



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Aspectos da Teoria da Inflação com um Campo  
Taquiônico**

**Julio Cesar Marques da Rocha**

CAMPINA GRANDE

- Julho de 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Aspectos da Teoria da Inflação com um Campo  
Taquiônico**

**Julio Cesar Marques da Rocha**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

CAMPINA GRANDE

- Julho de 2017 -

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

R672a Rocha. Julio Cesar Marques da.  
Aspectos da teoria da inflação com um campo taquiônico / Julio Cesar  
Marques da Rocha. – Campina Grande. 2017.  
57 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".

Referências.

1. Inflação – Campo Taquiônico. 2. Teoria Cosmológica Padrão. 3.  
Geração de Perturbações de Curvatura. 4. Táquions. I. Brito, Francisco de  
Assis de. II. Título.

CDU 524.8(043)

# ASPECTOS DA TEORIA DA INFLAÇÃO COM UM CAMPO TAQUIÔNICO

JULIO CESAR MARQUES DA ROCHA

Aprovada em \_\_\_\_\_

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Orientador

---

Prof. Dr.  
Examinador

---

Prof. Dr.  
Examinador

”E disse ao homem: Eis que o temor do Senhor é a sabedoria, e apartar-se do mal é a inteligência.”

JÓ 28:28

# Agradecimentos

A Deus por todas as vitórias e conquistas.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação e oportunidade de realização deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos amigos do departamento pelas discussões de Física, momentos de lazer e que propiciaram que o ambiente fosse agradável para realização do trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física.

Ao CNPQ, pela concessão da bolsa.

# Lista de Figuras

2.1	Mapa da anisotropia da radiação cósmica de fundo. O alto grau de anisotropia é atualmente bem detectado pelos experimentos [15]. . . . .	9
2.2	Característica do potencial do campo na inflação. A rolagem lenta é causada pela aceleração extremamente rápida. Este regime é chamado de inflação <i>slow-roll</i> [15]. . . . .	12
5.1	Relação entre os índices espectrais para o potencial exponencial (5.1). . . . .	35
5.2	Relação entre os índices espectrais para o potencial cosseno hiperbólico inverso. . . . .	36
5.3	Vínculos em 2D no plano $n_s - R$ para o potencial polinomial. Cada caso corresponde a (a) $p = 2$ , (b) $p = 4$ e (c) $p \gg 1$ com $N = 45, 50, 55, 60$ . . . . .	39
5.4	Plano $n_s - r$ para valores $50 < N < 60$ e alguns valores de $\beta$ , considerando $\lambda = 0, 3$ . . . . .	40
6.1	Solução numérica de (6.28) com $\Gamma = -20$ . O termo não linear modifica o perfil Gaussiano tradicional (em preto), em um perfil de distribuição mais localizada (em azul) [35]. . . . .	45

# Lista de Abreviaturas e Siglas

RCF - *Radiação Cósmica de Fundo*

ADM - *Arnowitt, Deser and Misner*

NLSE - *Equação não-linear de Schrödinger*

# Resumo

Nesta dissertação abordamos o tema da inflação dirigida por um campo taquiônico. Após uma breve imersão na teoria cosmológica padrão, estudamos aspectos da teoria inflacionária e descobriremos como um campo taquiônico pode ser utilizado para expandir o Universo primordialmente. Em meio a essa expansão, a geração de perturbações de curvatura e de ondas gravitacionais são relacionadas ao espectro de potência da radiação cósmica de fundo, obtido pelos experimentos recentes. Uma análise mais profunda destas perturbações nos leva a considerar os estados quânticos e como estes são afetados pelo problema da medida.

Palavras-chave: Inflação. Perturbações. Táquions.

# Abstract

In this thesis we address the issue of inflation driven by a tachyonic field. After a brief immersion in standard cosmological theory, we study aspects of inflationary theory and discover how a tachyon field can be used to expand the Universe primarily. In the midst of this expansion, the generation of perturbations of curvature and gravitational waves are related to the spectrum of the cosmic background radiation, obtained by the recent experiments. Further analysis of these perturbations lead us to consider quantum states and how they are affected by the measurement problem.

Keywords: Inflation. Perturbations. Tachyons.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria Inflacionária do Universo</b>	<b>3</b>
2.1	Modelo cosmológico padrão . . . . .	3
2.2	Problemas na teoria do Big Bang . . . . .	8
2.2.1	Problema da planura . . . . .	8
2.2.2	Problema do horizonte . . . . .	8
2.2.3	Problema dos monopolos magnéticos . . . . .	9
2.3	Teoria da inflação . . . . .	9
2.3.1	Dinâmica do universo inflacionário . . . . .	10
2.3.2	Mecanismo de rolagem lenta . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Inflação Taquiônica</b>	<b>14</b>
3.1	Táquions em Teoria de Campos . . . . .	14
3.2	Táquions em Teoria de Branas . . . . .	15
3.3	O modelo cosmológico . . . . .	16
3.4	O mecanismo inflacionário com o campo taquiônico . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Espectro de Potências e Índices Espectrais</b>	<b>21</b>
4.1	Introdução . . . . .	21
4.2	O Formalismo ADM . . . . .	22
4.3	O Espectro de Potências . . . . .	24
4.4	Índices Espectrais . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Parâmetros observacionais da inflação</b>	<b>33</b>
5.1	A busca por modos E e modos B . . . . .	33

5.2	Potenciais para o campo taquiônico inflacionário . . . . .	34
5.2.1	Potencial exponencial . . . . .	34
5.2.2	Potencial cosseno hiperbólico inverso . . . . .	36
5.2.3	Potencial polinomial . . . . .	37
5.2.4	Potencial $\beta$ -exponencial . . . . .	39
<b>6</b>	<b>O Problema da Medida na Inflação</b>	<b>41</b>
6.1	A equação de Schrödinger para as perturbações . . . . .	41
6.2	O problema da medida na inflação . . . . .	44
6.3	Modelo de interação . . . . .	45
6.4	Função de Green para a Equação de Schrödinger não linear . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Parâmetros de rolagem lenta na inflação taquiônica</b>	<b>50</b>
<b>B</b>	<b>O espectro de potências</b>	<b>52</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>54</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho aborda alguns aspectos da teoria inflacionária do Universo, na qual utilizamos um campo taquiônico que descreve a dinâmica da expansão primordial nessa fase [1]. Uma característica de um modelo do tipo taquiônico é a de que este é um modelo não canônico, isto é, uma generalização do modelo de campo escalar simples abordado na teoria de campos [2]. Nosso estudo utiliza o formalismo ADM (Arnowitt, Deser e Misner) [3] para reformular a ação de Einstein-Hilbert acoplada à ação do campo taquiônico, de forma a tornar possível uma ação que forneça informações sobre a dinâmica das perturbações de curvatura que são as sementes para a formação das estruturas em larga escala observadas hoje [4]. Por este formalismo, encontraremos os índices espectrais, que são parâmetros que ligam a teoria à observação. E ainda tentaremos compreender como as flutuações quânticas se tornam perturbações clássicas, que é o chamado problema da medida na inflação.

O objetivo principal desta dissertação é o de estudar o comportamento da expansão inflacionária do universo com um campo taquiônico como fonte de tal expansão, além de obter as formas do espectro de potências e dos índices espectrais, os quais fornecem uma ligação entre a teoria e as observações experimentais. Uma característica que favorece o uso do campo taquiônico é que o mesmo, por possuir o termo cinético não canônico, permite descrições mais completa como por exemplo o estudo dos níveis de não Gaussianidade das flutuações quânticas inflacionárias [5].

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, é feita uma revisão do modelo cosmológico padrão e seus problemas, bem como da teoria inflacionária e de que forma esta resolve-os. Além disso, é apresentado

o mecanismo de rolagem lenta, que nos dá parâmetros importantes que ligam a teoria à observação.

No Capítulo 3, considera-se o modelo de inflação taquiônica, que é um modelo que trata de campos taquiônicos como um possível candidato a explicar o mecanismo inflacionário.

No Capítulo 4, discutimos os aspectos das perturbações inflacionárias via formalismo ADM. Revisando esse formalismo, reescrevemos nossa ação e, a partir de uma expansão em segunda ordem da mesma, podemos chegar às equações de Mukhanov-Sasaki, cujas soluções são a base para calcular o espectro de potências e os índices espectrais.

No Capítulo 5, aplicamos a teoria obtida para inflação taquiônica analisando alguns potenciais que são possíveis candidatos à explicar a dinâmica da inflação. Comparando os dados obtidos na literatura, podemos ajustar alguns parâmetros e obter os vínculos necessários para cada potencial analisado.

No Capítulo 6, estudaremos as perturbações inflacionárias em sua fase puramente quântica. Discutiremos o problema da medida na inflação e de que modo as flutuações quânticas tornam-se perturbações clássicas.

Finalmente no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Ao longo da dissertação é adotado o sistema de unidades naturais ( $c = \hbar = \kappa = 1$ ) e a assinatura da métrica será  $(-, +, +, +)$ .

# Capítulo 2

## Teoria Inflacionária do Universo

O entendimento das características e da evolução do Universo foi sempre objeto de estudo para a humanidade. Por vários séculos, diversas teorias foram postuladas, mas, somente em 1917, após a formulação da teoria da Relatividade Geral (RG) por Albert Einstein, é que a cosmologia moderna surgiu [[6]-[10]]. A ideia de aplicar as equações da RG para descrever o Universo levou a importantes descobertas tais como a descoberta de objetos extragalácticos. Conjuntamente, a teoria da inflação respalda a teoria da formação de estruturas provendo um mecanismo de geração de perturbações de densidade que crescem ao longo do tempo cósmico e que ultrapassa a era da radiação imprimindo assinaturas na radiação cósmica de fundo, deixando aí evidências observacionais importantes para a comprovação experimental da teoria.

Neste capítulo, veremos os principais resultados do modelo cosmológico padrão, seus problemas e como um cenário de inflação primordial resolve os problemas e nos ajuda a compreender a evolução do Universo.

### 2.1 Modelo cosmológico padrão

A cosmologia tal como conhecemos hoje baseia-se em uma das teorias mais aceitas atualmente: a Teoria da Relatividade Geral (RG), proposta por Albert Einstein em 1915. O ponto de partida para essa teoria é a ação de Einstein-Hilbert, cuja formulação é dada por

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{2}, \quad (2.1)$$

na qual  $g \equiv \det g_{\mu\nu}$  é  $R$  é o escalar de Ricci, obtido pela contração do tensor de Ricci que, por sua vez, é derivado do tensor de Riemann, dado pela relação [7]

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\beta}^{\kappa}\Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\alpha}, \quad (2.2)$$

em que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

são as conexões ou símbolos de Christoffel. Logo, por contração obtemos

$$R_{\mu\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa}\Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\kappa}\Gamma_{\alpha\kappa}^{\alpha}, \quad (2.4)$$

e

$$R = g^{\mu\beta}R_{\mu\beta}. \quad (2.5)$$

A ação (2.1) somente nos dá informações sobre a geometria do espaço, de maneira que precisamos inserir termos que mostrem a contribuição da matéria e energia presentes. Isto é feito adicionando-se a ação que representa esta contribuição, de modo que podemos escrever uma ação geral da forma

$$S = S_{EH} + S_M, \quad (2.6)$$

em que  $S_M$  é a ação que inclui o termo de matéria, campo escalar, etc.

O princípio variacional estabelece que a ação,  $S$ , é estacionária frente a pequenas variações das variáveis dinâmicas do sistema

$$\delta S = 0.$$

Variando a ação (2.6) com respeito a  $g^{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ \left( \delta\sqrt{-g}\frac{R}{2} + \sqrt{-g}\frac{\delta R}{2} \right) + \delta S_M \right] \\ &= \int d^4x \left\{ \left[ \delta\sqrt{-g}\frac{R}{2} + \sqrt{-g}\left( \frac{\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}}{2} \right) \right] + \delta S_M \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Considerando que o termo  $g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}$  não contribuirá, pois sua integral é uma integral de superfície e, portanto, se anula em todo o espaço, e que temos a identidade

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

a relação (2.7) se torna

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[ \left( -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\frac{R}{2} + \sqrt{-g}\frac{R_{\mu\nu}}{2}\delta g^{\mu\nu} \right) + \delta S_M \right] \\ &= \int d^4x \left[ \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left( \frac{R_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{R}{2} \right) + \delta S_M \right].\end{aligned}\quad (2.8)$$

Aplicando o princípio variacional, obtemos

$$\sqrt{-g} \left( \frac{R_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{R}{2} \right) + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.9)$$

Dessa forma podemos escrever as chamadas equações de campo de Einstein como sendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

nas quais

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

é o tensor energia-momentum e nos dá informações sobre a distribuição de matéria e energia no espaço tempo.

O modelo padrão da cosmologia é baseado no chamado *princípio cosmológico*, que diz que, quando observado em escalas suficientemente largas, as propriedades do Universo são as mesmas para todos os observadores. Em outras palavras, o Universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas [8, 9]. O ansatz mais geral que resolve as equações de Einstein para um espaço tempo homogêneo e isotrópico é a conhecida métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.11)$$

onde a constante  $k$  pode assumir os valores  $-1$ ,  $0$  e  $1$ , correspondendo a um espaço aberto, plano ou fechado, respectivamente. A função  $a(t)$  é o fator de escala e mede a posição relativa entre dois pontos como uma função do tempo enquanto o universo se expande. As observações recentes indicam que o Universo é praticamente plano espacialmente [11, 12, 13] e a métrica é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Usando a métrica (2.12), o tensor de Ricci e o escalar de Ricci e o tensor de Einstein são dados por

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij}, \quad R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad (2.13)$$

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad G_{ij} = -(\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\delta_{ij}. \quad (2.14)$$

A matéria em um universo homogêneo e isotrópico comporta-se como um fluido perfeito e o tensor energia-momentum é dado por [6]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

com  $u_\mu$  denotando as quadrivelocidades das partículas no fluido,  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  é a pressão.

A homogeneidade na métrica indica que o tensor energia momentum é independente das coordenadas espaciais, dependendo somente do tempo cósmico. A isotropia indica que  $T_\nu^\mu$  deve assumir a seguinte forma

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(t) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

As componentes  $0 - 0$  e  $i - j$  das equações de Einstein nos dão as chamadas equações de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho, \quad (2.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p), \quad (2.18)$$

que descrevem a evolução do fator de escala. O parâmetro de Hubble,  $H$ , possui dimensão equivalente ao inverso do tempo cósmico e seu valor atual é definido como sendo  $H_0$ .

A conservação do tensor energia-momentum,

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (2.19)$$

nos dá a equação da conservação da energia

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.20)$$

que assume a mesma forma da equação da continuidade para um fluido em um sistema comóvel. Em geral admite-se que a pressão depende exclusivamente das características de seu componente,  $p = p(\rho) = \omega\rho$ , com  $\omega$  sendo uma constante que depende do tipo de componente que domina a expansão. Combinando-se as equações (2.17) e (2.20) e, integrando, obtemos a solução completa do sistema, isto é, a função que descreve a evolução do fator de escala  $a(t)$  assim como das densidades de energia  $\rho(t)$ .

Precisamos agora definir o que compõe o Universo. Até o final do século XX, acreditava-se que o Universo era composto por matéria e radiação, afinal, é tudo que conseguimos observar diretamente até agora. Considerando que o Universo é composto destas duas componentes, temos que a densidade de matéria é inversamente proporcional ao cubo do fator de escala,  $\rho_m \propto 1/a^3$  e sua pressão é nula,  $p_m = 0$ , já que a matéria é tratada como poeira, pois, em larga escala, seus elementos não interagem. Já a densidade da radiação decresce como  $\rho_r \propto 1/a^4$  e sua equação de estado é dada por  $p_r = \rho/3$ .

- **Radiação:** Para essa fase cosmológica temos  $\rho_r = \rho_{0r}(a_0/a)^4$  e a equação de Friedmann nos dá  $a \propto \sqrt{t}$ .
- **Matéria:** À medida que o Universo expande e esfria, são estabelecidas as condições para a formação das estruturas. O fluido cósmico passa a ter pressão nula e  $\rho_m = \rho_{0m}(a_0/a)^3$  e  $a \propto t^{2/3}$ .
- **Constante Cosmológica:** A era atual do Universo é governada pela presença da constante cosmológica, que é um dos possíveis candidatos para explicar a aceleração do Universo. Considerando as equações de Friedmann contendo apenas esta componente, temos que  $\rho_\Lambda = \text{constante} = \rho_{0\Lambda}$  e  $a(t) \propto e^{\Lambda t/3}$ .

Vamos definir o parâmetro

$$\Omega \equiv \frac{\rho_{total}}{\rho_c},$$

em que  $\rho_c \equiv 3H^2/(8\pi G)$  é a densidade crítica. A situação onde  $\Omega = 1$  corresponde a um Universo espacialmente plano.

Podemos reescrever a primeira equação de Friedmann como [8]

$$H^2 = H_0^2 \left( \Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0r}(1+z)^4 + \Omega_{0\Lambda} + \Omega_{0k}(1+z)^2 \right)^{1/2}, \quad (2.21)$$

onde  $z = 1/(1+a)$  é o redshift.

## 2.2 Problemas na teoria do Big Bang

Nas condições iniciais da evolução do universo, surgem alguns problemas que o Modelo Cosmológico Padrão não consegue explicar, como o fato de o Universo ser plano hoje e a Radiação Cós mica de Fundo (RCF) apresentar um alto grau de homogeneidade e isotropia observada no céu, por exemplo.

### 2.2.1 Problema da planura

O problema da planura do universo consiste em explicar por que sua densidade total de energia é igual à densidade crítica de energia [14]. Esse problema pode ser entendido como um problema de condições iniciais. Para compreender como isso ocorre, vamos escrever a primeira equação de Friedmann (2.17) (com o termo de curvatura) na forma

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.22)$$

O parâmetro  $|\Omega - 1|$  cresce nas eras da radiação e da matéria e, como observamos que a densidade hoje é aproximadamente a densidade crítica,  $\Omega$  deve ser igual a unidade com uma acuracidade extrema. Portanto é necessário um ajuste muito fino para conseguirmos um valor inicial tão preciso do parâmetro de densidade do Universo. Este é o *problema da planura*.

### 2.2.2 Problema do horizonte

A cosmologia padrão considera a existência de um período no qual os fótons desacoplaram dos demais componentes. Esse período se deu em alto redshift ( $z = 1100$ ), quando o universo tinha cerca de 380.000 anos de idade e uma temperatura de cerca de 3000 K, sendo referido como recombinação. A detecção desses fótons primordiais, que formam a RCF, pode ser considerada como equivalente a uma visão da figura do universo nos seus 380.000 anos de idade.

A RCF apresenta um alto grau aparente de homogeneidade e equilíbrio térmico [15]. Entretanto, esse fato não era esperado pela cosmologia padrão, devido a limitação imposta pelo horizonte cosmológico. O alto grau de homogeneidade da Radiação Cós mica

de Fundo (RCF), uma parte em  $10^5$  é outro sério problema do modelo cosmológico padrão. Os fótons recebidos hoje foram emitidos de regiões que eram causalmente desconectadas na superfície de último espalhamento, pois estavam fora do horizonte. Nosso horizonte atual corresponde a um ângulo de  $1^\circ$  enquanto observamos uma temperatura da RCF isotrópica e uniforme ao redor do céu. O problema de como entender como processos físicos diferentes ocorrendo em regiões causalmente desconectadas nos dá as mesmas propriedades físicas com uma grande precisão é chamado de *problema do horizonte*.

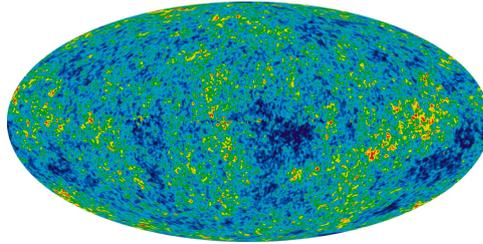


Figura 2.1: Mapa da anisotropia da radiação cósmica de fundo. O alto grau de anisotropia é atualmente bem detectado pelos experimentos [15].

### 2.2.3 Problema dos monopolos magnéticos

Nas teorias de grande unificação é postulada a existência de relíquias tais como os monopolos magnéticos, que aparecem devido a quebra espontânea de simetria logo após a era de Planck [8]. É conjecturado que a massa dos monopolos magnéticos é muito grande. Assim, à medida que o Universo esfriou, a interação desses monopolos cessou, mantendo-se estável. O resultado deveria ser uma abundância de monopolos magnéticos, o que não é observado.

## 2.3 Teoria da inflação

Proposta inicialmente por Alan Guth [14], a teoria da inflação prevê que o universo passou por uma fase de expansão exponencial em que a energia do vácuo dominava a evolução.

A idéia por traz da inflação é que no Universo primordial houve um pequeno período no qual o Universo expandiu-se muito rapidamente (exponencialmente), impulsionada por um campo escalar (o ínflaton,  $\phi$ ) e capaz de diluir qualquer curvatura inicial do Universo,

resolvendo o problema da planura, e expandir drasticamente o horizonte, permitindo o contato causal de regiões distantes, o que resolve o problema do horizonte.

Na inflação os monopolos são separados por uma escala de comprimento definida pela velocidade de propagação ( $c$ ) vezes o tempo de Hubble ( $H_0$ ). Espera-se então uma densidade de monopolos dada pelo inverso do volume de Hubble. Os monopolos criados no Universo primordial são então diluídos devido a inflação.

### 2.3.1 Dinâmica do universo inflacionário

Vamos considerar uma teoria com um campo escalar  $\phi$  com um termo cinético canônico (isto é, dado pela forma usual na Teoria de Campos) em um espaço tempo curvado. A ação é dada por

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_H + \mathcal{S}_\phi, \quad (2.23)$$

onde

$$\mathcal{S}_H = \frac{1}{2} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (2.24)$$

é a ação de Hilbert e

$$\mathcal{S}_\phi = \int \mathcal{L}_\phi \sqrt{-g} d^4x \quad (2.25)$$

é a ação do campo escalar  $\phi$ . A variação desta ação em relação a  $g^{\mu\nu}$  nos dá o tensor energia momentum

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi \quad (2.26)$$

enquanto que a variação com respeito a  $\phi$  nos dá a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right] = 0, \quad (2.27)$$

que nos dá o comportamento do campo escalar ao exercer o papel de expandir exponencialmente o Universo. Como exemplo, podemos considerar um campo escalar  $\phi$  com uma densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi). \quad (2.28)$$

Substituindo a lagrangeana (2.28) na equação de Euler-Lagrange (2.27), obtemos a equação de movimento

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.29)$$

onde

$$\square \phi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$$

O tensor energia momentum pode ser obtido a partir da relação (2.26), nos dando como resultado

$$T_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \nabla_\rho \phi \nabla_\alpha \phi + V(\phi) \right) \quad (2.30)$$

ou

$$T_\nu^\mu = -g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma \phi \nabla_\nu \phi + \delta_\nu^\mu \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \nabla_\rho \phi \nabla_\alpha \phi + V(\phi) \right). \quad (2.31)$$

No universo plano de FRW com campo homogêneo, a métrica é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\vec{x}^2$$

indicando  $\sqrt{-g} = a^3$  de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) &= \frac{1}{a^3} \partial_0 (a^3 g^{00} \partial_0 \phi) + \frac{1}{a^3} \partial_i (a^3 g^{ij} \partial_j \phi) \\ &= -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} + \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

usando a definição do operador laplaciano  $\nabla^2 \equiv \partial_i (\delta^{ij} \partial_j)$ . Então, a equação do campo escalar torna-se

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (2.33)$$

e as componentes do tensor energia momentum são

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2a^2} + V(\phi) = \rho \\ T_j^i &= \delta_j^i \left( -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2a^2} - V(\phi) \right) = -\delta_j^i p \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalmente, as equações de Friedmann serão

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3} \rho = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \\ H^2 + \dot{H} &= -\frac{1}{6} (\rho + 3p) = -\frac{1}{3} (\dot{\phi}^2 - V(\phi)), \end{aligned} \quad (2.35)$$

para o caso em que  $\phi = \phi(t)$ . Essas equações desempenham um importante papel como veremos a seguir, relacionado ao mecanismo de rolagem lenta. Em suas formas aproximadas, nos permitem calcular parâmetros que medem a taxa de expansão durante a inflação e conectam com outros parâmetros relacionados à fenomenologia.

### 2.3.2 Mecanismo de rolagem lenta

A principal condição para haver inflação é ter um universo acelerado,  $\ddot{a} > 0$  [16]. Isto implica em uma pressão negativa, de acordo com a equação da aceleração. Durante essa fase de aceleração extremamente breve, assumimos que o campo  $\phi$  move-se lentamente ao mínimo do potencial  $V(\phi)$ . Fisicamente o que ocorre é que o segundo termo da equação (2.33), chamado termo de fricção de Hubble, é muito grande nesta fase e portanto o campo evolui lentamente. Conseqüentemente, a energia cinética do campo será menor do que o potencial,  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ , portanto,  $p_\phi = -\rho_\phi = -V(\phi)$ . A figura abaixo mostra o comportamento do potencial nesta fase.

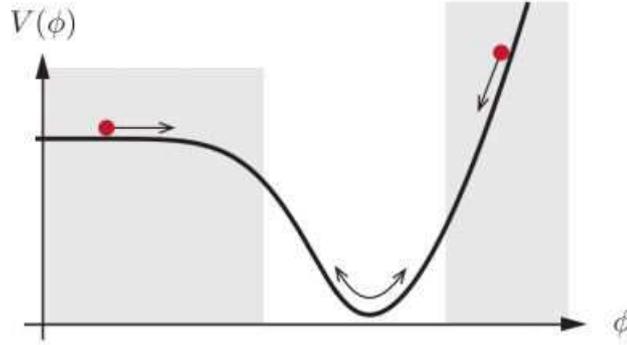


Figura 2.2: Característica do potencial do campo na inflação. A rolagem lenta é causada pela aceleração extremamente rápida. Este regime é chamado de inflação *slow-roll* [15].

Uma outra forma equivalente de haver uma expansão acelerada é considerar que a mesma implica

$$\ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(aH) = \dot{a}H + a\dot{H} > 0 \quad \Rightarrow \quad H^2 > -\dot{H} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (2.36)$$

onde  $\varepsilon$  é denominado parâmetro *slow-roll* de primeira ordem.

Uma vez que o campo rola lentamente, devemos ter  $\varepsilon \ll 1$  e então podemos inserir um segundo parâmetro *slow-roll*

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} = \frac{d \ln \varepsilon}{dN} \ll 1 \quad (2.37)$$

que é um parâmetro de segunda ordem e geralmente relaciona-se com a derivada segunda do potencial.

Em termos do crescimento do fator de escala, podemos definir um número  $N$ , chamado número de e-folds de crescimento no fator de escala quando o campo  $\phi$  desliza sobre seu potencial, desde um valor inicial  $\phi_i$ , o qual é o valor do campo quando começa a inflação, até  $\phi_f$ , o qual é o valor do campo quando as condições slow-roll são violadas:

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \quad (2.38)$$

e assim podemos avaliar o quanto expandiu o Universo nesta fase.

No próximo capítulo aplicaremos estes conceitos para o campo taquiônico, o qual, por ser um campo não canônico, possui um comportamento diferente do campo usual de Higgs.

# Capítulo 3

## Inflação Taquiônica

Um dos campos escalares que podem ser responsáveis pela inflação é o campo taquiônico [17]. Tal campo escalar ocorre mais naturalmente no contexto de teoria de cordas, particularmente associado com D-branas <sup>1</sup>, onde a inflação é uma corda aberta descrevendo a posição da brana nas dimensões extras [18]. Os táquions são uma matéria exótica com pressão negativa e também podem ser associados à energia escura.

Neste capítulo abordaremos os aspectos dos táquions em Teoria de Campos e em Teoria de Branas e sua relação em um contexto cosmológico, tendo como foco a inflação, que será governada pelo fluido descrito pelo campo taquiônico.

### 3.1 Táquions em Teoria de Campos

Táquions são partículas hipotéticas que viajam mais rápido do que a luz. Proposta por A. Sommerfeld, a idéia de partículas com esta característica atrai a atenção até hoje.

A relação relativística entre a velocidade  $v$ , o momento espacial  $k$  e a massa de repouso,  $m$ , de uma partícula é dada por

$$v = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Em teoria de cordas as D-branas são uma classe de objetos estendidos sobre a qual cordas abertas pode acabar com as condições de fronteira de Dirichlet. As D-branas são tipicamente classificadas pela sua dimensão espacial, o que é indicado por um número escrito após o D. A D0-brana é um único ponto, a D1-brana é uma linha, a D2-brana é um plano, a D3-brana é um espaço em três dimensões, e assim por diante.

onde  $c = 1$ . Para  $k$  real um táquion ( $v > 1$ ) deve ter uma massa quadrada negativa:

$$v > 1 \Leftrightarrow m^2 < 0. \quad (3.2)$$

Uma visão moderna dos táquions é relacionada não a velocidade superluminal, mas a massa quadrada negativa. De acordo com a teoria de campos, se realizarmos uma quantização perturbativa de um campo escalar canônico através da expansão do potencial ao redor do extremo de configuração, vamos encontrar uma partícula com  $m^2 > 0$  se esta configuração for um mínimo, ou uma partícula com  $m^2 < 0$  (um táquion) se esta configuração for um máximo. A existência de táquions em teoria quântica de campos está associada com uma instabilidade do sistema que causa uma quebra da teoria de perturbação. A quebra espontânea de simetria no modelo padrão das partículas elementares é às vezes considerada como um fato de que o campo escalar de Higgs possui um termo de massa taquiônico.

## 3.2 Táquions em Teoria de Branas

Os modelos inflacionários inspirados em teoria das super cordas e teoria M são muito considerados na cosmologia atual, dado que o mecanismo inflacionário atua próximo da escala de Planck [19]. Como mostrado por Sen [17, 20], o decaimento de D-branas e a ação efetiva DBI produz um gás de pressão nula com densidade de energia finita, semelhante à poeira clássica. Como o campo taquiônico rola abaixo do potencial, o universo sofre uma expansão acelerada e, em uma época particular, o fator de escala passa pelo ponto de inflexão, marcando o fim da inflação. Porém, os potenciais efetivos para os táquions não contém parâmetros livres que possam ser ajustados para fazer uma rolagem suficientemente lenta e o nível requerido de perturbações de densidade. A situação pode ser contornada considerando-se uma grande quantidade de D-branas separadas por uma distância muito maior do que a escala de cordas  $l_s$ . No entanto, o número de branas deve ser da ordem de  $10^{10}$ . Os modelos que comportam estes fatos assumem que neste caso há uma interação do tipo brana-antibrana, de modo a diminuir este número de branas [21, 22].

### 3.3 O modelo cosmológico

A maior parte dos modelos cosmológicos no vácuo em teoria de branas considera uma brana D3 móvel no espaço compacto. Nesta configuração, o módulo da distância entre a brana D3 e a brana anti-D3 obedece aos requisitos da inflação. O cenário cosmológico deve ser o seguinte: quando a brana D3 está longe da brana anti-D3 o movimento da primeira dá aumento à inflação. Quando a brana D3 atinge uma distância crítica em relação à brana anti-D3, o campo escalar converte em um modo taquiônico que causa aniquilação brana-anti-brana. Este processo encerra a inflação e produz radiação.

A inflação é considerada como sendo uma excitação de uma corda aberta e massiva na brana anti-D3. A rolagem deste campo escalar,  $\phi$ , de um valor inicial  $\phi_0$  na direção do mínimo do seu potencial gera inflação quando  $\phi$  está longe de seu estado fundamental  $\phi = 0$ , reaquece o universo quando  $\phi$  oscila ao redor do seu mínimo em  $\phi = 0$  e eventualmente faz o papel de uma constante cosmológica quando para de oscilar em  $\phi = 0$  [19, 21].

O valor inicial do campo escalar na época da inflação é muito diferente do seu estado fundamental, logo, devemos usar uma ação efetiva para o campo escalar que inclua todas as potências de  $\phi$ . Nós usamos a ação efetiva para o campo escalar massivo  $\phi$ .

Quando a brana anti-D3 está em um ponto genérico no espaço compacto, a ação é dada por [23]

$$S = - \int d^4x V(\phi) \sqrt{-\det(g_{ab} + \partial_a \phi \partial_b \phi)}. \quad (3.3)$$

Considerando esta ação efetiva para a excitação da corda aberta massiva da brana anti-D3 do vácuo, encontramos a seguinte ação efetiva

$$S = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2} + \Lambda \right) - V(\phi) \sqrt{-\det(g_{ab} + \partial_a \phi \partial_b \phi)} \right\} \quad (3.4)$$

Este cenário com constante cosmológica negativa é importante pois resolve um problema da inflação taquiônica relacionado ao fato de que a densidade de energia do taquion escala mais devagar do que a matéria (poeira) e a radiação [24, 25], o que significa que os táquions dominariam o universo após a inflação. Consideremos agora o modelo inflacionário com a ação efetiva para o campo taquiônico.

### 3.4 O mecanismo inflacionário com o campo taquiônico

A ação (3.4) pode ser reescrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left( \frac{R}{2} + \Lambda \right) - V(\phi) \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} \right\}. \quad (3.5)$$

O princípio variacional pode ser aplicado à esta ação de modo a obtermos as equações de campo de Einstein acopladas com o termo do campo taquiônico. A variação da primeira parte em relação a  $g^{\mu\nu}$ , já feita no Capítulo 2, nos dá

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2} \frac{R g_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}.$$

A variação da segunda parte é feita pela seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= - \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} V(\phi) \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} + \sqrt{-g} V(\phi) \delta \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} \right] \\ &= - \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} V(\phi) \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} + \sqrt{-g} V(\phi) \frac{(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \delta g^{\mu\nu}}{2 \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} V(\phi) \left[ \frac{1}{2} V(\phi) g_{\mu\nu} \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} - \frac{V(\phi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{2 \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} V(\phi) \left[ \frac{g_{\mu\nu} (1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) - \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considerando que a variação da ação deve se anular, ou seja  $\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_\phi = 0$ , obtemos

$$\frac{R_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2} \frac{R g_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} V(\phi) \left[ \frac{g_{\mu\nu} (1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) - \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right]. \quad (3.7)$$

Podemos reescrever ainda como

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein e  $T_{\mu\nu}$ , dado por

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + V(\phi) \left[ \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} (1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi)}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right] \quad (3.9)$$

é o tensor energia momentum para esta teoria com um campo taquiônico. Em sua forma mista, este tensor nos dá informações sobre a densidade e a pressão do fluido cosmológico

constituído pelo campo escalar em questão. Estas quantidades são dadas em termos das componentes do tensor a partir da forma

$$T_\nu^\mu = \Lambda \delta_\nu^\mu + V(\phi) \left[ \frac{g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu (1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi)}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right] \quad (3.10)$$

Temos então (para  $\phi = \phi(t)$ ),  $T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$  onde

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \Lambda - \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} = -\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \Lambda \text{ e} \\ T_j^i &= \Lambda \delta_j^i - V(\phi) \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} \delta_j^i = p \delta_j^i \quad \Rightarrow \quad p = -V(\phi) \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + \Lambda. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Isto nos dá uma equação de estado na forma

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -1 + \frac{\dot{\phi}^2}{1 - \frac{\Lambda}{V(\phi)} \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} = -c_s^2 \quad (3.12)$$

em que  $c_s^2$  é a velocidade do som no fluido <sup>2</sup>.

Neste cenário, as equações de Friedmann são dadas por

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3} \rho = \frac{1}{3} \left( \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \Lambda \right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{6} (\rho + 3p) = \frac{V(\phi)}{6} \frac{2 - 3\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \frac{\Lambda}{3}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Uma outra propriedade que podemos obter a partir da lagrangeana (3.5) está relacionada com a dinâmica do campo. De fato, ao aplicarmos o método variacional em respeito ao campo escalar  $\phi$ , obtemos sua equação de movimento. As equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (3.14)$$

com a Lagrangeana  $\mathcal{L} = -V(\phi) \sqrt{-g} \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}$ .

O primeiro termo nos dá

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}$$

---

<sup>2</sup>A presença de um termo cinético não canônico na nossa teoria permite definir uma velocidade do som no meio dada por  $c_s^2 = p/\rho$ , o que implica que as perturbações que estudaremos no próximo capítulo são adiabáticas [26]

enquanto que no segundo termo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\frac{\sqrt{-g} V(\phi) \partial^\mu \phi}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}}$$

Portanto a equação de Euler-Lagrange se torna

$$\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\sqrt{-g} V(\phi) \partial^\mu \phi}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \right] = 0. \quad (3.15)$$

Expandindo o segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} - \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) V(\phi)}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} - \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{\sqrt{1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}} \\ & + \frac{\sqrt{-g} V(\phi) \partial_\mu (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \partial^\mu \phi}{2(1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi)^{3/2}} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim podemos fazer algumas simplificações e obter a equação de movimento

$$\square \phi - \frac{1}{2} \frac{\partial_\mu (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \partial^\mu \phi}{2(1 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi)} - \frac{V_{,\phi}}{V(\phi)} = 0, \quad (3.17)$$

onde  $V_{,\phi} \equiv \partial V / \partial \phi$ . Podemos notar também que, fazendo uma expansão em primeira ordem no termo cinético da lagrangeana para o campo taquiônico, recuperamos a lagrangeana usual (2.28) e, conseqüentemente a equação de movimento (3.17) reduz-se à equação de Klein-Gordon para o campo escalar  $\phi$ .

Supondo que há somente dependência temporal do campo,  $\phi = \phi(t)$ , temos que, para um espaço plano de FRW onde  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$ , a equação de movimento (3.17) se torna

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{V_{,\phi}}{V(\phi)} = 0 \quad (3.18)$$

No regime slow-roll,  $\dot{\phi}^2 \ll 1$  e  $|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|$ , a equação (3.18) se torna

$$3H\dot{\phi} + \frac{V_{,\phi}}{V(\phi)} \approx 0 \quad (3.19)$$

e a primeira equação de Friedmann

$$H^2 \approx \frac{V(\phi)}{3} \quad (3.20)$$

Os parâmetros slow-roll são definidos por [27]

$$\varepsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{i+1} \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_i}{H\varepsilon_i} \quad (i \geq 1) \quad (3.22)$$

de modo que os três primeiros parâmetros slow-roll são dados por (ver Apêndice A)

$$\varepsilon_1 \approx \frac{V_{,\phi}^2}{2V^3} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_2 \approx -\frac{2V_{,\phi\phi}}{V^2} + \frac{3V_{,\phi}^2}{V^3} \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_3 \approx -\frac{V_{,\phi}(9V_{,\phi}^3 - 10VV_{,\phi}V_{,\phi\phi} + 2V^2V_{,\phi\phi\phi})}{V^3(-3V_{,\phi}^2 + 2VV_{,\phi\phi})} \quad (3.25)$$

que serão relacionados, no próximo Capítulo, a grandezas observacionais que nos permitem validar nossos resultados. Um outro número importante é o número de e-folds, dado por

$$N \equiv \ln \frac{a_e}{a} \quad (3.26)$$

onde  $a_e$  é o fator de escala no final da inflação. Os parâmetros que são observados na inflação devem ser avaliados em uma época quando as perturbações saem do horizonte de Hubble e são especificados pela relação  $k_\star = a_\star H_\star$ , onde  $k_\star$  é o número de onda comovente no horizonte de saída. Da definição anterior, temos

$$dN = -Hdt = -\frac{H}{\dot{\phi}}d\phi \quad (3.27)$$

e, usando a aproximação slow-roll (3.20) e (3.19), obtemos

$$dN = \frac{V^2}{V_{,\phi}}d\phi \quad (3.28)$$

Com essas ferramentas, juntamente com os resultados do próximo capítulo, poderemos analisar diversos potenciais que satisfazem a dinâmica inflacionária do campo taquiônico.

# Capítulo 4

## Espectro de Potências e Índices Espectrais

### 4.1 Introdução

A inflação fornece um mecanismo físico que gera perturbações de densidade que são responsáveis pela formação de estruturas cósmicas. Já que no momento da inflação os processos físicos são quânticos, existirão flutuações quânticas no campo do ínflaton, que atuarão como sementes das perturbações de densidade presentes na superfície de último espalhamento.

As flutuações quânticas no campo escalar são caracterizadas por um comprimento de onda que cresce exponencialmente durante a inflação. Quando o comprimento de onda das flutuações torna-se maior do que  $H^{-1}$ , estas flutuações desacoplam-se dos processos causais e param de oscilar, de maneira que sua amplitude se congela em algum valor  $\delta\phi(\vec{x})$ . A amplitude dessas flutuações é preservada intacta durante um longo tempo, enquanto seu comprimento de onda cresce exponencialmente. Portanto, a flutuação congelada é equivalente a um campo clássico  $\delta\phi(\vec{x})$ . Finalizada a inflação, o universo é dominado por radiação e o comprimento de onda das flutuações cresce como  $t^{1/2}$ , enquanto o raio de Hubble cresce como  $t$ . Desta maneira, existe um instante no qual as flutuações entrarão de novo no horizonte de Hubble em forma de perturbações de densidade clássica que mais tarde se aplicarão para formar galáxias.

Neste capítulo trataremos as perturbações aplicando o formalismo ADM [3] para reescrever a ação do campo taquiônico em uma forma canônica e expandida em segunda

ordem. Essa ação nos dá equações de movimento do tipo equações de Mukhanov-Sasaki, que descrevem a evolução das perturbações.

## 4.2 O Formalismo ADM

O formalismo ADM, primeiramente formulado por Arnowitt, Deser e Misner, é uma maneira de formular a Relatividade Geral em termos da mecânica Hamiltoniana pelo fatiamento da variedade quadridimensional do espaço tempo,  $\mathcal{M}$ , em uma variedade espacial tridimensional,  $\mathcal{S}$ , e em uma variedade temporal unidimensional,  $\mathbb{R}$ , conhecido também como decomposição 3+1 da Relatividade Geral. Nesse formalismo, os verdadeiros graus de liberdade do campo gravitacional residem nas hipersuperfícies espaciais que folheiam o espaço tempo e a dinâmica deste campo pode ser vista como a evolução no tempo dessas hipersuperfícies [28].

Vamos considerar uma superfície  $\Sigma$  em uma variedade do espaço tempo  $\mathbb{R} \times \Sigma$ . Nesta superfície, a geometria é Riemanniana e logo podemos determinar um vetor normal normalizado na superfície como

$$n^a = \frac{X^a}{\sqrt{-g_{bc}X^bX^c}}, \quad (4.1)$$

tal que  $g_{ab}n^an^b = -1$ . Além disso, para qualquer vetor tangente à superfície devemos ter  $g_{ab}n^an^b = 0$ . Usando essa definição, podemos projetar qualquer vetor no espaço tangente de  $\Sigma$  como

$$v^a = -(g_{cb}v^cn^b)n^a + (v^a + (g_{cb}v^cn^b)n^a) \quad (4.2)$$

Com isso podemos definir a função lapso e o vetor deslocamento a partir da relação

$$t^a = -(g_{cb}t^cn^b)n^a + (t^a + (g_{cb}t^cn^b)n^a) \equiv (\mathcal{N}, N^a) \quad (4.3)$$

onde a evolução temporal é dada por  $t = t^a \nabla_a$  tal que  $t^a$  é normalizado  $t^a \nabla_a t = 1$ , a função lapso  $\mathcal{N} = -n_b t^b$  e o vetor deslocamento  $N^a = h^{ab}t_b$ . A métrica induzida  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  é a métrica 3D na superfície  $\Sigma$ . Logo, podemos escrever

$$t^a = \mathcal{N}n^a + N^a \quad (4.4)$$

de modo que a métrica inversa do espaço tempo pode ser reescrita como

$$g^{ab} = h^{ab} - n^an^b = h^{ab} - \frac{1}{\mathcal{N}^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b) \quad (4.5)$$

Em forma matricial, temos

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

e sua inversa

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^k N_k & N^j \\ N^i & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

a partir da qual podemos escrever o elemento de linha

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad (4.8)$$

em coordenadas  $x^i$  tal que  $t^i \nabla_i = \partial/\partial t$ . A derivada covariante em 4D pode ser escrita em 3D usando a mesma idéia:

$$u^k \nabla_k v^\mu = -g_{\alpha\beta} (u^k \nabla_k v^\alpha) n^\beta n^\mu + u^k \nabla_k v^\mu + g_{\alpha\beta} (u^k \nabla_k v^\alpha) n^\beta n^\mu \quad (4.9)$$

os dois últimos termos são identificados como a derivada covariante 3D e se relacionam com a curvatura extrínseca como

$$K_{ij} u^i v^j = -g_{\alpha\beta} (u^k \nabla_k v^\alpha) n^\beta = g_{\alpha\beta} (u^k \nabla_k n^\alpha) v^\beta \quad (4.10)$$

em termos de  $N$ ,  $N_i$  e  $h_{ij}$ , a curvatura extrínseca é dada por

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left( \dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i \right) \quad (4.11)$$

O escalar de Ricci  $R$  em quatro dimensões pode ser relacionado ao escalar de Ricci em três dimensões via equação de Gauss-Codazzi [29]

$$R = {}^{(3)}R + \frac{1}{N^2} (E_{ij} E^{ij} - E^2) \quad (4.12)$$

onde

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i \right) \quad (4.13)$$

está relacionado com a curvatura extrínseca por  $E_{ij} = N K_{ij}$ .

Considerando que o campo escalar possui apenas dependência temporal, temos

$$V(\phi) \sqrt{1 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi} = V(\phi) \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

Finalmente, com  $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ , ação pode ser reescrita como

$$S = \int dt d^3x N\sqrt{h} \left\{ \frac{1}{2} \left[ {}^{(3)}R + \frac{1}{N^2} (E_{ij} E^{ij} - E^2) \right] + \Lambda - V(\phi) \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (4.15)$$

### 4.3 O Espectro de Potências

A variação da ação (4.15) com respeito a  $N_i$  e  $N$  pode ser feita observando-se que neste caso as equações de Euler-Lagrange se tornam, respectivamente,

$$\nabla_a \left( \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial (\nabla_a N_b)} \right) = 0 \quad (4.16)$$

para  $N_i$  e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \mathcal{N}} = 0 \quad (4.17)$$

para  $\mathcal{N}$ , onde a Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{N} \sqrt{h} \left\{ \frac{1}{2} \left[ {}^{(3)}R + \frac{1}{\mathcal{N}^2} (E_{ij} E^{ij} - E^2) \right] + \Lambda - V(\phi) \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2}{\mathcal{N}^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (4.18)$$

Com isso podemos obter diretamente as relações

$$\nabla_i \left[ \frac{1}{\mathcal{N}} (E_j^i - h_j^i E) \right] = 0, \quad (4.19)$$

$${}^{(3)}R - \frac{1}{\mathcal{N}^2} (E_{ij} E^{ij} - E^2) + 2\Lambda - 2V(\phi) \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2}{\mathcal{N}^2} \right)^{-1/2} = 0. \quad (4.20)$$

Para uma métrica homogênea e isotrópica, na ausência de perturbação,  $N = 1$ ,  $N_i = 0$  e  $h_{ij} = a^2 \delta_{ij}$ , obtemos  $E_{ij} = a \dot{a} \delta_{ij}$ ,  $E^{ij} = (H/a^2) \delta_{ij}$  e  $E = 3H$ , ou seja  $E_{ij} E^{ij} - E^2 = -6H^2$  e a equação (4.20) se torna

$$6H^2 + 2\Lambda - 2V(\phi)(1 - \dot{\phi}^2)^{-1/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad H^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \Lambda \right)$$

que é a equação de Friedmann para o campo taquiônico.

Para analisar o contexto de perturbações, vamos escolher um gauge plano [30]

$$h_{ij} = a^2 \left( e^{2\mathcal{R}} \delta_{ij} + \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{il} \gamma_{lj} \right) \quad (4.21)$$

onde  $\mathcal{R}$  e  $\gamma_{ij}$  denotam as perturbações escalar e tensorial, respectivamente.

Considerando agora perturbações escalares, teremos  $h_{ij} = a^2 e^{2\mathcal{R}} \delta_{ij}$  e  $h^{ij} = a^{-2} e^{-2\mathcal{R}} \delta^{ij}$ , de forma que o tensor de curvatura é dado por

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i \right) \\ &= (H + \dot{\mathcal{R}}) h_{ij} - \frac{1}{2} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i) \end{aligned} \quad (4.22)$$

o tensor contravariante,  $E^{ij} = h^{ia}h^{jb}E_{ab}$ , é dado por

$$E^{ij} = \frac{(H + \dot{\mathcal{R}})\delta^{ij}}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} - \frac{1}{2a^4 e^{4\mathcal{R}}} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i) \quad (4.23)$$

o tensor misto,  $E_j^i = h^{ia}E_{aj}$  é então

$$E_j^i = h^{ia} E_{aj} = (H + \dot{\mathcal{R}})\delta_j^i - \frac{1}{2a^2 e^{2\mathcal{R}}} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i) \quad (4.24)$$

e o escalar,  $E = h^{ij} E_{ij}$

$$E = h^{ij} E_{ij} = 3(H + \dot{\mathcal{R}}) - \frac{\nabla_i N_i}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} \quad (4.25)$$

Logo, o termo entre parênteses na equação (4.19) nos dá como resultado

$$E_j^i - h_j^i E = -2(H + \dot{\mathcal{R}})\delta_j^i - \frac{1}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} \left[ \frac{1}{2} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i) - \nabla_k N_k \delta_j^i \right] \quad (4.26)$$

Para escrever o termo geral de curvatura na ação (4.15), calculamos as quantidades

$$E_{ij}E^{ij} = 3(H + \dot{\mathcal{R}})^2 - \frac{2(H + \dot{\mathcal{R}})}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} \nabla_i N_i + \frac{1}{4a^4 e^{4\mathcal{R}}} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i)^2 \quad (4.27)$$

e

$$E^2 = 9(H + \dot{\mathcal{R}})^2 - \frac{6(H + \dot{\mathcal{R}})}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} \nabla_i N_i + \frac{(\nabla_i N_i)^2}{a^4 e^{4\mathcal{R}}} \quad (4.28)$$

de forma que

$$\begin{aligned} E_{ij}E^{ij} - E^2 &= -6(H + \dot{\mathcal{R}})^2 + \frac{4(H + \dot{\mathcal{R}})}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} \nabla_i N_i \\ &+ a^{-4} e^{-4\mathcal{R}} \left[ \frac{1}{4} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i)^2 - (\nabla_i N_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Fazendo uma aproximação em primeira ordem do tipo

$$N = 1 + \alpha_1, N_i = \partial_i \psi + N_i^T \quad \text{onde} \quad \partial^i N_i^T = 0$$

vamos resolver as equações de vínculo. Assim,

$$\frac{1}{N} (E_j^i - h_j^i E) \simeq -2(H - H\alpha_1 + \dot{\mathcal{R}})\delta_j^i - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2} (\partial_i N_j + \partial_j N_i) - \partial_k N_k \delta_j^i \right] \quad (4.30)$$

Substituindo em (4.19), obtemos

$$\nabla_i \left\{ -2(H - H\alpha_1 + \dot{\mathcal{R}})\delta_j^i - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2} (\partial_i N_j + \partial_j N_i) - \partial_k N_k \delta_j^i \right] \right\} = 0 \quad (4.31)$$

Considerando  $N_i = \partial_i \psi + N_i^T$ ,

$$\begin{aligned}
\partial_i \left[ \frac{1}{2} (\partial_i N_j + \partial_j N_i) - \partial_k N_k \delta_j^i \right] &= \frac{1}{2} (\partial_i \partial_i (\partial_j \psi + N_j^T) + \partial_i \partial_j (\partial_i \psi + N_i^T)) \\
&\quad - \partial_i \partial_k (\partial_k \psi + N_k^T) \delta_j^i \\
&= \partial_i \partial_i \partial_j \psi + \partial_i \partial_i N_j^T - \partial_i \partial_k \partial_k \psi \delta_j^i = \partial_i \delta^{il} \partial_l N_j^T \\
&= \nabla^2 N_i^T
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto,

$$\partial_i \left[ (H\alpha_1 - \dot{\mathcal{R}}) \delta_j^i \right] - \frac{\nabla^2 N_i^T}{a^2} = 0 \tag{4.33}$$

que é satisfeita se

$$\alpha_1 = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H}, \quad N_i^T = 0 \tag{4.34}$$

Na equação de vínculo (4.20), temos que

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{lk}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{li}^k \Gamma_{kj}^l \tag{4.35}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_{bc}^a &= \frac{1}{2} h^{ad} (\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{bd} - \partial_d h_{bc}) \\
&= \partial_b \mathcal{R} \delta_c^a + \partial_c \mathcal{R} \delta_b^a - \partial_a \mathcal{R} \delta_{bc}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Logo, podemos encontrar o tensor de Ricci dado por

$$R_{ij} = -\partial_i \partial_j \mathcal{R} - \partial_k \partial_k \mathcal{R} \delta_{ij} + \partial_i \mathcal{R} \partial_j \mathcal{R} - \partial_k \mathcal{R} \partial_k \mathcal{R} \delta_{ij} \tag{4.37}$$

e, portanto, o escalar de Ricci 3D é dado por

$${}^{(3)}R = h^{ij} R_{ij} = -\frac{1}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} [4\nabla^2 \mathcal{R} + 2(\partial_i \mathcal{R})^2] \tag{4.38}$$

enquanto que, em primeira ordem (em relação a  $N$  e  $\mathcal{R}$ ) a equação (4.29) assume a forma

$$E_{ij} E^{ij} - E^2 \simeq -6H^2 - 12H\dot{\mathcal{R}} + \frac{4H}{a^2} \partial_i N_i \tag{4.39}$$

O termo relacionado ao campo na equação (4.20) pode ser reescrito aproximadamente

$$V(\phi) \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} \right)^{-1/2} \simeq \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - \frac{\dot{\phi}^2 V(\phi)}{(1 - \dot{\phi}^2)^{3/2}} \alpha_1 \tag{4.40}$$

Em primeira ordem, a equação (4.20) se torna

$$\begin{aligned}
& - \frac{4\nabla^2\mathcal{R}}{a^2} + \left(6H^2 + 12H\dot{\mathcal{R}} - \frac{4H}{a^2}\partial_i N_i\right) (1 - 2\alpha_1) + 2\Lambda - \frac{2V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \\
& + \frac{2\dot{\phi}^2 V(\phi)}{(1 - \dot{\phi}^2)^{3/2}} \alpha_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

após simplificar obtemos

$$- \frac{4\nabla^2\mathcal{R}}{a^2} - \frac{4H}{a^2}\partial_i N_i + \frac{2\dot{\phi}^2 V(\phi)}{(1 - \dot{\phi}^2)^{3/2}} \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H} = 0 \tag{4.42}$$

considerando que  $\partial_i N_i = \partial_i \partial_i \psi_1 + \partial_i N_i^T = \nabla^2 \psi_1$ , obtemos

$$\nabla^2 \psi_1 = - \frac{\nabla^2 \mathcal{R}}{a^2 H} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \dot{\mathcal{R}} \tag{4.43}$$

Agora podemos reescrever a ação (4.15) substituindo as equações (4.38) e (4.29), encontrando como resultado

$$\begin{aligned}
S = \int dt d^3x & \left\{ - \frac{1}{a^2 e^{2\mathcal{R}}} [2\nabla^2 \mathcal{R} + (\partial_i \mathcal{R})^2] - \frac{3}{\mathcal{N}^2} (H + \dot{\mathcal{R}})^2 + \frac{2(H + \dot{\mathcal{R}})}{\mathcal{N}^2 a^2 e^{2\mathcal{R}}} \nabla_i N_i \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\mathcal{N}^2 a^{-4} e^{-4\mathcal{R}}} \left[ \frac{1}{4} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i)^2 - (\nabla_i N_i)^2 \right] + \Lambda - V(\phi) \left( 1 - \frac{\dot{\phi}^2}{\mathcal{N}^2} \right)^{1/2} \right\} \tag{4.44}
\end{aligned}$$

e, expandindo em segunda ordem em relação a  $\dot{\mathcal{R}}$  e  $\partial_i \mathcal{R}$ , obtemos a ação

$$S = - \frac{3}{2} \int d^4x \left[ a \dot{\phi}^2 (\partial_i \mathcal{R})^2 - a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{1 - \dot{\phi}^2} \dot{\mathcal{R}}^2 \right] \tag{4.45}$$

Podemos agora encontrar uma ação do tipo Mukhanov-Sasaki definindo um campo canonicamente normalizado  $v = z\mathcal{R}$ , onde

$$z = \frac{\sqrt{3}a\dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}$$

Trocando o tempo físico para o tempo conforme,  $d\tau = dt/a$ , a derivada de  $\mathcal{R}$  se transforma como

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{R}} &= \frac{v'}{az} - \frac{vz'}{z^2} \\
&= \frac{1}{z} \left( \frac{v'}{a} - \frac{va'}{a^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

então podemos escrever

$$S = -\frac{3}{2} \int ad\tau d^3x \left[ \frac{a\dot{\phi}^2(\partial_i v)^2}{z^2} - \frac{a^3\dot{\phi}^2}{1-\dot{\phi}^2} \frac{1}{z} \left( \frac{v'}{a} - \frac{va'}{a^2} \right)^2 \right] \quad (4.47)$$

Com mais algumas simplificações, chegamos a

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[ v'^2 - c_s^2(\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right] \quad (4.48)$$

onde  $c_s^2 = 1 - \dot{\phi}^2$  é a velocidade efetiva do som. Em termos dos parâmetros slow-roll, obtemos [27]

$$\frac{z''}{z} \approx a^2 H^2 \left( 2 - \varepsilon + \frac{3}{2}\eta \right) \quad (4.49)$$

Variando a ação (4.48) em relação a  $v$  obtemos a equação de movimento

$$v'' - c_s^2 \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0 \quad (4.50)$$

Aplicando uma transformada de Fourier do tipo

$$v(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} v_k(\tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

obtemos a equação de Mukhanov-Sasaki em modos de Fourier:

$$v_k'' + \left( c_s^2 k^2 - \frac{q^2 - 1/4}{\tau^2} \right) v_k = 0 \quad (4.51)$$

onde

$$q^2 = \frac{9}{4} - \varepsilon + \frac{3}{2}\eta$$

Esta é uma equação do tipo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{dy}{dx} + (a^2 x^{2r-2} + b^2 x^{-2}) y = 0 \quad (4.52)$$

e possui solução dada por

$$y = x^{-p} \left[ C_1 J_{q/r} \left( \frac{a}{r} x^r \right) + C_2 Y_{q/r} \left( \frac{a}{r} x^r \right) \right] \quad (4.53)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes e  $J_n(x)$  e  $Y_n(x)$  são funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente. Ajustando os valores para nossa equação

$$p = -\frac{1}{2}, \quad r = 1, \quad a = c_s k, \quad b^2 = -q^2 + \frac{1}{4}$$

e, para um Universo em expansão,  $x = -\tau$ , o que implica que nossa solução será dada por

$$v_k(\tau) = \sqrt{-\tau} [C_{1k} J_q(-c_s k \tau) + C_{2k} Y_q(-c_s k \tau)] \quad (4.54)$$

Podemos escrever ainda em termos das funções de Hankel

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

e então

$$v_k(\tau) = \sqrt{-\tau} [C_{1k} H_q^{(1)}(-c_s k \tau) + C_{2k} H_q^{(2)}(-c_s k \tau)] \quad (4.55)$$

O espectro de potências das perturbações quânticas é dado por [31] (ver também Apêndice B)

$$P_{\mathcal{R}}(k, \tau) = \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{R}_k^2(\tau) = \frac{k^3}{z^2 2\pi^2} |v_k(\tau)|^2 \quad (4.56)$$

No limite subhorizonte,  $|c_s k \tau| \rightarrow \infty$ , as funções de Hankel possuem o limite assintótico

$$H_n^{(1)(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left\{ \pm i \left( z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (4.57)$$

de forma que nossa solução (4.55) pode ser reescrita como

$$v_k(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi c_s k}} \left[ C_{1k} e^{-i(c_s k \tau + \frac{\pi}{2} q + \frac{\pi}{4})} + C_{2k} e^{i(c_s k \tau + \frac{\pi}{2} q + \frac{\pi}{4})} \right] \quad (4.58)$$

quando  $c_s k \tau \rightarrow \infty$ , a solução é descrita pelo chamado vácuo de Bunch-Davies que, nesse caso pode ser obtida escolhendo convenientemente  $C_{1k} = \sqrt{\pi}/2$  e  $C_{2k} = 0$  e logo, a solução é

$$v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2c_s k}} \exp \left[ -i \left( c_s k \tau + \frac{\pi}{2} q + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.59)$$

o que nos dá um espectro de perturbação

$$P_{\mathcal{R}}(k, \tau) = \frac{k^2}{4\pi^2 c_s z^2} = \frac{1}{3c_s(1-c_s^2)} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad (4.60)$$

Resolvendo a equação (4.51), encontramos que, fora do horizonte, as funções de Hankel tomam o limite assintótico, de modo que a perturbação escalar é quase constante [27, 31]

$$|\mathcal{R}_k| = \frac{|v_k|}{z} = 2^{q-5/2} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{H(1-\varepsilon_1)^{q-1/2}}{c_s^{1/2} k^{3/2} \varepsilon_1^{1/2}} \left(\frac{c_s k}{aH}\right)^{-q+3/2} \quad (4.61)$$

Portanto o espectro de potências é dado por [27]

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}_k|^2 = \left[1 - \left(\frac{5}{3} + 2C\right) \varepsilon_1 - C\varepsilon_2\right] \frac{H^2}{8\pi^2 \varepsilon_1} \Big|_{c_s k = aH} \quad (4.62)$$

onde  $C = \gamma + \ln 2 - 2 \approx -0,72$  e  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni.

Para perturbações tensoriais, assumimos  $h_{ij} = a^2 \gamma_{ij}$ , onde o tensor de perturbação satisfaz  $\partial_i \gamma^{ij} = 0$  e  $h^{ij} \gamma_{ij} = 0$ . Podemos fazer o mesmo procedimento e escrever, em segunda ordem, a ação (4.15) como

$$S = \frac{1}{8} \int d^4x \left[ a^3 (\dot{\gamma}_{ij})^2 - a (\partial_k \gamma_{ij})^2 \right] \quad (4.63)$$

que nos dá os modos de polarização tensoriais de amplitudes  $b_+$  e  $b_x$  [32]. Então o espectro tensorial é [27]

$$P_T = [1 - 2(1+C)\varepsilon] \frac{2H^2}{\pi^2} \Big|_{c_s k = aH} \quad (4.64)$$

## 4.4 Índices Espectrais

Definimos os índices espectrais em primeira ordem como sendo [27]

$$n_s - 1 = \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \quad (4.65)$$

$$r = \frac{P_T}{P_{\mathcal{R}}} \quad (4.66)$$

$$\alpha_s = \frac{dn_s}{d \ln k} \quad (4.67)$$

$$n_T = \frac{d \ln P_T}{d \ln k} \quad (4.68)$$

Para calcular o índice espectral  $n_s$ , notemos que

$$\frac{d \ln k}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{aH}{c_s} \right) \simeq \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{H}}{H} = (1 - \varepsilon_1)H \quad (4.69)$$

Então

$$\frac{d}{d \ln k} = \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{1}{H} \frac{d}{dt} = \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{\dot{\phi}}{H} \frac{d}{d\phi} = -\frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{V_{,\phi}}{V^2} \frac{d}{d\phi} \quad (4.70)$$

Considerando agora que

$$\frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{1}{P_{\mathcal{R}}} \frac{d P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \quad (4.71)$$

e que

$$c_s^2 = 1 - \dot{\phi}^2 = 1 - \frac{2}{3}\varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad c_s^2(1 - c_s^2) = \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \frac{4}{3}\varepsilon_1^2 \simeq \frac{2}{3}\varepsilon_1$$

ou seja,

$$P_{\mathcal{R}} = \frac{V}{9c_s^2(1 - c_s^2)(2\pi)^2} \simeq \frac{V}{6(2\pi)^2\varepsilon_1}, \quad (4.72)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} &= -\frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{V_{,\phi}}{V^2} \frac{d P_{\mathcal{R}}}{d \phi} \\ &= -\frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{V_{,\phi}}{V^2} \frac{d}{d \phi} \left[ \frac{V}{6(2\pi)^2\varepsilon_1} \right] \\ &= -\frac{1}{6(2\pi)^2} \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{V_{,\phi}}{V^2} \left( \frac{V_{,\phi}}{\varepsilon_1} - \frac{V}{\varepsilon_1^2} \frac{d \varepsilon_1}{d \phi} \right) \\ &= -\frac{1}{6(2\pi)^2} \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \frac{V_{,\phi}}{V^2} \left( \frac{V_{,\phi}}{\varepsilon_1} + \frac{V}{\varepsilon_1} \frac{V^2}{V_{,\phi}} \varepsilon_2 \right) \\ &= -\frac{1}{6(2\pi)^2} \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \left( \frac{V_{,\phi}^2 + V^3 \varepsilon_2}{V^2 \varepsilon_1} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{6(2\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{V_{,\phi}^2 + V^3 \varepsilon_2}{V^2} \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{1}{P_{\mathcal{R}}} \frac{d P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} &= -\frac{6(2\pi)^2\varepsilon_1}{V} \frac{1}{6(2\pi)^2\varepsilon_1} \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{V_{,\phi}^2 + V^3 \varepsilon_2}{V^2} \right) \\ &= -\frac{V_{,\phi}^2}{V^3} - \varepsilon_2 \\ &= -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Logo o índice espectral  $n_s$  será dado por

$$n_s - 1 = \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (4.75)$$

Repetindo este procedimento, podemos encontrar os outros índices espectrais:

$$r = 16\varepsilon_1 \quad (4.76)$$

$$\alpha_s = -2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (4.77)$$

$$n_T = -2\varepsilon_1 \quad (4.78)$$

Essas relações são a ponte que liga os modelos às observações. O raio escalar-tensor,  $r$ , mede o quanto as perturbações tensoriais se alteram com a escala  $e$ , segundo dados mais recentes, possui um valor  $r \sim 0,11$  [12]. É relacionado com os modos B, ou ondas gravitacionais primordiais, como veremos no próximo capítulo. O índice espectral escalar,  $n_s$  é relacionado com os modos E, ou as perturbações de densidade e possui um valor próximo da unidade.

# Capítulo 5

## Parâmetros observacionais da inflação

Observações da Radiação Cósmica de Fundo com altas precisões são de grande importância na cosmologia moderna, já que essa é a forma mais poderosa para entender a origem e evolução de nosso Universo. Atualmente vários projetos tem buscado novos resultados advindos da RCF, objetivando testar teorias de formação de processos primordiais, os quais deixaram suas impressões no espectro de radiação. Especificamente, há uma busca pelas ondas gravitacionais primordiais, geradas pelo mecanismo inflacionário e que nos dará uma prova conclusiva sobre a teoria da inflação.

Neste capítulo analisaremos alguns potenciais para o campo taquiônico que geram a inflação e faremos comparações com os dados obtidos pelo experimento PLANCK 2015. Desta forma discutiremos como deve ser o comportamento do potencial associado e como os parâmetros do modelo são ajustados.

### 5.1 A busca por modos E e modos B

A teoria da inflação é bem respaldada no tocante a observação de fenômenos conectados com as flutuações quânticas geradas nesse período, tais como a anisotropia da RCF, as ondas gravitacionais primordiais e a estrutura em larga escala. Em 1992 o experimento COBE DMR relatou a primeira detecção da anisotropia, o que indica uma consistência com o espectro de perturbações de densidade gerado na inflação. As ondas gravitacionais primordiais, geradas durante a inflação, induzem uma assinatura específica

em sua propriedade de polarização [33].

Genericamente, as perturbações primordiais podem ser decompostas em três tipos: perturbações escalar, vetorial e tensorial. As perturbações escalares causam as anisotropias da RCF e a formação de estruturas em larga escala e são também denominadas *modos E*. As perturbações vetoriais correspondem a vórtices que declinam rapidamente durante a expansão do Universo e podem ser negligenciadas em um tempo posterior. As perturbações tensoriais, isto é, as ondas gravitacionais primordiais imprimem uma assinatura no espectro de potências da RCF produzindo polarização do tipo *modos B* [32]. Portanto, provas da existência dos modos B primordiais são sempre tratadas como cruciais para testar os modelos de universo primordial.

Experimentos recentes mostram que os modos E são detectados com alta significância [12, 33]. No entanto, os modos B primordiais são intrinsecamente mais fracos do que os modos E e estão ainda a serem descobertos e sua detecção é considerada como uma medida direta da escala de energia inflacionária. Isso devido ao fato de que os modos tensoriais originados das flutuações do vácuo possui um espectro que depende apenas do parâmetro de Hubble, ou seja, da evolução no espaço, independente da dinâmica do campo contido durante sua geração. Podemos relacionar ainda os modos B ao raio escalar-tensor,  $r$ , avaliado em um dado número de onda espacial. Dada a grande importância, vários projetos estão em progresso em busca da primeira detecção de ondas gravitacionais primordiais, o que nos dará uma prova poderosa sobre a física da inflação.

## 5.2 Potenciais para o campo taquiônico inflacionário

Passaremos a analisar alguns potenciais candidatos a descrever a interação do campo taquiônico na inflação. Analisaremos o potencial exponencial que, curiosamente, possui o mesmo comportamento (com relação aos índices espectrais) do que o potencial  $\phi^2$ . A seguir, veremos o potencial cosseno hiperbólico e, por último o potencial polinomial. Segundo as observações, temos  $n_s = 0,986 \pm 0,006$ ,  $r < 0,11$  e  $\alpha_s = -0,003 \pm 0,007$  [12].

### 5.2.1 Potencial exponencial

Vamos considerar o potencial da forma

$$V(\phi) = V_0 e^{-\phi/\phi_0} \quad (5.1)$$

Os parâmetros slow-roll (3.23), para este potencial, são

$$\varepsilon_1 = \frac{e^{\phi/\phi_0}}{2V_0\phi_0^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{e^{\phi/\phi_0}}{V_0\phi_0^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{e^{\phi/\phi_0}}{V_0\phi_0^2} \quad (5.2)$$

e o número de e-folds

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V^2}{V_\phi} d\phi = V_0\phi_0^2 [e^{-\phi/\phi_0} - e^{-\phi_f/\phi_0}] \quad (5.3)$$

usando a condição  $\varepsilon_1(\phi_f) = 1$ , obtemos  $\phi_e = \phi_0 \ln(2V_0\phi_0^2)$ , ou seja,

$$\phi = -\phi_0 \ln \left[ \frac{N}{V_0\phi_0^2} + \frac{1}{2V_0\phi_0^2} \right] \quad (5.4)$$

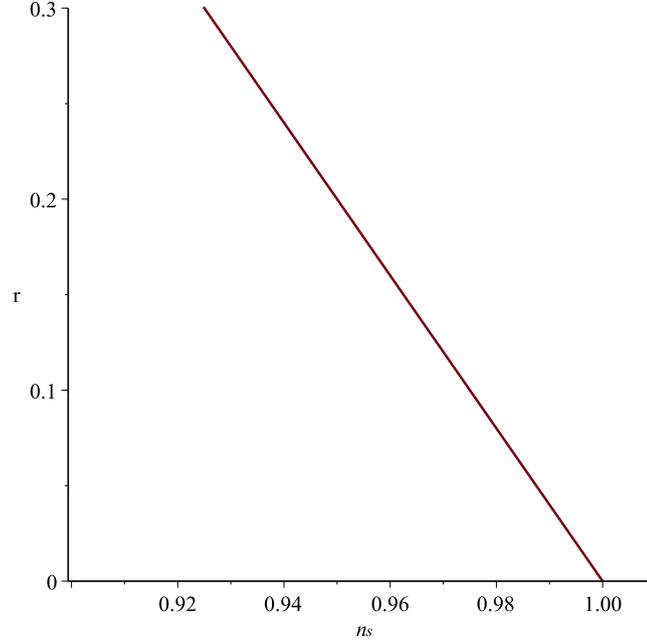


Figura 5.1: Relação entre os índices espectrais para o potencial exponencial (5.1).

Com isso, o índice espectral escalar é dado por

$$n_s = \frac{2N - 3}{2N + 1} \quad (5.5)$$

e o raio escalar tensor

$$r = \frac{16}{2N + 1} \quad (5.6)$$

Pela Figura (5.1) temos que os valores são compatíveis com os dados do Planck.

## 5.2.2 Potencial cosseno hiperbólico inverso

O potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\cosh\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)} \quad (5.7)$$

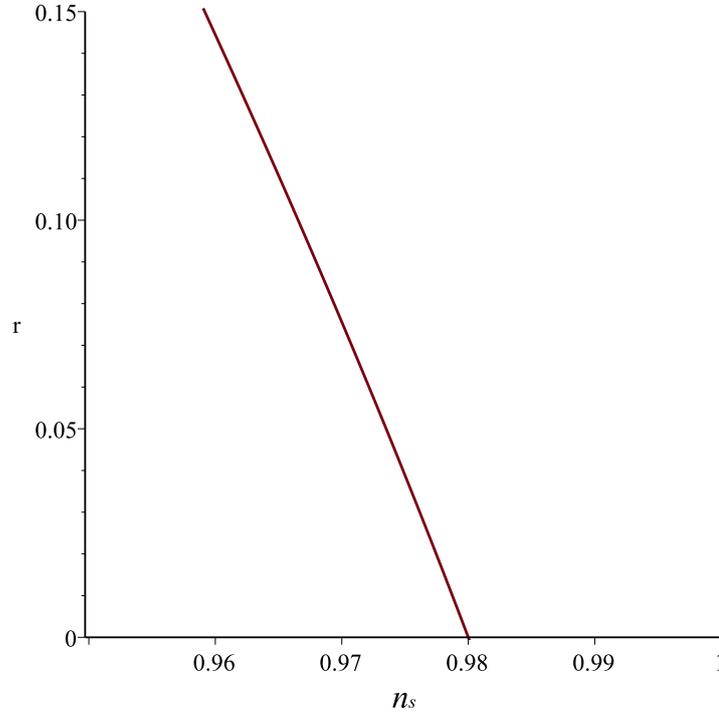


Figura 5.2: Relação entre os índices espectrais para o potencial cosseno hiperbólico inverso.

o que nos dá os índices espectrais

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2V_0\phi_0^2} \frac{\sinh^2(\phi/\phi_0)}{\cosh(\phi/\phi_0)}, \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2V_0\phi_0^2} \frac{1 + \cosh^2(\phi/\phi_0)}{\cosh(\phi/\phi_0)}, \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{V_0\phi_0^2} \frac{\sinh^4(\phi/\phi_0)}{\cosh(\phi/\phi_0)(1 + \cosh^2(\phi/\phi_0))}, \quad (5.10)$$

Com isso obtemos

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V_0\phi_0}{\sinh(\phi/\phi_0)} d\phi = V_0\phi_0^2 \left[ \ln\left(\frac{1 + e^{\phi/\phi_0}}{1 - e^{\phi/\phi_0}}\right) - \ln\left(\frac{1 + e^{\phi_f/\phi_0}}{1 - e^{\phi_f/\phi_0}}\right) \right] \quad (5.11)$$

daí, temos que  $\tanh(\phi/2\phi_0) = \exp(-N/V_0\phi_0^2) \tanh(\phi_f/2\phi_0)$ . Por outro lado, para determinar  $\phi_f$  devemos usar a condição  $\varepsilon_1(\phi_f) = 1$ , de modo que podemos obter

$$\cosh\left(\frac{\phi_f}{\phi_0}\right) = V_0\phi_0^2 + \sqrt{1 + V_0^2\phi_0^4} \quad (5.12)$$

com isso, temos

$$\tanh\left(\frac{\phi_f}{2\phi_0}\right) = \frac{\sqrt{2V_0\phi_0^2} \left(V_0\phi_0^2 + \sqrt{1 + V_0^2\phi_0^4}\right)^{1/2}}{V_0\phi_0^2 + \sqrt{1 + V_0^2\phi_0^4} + 1} \simeq 1 \quad (5.13)$$

e portanto,  $\tanh(\phi/2\phi_0) \approx \exp(-N/V_0\phi_0^2)$ . Considerando agora que

$$\tanh\left(\frac{\phi_f}{2\phi_0}\right) = \frac{\sinh(\phi/\phi_0)}{\cosh(\phi/\phi_0) + 1} \quad (5.14)$$

podemos resolver a equação e obter

$$\sinh\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) = \frac{2e^{-N/V_0\phi_0^2}}{1 - e^{-2N/V_0\phi_0^2}}, \quad \cosh\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) = \frac{1 + e^{-2N/V_0\phi_0^2}}{1 - e^{-2N/V_0\phi_0^2}} \quad (5.15)$$

e então os índices espectrais são dados por

$$n_s - 1 = \frac{e^{-4N/V_0\phi_0^2} + 4e^{-2N/V_0\phi_0^2} + 1}{V_0\phi_0^2(e^{-4N/V_0\phi_0^2})^2 - 1} \quad (5.16)$$

$$r = \frac{32e^{-2N/V_0\phi_0^2}}{V_0\phi_0^2(1 - e^{-4N/V_0\phi_0^2})^2} \quad (5.17)$$

$$\alpha_s = -\frac{4e^{-2N/V_0\phi_0^2}}{V_0^2\phi_0^4(e^{-2N/V_0\phi_0^2} - 1)^2} \quad (5.18)$$

Por meio do gráfico de  $r - n_s$ , na Figura (5.2), podemos ver que estes valores estão de acordo com os dados do Planck em  $1\sigma$  de confiança estatística.

### 5.2.3 Potencial polinomial

Consideremos agora o potencial

$$V(\phi) = V_0\phi^p \quad (5.19)$$

os parâmetros de rolagem lenta são dados por

$$\varepsilon_1 = \frac{p^2}{2V_0}\phi^{-2-p} \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{p(p+2)}{V_0}\phi^{-2-p} \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{p(p+2)^2}{V_0(p-2)}\phi^{-2-p} \quad (5.22)$$

O número de e-folds nesse caso será

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V^2}{V_{,\phi}} d\phi = \frac{V_0}{p} \left( \frac{\phi^{2+p} - \phi_f^{2+p}}{2+p} \right) \quad (5.23)$$

onde  $\phi_f$  é determinado pela condição  $\varepsilon_1(\phi_f) = 1$ , de modo que

$$\phi_f^{2+p} = \frac{p^2}{2V_0}$$

portanto, podemos escrever  $\phi$  em termos de  $N$  como

$$\phi^{2+p} = \frac{(2N+1)p^2 + 4Np}{2V_0}$$

Podemos escrever os parâmetros de rolagem lenta em termo de  $N$  da seguinte forma

$$\varepsilon_1 = \frac{p}{(2N+1)p + 4N} \quad (5.24)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2(p+2)}{(2N+1)p + 4N} \quad (5.25)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2(p+2)^2}{2-p} \frac{1}{(2N+1)p + 4N} \quad (5.26)$$

e, com isso, nossos índices espectrais se tornam

$$n_s = 1 - \frac{4p+4}{(2N+1)p + 4N} \quad (5.27)$$

$$r = \frac{16p}{(2N+1)p + 4N} \quad (5.28)$$

$$\alpha_s = -\frac{(2+p)(2p^2 + 20p + 16)}{(2-p)[(2N+1)p + 4N]^2} \quad (5.29)$$

Vamos estudar nossos índices espectrais para alguns valores para  $p$ . Com  $p = 2$  temos

$$n_s = 1 - \frac{6}{4N+1} \quad (5.30)$$

$$r = \frac{16}{4N+1} \quad (5.31)$$

e, para um valor  $N = 55$ , obtemos  $n_s = 0,973$  e  $r = 0,072$ . Com  $p = 4$ , temos

$$n_s = 1 - \frac{5}{3N+1} \quad (5.32)$$

$$r = \frac{16}{3N+1} \quad (5.33)$$

e, para um valor  $N = 55$ , obtemos  $n_s = 0,970$  e  $r = 0,096$ . Já no caso  $p \gg 1$ , temos

$$n_s = 3 - \frac{4}{2N+1} \quad (5.34)$$

$$r = \frac{16}{2N+1} \quad (5.35)$$

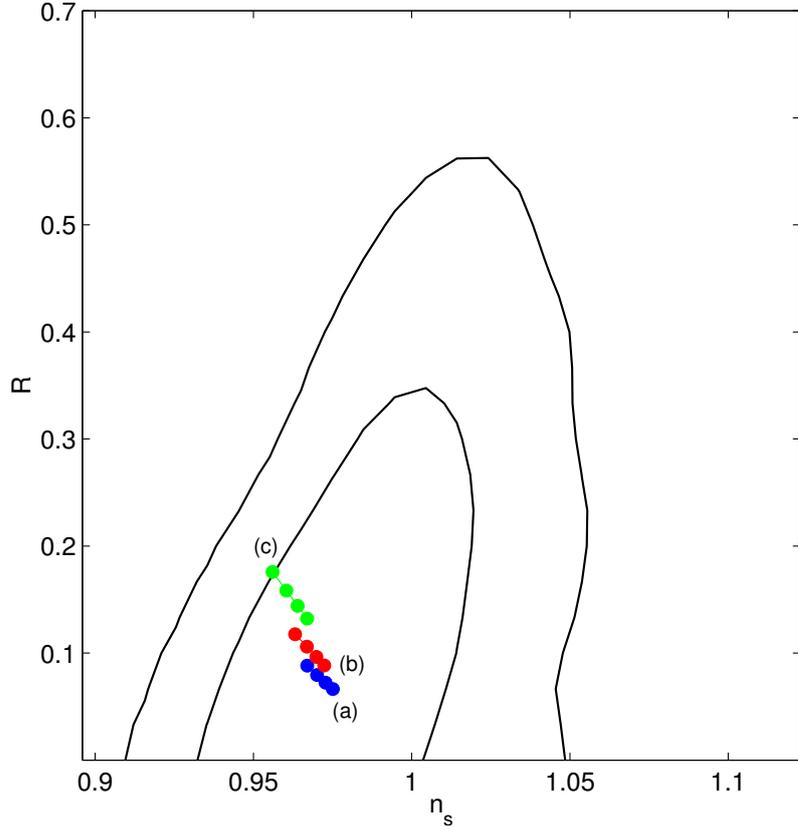


Figura 5.3: Vínculos em 2D no plano  $n_s - R$  para o potencial polinomial. Cada caso corresponde a (a)  $p = 2$ , (b)  $p = 4$  e (c)  $p \gg 1$  com  $N = 45, 50, 55, 60$ .

que nos dá  $n_s = 0,964$  e  $r = 0,144$  para  $N = 55$ . Na Figura (5.3) vemos que os dados são compatíveis com esses valores, de forma que este é considerado um bom modelo.

#### 5.2.4 Potencial $\beta$ -exponencial

Consideremos agora o potencial dado por

$$V(\phi) = [1 + \beta(-\lambda\phi)]^{1/\beta} \quad (5.36)$$

Podemos calcular os índices espectrais para este modelo, em termos de  $N$ , aplicando os mesmos procedimentos anteriores. Sendo assim, podemos deduzir que o índice espectral  $n_s$  e o raio escalar-tensor são dados por

$$n_s = 1 - \frac{4\lambda^2}{M} \left(1 - \frac{\beta\lambda^2}{M}\right), \quad r = \frac{8\lambda^2}{M}, \quad (5.37)$$

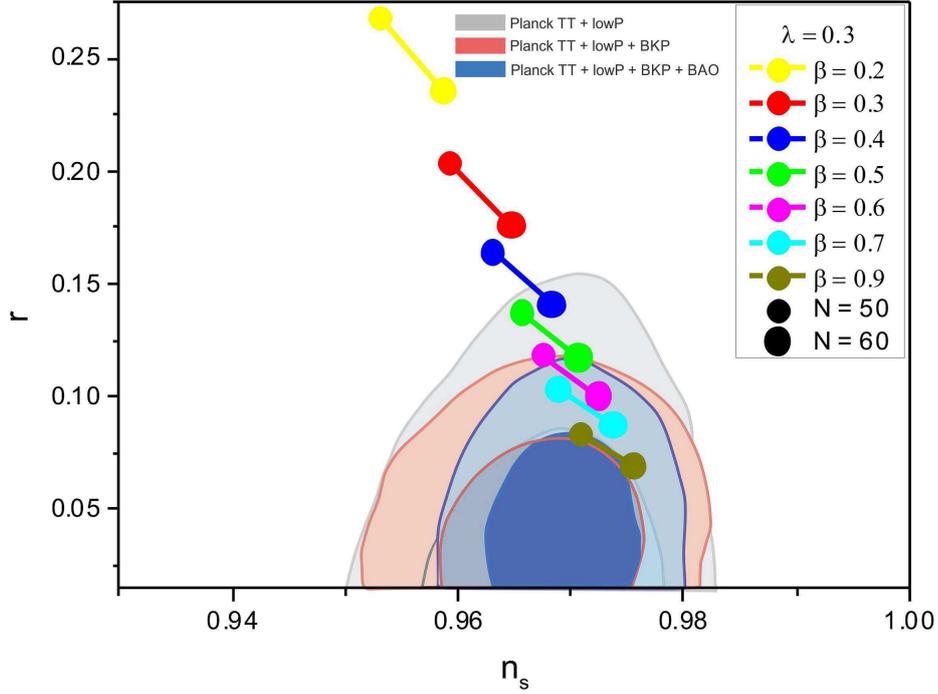


Figura 5.4: Plano  $n_s - r$  para valores  $50 < N < 60$  e alguns valores de  $\beta$ , considerando  $\lambda = 0, 3$ .

onde

$$M = \lambda^2 N(1 + 2\beta) + \left(\frac{2}{\lambda^2}\right)^{(2\beta+1)/(2\beta-1)}$$

e podemos ainda relacionar  $r$  e  $n_s$  de modo que

$$r = \frac{4(1 - n_s)}{1 + \beta} \quad (5.38)$$

Na figura (5.4) temos que os dados são compatíveis com as observações.

Com base nessas análises, vemos que os potenciais aqui descritos estão dentro da margem de erro estatístico, considerando os dados mais recentes. É provável que no futuro esses comportamentos converjam para o comportamento de um só potencial mais geral, o qual será a solução do problema da inflação no Universo.

# Capítulo 6

## O Problema da Medida na Inflação

Na teoria da inflação trabalhamos com flutuações com escalas tão pequenas que devemos considerar os efeitos quânticos sobre estas. Durante a expansão do Universo essas flutuações vão passando do regime quântico para o semi-clássico até se tornarem clássicas, passarem pela era da radiação e, na era da matéria, formarem estruturas em larga escala. No entanto, surgem alguns problemas relacionados com esta transição, dentre os quais abordaremos o problema da medida. Este problema consiste em entender como ocorre esta transição. Mais especificamente, buscaremos compreender como os estados que descrevem a natureza quântica das flutuações colapsam e como as medidas são afetadas neste processo.

Neste capítulo buscaremos essa compreensão e de que modo um termo não linear pode oferecer uma resposta ao problema. Faremos ao final um tratamento via Funções de Green, tratando o termo não linear como um termo fonte, dando espaço para futuras pesquisas nesta área.

### 6.1 A equação de Schrödinger para as perturbações

Como vimos no Capítulo 4, podemos aplicar a transformada de Fourier na ação (4.48), isto é,

$$v(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} v_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (6.1)$$

e com isso obtemos

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \int d^3k \left[ v'_{\vec{k}} v'^*_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} v^*_{\vec{k}} \left( \frac{z''}{z} - c_s^2 k^2 \right) \right] \quad (6.2)$$

Os momentos conjugados são dados por

$$p_{\vec{k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{\vec{k}}^{\prime}} = v_{\vec{k}}^{\prime} \quad (6.3)$$

logo a Hamiltoniana será dada por

$$\mathbb{H} = \int d^3 k \left[ p_{\vec{k}} p_{\vec{k}}^{\prime} + v_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^{\star} \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) \right] \quad (6.4)$$

Separando as partes real e imaginária, ou seja, introduzindo

$$v_{\vec{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (v_{\vec{k}}^R + i v_{\vec{k}}^I), \quad p_{\vec{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{\vec{k}}^R + i p_{\vec{k}}^I), \quad (6.5)$$

a função de onda  $\Psi[v(\tau, \vec{x})]$  pode ser fatorada como

$$\Psi[v(\tau, \vec{x})] \equiv \prod_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^R(v_{\vec{k}}^R, \tau) \psi_{\vec{k}}^I(v_{\vec{k}}^I, \tau) \quad (6.6)$$

A quantização é obtida tomando  $v_{\vec{k}}$  e  $p_{\vec{k}}$  como operadores quânticos,  $\hat{v}_{\vec{k}}$  e  $\hat{p}_{\vec{k}}$ , satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{v}_{\vec{k}}^R, \hat{p}_{\vec{q}}^R] = [\hat{v}_{\vec{k}}^I, \hat{p}_{\vec{q}}^I] = i \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad (6.7)$$

e estas relações admitem as representações

$$\hat{v}_{\vec{k}}^{R,I} \Psi = v_{\vec{k}}^{R,I} \Psi, \quad \hat{p}_{\vec{k}}^{R,I} \Psi = -i \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{v}_{\vec{k}}^{R,I}} \quad (6.8)$$

Podemos agora escrever a equação de Schrödinger como

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_{\vec{k}}^{R,I} = \hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{R,I} \Psi_{\vec{k}}^{R,I} \quad (6.9)$$

onde

$$\hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}}^{R,I} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial (v_{\vec{k}}^{R,I})^2} + \frac{1}{2} \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{\vec{k}}^{R,I})^2 \quad (6.10)$$

e, considerando o estado Gaussiano

$$\Psi_{\vec{k}}^{R,I}(\tau, v_{\vec{k}}^{R,I}) = N_{\vec{k}}(\tau) e^{-\Omega_{\vec{k}}(\tau) (v_{\vec{k}}^{R,I})^2}$$

temos

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial (v_{\vec{k}}^{R,I})^2} - \frac{1}{2} \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) (v_{\vec{k}}^{R,I})^2 \right] \Psi_{\vec{k}}^{R,I} = 0 \quad (6.11)$$

Calculando os termos para o pacote Gaussiano dado acima e rearranjando, podemos obter duas equações:

$$i \frac{N'_k}{N_k} = \Omega_k, \quad \Omega'_k = -2i\Omega_k^2 + \frac{i}{2} \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) \quad (6.12)$$

Na primeira equação, o valor de  $N_k$  pode ser obtido por normalização e vale

$$|N_k| = \left( \frac{2\text{Re}\Omega_k}{\pi} \right)^{1/4} \quad (6.13)$$

Na segunda equação, supondo

$$\Omega_k = -\frac{i f'_k}{2 f_k} \quad (6.14)$$

obtemos

$$f''_k + \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) f_k = 0 \quad (6.15)$$

que é a mesma forma da equação (4.51) já obtida anteriormente. Assim, podemos estudar as soluções para a função de onda nos dois regimes,  $|c_s k \tau| \rightarrow \infty$  e  $|c_s k \tau| \ll 1$ . Portanto, para o primeiro limite, temos

$$f_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(q+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\tau} H_q^{(1)}(-c_s k \tau) \quad (6.16)$$

Uma vez que nosso intuito agora é estudar a função de onda gerada nesse limite, podemos tomar  $\varepsilon_{1,2} \rightarrow 0$ , de modo que  $q = 3/2$  e a solução pode ser reescrita como

$$f_k(\tau) = \frac{e^{-i c_s k \tau}}{\sqrt{2 c_s k}} \left( 1 - \frac{i}{c_s k \tau} \right) \quad (6.17)$$

e então pela definição de  $\Omega_k$  obtemos

$$\Omega_k = \frac{c_s k (c_s k \tau)^2 + i/(c_s k \tau)}{2 (1 + (c_s k \tau)^2)} \quad (6.18)$$

Para o limite correspondente a  $|c_s k \tau| \ll 1$ , podemos obter

$$|\Psi_k(\mathcal{R}_k)|^2 \rightarrow \frac{(c_s k)^3}{\pi H^2} \exp \left[ -\frac{(c_s k)^3 |\mathcal{R}_k|^2}{H^2} \right] \quad (6.19)$$

onde retornamos às nossas variáveis iniciais. Podemos ver que esta é uma solução independente do tempo para o oscilador harmônico

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial |\mathcal{R}_k|^2} \Psi_k + \frac{(c_s k)^6}{2H^4} |\mathcal{R}_k|^2 \Psi_k \quad (6.20)$$

e oscila com uma frequência  $\omega = (c_s k)^3 / H^2 \sqrt{2}$ .

Em tratando-se de medidas quânticas, é interessante calcularmos os valores médios e as variâncias para algumas quantidades. Primeiro, é fácil ver que

$$\langle \Psi | \hat{v}_k^{R,I} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{p}_k^{R,I} | \Psi \rangle = 0 \quad (6.21)$$

Temos ainda

$$\langle \Psi | \left( \hat{v}_k^{R,I} \right)^2 | \Psi \rangle = \frac{1}{4\Re\Omega_k} \quad (6.22)$$

e

$$\langle \Psi | \left( \hat{p}_k^{R,I} \right)^2 | \Psi \rangle = \Re\Omega_k + \frac{(\Im\Omega_k)^2}{\Re\Omega_k} \quad (6.23)$$

Finalmente, o produto cruzado pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \left( \hat{v}_k^R \hat{p}_k^R \right)^2 | \Psi \rangle &= \frac{i\Omega_k}{2\Re\Omega_k} \\ \langle \Psi | \left( \hat{p}_k^R \hat{v}_k^R \right)^2 | \Psi \rangle &= -i + \frac{i\Omega_k}{2\Re\Omega_k} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Como discutido na literatura [34], na transição quântica-para-clássica, o estado quântico de cada modo de Fourier  $v_k^R$  se torna "comprimido". A função bidimensional de Wigner (uma generalização da distribuição de probabilidades clássica no espaço de Hilbert) se torna alongada em uma dada direção, isto é, assume uma forma diferente da usual. Esta interpretação nos leva à questão fundamental neste caso: como exatamente as flutuações quânticas durante a inflação se tornaram perturbações clássicas.

## 6.2 O problema da medida na inflação

Considerando o estado quântico de uma partícula dado por  $|\psi\rangle$ . Se uma medida da localização da partícula é feita, então a interpretação de Copenhagen postula que o estado colapsa. No entanto, a dinâmica do colapso é desconhecida. De fato, uma vez que o campo de perturbação de curvatura pode ser dado como uma sobreposição de todas as possíveis configurações de campo, e que acreditamos que o colapso de fato ocorreu (já que estamos aqui para observar tal fato), significa dizer que há duas possibilidades. A primeira é que a interpretação de Copenhagen está errada - não podemos testá-la nesse caso, já que não há condições de um observador realizar a medida - ou há alguma dinâmica desconhecida que seleciona uma configuração de campo, isto é, que realiza o colapso.

### 6.3 Modelo de interação

Vamos considerar um modelo proposto por [35], cuja Hamiltoniana de interação é dada por

$$\mathbb{H}_{int} = \frac{1}{2\pi} \sum_k \sum_{q: |q-k| < \Delta} \gamma(k, \tau) \delta(R_k - R_q) \quad (6.25)$$

onde  $R_k \equiv |\mathcal{R}_k|$ ,  $\gamma$  é a força de acoplamento e  $\Delta$  é a janela de interação. Este modelo, baseado em um gás de Bose fracamente interagente, introduz um termo não linear na equação de Schrödinger, a qual possui a seguinte forma

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(R_k, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial |R_k|^2} + \frac{(c_s k)^6}{2H^4} |R_k|^2 \psi + N \gamma R_k |\psi|^2 \psi \quad (6.26)$$

No limite  $N \rightarrow \infty$  a Hamiltoniana de interação pode ser escrita de forma contínua como

$$\mathbb{H}_{int} = \int d^3k \int_{k-\Delta}^{k+\Delta} d^3q \bar{\gamma} \delta(R_k - R_q) = \int d^3k \frac{\bar{\gamma}}{|\nabla_k R_k|} \quad (6.27)$$

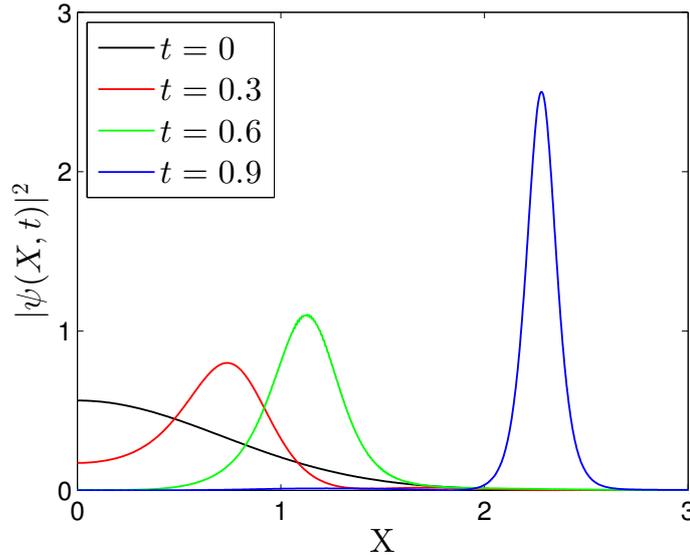


Figura 6.1: Solução numérica de (6.28) com  $\Gamma = -20$ . O termo não linear modifica o perfil Gaussiano tradicional (em preto), em um perfil de distribuição mais localizada (em azul) [35].

A Hamiltoniana nos fornece um termo de interação que faz com que o campo “selecione” um dado estado colapsado. Podemos ver isso reescrevendo (6.26) da forma

$$i \frac{\partial}{\partial T} \psi(X, T) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{1}{2} X^2 \psi + \Gamma X |\psi|^2 \psi \quad (6.28)$$

onde

$$X \equiv \frac{R_k c_s^{3/2} k^{3/2}}{H}, \quad T \equiv \frac{\tau c_s^3 k^3}{H^2}, \quad \Gamma \equiv \frac{\gamma N c_s^{9/2} k^{9/2}}{H^3}$$

Com a inclusão do termo não linear o perfil Gaussiano é modificado e então podemos ver que o estado de fato colapsa devido a essas modificações.

Mais precisamente, o mecanismo de colapso nos leva a um estado final tal que a relação

$$\Phi_k = \langle \Psi | \hat{\Phi}_k | \Psi \rangle \quad (6.29)$$

seja válida.

Os perfis Gaussianos que surgem devido ao termo não linear demonstram que o colapso da função de onda somente ocorre considerando-se tal termo. Para uma análise mais detalhada, vamos fazer um estudo via funções de Green.

## 6.4 Função de Green para a Equação de Schrödinger não linear

Considerando a equação de Schrödinger com um termo não linear,

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2}\nabla^2 \psi + \frac{1}{2}r^2 \psi + \Gamma r |\psi|^2 \psi \quad (6.30)$$

onde  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ , podemos escrever

$$\left( \frac{1}{2}\nabla^2 + i\partial_t - \frac{1}{2}|\vec{r}|^2 \right) \psi(\vec{r}, t) = \Gamma |\vec{r}| |\psi|^2 \psi \quad (6.31)$$

em que o primeiro membro da equação é a equação do oscilador harmônico dependente do tempo. Podemos fazer uma transformada de Fourier na equação (6.31), usando o teorema do produto observando que

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 \psi(\vec{r}, t) \leftrightarrow (2\pi)^2 \left[ \psi(\vec{r}, \omega) \underset{\omega}{\circlearrowleft} \psi^*(\vec{r}, \omega) \right] \underset{\omega}{\otimes} \psi(\vec{r}, \omega) \quad (6.32)$$

de modo que

$$\left( \frac{1}{2}\nabla^2 + \omega \right) \psi(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2}r^2 \psi(\vec{r}, \omega) + \Gamma r (2\pi)^2 \left[ \psi(\vec{r}, \omega) \underset{\omega}{\circlearrowleft} \psi^*(\vec{r}, \omega) \right] \underset{\omega}{\otimes} \psi(\vec{r}, \omega) \quad (6.33)$$

onde  $\psi(\vec{r}, \omega)$  é a transformada de Fourier de  $\psi(\vec{r}, t)$ . Os símbolos  $\odot_{\omega}$  e  $\otimes_{\omega}$  são as integrais de correlação e convolução, respectivamente (no espaço  $\omega$ ), de modo que, para duas funções  $f_1(\omega)$  e  $f_2(\omega)$  temos

$$(f_1 \otimes_{\omega} f_2)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega - \omega') f_2(\omega') d\omega' \quad (6.34)$$

e

$$(f_1 \odot_{\omega} f_2)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega + \omega') f_2(\omega') d\omega' \quad (6.35)$$

A solução pode ser escrita então como

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, \omega) &= g(\vec{r}, \omega) \otimes_{\omega} \frac{1}{2} r^2 \psi(\vec{r}, \omega) \\ &+ g(\vec{r}, \omega) \otimes_{\omega} \Gamma r (2\pi)^2 \left[ \psi(\vec{r}, \omega) \odot_{\omega} \psi^*(\vec{r}, \omega) \right] \otimes_{\omega} \psi(\vec{r}, \omega) \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde  $g(\vec{r}, \omega)$  é a transformada de Fourier da função de Green, que é dada por [36]

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t_0) = \frac{1}{2\pi i(t - t_0)} \exp \left[ \frac{i(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2(t - t_0)} \right] \quad (6.37)$$

que é um pacote Gaussiano que já mostra as características da nossa solução.

Portanto, o termo não linear incluso fornece uma nova descrição para o problema, alterando a forma do perfil Gaussiano da função de onda e, conseqüentemente, impondo as condições necessárias para o acesso do campo à uma dinâmica que responde ao colapso de nossa função de onda.

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas

No presente trabalho de dissertação, pudemos analisar alguns aspectos da teoria da inflação governada por um campo taquiônico que assume o papel do ínflaton em teorias canônicas padrão. Por meio da decomposição 3+1 do espaço tempo, encontramos a ação de Mukhanov-Sasaki correspondente para a teoria e com isso pudemos estudar os aspectos das perturbações escalar e tensorial e obter o espectro de potências. Tal espectro é de suma importância para determinarmos os índices espectrais, quantidades que ligam a teoria às observações.

Nos limites assintóticos, encontramos as soluções para a equação de perturbação de curvatura considerando o campo escalar acoplado minimamente e obtivemos um comportamento similar ao da literatura, feito para um campo escalar canônico usual. O fato do campo escalar considerado não ser canônico alterou os espectros de potência, calculados nesses limites. Conseqüentemente essas mudanças fizeram com que houvessem alterações nos índices espectrais. Portanto, deste modo os parâmetros observacionais sofreram mudanças em relação a teoria usual.

Outro aspecto abordado foi o problema da medida na inflação. Baseado em alguns estudos em Mecânica Quântica e em Cosmologia, mostramos que o colapso de um estado que descreve as flutuações pode ser descrito através da inclusão de um termo não linear na equação de Schrödinger, fazendo a convergência do espectro Gaussiano. Por fim, ao utilizar funções de Green para descrição do problema, vimos que o termo não linear atua como um termo de fonte, provendo o mecanismo necessário ao colapso da função de onda.

Os modelos taquiônicos na inflação, apesar de apresentarem alguns problemas são uma boa alternativa para a descrição desta fase do Universo tão crucial para o entendi-

mento acerca do Universo em que vivemos. A generalização desses modelos em teorias de branas e teoria de cordas são boas perspectivas para trabalhos futuros, consolidando o campo taquiônico como um dos mais importantes e significativos no estudo da Cosmologia.

# Apêndice A

## Parâmetros de rolagem lenta na inflação taquiônica

Podemos reescrever as equações da dinâmica do campo taquiônico considerando que este rola lentamente ao redor do mínimo do seu potencial. De acordo com esta condição, temos que  $\dot{\phi}^2 \ll 1$  e  $|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|$ . Com isto, as equações (3.13) e (3.18) se tornam

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V_{,\phi}}{3HV} \quad (\text{A.2})$$

Os parâmetros slow-roll são definidos por

$$\varepsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\varepsilon_{i+1} \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_i}{H\varepsilon_i} \quad (i \geq 1) \quad (\text{A.4})$$

Para obter o primeiro parâmetro, devemos notar que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\dot{\phi}^2 V(\phi)}{2\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} \approx \frac{\dot{\phi}^2 V(\phi)}{2} \quad (\text{A.5})$$

logo,

$$\varepsilon_1 \simeq \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 \simeq \frac{V_{,\phi}^2}{6H^2V} \quad (\text{A.6})$$

onde utilizamos a relação (A.2). Considerando a relação (A.1), obtemos

$$\varepsilon_1 \simeq \frac{V_{,\phi}^2}{2V^3} \quad (\text{A.7})$$

Para o segundo parâmetro, temos

$$\varepsilon_2 = \frac{\dot{\varepsilon}_1}{H\varepsilon_1} \quad (\text{A.8})$$

Usando o fato de que

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{d\varepsilon_1}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{V_{,\phi}}{3HV} \frac{d\varepsilon_1}{d\phi} \quad (\text{A.9})$$

temos

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\phi} = \frac{2V_{,\phi}V_{,\phi\phi}V - 3V_{,\phi}^3}{2V^4}$$

logo

$$\dot{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{3H} \left( \frac{2V_{,\phi}^2V_{,\phi\phi}V - 3V_{,\phi}^4}{2V^5} \right)$$

portanto, após simplificar, obtemos

$$\varepsilon_2 \simeq -\frac{2V_{,\phi\phi}}{V^2} + \frac{3V_{,\phi}^2}{V^3} \quad (\text{A.10})$$

Procedendo da mesma forma para o terceiro parâmetro, temos

$$\varepsilon_3 = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{H\varepsilon_2} \quad (\text{A.11})$$

então

$$\varepsilon_3 \simeq -\frac{V_{,\phi} (9V_{,\phi}^3 - 10VV_{,\phi}V_{,\phi\phi} + 2V^2V_{,\phi\phi\phi})}{V^3 (-3V_{,\phi}^2 + 2VV_{,\phi\phi})} \quad (\text{A.12})$$

# Apêndice B

## O espectro de potências

O espectro de potências pode ser obtido a partir da função de correlação

$$\xi(r) \equiv \langle 0 | \hat{\mathcal{R}}(\vec{x}, \tau) \hat{\mathcal{R}}(\vec{y}, \tau) | 0 \rangle \equiv \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_{\mathcal{R}}(k, \tau) \frac{\text{sen}(kr)}{kr} \quad (\text{B.1})$$

A quantização da solução da equação de Mukhanov-Sasaki para o campo taquiônico é obtida a partir de

$$\hat{v}(\vec{x}, \tau) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ v_k(\tau) \hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (\text{B.2})$$

com os operadores de criação e aniquilação satisfazendo a relação de comutação

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{B.3})$$

Com isso podemos calcular a função de correlação por meio da relação

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \langle 0 | \hat{\mathcal{R}}(\vec{x}, \tau) \hat{\mathcal{R}}(\vec{y}, \tau) | 0 \rangle = \frac{1}{z^2} \langle 0 | \hat{v}(\vec{x}, \tau) \hat{v}(\vec{y}, \tau) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{z^2} \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6} \langle 0 | \left[ v_k(\tau) \hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \left[ v_{k'}(\tau) \hat{a}_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{y}} + v_{k'}^*(\tau) \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{y}} \right] | 0 \rangle \\ &= \frac{2}{z^2} \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6} \langle 0 | \left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \right] | 0 \rangle |v_k(\tau)|^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{y})} \\ &= \frac{2}{z^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |v_k(\tau)|^2 e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \frac{2}{z^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 |v_k(\tau)|^2 e^{ikr \cos\theta} \\ &= \frac{2(2\pi)}{z^2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 |v_k(\tau)|^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ikr \cos\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 z^2} \int_0^\infty dk k^2 |v_k(\tau)|^2 \frac{\text{sen}kr}{kr} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Comparando com (B.1), obtemos

$$\frac{P_{\mathcal{R}}(k, \tau)}{k} = \frac{k^2 |v_k(\tau)|^2}{2\pi^2 z^2} \quad (\text{B.5})$$

Portanto, em termos da perturbação de curvatura, o espectro de potências é dado por

$$P_{\mathcal{R}}(k, \tau) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}_k(\tau)|^2 \quad (\text{B.6})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] SAMI, M.; CHINGANGBAM, P.; QURESHI, T., **Aspects of Tachyonic Inflation with Exponential Potential**. Phys.Rev. D66 (2002) 043530, [arXiv:hep-th/0205179].
- [2] GWIN, R.; RUMMEL, M.; WESTPHAL, A., **Relations between canonical and non-canonical inflation**. JCAP 1312 (2013) 010, [ arXiv:hep-th/1212.4135].
- [3] ARNOWITT, R., DESER, S., MISNER, C. W., , **The Dynamics of General Relativity**, "Gravitation: an introduction to current research", Louis Witten ed. (Wiley 1962), chapter 7, pp 227–265 [arXiv:hep-th/0405109v1].
- [4] Padmanabhan, T., : **Structure Formation in the Universe**. 1st edition. Cambridge University Press, 1993. ? ISBN 0521414482.
- [5] CHEUNG, C.; CREMINELLI, P.; FITZPATRICK, A. L.; KAPLAN, J.; SENATORE, L., **The Effective Field Theory of Inflation**. JHEP 0803 (2008) 014, [arXiv:0709.0293].
- [6] WEINBERG, S., **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: Wiley, 657, (1972).
- [7] WALD, R. M., **General Relativity**. Chicago, Usa: Univ. Pr. 491, (1984).
- [8] SOUZA, R. E., **Introdução À Cosmologia**. Ed. Edusp. (2004).
- [9] TRODDEN, M., CARROLL, S.M., **TASI Lectures, Introduction to Cosmology**, (2004).
- [10] KUNZE, K.E., **An Introduction to Cosmology**,(2016), [astro-ph/1604.07817v1].

- [11] FIXSEN, D. J., *et al.*, **Cosmic microwave background dipole spectrum measured by the COBE FIRAS**, *Astrophys. J.* 420 (1994) 445.
- [12] PLANCK COLLABORATION, **Planck 2015 results. XIII. Cosmological Parameters**, *A&A* 594, A13 (2016) DOI: 10.1051/0004-6361/201525830 [arXiv:astro-ph.CO/1502.01589].
- [13] WMAP COLLABORATION, **Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation**, *Astrophys.J.Suppl.* 180 (2009) 330?376, [arXiv:astro-ph/0803.0547].
- [14] GUTH, A. H., **Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems**. *Phys. Rev. D*, 23, n2, (1981).
- [15] BAUMANN, D., **TASI Lectures on Inflation**,(2012), [hep-th/0907.5424v2].
- [16] GUTH, A. H., **Cosmological Inflation and Large-Scale Structure**. Cambridge Univ. Press ,400, (2000).
- [17] SEN, A., **Rolling Tachyon**, *JHEP* 0204, 048 (2002), [arXiv:hep-th/0203211]
- [18] DVALI, G. R., TYE, S. H., **Brane Inflation**, *Phys. Lett. B* 450, 72 (1999) [arXiv:hep-th/9812483].
- [19] GAROUSI, M. R., **Cosmology from Rolling Massive Scalar Field on the anti-D3 Brane of de Sitter Vacua**, *Phys. Rev. D* 72, 043536 (2004) [arXiv:hep-th/0402075v3].
- [20] KLUSON, J., **Proposal for non-BPS D-brane action**, *Phys. Rev. D* 62, 126003 (2000) [arXiv:hep-th/0004106].
- [21] BURGESS, C. P., MARTINEAU, P., QUEVEDO, F., RAJESH, G., ZHANG, R. J., **The inflationary brane-antibrane universe**, *JHEP* 0107, 047 (2001) [arXiv:hep-th/0105204].
- [22] ALEXANDER, S. H., **Inflation from D - anti-D brane annihilation**, *Phys. Rev. D* 65, 023507 (2002) [arXiv:hep-th/0105032].
- [23] SEN, A., **Tachyon Matter**, *JHEP* 0207, 065 (2002) [arXiv:hep-th/0203265].

- [24] KOFMAN, L., LINDE, A., **Problems with Tachyon Inflation**, JHEP 0207, 004 (2002) [arXiv:hep-th/0205121].
- [25] FROLOV, A. V., KOFMAN, L., STAROBINSKY, A. A., **Prospects and Problems of Tachyon Matter Cosmology**, Phys. Lett. B 545, 8 (2002) [arXiv:hep-th/0204187].
- [26] PIAZZA, F.; KHOURY, J., **Rapidly-Varying Speed of Sound, Scale Invariance and Non-Gaussian Signatures**, JCAP 0907:026, (2009) [arXiv:hep-th/0811.3633].
- [27] STEER, D. A., VERNIZZI, F., **Tachyon inflation: Tests and comparison with single scalar field inflation**, Phys. Rev. D 70, 043527 (2004) [arXiv:hep-th/0310139].
- [28] DIRAC, P. A. M., **Generalized Hamiltonian dynamics**, Proc. Roy. Soc. A 246, (1958) 333.
- [29] ROY, X., **On the 1+3 Formalism in General Relativity**, [arXiv:gr-qc/1405.6319].
- [30] MUKHANOV, V. F., FELDMANN, H. A., BRANDENBERGER, R. H., **Theory of cosmological perturbations**, Phys. Rept 215, 203 (1992).
- [31] BRANDENBERGER, R. H., **Lectures on the Theory of Cosmological Perturbations**, Lect.NotesPhys.646:127-167, BROWN-HET-1358, (2004) [arXiv:hep-th/0306071].
- [32] KAMIONKOWSKI, M., KOVETZ, E. D., **The Quest for B Modes from Inflationary Gravitational Waves**, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 2016. 54:227?69, DOI 10.1146/annurev-astro-081915-023433.
- [33] CORE EXPERIMENT, **Exploring Cosmic Origins with CORE: B-mode Component Separation**, [arXiv:astro-ph/1704.04501].
- [34] DAS, S.; LOCHAN, K.; SAHU, S.; SINGH, T. P., **Quantum to Classical Transition of Inflationary Perturbations - Continuous Spontaneous Localization as a Possible Mechanism -**, Phys. Rev. D 88, 085020 (2013) [arXiv:astro-ph.CO/1304.5094].

- [35] ALEXANDER S., JYOTI, D., MAGUEIJO, J., **Inflation and the Measurement Problem**, Phys. Rev. D 94, 043502 (2016) [arXiv:gr-qc/1602.01216].
- [36] SAKURAI, J. J., **Modern Quantum Mechanics**, San Fu Tuan editor, 1932.