



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jaiane da Silva Santos

**Modos quase normais de um campo escalar  
massivo acoplado não-minimamente à gravidade  
no espaço-tempo do buraco negro auto-dual**

Campina Grande-Paraíba

Abril de 2021

Jaiane da Silva Santos

**Modos quase normais de um campo escalar massivo  
acoplado não-minimamente à gravidade no espaço-tempo  
do buraco negro auto-dual**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito e Dr. Messias de Brito Cruz (co-orientador), apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Campina Grande-Paraíba

Abril de 2021

S237m

Santos, Jaiane da Silva.

Modos quase normais de um campo escalar massivo acoplado não-minimamente à gravidade no espaço-tempo do buraco negro auto-dual / Jaiane da Silva Santos. – Campina Grande, 2021.

55 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, Prof. Dr. Messias de Brito Cruz".

Referências.

1. Física de Partículas. 2. Cosmologia 3. Gravitação. 4. Buracos Negros. 5. Modos Quase-normais. 6. Loop Quantum Gravity. 7. Campo Escalar Massivo. 8. Acoplamento Não-mínimo. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Cruz, Messias de Brito. III. Título.

CDU 539.12(043)

FICHA CATALOGráfICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
POS-GRADUACAO EM FISICA  
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

## FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E DISSERTAÇÕES

**JAIANE DA SILVA SANTOS**

**Modos quase normais de um campo escalar massivo acoplado não-minimamente à gravidade no espaço-tempo do buraco negro auto-dual**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 17/05/2021

Francisco de Assis de Brito  
Presidente da Comissão e Orientador

Messias de Brito Cruz  
Coorientador

Marcos Antonio Anacleto  
Examinador Interno

Morgana Lígia de Farias Freire  
Examinadora Externa



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 17/05/2021, às 21:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).

Documento assinado eletronicamente por **Messias de Brito Cruz, Usuário Externo**, em 18/05/2021,

*A Deus, a minha família e aos professores Francisco Brito e Messias de Brito Cruz, base para que este projeto se tornasse possível.*

# Agradecimentos

- A Deus, meu suporte maior que está comigo em todos os momentos.
- Aos meus pais, Maria e Jonas, por sempre me apoiarem e me darem forças para lutar pelos meus objetivos. Vocês são e sempre serão meus melhores exemplos e inspiração.
- À minha irmã, Joisiane, que, além de me apoiar, sempre me ajudou a rir das situações mais inusitadas possíveis. Nossa interação vai muito além de compartilharmos o dia a dia, segredos, felicidades e frustrações, inclui algo que só ocorre entre irmãos, a naturalidade da afinidade. Tenha certeza que me orgulho muito e sempre me orgulharei de quem você se tornou.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- Ao meu orientador, Professor Dr. Francisco de Assis de Brito, por aceitar me orientar na realização deste trabalho. Obrigada Professor pela paciência, presteza, conselhos, disponibilidade e por acreditar em mim.
- Ao meu co-orientador, Professor Dr. Messias de Brito Cruz, por aceitar colaborar com este trabalho. Muito Obrigada Professor, pelo apoio, pela confiança, por toda a paciência, disponibilidade e vontade de me ensinar e ajudar.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica de Física que contribuíram com a minha formação.
- Aos meus colegas de pós-graduação Vanessa, João Victor, Pedro Emanuel, Lineker Matheus e Júnior muito obrigada pela amizade, conversas e por tudo o que pude aprender na companhia de vocês.
- Aos meus amigos, Bruno Carvalho por todo apoio incansável durante essa jornada acadêmica e Ian Lopes pela ajuda no momento em que mais precisei. Obrigada pela ótima convivência.
- Aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram o andamento deste trabalho.

*“Direi do Senhor: Ele é o meu Deus,  
o meu refúgio,  
a minha fortaleza,  
e nele confiarei.”  
(Bíblia Sagrada, Salmos 91, 2)*

# Resumo

Neste trabalho, investigamos os modos quase normais para um campo escalar massivo com um acoplamento não-mínimo com a gravidade no espaço-tempo de um buraco negro quântico em loop, conhecido como buraco negro auto-dual. Dessa forma, calculamos as frequências características usando a abordagem WKB, onde podemos verificar uma forte dependência da massa do campo escalar, o parâmetro de acoplamento não mínimo com a gravidade, e os parâmetros do Loop Quantum Gravity. A partir de nossos resultados, podemos verificar que o buraco negro auto-dual é estável sob as perturbações escalares ao assumir pequenos valores para os parâmetros. Além disso, tal resultados nos dizem que os modos quase normais assumem valores diferentes para os casos em que a massa do campo é nulo e o acoplamento não mínimo assume  $\xi = 0$  e  $\xi = 1/6$ , ou seja, uma possível quebra da invariância conforme pode ser vista no contexto de Buraco Negro Auto-Dual.

**Palavras-chave:** Modos quase-normais, Loop quantum gravity , Campo escalar massivo, Acoplamento não-minímo.

# Abstract

In this work, we investigate the quasinormal modes for a massive scalar field with a nonminimal coupling with gravity in the spacetime of a loop quantum black hole, known as the Self-Dual Black Hole. In this way, we have calculated the characteristic frequencies using the WKB approach, where we can verify a strong dependence on the mass of scalar field, the parameter of nonminimal coupling with gravity, and the parameters of the Loop Quantum Gravity. From our results, we can check that the Self-Dual Black Hole is stable under the scalar perturbations when assuming small values for the parameters. Also, such results tell us that the quasinormal modes assume different values for the cases where the mass of field is null and the nonminimal coupling assumes  $\xi = 0$  and  $\xi = 1/6$ , i.e., a possible breaking of the conformal invariance can be seen in the context of Self-Dual Black Hole.

**Keywords:** Quasinormal modes, Loop Quantum Gravity, Massive scalar field, Nonminimal coupling.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Formação de Buracos Negros Gravitacionais. . . . .	29
Figura 2 – Evolução do Universo desde o Big Bang. . . . .	30
Figura 3 – Diagrama de Carter-Penrose para a métrica SDBH. O diagrama tem duas regiões assintóticas, sendo uma no infinito e a outra perto da origem, onde nenhum observador pode alcançar considerando um tempo finito. . . . .	38
Figura 4 – Gráfico do potencial efetivo. Este gráfico mostra o comportamento de $V_{\text{eff}}(r)$ para diferentes valores de massa do campo escalar: $\mu = 0.0, 0.1$ e $0.2$ . Aqui, assumimos os valores constantes $m = 1$ , $\xi = 0.1$ , $a_0 = \sqrt{3}/2$ , $l = 0$ e $P = 0.1$ . . . . .	45
Figura 5 – Gráfico do potencial efetivo. Este gráfico mostra o comportamento de $V_{\text{eff}}(r)$ para diferentes valores do acoplamento não-mínimo: $\xi = 0.0, 1/6, 1.0$ e $3.0$ . Aqui, assumimos os valores constantes $m = 1$ , $\mu = 0.1$ , $a_0 = \sqrt{3}/2$ , $l = 0$ e $P = 0.1$ . . . . .	45
Figura 6 – Gráfico do potencial efetivo dependendo da coordenada tartaruga. Este gráfico mostra o comportamento de $V_{\text{eff}}(x)$ para diferentes valores do número multipolo quântico: $\ell = 0, 1$ e $2$ com valores constantes $m = 1$ , $\mu = 0.1$ , $\xi = 0.1$ , $a_0 = \sqrt{3}/2$ e $P = 0.1$ . . . . .	46
Figura 7 – Gráfico do potencial efetivo dependendo da coordenada tartaruga com o comportamento de $V_{\text{eff}}(x)$ para diferentes valores do parâmetro polimérico: $P = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ e $0.9$ para os valores constantes $m = 1$ , $\mu = 0.1$ , $\xi = 0.1$ , $a_0 = \sqrt{3}/2$ e $\ell = 0$ . . . . .	47
Figura 8 – Gráficos para o comportamento dos QNMs considerando $l = 2$ e $\mu = 0.0; 0.1; 0.2$ e $0.3$ . No gráfico (a) é mostrada a parte real, enquanto a parte imaginária é mostrada em (b). . . . .	49
Figura 9 – Gráficos para o comportamento dos QNMs considerando $l = 2$ e $\xi = 0.0; 0.1; 1/6$ e $0.2$ . No gráfico (a) é mostrada a parte real, enquanto a parte imaginária é mostrada em (b). . . . .	50
Figura 10 – Gráficos para o comportamento dos QNMs considerando $l = 2$ e $P = 0.1; 0.2; 0.3$ e $0.4$ . No gráfico (a) é mostrada a parte real, enquanto a parte imaginária é mostrada em (b). . . . .	50

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação das soluções de buracos negros por massa, momento angular e carga elétrica. . . . .	30
Tabela 2 – Classificação dos buracos negros por faixa de massa solar $M_{\odot}$ . . . . .	30
Tabela 3 – QNMs fundamentais do SDBH para os parâmetros de valores constantes: $m = 1$ , $\ell = 0$ e $a_0 = \sqrt{3}/2$ . . . . .	48
Tabela 4 – Os primeiros QNMs para o SDBH considerando os parâmetros constantes: $m = 1$ , $a_0 = \sqrt{3}/2$ and $\ell = 1$ . . . . .	49

# Lista de símbolos

$\alpha$	Alpha
$\beta$	Beta
$\delta$	Delta
$\eta$	Eta
$\Gamma$	Gamma
$\lambda$	Lambda
$\mu$	Mu
$\nabla$	Nabla
$\nu$	Nu
$\omega$	Omega
$\Phi$	Phi
$\Psi$	Psi
$\rho$	Rho
$\sigma$	Sigma
$\theta$	Theta
$\xi$	Xi

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>O Espaço-tempo de Minkowski</b>	<b>15</b>
2.1.1	O grupo de Lorentz	16
2.1.2	Uma abordagem do princípio variacional para a mecânica relativística	17
<b>2.2</b>	<b>Princípios da Relatividade Geral</b>	<b>18</b>
2.2.1	Princípio de Mach	18
2.2.2	Princípio da Equivalência	18
<b>2.3</b>	<b>Equações de Einstein</b>	<b>20</b>
2.3.1	Interpretação das equações de campo de Einstein	22
2.3.2	Determinação, não-linearidade e diferenciabilidade	23
2.3.3	As equações de Conservação	24
<b>2.4</b>	<b>Propriedades do espaço-tempo curvo</b>	<b>25</b>
2.4.1	A estrutura causal do espaço-tempo	26
2.4.2	A equação de Palatini	26
<b>3</b>	<b>BURACOS NEGROS</b>	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>Formação e Classificação dos Buracos Negros</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>O espaço-tempo de Schwarzschild</b>	<b>31</b>
3.2.1	Dedução da métrica de Schwarzschild	31
3.2.2	Propriedades da Solução de Schwarzschild	32
3.2.3	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	34
3.2.4	Coordenadas de Kruskal-Szekeres	35
<b>3.3</b>	<b>Buraco Negro Auto-Dual</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>PERTURBAÇÃO DO BURACO NEGRO AUTO-DUAL</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>Teoria de campos em espaços-tempo curvos</b>	<b>39</b>
<b>4.2</b>	<b>Perturbações Escalares</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>MODOS QUASE NORMAIS</b>	<b>46</b>
<b>5.1</b>	<b>Método WKB</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>53</b>

# 1 Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (RG) é uma teoria desenvolvida por Albert Einstein no ano de 1915. A RG é aceita como a melhor descrição da gravitação. Uma das previsões mais marcantes da RG é a previsão dos Buracos Negros (BHs), que são objetos dos quais nada (nem mesmo sinais de luz) pode escapar depois de cruzar o horizonte de eventos. O interesse pelos BHs vai além da astrofísica porque eles foram apontados como possíveis objetos que podem ajudar a entender um dos mais intrigantes problemas na física teórica hoje em dia: a conciliação da física quântica e gravitação através de uma teoria da Gravidade Quântica (GQ). Porque é esperado que na presença de um campo gravitacional forte, a natureza quântica do espaço-tempo torna-se revelada.

Um dos principais candidatos para uma teoria da GQ é a Gravidade Quântica em Loop (LQG) [1], que concorre com a teoria das Cordas [2]. No contexto da LQG, é possível obter modelos teóricos interessantes que fornecem uma visão sobre as características quânticas de espaços-tempos revelados por BHs. Um cenário importante corresponde à versão quântica do Buraco Negro de Schwarzschild (SchBH), que é denominado Buraco Negro auto-dual (SDBH) [3]. A solução do SDBH tem uma propriedade muito interessante, a auto-dualidade. De onde tal propriedade, a singularidade física de BHs pode ser substituída por uma região assintoticamente plana, o que é um efeito esperado em regime de GQ.

Nos últimos anos, tem aumentado o interesse pelos BHs por causa das observações das Ondas Gravitacionais (GWs), originadas de uma fusão binária de BHs e estrelas de nêutrons. Essa classe de eventos tem sido observado com grande precisão através das colaborações LIGO<sup>1</sup> e Virgo<sup>2</sup> [4]. Essas GWs são devidas às perturbações dos BHs, uma vez que não podemos encontrar BHs completamente isolados no universo. Assim, os BHs estão sempre em estados perturbados devido à interação com outros objetos compactos em sua vizinhança, por exemplo, outros BHs ou estrelas de nêutrons. Além disso, as perturbações são caracterizadas por um conjunto de autovalores complexos (frequências) das equações de onda, que são chamadas de Modos Quase Normais (QNMs), e, portanto, a princípio, podem ser observadas através de experimentos com interferômetros gravitacionais.

Como mencionado anteriormente, os QNMs são valores complexos, onde as partes

<sup>1</sup> Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser (em inglês: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory - LIGO) é um projeto fundado em 1992 por Kip Thorne e Ronald Drever do Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech) e Rainer Weiss do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). Ele é patrocinado pela National Science Foundation (NSF).

<sup>2</sup> O Virgo é um grande interferômetro projetado para detectar Ondas Gravitacionais previstas pela Teoria da Relatividade Geral. Virgo é um interferômetro de Michelson que é isolado de distúrbios externos: seus espelhos e instrumentação são suspensos e seu raio laser opera no vácuo. Os dois braços do instrumento têm três quilômetros de extensão e estão localizados perto de Pisa, na Itália.

reais fornecem as frequências de oscilação, enquanto as partes imaginárias determinam as taxas de amortecimento. Os QNMs de BHs dependem apenas dos parâmetros dos BHs e não como eles foram perturbados. Assim, os QNMs são conhecidos, portanto, como a impressão digital de um BH. Os estudos dos QNMs são de grande interesse e importância em diferentes contextos. Por exemplo, no contexto da dualidade AdS/CFT, eles são estudados pela possibilidade de observar o anel quase normal dos BHs astrofísicos, quando se considera as propriedades termodinâmicas dos BHs [5]. Além disso, os QNMs perto de branas negras extremas também foram investigadas em [6].

Nos últimos anos, foi sugerido que os QNMs podem desempenhar um papel importante na compreensão dos aspectos quânticos das teorias da gravidade. Especialmente, no contexto de LQG, também foi sugerido que os QNMs podem ser usados para fixar o parâmetro Immirzi, um parâmetro que mede o quantum do espaço-tempo [7], uma questão fundamental que permanece em aberto neste campo. Neste contexto, os QNMs foram analisados para a solução SDBH, onde os autores consideraram as perturbações por campos escalares sem massa [8]. Além disso, considerando perturbações gravitacionais, análises semelhantes foram feitas em [9, 10], onde os resultados mostram pela primeira vez no contexto de BHs em LQG, uma quebra da isoespectralidade e; anda assim, no contexto da LQG, tem a análise dos QNMs para uma solução de buraco negro em rotação [11].

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise do espectro de QNMs para a métrica do SDBH com as perturbações através do campo escalar massivo acoplado de forma não mínima com a gravidade [12].

Alguns esforços nesse sentido foram considerados, por exemplo, análises de Modos Quase Normais de longa duração e a instabilidade no espaço-tempo de Reissner-Nordström [13]. Para calcular os QNMs, usaremos a abordagem WKB, que foi introduzida por Schutz e Will [14], e depois melhorada por Iyer e Will [15]. Neste contexto, estudaremos a influência dos parâmetros de LQG, a massa do campo escalar e o parâmetro não-mínimo nos QNMs e, conseqüentemente, na estabilidade da solução SDBH.

O Capítulo 2 faz uma abordagem da RG descrevendo alguns de seus princípios, bem como as equações de Einstein. No Capítulo 3 apresenta-se uma introdução a Buracos Negros, iniciamos com uma descrição da formação e classificação. Discute-se tanto o espaço-tempo de Schwarzschild na sua versão clássica, bem como auto-dual. O capítulo 4 descreve a introdução a TCEC, iniciando com o campo de Klein-Gordon no espaço-tempo plano e para espaços curvos mostrando as alterações necessárias na teoria. Então, incluindo as perturbações escalares tanto do buraco negro clássico de Schwarzschild quanto auto-dual (versão quântica do espaço-tempo de Schwarzschild). Obtém-se uma equação de onda tipo Schrodinger com um potencial efetivo de fundamental importância para os Modos Quase Normais. No Capítulo 5 desenvolve-se os Modos Quase Normais, obtidos por meio da abordagem WKB.

## 2 Relatividade Geral

No início do século XX a Teoria da Relatividade surgiu, revolucionando a Física existente até o momento [16]. O desenvolvimento da Relatividade Especial (RE) foi norteado por noções de que o espaço e o tempo seriam partes de uma entidade única e fundamental, o espaço-tempo [17, 18]. Essa teoria impunha que as leis da Física seriam as mesmas em todos os referenciais inerciais e que a velocidade da luz seria um limite natural e independente para estes tipos de referenciais. Sendo assim, confrontava as Leis de Newton, que segundo as mesmas, a interação gravitacional agiria instantaneamente. Assim, a ideia de unir a RE à gravitação foi uma das bases para o desenvolvimento da RG.

Albert Einstein propôs equações que consolidaram a RG como uma teoria da gravitação que é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Além disso, essa teoria mantinha as noções de causalidade e localidade da RE. Diversos testes e experimentos foram e ainda são feitos com essa teoria, por exemplo: mais recentemente, as Ondas Gravitacionais, com precisão experimental. Em 1916, a primeira solução para as equações de Einstein foi dada por Karl Schwarzschild [19] sendo o ponto de partida para a teoria dos Buracos Negros.

No presente capítulo discorremos sobre o espaço-tempo de Minkowski, os princípios da Relatividade Geral, as equações de Einstein, algumas propriedades do espaço-tempo curvo, a estrutura causal de espaço-tempo e finalizamos com uma breve discussão sobre a equação de Palatini.

### 2.1 O Espaço-tempo de Minkowski

Em 1908, o físico Hermann Minkowski forneceu uma interpretação geométrica para a TRR, argumentando que espaço e tempo não são entidades distintas, estando conectadas pelo invariante

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.1)$$

o espaço-tempo de Minkowski, ou simplesmente espaço-plano é definido como uma variedade quadridimensional dotada de uma métrica plana de assinatura -2 [20]. Então, por definição como a métrica é plana, existe um sistema de coordenadas especial cobrindo toda a variedade em que a métrica é diagonal, com elementos diagonais iguais a  $\pm 1$ . Por convenção os índices latinos minúsculos vão de 0 a 3. O sistema de coordenadas especial é chamado de coordenadas de Minkowski e é escrito como:

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z). \quad (2.2)$$

onde  $t$  é a coordenada temporal e  $(x, y, z)$  são as coordenadas espaciais.

Adotamos a convenção de sinais em que o elemento de linha de Minkowski assume a forma:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.3)$$

Deste modo, podemos escrever a Equação (2.3) na forma tensorial, dada por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

onde sempre que tomarmos  $\eta_{\mu\nu}$  dada a seguir estamos nos referindo a métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.5)$$

Se usar algum outro sistema de coordenadas geral, deve-se escrever a métrica na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.6)$$

### 2.1.1 O grupo de Lorentz

As transformações de Lorentz são definidas como aquelas transformações homogêneas lineares, ou seja,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \rightarrow L \quad (2.7)$$

onde  $L$  é uma matriz inversível das coordenadas de Minkowski que deixa a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  invariante. Da equação (2.7) obtém-se que:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = L^\mu_\nu, \quad (2.8)$$

e substituindo na fórmula de transformação para a métrica

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} g_{\sigma\alpha}(x), \quad (2.9)$$

obtemos

$$L^\mu_\sigma L^\nu_\alpha \eta_{\mu\nu} = \eta_{\sigma\alpha}. \quad (2.10)$$

Uma vez que, a métrica permanece invariante e

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} g_{\sigma\alpha}(x'), \quad (2.11)$$

as transformações de Lorentz são isometrias <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> É uma transformação que deixa  $g_{\mu\nu}$  invariante de forma.

As transformações de Lorentz preservam comprimentos e produtos internos dos vetores e formam um grupo chamado Grupo de Lorentz  $L$ . O elemento de identidade do grupo de Lorentz é a  $\delta_{\nu}^{\mu}$  (delta de Kronecker) e o elemento inverso é dado pela matriz inversa. A matriz  $L_{\nu}^{\mu}$  é inversível, porque se tomar os determinantes de cada lado da Equação (2.9), obtemos

$$(\det L_{\nu}^{\mu})^2 = 1 \Rightarrow \det L_{\nu}^{\mu} = \pm 1, \quad (2.12)$$

e, portanto, a matriz não é singular. Ao definir  $\sigma = \alpha = 0$ , encontra-se

$$(L_0^0)^2 - [(L_0^1)^2 + (L_0^2)^2 + (L_0^3)^2] = 1, \quad (2.13)$$

do qual segue-se que  $(L_0^0)^2 \geq 1$  e então  $L_0^0 \geq 1$  ou  $L_0^0 \leq -1$ . Dividindo as transformações de Lorentz em quatro classes separadas, dependendo se  $\det L_{\nu}^{\mu} = \pm 1$ , então  $L_{\nu}^{\mu}$  é chamado de preservação adequada ou orientação. Se  $L_0^0 \geq 1$ , então  $L_{\nu}^{\mu}$  é chamado de preservação ortócrona ou orientação temporal.

### 2.1.2 Uma abordagem do princípio variacional para a mecânica relativística

Ao considerar uma partícula livre na mecânica relativística movendo-se em uma curva

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\tau),$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio visto que  $\tau$  é um parâmetro afim, a assumir que  $S$ , ou seja, ação é dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

sendo  $s$  o elemento de linha e  $S$  pode também ser escrita como:

$$S = -\mu \int_{t_1}^{t_2} ds, \quad (2.14)$$

onde  $\mu$  é uma constante a ser determinada. Com as coordenadas de Minkowski, a ação é dada por:

$$S = -\mu \int_{t_1}^{t_2} (\eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

onde o ponto denota diferenciação em relação a  $\tau$ . A lagrangiana  $\mathcal{L}$ , portanto, possui a forma

$$\mathcal{L} = -\mu (\eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}}$$

e as equações de Euler-Lagrange são escritas como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) = 0,$$

resultando em

$$\frac{d[\mu(\eta_{\sigma\alpha} \dot{x}^{\sigma} \dot{x}^{\alpha})^{\frac{-1}{2}}]}{d\tau} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} = 0. \quad (2.15)$$

Usando o fato que

$$\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = 1,$$

em unidades relativísticas, as equações de campo (2.14) reduzem-se a  $\bar{x}^\mu = 0$ , que são as equações da geodésica padrão em coordenadas de Minkowski.

## 2.2 Princípios da Relatividade Geral

Trata-se de três dos cinco princípios considerados como principais para a construção da Teoria da Relatividade Restritiva, que são dados a seguir.

### 2.2.1 Princípio de Mach

Para Mach movimento possui significado se for relativo à alguma coisa. Por exemplo, em um universo vazio, um corpo não poderia estar em movimento, uma vez que não existe nada para que o movimento seja relativo. Os efeitos inerciais são determinados pela matéria do universo. No universo tem matéria concentrada nas estrelas então, as estrelas fixas determinam as qualidades do referencial.

Para Mach, tem-se a importância da massa em relação à inércia. Como ilustração considerando uma situação extrema, onde há apenas uma partícula em um universo vazio esta não sentirá efeito inercial algum. Apenas quando há outra partícula, por menor que seja sua massa, é que os efeitos seriam sentidos.

Pode-se resumir o princípio de Mach em 3:

1. A distribuição de matéria determina a geometria;
2. Ausência de matéria implica ausência de geometria;
3. Corpo em universo vazio não sente efeitos inerciais.

As ideias de Mach foram de influência para a RG.

### 2.2.2 Princípio da Equivalência

O princípio da equivalência estabelece que a massa inercial é equivalente a massa gravitacional. Isso se deve ao fato da aceleração de objetos em queda livre, ou seja, sob ação apenas da força gravitacional exercida pela Terra, ser a mesma, independente de suas massas. Esse resultado – massa inercial = massa gravitacional – é conhecido com precisão experimental da ordem de  $10^{12}$ . Por outro lado, a massa gravitacional, sabe-se que são iguais por causa do comportamento de dois corpos se atraindo gravitacionalmente. As forças que um faz no outro são iguais em módulo, pela terceira lei de Newton. Como sabe-se a expressão das forças agindo em cada uma, por meio delas chega-se na igualdade entre

estes dois tipos de massa. Desta forma, os três tipos de massa anteriormente mencionados são equivalentes, sendo chamados de massa de um objeto.

Einstein utilizou a contribuição de Ernst Mach que já foi abordada anteriormente, de Clifford e Riemann, principalmente para a definição da gravidade como resultado da geometria do espaço-tempo.

Para uma melhor compreensão do princípio de equivalência pode-se dividir este em quatro pontos:

1. O movimento de uma partícula teste sob ação da gravidade independe de sua massa.

Também conhecido como princípio de equivalência forte.

2. Gravidade se acopla com tudo.

As afirmações restantes do princípio de equivalência estão relacionadas aos *Gedankenexperimente* de Einstein sobre referenciais inerciais e não inerciais aplicados a famosa situação de um elevador ou nave.

3. Não é possível distinguir um referencial em queda livre sem rotação em um campo gravitacional de um referencial inercial na ausência de campo gravitacional por meio de experimentos locais.

Einstein notou que a força peso (ou seja, força gravitacional), assim como forças inerciais, dependem apenas da massa dos objetos sob ação das mesmas.

4. Um referencial em movimento uniformemente acelerado em relação a um referencial inercial é idêntico a um referencial em repouso sob ação de campo gravitacional.

Primeiramente, tais afirmações não dizem respeito à curvatura do espaço-tempo, não justificando o que fora chamado de geometrização da gravidade. Contudo com base nesses últimos princípios, foram previstos dois fenômenos relacionados a curvatura do espaço-tempo.

Inicialmente, um feixe de luz se movendo horizontalmente entra no elevador acelerado para cima. Para o observador dentro do elevador, este feixe de luz se moverá numa parábola. A gravidade deveria curvar a luz da mesma forma, pelo princípio de equivalência, já que o observador no elevador não pode distinguir entre estar em repouso em campo gravitacional ou em aceleração para cima.

É possível também fazer essa análise usando a expressão para o movimento de um corpo com respeito a um referencial não inercial, cuja forma é

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.16)$$

O segundo termo do lado esquerdo se refere às forças inerciais. Como visto, a força

gravitacional tem origem inercial. Pelo princípio de equivalência, ao tratar a situação do elevador sob ação da gravidade,  $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$  deve conter informações a respeito do campo gravitacional (assim como continha da aceleração do referencial não-inercial no caso do elevador acelerado). Desta forma a métrica  $g_{\mu\nu}$ , cuja conexão é  $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ , não poderá mais ser de um espaço plano, porque isso tornaria a situação indistinguível da não-gravitacional.

Como o termo é referente a forças e envolve as primeiras derivadas da métrica  $g_{\mu\nu}$ , pode-se tomar os termos da métrica como potenciais. Comparando com a mecânica newtoniana, cuja equação de campo envolve a equações diferenciais de segunda ordem do potencial, espera-se construir equações diferenciais de segunda ordem envolvendo a métrica  $g_{\mu\nu}$  em se tratando da RG [20].

O segundo efeito é o de desvio para o vermelho de origem gravitacional. Caso houvesse uma fonte de luz direcionada para cima, partindo do chão do elevador acelerado para cima, o observador veria que o comprimento de onda desta luz aumentaria – ou seja, desviaria para o vermelho – efeito que já era conhecido na física clássica, o efeito Doppler para a luz. Por meio do princípio de equivalência o mesmo efeito deveria acontecer para um feixe de luz que estivesse saindo de uma região de campo gravitacional mais forte (como saindo radialmente da superfície da Terra em direção ao espaço) [21].

O princípio da equivalência declara que o campo gravitacional é localmente equivalente a um referencial não inercial. Desse modo, o campo gravitacional passa a ser descrito pela métrica e como consequência o elemento de linha  $ds$  entre dois pontos vizinhos no espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.17)$$

onde se está adotando a notação em que índices repetidos indicam soma sobre os índices. Mantém-se essa convenção em todo o texto.

Ambos os efeitos, citados acima, são importantes para a confirmação experimental da RG e serão abordados matematicamente no capítulo sobre a Solução de Schwarzschild.

A relatividade especial colocou em patamar de igualdade todos os referenciais. A relatividade geral tem o intuito de fazer isso para todos os referenciais. Todos os observadores são equivalentes: isso é possível devido o espaço-tempo não ser mais plano, pois ele deixa de ter uma métrica referencial, que era a de Minkowski. Dessa forma, quaisquer mudanças de coordenadas são possíveis. Sendo assim qualquer observador, em qualquer sistema de coordenadas, pode descobrir as leis da Física.

## 2.3 Equações de Einstein

A interação gravitacional é uma consequência da ação de um campo escalar  $\Phi$  que foi criado por uma distribuição espacial da matéria com densidade de massa  $\rho$ . Assim o

campo gravitacional é determinado pela seguinte equação:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho. \quad (2.18)$$

As equações de campo para a gravitação são mais complexas do que as para o eletromagnetismo. As equações de Maxwell são lineares por que o campo eletromagnético não carrega carga em si, porém, o campo gravitacional carrega energia e momento. Sendo assim, as equações de campo gravitacionais serão diferenciais parciais não lineares e a não linearidade representa o efeito da própria gravitação. Além do mais, essas equações devem apresentar características semelhantes à Equação (2.18), ou seja, o lado direito de cada uma delas deve conter um tensor que represente a quantidade de matéria e energia, denominado de Tensor Energia-Momento, representado por  $T_{\mu\nu}$ , e do lado esquerdo de cada equação, deve haver um tensor de segunda ordem construído em termos de derivadas segundas do tensor  $g_{\mu\nu}$ .

As equações da RG relacionam a curvatura do espaço-tempo, representada pelo tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , com a densidade de matéria e energia presentes, representada pelo tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  [22, 23]. Assim, podemos escrever

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de Ricci e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento. Escrevemos  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\rho\mu}^\lambda, \quad (2.20)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu, \quad (2.21)$$

sendo  $g^{\mu\nu}$  o inverso do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , tal que  $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma}g^{\lambda\mu} = \delta_\sigma^\mu$  ou também  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \mathbb{I}$  e  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  o símbolo de Christoffel, que é dado por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{g^{\alpha\delta}}{2}(\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}). \quad (2.22)$$

É conhecido também como conexão por que relaciona pontos diferentes de uma trajetória no espaço-tempo curvo. A curvatura do espaço-tempo está ligada ao comportamento do tensor métrico.

O tensor métrico é simétrico e pode ser escrito como o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.23)$$

por que fornece a distância infinitesimal entre pontos do espaço-tempo. Ele é utilizado para classificar objetos do espaço-tempo<sup>2</sup> e para subir ou abaixar os índices dos tensores<sup>3</sup>.

O tensor de Ricci origina-se da contração  $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$  do tensor de Riemann, ou seja:  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$ . A curvatura de um espaço-tempo é diretamente relacionada ao tensor de Riemann, sendo o mesmo nulo para todo espaço-tempo plano.

O tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  representa o conteúdo de energia e momento age como fonte da curvatura do espaço-tempo. A sua determinação é complexa, assim usamos aproximações, como por exemplo a de um fluido perfeito. Um fluido perfeito pode ser considerado como um fluido representando em seu referencial inercial local, cujas componentes  $T_{j0}$  e  $T_{0j}$  são nulas e que pode ser completamente caracterizada por sua pressão  $p$  e sua densidade de energia  $\rho$ . Dessa forma, em termos de sua 4-velocidade  $u_{\mu}$  podemos escrever

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Para o espaço-tempo vazio,  $T_{\mu\nu} = 0$ , pela Equação (2.24) deduz-se as equações de campo de Einstein em um espaço vazio:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.25)$$

Resolver as equações de Einstein significa encontrar a forma do tensor métrico. Porém, como são equações diferenciais não lineares, suas soluções não são facilmente obtidas. Para isso, deve-se atentar às simetrias do espaço-tempo como veremos com a dedução da métrica de Schwarzschild no capítulo 3.

### 2.3.1 Interpretação das equações de campo de Einstein

As equações de campo completas (em unidades relativísticas) são

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

com as seguintes propriedades

<sup>2</sup> Um objeto do espaço-tempo, um 4-vetor  $V^{\mu}$  ou uma curva  $x^{\mu}(\alpha)$  com vetor tangente  $V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\alpha}$ , pode ser classificado como

- *Tipo Tempo*  $\Rightarrow g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} < 0$ ,
- *Tipo Luz ou Tipo Nulo*  $\Rightarrow g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = 0$
- *Tipo Espaço*  $\Rightarrow g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} > 0$

<sup>3</sup> A representação de um 4-vetor  $V$  pode ser feita com sua forma covariante  $V_{\mu}$  (índices para baixo) ou contravariante  $V^{\mu}$  (índices para cima). Passamos de uma forma para outra utilizando o tensor métrico:  $V_{\mu} = g_{\mu\nu}V^{\nu}$  ou  $V^{\mu} = g^{\mu\nu}V_{\nu}$ .

1. São equações diferenciais para encontrar o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de um determinado tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . O caso mais importante das equações é quando  $T_{\mu\nu} = 0$ , neste caso encontra-se soluções no vácuo.
2. O tensor de energia-momento pode ser lido correspondendo a um determinado tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .
3. consistem em dez equações conectando vinte quantidades, a saber, as dez componentes de  $g_{\mu\nu}$  e as dez componentes de  $T_{\mu\nu}$ .

As propriedades necessárias para encontrar  $G_{\mu\nu}$  são tais que:

- é um tensor (por definição);
- tem apenas termos com  $N = 2$  derivadas da métrica;
- $T_{\mu\nu}$  é simétrico, então,  $G_{\mu\nu}$  também é;
- $T_{\mu\nu}$  é conservado, então,  $G_{\mu\nu}$  também é.

### 2.3.2 Determinação, não-linearidade e diferenciabilidade

Considerando o regime de campo no vácuo, ou seja,

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.27)$$

para  $g_{\mu\nu}$ . No entanto, as equações não são independentes, mas são conectadas por restrições diferenciais por meio das identidades contraídas de Bianchi<sup>4</sup>, ou seja

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0. \quad (2.28)$$

Dessa, forma temos um problema de indeterminação, uma vez que, existem menos equações do que incógnitas. Não se pode esperar determinação completa para qualquer  $g_{\mu\nu}$  definido, uma vez que, eles podem ser transformados com liberdade quádrupla por uma transformação de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x) (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

As equações de campo são muito difíceis de manusear porque não são lineares.

<sup>4</sup> O tensor de curvatura obedece importantes identidades diferenciais dadas por  $\nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} + \nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} \equiv 0$  [20].

### 2.3.3 As equações de Conservação

Considerando o movimento de uma partícula ou fóton em um campo gravitacional ela é a própria partícula ou fóton de teste é parte da energia e da matéria presente e, portanto, deve estar contida no tensor de energia-momento. Esse tensor, por sua vez, sendo o termo fonte nas equações de campo, determina a geometria do espaço-tempo e em particular sua estrutura geodésica. Nesse sentido, o movimento de uma partícula de teste deve de alguma forma estar contido nas equações de campo pelas identidades de Bianchi, uma vez que levam à existência de

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.30)$$

a saber, as equações de conservação.

Como exemplo, a investigação as equações para uma distribuição de poeira tem-se

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^{\mu} u^{\nu}. \quad (2.31)$$

Então, as equações de conservação (2.30) exigem que

$$\nabla_{\nu} [\rho_0 u^{\mu} u^{\nu}] = 0. \quad (2.32)$$

Assim, escrevendo o termo entre colchetes de (2.32) como um produto  $[(\rho_0 u^{\nu}) u^{\mu}]$ , aplicamos a regra de Leibniz a este produto, nos levando a:

$$u^{\mu} \nabla_{\nu} (\rho_0 u^{\nu}) + \rho_0 u^{\nu} (\nabla_{\nu} u^{\mu}) = 0, \quad (2.33)$$

Em seguida contraímos (2.33) com  $u^{\mu}$  e usamos o resultado

$$u^{\mu} u_{\mu} = 1 \Rightarrow u_{\mu} (\nabla_{\nu} u^{\mu}) = 0, \quad (2.34)$$

onde substituindo (2.34) em (2.33), verificamos que o segundo termo desaparece, deixando

$$\nabla_{\nu} (\rho_0 u^{\nu}) = 0. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.34) em (2.32), novamente, e dividindo por  $\rho_0 \neq 0$ , obtém-se

$$u^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu} = 0, \quad (2.36)$$

que é a condição para  $u^{\mu}$  ser tangente a uma geodésica.

As equações da conservação precisam de movimento geodésico para as partículas de poeira.

A seguir relata-se sobre algumas propriedades do espaço-tempo curvo.

## 2.4 Propriedades do espaço-tempo curvo

Tendo conhecimento das equações de Einstein dadas na seção anterior, que construam o espaço-tempo curvo, analisa algumas de suas propriedades, que diferem de suas equivalentes espaço-tempo [22, 23]. A definição do Espaço-tempo é dada como o par  $(M, g_{\mu\nu})$  com  $M$  sendo uma variedade diferenciável real, suave e munida de uma métrica  $g_{\mu\nu}$  Lorentziana.

Entende-se por variedade  $M$  uma superfície que possui dimensão  $n$  e que suporta estruturas diferenciáveis. Os pontos de uma variedade podem ser nomeados por  $n$  coordenadas reais  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Já a métrica Lorentziana é aquela que, quando diagonalizada, possui pelo menos uma componente negativa e as outras todas positivas. No caso 4-dimensional temos  $(-, +, +, +)$ . Consideramos métricas obtidas por meio das equações de Einstein, ou seja, a partir da Equação (2.25).

Dada a definição do objeto a primeira propriedade é a derivada covariante que é a representação de derivada num espaço-tempo curvo. Definida, para dois 4-vetores  $V^\nu$  e  $V_\nu$ , como:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma \quad (2.37)$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V_\sigma \quad (2.38)$$

e pode ser generalizada para um tensor arbitrário  $T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}$  da forma

$$\nabla_\sigma T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = \partial_\sigma T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{v_1 \dots v_l}^{\lambda \dots \mu_k} + \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_k} T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \lambda} - \Gamma_{\sigma v_1}^\lambda T_{\lambda \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} - \dots - \Gamma_{\sigma v_l}^\lambda T_{v_1 \dots \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_k} \quad (2.39)$$

Sabendo a noção de derivada covariante, podemos nos restringir ao que chamamos de *transporte paralelo* que o resume-se a manter um tensor constante ao longo de um caminho. Mais especificamente, dado um 4-vetor tangente  $t^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}$  a uma curva  $x^\sigma(\lambda)$  e um tensor arbitrário  $T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}$ , o transporte paralelo desse tensor é tal que

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = t^\sigma \nabla_\sigma T_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = 0. \quad (2.40)$$

O termo  $\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma$  é definido como *derivada covariante direcional* e pode ser escrito como  $\nabla_\lambda = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma$ .

Por último, a noção de trajetória em RG, que é dada pelas geodésicas que por sua vez são uma generalização de uma linha reta no espaço-tempo curvo. Pode-se definir uma geodésica como uma curva  $x^\mu(\lambda)$  ao longo do qual seu 4-vetor tangente  $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  e paralelamente transportado, cuja representação algébrica é

$$t^\nu \nabla_\nu t^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.41)$$

O parâmetro de dependência  $\lambda$  é chamado de parâmetro afim.

Dadas essas propriedades, vamos apresentar uma discussão breve sobre a estrutura causal do espaço-tempo.

### 2.4.1 A estrutura causal do espaço-tempo

A RG se baseia na causalidade como o fato de que eventos futuros são consequências de eventos passados. Dessa forma, mantém-se a ideia da RE de que nenhum sinal pode viajar mais rápido do que a luz fazendo com que qualquer trajetória que carregue informação seja tipo tempo (para partículas com massa) ou tipo luz (para partículas sem massa), nunca tipo espaço [22, 23, 24, 25]. Pode-se visualizar a causalidade na RE, através dos cones de luz em cada evento, ponto do espaço-tempo. Localmente a causalidade, como é entendida em RG, é idêntica em RE. As diferenças residem nas definições globais devido a peculiaridades da geometria do espaço-tempo curvo, como as singularidades<sup>5</sup>.

Para lidarmos com a causalidade precisamos definir que tipo de curvas que a obedecem. Essas são as curvas causais. Curvas  $x^\mu(\alpha)$  tais que para cada ponto  $P \in x^\mu$  seu vetor tangente  $t^\mu$  seja tipo tempo ou tipo luz. Dizemos que uma curva, causal ou qualquer, aponta para o futuro ou passado e seus vetores tangentes apontarem para o futuro ou para o passado, respectivamente.

### 2.4.2 A equação de Palatini

Muitas identidades de tensores são melhor derivadas usando a técnica de coordenadas geodésicas, onde escolhemos um ponto P arbitrário no qual  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \stackrel{*}{=} 0$  [20]. Então, em particular, as derivadas covariantes reduzem-se a derivadas ordinárias no ponto. O tensor de Riemann é dado por:

$$R_{\nu\sigma\alpha}^\mu \stackrel{*}{=} \partial_\sigma \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^e \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \quad (2.42)$$

que para

$$R_{\nu\sigma\alpha}^\mu \stackrel{*}{=} \partial_\sigma \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \partial_d \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \quad (2.43)$$

Agora consideraremos uma variação da equação  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  para uma nova conexão  $\bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu$ :

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \rightarrow \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\nu\sigma}^\mu + \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu. \quad (2.44)$$

Então  $\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ , sendo a diferença de duas conexões, é um tensor tipo (1,2). Esta variação resulta em uma mudança no tensor de Riemann da seguinte maneira

$$R_{\nu\sigma\alpha}^\mu \rightarrow \bar{R}_{\nu\sigma\alpha}^\mu = R_{\nu\sigma\alpha}^\mu + \delta R_{\nu\sigma\alpha}^\mu,$$

<sup>5</sup> Locais do espaço-tempo onde sua curvatura diverge e as equações de Einstein perdem validade [22].

onde

$$\begin{aligned}\delta R_{\nu\sigma\alpha}^{\mu} &\stackrel{*}{=} \partial_{\sigma}(\partial\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}) - \partial_{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}), \\ &\stackrel{*}{=} \nabla_{\sigma}(\partial\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}) - \nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}),\end{aligned}$$

uma vez que a derivada parcial comuta com a variação e é equivalente à derivada covariante em coordenadas geodésicas. Como ambos  $\delta R_{\mu\nu\sigma\alpha}^{\mu}$ , são a diferença de dois tensores, e as quantidades no lado direito da última equação são tensores, então pelo resultado fundamental (se uma equação de um tensor é válida em um sistema de coordenadas, esta deve ser válida em todos os sistemas de coordenadas) pode-se deduzir a equação de Palatini

$$\delta R_{\nu\sigma\alpha}^{\mu} = \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}) - \nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}) \quad (2.45)$$

no ponto P. Como P é um ponto arbitrário, o resultado é bastante geral. A contração em  $\alpha$  e  $\sigma$  dá o resultado:

$$\delta R_{\nu\alpha} = \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}) - \nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\mu}). \quad (2.46)$$

Dessa forma encontrou-se a equação de Palatini na forma generalizada.

## 3 Buracos Negros

Buracos negros são regiões do universo nas quais a curvatura do espaço-tempo é distorcida por um campo gravitacional, e são originados por um colapso de estrelas ou de regiões quentes e densas logo após a explosão do Big Bang. O termo buraco vem do fato da matéria e da radiação que podem cair dentro dele, já o termo negro está associado a dizer que nem a luz pode sair dele. Imagina-se que eles são os objetos mais excêntricos do universo. O que implica dizer que os buracos negros devem ser contornados por algum tipo de superfície fechada, que é um elemento crucial para a sua existência, o qual é denominado de horizonte de eventos.

No presente capítulo fizemos uma abordagem teórica sobre a formação e classificação de buracos negros. Estudamos o espaço-tempo de Schwarzschild, e transformações de coordenadas para resolver a questão das singularidades da métrica abordada. Tendo em vista que tais transformações só são possíveis para o caso da singularidade removível, ou seja quando  $r = 2M$ . Já para o caso em que  $r = 0$ , não é possível remover esta singularidade, pois trata-se de uma singularidade física ou intrínseca. Finalizamos o capítulo discutindo um pouco sobre Buracos Negros Auto-Duais.

### 3.1 Formação e Classificação dos Buracos Negros

No início de 1960 foram feitas grandes descobertas astronômicas, o que gerou interesse da RG pela comunidade científica. Vários objetos como quasares, pulsares e fontes de raios-X indicaram a presença de um campo gravitacional muito forte que só poderia ser explicado pela Teoria da RG. Os quasares são objetos tipo estrelas poderosamente energéticas e brilham mais do que galáxias inteiras. Pulsares são os restos das estrelas que entraram em colapso gravitacional (supernovas) e que piscam rapidamente. Considera-se que os pulsares são estrelas de nêutrons ultradensas. As fontes de raios-X podem ser estrelas de nêutrons ou objetos ainda menores, conhecidos por buracos negros [26].

Para descrever a formação de buracos negros deve-se imaginar uma estrela com no mínimo 10 vezes a massa solar, no decorrer de sua vida ela transforma hidrogênio em hélio, em um processo conhecido por fusão nuclear. Neste período, possui uma velocidade de escape cerca de 1.000 quilômetros por segundo [26], ou seja, a velocidade mínima para um objeto escapar do seu campo gravitacional. A energia gerada nesse processo produz uma pressão suficiente para manter o equilíbrio com a própria gravidade da estrela. Contudo, no final de sua vida, esse combustível vai acabando e o equilíbrio é quebrado, de forma que a força gravitacional supera a pressão produzida na fusão, então, a estrela entra em colapso gravitacional. O resultado final desse processo é conhecido como supernova.

A estrela vai encolhendo, e como consequência, o campo gravitacional na superfície da estrela vai aumentando junto com a velocidade de escape. Chegando-se em um ponto em que a velocidade de escape aumenta para 300.000 quilômetros por segundo, a velocidade da luz no vácuo, deste modo nem a velocidade da luz consegue escapar de dentro da estrela, e como nada viaja mais rápido do que a luz, nada mais consegue sair deste campo gravitacional. O resultado desse processo é conhecido como buraco negro: a região do espaço-tempo a partir do qual não é possível escapar para o infinito [26]. Esses tipos de buracos negros são conhecidos como buracos negros gravitacionais, que se formam a partir do colapso de uma estrela, este processo está ilustrado na Figura 1.

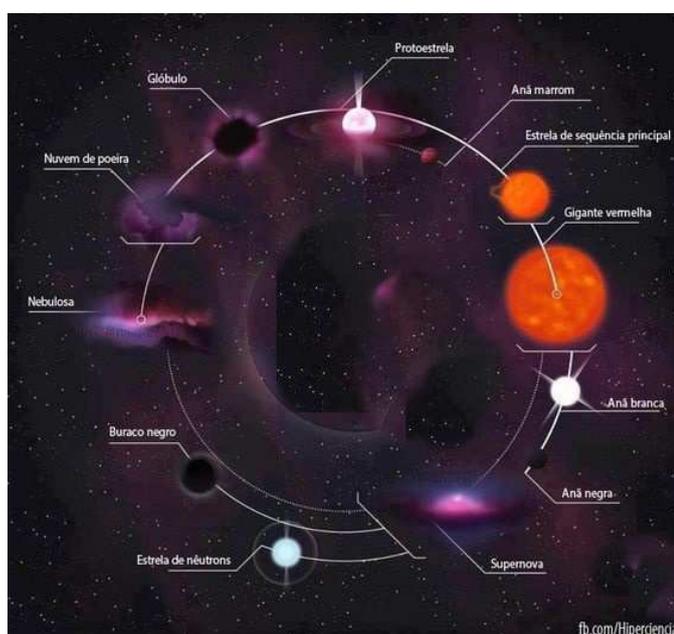


Figura 1 – Formação de Buracos Negros Gravitacionais.  
 Fonte: <https://pt.great-spacing.com/publication/32458>

Estima-se que pode existir um número muito grande de buracos negros muito pequenos, além dos buracos negros gravitacionais, os quais não foram formados pelo colapso estelar, mas de outras regiões muito quentes e densas logo após o Big Bang que são conhecidos como buracos negros primordiais. Esses buracos negros estão ilustrados na Figura 2.

Para uma estrela se transformar em um buraco negro é preciso que sua massa esteja concentrada numa região menor do que o raio de Schwarzschild:  $r = 2M$  onde  $M$  é a massa da estrela e  $G = c = 1$  que é uma previsão descrita pela RG.

John Wheeler forneceu a base de classificação para os buracos negros [27] e diz que um buraco negro possui poucas propriedades independentes externamente mensuráveis, ou seja, as soluções do tipo buracos negros podem ser completamente caracterizadas apenas por sua massa, seu momento angular e sua carga elétrica. Essa afirmação é conhecida como teorema no-hair (Tabela 1).

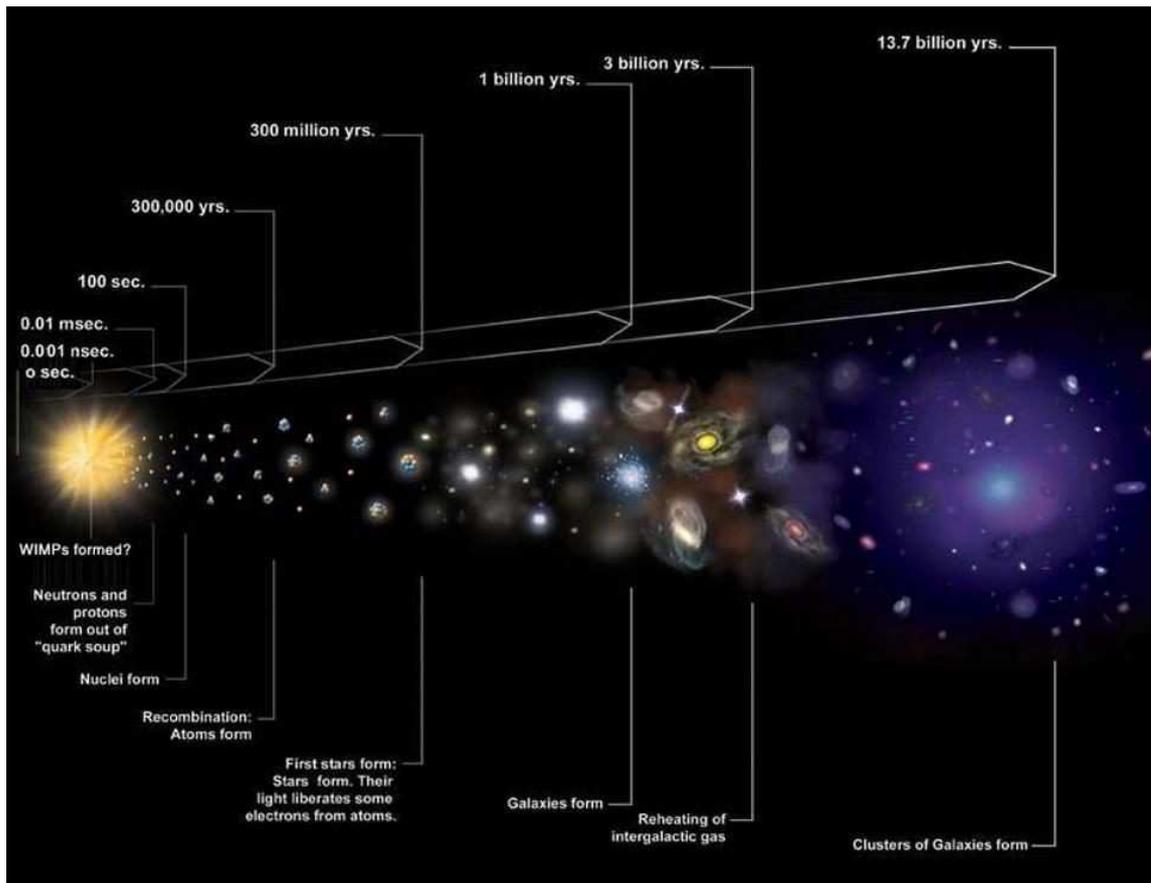


Figura 2 – Evolução do Universo desde o Big Bang.

Fonte: <https://pt.slideshare.net/edvaldosilvajunior/buracos-negros-53026110>

Tabela 1 – Classificação das soluções de buracos negros por massa, momento angular e carga elétrica.

Propriedades	Métrica
somente massa	Schwarzschild
massa e momento angular	Kerr
massa e carga elétrica	Reissner-Nordström
massa, momento angular e carga elétrica	Kerr-Newman

Outro modo de classificação utilizado para buracos negros é aquele que se baseia na massa do buraco negro. Os limites de massa das diversas classes não são definidos com precisão e vários outros autores têm adotado novas classes. Na Tabela 2 apresenta-se essa outra maneira de classificar o buraco negro representada em termo de massa solar  $M_{\odot}$ .

Tabela 2 – Classificação dos buracos negros por faixa de massa solar  $M_{\odot}$ .

Classes	FAIXA DE MASSA
mini buraco negro	0 a $0.1 M_{\odot}$
buraco negro de massa estelar	0.1 a $300 M_{\odot}$
buraco negro de massa intermediária	300 a $10^5 M_{\odot}$
buraco negro supermassivo	$10^5$ a $10^{10} M_{\odot}$

## 3.2 O espaço-tempo de Schwarzschild

Em 1916 Schwarzschild desenvolveu a primeira solução para as equações de Einstein, utilizando argumentos de simetria. Essa solução descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto massivo, estático, com simetria esférica, sem rotação, sem carga elétrica no vácuo e é resultado do teorema de Birkhoff<sup>1</sup>.

A solução de Schwarzschild demonstra comportamentos exóticos para determinadas regiões do espaço-tempo que são as aparições das chamadas singularidades e horizontes de eventos. Essas são as características que definem um buraco negro e estão presentes não apenas no espaço-tempo de Schwarzschild.

Singularidades são compreendidas como pontos nos quais a teoria passa a não ser aplicável. Isso acontece porque, na RG, à medida em que se aproxima das singularidades, o campo gravitacional tende a infinito. Acredita-se que efeitos quânticos sejam importantes para uma análise completa das singularidades, o que requereria uma teoria quântica da gravitação, fora do escopo deste trabalho.

Os horizontes de evento são características mais comum aos buracos negros que formam a superfície a partir da qual nem mesmo a luz possui velocidade suficiente para se distanciar da fonte do campo gravitacional.

### 3.2.1 Dedução da métrica de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild, é dada postulando um tensor métrico que satisfaça as seguintes condições [19, 22, 23]:

- Todas as suas componentes sejam independentes do tempo e não possuam termos cruzados com relação a coordenada temporal  $\Rightarrow$  solução estática;
- Seja espacialmente simétrico com relação a origem quando submetido a uma rotação  $\Rightarrow$  simetria esférica;
- Se assemelhe ao espaço-tempo plano quando no infinito  $\Rightarrow$  espaço-tempo assintoticamente plano.

Assim, das coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , sendo  $r$  a coordenada radial,  $\theta$  e  $\phi$  as coordenadas angulares e considerarmos o elemento de linha tem-se que

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

onde  $A(r)$  e  $B(r)$  são funções a serem determinadas. Como  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$  e  $g_{0i} = 0, i = 1, 2, 3$ , a condição 1 é satisfeita. Mantendo  $t$  e  $r$  constantes o elemento de linha  $ds^2$  se torna

<sup>1</sup> O teorema de Birkhoff diz que a única solução esféricamente simétrica e no vácuo das equações de Einstein equivale a solução de Schwarzschild. Além disso, não há nenhuma solução dependente do tempo que possua essas características [22, 28, 23].

$dL^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ , condição 2. Por último, requerendo-se que as funções  $A(r)$  e  $B(r)$  satisfaçam condições de contorno da forma  $A(r \rightarrow \infty) = 1$  e  $B(r \rightarrow \infty) = 1$ , condição 3.

Para resolver as equações de Einstein para o espaço-tempo vazio, ou seja,  $R_{\mu\nu} = 0$ , determinamos os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  e então calculamos as componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} = 0$ . Ao resolvermos  $R_{\mu\nu} = 0$ , encontramos um sistema para as equações  $A(r)$  e  $B(r)$ , cuja soluções são

$$A(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right) \quad \text{e} \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}, \quad (3.2)$$

onde  $k$  é uma constante a ser determinada.

Podemos interpretar a constante  $k$  em termos de algum parâmetro físico. O uso mais importante de uma solução de vácuo esféricamente simétrica é representar o espaço-tempo fora de uma estrela ou planeta ou outros objetos. Nesse caso, espera-se recuperar o limite de campo fraco com  $r \rightarrow \infty$  resultando em

$$\begin{aligned} g_{00}(r \rightarrow \infty) &= \left(-1 + \frac{k}{r}\right), \\ g_{rr}(r \rightarrow \infty) &= \left(1 - \frac{k}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por outro lado, o limite da campo fraco é dado por:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 + 2\Phi), \\ g_{rr} &= (1 - 2\Phi), \end{aligned} \quad (3.4)$$

com o potencial  $\Phi = \frac{-GM}{r}$ . Portanto, as métricas concordam com este limite, se definirmos  $k = -2GM$ .

O resultado final é a métrica de Schwarzschild, ou seja,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.5)$$

onde adotando  $G = 1$  tem-se

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.6)$$

Apresenta-se agora as propriedades da solução de Schwarzschild.

### 3.2.2 Propriedades da Solução de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo vazio em torno de uma estrela como o Sol desde que, se ignore sua rotação e de uma estrela em colapso. De fato em uma dada distribuição esférica arbitrária, o espaço-tempo externo à distribuição tem uma métrica estática (Teorema de Birkoff) com as propriedades dada a seguir [20]:

1. É esfericamente simétrica;
2. É estacionária;
3. Tem coordenadas tipo tempo adaptadas para o campo de vetores de killing ;
4. É assintoticamente plana (para  $r \rightarrow \infty$ , volta a métrica de Minkowski, métrica de um espaço plano na Relatividade Geral dada em coordenadas polares);
5. É estática;
6. Tem massa geométrica  $m = Gmc^{-2}$ .

Ao analisar a métrica de Schwarzschild, constata-se que ao tomar os valores  $r = 0$  ou  $r = 2M$ , uma de suas componentes diverge [22]. Essas divergências podem ou não estar associadas ao sistema de coordenadas utilizado, ou seja, fazendo uma mudança de coordenadas adequada, essa divergência desaparece. A superfície definida por  $r = 2M$  é uma singularidade de coordenadas, podendo ser removível. Já  $r = 0$ , é uma singularidade física, ou seja, não pode ser removida.

Uma forma simples de verificar se existe ou não uma singularidade em um determinado ponto do espaço-tempo é efetuando através de um escalar associado a curvatura da métrica em questão. Como a curvatura é dada pelo tensor de Riemann  $R_{\rho\theta\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R_{\theta\mu\nu}^{\lambda}$ , o seu escalar é determinado por

$$R^{\mu\nu\rho\theta}R_{\mu\nu\rho\theta} \propto \frac{M^2}{r^6}. \quad (3.7)$$

Assim,  $R^{\mu\nu\rho\theta}R_{\mu\nu\rho\theta} \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow 0$ , e  $R^{\mu\nu\rho\theta}R_{\mu\nu\rho\theta} \propto \frac{1}{M^4}$ , para  $r \rightarrow 2M$ . Portanto,  $r = 0$  é realmente uma singularidade e  $r = 2M$  é conhecido como raio de Schwarzschild. O motivo da realização desse cálculo se dá, pelo fato que como escalares são independentes do sistema de coordenadas utilizado, se existir uma determinada divergência em um sistema de coordenadas a mesma ocorrerá em todos os outros.

Um modo de encontrar o raio de Schwarzschild é através de uma analogia com a mecânica newtoniana, utilizando a velocidade de escape de um corpo sob a ação do potencial gravitacional [22, 29]. Assim, com igualdade energia cinética de um corpo de massa  $m$  com a energia potencial gravitacional gerada por um objeto de massa  $M$ , concebe-se que

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (3.8)$$

e tomando  $v \equiv c$  encontra-se  $r_s$  como dado a seguir.

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow r \equiv r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (3.9)$$

Pelo fato de ser um número, dadas constantes universais e uma característica única de cada corpo (sua massa  $M$ ), o raio de Schwarzschild fornece uma escala de classificação, ou seja, dada a massa de um corpo temos seu  $r_s$  (para o sol temos:  $r_s^\odot \simeq 3.10^3 m$ ).

Logo as singularidades da métrica de Schwarzschild são o ponto de partida para a teoria de buracos negros. A distância máxima que um observador externo consegue ver, ou, em outras palavras, a superfície a partir da qual partículas não mais conseguem escapar para o infinito, é conhecida como horizonte de eventos que é representada pelo raio de Schwarzschild.

Apresenta-se dois sistemas de coordenadas convenientes para reescrevermos a métrica de Schwarzschild: as de Eddington-Finkelstein e as de Kruskal-Szekeres.

### 3.2.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

A métrica que descreve o espaço-tempo em torno de uma distribuição de massa esférica é a métrica de Schwarzschild, ou seja:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

A métrica de Schwarzschild tem alguns problemas. O primeiro é que em  $r = 2M$ , o coeficiente de  $dr^2$  apresenta uma singularidade. Há uma singularidade também no coeficiente de  $dt^2$  em  $r = 0$ . O outro problema é a inversão de sinal quando  $r < 2M$ . Em outras palavras, a métrica de Schwarzschild funciona bem somente para  $r > 2M$ . O raio crítico  $r_s$  é dado por:

$$r_s = 2M,$$

que é chamado de raio de Schwarzschild.

Para contornar o problema da métrica de Schwarzschild em  $r = 2M$  e a inversão de sinal deve-se introduzir uma transformação de coordenadas e obter uma métrica mais adequada [20]. Considerando a transformação de Eddington-Finkelstein<sup>2</sup>:

$$t = v - r - 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \quad (3.10)$$

Para  $\frac{r}{2M} > 1$ , podemos escrever:

$$t = v - r - 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right),$$

e para  $0 \leq \frac{r}{2M} < 1$ ,

$$t = v - r - 2M \ln\left(1 - \frac{r}{2M}\right).$$

<sup>2</sup> Onde  $v$  é um parâmetro de tempo avançado dado por  $v = \bar{t} + r$ .

Considerando o primeiro caso como:

$$t = t(v, r),$$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial r} dr,$$

segue que

$$dt = dv - dr + \frac{dr}{1 - \frac{r}{2M}} = dv - \frac{dr}{1 - \frac{r}{2M}}$$

Assim,

$$dt^2 = dv^2 - \frac{2dvdr}{1 - \frac{r}{2M}} + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^2}. \quad (3.11)$$

Substituindo esse resultado na métrica de Schwarzschild e fazendo as simplificações necessárias, obtemos finalmente que

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.12)$$

Podemos ainda introduzir um parâmetro de tempo retardado ou coordenada tartaruga<sup>3</sup> na métrica de Schwarzschild e assim obtemos o elemento de linha de Schwarzschild com o parâmetro de tempo retardado dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.13)$$

Portanto, estas são métricas de Eddington-Finkelstein, Equações (3.12) e (3.13). Observa-se que  $v$  assume o papel de tempo coordenado. Se considerar o segundo caso e seguir o mesmo procedimento o resultado final é o mesmo, logo a métrica de Eddington-Finkelstein vale para  $0 < r < \infty$ . Isto é: ela descreve todo o espaço-tempo sem inverter o sinal e sem a singularidade em  $r = 2M$ . Como dito anteriormente, este tipo de singularidade que surge em um conjunto de coordenadas, é dita removível. Já a singularidade na origem  $r = 0$  permanece, pois é uma singularidade física.

### 3.2.4 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Usando as coordenadas  $v$  e  $w$ , pode-se reescrever a métrica de Schwarzschild removendo a singularidade  $r = 2M$ . Porém, da própria definição de  $v$  e  $w$  notamos que temos duas regiões diferentes do espaço-tempo: passado e futuro<sup>4</sup>. Assim para escrever o espaço-tempo completo, utilizando as coordenadas  $v$  e  $w$ , formando o que é chamado de espaço-tempo de Schwarzschild estendido [22, 28, 23, 30] introduz ambas coordenadas, nula

<sup>3</sup> Dado por  $w = t^* - r$ .

<sup>4</sup> Essa ideia é dada pensando nas definições de  $v$  e  $w$ . Mantendo  $v$  e  $w$  constantes, ao tomarmos  $r \rightarrow 2M$  temos, respectivamente,  $t \rightarrow -\infty$  e  $t \rightarrow \infty$ . O que implica que  $v$  está relacionado ao futuro e  $w$  ao passado do espaço-tempo de Schwarzschild.

avançada  $v$  e outra nula retardada  $w$  com o uso das coordenadas  $(v, w, \theta, \phi)$  no elemento de linha de Schwarzschild [20]. Dest modo obtém-se o elemento de linha

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv dw - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.14)$$

sendo  $r = r(v, w)$ , pois  $t = \frac{(v-w)}{2}$ . Fazendo as mudanças de coordenadas

$$\begin{cases} V = \exp\left(\frac{v}{4M}\right), \\ W = -\exp\left(\frac{-w}{4M}\right), \end{cases} \quad (3.15)$$

válidas para  $r > 2M$ , com os intervalos  $v \in (0, \infty)$  e  $w \in (-\infty, 0)$ , a métrica da Equação (3.14) pode ser escrita como

$$ds^2 = \frac{16m^2}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dt^2 - \frac{16m^2}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dx^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.16)$$

A métrica nas coordenadas de Kruskal-Szekeres, Equação (3.16), é bem definida, para  $r = 2M$ , e para todo  $r > 0$ . Portanto, essa métrica fornece o espaço-tempo de Schwarzschild estendido.

### 3.3 Buraco Negro Auto-Dual

A Gravidade Quântica em Loop [31, 32, 33] fornece uma descrição do universo em seus estágios iniciais. Uma característica fundamental é a resolução da singularidade inicial [34, 35] do Big Bang substituído por um salto quântico. Um buraco negro nesta estrutura foi construído a partir de uma modificação da versão holonômica da restrição hamiltoniana [3]. Esse tipo de buraco negro, denominado auto-dual, tem uma solução que depende de um parâmetro  $\delta$ , denominado parâmetro polimérico, que rotula elementos em uma classe de restrições hamiltonianas. Essas restrições são compatíveis com simetria esférica e homogeneidade, e podem ser fixada a partir de condições de limite assintóticos, produzindo o hamiltoniano clássico adequado no limite  $\delta \rightarrow 0$ .

Seguindo a abordagem do buraco negro de Schwarzschild corrigido pela gravidade quântica, ou seja, pela gravidade quântica em loop, tem-se que esse pode ser descrito pela métrica efetiva [36, 37]:

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)(r+r_*)^2}{r^4+a_0^2} dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{(r-r_+)(r-r_-)r^4}{(r+r_*)^2(r^4+a_0^2)}} + \left(r^2 + \frac{a_0^2}{r^2}\right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.17)$$

onde a métrica da Equação (3.17) tem a presença de um horizonte externo localizado em  $r_+ = 2m$ , um intermediário em  $r_* = \sqrt{r_+ r_-}$  e um horizonte de Cauchy localizado a  $r_- = 2mP^2$ . Aqui, a função polimérica  $P$  é dada por

$$P = \frac{\sqrt{1+\epsilon^2}-1}{\sqrt{1+\epsilon^2+1}}, \quad (3.18)$$

onde  $\epsilon = \gamma\delta_b$ , em que  $\gamma$  é o parâmetro Barbero-Immirzi, e  $\delta_b$  é o parâmetro polimérico usado para a quantização em LQG. Além disso, na Equação (3.17) aparece o parâmetro  $a_0$  definido por

$$a_0 = \frac{A_{\min}}{8\pi}, \quad (3.19)$$

onde  $A_{\min}$  é a área mínima no contexto de LQG e  $m$  está associado à massa ADM como segue

$$M = m(1 + P)^2, \quad (3.20)$$

Usando o fator multiplicativo da parte angular da Equação (3.17), pode-se definir uma nova coordenada radial dada por:

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{a_0^2}{r^2}}, \quad (3.21)$$

onde  $R$  mede a distância da circunferência e é igual à coordenada  $r$  apenas no limite assintótico. Além disso, da Equação (3.21) pode-se ver uma característica importante da estrutura interna do SDBH, quando  $r$  diminui do infinito para zero, a coordenada  $R$  diminui de infinito para  $R = \sqrt{2a_0}$  em  $r = \sqrt{a_0}$ , e então, aumenta novamente para infinito. Considerando a Equação no horizonte de eventos externos, ou seja, em  $r = r_+$ , obtém-se

$$R_+ = \sqrt{(2m)^2 + \left(\frac{a_0}{2m}\right)^2}. \quad (3.22)$$

A propriedade de auto-dualidade pode ser expressa dizendo que a métrica (3.17) é invariante sob as seguintes transformações,

$$r \rightarrow a_0/r, \quad t \rightarrow tr_*^2/a_0, \quad r_{\pm} \rightarrow a_0/r_{\mp}. \quad (3.23)$$

O elemento de superfície mínimo é obtido quando a coordenada dual  $\tilde{r} = a_0/r$  assume o valor  $r_{dual} = \tilde{r} = \sqrt{a_0}$ . A propriedade da auto-dualidade remove a singularidade do buraco negro, substituindo com outra região assintoticamente plana [37]. Para os aspectos dinâmicos desta solução.

No entanto, a polimerização da restrição hamiltoniana na região homogênea está dentro do horizonte de eventos. Portanto, o significado físico da solução quando a métrica é continuada analiticamente para todo o espaço-tempo persiste como um problema [36]. Além disso, os buracos negros auto-duais têm dois horizontes - um horizonte de eventos e um horizonte de Cauchy.

Os horizontes de Cauchy são instáveis, e então não está claro se a solução tem um interior estável. Essa solução pode ser útil como uma primeira aproximação para o comportamento de um sistema em uma estrutura gravitacional quântica. Uma vantagem desta abordagem é que embora a solução completa do buraco negro só possa ser apresentada em uma forma numérica, tem um forma fechada que facilita a investigação.

A Equação (3.21) pode ser escrita na forma  $R = \sqrt{r^2 + \tilde{r}^2}$  que mostra um espaço assintoticamente plano, ou seja, uma região de Schwarzschild no lugar da singularidade para o limite quando  $r$  tende a zero. Essa região corresponde a um buraco de minhoca com o tamanho da ordem do comprimento de Planck. O diagrama Carter-Penrose para o SDBH é mostrado na Figura 3, onde percebe-se que  $r_- \leq r \leq 0$ .

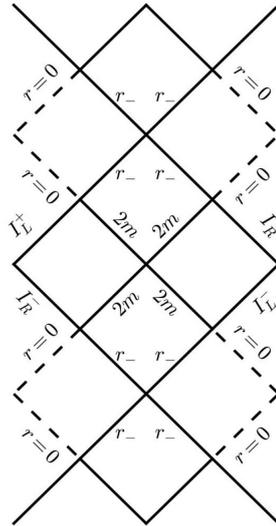


Figura 3 – Diagrama de Carter-Penrose para a métrica SDBH. O diagrama tem duas regiões assintóticas, sendo uma no infinito e a outra perto da origem, onde nenhum observador pode alcançar considerando um tempo finito.

Com relação ao limite experimental do parâmetro de polimerização, um estudo recente com base na observação da deflexão gravitacional solar de ondas de rádio leva à seguinte restrição [38]:

$$\delta \lesssim 0,1, \tag{3.24}$$

para o parâmetro de polimerização, é da ordem  $P \sim 10^{-3}$ . Esta estimativa tem como pressuposto  $\gamma < 0,25$ , e como uma escolha diferente para o valor do parâmetro Barbero-Immirzi, impõe uma faixa menos restritiva de valores  $P < 1$ .

## 4 Perturbação do Buraco Negro Auto-Dual

Perturbações de estrelas e buracos negros têm sido um dos principais tópicos da astrofísica relativística nas últimas décadas. Elas são de importância hoje para a astronomia de ondas gravitacionais.

Neste Capítulo apresenta-se as perturbações escalares de buracos negros (Schwarzschild)-caso clássico e auto-dual- com o intuito de obtermos uma equação de onda tipo-Schrodinger com potencial efetivo. Potenciais estes que serviram de base para o cálculo dos modos quase normais, e nos possibilitarão comparar os resultados para verificar o seu comportamento, em ambos os casos.

### 4.1 Teoria de campos em espaços-tempo curvos

Na década de 1920 uma teoria começou a ser formulada que pretendia explicar o universo do pequeno e do rápido, uma junção da Mecânica Quântica com a RE, surgiu a TCEC. Em 1926 Oscar Klein e Walter Gordon formularam uma equação, que muitas vezes é considerada como uma versão relativística da equação de Schrodinger, para descrever partículas quânticas escalares em regime relativístico [39]. Em 1927, Paul Adrien Maurice Dirac propôs uma equação capaz de descrever elétrons livres com energia relativística [40]. Essa teoria explicava a criação e a aniquilação de partículas, previa a existência das antipartículas e, juntamente com a equação de Klein-Gordon, foram primordiais para o desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos Eletromagnética. Posteriormente, a força fraca e a forte também ganharam tratamento voltado a Teoria de Campos [16, 41].

A equação de Klein-Gordon foi proposta para descrever partículas relativísticas, escalares e sem carga [41]. Dessa forma, dada uma partícula com massa  $m$  e 4-momento  $k^\mu = (E, \mathbf{k})$ , ela obedece ao seguinte invariante relativístico

$$k^\mu k_\mu = -m^2 \Rightarrow E^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2. \quad (4.1)$$

Definimos partículas como possuindo energia positiva  $E = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2}$ .

Pode-se reescrever e atribuir aos constituintes da Equação (4.1) interpretações operacionais da Mecânica Quântica:  $E = H = i\partial_t$ , sendo H o operador hamiltoniano e  $\mathbf{k} = -i\nabla$  e aplicar no campo escalar  $\phi(x)$ <sup>1</sup>, obtendo

$$\begin{aligned} (E^2 - k \cdot k - m^2)\phi(x) &= 0, \\ [(i\partial_t)^2 - (-i\nabla)^2 - m^2]\phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

<sup>1</sup> Aqui denotamos, pela dependência em  $x$ , a dependência com relação às componentes do 4-vetor  $x^\mu$ .

o que resulta na equação de Klein-Gordon

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi(x) = 0. \quad (4.3)$$

Sabemos que toda teoria de campos clássicos nasce da ação clássica, que, para um campo  $\phi(x)$  é da forma

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x), \quad (4.4)$$

onde  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)$  é a densidade de lagrangiana do respectivo campo [42, 22, 24, 30]. Dessa forma, ao extremizar essa ação, obtém-se

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta \phi = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0, \quad (4.6)$$

onde o lado direito da Equação (4.6) são equações de Euler-Lagrange. Para o campo escalar real  $\phi(x)$ , de massa  $m$  e sem interações, a densidade de lagrangiana  $\mathcal{L}$  é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (4.7)$$

no qual  $\eta^{\mu\nu}$  é a inversa do tensor métrico de Minkowski e as equações de Euler-Lagrange resulta a equação de Klein-Gordon dada por:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0 \quad (4.8)$$

tal como na Equação (4.3).

A generalização da teoria clássica de campos em espaços-tempo planos para curvos [42, 22, 24, 30, 43, 44] se dá com três substituições dadas a seguir:

1. A substituição da métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  pela métrica geral  $g_{\mu\nu}$ ;
2. A substituição das derivadas ordinárias  $\partial_\mu$  por derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ ;
3. A substituição do elemento de volume  $d^4x$  pelo elemento de volume covariante:  $d^4x \sqrt{-g}$ , sendo  $g \equiv \det[g_{\mu\nu}]$ .

Assim, para um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$  que seja globalmente hiperbólico, a propagação do campo escalar  $\phi(x)$  possui a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (4.9)$$

obtida utilizando a Equação (4.7) e a ação clássica  $S$  é expressa por:

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2) \right], \quad (4.10)$$

sendo que para o campo escalar  $\nabla_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi$ . Essa densidade de Lagrangiana e ação descrevem um campo escalar minimamente acoplado com a gravidade.

Então impondo a condição de ação constante em relação ao campo  $\phi$   $\delta S = 0$ , as equações de movimento obtém-se

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - m^2 \phi \equiv (\square - m^2) \phi = 0, \quad (4.11)$$

onde  $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ , representando a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo.

O tratamento geral da Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos considera a ação para o campo escalar como

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) \right], \quad (4.12)$$

sendo  $\xi \in \mathbb{R}$  um termo que determina o acoplamento entre o campo escalar e a curvatura  $R$  (escalar de Ricci).

Assim, com a variação da ação em relação ao campo  $\phi$   $\delta S = 0$ , as equações de movimento são

$$[\square - m^2 - \xi R] \phi(t, r, \theta, \phi) \quad (4.13)$$

onde  $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ . Neste trabalho dar-se ênfase a Equação (4.13) detalhada à frente, pois ela fornece informações essenciais para o objetivo deste trabalho que é o cálculo dos modos quase normais para o buraco negro de Schwarzschild, clássico e auto-dual.

## 4.2 Perturbações Escalares

Campos escalares massivos descrevem sistemas físicos, por meio de perturbações escalares para obter informações sobre a estabilidade do buraco negro.

O espaço-tempo de Schwarzschild, cuja métrica dada pela Equação (3.6), é um espaço-tempo com curvatura não nula<sup>2</sup>. Dessa forma, a equação de Klein-Gordon para o mesmo não é simples como o da Equação (3.7). Deve-se usar a expressão geral para espaços curvos dada pela Equação (4.11) e, para  $m \neq 0$ , obtendo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - m^2 \phi \equiv (\square - m^2) \phi = 0, \quad (4.14)$$

<sup>2</sup> Isso porque seu tensor de Riemann é não nulo.

onde  $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$ . Como  $\sqrt{-g} = r^2\sin\theta$ , que substituindo na expressão anterior obtém-se:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)r^2\right]\frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\frac{d\phi}{d\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\phi}{d\phi^2} = m^2\phi. \quad (4.15)$$

A solução da Equação (4.15) pode ser encontrada por meio do "Ansatz"

$$\phi(t, r, \theta, \phi) = \frac{R(r_*, t)}{r} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.16)$$

sendo  $R(r_*, t)$  escrito em função da coordenada tartaruga  $r_*$ , definida na equação de Eddington-Finkelstein e  $Y_l(\theta, \phi)$  os harmônicos esféricos.

Substituindo a Equação (4.16) na Equação (4.15) e igualando as partes  $l(l+1)$  e  $-l(l+1)$ , encontra-se

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta Y_l^m) + \frac{d^2}{d\phi} Y_l^m + l(l+1)\sin^2\theta Y_m^l = m^2, \quad (4.17)$$

e

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{2M}{r^2}\left(\frac{dR}{dr} - \frac{1}{r}R\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r}R = m^2, \quad (4.18)$$

Usando a mudança de coordenadas  $\partial_r \rightarrow \partial_{r_*}$

$$\partial_r = \frac{\partial_{r_*}}{\partial_r} \partial_{r_*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r_*}, \quad (4.19)$$

$$\partial_r^2 = \partial_r \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r_*} \right] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \partial_{r_*} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{2M}{r^2} \partial_{r_*}. \quad (4.20)$$

Substituindo na Equação (4.18), obtém-se

$$\left\{ (-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + m^2 \right] \right\} R = [-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2 - V(r)] R = 0, \quad (4.21)$$

sendo  $V(r)$  uma barreira potencial efetiva cuja forma é forma

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + m^2 \right]. \quad (4.22)$$

A Equação (4.22) nos dá o potencial efetivo para o caso clássico do buraco negro de Schwarzschild fundamental no cálculo dos Modos Quase Normais abordado no capítulo seguinte.

A partir de agora, interessa-se no cálculo do potencial efetivo, para o caso auto-dual do buraco negro de Schwarzschild.

A equação de Klein-Gordon descreve a evolução de campos escalares. No caso em que a massa do campo é não nula, e é considerado o acoplamento não-mínimo com a gravidade, esta equação é dada por

$$[\square - m^2 - \xi R]\Phi(t, r, \theta, \phi) = 0 \quad (4.23)$$

onde  $\square \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu)$  ou

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) - m^2 - \xi R\right]\Phi(t, r, \theta, \phi) = 0, \quad (4.24)$$

com os índices  $\mu$  e  $\nu$  variando de  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$  e  $g = \det g_{\mu\nu}$ .

Começaremos desenvolvendo a Equação (4.24) considerando a métrica de fundo dada pela Equação (3.17). Depois de alguns cálculos e simplificações, obtém-se

$$\begin{aligned} & -\frac{a_0^2 + r^4}{(r - r_-)(r - r_+)(r + r_*)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{r^4}{(a_0^2 + r^4)(r + r_*)^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (r - r_-)(r - r_+) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \\ & + \frac{r^2}{a_0^2 + r^4} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{r^2}{a_0^2 + r^4} \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = (\mu^2 + \xi R) \Phi, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde o escalar de Ricci é dado por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \frac{2r^2}{(a_0^2 + r^4)^3 (r + r_*)^4} \left[ -r_*^2 (2a_0^2 r^4 (3r^2 + 3r(r_- + r_+) - 4r_- r_+) + a_0^4 (6r^2 - r_- r_+)) \right. \\ & \quad + r^8 (4r^2 + 2r(r_- + r_+) - 3r_- r_+) - r r_* (2a_0^2 r^4 (-4r^2 + 7r(r_- + r_+) - 8r_- r_+)) \\ & \quad + a_0^4 (3r(r_- + r_+) - 4r_- r_+) + r^8 (3r(r_- + r_+) - 4r_- r_+) + 2a_0^2 r^2 (a_0^2 + 3r^4) (r - r_-) \\ & \quad \left. \times (r - r_+) + r_-^4 \left( - (a_0^2 + r^4)^2 \right) - 4r r_*^3 (a_0^2 + r^4)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, devemos introduzir o campo escalar por meio do Ansatz padrão da seguinte forma:

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \psi(t, r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.27)$$

então, substituindo a Equação (4.27) na Equação (4.25), tem-se

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{r^4 (r - r_-)(r - r_+)}{(a_0^2 + r^4)^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (r - r_-)(r - r_+) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \\ & - \frac{r^2 (r - r_-)(r - r_+)(r + r_*)^2 l(l+1)}{(a_0^2 + r^4)^2} \psi = \frac{(r - r_-)(r - r_+)(r + r_*)^2}{a_0^2 + r^4} (\mu^2 + \xi R) \psi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Aqui, o  $Y_l^m(\theta, \phi)$  denota as funções harmônicas esféricas [45] que satisfazem a relação

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} = -l(l+1) Y_l^m. \quad (4.29)$$

Assim, redefinindo a função  $\psi$  como sendo:

$$\psi = \frac{r}{\sqrt{a_0^2 + r^4}} \Psi(r) e^{-i\omega t}, \quad (4.30)$$

onde o parâmetro  $\omega$  representa os modos quase normais complexos. Além disso, introduzindo a coordenada tartaruga  $x$ , através da relação:

$$\frac{d}{dx} = \frac{r^2(r-r_-)(r-r_+)}{a_0^2 + r^4} \frac{d}{dr}, \quad (4.31)$$

que ao ser integrada, obtém-se:

$$x = r - \frac{a_0^2}{rr_-r_+} + \frac{a_0^2(r_- + r_+) \log(r)}{r_-^2 r_+^2} + \frac{(a_0^2 + r_-^4) \log(r-r_-)}{r_-^2(r_- - r_+)} - \frac{(a_0^2 + r_+^4) \log(r-r_+)}{r_+^2(r_- - r_+)}. \quad (4.32)$$

Finalmente, substituindo as Equações (4.30) e (4.31) na Equação (4.28), obtemos uma equação de onda do tipo Schrodinger para a perturbação escalar do espaço-tempo SDBH da seguinte forma

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + [\omega^2 - V_{\text{eff}}(r)] \Psi = 0, \quad (4.33)$$

onde o potencial efetivo é dado por:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{(r-r_-)(r-r_+)}{(a_0^2 + r^4)^4 (r+r_*)^2} \left[ l(l+1)r^2 (a_0^2 + r^4)^2 (r+r_*)^4 + a_0^2 r^6 \left( 4\xi \left( -r_*^2 (3r^2 + 3r \right. \right. \right. \\ \times (r_- + r_+) - 4r_-r_+) + rr_* (4r^2 - 7r(r_- + r_+) + 8r_-r_+) + 3r^2(r-r_-)(r-r_+) - 4rr_*^3 \\ \left. \left. \left. - r^4 \right) + 3\mu^2 r^2 (r+r_*)^4 \right) + a_0^4 r^2 \left( 2\xi \left( r_*^2 (r_-r_+ - 6r^2) + 2r^2(r-r_-)(r-r_+) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + rr_* (4r_-r_+ - 3r(r_- + r_+)) - 4rr_*^3 - r^4 \right) + 3\mu^2 r^2 (r+r_*)^4 \right) + r^3 (r+r_*)^2 \left( 10a_0^2 r^3 \right. \right. \\ \times (r-r_-)(r-r_+) + a_0^4 (-2r + r_- + r_+) + r^7 (r(r_- + r_+) - 2r_-r_+) \left. \left. \right) + a_0^6 \mu^2 (r+r_*)^4 \right. \\ \left. \left. \left. - 2\xi r^{10} r_* \left( r^2 (3(r_- + r_+) + 4r_*) + 2r(r_-(r_* - 2r_+) + r_*(r_+ + 2r_*)) - 3r_-r_+r_* + r_*^3 \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mu^2 r^{12} (r+r_*)^4 \right) \right]. \quad (4.34)$$

Para uma melhor visualização do comportamento do potencial efetivo da Equação (4.36), apresenta-se os gráficos das Figuras 4 e 5. Na Figura 4 verifica-se que no limite assintótico, ou seja,  $r \rightarrow \infty$ , o potencial efetivo exibe o seguinte comportamento  $V_{\text{eff}}(r) \sim \mu^2$ . Além disso, observa-se que para pequenas massas do campo escalar, o potencial efetivo ainda possui a forma de potencial barreira. No entanto, ao aumentar os valores de  $\mu$ , potencial efetivo perde a forma de barreira potencial e assume a forma de um potencial degrau. Na Figura 5 observa-se que para grandes valores de acoplamentos (curva laranja) tem-se uma fase de instabilidade, onde o potencial efetivo é negativo. Além disso, para o caso limite, quando  $\xi \rightarrow 0$  denotado pela curva preta, é quase coincidente com o valor de

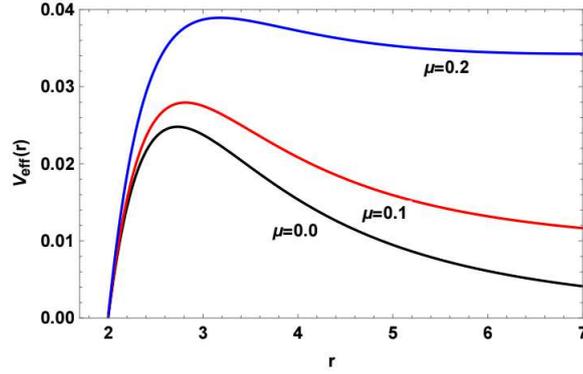


Figura 4 – Gráfico do potencial efetivo. Este gráfico mostra o comportamento de  $V_{\text{eff}}(r)$  para diferentes valores de massa do campo escalar:  $\mu = 0.0, 0.1$  e  $0.2$ . Aqui, assumimos os valores constantes  $m = 1$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $a_0 = \sqrt{3}/2$ ,  $l = 0$  e  $P = 0.1$ .

gravidade ( $\xi = 1/6$ ). Devido a esses fatores, devemos considerar parâmetros com valores pequenos para aplicar a aproximação WKB corretamente para o cálculo de QNMs.

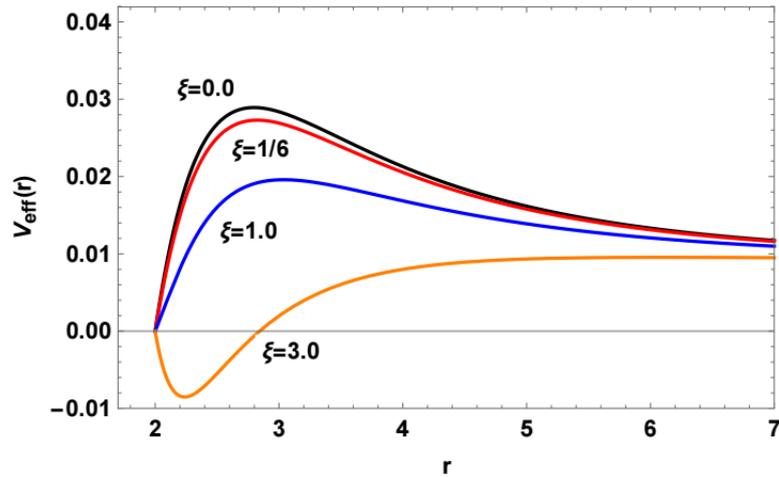


Figura 5 – Gráfico do potencial efetivo. Este gráfico mostra o comportamento de  $V_{\text{eff}}(r)$  para diferentes valores do acoplamento não-mínimo:  $\xi = 0.0, 1/6, 1.0$  e  $3.0$ . Aqui, assumimos os valores constantes  $m = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $a_0 = \sqrt{3}/2$ ,  $l = 0$  e  $P = 0.1$ .

## 5 Modos Quase Normais

Um dos aspectos mais interessantes da detecção de Ondas Gravitacionais trata-se da conexão com a existência de buracos negros [46]. Embora existam atualmente várias maneiras indiretas de identificar buracos negros no Universo, as ondas gravitacionais emitidas por um buraco negro oscilante carregam uma impressão digital única que levaria à identificação direta de sua existência.

Como exposto anteriormente, a radiação gravitacional das oscilações dos buracos negros exibe certas frequências características que são independentes dos processos que dão origem a estas oscilações. Essas frequências quase normais estão diretamente conectadas aos parâmetros do buraco negro (massa, carga e momento angular) e, para a massa estelar, os buracos negros devem estar dentro da largura de banda dos detectores de ondas gravitacionais construídos. As perturbações de um buraco negro de Schwarzschild reduzem-se a equação de onda encontrada no capítulo anterior.

Neste Capítulo, seguindo o nosso trabalho [47], determinaremos os QNMS para o buraco negro quântico descrito através da métrica da Equação (3.17). Como apresentado no último capítulo, depois de considerar as perturbações escalares para o espaço-tempo do Buraco Negro Auto-Dual (SDBH), encontrou-se uma equação semelhante a de Schrödinger dada pela Equação (3.17) com um potencial efetivo dado pela Equação (4.34). Se o potencial efetivo depende da coordenada tartaruga através da Equação (4.32), o  $V_{\text{eff}}(r)$  assume valores constantes próximos ao horizonte de evento ( $x = -\infty$ ) e no infinito ( $x = \infty$ ) e tem um valor máximo em algum ponto intermediário ( $x = x_0$ ). Esse comportamento é mostrado nas Figuras 6 e 7, onde se tem um aumento do pico do potencial efetivo com os valores  $l$ , e uma diminuição com os valores  $P$ .

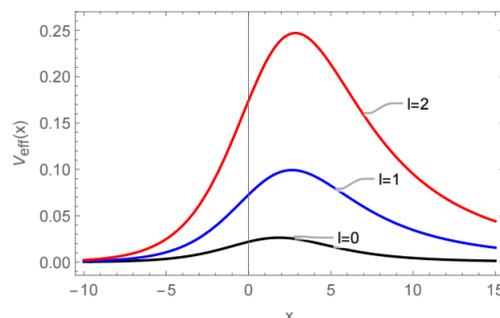


Figura 6 – Gráfico do potencial efetivo dependendo da coordenada tartaruga. Este gráfico mostra o comportamento de  $V_{\text{eff}}(x)$  para diferentes valores do número multipolo quântico:  $l = 0, 1$  e  $2$  com valores constantes  $m = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $a_0 = \sqrt{3}/2$  e  $P = 0.1$ .

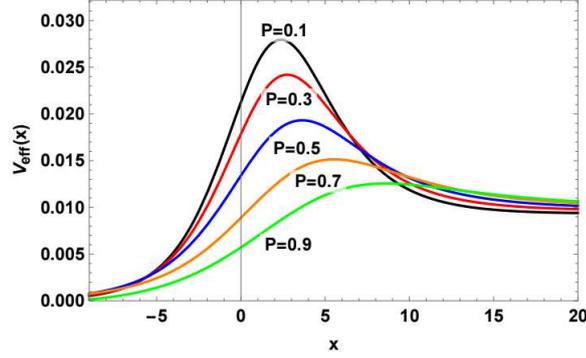


Figura 7 – Gráfico do potencial efetivo dependendo da coordenada tartaruga com o comportamento de  $V_{\text{eff}}(x)$  para diferentes valores do parâmetro polimérico:  $P = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  e  $0.9$  para os valores constantes  $m = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $a_0 = \sqrt{3}/2$  e  $\ell = 0$ .

Os QNMs são frequências complexas e podem ser expressos na seguinte forma:

$$\omega = \omega_R + i\omega_I, \quad (5.1)$$

onde a parte real  $\omega_R$  determina a frequência normal das oscilações, enquanto a parte imaginária  $\omega_I$  representa o amortecimento do tempo dos modos de vibração. Pode-se obter informações sobre a estabilidade de BHs a partir da análise de QNMs, sendo BHs instáveis quando  $\omega_I > 0$  e estáveis quando  $\omega_I < 0$ .

Devido ao comportamento de  $V_{\text{eff}}(x)$ , Figura 6, pode-se fazer uma analogia direta com o problema de espalhamento perto do pico da barreira potencial da mecânica quântica, onde  $\omega^2$  na Equação (4.33) desempenha o papel da energia.

Ver-se agora o método WKB, pois já foi determinado o potencial efetivo do buraco negro auto-dual, para assim obter os Modos Quase Normais escritos pela forma dada pela Equação (5.1).

## 5.1 Método WKB

Métodos para calcular os QNMs foram desenvolvidos [6, 48, 49, 50]; no entanto o método WKB introduzido por Schutz e Will [14] foi aprimorado para a 3ª ordem por Iyer e Will [15] e é a aproximação que consideraremos. Assim, os QNMs ( $\omega = \omega_n$ ) da Equação (4.33) são determinados pela seguinte equação:

$$\omega_n = \sqrt{(V_0 + \Delta) - i(n + \frac{1}{2})\sqrt{-2V_0''}(1 + \Omega)}, \quad (5.2)$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{8} \left( \frac{V^{(4)}}{V_0''} \right) + \left( \frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left( \frac{V_0'''}{V_0''} \right)^2 (7 + 60\alpha^2), \quad (5.3)$$

e

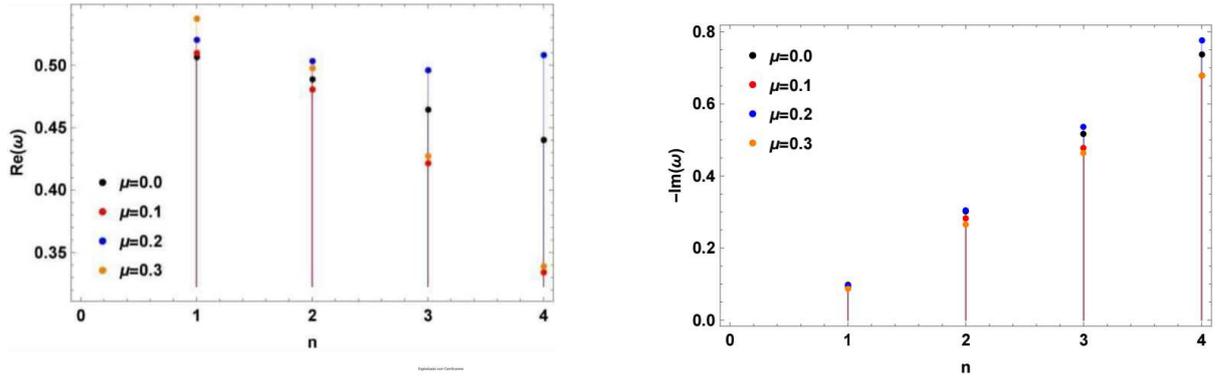
$$\begin{aligned} \Omega = & -\frac{1}{2V_0''} \left\{ \frac{5}{6912} \left( \frac{V_0'''}{V_0''} \right)^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left[ \frac{(V_0''')^2 (V_0^{(4)})}{(V_0'')^3} \right] (51 + 100\alpha^2) \right. \\ & + \frac{1}{2304} \left( \frac{V_0^{(4)}}{V_0''} \right)^2 (65 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left( \frac{V_0''' V_0^{(5)}}{(V_0'')^2} \right) (19 + 28\alpha^2) \\ & \left. - \frac{1}{288} \left( \frac{V_0^{(6)}}{V_0''} \right) (5 + 4\alpha^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Na equação acima temos  $\alpha = n + \frac{1}{2}$  e  $V_0^n$  denotando a derivada de ordem  $n$  do potencial efetivo no ponto máximo  $x_0$ . Assim, usando as Equações (4.36) e (5.2), calcula-se os QNMs para o buraco negro auto-dual considerando diferentes valores dos parâmetros. Na Tabela 3, mostra-se os QNMs fundamentais (ou seja,  $l = 0$  e  $n = 0$ ) considerando os diferentes valores dos outros parâmetros. Nota-se que os valores dos QNMs são diferentes no caso em que  $\mu = 0$  e  $\xi = 0$  do caso conforme ( $\mu = 0$  e  $\xi = \frac{1}{6}$ ). Para o caso quando os parâmetros polimérico  $P$  e área mínima  $a_0$  tendem a zero, os resultados convergem para SchBH [51, 52].

$P$	$\mu$	$\xi$	$\omega_0$	$P$	$\mu$	$\xi$	$\omega_0$
0.1	0.0	0.0	0.083846 - 0.106928i	0.3	0.0	0.0	0.072469 - 0.089438i
0.1	0.0	0.1	0.116404 - 0.138260i	0.3	0.0	0.1	0.067228 - 0.103055i
0.1	0.0	1/6	0.076978 - 0.110763i	0.3	0.0	1/6	0.024120 - 0.094200i
0.1	0.0	0.2	0.098475 - 0.128178i	0.3	0.0	0.2	0.043868 - 0.106240i
0.1	0.1	0.0	0.103053 - 0.111495i	0.3	0.1	0.0	0.090732 - 0.085852i
0.1	0.1	0.1	0.034850 - 0.064386i	0.3	0.1	0.1	0.101386 - 0.111908i
0.1	0.1	0.2	0.091391 - 0.111355i	0.3	0.1	0.2	0.038487 - 0.081088i

Tabela 3 – QNMs fundamentais do SDBH para os parâmetros de valores constantes:  $m = 1$ ,  $\ell = 0$  e  $a_0 = \sqrt{3}/2$ .

Os QNMs para o SDBH considerando os primeiros números harmônicos ( $n$ ) são mostrados na Tabela 4 para o caso com  $l = 1$ . Adotando-se alguns valores típicos dos outros parâmetros, por exemplo,  $P = 0.1, 0.3$  e  $0.5$ . No entanto, para o caso em que  $\xi = 0$  e  $\mu = 0$  os resultados concordam com os valores obtidos na literatura [8]. Finalmente, para melhor visualização dos efeitos devido aos novos parâmetros no espectro dos QNMs, mostramos o comportamento por meio de gráficos nas Figuras 8, 9 e 10 onde foi traçado as partes reais e imaginárias de  $\omega$  para o caso  $l = 2$ .



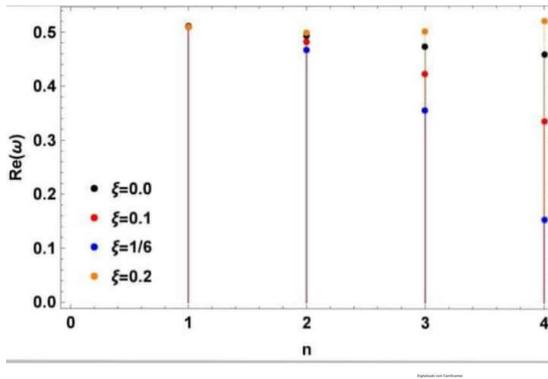
(a) Parte real

(b) Parte imaginária

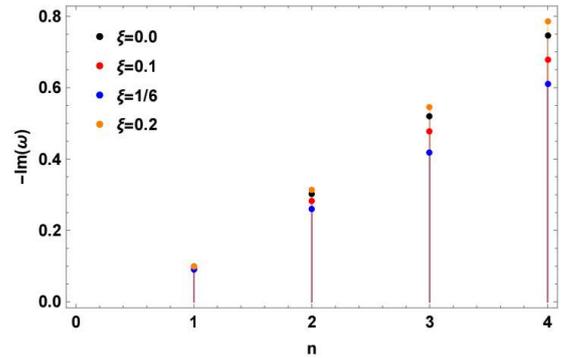
 Figura 8 – Gráficos para o comportamento dos QNMs considerando  $l = 2$  e  $\mu = 0.0; 0.1; 0.2$  e  $0.3$ . No gráfico (a) é mostrada a parte real, enquanto a parte imaginária é mostrada em (b).

$P$	$\mu$	$\xi$	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$
0.1	0.1	0.0	$0.308677 - 0.097383i$	$0.280706 - 0.312954i$	$0.255548 - 0.542527i$
0.1	0.1	0.1	$0.305982 - 0.093379i$	$0.262207 - 0.297952i$	$0.201681 - 0.520149i$
0.1	0.1	0.2	$0.306023 - 0.098157i$	$0.281336 - 0.316308i$	$0.263790 - 0.548014i$
0.1	0.2	0.0	$0.321783 - 0.082089i$	$0.249314 - 0.273727i$	$0.152563 - 0.505167i$
0.1	0.2	0.1	$0.319751 - 0.079161i$	$0.234081 - 0.261550i$	$0.107235 - 0.494258i$
0.1	0.2	0.2	$0.319462 - 0.083113i$	$0.252371 - 0.279548i$	$0.170198 - 0.512473i$
0.3	0.1	0.0	$0.334209 - 0.090020i$	$0.299191 - 0.280891i$	$0.245795 - 0.485544i$
0.3	0.1	0.1	$0.329608 - 0.089689i$	$0.294418 - 0.280507i$	$0.241676 - 0.485395i$
0.3	0.1	0.2	$0.324837 - 0.088824i$	$0.287367 - 0.277780i$	$0.229716 - 0.481428i$
0.3	0.2	0.0	$0.351419 - 0.083136i$	$0.304862 - 0.269468i$	$0.245882 - 0.482330i$
0.3	0.2	0.1	$0.348755 - 0.088806i$	$0.325524 - 0.296933i$	$0.327314 - 0.530312i$
0.3	0.2	0.2	$0.344568 - 0.088241i$	$0.320773 - 0.295941i$	$0.322452 - 0.529069i$
0.5	0.1	0.0	$0.348520 - 0.082800i$	$0.333270 - 0.258464i$	$0.319151 - 0.445290i$
0.5	0.1	0.1	$0.341353 - 0.082096i$	$0.325010 - 0.256477i$	$0.308893 - 0.442069i$
0.5	0.1	0.2	$0.334788 - 0.084140i$	$0.327065 - 0.267313i$	$0.334821 - 0.464291i$
0.5	0.2	0.0	$0.365596 - 0.068507i$	$0.310780 - 0.200578i$	$0.176663 - 0.346535i$
0.5	0.2	0.1	$0.360323 - 0.074073i$	$0.327514 - 0.234962i$	$0.283478 - 0.415786i$
0.5	0.2	0.2	$0.353556 - 0.072158i$	$0.315734 - 0.227651i$	$0.258431 - 0.403470i$

 Tabela 4 – Os primeiros QNMs para o SDBH considerando os parâmetros constantes:  $m = 1$ ,  $a_0 = \sqrt{3}/2$  and  $\ell = 1$ .

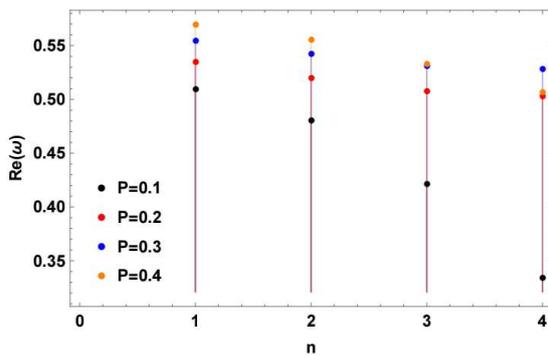


(a) Parte real

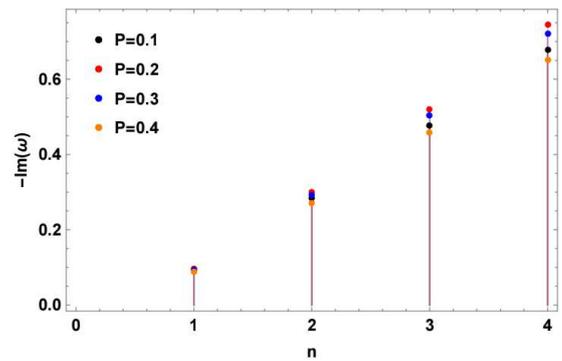


(b) Parte imaginária

Figura 9 – Gráficos para o comportamento dos QNMs considerando  $l = 2$  e  $\xi = 0.0; 0.1; 1/6$  e  $0.2$ . No gráfico (a) é mostrada a parte real, enquanto a parte imaginária é mostrada em (b).



(a) Parte real



(b) Parte imaginária

Figura 10 – Gráficos para o comportamento dos QNMs considerando  $l = 2$  e  $P = 0.1; 0.2; 0.3$  e  $0.4$ . No gráfico (a) é mostrada a parte real, enquanto a parte imaginária é mostrada em (b).

## 6 Conclusões e Perspectivas

As observações das ondas gravitacionais abre uma nova janela para a pesquisa da física gravitacional. Nesse contexto, os buracos negros oferecem um ótimo cenário para testar as previsões de candidatos às teorias da gravitação quântica. Por isso foi estudado as perturbações dos buracos negros e o espectro dos modos quase normais para uma versão quantizada da solução de Schwarzschild, conhecida como buraco negro auto-dual e consiste em uma solução de gravidade quântica em loop .

Consideramos perturbações escalares massivas acopladas ao escalar de Ricci e encontramos uma equação do tipo Schrodinger. Usou-se a abordagem WKB para obter os modos quase normais com valores dos parâmetros para obtermos pequenas correções da solução clássica. Devido às limitações da abordagem WKB, também considerou-se o número harmônico  $n \leq \ell$ . Portanto, para uma melhor visualização do comportamento dos QNMs, plotamos as Figuras 8, 9 e 10 mostrando o comportamento das partes reais e imaginárias dos QNMs considerando  $l = 2$ .

Assim, analisando os nossos resultados, podemos verificar que os modos quase normais escalares dependem fortemente da massa do campo, do parâmetro de acoplamento não mínimo, e dos parâmetros de gravidade quântica em loop. Nossos resultados mostram que conforme o parâmetro  $P$  cresce, a parte real dos QNMs sofre um aumento inicial e depois começa a diminuir, enquanto a magnitude da parte imaginária diminui, considerando o parâmetro fixo  $a_0$ . Esta característica revela que o amortecimento de perturbações escalares massivas acopladas não minimamente com a gravidade para o buraco negro auto-dual é mais lento e as oscilações são mais rápidas ou mais lentas dependendo do valor de  $P$ .

Outro novo fenômeno encontrado aqui é que para  $l$ ,  $n$  e  $\xi$  fixos, as partes reais e imaginárias das frequências quase normais aumentam e diminuem, respectivamente, conforme a massa do escalar campo,  $\mu$ , aumenta. Como sabemos, o  $\mu$  tem um valor máximo, então os QNMs também têm um valor limitado e, devido a este fato, pode ser mais fácil de detectar por meio de experimentos. Além disso, a introdução da massa do campo escalar pode nos ajudar a entender diferentes aspectos do buraco negro auto-dual, por exemplo, os aspectos da termodinâmica.

Verificamos que, ao aumentar o valor do acoplamento não mínimo com a gravidade,  $\xi$ , os valores dos QNMs são modificados. Além disso, para grandes valores de  $\xi$ , o número de modos estáveis irá diminuir significativamente. Um fato interessante é que para o caso quando assumimos  $\mu = 0$  e  $\xi = 1/6$ , os resultados obtidos diferem do caso  $\xi = 0$ . Portanto, a simetria conforme pode ser quebrada na presença de correções LQG. Com base nesses

resultados, podemos concluir que o buraco negro auto-dual tem um comportamento estável sob perturbações fornecidas por um campo escalar massivo com um acoplamento não mínimo com gravidade. No entanto, é importante mencionar que limitações ainda estão presentes na descrição de LQG dos espaços-tempos como a redução dos graus de liberdade microscópicos, devido às simetrias adicionais na LQC. Desta forma, futuras investigações devem abordar a questão dos Modos Quase Normais considerando a massa do campo e o acoplamento com a gravidade no contexto de BHs mais recentes em LQG.

Assim, o presente estudo pode nos ajudar a entender a estabilidade do buraco negro auto-dual, e também abre uma discussão sobre a interessante questão da violação da simetria conforme no contexto de buracos negros quânticos em loop. Uma análise mais aprofundada considerando extensões rotativas e carregadas de SDBH, bem como, outras soluções de buraco negro em LQG, devem melhorar nossa compreensão deste problema. Desta forma, futuras investigações devem abordar o problema de modos quase normais, considerando o acoplamento não mínimo com a gravidade no contexto de BHs mais recentes em LQG.

# Referências

- 1 ROVELLI, C. *Quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 13.
- 2 ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 13.
- 3 MODESTO, L.; PRÉMONT-SCHWARZ, I. Self-dual black holes in loop quantum gravity: Theory and phenomenology. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 6, p. 064041, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 36.
- 4 SCIENTIFIC, L. Gwtc-1: a gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs. *Phys. Rev. X*, v. 9, n. 031040, p. 1811–12907, 2019. Citado na página 13.
- 5 HOROWITZ, G. T.; HUBENY, V. E. Quasinormal modes of ads black holes and the approach to thermal equilibrium. *Physical Review D*, APS, v. 62, n. 2, p. 024027, 2000. Citado na página 14.
- 6 BERTI, E.; CARDOSO, V.; STARINETS, A. O. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 16, p. 163001, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 47.
- 7 DREYER, O. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. *Physical Review Letters*, APS, v. 90, n. 8, p. 081301, 2003. Citado na página 14.
- 8 SANTOS, V.; MALUF, R.; ALMEIDA, C. Quasinormal frequencies of self-dual black holes. *Physical Review D*, APS, v. 93, n. 8, p. 084047, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 48.
- 9 CRUZ, M.; SILVA, C.; BRITO, F. Gravitational axial perturbations and quasinormal modes of loop quantum black holes. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 2, p. 1–10, 2019. Citado na página 14.
- 10 CRUZ, M.; BRITO, F.; SILVA, C. Polar gravitational perturbations and quasinormal modes of a loop quantum gravity black hole. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 4, p. 044063, 2020. Citado na página 14.
- 11 LIU, C. et al. Shadow and quasinormal modes of a rotating loop quantum black hole. *Physical Review D*, APS, v. 101, n. 8, p. 084001, 2020. Citado na página 14.
- 12 WALD, R. M. Black hole entropy is the noether charge. *Physical Review D*, APS, v. 48, n. 8, p. R3427, 1993. Citado na página 14.
- 13 KONOPLYA, R.; STUČHLÍK, Z.; ZHIDENKO, A. Massive nonminimally coupled scalar field in reissner-nordström spacetime: Long-lived quasinormal modes and instability. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 10, p. 104033, 2018. Citado na página 14.
- 14 SCHUTZ, B. F.; WILL, C. M. Black hole normal modes: a semianalytic approach. *The Astrophysical Journal*, v. 291, p. L33–L36, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 47.

- 15 IYER, S.; WILL, C. M. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Physical Review D*, APS, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 47.
- 16 PIRES, A. *Evolução das idéias da Física, 2ª edição, Livraria da Física, S.* [S.l.]: Paulo, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 39.
- 17 EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, v. 4, 1905. Citado na página 15.
- 18 MARTINS, R. d. A. Relativistic dynamics before einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, n. 1, p. 11–26, 2005. Citado na página 15.
- 19 SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 31.
- 20 D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado 7 vezes nas páginas 15, 20, 23, 26, 32, 34 e 36.
- 21 LAMBOURNE, R. J. *Relativity, gravitation and cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 20.
- 22 CARROLL, S. M. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. *Addison Wesley*, v. 101, p. 102, 2004. Citado 7 vezes nas páginas 21, 25, 26, 31, 33, 35 e 40.
- 23 WALD, R. M. *General Relativity, Chicago, Usa: Univ.* [S.l.]: Pr, 1984. Citado 5 vezes nas páginas 21, 25, 26, 31 e 35.
- 24 LAMBERT, P.-H. Introduction to black hole evaporation. *arXiv preprint arXiv:1310.8312*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 40.
- 25 GEROCH, R. Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 11, n. 2, p. 437–449, 1970. Citado na página 26.
- 26 HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 13, n. 2, p. 191, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- 27 REES, M.; RUFFINI, R.; WHEELER, J. A. Black holes, gravitational waves, and cosmology: an introduction to current research. *bhgw*, 1974. Citado na página 29.
- 28 HARTLE, J. B. *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.
- 29 SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 38, n. 4, 2016. Citado na página 33.
- 30 MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. *Introduction to quantum effects in gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 40.
- 31 ASHTEKAR, A.; LEWANDOWSKI, J.; SAHLMANN, H. Classical quantum gravity 21. *R53*, v. 4, 2004. Citado na página 36.

- 32 HAN, M.; MA, Y.; HUANG, W. Fundamental structure of loop quantum gravity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 16, n. 09, p. 1397–1474, 2007. Citado na página 36.
- 33 THIEMANN, T.; KASTRUP, H. A. Canonical quantization of spherically symmetric gravity in ashtekar’s self-dual representation. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 399, n. 1, p. 211–258, 1993. Citado na página 36.
- 34 ASHTEKAR, A. Loop quantum cosmology: an overview. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 41, n. 4, p. 707–741, 2009. Citado na página 36.
- 35 BOJOWALD, M.; MORALES-TÉCOTL, H. A. Cosmological applications of loop quantum gravity. In: *The early universe and observational cosmology*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 421–462. Citado na página 36.
- 36 BROWN, E.; MANN, R.; MODESTO, L. Stability of self-dual black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 695, n. 1-4, p. 376–383, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 37 HOSSENFELDER, S.; MODESTO, L.; PRÉMONT-SCHWARZ, I. Emission spectra of self-dual black holes. *arXiv preprint arXiv:1202.0412*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 38 SAHU, S.; LOCHAN, K.; NARASIMHA, D. Gravitational lensing by self-dual black holes in loop quantum gravity. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 6, p. 063001, 2015. Citado na página 38.
- 39 KRAGH, H. Equation with the many fathers. the klein–gordon equation in 1926. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 52, n. 11, p. 1024–1033, 1984. Citado na página 39.
- 40 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Citado na página 39.
- 41 GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. Citado na página 39.
- 42 BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984. Citado na página 40.
- 43 TRASCHEN, J. An introduction to black hole evaporation. *arXiv preprint gr-qc/0010055*, 2000. Citado na página 40.
- 44 FULLING, S. A. et al. *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*. [S.l.]: Cambridge university press, 1989. Citado na página 40.
- 45 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.; ROMER, R. H. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1988. Citado na página 43.
- 46 THORNE, K.; WALD, R. Black holes and relativistic stars. In: *Proceedings of a Conference in Memory of S. Chandrasekhar, Ed. RM Wald (University of Chicago Press, Chicago, 1998)*, *gr-qc/9706079*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 46.

- 
- 47 SANTOS, J.; CRUZ, M.; BRITO, F. Quasinormal modes of a massive scalar field nonminimally coupled to gravity in the spacetime of self-dual black hole. [*arXiv:2103.11212*], 2021. Citado na página 46.
- 48 KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, B. G. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 2, n. 1, p. 1–72, 1999. Citado na página 47.
- 49 NOLLERT, H.-P. Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 16, n. 12, p. R159, 1999. Citado na página 47.
- 50 KONOPLYA, R. Quasinormal modes of the schwarzschild black hole and higher order wkb approach. *J. Phys. Stud*, v. 8, p. 93, 2004. Citado na página 47.
- 51 SIMONE, L. E.; WILL, C. M. Massive scalar quasi-normal modes of schwarzschild and kerr black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 9, n. 4, p. 963, 1992. Citado na página 48.
- 52 KONOPLYA, R. Massive vector field perturbations in the schwarzschild background: Stability and quasinormal spectrum. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 2, p. 024009, 2006. Citado na página 48.