



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Cenários cosmológicos a partir de soluções tipo multi-kinks

KELVEN FELIX PEREIRA

CAMPINA GRANDE
-AGOSTO DE 2019-

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Cenários cosmológicos a partir de soluções tipo multi-kinks

KELVEN FELIX PEREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos.

CAMPINA GRANDE
-AGOSTO DE 2019-

P436c Pereira, Kelven Felix.
 Cenários cosmológicos a partir de soluções tipo multi-kinks / Kelven
Felix Pereira. – Campina Grande, 2019.
 42 f. : il. color.

 Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
 "Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lucio dos Santos".
 Referências.

 1. Parâmetros Cosmológicos. 2. Método Multi-kinks. 3. Método da
Deformação. 4. Defeitos. I. Santos, João Rafael Lucio dos. II. Título.

CDU 524.8(043)

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, que sempre esteve comigo e me possibilita buscar minhas metas. Ao meu orientador João Rafael L. Santos que aceitou esse compromisso da dissertação e sempre se dedicou a me ajudar com explicações, materiais e correções, e pela sua paciência em todo esse processo. Aos demais professores da Unidade acadêmica de física que tive o prazer de estudar, agradeço também a todos os funcionários desse departamento que torna um ambiente agradável para a realização das atividades. A CAPES pelo incentivo financeiro. Aos meus pais Pedro Vieira Pereira e Maria Jose Felix Pereira que sempre me incentivaram a continuar meus estudos, a minha noiva Thayse Ferreira Tomé que esteve ao meu lado em todo esse processo e me motivou para concluir esse trabalho, com paciência nos momentos que precisei me dedicar ao curso de mestrado. Ao meu irmão Kleyton Felix Pereira que sempre me motivou a ir em busca dos meus objetivos, ao meu grande amigo Arthur Souza Ramos que me deu uma grande ajuda no decorrer desses anos, dedicando sempre um tempo para debatermos a cerca desse trabalho. A Renan Gomes Aragão e todos os amigos do programa de mestrado que me ajudaram durante essa jornada. Por fim, aos amigos e familiares que direta ou indiretamente ajudaram com incentivo e apoio.

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de defeitos do tipo kink (curva vermelha) e anti-kink (curva azul).	9
1.2	Gráfico do potencial ϕ^4 .	9
1.3	Potencial ϕ^4 invertido.	11
1.4	Soluções do tipo lump (linha azul) e anti-lump (linha vermelha).	11
1.5	O gráfico $\eta_0(x)$ caracterizando estabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 .	14
1.6	O gráfico $\eta_0(x)$ caracterizando instabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 invertido.	15
2.1	Potencial V2.	19
2.2	ϕ_2 .	19
4.1	A linha preta é representada por $b = 1.01, a_2 = -1.6, a_3 = -0.9, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$, vermelho para $b = 1.01, a_2 = -1.5, a_3 = -0.9, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$, a azul $b = 1.02, a_2 = -1.9, a_3 = -0.9, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$. Linha tracejada vermelha $b = 1.01, a_2 = -2.1, a_3 = -0.8, t_0 = 1$ e $c_0 = 0.6$ e a linha tracejada azul $b = 1.01, a_2 = -1.6, a_3 = -0.3, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$.	30
4.2	a linha preta é representada por $b = 1.4, a_2 = 0, t_0 = 2.5$ e $c_0 = -0.6$, vermelho para $b = 1.005, a_2 = 0.3, t_0 = 2$ e $c_0 = -0.2$, a azul $b = 1.005, a_2 = -0.3, t_0 = 5$ e $c_0 = -0.6$. Linha tracejada vermelha $b = 1.0000001, a_2 = 0.3, t_0 = 2$ e $c_0 = 0.6$ e a linha tracejada azul $b = 1.0000001, a_2 = -0.18, t_0 = 2.5$ e $c_0 = -0.2$.	31
4.3		32

Resumo

Modelos cosmológicos também são utilizados para tentar descrever a fase de expansão cósmica, desta forma, manifesta-se como uma alternativa bastante promissora para o estudo da inflação cósmica e da energia escura. Esta dissertação é fundamentada na aplicação de soluções de multi-kinks em modelos cosmológicos no intuito de encontrar um modelo que possa descrever as fases de expansão do universo. Na década de 1990 dois grupos em trabalhos distintos conseguiram comprovar experimentalmente que o universo se encontra na fase de expansão acelerada, a energia escura foi o mecanismo para explicar essa expansão. Para explicar a energia escura, surgiram algumas teorias, entre elas destacamos os modelos cosmológicos a partir de soluções tipo multi-kinks, no qual utilizamos uma ação composta por um campo escalar e acoplada a ação de Einstein-Hilbert, esse acoplamento reflete na equação de movimento relativa a densidade de lagrangiana do campo escalar e nas equações de Friedmann oriundo da minimização da ação relacionado à métrica. Com isso, o campo influencia na determinação dos parâmetros cosmológicos. Através da utilização do método de deformação, é possível obter novos modelos de campo escalar, e com isso obter modelos nos quais os parâmetros cosmológicos sejam de acordo com os vistos em observações. O método de multi-kinks é uma ferramenta de grande potencial para gerar modelos analíticos com parâmetros que possuam uma certa complexidade. Esse procedimento também pode ser aplicado em cenários que possuem mais de um campo escalar e em teorias generalizadas de gravitação.

Palavras-chave: Defeitos, método da deformação, multi-kinks, parâmetros cosmológicos.

Abstract

Cosmological models are used to describe a phase of cosmic expansion, thus it manifests as a very promising alternative for the study of cosmic inflation and dark energy. This dissertation is based on the application of multi-kinks solutions in cosmological models not intuited to find a model that can describe as phases of universe expansion. In the 1990s, there are two groups in which subjects are obtained experimentally that the universe is in a phase of accelerated expansion. To explain dark energy, some theories have emerged, principally cosmological models from multi-kink solutions, in which we use an action composed by a scalar field and coupled to the Einstein-Hilbert action, this coupling reflects in the equation of relative's motion to the lagragian density of the scalar field and Friedmann equations derived from the minimization of metric-related action. Thus, the field influences the determination of cosmological parameters. By using the deformation method, it is possible to obtain new scalar field models, and thus obtain models in which the cosmological parameters are as seen in observations. The multi-kinks method is a great potential tool for generating analytical models with parameters that have a certain complexity. This procedure can also be applied in scenarios that have more than one scalar field and in generalized theories of gravity.

Keywords: Defects, deformation method, multi-kink, cosmological parameters.

Sumário

1	Generalidades sobre defeitos Topológicos	3
1.1	Modelo de um Campo Escalar Real	3
1.2	Soluções BPS	5
1.3	Modelo de dois Campos Escalares Reais	6
1.4	Soluções BPS	7
1.5	Carga Topológica	8
1.6	Solução do Tipo Kink	9
1.7	Soluções do Tipo Lump	10
1.8	Estabilidade Linear	12
2	Método de Multi-Kinks e Defeitos Deformados	16
2.1	Método da Deformação para Multi-Kinks	17
3	Cosmologia e Formalismo de Primeira Ordem	20
3.1	Solução de Einstein-Hilbert	20
3.2	Equações de Friedmann e Modelo FLRW	22
3.3	Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito	24
3.4	Formalismo de primeira ordem	27
4	Aplicação de multi-kinks em modelos cosmológicos	29
5	Conclusões	33
A	Relatividade Geral	35
B	Equações de Friedmann	37

Introdução

Os estudos dos sistemas físicos direcionado à dinâmica de campos escalares reais são de grande relevância no mundo científico, pois através destes estudos, podemos descrever uma classe de fenômenos que têm como base os princípios físicos da teoria de campos. Suas aplicações vão desde sistemas de matéria condensada até cosmologia e física de altas energias. Uma vertente mais moderna da cosmologia é utilizar o campo escalar para poder descrever o campo inflaton [1, 2], o qual seria responsável pela aceleração cósmica ocorrida nos primórdios do universo. Uma outra aplicação é sobre modelos de quintessência, [3, 4] que descreve a dinâmica de campos escalares na fase atual do universo atribuindo à energia escura. Já em matéria condensada, temos a descrição de defeitos topológicos, [5, 6]. Esses defeitos surgem quando ocorre a quebra de simetria na transição de fases do sistema, que pode resultar em kinks, vórtices, parede de domínios, etc. Analisando matematicamente, os defeitos topológicos são definidos como solução estável numa equação diferencial não-linear e que possui energia finita. Podemos dizer que um sistema é simétrico quando nele não muda suas características e nem suas propriedades na existência de alterações nos parâmetros que os descrevem. Esse princípio é valioso para aplicações em sistemas físicos, biológicos, matemáticos etc. Na física, a aplicação mais importante envolvendo simetria é no teorema de Noether [7], que diz que para cada simetria contínua em um sistema, existe uma lei de conservação correspondente. Em modelos cosmológicos, essa quebra de simetria está ligada ao surgimento de defeitos topológico nos anos iniciais do universo, dando origem a cordas cósmicas e monopólios magnéticos. Por volta dos anos 1990, os grupos Supernova Cosmology Project e High Redshift Supernova Team conseguiram a comprovação experimental que o universo se encontra em fase de expansão acelerada [8, 9], o “elemento” responsável por essa expansão ficou conhecido como Energia escura, e nas observações mostram que ela representa cerca de 70% de toda a matéria do universo [10]. Utilizaremos campos escalares para explicar a expansão cósmica acelerada do universo, será utilizado para descrever a energia escura como sendo uma alternativa diferenciada do procedimento que inclui a constante cosmológica. A presença do campo escalar, o qual é conhecido como ínflaton, admite a construção de um modelo capaz de atender os principais problemas encontrados na teoria padrão, em um regime inflacionário. A introdução de um campo escalar nos possibilita gerar um modelo ϕ -CDM (ϕ - Cold Dark Matter), onde o campo escalar ϕ corresponde ao conteúdo de energia escura no universo.

No capítulo 1, apresentaremos conceitos sobre teorias de campos relativísticos utilizando a métrica de Minkowski. Iniciaremos descrevendo modelos de um campo escalar real, determinando a equação de Euler-Lagrange para esse modelo e a solução BPS(Bogomol’nyi, Prasad e Sommersfield) [11], em seguida repetiremos esse procedimento para o caso do modelo de dois campos escalares reais. Ainda traremos o conceito de carga topológica e de setor topológico, caracterizando os defeitos tipo kink e lump e seus respectivos gráficos, onde abordaremos algumas discursões sobre suas propriedades e analisaremos a estabilidade das soluções.

No capítulo 2, iremos contextualizar os estudos relacionados a defeitos topológicos e defeitos deformados, onde citaremos alguns trabalhos relacionados a essa problemática. Utilizaremos o método de deformação como uma ferramenta facilitadora para chegar a soluções analítica, já que as configurações tipo kink são obtidas por meio de equações de campo não-lineares, desta forma, não é simples obter tais soluções. Analisaremos, também, a questão da densidade de energia localizada no espaço.

No capítulo 3, Apresentaremos uma revisão sobre alguns conceitos de cosmologia onde apresentaremos o procedimento de minimização de Einstein-Hilbert acoplada à lagrangiana com um campo escalar. Através desse procedimento, conseguiremos encontrar as equações de campo de Einstein, e com essa, iremos determinar as equações de Friedmann. Mostraremos o primeiro modelo a considerar o universo em expansão (FLRW) e finalizaremos esse capítulo com o formalismo de primeira ordem.

Depois de termos abordado vários aspectos sobre campos escalares, no último capítulo iremos fazer a aplicação de multi-kinks em modelos cosmológicos, faremos um análise sobre os parâmetros cosmológico, assim como mostraremos o melhor modelo cosmológico que estão em conformidade com os dados observáveis.

No final deste trabalho, apresentaremos dois apêndices, o primeiro uma demonstração de propriedade relacionada a equação de Einstein, e o segundo sobre as equações de Friedmann.

Capítulo 1

Generalidades sobre defeitos Topológicos

Neste capítulo, apresentaremos e discutiremos teorias de campos relativísticos que respeitam a métrica de Minkowski. Começaremos descrevendo o modelo de um campo escalar real e a solução BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommersfield) [11] as quais representam soluções tipo defeitos não-triviais de energia mínima, em seguida faremos os mesmos procedimentos para o modelo de dois campos escalares reais, mostraremos o conceito de carga topológica e de setor topológico. Logo após, caracterizaremos defeitos tipo kink e lump, traçando gráficos e discutindo suas propriedades. Por fim, analisaremos a questão de estabilidade das soluções em regime de pequenas perturbações.

1.1 Modelo de um Campo Escalar Real

Nos anos 70 cresceu a ideia da possibilidade dos chamados defeitos topológicos, teorias que tentam explicar a evolução do universo. Acredita-se que na fase primitiva do universo, quando a temperatura estava em processo de decaimento, tenham sido originados defeitos topológicos [12]. Tais defeitos emergem quando, em uma dada região, existe uma quebra espontânea de simetria em um sistema físico [13, 14]. Em teoria clássica de campos unidimensional existem dois tipos básicos de defeitos denominados por Kink e Lump, que serão exemplificados no decorrer deste capítulo.

Para iniciarmos nossas discussões, vamos considerar a seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (1.1)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial e ϕ é um campo escalar, em que $\mu = 0, 1, 2, 3$. A caracterização dos processos físicos relativos a essa teoria surgem a partir da minimização da ação

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x. \quad (1.2)$$

Para obtermos a equação de movimento, devemos utilizar o princípio variacional de Hamilton e minimizar a ação com relação ao campo ϕ . Estamos considerando a métrica de Minkowski em um espaço de (3+1) dimensões, ou seja $\phi = \phi(\vec{x}, t)$ e em todos os nossos cálculos, utilizaremos o sistema natural de unidades no qual, $c = \hbar = 1$. Aplicando o princípio de minimização da ação em (1.2) temos

$$\delta S = \delta \left(\int \mathcal{L} dt d^3x \right) = \int dt d^3x \delta \mathcal{L} = 0, \quad (1.3)$$

onde,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi). \quad (1.4)$$

Portanto, a variação da ação S é tal que

$$\delta S = \int dt d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \right] = 0. \quad (1.5)$$

Utilizando a regra do produto no segundo termo da integral anterior, temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right] - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi. \quad (1.6)$$

Dessa forma,

$$\delta S = \int dt d^3x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right] - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi \right\}. \quad (1.7)$$

O segundo termo da equação acima é nulo, pois adotamos um regime no qual $(\delta\phi) = 0$ nos limites de integração. Deste modo, a variação da ação nos leva a

$$\delta S = \int dt d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi = 0, \quad (1.8)$$

resultando na equação de movimento

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (1.9)$$

também denominada equação de Eüler-Lagrange. Ao considerarmos a densidade de lagrangiana (1.1) obtemos diretamente que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu\phi + \partial^\mu\phi) = \partial^\mu\phi, \quad (1.10)$$

implicando em

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu \partial^\mu\phi. \quad (1.11)$$

Além disso, podemos verificar que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{dV}{d\phi}, \quad (1.12)$$

resultando na equação de movimento

$$\partial_\mu \partial^\mu\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (1.13)$$

Tal equação em (1+1) dimensões pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (1.14)$$

ou ainda,

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (1.15)$$

No caso de defeitos estáticos, ou do tipo onda viajante, temos a seguinte equação de movimento.

$$-\phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (1.16)$$

A equação anterior pode ser integrada uma vez se multiplicarmos ambos os lados por ϕ' , resultando em

$$\phi' \phi'' = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{dx}, \quad (1.17)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{dV}{dx}. \quad (1.18)$$

Conseqüentemente, ao integrarmos a relação acima em respeito a coordenada x , obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V + C}. \quad (1.19)$$

onde C é uma constante arbitrária de integração.

Podemos verificar ainda, que o tensor de energia momento ($T^{\mu\nu}$) para o sistema descrito em (1.1), possui a seguinte estrutura [15]

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right). \quad (1.20)$$

Na equação anterior, a componente temporal do tensor energia momento, T^{00} , é interpretada como a densidade de energia (ϵ) do sistema, que possui a forma

$$T^{00} = \epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (1.21)$$

Assim, para campos estáticos, a densidade de energia $\epsilon(x)$ torna-se simplesmente

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (1.22)$$

Esse último resultado pode ser integrado sobre todo o espaço, resultando na energia total do sistema, cuja forma explícita é

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (1.23)$$

1.2 Soluções BPS

Nesta seção apresentaremos as bases do chamado método BPS. Tal método foi proposto de forma independente por Bogomoln'y, Prasad e Sommerfield em meados da década de mil novecentos e setenta [16, 17]. Tal método tem como objetivo vincular os defeitos ao chamado limite de energia BPS, sendo este, um valor mínimo de energia

necessário para que o campo apresente soluções não-triviais. A fim de introduzir o método BPS, permita-nos considerar que a energia total apresentada em (1.23) pode ser reescrita segundo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \right]^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx, \quad (1.24)$$

Assim, ao impormos o vínculo

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (1.25)$$

a energia total fica escrita como

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} \right) dx. \quad (1.26)$$

Deste modo, observamos que esse procedimento tem a capacidade de minimizar a energia do sistema desde que as soluções que obedeçam o vínculo (1.25).

Como vimos anteriormente, o processo de integração primeira da equação de movimento resulta na equação diferencial de primeira ordem (1.19), sendo assim, ao isolarmos o potencial $V(\phi)$ nesta última expressão e substituindo este resultado em (1.23) ficamos com

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{C}{2} \right] dx = -C(\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx. \quad (1.27)$$

Desta maneira, para que a energia total seja finita, devemos tomar $C = 0$ em (1.19). Verificamos também, que considerando tal escolha para a constante C , a equação (1.18) torna-se idêntica à (1.25).

Permita-nos agora, redefinir o potencial V como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (1.28)$$

onde W_ϕ é a derivada de uma função $W = W(\phi)$, sendo a última denominada por super-potencial. A equação anterior nos permite reescrever a energia total segundo

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|, \quad (1.29)$$

tratando-se do chamado limite de energia BPS.

1.3 Modelo de dois Campos Escalares Reais

Nos trabalhos de Bazeia, Ventura, Simas [18], foi apresentado um formalismo baseado em dois campos escalares (ϕ, χ) acoplados, o qual descreve uma molécula de carbono, na qual o campo ϕ é responsável pelo movimento de torção enquanto χ é responsável pelo movimento longitudinal.

Utilizando o mesmo procedimento do modelo de um campo escalar real, podemos analisar um modelo composto por dois campos escalares reais. Dada a Lagrangiana em (1+1) dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (1.30)$$

averiguamos que as equações de movimento relativas a este modelo são

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0, \quad (1.31)$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' + V_\chi = 0. \quad (1.32)$$

Considerando que nossos campos são estáticos, as equações anteriores são reduzidas a

$$\phi'' = V_\phi; \quad \chi'' = V_\chi \quad (1.33)$$

Essas equações diferenciais de segunda ordem, em geral, serão acopladas e de difícil solução analítica. Uma estratégia para obter modelos analíticos consiste em integra-las uma vez. Analogamente ao caso de um campo, vamos multiplicar a equação à esquerda de (1.33) por ϕ' e a equação à direita de (1.33) por χ' , nos levando a

$$\phi''\phi' = V_\phi\phi'; \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\phi'^2) = V_\phi\phi', \quad (1.34)$$

e

$$\chi''\chi' = V_\chi\chi'; \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\chi'^2) = V_\chi\chi', \quad (1.35)$$

respectivamente. Somando as duas últimas equações encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\phi'^2 + \chi'^2) = V_\phi\phi' + V_\chi\chi' = \frac{d}{dx} (V(\phi, \chi)), \quad (1.36)$$

a qual pode ser integrada resultando em

$$\frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2) = V(\phi, \chi). \quad (1.37)$$

1.4 Soluções BPS

O método BPS pode ser aplicado também ao contexto de modelos compostos por dois campos escalares reais. Para tanto, podemos notar que a densidade de energia de um dado modelo de dois campos escalares é

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi), \quad (1.38)$$

consequentemente, sua energia total é tal que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] dx. \quad (1.39)$$

Deste modo, ao estabelecermos que o potencial V é

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2(\phi, \chi) + \frac{1}{2} W_\chi^2(\phi, \chi) \quad (1.40)$$

somos capazes de reescrever a energia total na forma

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + (W_\phi)^2 + (W_\chi)^2 \right] dx. \quad (1.41)$$

Usando o procedimento do método BPS, que consiste em completar quadrados perfeitos na equação anterior, ficamos com

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] dx \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] dx, \quad (1.42)$$

sendo assim, a condição de minimização de energia impõe os vínculos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi(\phi, \chi), \quad \frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi(\phi, \chi), \quad (1.43)$$

onde estas equações diferenciais de primeira ordem são, em geral, acopladas e também de difícil solução analítica. Caso tais vínculos sejam obedecidos, a energia total recai em

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right) dx, \quad (1.44)$$

que por sua vez pode ser reescrita como

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \quad (1.45)$$

1.5 Carga Topológica

Utilizaremos o conceito de carga topológica para caracterizar defeitos topológicos e não-topológicos através de uma corrente topológica representada por

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W, \quad (1.46)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita anti-simétrico, pela troca de $\mu \rightarrow \nu$.

No regime de $(1 + 1)$ dimensões os índices possuem valores $\mu = 0, 1$. Com isso, as componentes deste pseudo-tensor são $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$ e $\epsilon^{01} = 1 = -\epsilon^{10}$. Por esta assimetria, percebemos que há uma conservação da corrente topológica através do produto

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.47)$$

Podemos, agora, traçar um paralelo entre a corrente J_T^μ e as chamadas correntes de Noether, o que nos permite definir uma carga topológica a partir da seguinte relação

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} W dx, \\ &= W(\phi_{(x \rightarrow +\infty)}) - W(\phi_{(x \rightarrow -\infty)}), \\ Q_T &= E_{BPS}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

Com essa equação, é possível caracterizar dois tipos de soluções: se Q_T for diferente de zero teremos as chamadas soluções topológicas e quando Q_T é nula possuímos soluções não-topológicas. Soluções topológicas unidimensionais são em geral do tipo kink e são estáveis sob pequenas perturbações, já soluções não topológicas são denominadas por lumps e são instáveis sob pequenas perturbações.

1.6 Solução do Tipo Kink

Como vimos na seção anterior, a existência de uma carga topológica não nula caracteriza uma solução do tipo kink. Curiosamente o nome kink está relacionado com o formato dessas soluções como vemos no gráfico da Figura 1.1

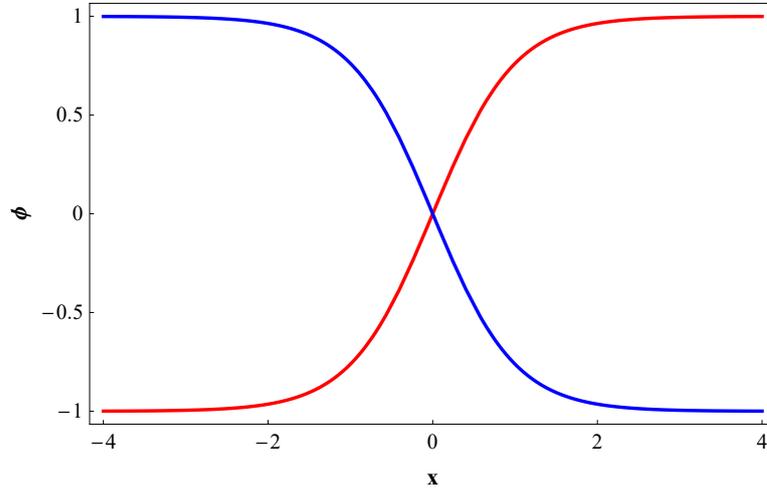


Figura 1.1: Exemplos de defeitos do tipo kink (curva vermelha) e anti-kink (curva azul).

O exemplo padrão de modelo com um defeito tipo kink é o chamado modelo ϕ^4 , onde a densidade de lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{(1 - \phi^2)^2}{2}. \quad (1.49)$$

e o gráfico do potencial ϕ^4 é

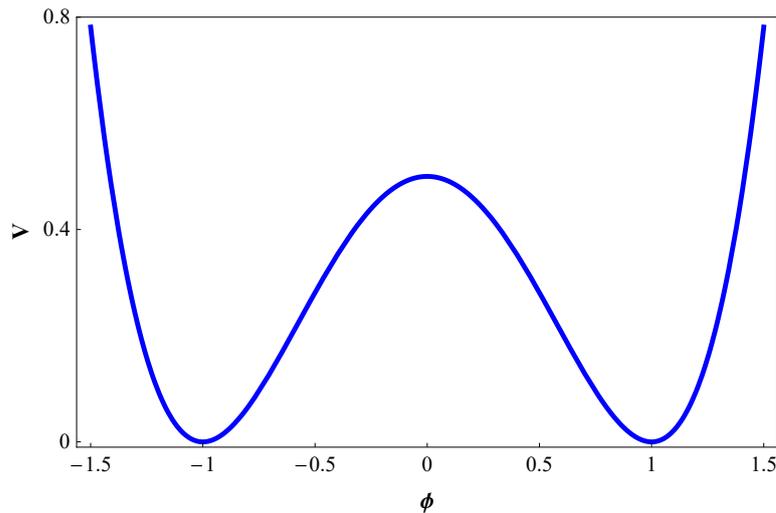


Figura 1.2: Gráfico do potencial ϕ^4 .

Observamos na Figura 1.1 que as soluções tendem assintoticamente para os valores $\phi = \pm 1$, sendo estes denominados vácuos e correspondem aos mínimos do potencial apresentado em (1.49). Ao utilizarmos o vínculo (1.28), obtemos que o superpotencial

$W(\phi)$, possui a forma

$$\begin{aligned}
W(\phi) &= \int d\phi W_\phi, \\
&= \int d\phi(1 - \phi^2), \\
W(\phi) &= \phi - \frac{\phi^3}{3} + c,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

onde c é uma constante de integração. Além disso, a equação de movimento e a equação diferencial de primeira ordem associadas a este modelo são

$$\phi'' = 2\phi(\phi^2 - 1) \quad e \quad \phi' = \pm(1 - \phi^2). \tag{1.51}$$

com soluções analíticas dadas por

$$\phi_\pm(x) = \pm \tanh(x), \tag{1.52}$$

as quais podem ser apreciadas na Figura 1.6.

Podemos verificar diretamente que a energia BPS e a carga topológica deste modelo são

$$\begin{aligned}
E_{BPS} &= W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty)), \\
&= (+1) - \frac{(+1)^3}{3} - (-1) - \frac{(-1)^3}{3}, \\
&= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right), \\
E_{BPS} = Q_T &= \frac{4}{3}.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Observamos que o mesmo valor da energia BPS pode ser obtido através da relação para a energia total, como demonstrado abaixo

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\phi'^2}{2} \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 \right], \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sinh^4(x), \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Deste modo, confirmamos que (1.53) corresponde ao valor energético necessário para criar uma solução topológica tipo kink ou anti-kink no modelo ϕ^4 . Como a energia BPS é diferente de zero, existe uma carga topológica associada a esses defeitos. Observamos também que o potencial ϕ^4 possui um setor topológico associado a um processo de quebra espontânea de simetria, conseqüentemente, podemos atribuir a existência da carga topológica à quebra da simetria presente no potencial.

1.7 Soluções do Tipo Lump

Podemos exemplificar um modelo com solução do tipo lump utilizando o potencial denominado ϕ^4 invertido, cuja forma é

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)\phi^2, \quad (1.55)$$

a qual pode ser apreciada na Figura 1.3.

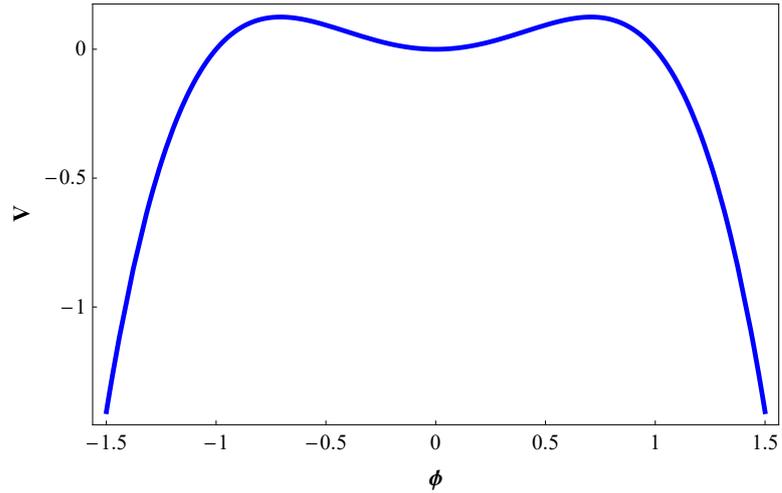


Figura 1.3: Potencial ϕ^4 invertido.

A equação diferencial de primeira ordem para esse modelo é

$$\phi' = W_\phi = \pm\phi(1 - \phi^2)^{1/2}, \quad (1.56)$$

com soluções analíticas dadas por

$$\phi(x) = \mp \operatorname{sech}(x). \quad (1.57)$$

As formas dessas soluções são ilustradas no gráfico da Figura 1.4.

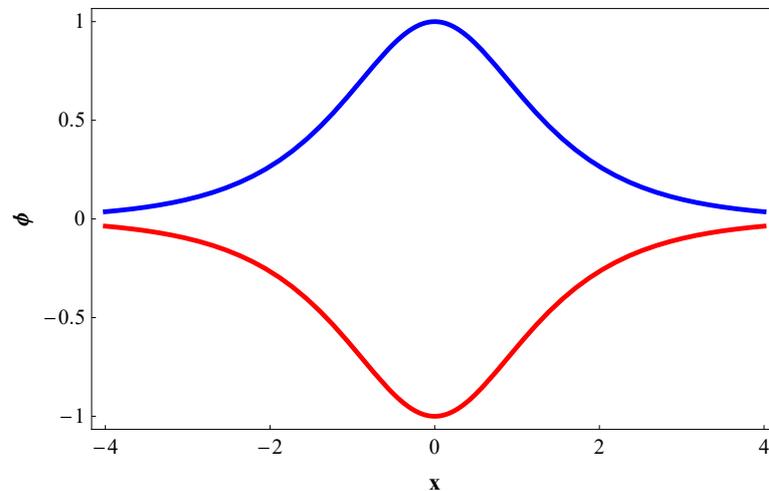


Figura 1.4: Soluções do tipo lump (linha azul) e anti-lump (linha vermelha).

Como próximo passo de nossa análise, podemos determinar a energia total do lump através do aplicação direta deste modelo na equação (1.23), resultando em

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\phi^2(1 - \phi^2)], \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{1}{\cosh^4 x} \right) \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Contudo, ao aplicarmos os ingredientes anteriores no cálculo da energia BPS, verificaremos que

$$\begin{aligned}
E_{BPS} &= |W(+\infty) - W(-\infty)|, \\
&= -\frac{1}{3}(1 - 0)^{1/3} - \left[-\frac{1}{3}(1 - 0)^{1/3} \right], \\
E_{BPS} = Q_T &= 0,
\end{aligned} \tag{1.59}$$

caracterizando a presença de defeitos não-topológicos no potencial ϕ^4 invertido.

1.8 Estabilidade Linear

No estudo da estabilidade linear, podemos analisar se as soluções estáticas de modelos compostos por um campo escalar real, são instáveis ou estáveis sob pequenas perturbações. A fim de caracterizar a estabilidade de uma solução, vamos supor que o campo $\phi(x, t)$ possa ser definido como

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t) \tag{1.60}$$

onde $\phi_s(x)$ trata-se da solução estática encontrada via método BPS e $\eta(x, t)$ é uma perturbação.

Substituindo (1.60) na equação de movimento, obtemos

$$\ddot{\eta} - \eta'' - V_{\phi_s \phi_s} \eta = 0; \quad \phi_s'' = V_{\phi_s}. \tag{1.61}$$

Como vimos, a segunda expressão de (1.61) trata-se da equação de Eüler-Lagrange para a solução estática, enquanto que a primeira equação de (1.61) corresponde ao vínculo para a perturbação. É válido salientar que estamos considerando perturbações muito pequenas nas quais apenas as contribuições lineares em η serão relevantes.

Podemos observar que as características da solução η dependem tanto da forma do potencial quanto da solução estática ϕ_s . Uma possível estratégia para solucionar a equação diferencial de η , consiste em considerar a seguinte separação de variáveis

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \cos(\omega_n t). \tag{1.62}$$

Fazendo a substituição de (1.62) em (1.61), podemos reescrever a última na forma

$$H \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \tag{1.63}$$

onde H é dado por

$$H = \frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi_s \phi_s}, \quad (1.64)$$

e (1.63) trata-se de uma equação de autovalores análoga à equação de Schrodinger na Mecânica Quântica. Lembremos que o potencial $V(\phi_s)$ pode ser escrito como

$$V(\phi_s) = \frac{W_{\phi_s}^2}{2}, \quad (1.65)$$

consequentemente, nosso operador H é tal que

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi_s \phi_s}^2 + W_{\phi_s} W_{\phi_s \phi_s \phi_s}. \quad (1.66)$$

Podemos também, redefinir H em termos dos operadores a e a^\dagger , implicando em

$$H = a^\dagger a \quad (1.67)$$

onde

$$a = -\frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s}, \quad (1.68)$$

e

$$a^\dagger = \frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s}. \quad (1.69)$$

Os resultados anteriores nos permitem representar (1.63) como

$$a^\dagger a \eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (1.70)$$

Podemos agora postular a existência de um modo-zero de solução para a equação de autovalores acima. Assumindo que $\eta_0(x)$ corresponde ao estado em que $\omega_0 = 0$, ficamos com

$$a \eta_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi_s \phi_s} \right) \eta_0 = 0, \quad (1.71)$$

ou seja,

$$\frac{d\eta_0}{dx} = W_{\phi_s \phi_s} \eta_0. \quad (1.72)$$

Deste modo, ao integrarmos a equação anterior obtemos

$$\eta_0(x) = A \exp^{\pm \int dx W_{\phi_s \phi_s}}, \quad (1.73)$$

onde A é uma constante de integração. Podemos verificar que $W_{\phi_s \phi_s}$ pode ser representado como

$$W_{\phi_s \phi_s} = \frac{d}{dx} [\log(W_{\phi_s})], \quad (1.74)$$

logo, substituindo a relação anterior em (1.73), ficamos com

$$\eta_0(x) = A W_{\phi_s}. \quad (1.75)$$

Iremos mostrar dois exemplos, um para um potencial do tipo ϕ^4 e outro para um potencial do tipo ϕ^4 invertido.

Exemplo 1: Para um potencial ϕ^4 , com $W_{\phi_s} = 1 - \phi_s^2$, onde a solução analítica é $\phi_s = \tanh^2(x)$, teremos que

$$\eta_0 = 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad (1.76)$$

onde $\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega_0 t)$ e $\eta(x) = \eta_0(\operatorname{sech})(x)$,

Assim, temos que a solução perturbada é

$$\phi(x) = \tanh(x) + \eta_0 \operatorname{sech}(x), \quad (1.77)$$

onde $\eta_0 \ll 1$.

Nessa equação podemos ver que η_0 corresponde ao modo-zero de oscilação.

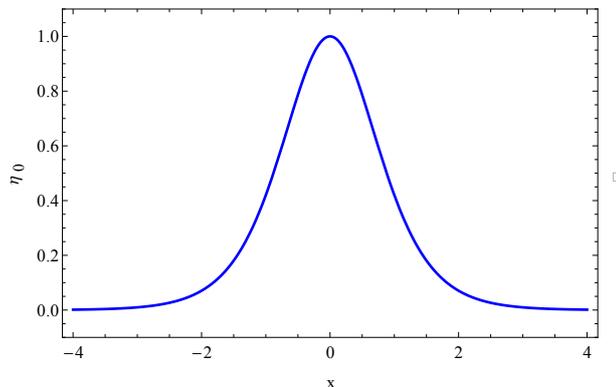


Figura 1.5: O gráfico $\eta_0(x)$ caracterizando estabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 .

Se o estado η_0 diferir do modo zero de oscilação, logo corresponderá a um estado excitado onde existirá um estado fundamental com auto-valor $\omega_n^2 < 0$, ou seja, $\omega \rightarrow i\omega_n$.

A consequência disso é que teremos

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(i\omega_n t) = \eta_0 \left(\frac{e^{\omega_n t} + e^{-\omega_n t}}{2} \right). \quad (1.78)$$

Através dessa equação percebemos que para um tempo "t" tendendo ao infinito, a perturbação $\eta(x, t)$ também tenderá ao infinito, fazendo com que a função se desestabilize.

Exemplo 2: Para um potencial ϕ^4 invertido, com $W_{\phi_s} = \phi\sqrt{1 - \phi_s^2}$, temos que $\phi_s' = -W_{\phi_s}$ onde a solução analítica é $\phi_s = \text{sech}(x)$, teremos que

$$\begin{aligned}\eta_0 &= W_{\phi_s} = \eta_0 \text{sech}(x)\sqrt{1 - \text{sech}^2(x)} \\ &= \eta_0 \text{sech}(x) \tanh(x).\end{aligned}\tag{1.79}$$

Portanto, corresponde ao primeiro modo de oscilação. Desta forma, percebemos que a solução $\phi_s(x)$ é instável.

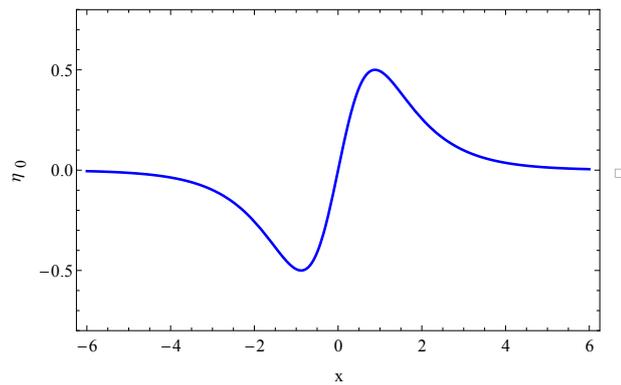


Figura 1.6: O gráfico $\eta_0(x)$ caracterizando instabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 invertido.

Capítulo 2

Método de Mult-Kinks e Defeitos Deformados

Nos últimos anos, houve um crescimento bastante significativo nos estudos ligados a estruturas de defeitos topológicos, principalmente pelo potencial de aplicabilidade destas soluções, como por exemplo, nas áreas de física da matéria condensada e física de altas energias [19–22]. Já em teoria de campos, defeitos topológicos estão associados a quebra espontânea de simetria, dando surgimento a kink, cordas, vórtices e monopolos [23,24]

Na área da cosmologia, há trabalhos sobre defeitos topológicos, nos quais os defeitos estão relacionados com a descrição de uma transição de fase nos primeiros instantes do universo [20, 25]. Segundo as pesquisas de Peyrad and Kruskal, em um cenário de uma estrutura discreta em altas velocidades, um kink se mostrou instável, mas aplicando soluções multi-kinks, percebeu-se um comportamento estável. [26].

Neste trabalho, iremos utilizar um modelo com potencial regular, que suporta configurações multi-kink, seguindo as ideias de Dutra et al [23]. Para obtermos os multi-kinks, iremos considerar dois modelos de campo escalar real em (1+1) dimensões, representados pelas seguintes densidades de lagrangiana

$$L_j = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j - V_j(\phi_j), \quad L_i = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V_i(\phi_i). \quad (2.1)$$

Para soluções estáticas de energia mínima, temos a expressão

$$-\phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.2)$$

a qual resulta na equação diferencial de segunda ordem

$$\phi'' = V_\phi. \quad (2.3)$$

Multiplicando ambos os lados por ϕ' , teremos

$$\phi' \phi'' = \phi' V_\phi. \quad (2.4)$$

Agora, integrando-as

$$\int dx \frac{d}{dx} \left[\frac{(\phi')^2}{2} \right] = \int dx \frac{d(V_\phi)}{dx}, \quad (2.5)$$

Com isso, constatamos que o potencial será dado em termos do campo da seguinte forma

$$V = \frac{(\phi')^2}{2}. \quad (2.6)$$

Podemos reescrever as equações de primeira ordem para as soluções estáticas de energia mínima, como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_j}{dx} \right)^2 = V_{j(\phi_j)}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right)^2 = V_{i(\phi_i)}. \quad (2.8)$$

onde podemos relacionar com os superpotenciais

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \phi'_j = W_{\phi_j}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \phi'_i = W_{\phi_i}. \quad (2.10)$$

Em fim, representamos os potenciais em termos dos superpotenciais

$$V_{j(\phi_j)} = \frac{1}{2} W_{\phi_j}^2, \quad (2.11)$$

$$V_{i(\phi_i)} = \frac{1}{2} W_{\phi_i}^2. \quad (2.12)$$

2.1 Método da Deformação para Multi-Kinks

Pelo fato das configurações tipo kink serem obtidas a partir de equações de campo não-lineares, não é simples obter soluções analíticas. Por isso, utilizaremos um método chamado de "Método de Deformação" o qual foi elaborado por Bazeia e colaboradores [27]. Através desse método podemos construir novos modelos de campo escalares a partir de um ponto inicial.

Uma característica essencial do método de deformação é que o mapeamento entre dois diferentes campos deve ser reversível, ou seja,

$$\{\phi_j = f_{(\phi_{ij})}; \quad \phi_i = f_{(\phi_{ji})}^{-1}\}, \quad (2.13)$$

na qual f é denominada função de deformação. A partir da relação anterior verificamos diretamente que

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \frac{d\phi_j}{d\phi_i} \frac{d\phi_i}{dx}, \quad (2.14)$$

a qual pode ser representada segundo

$$\phi'_j = f_{\phi_i} \phi'_i, \quad (2.15)$$

ou ainda,

$$\phi'_j = f_{\phi_i} W_{\phi_i} \quad (2.16)$$

Isolando o superpotencial, temos

$$W'_i(\phi_i) = \frac{W'_j(f_{ji}(\phi_i))}{f'_{ij}(\phi_i)}, \quad (2.17)$$

resultando no potencial

$$V_i(\phi_i) = \frac{V_j(f_{ij}(\phi_i))}{f'_{ij}(\phi_i)^2} \quad (2.18)$$

Podemos observar a partir dos resultados anteriores que há uma conexão direta entre os dois modelos compostos por um campo escalar real. A ideia fundamental do método de deformação consiste em partir de um modelo analítico composto por um campo escalar real $\phi_j(x)$, e através de uma dada função de deformação podemos mapear novos modelos analíticos.

A fim de construirmos modelos do tipo multi-kink, vamos trabalhar com a seguinte função de deformação [23]

$$\phi_j = f_{\phi_{ji}} = \frac{1}{1+a_i} \left(\phi_i - b + \sqrt{(\phi_i + a_i b)^2 - (1-a_i^2)(1-b^2)} \right), \quad (2.19)$$

onde a e b são parâmetros reais, e a função de deformação $f_{\phi_{ji}}$ só se torna real pela imposição $|a_i| < 1$ e $|b_i| \geq 1$. Derivando (2.19) em relação à ϕ_i , temos

$$\frac{df_{ji}}{d\phi_i} = \frac{1}{1+a_i} \left(1 + \frac{\phi_i + a_i b}{\sqrt{(\phi_i + a_i b)^2 - (1-a_i^2)(1-b^2)}} \right), \quad (2.20)$$

Podemos observar ainda, que a função inversa da deformação possui a forma

$$\phi_i = f_{(\phi_{ji})}^{-1} = \frac{1+a_i}{2} (\phi_j + b) + \frac{(1-a_i)(1-b^2)}{2(\phi_j + b)} - a_i b. \quad (2.21)$$

Após estas generalidades, podemos criar novos modelos analíticos iniciando com um modelo padrão como ponto de partida. Para tanto, consideremos o potencial ϕ^4 normalizado, cuja forma é

$$V_1(\phi_1) = \frac{1}{2} (1 - \phi_1^2)^2, \quad (2.22)$$

com superpotencial correspondente

$$W_1(\phi_1) = \phi_1 - \frac{1}{3} \phi_1^3. \quad (2.23)$$

O modelo acima possui solução analítica tipo kink, dada por

$$\phi_1(x) = \tanh(x - x_0). \quad (2.24)$$

onde x_0 é uma constante de integração que determina o centro do kink. Podemos construir um novo modelo de lagrangiana deformada usando a função deformação (2.21), a qual pode ser aplicada em (2.18), resultando no potencial deformado

$$\begin{aligned} V_2(\phi_2) &= \frac{(1+a_2)^2 \left((\phi_2 + a_2 b)^2 - (1-a_2^2)(1-b^2) \right)}{2 \left(\phi_2 + a_2 b + \sqrt{(\phi_2 + a_2 b)^2 - (1-a_2^2)(1-b^2)} \right)^2} \\ &\times \left[1 - \left(\frac{1}{1+a_2} \left(\phi_2 - b + \sqrt{(\phi_2 + a_2 b)^2 - (1-a_2^2)(1-b^2)} \right) \right)^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A expressão anterior resulta na derivada primeira do superpotencial

$$W_{2\phi_2} = \frac{(1+a_2)\sqrt{(\phi_2+a_2b)^2 - (1-a_2^2)(1-b^2)}}{\phi_2+a_2b + \sqrt{(\phi_2+a_2b)^2 - (1-a_2^2)(1-b^2)}} \times \left[1 - \left(\frac{1}{1+a_2} \left(\phi_2 - b + \sqrt{(\phi_2+a_2b)^2 - (1-a_2^2)(1-b^2)} \right) \right)^2 \right]. \quad (2.26)$$

Podemos ver na figura abaixo que o potencial $V_2(\phi_2)$ possui dois mínimos globais localizados em $\phi_2 = \pm 1$, e existe um mínimo local quando b está próximo do valor crítico $b = 1$. Percebemos, também, que o parâmetro a_2 controla a simetria do potencial.

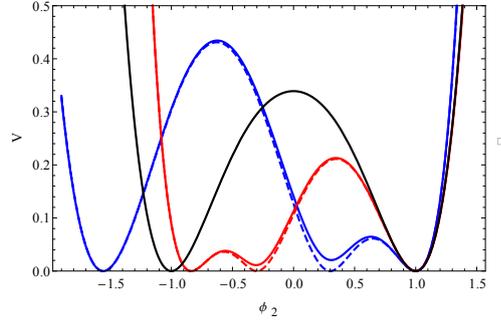


Figura 2.1: Potencial V_2 .

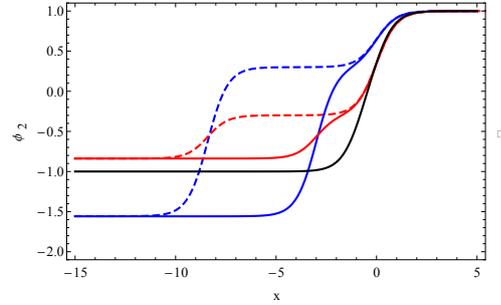


Figura 2.2: ϕ_2 .

A solução topológica para este modelo pode ser obtida usando a função deformação inversa dada por

$$\phi_2(x) = f_{1,2}^{-1}(\phi_1(x)) = \frac{1+a_2}{2} (\phi_1 + b) + \frac{(1-a_2)(1-b^2)}{2(\phi_1 + b)} - a_2b. \quad (2.27)$$

Na figura de baixo o perfil de $\phi_2(x)$ corresponde a solução de duplo-kink. O parâmetro b é responsável pela amplitude da fase que surge, e o parâmetro a_2 provoca um comportamento assimétrico para solução de duplo-kink.

Capítulo 3

Cosmologia e Formalismo de Primeira Ordem

Após as publicações dos trabalhos realizados por Einstein, surgiram duas soluções para as suas equações de campo, a solução de Minkowski, onde mostrava a generalização do espaço-tempo euclidiano plano, e a solução de Schwarzschild, onde o espaço-tempo era esfericamente simétrico e vazio. Em 1917, o primeiro modelo cosmológico relativista é apresentado por Einstein. Todos naquela época acreditavam em um universo estático, o que fez Einstein a modificar as equações originais de sua teoria, incluindo, assim, um termo repulsivo na finalidade de contrabalancear o efeito atrativo da gravitação, conhecido como constante cosmológica.

Em 1922, o cosmólogo e matemático Alexander Friedmann demonstrou a partir das equações de Einstein que o universo sofre uma expansão acelerada. A solução apresentada por ele, considera o universo como homogêneo e isotrópico.

Passados dois anos, o astrônomo Edwin P. Hubble anuncia a descoberta de que as galáxias estão se afastando com velocidade proporcional a sua distância, diante da comprovação da expansão do universo, Einstein abandona a constante cosmológica. Para melhor entendimento desta expansão acelerada, introduziremos as equações de Einstein, que iniciam com a dedução da ação de Einstein-Hilbert, na qual fazendo algumas considerações chega-se às equações de campo.

Utilizando uma métrica FRW adequada à descrição e aplicada as equações de campo, obtemos as equações de Friedmann. Com o formalismo de primeira ordem, encontraremos o parâmetro de aceleração que nos permitirá o entendimento da expansão do universo.

3.1 Solução de Einstein-Hilbert

Para chegarmos às equações de campo da relatividade geral, utilizaremos o caminho mais amplo e conveniente, que é derivar estas equações a partir do princípio variacional de Hamilton (minimização da ação). Essas equações de campo foram propostas em 1905 por Hilbert [28, 29], e são derivadas a partir da ação que ficou conhecida como “Ação de Einstein-Hilbert” ou simplesmente “Ação de Hilbert”. Portanto, partiremos dessa ação a qual é definida por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{4} + L \right), \quad (3.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, g é o determinante do tensor métrico, e ϕ corresponde ao campo escalar. Variando a ação em relação a métrica, teremos

$$\delta S = 0, \quad (3.2)$$

resultando em

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(\frac{-R}{4} + L \right) + \sqrt{-g} \left(\delta \left(\frac{-R}{4} \right) + \delta L \right) \right], \quad (3.3)$$

Utilizaremos ao longo do procedimento de minimização da ação a seguinte identidade

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

cuja dedução é apresentada em detalhes no Apêndice A.

Podemos averiguar que a equação (3.3) pode ser escrita como

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-g}}{4} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}R + 2g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \right] \quad (3.5)$$

onde $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, e

$$\frac{-1}{4}\sqrt{-g}\delta R = \frac{-1}{4}\sqrt{-g}[\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}]. \quad (3.6)$$

Se tomarmos a variação da lagrangiana em relação ao tensor métrico, teremos

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Além disso, é possível mostrar que o segundo termo da integral da equação (3.6) é nulo devido às condições de contorno. Portanto, substituindo as equações (3.6) e (3.7) na equação (3.3), teremos

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{-1}{4}(R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}R) + \frac{1}{2} \left(2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Segundo a teoria da relatividade geral introduzida por Albert Einstein em 1915 [30], a estrutura geométrica e a matéria de uma dada região do espaço-tempo são conectadas através das seguintes equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

denominada equação de Einstein. Por intermédio do princípio da equivalência, podemos determinar a constante $k = \frac{8\pi G}{c^4}$. Salientamos que esta equação será escrita no sistema de unidades para o qual $c = 1$ e $4\pi G = 1$, resultando em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T^{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Ao substituírmos a equação (3.10) em (3.8), teremos a seguinte relação

$$2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

na qual $T_{\mu\nu}$, é denominado tensor energia-momento e simboliza a composição da matéria causadora da curvatura do espaço-tempo [31, 32]

3.2 Equações de Friedmann e Modelo FLRW

De acordo com o modelo FLRW o universo seria espacialmente isotrópico e homogêneo durante toda sua evolução [33]. A confirmação dessa homogeneidade veio em 1965 através da descoberta da radiação cósmica de fundo, realizada por Arno Penzias e Robert Wilson, [34]. Para essa descrição de universo, utilizaremos a métrica correspondente a um espaço-tempo esféricamente simétrico e corrigido por um fator de escala. Esse elemento de linha tem a seguinte forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.12)$$

onde consideramos $c = 1$, K corresponde ao parâmetro de curvatura e pode ter os valores $-1, 0, 1$, para um universo esférico, plano e hiperbólico, respectivamente. O parâmetro $a(t)$ é denominado fator de escala da parte espacial da geometria e é responsável pela contração ou expansão do universo.

Nesta seção, aplicaremos a métrica FLRW nas equações de campo da gravitação para obtermos as equações que descrevem a dinâmica do universo.

Utilizando o elemento de linha descrito a cima, encontramos a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

a partir da qual podemos escrever o tensor métrico inverso

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Temos que o tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, é descrito por [35]

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \quad (3.13)$$

Já o tensor de Ricci é descrito da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad (3.14)$$

no qual, os termos deste tensor que não são nulos para a métrica FLRW são

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (3.15)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) g_{11}; \quad (3.16)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) g_{22}; \quad (3.17)$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) g_{33}. \quad (3.18)$$

Os resultados acima obtidos, serão de grande relevância para os cálculos dos símbolos de Christoffel, dos tensores de Ricci e do escalar de Ricci. Portanto, no apêndice B, descreveremos de forma detalhada os cálculos dos símbolos de Christoffel não nulos e a determinação das componentes do tensor de Ricci.

Temos que a forma compacta dessas relações são descritas como

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad e \quad R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) g_{ij}. \quad (3.19)$$

A partir dos resultados anteriores, determinamos que o escalar de Ricci para a métrica FLRW possui a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}, \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \left[3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)\right], \\ &= -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Portanto, o tensor de Einstein pode ser escrito como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}, \quad (3.21)$$

Onde nessa expressão está representado a parte geométrica das equações de campo. explicitando as componentes temporal e espacial $G_{\mu\nu}$ chegamos a seguinte equação, respectivamente

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R}, \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \\ &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R}, \\
&= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)g_{ij}, \\
&= \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right)g_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.3 Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito

Estamos trabalhando com campos escalares reais acoplados à gravitação, e como já vimos, o princípio cosmológico descreve o universo como sendo homogêneo e isotrópico através da métrica FLRW. Portanto, podemos considerar que um fluido perfeito permeia todo o universo. Com essa afirmação, consideramos a conservação do tensor energia momento. Podemos considerar, como um fluido perfeito, um gás, desde que não tenha interações entre partículas. Partindo dos estudos da mecânica de fluidos, observamos que o tensor energia momento para um fluido ideal é dado da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{3.24}$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão e U o quadrivetor velocidade do fluido. Podemos representar o vetor quadri-velocidade da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
U^0 &= U^t = 1 & U^i &= 0; \\
U^\mu &= (1, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Como estamos considerando um referencial de uma partícula estacionária, ficamos com: $U^\mu = (1, 0)$, portanto, as componentes não nulas do tensor são

$$T_{00} = (\rho + p)U_0U_0 - pg_{00} \quad e \quad T_{ij} = -pg_{ij}. \tag{3.25}$$

O Tensor Energia-Momento na forma matricial pode ser representado da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 p}{(1 - kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 p \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

cujo o traço será: $T = T^\mu_\mu = \rho - 3p$.

Os resultados acima revelam que a componente temporal G_{00} é tal que

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 2T_{00}, \\
3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) &= 2\rho, \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Essa equação permite obter informações sobre a taxa de expansão do universo. O termo $\frac{\dot{a}}{a}$ é chamado de parâmetro de Hubble e é representado pela letra H , implicando em

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.28)$$

Para as componentes espaciais G_{ij} temos

$$\begin{aligned} G_{ij} &= -2pT_{ij}, \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}\right) + \frac{k}{a^2} &= -2p, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \end{aligned} \quad (3.29)$$

esta equação representa a taxa de aceleração em função da pressão e da densidade. As equações (3.28) e (3.29) são as famosas equações de Friedmann.

Relacionando essas equações com a equação da continuidade para um fluido cosmológico, ficamos com a seguinte expressão

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.30)$$

Agora, podemos criar um vínculo da densidade e pressão [36], chamado de equação de estado. O parâmetro da equação de estado [37] é muito importante nos estudos da evolução do universo e é dado por

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \quad (3.31)$$

onde ω é o parâmetro da equação de estado. As formas da densidade e da pressão do universo podem ser determinadas a partir da lagrangiana associada ao campo escalar. Como já vimos no capítulo 1, a lagrangiana relativa à ϕ é tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (3.32)$$

substituindo a equação anterior em (3.11), determinamos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\right), \quad (3.33)$$

cujas formas explícitas de suas componentes para um campo que possui apenas dependência temporal são

$$T_{00} = \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right) g_{00}, \quad (3.34)$$

e

$$T_{ii} = -g_{ii} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right]. \quad (3.35)$$

Relacionando as equações (3.34) e (3.35) com a equação (3.26) teremos como resultado as seguintes expressões

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.36)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.37)$$

Substituindo, agora, as equações (3.36) e (3.37) na expressão (3.31) teremos

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.38)$$

Notamos que a equação de Friedmann (3.28), é tal que

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.39)$$

Tomando a derivada do parâmetro de Hubble em relação ao tempo, teremos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Podemos substituir a expressão anterior na equação (3.29), e obtemos

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 &= -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi), \\ \dot{H} &= -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi) - \frac{2}{3}\rho_\phi + \frac{k}{a^2}, \\ &= \rho_\phi - p_\phi + \frac{k}{a^2}, \\ \dot{H} &= \dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Para completar a descrição deste modelo de universo acoplado a um campo escalar, devemos variar a ação de Einstein-Hilbert em relação ao campo ϕ de modo a descrever a dinâmica do campo. Podemos escrever essa ação da seguinte forma

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}, \quad (3.42)$$

onde $\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\mathcal{L}$. Quando variarmos a ação em relação ao campo escalar, ficamos simplesmente com

$$\delta S = \int d^4x \delta \tilde{\mathcal{L}} = 0, \quad (3.43)$$

resultando na equação de movimento

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (3.44)$$

Portanto, a dinâmica do campo escalar é regida por

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + V_\phi &= 0, \\ \ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + V_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

3.4 Formalismo de primeira ordem

Para tentar descrever a energia escura, pode-se incluir um campo escalar acoplado com a ação de Einstein-Hilbert, procedimento este, que é conhecido como modelo ϕ Cold Dark Matter ($\phi - CDM$) ou modelos de quintessência. No intuito de analisarmos esse procedimento, devemos nos basear nas equações de movimento associadas a dinâmica desse campo escalar. Alguns autores [38, 39] conseguiram soluções que diminuíam a ordem das equações diferenciais de movimento, utilizando uma formulação simplificada.

A fim de aplicarmos a proposta de formalismo de primeira ordem para quintessência, assumiremos uma geometria plana, ou seja, $k = 0$, resultando nas equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) \quad (3.46)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.47)$$

O formalismo de primeira ordem é fundamentado em definir o parâmetro de Hubble como

$$H \equiv -W(\phi). \quad (3.48)$$

Substituindo a equação (3.48) em (3.47), teremos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -W_\phi \dot{\phi}, \\ \dot{H} &= -\dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

consequentemente,

$$\dot{\phi} = W_{\phi}. \quad (3.50)$$

Se isolarmos o potencial descrito na equação (3.46) em função de $W(\phi)$, chegaremos a expressão

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{3}{2} \left[H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{3} \right], \\ &= \frac{3}{2} H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \\ V(\phi) &= \frac{3}{2} W^2 - \frac{\dot{W}_{\phi}^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Esses resultados devem estar coerentes com a equação de movimento (3.45) expressa da seguinte forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi} = 0. \quad (3.52)$$

Para atestar a compatibilidade com essa equação, devemos escrever explicitamente a derivada segunda do campo escalar e a derivada primeira do potencial em termos de $W(\phi)$ e de suas derivadas. Esse procedimento nos permite constatar que a equação de movimento para o campo escalar pode ser representada como

$$\ddot{\phi} = \frac{d}{dt}(W_{\phi}) = W_{\phi\phi}\dot{\phi} = W_{\phi\phi}W_{\phi}, \quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned} V_{\phi} &= \frac{dV}{d\phi}, \\ &= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{3}{2} W^2 - \frac{\dot{W}_{\phi}^2}{2} \right), \\ &= 3WW_{\phi} - W_{\phi}W_{\phi\phi}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Podemos, então, observar que o formalismo de primeira ordem é consistente com a equação de movimento.

Capítulo 4

Aplicação de multi-kinks em modelos cosmológicos

Percebemos que no modelo mais famoso da cosmologia, a aceleração cósmica é explicada através da energia de vácuo. Ela está presente nas equações de campo da relatividade geral representada por uma constante conhecida como “Constante cosmológica(λ)”. Entretanto, há uma desconformidade entre o valor previsto para a energia escura por meio da física de partícula e as observações. Essa desconformidade nos leva a procurar teorias alternativas da gravitação, onde modelos cosmológicos possam ser derivados. Algumas dessas possibilidades são as teorias $F(R)$ e $F(R, T)$. [40–42]. Apresentamos uma outra alternativa que vem dos modelos de campo escalar, chamados de modelos de quintessência, a qual afirma que a dinâmica do universo são regidas por algum campo escalar ϕ . Dependente da forma da evolução no tempo do campo escalar e sobre seu potencial, é possível descrever as fases aceleradas do universo dinâmico, ou seja, energia escura e eras inflacionárias. [43, 44]. Modelos de quintessência com dois campos escalares guiando a dinâmica do universo se mostraram ser modelos cosmológicos bem comportados [36, 45, 46] e sem a necessidade de incluir a constante cosmológica. Nesse, capítulo, derivaremos cenários cosmológicos a partir de modelos de multi-kink, e para obter as soluções de campo escalar, aplicamos anteriormente o formalismo de primeira ordem. Faremos uma análise dos parâmetros cosmológicos, comparando com as observações. Mostraremos que para alguns parâmetros cosmológicos, é possível traçar um cenário cosmológico que seja capaz de descrever as diferentes etapas da evolução do universo. Escolhemos trabalhar com potenciais associados a soluções do tipo mult-kink, pelo fato de conseguirmos encontrar um melhor arranjo observacional.

Escrevendo o campo ϕ_2 , que vimos no capítulo 2, em relação ao tempo como sendo:

$$\phi_2 = \frac{-(-1 + a_2)(1 + a_2 b^2) + (1 + a_2) \tanh[t - t_0](2b + (1 + a_2) \tanh[t - t_0])}{2(1 + a_2)(b + \tanh[t - t_0])}; \quad (4.1)$$

a qual satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = W_2 \phi_2 &= \frac{(1 + a_2) \sqrt{(\phi_2 + a_2 b)^2 - (1 - a_2^2)(1 - b^2)}}{\phi_2 + a_2 b + \sqrt{(\phi_2 + a_2 b)^2 - (1 - a_2^2)(1 - b^2)}} \\ &\times \left[1 - \left(\frac{1}{1 + a_2} \left(\phi_2 - b + \sqrt{(\phi_2 + a_2 b)^2 - (1 - a_2^2)(1 - b^2)} \right) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Integrando a função $W_2(\phi_2)$ em relação a ϕ_2 , ficaremos com

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int W_2 \phi_2 d\phi, \\
&= \left\{ 3(a_2 + 1) \left(\frac{a_2 b + \phi_2}{\sqrt{(a_2 b + \phi_2)^2 - (a_2 - 1)(b^2 - 1)}} + 1 \right) \right\}^{-1} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left(\sqrt{(a_2 b + \phi_2)^2 - (a_2 - 1)(b^2 - 1)} + a_2 b + \phi_2 \right) \\
&\times \left(\frac{(a_2^2 + a_2 + 2) 1 (a_2 b + \phi_2)^3}{(a_2 - 1) \sqrt{(a_2 b + \phi_2)^2 - (a_2 - 1)(b^2 - 1)}} - \frac{3(a_2^2 + a_2 + 2)(b^2 - 1)(a_2 b + \phi_2)}{\sqrt{(a_2 b + \phi_2)^2 - (a_2 - 1)(b^2 - 1)}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3(a_2^2 - 1)b(b^2 - 1) \log \left(\sqrt{-a_2 b^2 + (a_2 b + \phi_2)^2} + a_2 + b^2 - 1 + a_2 b + \phi_2 \right)}{\sqrt{(a_2 b + \phi_2)^2 - (a_2 - 1)(b^2 - 1)}} \right. \\
&\quad \left. + a_2(a_2 + 3) - \frac{a_2(a_2 + 3)(a_2 b + \phi_2)^2}{a_2 - 1} + 3(a_2 + 1)b(a_2 b + \phi_2) \right), \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Utilizando $H = -W_2 + c_0$ iremos obter os gráficos das figuras (4.1) para o parâmetro H_2

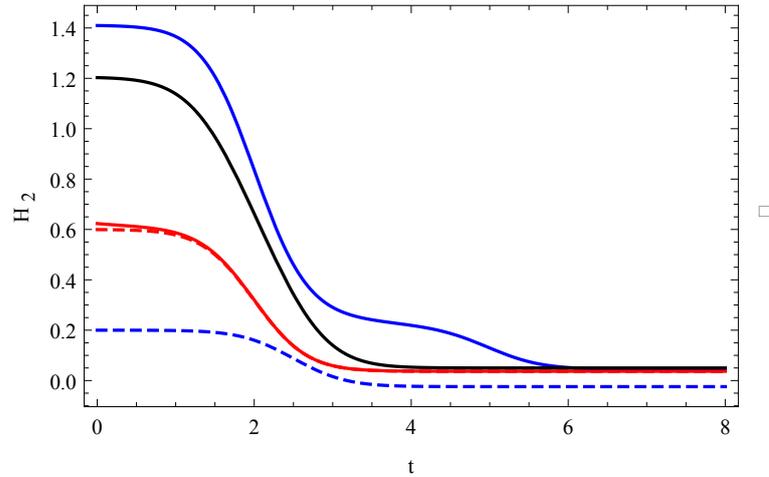


Figura 4.1: A linha preta é representada por $b = 1.01, a_2 = -1.6, a_3 = -0.9, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$, vermelho para $b = 1.01, a_2 = -1.5, a_3 = -0.9, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$, a azul $b = 1.02, a_2 = -1.9, a_3 = -0.9, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$. Linha tracejada vermelha $b = 1.01, a_2 = -2.1, a_3 = -0.8, t_0 = 1$ e $c_0 = 0.6$ e a linha tracejada azul $b = 1.01, a_2 = -1.6, a_3 = -0.3, t_0 = 1$ e $c_0 = -0.6$.

Procuramos na cosmologia a explicação da origem e evolução do universo, para tanto, necessariamente temos que nos basear em dados observacionais registrados por telescópios para a interpretação evolucionar do universo e projetar seu estado no futuro. Com o avanço tecnológico dos telescópios, obtivemos avanços nas observações, possibilitando o estudo de muitos parâmetros cosmológicos. Como vimos, no surgimento da Relatividade geral, Einstein propôs que o universo fosse estático, entretanto, Edwin Hubble baseado em observações astronômicas, afirmou que o universo estava em expansão devido ao aumento da velocidade de recessão, ou afastamento. Em seu artigo, a lei de Hubble é dada como

$$V_p = H(t)d_p, \quad (4.5)$$

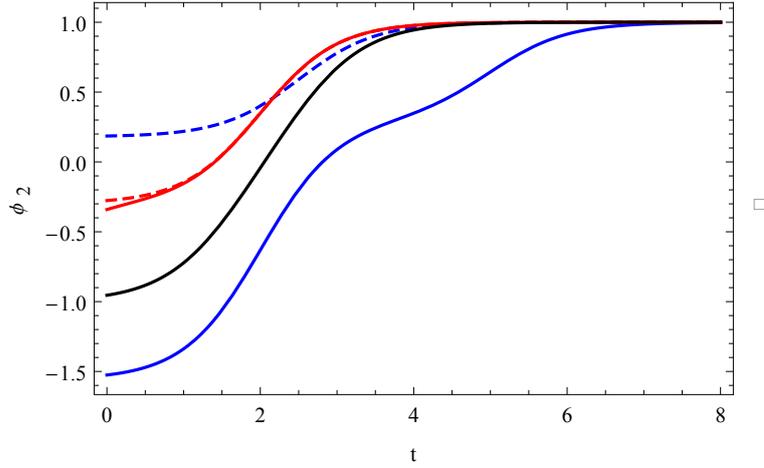


Figura 4.2: a linha preta é representada por $b = 1.4, a_2 = 0, t_0 = 2.5$ e $c_0 = -0.6$, vermelho para $b = 1.005, a_2 = 0.3, t_0 = 2ec_0 = -0.2$, a azul $b = 1.005, a_2 = -0.3, t_0 = 5$ e $c_0 = -0.6$. Linha tracejada vermelha $b = 1.0000001, a_2 = 0.3, t_0 = 2e c_0 = 0.6$ e a linha tracejada azul $b = 1.0000001, a_2 = -0.18, t_0 = 2.5ec_0 = -0.2$.

Onde v_p é a velocidade própria e d_p corresponde à distância física(própria). O $H(t)$ representa a taxa de expansão para um universo isotrópico e homogêneo, expressa pelo fator de escala.

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (4.6)$$

Para $k=0$ A expressão que vincula a densidade e a pressão é denominado como equação de estado, e como vimos em (3.3), é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{p_\phi}{\rho_\phi}, \\ &= \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Além da equação do estado, temos um outro parâmetro que é a taxa de desaceleração expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \\ &= -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Partindo da equação (3.46), podemos reescrever da seguinte maneira

$$\omega^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right), \quad (4.9)$$

onde $H^2 = W^2$. resultando na equação já conhecida (3.51)

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{\dot{W}_\phi^2}{2}, \quad (4.10)$$

prossequindo, chegaremos em

$$\omega = -1 + \frac{2}{3} \frac{W_\phi}{W^2}. \quad (4.11)$$

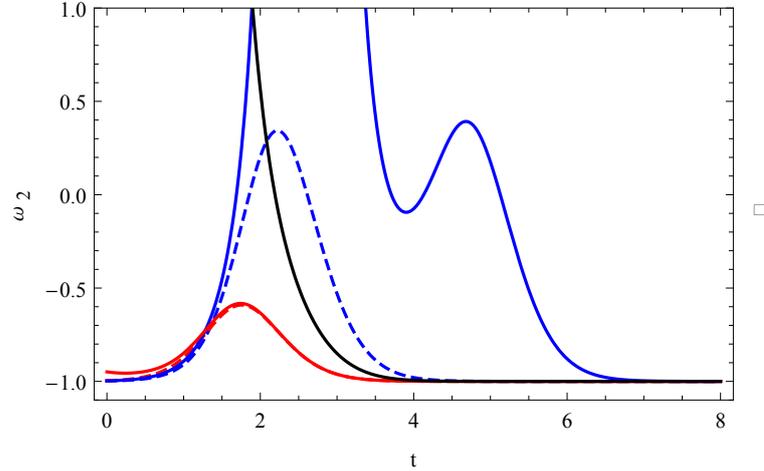


Figura 4.3: Equação de estado

Analisando os parâmetros cosmológicos, percebemos que defeitos assimétricos em relação ao tempo resultam em fases assimétricas de evolução do universo, observamos que os parâmetros permitem defeitos tipo 2-kink. O ideal para o parâmetro de hubble $H_2(t)$ é que tenha 2 ou mais valores, constantes e que tenha a forma semelhante a anti-kink, ou seja, $H_2(t)$ deve ser assimétricas para resultar em fases de expansão com distintas durações. Observamos que as constantes permitem $H(t)$ com 2 ou mais fases aceleradas. A curva azul, implica em três fases aceleradas. (H constante.) As demais curvas mostram 2 fases aceleradas, a inflação primordial e energia escura. Se o H for constante e positiva, temos a expansão acelerada. Lembrando que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt} \log a, \quad (4.12)$$

onde a é dado como

$$a = a_0 e^{\int dt}. \quad (4.13)$$

Caso o H seja positivo, " a " cresce exponencialmente de acordo com a equação (4.13). Já o parâmetro ω (equação de estado) é medido pelo satélite Planck [10]. Os dados mostram que atualmente o ω é aproximadamente -1 . Na era da radiação, o valor do " ω " é de $1/3$. Espera-se que um bom modelo apresente, também, primeira fase na qual o ω tende a zero (era da matéria).

Conseguimos perceber que o melhor modelo é o representado pela curva azul pontilhada, nela mostra o parâmetro H com dois valores constantes e o parâmetro ω passando por duas fases inflacionárias tendo como valor máximo igual a $1/3$, correspondendo à era da radiação.

Capítulo 5

Conclusões

Neste momento, descreveremos de forma resumida tudo o que foi visto no presente trabalho. No primeiro capítulo, apresentamos e discutimos tópicos sobre a teoria escalar real a qual descreve modelos unidimensionais, analisamos os modelos para um campo escalar real como também para dois campos escalares reais. Desta forma, traçamos a definição de defeitos topológico. Como foi visto na introdução, Esses defeitos surgem quando ocorre uma quebra da simetria do sistema, e só é possível quando há uma transição de fases, resultando em kinks, vórtices, paredes de domínios, etc. Ainda nesse capítulo, mostramos a importância do método BPS para podermos adquirir modelos analiticamente solúveis não-triviais que apresentem energia mínima. Com o conceito de carga topológica, caracterizamos defeitos topológicos e não-topológicos através de uma corrente topológica. No final do capítulo, caracterizamos as soluções do tipo kink, lump e analisamos a questão da estabilidade dos modelos compostos por um campo escalar real sob pequenas perturbações.

No capítulo 2, dedicamos exclusivamente ao método de Multi-kink e defeitos deformados. Começamos o procedimento para obter os multi-kinks. Para isso, seguindo as ideias de Dutra et al [23], utilizamos um modelo com potencial bem comportado e que possa suportar configurações multi-kinks. Na segunda parte do referido capítulo, conceituamos o método de deformação o qual foi desenvolvido por Bazeia e colaboradores [27]. Esse modelo foi de bastante importância nesse trabalho, pois através dele conseguimos construir novos modelos de campo escalares. Esse método foi utilizado como uma ferramenta facilitadora, pois não é simples obter soluções analítica para configurações do tipo kink.

Já no capítulo 3, abordamos o acoplamento da ação de Einstein-Hilbert com a ação de uma lagrangeana de um campo escalar real. Por meio das equações de Friedmann, foi possível verificar como o campo escalar atua diretamente no comportamento dos parâmetros cosmológicos. Encerramos esse capítulo com o formalismo de primeira ordem, esse formalismo é empregado como base para assimilação de soluções do tipo defeitos e de princípios da cosmologia e da Relatividade Geral.

No quarto e último capítulo, mostramos a desconformidade que há entre o valor previsto para a energia escura por meio da física de partícula e as observações. Portanto, apresentamos uma outra alternativa que vem de modelos de campo escalar, chamado de modelos de quintessência. Derivamos cenários cosmológico a partir de modelos de multi-kink, e para isso, utilizamos anteriormente o formalismo de primeira ordem. Analisamos, também, os parâmetros cosmológicos comparando com os dados obtidos por meio de observações, e que para alguns parâmetros, é possível traçar um cenário cosmológico

capaz de descrever as etapas da evolução do universo.

Fazendo uma análise dos modelos que encontramos no capítulo 4, percebemos que o modelo que conseguia nos mostrar de forma precisa os parâmetros cosmológicos, foi o representado pela curva azul pontilhada, pois nela, é mostrado o H com dois valores constantes e o ω passando por duas fases inflacionadas com valor máximo igual a $1/3$, correspondendo a era da radiação. Já a solução tipo kink duplo não nos levou ao melhor cenário cosmológico nesta aplicação, contudo o método de multi-kinks revelou ser uma ferramenta com um grande potencial para a geração de modelos cosmológicos analíticos com parâmetros que possuam um grau superior de complexidade. Esperamos futuramente aprimorar a metodologia proposta ao longo desta dissertação e gerar modelos nos quais os parâmetros cosmológicos tenham uma dinâmica mais complexa. Essa metodologia também pode ser aplicada para cenários compostos por mais de um campo escalar e em teorias generalizadas de gravitação.

Apêndice A

Relatividade Geral

Iremos demonstrar a seguinte propriedade

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\delta\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Partindo da seguinte matriz

$$\text{Tr}(\log M) = \log(\det M), \quad (\text{A.2})$$

Aplicando, agora, o princípio variacional para chegarmos a

$$\delta\text{Tr}\left(\frac{1}{M}\delta M\right) = \frac{1}{\det M}\delta(\delta M), \quad (\text{A.3})$$

Assumindo $\text{Tr}(M) = M_{ii}$, resultaremos na seguinte relação

$$\left(M^{-1}\delta M\right)_{ij} = \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{kj}. \quad (\text{A.4})$$

Podemos reescrever a equação (A.3), e teremos:

$$\text{Tr}(M^{-1}\delta M)_{ii} = \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{ki}. \quad (\text{A.5})$$

definindo o seguinte vínculo

$$\text{Tr}(M^{-1}\delta M) = \sum_i \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{ki}. \quad (\text{A.6})$$

Considerando que $M = g^{\mu\nu}$, $M^{-1} = g_{\mu\nu}$ e $\det(M) = g$, a equação (A.6) terá a seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} &= g^{-1}\delta g, \\ \delta g &= g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sabendo que a variação de $\sqrt{-g}$ pode ser escrita como sendo

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}, \quad (\text{A.8})$$

relacionando as equações (A.7) e (A.8), podemos obter a seguinte identidade

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B

Equações de Friedmann

Podemos obter os símbolos de Christoffel da seguinte forma

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} [g_{ki;j} + g_{jk;i} - g_{ij;k}]. \quad (\text{B.1})$$

Podemos, agora, calcular os símbolos de Christoffel não nulos para o modelo FLRW, são eles

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{01;1} + g_{10;1} - g_{11;0}] = \frac{1}{2} \left[-\frac{d}{dt} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \right] = \frac{a(t)}{1-kr^2} \dot{a}; \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{02;2} + g_{20;2} - g_{22;0}] = \frac{1}{2} \left[-\frac{d}{dt} -a^2 r^2 \right] = r^2 a(t) \dot{a}; \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} [g_{03;3} + g_{30;3} - g_{33;0}] = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \sin^2 \theta r^2 a(t) \dot{a}; \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{10;1} + g_{11;0} - g_{01;1}] = \frac{1}{2} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \left[\frac{d}{dt} \frac{-a^2}{1-kr^2} \right] = \frac{\dot{a}}{a(t)} = \Gamma_{10}^1; \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{11;1} + g_{11;1} - g_{11;1}] = \frac{-1}{2} \frac{1-kr^2}{a^2} \left[\frac{d}{dr} \frac{-a^2}{(1-kr^2)} \right] = \frac{kr}{(1-kr^2)}; \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{12;2} + g_{21;2} - g_{22;1}] = \frac{-1}{2} \frac{(1-kr^2)}{a^2} \left[\frac{d}{dr} (a^2 r^2) \right] = -r(1-kr^2); \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} [g_{13;3} + g_{31;3} - g_{33;1}] = \frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{a^2} \left[\frac{d}{dr} (-a^2 r^2 \sin^2 \theta) \right] = -r \sin^2 \theta (1-kr^2); \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} [g_{20;2} + g_{22;0} - g_{02;2}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2} \left[\frac{d}{dt} (-a^2 r^2) \right] = \frac{\dot{a}}{a(t)} = \Gamma_{20}^2; \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} [g_{21;2} + g_{22;1} - g_{12;2}] = \frac{-1}{2} (-a^2 r^2) \left[\frac{d}{dr} a^2 r^2 \right] = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2; \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} [g_{23;3} + g_{32;3} - g_{33;2}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2} \left[\frac{d}{d\theta} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} [g_{30;3} + g_{33;0} - g_{03;3}] = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{dt} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma_{30}^3; \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} [g_{31;3} + g_{33;1} - g_{13;3}] = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{dr} a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3; \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} [g_{32;3} + g_{33;2} - g_{23;3}] = \frac{1}{2} \frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{d}{d\theta} a^2 \sin^2 \theta r^2 \right] = \cot \theta = \Gamma_{32}^3. \end{aligned}$$

Já o tensor de Ricci é definido como o tensor de Riemann na forma contraída, portanto, pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \quad (\text{B.2})$$

No intuito de determinar o tensor de Einstein, devemos calcular os tensores de Ricci para cada coordenada da métrica FLRW. então, para a componente temporal, ou seja R_{00} , teremos

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha + \\ &\quad - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{01}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{02}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^3 \Gamma_{03}^\alpha, \\ &= -\frac{d}{dt} [\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3] - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3, \\ &= -\frac{d}{dt} [\dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1}] - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{-3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \\ &= \frac{-3\ddot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para a coordenada radial, R_{11}

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha + \\ &\quad - \Gamma_{1\alpha}^2 \Gamma_{12}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^3 \Gamma_{13}^\alpha, \\ &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \\ &\quad - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3, \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} \right] - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{kr}{1-kr^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] - \frac{2\dot{a}}{a} \left[\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right] - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\ &= \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \\ &= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Para a coordenada θ , R_{22} , obteremos

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^0 \Gamma_{20}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^1 \Gamma_{21}^\alpha + \\ &\quad - \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^3 \Gamma_{23}^\alpha, \\ &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \\ &\quad + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3, \\ &= \frac{d}{dt} (r^2 a \dot{a}) + \frac{d}{dr} [-r(1-kr^2)] - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{d}{d\theta} (\cot \theta) + a \dot{a} r^2 \left(\frac{2\dot{a}}{a} \right) + \frac{\dot{a}}{a} a \dot{a} r^2 + \\ &\quad - r(1-kr^2) \left[\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} \right] - \frac{\dot{a}}{a} r^2 a \dot{a} - \cot^2 \theta + \frac{1}{r} [r(1-kr^2)], \\ &= r^2 (a\ddot{a} + \dot{a}^2) - 1 + 3kr^2 + \text{cossec}^2 \theta + 2\dot{a}r^2 - kr^2 - 1 + kr^2 - \dot{a}^2 r^2 - \cot^2 \theta + \\ &\quad \dot{a}^2 r^2 + 1 - kr^2, \\ &= r^2 (a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para a coordenada ϕ , R_{33} , temos:

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^0 \Gamma_{30}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^1 \Gamma_{31}^\alpha + \\
&\quad - \Gamma_{3\alpha}^2 \Gamma_{32}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{33}^\alpha, \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \\
&\quad + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1, \\
&= \frac{d}{dr} (a\dot{a} \sin^2 \theta r^2) + \frac{d}{dr} [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \frac{d}{d\theta} (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{2\ddot{a}}{a} (\sin^2 \theta r^2 a\dot{a}) + \\
&\quad - \sin^2 \theta r (1 + kr^2) \left[\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r} \right] + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta r^2 \dot{a}^2 + \frac{1}{r} \sin^2 \theta (1 - kr^2), \\
&= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta (1 - 3kr^2) - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\dot{a}r^2 \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + \\
&\quad - \sin^2 \theta (1 - kr^2) - \sin^2 \theta r^2 \dot{a}^2 + \sin^2 \theta (1 - kr^2) + \cos^2 \theta, \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta + 3kr^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Physical Review D*, vol. 23, no. 2, p. 347, 1981.
- [2] A. D. Linde, “A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems,” *Physics Letters B*, vol. 108, no. 6, pp. 389–393, 1982.
- [3] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, “Cosmological imprint of an energy component with general equation of state,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 8, p. 1582, 1998.
- [4] S. M. Carroll, “Quintessence and the rest of the world: suppressing long-range interactions,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 15, p. 3067, 1998.
- [5] A. A. Abrikosov, “On the magnetic properties of superconductors of the second group,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 5, pp. 1174–1182, 1957.
- [6] W. H. Zurek, “Cosmological experiments in condensed matter systems,” *Physics Reports*, vol. 276, no. 4, pp. 177–221, 1996.
- [7] G. S. Frederico and D. F. Torres, “Fractional optimal control in the sense of caputo and the fractional noether’s theorem,” *arXiv preprint arXiv:0712.1844*, 2007.
- [8] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [9] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, *et al.*, “Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, no. 2, p. 565, 1999.
- [10] P. A. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo, *et al.*, “Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 594, p. A13, 2016.
- [11] J. Klusoň, “Proposal for non-bogomol’nyi-prasad-sommerfield d-brane action,” *Physical Review D*, vol. 62, no. 12, p. 126003, 2000.
- [12] A. T. N. d. Silva, “Um estudo da solução de hiscock para cordas cósmicas,” 2016.
- [13] S. Coleman, *Aspects of symmetry: selected Erice lectures*. Cambridge University Press, 1988.

- [14] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, vol. 7. Princeton university press, 2010.
- [15] V. NETA, D. Câmara, *et al.*, “Defeitos e modelos de quintessência.” 2016.
- [16] E. Bogomol’nyi, “Eb bogomol’nyi, sov. j. nucl. phys. 24, 449 (1976).,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 24, p. 449, 1976.
- [17] P. Forgács, Z. Horváth, and L. Palla, *Exact multimonopole solutions in the Bogomolny-Prasad-Sommerfield limit*. No. 80-122, MTA KFKI, 1980.
- [18] E. Ventura, A. Simas, and D. Bazeia, “Exact topological twistons in crystalline polyethylene,” *Chemical Physics Letters*, vol. 320, no. 5-6, pp. 587–593, 2000.
- [19] R. Rajaraman, “Solitons and instantons,” 1982.
- [20] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press, 2000.
- [21] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] T. Vachaspati, *Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [23] G. de Brito and A. de Souza Dutra, “Multikink solutions and deformed defects,” *Annals of Physics*, vol. 351, pp. 620–633, 2014.
- [24] E. Kolb, *The early universe*. CRC Press, 2018.
- [25] T. W. B. Kibble, “Some Implications of a Cosmological Phase Transition,” *Phys. Rept.*, vol. 67, p. 183, 1980.
- [26] M. Peyrard and M. D. Kruskal, “KINK DYNAMICS IN THE HIGHLY DISCRETE SINE-GORDON SYSTEM,” *Physica*, vol. 14D, pp. 88–102, 1984.
- [27] D. Bazeia, L. Losano, and J. Malbouisson, “Deformed defects,” *Physical Review D*, vol. 66, no. 10, p. 101701, 2002.
- [28] D. Hilbert, “Die grundlagen der physik.(erste mitteilung.),” *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1915, pp. 395–408, 1915.
- [29] J. J. R. d. Santos *et al.*, “Tópicos em cosmologia com campos escalares,” 2011.
- [30] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation,” *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932*, pp. 88–92, 2005.
- [31] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [32] S. Weinberg, “Cosmological production of baryons,” *Physical Review Letters*, vol. 42, no. 13, p. 850, 1979.
- [33] A. Friedman, “Über die krümmung des raumes,” *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, vol. 10, no. 1, pp. 377–386, 1922.

- [34] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 419–421, 1965.
- [35] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, “Classical mechanics,” 2002.
- [36] P. Moraes and J. Santos, “Two scalar field cosmology from coupled one-field models,” *Physical Review D*, vol. 89, no. 8, p. 083516, 2014.
- [37] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford university press, 2008.
- [38] D. Bazeia, L. Losano, and J. Santos, “Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models,” *Physics Letters A*, vol. 377, no. 25-27, pp. 1615–1620, 2013.
- [39] D. Bazeia, C. Gomes, L. Losano, and R. Menezes, “First-order formalism and dark energy,” *Physics Letters B*, vol. 633, no. 4-5, pp. 415–419, 2006.
- [40] A. De Felice and S. Tsujikawa, “f (r) theories,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 13, no. 1, p. 3, 2010.
- [41] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Modified f (r) gravity consistent with realistic cosmology: From a matter dominated epoch to a dark energy universe,” *Physical Review D*, vol. 74, no. 8, p. 086005, 2006.
- [42] T. Harko, F. S. Lobo, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, “f (r, t) gravity,” *Physical Review D*, vol. 84, no. 2, p. 024020, 2011.
- [43] V. Faraoni, “Inflation and quintessence with nonminimal coupling,” *Physical Review D*, vol. 62, no. 2, p. 023504, 2000.
- [44] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, D. Sáez-Gómez, and V. Faraoni, “Reconstructing the universe history, from inflation to acceleration, with phantom and canonical scalar fields,” *Physical Review D*, vol. 77, no. 10, p. 106005, 2008.
- [45] M. Khurshudyan, E. Chubaryan, and B. Pourhassan, “Interacting quintessence models of dark energy,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 53, no. 7, pp. 2370–2378, 2014.
- [46] M. Bento, O. Bertolami, and N. Santos, “A two-field quintessence model,” *Physical Review D*, vol. 65, no. 6, p. 067301, 2002.