)^2} \quad (\text{C.30})$$

$$= \frac{\pi}{(x - ib)^2}, \quad (\text{C.31})$$

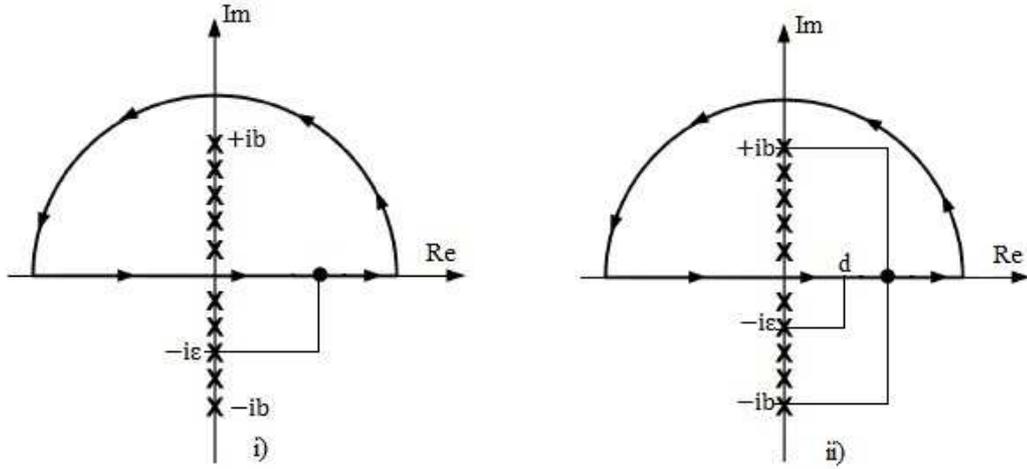


Figura C.1: Contorno escolhido nos polos i) e ii).

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$ii) = 2\pi i \lim_{x' \rightarrow d+ib} (x' - d - ib) \frac{b}{(x' - d - ib)(x' - d + ib)} \frac{1}{(x - x')^2} \quad (C.32)$$

$$= 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{(x - d - ib)^2} \quad (C.33)$$

$$= \frac{\pi}{(x - d - ib)^2}. \quad (C.34)$$

Agora, vamos substituir as eqs. (C.32) e (C.29) em (C.27)

$$I_x^0 = -\frac{A}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \right] \left[\frac{\pi}{(x - ib)^2} - \frac{\pi}{(x - d - ib)^2} \right], \quad (C.35)$$

$$I_x^0 = -\frac{A}{6\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\overbrace{\frac{b}{b^2 + x^2}}^{iii)} - \overbrace{\frac{b}{b^2 + (x - d)^2}}^{iv)} \right] \frac{1}{(x - ib)^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\overbrace{\frac{b}{b^2 + x^2}}^{v)} - \overbrace{\frac{b}{b^2 + (x - d)^2}}^{vi)} \right] \frac{1}{(x - d - ib)^2} \right\}, \quad (C.36)$$

para esta eq. (C.20), temos os contornos indicados na Figura C.2 neste caso temos o seguinte polo

- Pólo iii)

$$\begin{cases} x' = -ib & (3^\circ \text{ ordem}) \\ x' = +ib & (1^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (C.37)$$

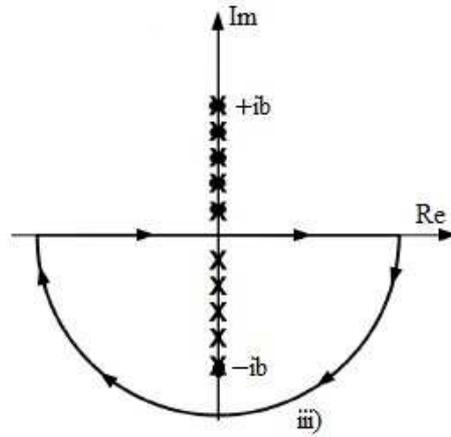


Figura C.2: Contorno escolhido no polo iii).

Fonte: Arquivo Pessoal.

eu escolhi o contorno para baixo para evitar o polo mais alto. Então vamos resolver parte da eq. (C.36) em iii)

$$iii) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{(b^2 + x^2)} \frac{1}{(x - ib)^2}, \quad (C.38)$$

$$iii) = -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib} (x + ib) \frac{b}{(x - ib)(x + ib)} \frac{1}{(x - ib)^2} \quad (C.39)$$

$$= -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{(-2ib)^2} \quad (C.40)$$

$$= -\frac{\pi}{4b^2}. \quad (C.41)$$

Vamos resolver parte da eq. (C.36) em iv)

$$iv) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{b}{(b^2 + x^2)} \frac{1}{(x - ib)^2} dx, \quad (C.42)$$

- Pólo iv) Temos o contorno indicado na Figura C.3,

$$\begin{cases} x' = ib & (2^\circ \text{ordem}) \\ x' = \pm ib + d & (1^\circ \text{ordem}) \end{cases}, \quad (C.43)$$

$$iv) = -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib+d} (x + ib - d) \frac{b}{(x - d + ib)(x - d - ib)} \frac{1}{(x - ib)^2} \quad (C.44)$$

$$= -2i\pi \frac{-b}{-2ib} \frac{1}{(-2ib + d)^2} \quad (C.45)$$

$$= -\frac{\pi}{(-2ib + d)^2}. \quad (C.46)$$

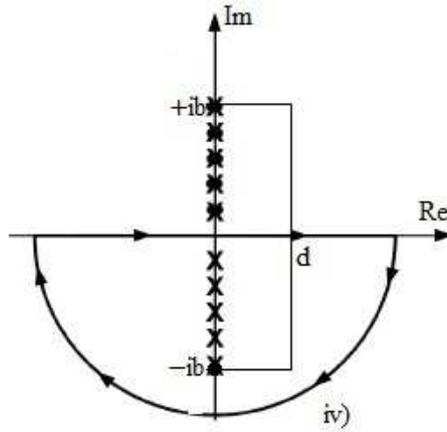


Figura C.3: Contorno escolhido no polo iv).

Fonte: Arquivo Pessoal.

Fazendo o mesmo procedimento, para resolver parte da eq. (C.36) em v)

$$v) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{(b^2 + x^2)} \frac{1}{(x - d - ib)^2}, \quad (\text{C.47})$$

- Pólo v)

$$\begin{cases} x' = \pm ib & (1^\circ \text{ordem}) \\ x' = d + ib & (2^\circ \text{ordem}) \end{cases}, \quad (\text{C.48})$$

escolhermos o contorno da parte de baixo, representado por polos de primeira como indicado na Figura C.4,

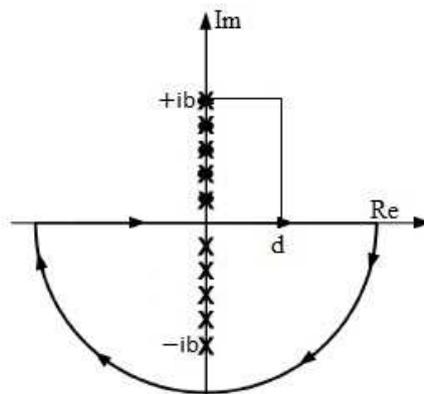


Figura C.4: Contorno escolhido no polo v).

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$v) = -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib} (x + ib) \frac{b}{(x + ib)(x - ib)} \frac{1}{(x - d - ib)^2} \quad (\text{C.49})$$

$$= -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{(-2ib - d)^2} \quad (\text{C.50})$$

$$= \frac{\pi}{(-2ib + d)^2}. \quad (\text{C.51})$$

Agora, efetuando o mesmo mecanismo para resolver parte da eq. (C.36) em vi)

$$vi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{(x - d - ib)^2}, \quad (\text{C.52})$$

- Pólo vi)

$$\begin{cases} x' = d + ib & (3^\circ \text{ ordem}) \\ x' = d - ib & (1^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{C.53})$$

temos o contorno indicado na Figura C.5,

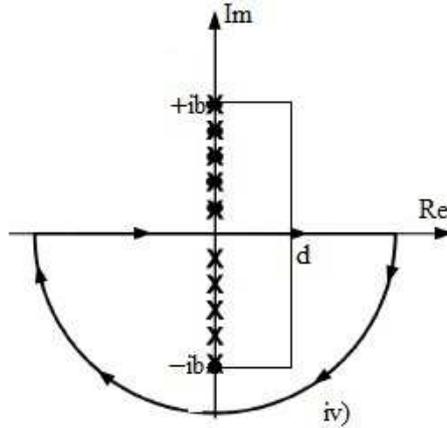


Figura C.5: Contorno escolhido no polo vi).

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$vi) = -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib+d} (x + ib - d) \frac{-b}{(x - d + ib)(x - d - ib)} \frac{1}{(x - d - ib)^2} \quad (\text{C.54})$$

$$= -2i\pi \frac{-b}{(-2ib)^3} \quad (\text{C.55})$$

$$= \frac{\pi}{4b^2}. \quad (\text{C.56})$$

Retornando para a eq. (C.36) e adotando terminologia temos o seguinte:

$$I_x^0 = -\frac{A}{6\pi} \left\{ iii) + iv) - [v) + vi) \right\}, \quad (\text{C.57})$$

usando as eqs. (C.39), (C.44), (C.49) e (C.54) em (C.57), obtemos a seguinte expressão:

$$I_x^0 = -\frac{A}{6\pi} \left\{ -\frac{\pi}{4b^2} - \frac{\pi}{(-2ib+d)^2} - \left[\frac{\pi}{(2ib+d)^2} + \frac{\pi}{4b^2} \right] \right\}, \quad (\text{C.58})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \left\{ \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{(-2ib+d)^2} + \frac{1}{(2ib+d)^2} \right\}, \quad (\text{C.59})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \left\{ \frac{(16b^4 + 8b^2d^2 + d^2) + 2b^2(2ib+d)^2 + 2b^2(d-2ib)^2}{2b^2(-2ib+d)^2(2ib+d)^2} \right\}, \quad (\text{C.60})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \left\{ \frac{(16b^4 - 16b^4 + 8b^2d^2 + 4b^2d^2 + d)}{32b^6 + 16b^4d^2 + 2b^2d^4} \right\}, \quad (\text{C.61})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \left\{ \frac{(12b^2d^2 + d^4)}{32b^6 + 16b^4d^2 + 2b^2d^4} \right\}, \quad (\text{C.62})$$

$$I_x^0 = \frac{A}{6} \left\{ \frac{(12b^2d^2 + d^4)}{32b^6 + 16b^4d^2 + 2b^2d^4} \right\}, \quad (\text{C.63})$$

$$I_x^0 = \frac{(12b^2d^2 + d^4)A}{12b^2(4b^2 + d^2)^2}, \quad (\text{C.64})$$

assim, chegamos ao seguinte resultado da integral da contribuição do vácuo na direção na direção \hat{x} ,

$$I_x^0 = \frac{n_b}{\pi^2 [n_p^2 - n_b^2]} \frac{(12b^2d^2 + d^4)}{12b^2(4b^2 + d^2)^2}. \quad (\text{C.65})$$

• Direção \hat{z}

$$I_z^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \langle E_z(x) E_z(x') \rangle_0, \quad (\text{C.66})$$

onde,

$$\langle E_z(x) E_z(x') \rangle_0 = \frac{\Delta x^2 + \frac{\Delta t^2}{n_b^2}}{\pi^2 \left[\frac{\Delta t^2}{n_b^2} - \Delta x^2 \right]^3}, \quad (\text{C.67})$$

lembrando anteriormente, que

$$\frac{1}{n_p} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = n_p \Delta x. \quad (\text{C.68})$$

Substituindo as eqs. (C.68), (C.67) em (C.66), obteremos as seguintes integrais abaixo:

$$I_z^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \left\{ \frac{\Delta x^2 + \frac{\Delta t^2}{n_b^2}}{\pi^2 \left[\frac{\Delta t^2}{n_b^2} - \Delta x^2 \right]^3} \right\}, \quad (\text{C.69})$$

$$I_z^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \left\{ \frac{\Delta x^2 + \frac{n_p^2}{n_b^2}}{\pi^2 n_b^3 \left[\frac{n_b^2 \Delta x^2}{n_b^2} - \Delta x^2 \right]^3} \right\}, \quad (\text{C.70})$$

$$I_z^0 = \frac{n_b^6}{\pi^2 n_b^5} \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \frac{\Delta x^2 (n_b^2 + n_p^2)}{\Delta x^6 (n_p^2 - n_b^2)^3} \right\}, \quad (\text{C.71})$$

$$I_z^0 = \frac{n_b}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' F(x') \left\{ \frac{(n_b^2 + n_p^2)}{n_p^2 - n_b^2} \frac{1}{\Delta x^4} \right\}, \quad (\text{C.72})$$

As integrais acima foram realizadas seguindo os mesmos passos do caso da direção \hat{x} . Sendo assim, o resultado da integral da contribuição do vácuo na direção \hat{z} é :

$$I_z^0 = \frac{n_b (n_b^2 + n_p^2)}{\pi^2 (n_p^2 - n_b^2)^3} \frac{(12b^2 d^2 + d^4)}{12b^2 (4b^2 + d^2)^2}, \quad (\text{C.73})$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{b}\right) + \arctan\left(\frac{d-x}{b}\right) \right] \times \\ \times \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x'}{b}\right) + \arctan\left(\frac{d-x'}{b}\right) \right] \frac{1}{(x-x')^4}, \quad (\text{C.74})$$

$$I = \frac{(12b^2 d^2 + d^4)}{12b^2 (4b^2 + d^2)^2}. \quad (\text{C.75})$$

Apêndice D

Integrais para Contribuição Térmica

Para as integrais de contribuição térmica, chamemos I_{1x}^T

$$I_{1x}^T = \frac{1}{\pi} [I_{11x}^T - I_{12x}^T] \quad (\text{D.1})$$

onde,

$$I_{11x}^T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[n_p(x - x') + ip\beta]^2} \quad (\text{D.2})$$

$$I_{11x}^T = \frac{\pi}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2}. \quad (\text{D.3})$$

Agora é a vez de,

$$I_{12x}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.4})$$

$$I_{12x}^T = \frac{\pi}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}. \quad (\text{D.5})$$

Substituindo a eq. (D.5) e eq. (D.3) em eq. (D.1) obtemos que:

$$I_{1x}^T = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2} - \frac{\pi}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2} \right\}, \quad (\text{D.6})$$

vamos substituir a eq. (D.6) em (D.7)

$$I_x^T = -\frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{dF(x')}{dx'} I_{1x}^T, \quad (\text{D.7})$$

assim,

$$I_x^T = -\frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{dF(x')}{dx'} \left\{ \frac{1}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2} + \frac{1}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2} \right\}, \quad (\text{D.8})$$

com o auxílio do Apêndice (A), realizamos o cálculo das integrais de (D.8) para I_{11x}^T :

$$I_{11x}^T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[n_p(x - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.9})$$

aplicando o Teorema do Resíduo nos polos de I_{11x}^T conforme visto no Apêndice (A), assim temos para o seguinte polos:

- Pólos

$$\begin{cases} x = \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x = -\frac{ip\beta}{n_p} + x' & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

temo o contorno indicado na Figura D.1, note que os polos são de primeira ordem, mas

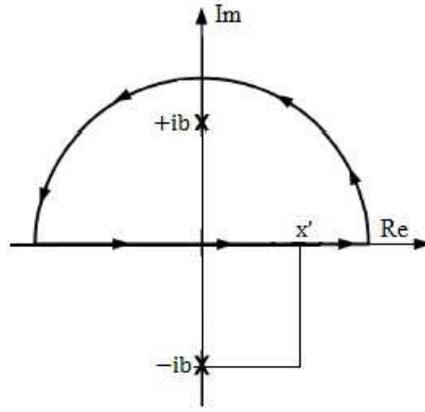


Figura D.1: Contorno escolhido para realização da integral I_{11x}^T .

Fonte: Arquivo Pessoal.

x' está sobre o eixo real. Logo temos que I_{11x}^T é

$$I_{11x}^T = 2\pi i \lim_{x \rightarrow ib} (x - ib) \frac{b}{(x - ib)(x + ib)} \frac{1}{[n_p(x - x') + ip\beta]^2} \quad (\text{D.11})$$

$$= 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2} \quad (\text{D.12})$$

$$= \frac{\pi}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.13})$$

$$I_{11x}^T = \frac{\pi}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2}. \quad (\text{D.14})$$

Agora, resolvendo a integral I_{12x}^T e aplicando o Teorema do Resíduo nos polos conforme visto no Apêndice (A), assim temos:

$$I_{12x}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[n_p(x - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.15})$$

- Pólos

$$\begin{cases} x = \pm ib + d & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x = -i\frac{p\beta}{n_p} + x' & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

temos o contorno indicado na Figura D.2, note que os polos são de primeira ordem, assim

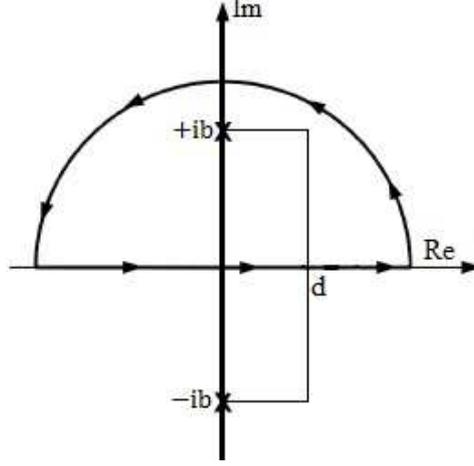


Figura D.2: Contorno escolhido para realização da integral I_{12x}^T .

Fonte: Arquivo Pessoal.

temos que I_{12x}^T é:

$$I_{12x}^T = 2\pi i \lim_{x \rightarrow d+ib} (x - d - ib) \frac{b}{(x - d - ib)(x - d + ib)} \frac{1}{[n_p(x - x') + ip\beta]^2} \quad (\text{D.17})$$

$$= 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2} \quad (\text{D.18})$$

$$= \frac{\pi}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.19})$$

$$I_{12x}^T = \frac{\pi}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}. \quad (\text{D.20})$$

Vamos resolver para I_{21x}^T , conforme visto no Apêndice (A) teremos o seguinte:

$$I_{21x}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{b}{b^2 + x'^2} \frac{1}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.21})$$

- Pólos

$$\begin{cases} x' = \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x' = ib + i\frac{p\beta}{n_p} & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{D.22})$$

observe que no contorno indicado na Figura D.3, note que os polos são de primeira ordem

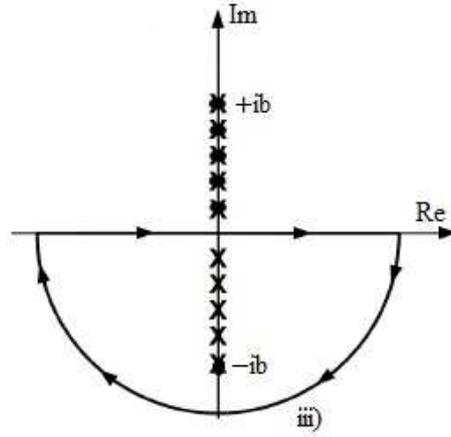


Figura D.3: Contorno escolhido para realização da integral I_{21x}^T .

Fonte: Arquivo Pessoal.

em I_{21x}^T é

$$I_{21x}^T = 2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib} (x' + ib) \frac{b}{(x' + ib)(x' - ib)} \frac{1}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2} \quad (D.23)$$

$$= -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[n_p(2ib) + ip\beta]^2} \quad (D.24)$$

$$= -\frac{\pi}{[2n_p b + p\beta]^2}, \quad (D.25)$$

$$I_{21x}^T = -\frac{\pi}{[2n_p b + p\beta]^2}. \quad (D.26)$$

Para a integral I_{22x}^T , utilizamos o Teorema do Resíduo no Apêndice (A), assim temos:

$$I_{22x}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{b}{b^2 + x'^2} \frac{1}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}, \quad (D.27)$$

- Pólos

$$\begin{cases} x' = \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x' = d + ib + i\frac{p\beta}{n_p} & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (D.28)$$

note o contorno indicado na Figura D.4, veja, que os polos são de primeira ordem em I_{22x}^T , logo temos:

$$I_{22x}^T = -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib} (x' + ib) \frac{b}{(x' - ib)(x' + ib)} \frac{1}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2} \quad (D.29)$$

$$= -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[n_p(d + 2ib) + ip\beta]^2} \quad (D.30)$$

$$= \frac{\pi}{[n_p(d + 2ib) + ip\beta]^2}, \quad (D.31)$$

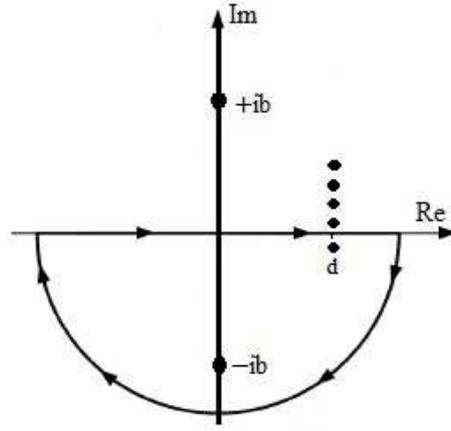


Figura D.4: Contorno escolhido para realização da integral I_{22x}^T .

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$I_{22x}^T = \frac{\pi}{[n_p(d + 2ib) + ip\beta]^2}. \quad (\text{D.32})$$

Aplicando novamente, aplicando o mesmo raciocínio visto no no Apêndice (A) em I_{23x}^T para a integral abaixo

$$I_{23x}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{b}{b^2 + (x' - d)^2} \frac{1}{[n_p(ib - x' + ip\beta)]^2}, \quad (\text{D.33})$$

- Pólos

$$\begin{cases} x' = \pm ib + d & (1^\circ \text{ordem}) \\ x' = ib + i\frac{p\beta}{n_p} & (2^\circ \text{ordem}) \end{cases}, \quad (\text{D.34})$$

note o contorno indicado na Figura D.5, os polos são de primeira ordem em I_{23x}^T , logo:

$$I_{23x}^T = -2\pi i \lim_{x \rightarrow d-ib} (x' - d + ib) \frac{b}{(x' - d + -ib)(x' - d - ib)} \frac{b}{[n_p(ib - x') + ip\beta]^2} \quad (\text{D.35})$$

$$= -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[n_p(-d + 2ib) + ip\beta]^2} \quad (\text{D.36})$$

$$= \frac{\pi}{[n_p(d + 2ib) + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.37})$$

$$I_{23x}^T = \frac{+\pi}{[n_p(-d + 2ib) + ip\beta]^2}. \quad (\text{D.38})$$

Por fim, realizando o mesmo procedimento para resolução da integral I_{24x}^T utilizando o Teorema do Resíduo no Apêndice (A) desta forma temos:

$$I_{24x}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{b}{b^2 + (x' - d)^2} \frac{1}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}, \quad (\text{D.39})$$

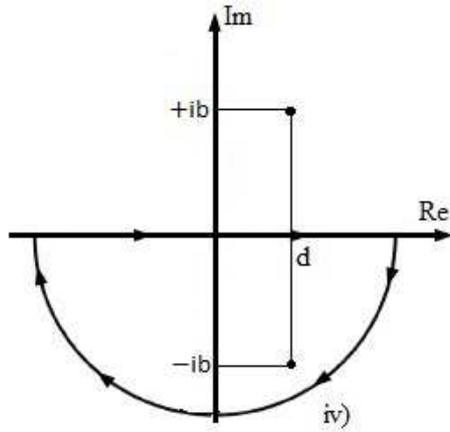


Figura D.5: Contorno escolhido para realização da integral I_{23x}^T .

Fonte: Arquivo Pessoal.

- Pólos

$$\begin{cases} x' = \pm ib + d & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x' = d + ib + i\frac{p\beta}{n_p} & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{D.40})$$

observe que • está sobre o eixo real, como mostrado no contorno indicado na Figura D.6, como os polos são de primeira ordem em I_{24x}^T é da seguinte forma:

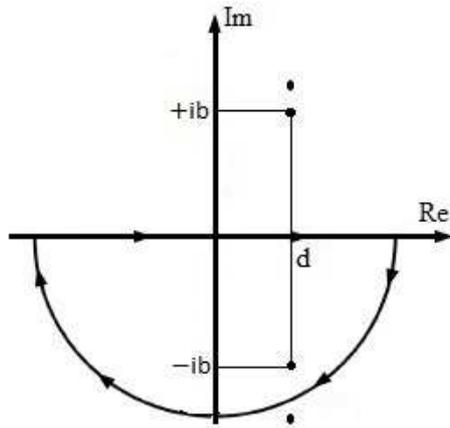


Figura D.6: Contorno escolhido para realização da integral I_{24x}^T .

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$I_{24x}^T = -2\pi i \lim_{x \rightarrow d-ib} (x' - d + ib) \frac{b}{(x' - d + -ib)(x' - d - ib)} \frac{b}{[n_p(d + ib - x') + ip\beta]^2}$$
(D.41)

$$= -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[n_p(-d + 2ib) + ip\beta]^2}$$
(D.42)

$$= -\frac{\pi}{[2bn_p + p\beta]^2},$$
(D.43)

$$I_{24x}^T = -\frac{\pi}{[2bn_p + p\beta]^2}.$$
(D.44)

Para a contribuição térmica de I_{2x}^T , teremos o seguinte cálculo para I_{2x}^T

$$I_{2x}^T = \frac{1}{\pi} [I_{21x}^T - I_{22x}^T - I_{23x}^T + I_{24x}^T],$$
(D.45)

substituindo as eqs. (D.26), (D.32), (D.38), (D.44) em eq. (D.45) obteremos o seguinte

$$I_{2x}^T = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{(2n_p b + p\beta)^2} - \frac{\pi}{(n_p(d + 2ib) + ip\beta)^2} + \right. \\ \left. - \frac{\pi}{(n_p(-d + 2ib) + ip\beta)^2} - \frac{\pi}{(2n_p b + p\beta)^2} \right],$$
(D.46)

e

$$I_{2x}^T = -\left[\frac{1}{(2n_p b + p\beta)^2} + \frac{1}{(n_p(d + 2ib) + ip\beta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n_p(-d + 2ib) + ip\beta)^2} + \frac{1}{(2n_p b + p\beta)^2} \right],$$
(D.47)

e substituímos a eq. (D.47) na eq. (D.8), obtemos finalmente

$$I_x^T = \frac{n_b}{3\pi^2 n_p^2} Re \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2n_p b + p\beta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n_p(d + 2ib) + ip\beta)^2} + \frac{1}{(n_p(-d + 2ib) + ip\beta)^2} \right].$$
(D.48)

Usando agora, uma ferramenta puramente matemática da função digama visto no Apêndice (B)) temos o seguinte:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(a + bip)^2} = -\frac{\Psi^{(1)}\left(\frac{b - ai}{b}\right)}{b^2},$$
(D.49)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(a + bp)^2} = -\frac{\Psi^{(1)}\left(\frac{b + a}{b}\right)}{b^2}.$$

Apêndice E

Integrais para Contribuição Mixta

O desenvolvimento do cálculo para I_{21x}^M :

$$I_{21x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{[A(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + x'^2}, \quad (\text{E.1})$$

- Pólos

$$\begin{cases} x' = \pm ib & (1^\circ \text{ordem}) \\ x' = x + i\frac{B}{A} & (2^\circ \text{ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.2})$$

temos o contorno indicado na Figura E.1,

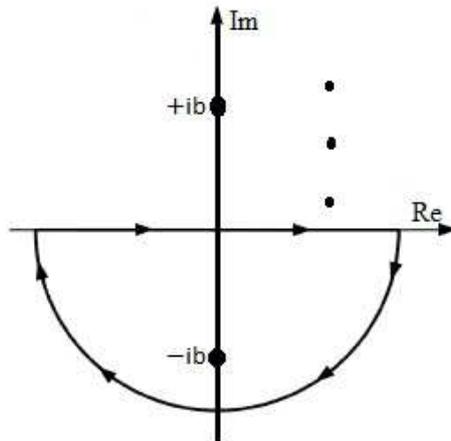


Figura E.1: Contorno escolhido para realização da integral I_{21x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$\begin{cases} A = un_p + n_b > 0, & n_p > n_b, \\ B = up\beta > 0 \end{cases}, \quad (\text{E.3})$$

o polo de I_{21x}^M , representado por \bullet , está exatamente na parte superior do plano complexo e constitui uma série de polos sobre o eixo imaginário usando o Teorema do Resíduo, conforme visto no Apêndice (A) teremos o seguinte:

$$I_{21x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib} (x' + ib) \frac{b}{(x' + ib)(x' - ib)} \frac{1}{[A(x - x') + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.4})$$

$$I_{21x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.5})$$

$$I_{21x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(x + ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.6})$$

Assim, vamos resolver a integral I_{22x}^M usando o Apêndice (A)

$$I_{22x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{[A(x - x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + (x' - d)^2} \right\}, \quad (\text{E.7})$$

• Pólos

$$\begin{cases} x' = d + ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x' = x + i\frac{B}{A}, \frac{B}{A} > 0 & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.8})$$

o contorno indicado na Figura E.2, usando o Apêndice (A), o desenvolvimento do cálculo

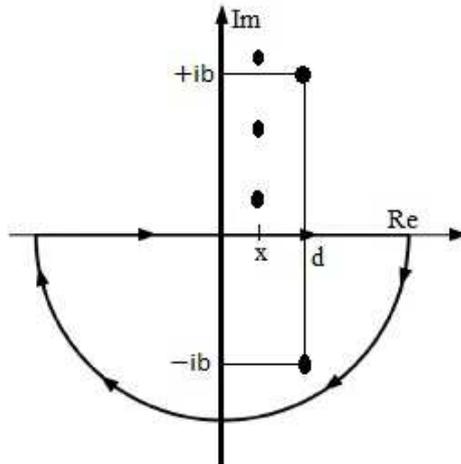


Figura E.2: Contorno escolhido para realização da integral I_{22x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

para I_{22x}^M :

$$I_{22x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ -2\pi i \lim_{x \rightarrow d-ib} (x' - d + ib) \frac{b}{(x' - d + ib)(x' - d - ib)} \frac{1}{[A(x - x') + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.9})$$

$$I_{22x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[A(x-d+ib)+iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.10})$$

$$I_{22x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(x-d+ib)+iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.11})$$

Vamos, resolver a integral I_{23x}^M usando o Apêndice (A)

$$I_{23x}^M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{\tilde{A}^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x-x')+iB]^2} \frac{b}{b^2+x'^2} \right\}, \quad (\text{E.12})$$

o desenvolvimento do cálculo para I_{23x}^M :

$$I_{23x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{[\tilde{A}(x-x')+iB]^2} \frac{b}{b^2+x'^2} \right\}, \quad (\text{E.13})$$

• Pólos

$$\begin{cases} x' = \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x' = x + i\frac{B}{\tilde{A}} & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.14})$$

escolhermos o contorno debaixo, representado por polos de primeira conforme indicado na Figura E.3,

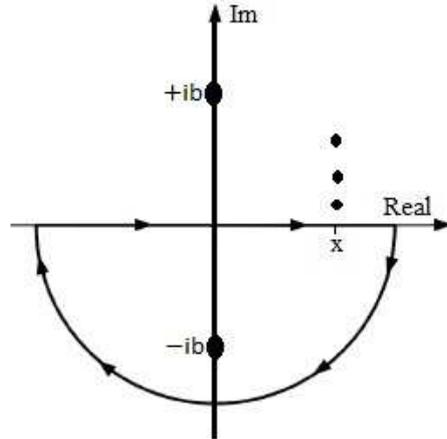


Figura E.3: Contorno escolhido para realização da integral I_{23x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$\begin{cases} \tilde{A} = un_p - n_b, & n_p > n_b \therefore \tilde{A} > 0 \\ B > 0 > \therefore \frac{B}{\tilde{A}} > 0 \end{cases}, \quad (\text{E.15})$$

$$I_{23x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ib} (x' + ib) \frac{b}{(x' + ib)(x' - ib)} \frac{1}{[\tilde{A}(x - x') + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.16})$$

$$I_{23x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[\tilde{A}(x + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.17})$$

$$I_{23x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(x + ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.18})$$

Utilizando o mesmo procedimento, para resolver a integral I_{24x}^M usando o Apêndice (A)

$$I_{24x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{[\tilde{A}(x - x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + (x' - d)^2} \right\}, \quad (\text{E.19})$$

• Pólos

$$\begin{cases} x' = d + ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x' = x + i\frac{B}{\tilde{A}} & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.20})$$

ilustrando o contorno indicado na Figura E.4, note que o polo de I_{24x}^M , representado por

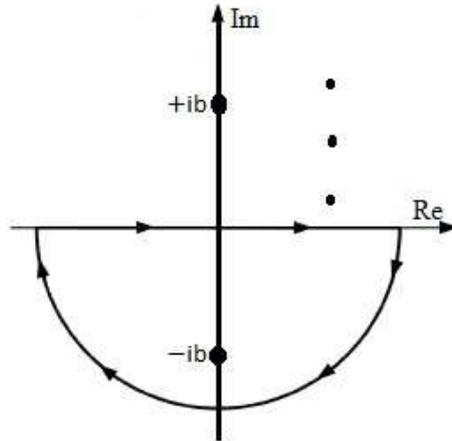


Figura E.4: Contorno escolhido para realização da integral I_{24}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

•, está exatamente na parte superior do plano complexo e constitui uma série de polos

sobre o eixo imaginário usando o Teorema do Resíduo, conforme visto no Apêndice (A) teremos o seguinte:

$$I_{24x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ -2\pi i \lim_{x \rightarrow d-ib} (x' - d + ib) \frac{b}{(x' - d + ib)(x' - d - ib)} \frac{1}{[\tilde{A}(x - x') + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.21})$$

$$I_{24x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ -2i\pi \frac{b}{-2ib} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.22})$$

$$I_{24x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.23})$$

O procedimento para resolver a integral I_{11x}^M usando o Apêndice (A), temos que:

$$I_{11x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2}, \quad (\text{E.24})$$

• Pólos

$$\begin{cases} x = \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x = -i\frac{B}{A} - ib & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.25})$$

conforme ilustrado no contorno indicado na Figura E.5, note que o polo de I_{11x}^M represen-

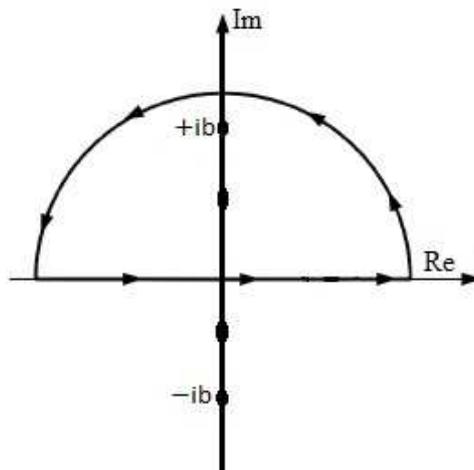


Figura E.5: Contorno escolhido para realização da integral I_{11x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

tado por •, está exatamente na parte superior do plano complexo e constitui uma série de

polos sobre o eixo imaginário usando o Teorema do Resíduo conforme visto no Apêndice (A), teremos o seguinte:

$$I_{11x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2\pi i \lim_{x \rightarrow ib} (x - ib) \frac{b}{(x - ib)(x + ib)} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.26})$$

$$I_{11x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{[A(2ib + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.27})$$

$$I_{11x}^M = -\frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(2ab + B)]^2} \right\}. \quad (\text{E.28})$$

Contudo, vamos resolver a integral I_{12x}^M usando o Apêndice (A) temos que:

$$I_{12x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x - d - ib) + iB]^2}, \quad (\text{E.29})$$

• Pólos

$$\begin{cases} x = \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x = -i\frac{B}{A} - ib & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.30})$$

como mostrado no contorno indicado na Figura E.6,

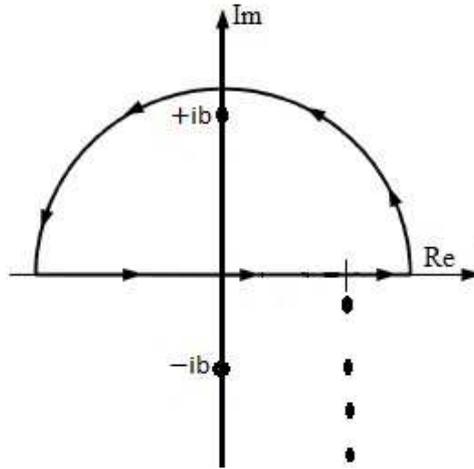


Figura E.6: Contorno escolhido para realização da integral I_{12x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$I_{12x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2\pi i \lim_{x \rightarrow ib} (x - ib) \frac{b}{(x - ib)(x + ib)} \frac{1}{[A(x - d + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.31})$$

$$I_{12x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{[A(2ib - d) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.32})$$

$$I_{12x}^M = -\frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(2ib - d) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.33})$$

Além disso, vamos resolver a integral I_{15x}^M usando o Apêndice (A) temos que:

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2} \quad (\text{E.34})$$

• Pólos

$$\begin{cases} x = d + ib & (1^\circ \text{ordem}) \\ x = -i\frac{B}{A} - ib & (2^\circ \text{ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.35})$$

escolhermos o contorno da parte de cima, representado por polos de primeira como ilustrado na Figura E.7, conforme visto no Apêndice (A) teremos o seguinte:

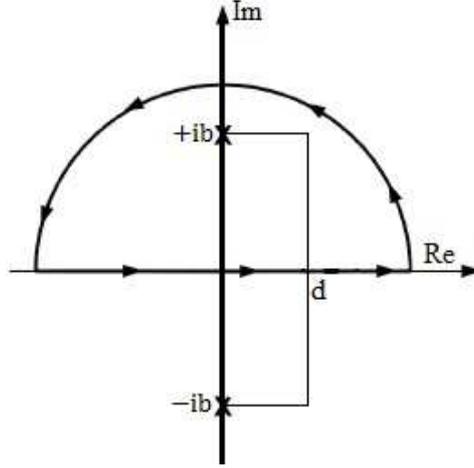


Figura E.7: Contorno escolhido para realização da integral I_{15x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2\pi i \lim_{x \rightarrow d+ib} (x - d - ib) \frac{b}{(x - d - ib)(x - d + ib)} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.36})$$

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{[A(d + 2ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.37})$$

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(d + 2ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.38})$$

Vamos calcular para o termo I_{16x}^M :

$$I_{16x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2}, \quad (\text{E.39})$$

- Pólos

$$\begin{cases} x = d \pm ib & (1^\circ \text{ ordem}) \\ x = d - i\frac{B}{A} - ib & (2^\circ \text{ ordem}) \end{cases}, \quad (\text{E.40})$$

observe que, escolhermos o contorno da parte de cima representado por polos de primeira como mostrado na Figura E.8, conforme visto no Apêndice (A) o procedimento do cálculo,

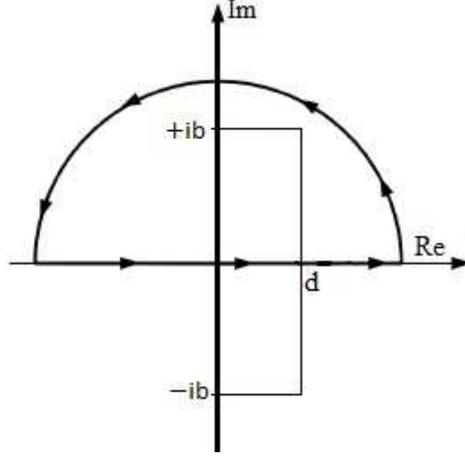


Figura E.8: Contorno escolhido para realização da integral I_{16x}^M .

Fonte: Arquivo Pessoal.

é o seguinte:

$$I_{16x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2\pi i \lim_{x \rightarrow d+ib} (x - d - ib) \frac{b}{(x - d - ib)(x - d + ib)} \frac{1}{[A(x - d + ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.41})$$

$$I_{16x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ 2i\pi \frac{b}{2ib} \frac{1}{[A(2ib) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.42})$$

$$I_{16x}^M = -\frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[(2Ab + B)]^2} \right\}. \quad (\text{E.43})$$

As integrais para contribuição térmica em I_{1x}^M é:

- I_{13x}^M é I_{11x}^* trocando A por \tilde{A} ;
- I_{14x}^M é I_{12x}^* trocando A por \tilde{A} ;
- I_{17x}^M é I_{15x}^* trocado A por \tilde{A} ;
- I_{18x}^M é I_{16x}^* trocado A por \tilde{A} .

Calculando o termo I_{11x}^M :

$$I_{11x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2}, \quad (\text{E.44})$$

$$I_{11x}^M = -\frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(2ab + B)]^2} \right\}, \quad (\text{E.45})$$

e portanto,

$$I_{13x}^M = -\frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(2ab + B)]^2} \right\}. \quad (\text{E.46})$$

Agora, o termo I_{12x}^M :

$$I_{12x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + x^2} \frac{1}{[A(x - d - ib) + iB]^2} \quad (\text{E.47})$$

$$I_{12x}^M = -\frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(2ib - d) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.48})$$

e portanto,

$$I_{14x}^M = -\frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(2ib - d) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.49})$$

Fazendo, para o termo I_{15x}^M :

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[A(x + ib) + iB]^2}, \quad (\text{E.50})$$

$$I_{15x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(d + 2ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.51})$$

e portanto,

$$I_{17x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(d + 2ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.52})$$

Agora, vamos calcular para o termo I_{16x}^M :

$$I_{16x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{b}{b^2 + (x - d)^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x - d + ib) + iB]^2}, \quad (\text{E.53})$$

$$I_{16x}^M = -\frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[(2Ab + B)]^2} \right\}, \quad (\text{E.54})$$

deste jeito, podemos ter o seguinte:

$$I_{18x}^M = -\frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[(2\tilde{A}b + B)]^2} \right\}. \quad (\text{E.55})$$

Podemos escrever as integrais para contribuição mixta I_x^M , da seguinte forma:

$$I_x^M = \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{I}_x^M, \quad (\text{E.56})$$

$$\tilde{I}_x^M = \frac{n_b}{2\pi^4} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{A^2 [2Ab + B]^2}, \quad (\text{E.57})$$

podemos chamar,

$$\tilde{I}_x^M = \frac{n_b}{2\pi^4} \int_1^{+\infty} \frac{(u^2 - 1)}{A^2 [2Ab + B]} du, \quad (\text{E.58})$$

em que,

$$A^2 [2Ab + B]^2 = (un_p + n_b)^2 [2(un_p + n_b b) + p\beta]^2, \quad (\text{E.59})$$

desenvolvendo o cálculo, temos

$$A^2 [2Ab + B]^2 = n_p^2 \left(u + \frac{n_b}{n_p} \right) (2bn_p + p\beta^2 \left[u + \frac{2n_b b}{2bn_p + p\beta} \right]^2), \quad (\text{E.60})$$

$$A^2 [2Ab + B]^2 = n_p^2 (2bn_p + p\beta)^2 (u + \tilde{a})^2 (u + \tilde{b})^2, \quad (\text{E.61})$$

onde podemos chamar \tilde{a} e \tilde{b} de

$$\tilde{a} = \frac{n_b}{n_p} \quad (\text{E.62})$$

$$\tilde{b} = \frac{2n_b b}{2n_p + p\beta}. \quad (\text{E.63})$$

Portanto, escrevemos I_{1x}^M da seguinte forma

$$I_{1x}^M = -\frac{n_b}{2\pi^4 (2bn_p + p\beta)^2} \int_1^{+\infty} \frac{(u^2 - 1)}{(u + \tilde{a})^2 (u + \tilde{b})^2} du, \quad (\text{E.64})$$

A integral (E.64) é tabelada, o resultado nela é :

- Integral (E.65)

$$\int_1^\infty \frac{u^2 - 1}{(u+a)^2(u+c)^2} du = -\frac{1}{a^3 + 3c^2a - c^3 - 3a^2c} \left\{ -a^2 + \right. \\ \left. + 2\ln(a+1)ca + \right. \\ \left. + 2a - 2\ln(1-c)ca + c^2 - 2\ln(1+c) \right\} \quad (\text{E.65})$$

$$= -\frac{1}{a^3 + 3c^2a - c^3 - 3a^2c} \left\{ -a^2 + \right. \\ \left. + 2\ln(a+1)[ca - 1] + \right. \\ \left. + 2\ln(1+c)[1 - ca] + 2a + c^2 - 2c \right\} \quad (\text{E.66})$$

$$= -\frac{1}{a^3 + 3c^2a - c^3 - 3a^2c} \left\{ 2[ca - 1] + \right. \\ \left. + (\ln(a+1) - \ln(c+1)) + \right. \\ \left. + a(2-a) - c(2-c) \right\} \quad (\text{E.67})$$

$$= -\frac{1}{(a-c)^3} \left\{ 2[ca - 1] (\ln(a+1) + \right. \\ \left. - \ln(c+1)) + \right. \\ \left. + a(2-a) - c(2-c) \right\} \quad (\text{E.68})$$

$$= -\frac{1}{(a-c)^3} \left\{ 2[ca - 1] \ln\left(\frac{a+1}{c+1}\right) + \right. \\ \left. + a(2-a) - c(2-c) \right\}, \quad (\text{E.69})$$

a equação (E.65) também é a mesma equação (4.85) do capítulo (4).

- Para a a integral (E.70), temos o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{(u^2 + 1)}{(u + a)^2(u + c)^2} du &= -\frac{1}{(1 + c)(1 + a)(a - c)^3} \left\{ - (a - c) \times \right. \\
&\times (a^2 + a^2c + ac^2) + \\
&+ 2 - \ln(1 + c) \left[2(1 + c)(1 + a)(1 + ac) \right] + \\
&+ \left. \ln(1 + a) \left[2(1 + c)(1 + a)(1 + ac) \right] \right\} \quad (\text{E.70})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(1 + c)(1 + a)(a - c)^3} \left\{ - (a - c)(a^2a^2c + \right. \\
&+ a + ac^2 + c^2 + c) + 2 \\
&+ (1 + c)(1 + a)(1 + ac) \times \\
&\times \left. \left[\ln(1 + a) - \ln(1 + c) \right] \right\} \quad (\text{E.71})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(1 + c)(1 + a)(a - c)^3} \left\{ - (a - c) \left[(1 + a)c^2 + \right. \right. \\
&+ (a^2 + 1)c + a(a + 1) + \\
&+ \left. \left. 2 \right] + 2(1 + c)(1 + a)(1 + ac) \times \right. \\
&\times \left. \left[\ln(1 + a) - \ln(1 + c) \right] \right\} \quad (\text{E.72})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(1 + c)(1 + a)(a - c)^3} \left\{ - (a - c) \times \right. \\
&\times \left[(1 + a)(c^2 + a) + \right. \\
&+ (a^2 + 1)c + 2(1 + c)(1 + a)(1 + ac) \times \\
&\times \left. \left[\ln(1 + a) - \ln(1 + c) \right] \right\} \quad (\text{E.73})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(1 + c)(1 + a)(a - c)^3} \left\{ - (a - c) \times \right. \\
&\times \left[(c^2 + a)(1 + a) + (a^2 + 1)c + \right. \\
&+ \left. \left. 2(1 + c)(1 + a)(1 + ac) \ln \left[\frac{(1 + a)}{(1 + c)} \right] \right] \right\}, \quad (\text{E.74})
\end{aligned}$$

obtemos o resultado, desta integral usando maplesoft onde $\beta = Q$, $n_p = n_1$ e $n_b = n_o$.

Assim, ficamos com \tilde{I}_{2x}^M

$$\tilde{I}_{2x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4} \int_1^{+\infty} du (u^2 - 1) \frac{1}{A^2 [A(2ib - d) + iB]^2}, \quad (\text{E.75})$$

podemos escrever os valores de A e B como

$$A = un_p + n_b \quad (\text{E.76})$$

$$B = up\beta, \quad (\text{E.77})$$

onde:

$$A^2 [A(2ib - d) + iB]^2 = (un_p + n_b)^2 [(un_p + n_b)(2ib - d) + iup\beta]^2, \quad (\text{E.78})$$

$$\begin{aligned} A^2 [A(2ib - d) + iB]^2 &= n_p^2 (2ibn_p - dn_p + ip\beta) \left(u + \frac{n_b}{n_p} \right) \times \\ &\times \left[u + \frac{(2ib - d)n_b}{(2ibn_p + ip\beta - dn_p)} \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{E.79})$$

em que os valores de \tilde{a} e \tilde{c}

$$\tilde{a} = \frac{n_b}{n_p} \quad (\text{E.80})$$

$$\tilde{c} = \frac{(2ib - d)n_b}{(2ibn_p + ip\beta - dn_p)}, \quad (\text{E.81})$$

$$A^2 [A(2ib - d) + iB]^2 = n_p^2 (-dn_p + 2ibn_p + ip\beta)^2 (u + \tilde{a})^2 (u + \tilde{c})^2, \quad (\text{E.82})$$

$$\tilde{I}_{2x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4 n_p^2 (-dn_p + 2ibn_p + ip\beta)^2} \times \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u + \tilde{a})^2 (u + \tilde{c})^2}. \quad (\text{E.83})$$

Assim, escrevendo I_{3x}^M temos

$$\tilde{I}_{3x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{\tilde{A}^2 [2\tilde{A} + B]^2}, \quad (\text{E.84})$$

podemos chamar os valores de \tilde{A} e B como,

$$A = un_p - n_b \quad (\text{E.85})$$

$$B = up\beta, \quad (\text{E.86})$$

onde:

$$\tilde{A} [2\tilde{A} + B]^2 = [(un_p - n_b)b + up\beta]^2, \quad (\text{E.87})$$

$$\tilde{A} \left[2\tilde{A}b + B \right]^2 = n_p^2 \left(u - \frac{n_b}{n_p} \right)^2 (2n_p b + p\beta)^2 \left[u - \frac{2bn_b}{2n_p b + p\beta} \right]^2, \quad (\text{E.88})$$

em que os valores de \tilde{a} e \tilde{b}

$$\tilde{a} = \frac{n_b}{n_p}, \quad (\text{E.89})$$

$$\tilde{c} = \frac{2bn_b}{2n_p b + p\beta}, \quad (\text{E.90})$$

$$\tilde{A} \left[2\tilde{A}b + B \right]^2 = n_p^2 (2n_p b + p\beta)^2 (u - \tilde{a})^2 \left[u - \tilde{b} \right]^2, \quad (\text{E.91})$$

$$\tilde{I}_{3x}^M = \frac{n_b}{2\pi^4 n_p^2 (2n_p b + p\beta)^2} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - \tilde{a})^2 (u - \tilde{b})^2}, \quad (\text{E.92})$$

obtemos o resultado, desta integral usando maplesoft onde $\beta = Q$, $n_p = n_1$ e $n_b = n_o$.

Agora, escrevendo I_{4x}^M , temos :

$$\tilde{I}_{4x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4} \text{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{\tilde{A}^2 \left[\tilde{A}(2ib - d) + iB \right]^2}, \quad (\text{E.93})$$

podemos chamar os valores de \tilde{A} e B como,

$$A = un_p - n_b, \quad (\text{E.94})$$

$$B = up\beta, \quad (\text{E.95})$$

onde:

$$\tilde{A} \left[\tilde{A}(2ib - d) + iB \right]^2 = (un_p - n_b) \left[(un_p - n_b)(2ib - d) + iup\beta \right]^2, \quad (\text{E.96})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} \left[\tilde{A}(2ib - d) + iB \right]^2 &= n_p^2 \left(u - \frac{n_b}{n_p} \right)^2 (2ibn_p - dn_p + ip\beta)^2 \times \\ &\times \left(u - \frac{2ibn_b - n_b d}{2ibn_p - dn_p + ip\beta} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

em que os valores de \tilde{a} e \tilde{d}

$$\tilde{a} = \frac{n_b}{n_p}, \quad (\text{E.98})$$

$$\tilde{d} = \frac{(2ib - d)n_b}{(2ib - d)n_p + ip\beta}, \quad (\text{E.99})$$

$$\tilde{A} \left[2\tilde{A}b + B \right]^2 = n_p^2 (2n_p b + p\beta)^2 (u - \tilde{a})^2 \left[u - \tilde{b} \right]^2, \quad (\text{E.100})$$

$$\tilde{I}_{4x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4 n_p^2 (2ib - dn_p + ip\beta)} \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - \tilde{a})^2 (u - \tilde{d})^2}, \quad (\text{E.101})$$

obtemos o resultado, desta integral usando maplesoft onde $\beta = Q$, $n_p = n_1$ e $n_b = n_o$.

Agora, para I_{5x}^M , temos

$$\tilde{I}_{5x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{A^2 [A(2ib + d) + iB]^2}, \quad (\text{E.102})$$

podemos escrever os valores de \tilde{A} e B como,

$$A = un_p + n_b, \quad (\text{E.103})$$

$$B = up\beta, \quad (\text{E.104})$$

onde:

$$A^2 [A(2ib + d) + iB]^2 = (un_p + n_b)^2 [(un_p + n_b(2ib + d) + ipu\beta)]^2, \quad (\text{E.105})$$

$$A^2 [A(2ib + d) + iB]^2 = n_p^2 \left(u + \frac{n_b}{n_p}\right)^2 [u(2ibn_p + dn_p + ip\beta) + 2ibn_b + n_b d]^2, \quad (\text{E.106})$$

$$\begin{aligned} A^2 [A(2ib + d) + iB]^2 &= n_p^2 (2ibn_p + ip\beta + n_p d)^2 (u + \tilde{a})^2 \times \\ &\times \left(u + \frac{2ibn_b}{2ibn_p + n_p d + ip\beta}\right)^2, \end{aligned} \quad (\text{E.107})$$

onde podemos chamar os valores de \tilde{a} e \tilde{h}

$$\tilde{a} = \frac{n_b}{n_p}, \quad (\text{E.108})$$

$$\tilde{h} = \frac{2ibn_b}{2ibn_p + n_p d + ip\beta}, \quad (\text{E.109})$$

$$\tilde{I}_{5x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4 n_p^2 (2ibn_p + ip\beta + n_p d)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u + \tilde{a})^2 (u + \tilde{h})^2}, \quad (\text{E.110})$$

adquirirmos o resultado, desta integral usando maplesoft onde $\beta = Q$, $n_p = n_1$ e $n_b = n_o$.

Logo, para I_{6x}^M , temos

$$\tilde{I}_{6x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4} \int_1^{+\infty} du (u^2 - 1) \left\{ \frac{1}{\tilde{A}^2 [\tilde{A}(2ib + d) + iB]^2} \right\}, \quad (\text{E.111})$$

podemos chamar os valores de \tilde{A} e B como,

$$A = un_p - n_b, \quad (\text{E.112})$$

$$B = up\beta, \quad (\text{E.113})$$

onde:

$$\tilde{A}^2 \left[\tilde{A}(2ib + d) + iB \right]^2 = [(un_p - n_b)(2ib + d) + ipu\beta]^2, \quad (\text{E.114})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^2 \left[\tilde{A}(2ib + d) + iB \right]^2 &= n_p^2 \left(u - \frac{n_b}{n_p} \right)^2 (2ibn_p + n_p d + ip\beta)^2 \times \\ &\times \left[u - \frac{2n_b ib + n_b d}{2ibn_p + n_p d + ip\beta} \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{E.115})$$

$$\tilde{A}^2 \left[\tilde{A}(2ib + d) + iB \right]^2 = n_p^2 (2ibn_p + n_p d + ip\beta)^2 (u - \tilde{a})^2 (u - \tilde{q})^2, \quad (\text{E.116})$$

onde podemos chamar os valores de \tilde{a} e \tilde{q}

$$\tilde{a} = \frac{n_b}{n_p} \quad (\text{E.117})$$

$$\tilde{q} = \frac{2n_b ib + n_b d}{2ibn_p + n_p d + ip\beta}, \quad (\text{E.118})$$

$$\tilde{I}_{6x}^M = \frac{n_b}{4\pi^4 n_p^4 (2ibn_p + n_p d + ip\beta)^2} \int_1^{+\infty} du \frac{(u^2 - 1)}{(u - \tilde{a})^2 (u - \tilde{q})^2}, \quad (\text{E.119})$$

este resultado, é obtido através das integrais (E.65) e (E.70) via maplesoft onde $\beta = Q$, $n_p = n_1$ e $n_b = n_o$. Para as integrais de contribuição térmica: I_{2x}^M , vamos aplicar teorema dos resíduos do Apêndice (A) para resolvemos as integrais e ficamos com o seguinte resultado:

$$I_{21x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{[A(x - x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + x'^2} \quad (\text{E.120})$$

$$I_{21x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(x + ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.121})$$

Sendo assim, vamos calcular I_{22x}^M

$$I_{22x}^M = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{[A(x - x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + (x' - d)^2} \right\} \quad (\text{E.122})$$

$$I_{22x}^M = \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\pi}{[A(x - d + ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.123})$$

Agora, é a vez de I_{23x}^M

$$I_{23x}^M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{\tilde{A}^2} \frac{1}{[\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + x'^2} \right\}, \quad (\text{E.124})$$

$$I_{23x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(x+ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.125})$$

O mesmo procedimento, para I_{24x}^M

$$I_{24x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ \frac{1}{[\tilde{A}(x-x') + iB]^2} \frac{b}{b^2 + (x'-d)^2} \right\}, \quad (\text{E.126})$$

$$I_{24x}^M = \frac{1}{\tilde{A}^2} \left\{ \frac{\pi}{[\tilde{A}(x-d+ib) + iB]^2} \right\}. \quad (\text{E.127})$$

onde,

- Ou seja, I_{23x}^M é I_{21x}^* trocado A por \tilde{A} ;
- Ou seja, I_{24x}^M é I_{21x}^* trocado A por \tilde{A} .

Enfim, encerramos com os procedimentos dos cálculos em todos os apêndices.

Referências Bibliográficas

- [1] DI SIA, P. On the philosophy of mind, quantum physics and metaphysics of the uni-multiverse. *On the Philosophy of Mind, Quantum Physics and Metaphysics of the Uni-multiverse*, p. 161–174, 2019.
- [2] BOYER, T. H. The classical vacuum. *Scientific American*, v. 253, n. 2, p. 70–79, 1985.
- [3] REYNAUD, S.; LAMBRECHT, A.; GENET, C.; JAEKEL, M.-T. Quantum vacuum fluctuations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IV-Physics*, v. 2, n. 9, p. 1287–1298, 2001.
- [4] GRAHAM, P. W.; HARNIK, R.; RAJENDRAN, S. Observing the dimensionality of our parent vacuum. *Physical Review D*, v. 82, n. 6, p. 063524, 2010.
- [5] CONSOLI, M.; MATHESON, C.; PLUCHINO, A. The classical ether-drift experiments: a modern re-interpretation. *The European Physical Journal Plus*, v. 128, n. 7, p. 1–38, 2013.
- [6] DAVIES, P. Out of the ether: the changing face of the vacuum. *New Scientist*, v. 212, n. 2839, p. 50–52, 2011.
- [7] BRADLEY, R. T. Values, agency, and the theory of quantum vacuum interaction. In: *Brain and values*. Psychology Press, 2018. p. 471–504.
- [8] GEA-BANACLOCHE, J.; SCULLY, M.; ZUBAIRY, M. Vacuum fluctuations and spontaneous emission in quantum optics. *Physica Scripta*, Stockholm, v. 1988, n. T21, p. 81, 1988.
- [9] INTRAVAIA, F.; HENKEL, C.; ANTEZZA, M. Fluctuation-induced forces between

- atoms and surfaces: The casimir–polder interaction. In: *Casimir Physics*. Springer, 2011. p. 345–391.
- [10] DALVIT, D. A.; NETO, P. A. M.; MAZZITELLI, F. D. Fluctuations, dissipation and the dynamical casimir effect. In: *Casimir Physics*. Springer, 2011. p. 419–457.
- [11] MILONNI, P. W. *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic press, 2013.
- [12] DE LORENCI, V.; MOREIRA JR, E.; SILVA, M. Quantum brownian motion near a point-like reflecting boundary. *Physical Review D*, v. 90, n. 2, p. 027702, 2014.
- [13] YU, H.; FORD, L. Vacuum fluctuations and brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Physical Review D*, v. 70, n. 6, p. 065009, 2004.
- [14] DOROFEYEV, I.; FUCHS, H.; WENNING, G.; GOTSMANN, B. Brownian motion of microscopic solids under the action of fluctuating electromagnetic fields. *Physical review letters*, v. 83, n. 12, p. 2402, 1999.
- [15] GIOVANNETTI, V.; VITALI, D. Phase-noise measurement in a cavity with a movable mirror undergoing quantum brownian motion. *Physical Review A*, Woodbury, v. 63, n. 2, p. 023812, 2001.
- [16] HSIANG, J.-T.; WU, T.-H.; LEE, D.-S. Brownian motion of a charged particle in electromagnetic fluctuations at finite temperature. *Foundations of Physics*, v. 41, n. 1, p. 77–87, 2011.
- [17] SERIU, M.; WU, C.-H. Switching effect on the quantum brownian motion near a reflecting boundary. *Physical Review A*, Woodbury, v. 77, n. 2, p. 022107, 2008.
- [18] PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. Elsevier, 2016.
- [19] BESSA, C.; DE LORENCI, V.; FORD, L. Analog model for light propagation in semiclassical gravity. *Physical Review D*, v. 90, n. 2, p. 024036, 2014.
- [20] FORD, L. Stochastic spacetime and brownian motion of test particles. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 44, n. 10, p. 1753–1768, 2005.

- [21] DE LORENCI, V.; FORD, L. Subvacuum effects on light propagation. *Physical Review A*, Woodbury, v. 99, n. 2, p. 023852, 2019.
- [22] FLEISCH, D. *A student's guide to maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.
- [23] ORTIZ, O.; SASSE, F. Contração de lorentz, lei de gauss e lei de ampère. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, p. 278–281, 2003.
- [24] HERKENHOFF GOMES, A. Lei de gauss sem superfícies gaussianas. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 40, n. 1, 2017.
- [25] NAYFEH, M. H.; BRUSSEL, M. K. *Electricity and magnetism*. Courier Dover Publications, 2015.
- [26] EOM, H. J. Faraday's law of induction. In: *Primary Theory of Electromagnetics*. Springer, 2013. p. 95–111.
- [27] SERWAY, R. A.; JEWETT JR, J. W. *Física para cientistas e engenheiros: Eletricidade e magnetismo*. Cengage Learning, 2018.
- [28] REITZ, F.; MILFORD, J.; CHRISTY, R. *Foundations of electromagnetic theory*. 2003.
- [29] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. Fundamentos de física 3 eletromagnetismo. *Editora LTC, Rio de Janeiro*, 2009.
- [30] STENGEL, M.; SPALDIN, N. A.; VANDERBILT, D. Electric displacement as the fundamental variable in electronic-structure calculations. *Nature Physics*, v. 5, n. 4, p. 304–308, 2009.
- [31] GRIFFITHS, D. J. Magnetic fields in matter. *Introduction to Electrodynamics*, v. 4, p. 269, 1999.
- [32] XIANG, Q.; WEN, Z.; SUKEGAWA, H.; KASAI, S.; SEKI, T.; KUBOTA, T.; TAKANASHI, K.; MITANI, S. Nonlinear electric field effect on perpendicular magnetic anisotropy in fe/mgo interfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 50, n. 40, p. 40LT04, 2017.

- [33] KOVETZ, A. *Electromagnetic theory*. Oxford University Press Oxford, 2000. v. 975.
- [34] HEAVISIDE, O. *Electromagnetic theory*. American Mathematical Soc., 2003. v. 237.
- [35] HU, J.; YU, H. Manipulating lightcone fluctuations in an analogue cosmic string. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 777, p. 346–350, 2018.
- [36] PAN, K.-K.; WANG, Y.-L. Magnetic susceptibility of the strongly correlated hubbard model. *Physical Review B*, v. 43, n. 4, p. 3706, 1991.
- [37] MARDER, S. R.; PERRY, J. W. Molecular materials for second-order nonlinear optical applications. *Advanced Materials*, v. 5, n. 11, p. 804–815, 1993.
- [38] ASANO, M.; KOMORI, S.; IKUTA, R.; IMOTO, N.; ÖZDEMİR, Ş.; YAMAMOTO, T. Visible light emission from a silica microbottle resonator by second-and third-harmonic generation. *Optics Letters*, v. 41, n. 24, p. 5793–5796, 2016.
- [39] KAURANEN, M.; MAKI, J. J.; VERBIEST, T.; VAN ELSHOCHT, S.; PERSOONS, A. Quantitative determination of electric and magnetic second-order susceptibility tensors of chiral surfaces. *Physical Review B*, v. 55, n. 4, p. R1985, 1997.
- [40] MOLONEY, J.; NEWELL, A. *Nonlinear optics*. CRC Press, 2018.
- [41] FORD, L.; DE LORENCI, V.; MENEZES, G.; SVAITER, N. An analog model for quantum lightcone fluctuations in nonlinear optics. *Annals of Physics*, New York, v. 329, p. 80–92, 2013.
- [42] RAPTIS, T.; MINOTTI, F. Possible measurable effects of light propagating in electromagnetized vacuum, as predicted by a scalar tensor theory of gravitation. *arXiv preprint arXiv:1305.7141*, 2013.
- [43] BEHRMANN, G.; WYSS, K.; WEISS, J.; SCHRAUDOLPH, M.; NEUHOLD, S.; SMAJIC, J. Signal delay effects of solid dielectrics on time-of-flight measurements in gis. *IEEE transactions on dielectrics and electrical insulation*, v. 23, n. 3, p. 1275–1284, 2016.
- [44] BESSA, C.; DE LORENCI, V.; FORD, L.; SVAITER, N. Vacuum lightcone fluctuations in a dielectric. *Annals of Physics*, New York, v. 361, p. 293–302, 2015.

- [45] MACKAY, T. G.; LAKHTAKIA, A. Simultaneous negative-and positive-phase-velocity propagation in an isotropic chiral medium. *Microwave and Optical Technology Letters*, v. 49, n. 6, p. 1245–1246, 2007.
- [46] MAMEDOV, N.; YAMAMOTO, N.; KUNIE, A. Light figures and group-to-phase velocity ratio in anisotropic media. *Japanese Journal of Applied Physics*, v. 40, n. 8R, p. 4938, 2001.
- [47] FORD, L.; SVAITER, N. Gravitons and light cone fluctuations. ii. correlation functions. *Physical Review D*, v. 54, n. 4, p. 2640, 1996.
- [48] BARCELÓ, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living reviews in relativity*, v. 14, n. 1, p. 1–159, 2011.
- [49] YU, H.; FORD, L. Light-cone fluctuations in flat spacetimes with nontrivial topology. *Physical Review D*, v. 60, n. 8, p. 084023, 1999.
- [50] HALL, J. S.; MCKEON, P.; SATYANARAYAN, L.; MICHAELS, J. E.; DECLERCQ, N. F.; BERTHELOT, Y. H. Minimum variance guided wave imaging in a quasi-isotropic composite plate. *Smart Materials and Structures*, v. 20, n. 2, p. 025013, 2011.
- [51] POPA, B.-I.; CUMMER, S. A. Determining the effective electromagnetic properties of negative-refractive-index metamaterials from internal fields. *Physical Review B*, v. 72, n. 16, p. 165102, 2005.
- [52] GODERIS, D.; VERBEURE, A.; VETS, P. Theory of quantum fluctuations and the onsager relations. *Journal of statistical physics*, v. 56, n. 5, p. 721–746, 1989.
- [53] VOGEL, W.; WELSCH, D.-G. *Quantum optics*. John Wiley & Sons, 2006.
- [54] BESSA, C.; DE LORENCI, V.; FORD, L.; RIBEIRO, C. Model for lightcone fluctuations due to stress tensor fluctuations. *Physical Review D*, v. 93, n. 6, p. 064067, 2016.
- [55] FEWSTER, C. J.; FORD, L. Probability distributions for quantum stress tensors measured in a finite time interval. *Physical Review D*, v. 92, n. 10, p. 105008, 2015.

- [56] FEWSTER, C. J.; FORD, L.; ROMAN, T. A. Probability distributions of smeared quantum stress tensors. *Physical Review D*, v. 81, n. 12, p. 121901, 2010.
- [57] LI, X.; ZHANG, J.; MA, H.; JIN, Z. Test and analysis of the optical kerr-effect in resonant micro-optic gyros. *IEEE Photonics Journal*, v. 6, n. 5, p. 1–7, 2014.
- [58] PAPADOPOULOS, M. G.; SADLEJ, A. J.; LESZCZYNSKI, J. *Non-linear optical properties of matter*. Springer, 2006.
- [59] BOYD, R. W.; SHI, Z.; DE LEON, I. The third-order nonlinear optical susceptibility of gold. *Optics Communications*, Amsterdam, v. 326, p. 74–79, 2014.
- [60] CHAKRABORTY, K.; KANEMITSU, S.; LI, J.; WANG, X. Manifestations of the parseval identity. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, v. 85, n. 9, p. 149–154, 2009.
- [61] SNEDDON, I. N. *Fourier transforms*. Courier Corporation, 1995.
- [62] JEFFREYS, H.; JEFFREYS, B.; SWIRLES, B. *Methods of mathematical physics*. Cambridge university press, 1999.
- [63] MOLONEY, J.; NEWELL, A. *Nonlinear optics*. CRC Press, 2018.
- [64] MANJAVACAS, A.; DE ABAJO, F. G. Thermal and vacuum friction acting on rotating particles. *Physical Review A*, Woodbury, v. 82, n. 6, p. 063827, 2010.
- [65] CHATE, P.; HANKARE, P.; SATHE, D. Characterization of cadmium selenide films for photovoltaic applications. *Journal of alloys and compounds*, v. 505, n. 1, p. 140–143, 2010.
- [66] JENSEN, B.; TORABI, A. Refractive index of hexagonal ii–vi compounds cdse, cds, and cdsexs 1–x. *JOSA B*, v. 3, n. 6, p. 857–863, 1986.
- [67] WANG, X.; DU, Y.; DING, S.; WANG, Q.; XIONG, G.; XIE, M.; SHEN, X.; PANG, D. Preparation and third-order optical nonlinearity of self-assembled chitosan/cdse-zns core-shell quantum dots multilayer films. *The Journal of Physical Chemistry B*, v. 110, n. 4, p. 1566–1570, 2006.
- [68] LEE, J. D. *Concise inorganic chemistry*. John Wiley & Sons, 2008.

- [69] ZARHRI, Z.; ABBASSI, A.; EZ-ZAHRAOUY, H.; EL AMRAOUI, Y.; BENYOUSSEF, A.; KENZ, A. E. Magnetic properties of transition metal-doped cdse. *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, v. 28, n. 7, p. 2155–2160, 2015.
- [70] KALYUZHNY, G.; MURRAY, R. W. Ligand effects on optical properties of cdse nanocrystals. *The Journal of Physical Chemistry B*, v. 109, n. 15, p. 7012–7021, 2005.
- [71] BEAULAC, R.; ARCHER, P. I.; OCHSENBEIN, S. T.; GAMELIN, D. R. Mn²⁺-doped cdse quantum dots: new inorganic materials for spin-electronics and spin-photonics. *Advanced Functional Materials*, v. 18, n. 24, p. 3873–3891, 2008.
- [72] BABAN, C.; RUSU, G.; PREPELITA, P. On the optical properties of polycrystalline cdse thin films. *Journal of Optoelectronics and Advanced materials*, v. 7, n. 2, p. 817–821, 2005.
- [73] KASHUBA, A.; ANDRIYEVSKY, B.; SEMKIV, I.; ILCHUK, H.; PETRUS, R.; SHYSHKOVSKYI, S. Calculation of the vibrational spectra of cdse and cds crystals with zinc blende structure. *Materials Today: Proceedings*, 2022.
- [74] QASRAWI, A.; KAYED, T.; ELSAYED, K. A. Al/cdse/gase/c resonant tunneling thin film transistors. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, v. 86, p. 124–128, 2017.
- [75] PAL, U.; SAMANTA, D.; GHORAI, S.; CHAUDHURI, A. Optical constants of vacuum-evaporated polycrystalline cadmium selenide thin films. *Journal of applied physics*, v. 74, n. 10, p. 6368–6374, 1993.
- [76] ÁVILA, G.; COMPLEXAS, V. Aplicações. *LTC Editora, Rio de Janeiro*, 2000.
- [77] GREENE, R. E.; KRANTZ, S. G. *Function theory of one complex variable*. American Mathematical Soc., 2006. v. 40.
- [78] JOLEVSKA-TUNESKA, B.; JOLEVSKI, I. Some results on the digamma function. *Appl. Math. Inform. Sci*, v. 7, n. 1, p. 167–170, 2013.