



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS

**SOLUÇÃO NUMÉRICA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA EQUAÇÃO
DE DIFUSÃO USANDO COORDENADAS GENERALIZADAS TRIDIMENSIONAIS:
APLICAÇÃO NA SECAGEM DE TELHAS ORNAMENTAIS**

ALUNO: Luís Felipe de Araújo

ORIENTADORA: Prof.^a Dr.^a Vera Solange de Oliveira Farias

Campina Grande, PB, 30 de agosto de 2018.

LUÍS FELIPE DE ARAÚJO

**SOLUÇÃO NUMÉRICA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA EQUAÇÃO
DE DIFUSÃO USANDO COORDENADAS GENERALIZADAS TRIDIMENSIONAIS:
APLICAÇÃO NA SECAGEM DE TELHAS ORNAMENTAIS**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Doutorado em Engenharia de Processos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Processos.

ORIENTADORA: Prof.^a Dr.^a Vera Solange de Oliveira Farias

Campina Grande, PB, 30 de agosto de 2018.

A663s Araújo, Luís Felipe de.

Solução numérica e implementação computacional da equação de difusão usando coordenadas generalizadas tridimensionais: aplicação na secagem de telhas ornamentais / Luís Felipe de Araújo. - Campina Grande, 2018.

Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Profa. Dra. Vera Solange de Oliveira Farias".

Referências.

1. Geometria Complexa. 2. *LS Optimizer*. 3. Coordenadas Generalizadas. 4. Malhas Estruturadas. 5. Difusividade Variável. I. Farias, Vera Solange de Oliveira. II. Título.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **LUÍS FELIPE DE ARAÚJO** APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.

Tese de Doutorado **aprovada com distinção** em 30 de agosto de 2018

Prof.^a Dr.^a Vera Solange de Oliveira Farias
UAFM/CES/UFCG – Orientadora

Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva
UAF/CCT/UFCG – Examinador externo

Prof.^a Dr.^a Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva
UAF/CCT/UFCG – Examinadora externa

Prof. Dr. Marcos Antônio Amaral Lins
IFPB – Examinador externo

Prof. Dr. Jair Stefanini Pereira de Ataíde
UAFM/CES/UFCG – Examinador externo

Prof. Dr. Aluísio Freire da Silva Júnior
UAFM/CES/UFCG – Examinador externo

Campina Grande, PB, 30 de agosto de 2018.

Este exemplar corresponde à versão final da tese de doutorado em Engenharia de Processos, defendida por Luís Felipe de Araújo e aprovada pela banca examinadora em 30 de agosto de 2018.

Prof.^a Dr.^a Vera Solange de Oliveira Farias
UAFM/CES/UFCG – Orientadora

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me guiar o tempo todo, concedendo-me sabedoria, força de vontade, humildade e perseverança nos momentos difíceis ocorridos nesta caminhada.

A meus filhos Lucas Felipe e Lara Beatriz e a minha esposa Jailma Ribeiro, pelo incentivo e compreensão à minha dedicação a este trabalho.

Ao meu pai (*In memoriam*) e a minha mãe Maria Felipe (*In memoriam*) que sempre me incentivou para estudar e durante essa minha jornada do doutorado fez sua última viagem ao encontro com Deus.

Aos membros do Departamento de Educação (DE), aos membros do Conselho de Centro do Centro de Ciência Humanas, Sociais e Agrárias e a Pró-Reitoria de Pesquisa (PROPESQ) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), por terem permitido o meu afastamento para cursar o doutorado em Engenharia de Processos.

Ao ex-professor Pedro Germano Antonino Nunes (*In memoriam*) que se prontificou me substituir nas disciplinas que eu lecionava para que fosse autorizado o meu afastamento para cursar o doutorado em Engenharia de Processos.

A minha orientadora Prof^a. Dr^a Vera Solange de Oliveira Farias, pela sua valiosa orientação, paciência ao tirar minhas dúvidas, dedicação e por ter acreditado na minha capacidade de realizar este trabalho.

Aos membros da banca examinadora, os professores doutores: Wilton Pereira da Silva, Marcos Antônio Amaral Lins, Jair Stefanini Pereira de Ataíde, Aluizio Freire da Silva Júnior e as professoras doutoras: Vera Solange de Oliveira Farias, Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva, por terem disponibilizados seus preciosos tempos para a avaliação deste trabalho, contribuindo significativamente para a melhoria do mesmo.

Aos professores do programa de Pós-graduação em Processos, os quais cursei disciplinas: Prof. Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima (Fenômenos de Transporte e

Termodinâmica), Prof. Dr. Marcos José de Almeida Gama (Matemática Aplicada a Engenharia de Processos), Prof. Dr. José Jefferson S. Nascimento (Métodos de Matemática Computacional), Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva (Transferência de Calor e Mecânica dos Flúidos Computacional I e II, Introdução ao Visual Fortran), Prof. Dr. Mário Eduardo Cavalcante Mata (Secagem de Produtos Agroindustriais), Prof. Dr. Alexandre José de Melo Queiroz (Seminário I), Prof. Dr^a Vera Solange de Oliveira Farias (Seminário II).

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos na pessoa do Prof. Dr. Antônio Gilson Barbosa de Lima, pelo apoio e atenção no período de realização deste trabalho.

À Coordenação do Laboratório de Armazenamento e Processamento de Produtos Agrícolas da Unidade Acadêmica de Engenharia Agrícola da Universidade Federal de Campina Grande, na pessoa da Prof^a Dr^a Rossana Maria Feitosa de Figueiredo por ter cedido o espaço no laboratório para realização da secagem das telhas.

Ao Professor Dr. Gelmires de Araújo Neves por permitir que fosse feita a trituração da massa da argila no Laboratório de Tecnologia dos Materiais da Unidade Acadêmica de Engenharia de Materiais da Universidade Federal de Campina Grande para em seguida realizar a análise química e a curva granulométrica.

Um agradecimento especial ao Professor Dr. Wilton Pereira da Silva pela sua valiosa contribuição neste trabalho com sugestões e disponibilização gratuita de todos seus *softwares*, principalmente o *LS Optimizer*, os quais facilitaram, e muito, a realização de todas as atividades inerentes a este trabalho.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xxiii
NOMENCLATURA	xxv
RESUMO	xxx
ABSTRACT	xxxí
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Objetivo geral.....	4
1.2 – Objetivos específicos.....	4
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1 – Considerações iniciais.....	7
2.2 – Secagem.....	9
2.2.1 – Aspectos gerais da secagem.....	9
2.2.2 – Tipos de secagem.....	10
2.2.3 – Mecanismo de secagem.....	10
2.2.4 – Teor de umidade.....	11
2.2.4.1 – Teor de umidade em base úmida.....	12
2.2.4.2 – Teor de umidade em base seca.....	12
2.2.5 – Períodos de secagem.....	12
2.2.5.1 – Período com taxa constante de secagem.....	12
2.2.5.2 – Período com taxa decrescente de secagem.....	13
2.3 – Materiais cerâmicos.....	14
2.3.1 – Aspectos históricos.....	15
2.3.1.1 – A cerâmica no mundo.....	15
2.3.1.2 – A cerâmica no Brasil.....	16
2.3.2 – Tipos de Cerâmica.....	17
2.3.2.1 – Argila.....	18
2.3.3 – Secagem de materiais cerâmicos.....	19
2.4 – Equação de transporte.....	23
	viii

2.4.1 – Equação de difusão.....	23
2.4.1.1 – Equação de difusão de massa.....	23
2.5 – Soluções para a equação de difusão.....	24
2.5.1 – Condição de contorno.....	24
2.5.1.1 – Condição de contorno de equilíbrio (primeiro tipo)	25
2.5.1.2 – Condição de contorno com fluxo de Φ prescrito (segundo tipo)	25
2.5.1.3 – Condição de contorno convectiva (terceiro tipo)	25
2.5.2 – Geometria do corpo.....	26
2.5.3 – Solução analítica.....	27
2.5.3.1 – Solução analítica para parede infinita.....	28
2.5.3.2 – Solução analítica para o paralelepípedo.....	29
2.5.3.3 – Solução analítica para o cilindro infinito.....	30
2.5.3.4 – Solução analítica para a esfera.....	31
2.5.4 – Solução numérica da equação de difusão.....	33
2.5.4.1 – Métodos numéricos para a solução da equação de difusão.....	34
2.5.4.2 – Formulações explícitas, implícitas e totalmente implícitas.....	35
2.6 – Coordenadas generalizadas para a solução numérica de equação de difusão.....	39
2.6.1 – Métricas da transformação.....	40
2.6.2 – Comprimentos, áreas e volumes em coordenadas generalizadas.....	44
2.6.2.1 – Comprimento ao longo de um eixo curvilíneo.....	44
2.6.2.2 – Área definida por vetores elementares sobre eixos curvilíneos.....	45
2.6.2.3 – Volume definido por vetores elementares sobre eixos curvilíneos.....	46
2.7 – Mapeamento da geometria.....	47
2.7.1 – Domínio físico e domínio transformado.....	48
2.7.2 – Geração de malhas.....	49
2.7.2.1 – Malhas estruturadas e não-estruturadas.....	49
CAPÍTULO 3 – MATERIAS E MÉTODOS.....	55
3.1 – Cálculo de volumes, áreas e distâncias em coordenadas generalizadas em três dimensões.....	56
3.1.1 – Volume de um sólido qualquer.....	56
3.1.2 – Área de um sólido qualquer.....	58

3.1.3 – Distância da face norte ao ponto nodal P.....	59
3.2 – Fluxo de uma grandeza em uma área curvilínea elementar.....	62
3.3 – Transformação da equação de difusão de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas.....	63
3.3.1 – Linearização do termo fonte.....	65
3.4 – Discretização da equação de difusão tridimensional em coordenadas generalizadas.....	66
3.4.1 – Integração das equações.....	67
3.4.2 – Derivadas da equação de difusão para volumes de controles internos.....	69
3.4.3 – Equação de difusão tridimensional discretizada (volumes internos).....	71
3.5 – Determinação de métricas.....	75
3.5.1 – Coordenadas dos pontos nodais (volumes internos).....	75
3.5.2 – Coordenadas dos pontos médios das faces (volumes internos).....	77
3.5.3 – Métricas no ponto nodal P (volumes internos).....	77
3.5.4 – Métricas nas interfaces dos volumes de controle.....	78
3.5.5 – Volumes de controle na fronteira (norte) com condição de contorno convectiva.....	79
3.5.5.1 – Derivadas da Equação (3.40) para volumes de controles na fronteira (norte)	80
3.5.5.2 – Equação de difusão discretizada (lado norte – convecção).....	82
3.6 – Discretização do valor médio da variável de interesse ($\bar{\Phi}$).....	85
3.7 – Cálculo dos valores de Γ^Φ nas faces dos volumes de controle.....	87
3.8 – Determinação dos parâmetros de transporte Γ^Φ e h a partir de um conjunto de dados experimentais – processo de otimização.....	89
3.9 – Processo de otimização usando a solução analítica da equação de difusão 3D aplicada a um sólido cuja geometria possa ser aproximada a um paralelepípedo.....	90
3.9.1 – Solução analítica 3D da equação de difusão com condição de contorno convectiva aplicada à secagem de sólidos cerâmicos.....	91
3.9.2 – Erro de truncamento.....	95
3.10 – Processo de otimização usando a solução numérica da equação de difusão 3D em coordenadas generalizadas aplicada a sólidos com geometria arbitrária.....	95
3.10.1 Usando o <i>LS Optimizer</i> desenvolvido por Silva e Silva (2016).....	96

3.11 – Usando o código numérico desenvolvido por Farias (2011).....	101
3.12 – Programas computacionais usados neste trabalho.....	102
3.13 – Aplicação do código computacional à secagem de sólidos cerâmicos.....	103
3.13.1 – Metodologia Experimental.....	103
3.13.2 – Procedimento e materiais.....	103
3.13.3 – Procedimento de fabricação de telha na Cerâmica Barra.....	104
3.13.4 – Procedimento dos experimentos em laboratório.....	105
3.13.5 – Análise granulométrica.....	106
3.13.6 – Análise química.....	107
3.13.7 – Processo de secagem.....	107
CAPÍTULO 4 – ANÁLISE E RESULTADOS.....	110
4.1 – Experimentais.....	111
4.1.1 – Caracterização da matéria-prima.....	111
4.1.1.1 – Análise química.....	111
4.1.1.2 – Análise granulométrica.....	112
4.1.2 – Dados experimentais da secagem.....	113
4.1.2.1 – Cinética de secagem a partir dos dados experimentais.....	114
4.1.2.2 – Período de taxa constante de secagem.....	116
4.2 – Análise da cinética de secagem para telhas cerâmicas usando solução analítica.....	118
4.3 – Solução numérica.....	128
4.3.1 – Validação usando solução analítica para uma parede infinita.....	128
4.3.2 – Validação usando solução analítica para um paralelepípedo e valor médio de Φ	130
4.4 – Validação do código computacional desenvolvido por Farias, V. (2011) usando soluções numéricas da equação de difusão.....	133
4.4.1 – Malha unidimensional: valor médio e distribuição espacial em uma parede infinita com propriedades físicas constantes.....	133
4.4.2 – Malha tridimensional: valor médio e distribuição espacial em um paralelepípedo.....	143
4.4.2.1 – Testes de consistência por meio da análise de Φ para uma geometria cúbica.....	143

4.4.2.2 – Validação do código computacional utilizado para um paralelepípedo.....	147
4.4.3 – Malhas estruturadas tridimensionais e não-ortogonais.....	153
4.4.3.1 – Sólido gerado a partir da extrusão de um losango.....	154
4.4.3.2 – Sólido gerado a partir da extrusão de um círculo.....	164
4.4.3.3 – Sólido gerado a partir de uma malha retangular.....	168
4.5 – Aplicação da solução numérica na secagem de materiais cerâmicos.....	170
4.5.1 – Malha para o sólido.....	171
4.5.2 – Resultados e análise das otimizações.....	174
4.5.3 – Análise numérica considerando difusividade efetiva de massa constante.....	181
4.6 – Análise numérica considerando difusividade efetiva variável.....	187
4.6.1 – As expressões para representar a difusividade efetiva de massa.....	187
4.6.2 – Gráficos dos resíduos versus valores preditos considerando a difusividade variável.....	190
4.6.3 – Gráficos da distribuição do teor de umidade para difusividade variável.....	191
4.6.3.1 – Gráficos de contorno para o ensaio E1.....	191
4.6.3.2 – Gráficos de contorno para o ensaio E2.....	194
4.6.3.3 – Gráficos de contorno para o ensaio E3.....	197
4.6.3.4 – Gráficos de contorno para o ensaio E4.....	200
4.6.4 – Influência da temperatura e da velocidade do ar de secagem na taxa de secagem.....	204
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES	212
5.1 – Conclusões.....	213
5.1.1 – Caracterização da argila.....	213
5.1.2 – Resultados experimentais.....	213
5.1.3 – Conclusões sobre soluções analíticas.....	214
5.1.4 – Conclusões sobre o emprego de soluções numéricas.....	214
5.2 – Sugestões para trabalhos futuros.....	216
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	218
APÊNDICE	235

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	Tipos de telhas cerâmicas.....	19
FIGURA 2.2	Condição de contorno convectiva.....	26
FIGURA 2.3	Formulações de interpolação no tempo.....	36
FIGURA 2.4	Sistemas de eixos utilizados para mostrar a localização do ponto P em coordenadas cartesianas e em coordenadas generalizadas.....	39
FIGURA 2.5	Comprimento elementar ΔL_ξ ao longo do eixo curvilíneo ξ	44
FIGURA 2.6	Área elementar ΔS definida pelos vetores elementares ΔL_ξ e ΔL_η	46
FIGURA 2.7	Paralelepípedo regular de volume elementar ΔV com arestas ΔL_ξ , ΔL_η e ΔL_γ	47
FIGURA 2.8	(a) Plano de geometria irregular; (b) Plano de geometria regular.....	48
FIGURA 2.9	(a) Domínio Físico; (b) Domínio Transformado.....	48
FIGURA 2.10	Tipos de malhas.....	49
FIGURA 2.11	Malhas estruturadas.....	49
FIGURA 2.12	Malha não-estruturada.....	50
FIGURA 3.1	Sólido de volume elementar ΔV com arestas ΔL_ξ , ΔL_η e ΔL_γ no domínio transformado.....	57
FIGURA 3.2	Quadrilátero de área elementar ΔS no plano transformado $\xi\gamma$	58
FIGURA 3.3	Volume de controle interno delimitado pelos planos $\xi = i$, $\xi = i+1$, $\eta = j$, $\eta = j+1$, $\gamma = k$ e $\gamma = k+1$, destacando-se a distância da face norte ao ponto nodal P.....	60
FIGURA 3.4	Perfil de um volume de controle interno de um sólido com geometria arbitrária no domínio físico.....	61
FIGURA 3.5	Área curvilínea situada no plano definido pelas linhas η e γ ($\xi = \text{cte}$), a grandeza \vec{G} e a sua componente na direção normal, G_n	62
FIGURA 3.6	Volumes de controle diferenciados quanto a localização numa malha tridimensional no domínio transformado.....	68
FIGURA 3.7	Volume de controle interno com ponto nodal P e dezoitos vizinhos.....	69
FIGURA 3.8	Volume de controle interno delimitado pelos planos $\xi = i$, $\xi = i+1$, $\eta = j$, $\eta = j+1$, $\gamma = k$ e $\gamma = k+1$	76
FIGURA 3.9	(a) Perfil da fronteira norte e (b) Ponto nodal P localizado na fronteira norte.....	79
FIGURA 3.10	Ponto nodal P na fronteira norte e seus vizinhos.....	80

FIGURA 3.11	Dois volumes de controle com Γ^Φ igual a: (a) Γ_P^Φ e Γ_N^Φ ; (b) Γ_{eq}^Φ	88
FIGURA 3.12	Geometria considerada para o sólido destacando um plano xy na posição z onde a distribuição de umidade será analisada.....	92
FIGURA 3.13	Modificações que devem ser feitas no código fonte original do solucionador para que o <i>LS Optimizer</i> leia os arquivos "exp.txt" e "parameters.txt".....	97
FIGURA 3.14	Exemplo de arquivo "Parameters.txt", fornecido pelo software <i>LS Optimizer</i> , a ser usado pelo solucionador.....	97
FIGURA 3.15	Pasta "Optimization" do <i>LS Optimizer</i>	98
FIGURA 3.16	Aplicativo <i>LS Optimizer</i> aberto.....	99
FIGURA 3.17	Mostra as opções do arquivo file.....	99
FIGURA 3.18	Caixa de diálogo alertando que os resultados anteriores serão perdidos.....	100
FIGURA 3.19	Caixa de diálogo solicitando informações do processo de otimização.....	100
FIGURA 3.20	Transporte da argila para conformação.....	104
FIGURA 3.21	Telhas expostas ao sol para iniciar o processo de secagem.....	105
FIGURA 3.22	Equipamento usado na caracterização da argila.....	106
FIGURA 3.23	Amostra de uma das telhas cerâmicas utilizadas nesta pesquisa.....	107
FIGURA 4.1	Distribuição granulométrica da argila e curva cumulativa.....	113
FIGURA 4.2	Gráficos da cinética de secagem nos períodos de taxa constante e taxa decrescente para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.....	114
FIGURA 4.3	Gráficos da cinética de secagem, no período de taxa constante para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.....	117
FIGURA 4.4	Cinética de secagem no período de taxa decrescente para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.....	119
FIGURA 4.5	Qui-quadrado versus número de Biot em torno do ponto ótimo, para os ensaios: (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4.....	120
FIGURA 4.6	Cinéticas de secagem dos quatro ensaios.....	120
FIGURA 4.7	Gráfico da função $f(\mu_j) = \mu_j \text{sen}(\mu_j) - 3,75 \text{cos}(\mu_j)$ destacando as 16 primeiras raízes.....	122
FIGURA 4.8	Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E1 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.....	123
FIGURA 4.9	Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E2 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.....	124

FIGURA 4.10	Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E3 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.....	125
FIGURA 4.11	Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E3 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.....	126
FIGURA 4.12	Teor de umidade nos pontos (1), (2) e (3) para os ensaios (a) E1; (b) E2 (c) E3 e (d) E4.....	127
FIGURA 4.13	Esquema do paralelepípedo usado na simulação de uma parede infinita.....	129
FIGURA 4.14	Superposição das soluções obtidas via método numérico proposto e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em uma parede infinita com condição de contorno convectiva, para o ensaio E1.....	129
FIGURA 4.15	Superposição das soluções obtidas via método numérico proposto e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em uma parede infinita com condição de contorno prescrita, para o ensaio E1.....	130
FIGURA 4.16	Paralelepípedo (fora de escala) usado na validação da solução numérica proposta para a equação de difusão tridimensional via solução analítica: (a) domínio físico; (b) domínio computacional.....	131
FIGURA 4.17	Superposição das soluções obtidas via método numérico proposto e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em um paralelepípedo com condição de contorno convectiva, para o ensaio E1.....	132
FIGURA 4.18	Superposição das soluções obtidas via método numérico proposto e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em um paralelepípedo com condição de contorno prescrita, para o ensaio E1.....	132
FIGURA 4.19	Geometria unidimensional usada para validar o código computacional proposto via solução numérica: (a) discretização tridimensional; (b) aproximação unidimensional	134
FIGURA 4.20	Superposição dos transientes de Φ , numa parede infinita, para os volumes de controle representados pelos nós 1 e 31 com a condição de contorno prescrita para o ensaio E1.....	135
FIGURA 4.21	Superposição dos transientes de Φ , numa parede infinita, para os volumes de controle representados pelos nós 1 e 31 com a condição de contorno convectiva para o ensaio E1.....	135
FIGURA 4.22	Distribuição espacial de Φ , numa parede infinita, para a condição de contorno prescrita em $t = 42,75$ min.....	136

FIGURA 4.23	Distribuição espacial de Φ , numa parede infinita, para a condição de contorno convectiva em $t = 42,75$ min.....	137
FIGURA 4.24	Superposição dos gráficos da distribuição espacial de Φ com o código computacional desenvolvido versus o <i>software 1D Heat Transfer</i> numa parede infinita, para a condição de contorno convectiva em $t = 42,75$ min.....	138
FIGURA 4.25	Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 1 obtida com o código computacional utilizado e com o <i>software 1D Heat Transfer</i> , para a condição de contorno convectiva.....	139
FIGURA 4.26	Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 1 obtida com o código computacional utilizado e com o <i>software 1D Heat Transfer</i> , para a condição de contorno prescrita.....	140
FIGURA 4.27	Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 16 obtida com o código computacional utilizado e com o <i>software 1D Heat Transfer</i> , para a condição de contorno convectiva.....	140
FIGURA 4.28	Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 16 obtida com o código computacional utilizado e com o <i>software 1D Heat Transfer</i> , para a condição de contorno prescrita.....	141
FIGURA 4.29	Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 31 obtida com o código computacional utilizado e com o <i>software 1D Heat Transfer</i> , para a condição de contorno convectiva.....	142
FIGURA 4.30	Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 31 obtida com o código computacional utilizado e com o <i>software 1D Heat Transfer</i> , para a condição de contorno prescrita.....	142
FIGURA 4.31	Geometria cúbica utilizada para testar a consistência da solução numérica proposta: (a) domínio físico; (b) domínio transformado.....	143
FIGURA 4.32	Transientes de Φ nos pontos nodais dos volumes de controle localizados no centro de cada face de uma geometria cúbica para a condição de contorno do terceiro tipo.....	145
FIGURA 4.33	Geometria cúbica discretizada: destaque para os volumes de controle localizados nos vértices do cubo.....	146
FIGURA 4.34	Transientes de Φ nos pontos nodais dos volumes de controle localizados nos vértices do cubo.....	147

FIGURA 4.35	Paralelepípedo utilizado para validação do código computacional desenvolvido.....	148
FIGURA 4.36	Transientes de Φ para pontos nodais nas faces norte sul do paralelepípedo.....	150
FIGURA 4.37	Transientes de Φ para pontos nodais nas faces leste oeste do paralelepípedo.....	150
FIGURA 4.38	Transientes de Φ para pontos nodais nas faces atrás frente do paralelepípedo....	151
FIGURA 4.39	Superposição dos transientes de Φ obtidos pelo programa utilizado e pelo <i>software Diffusion RE</i> , em um paralelepípedo, para um volume de controle identificado por $(\xi = 16, \eta = 31, \gamma = 16)$	152
FIGURA 4.40	Superposição dos transientes de Φ obtidos pelo programa utilizado e pelo <i>software Diffusion RE</i> , em um paralelepípedo, para um volume de controle identificado por $(\xi = 31, \eta = 16, \gamma = 16)$	152
FIGURA 4.41	Superposição dos transientes de Φ obtidos pelo programa utilizado e pelo <i>software Diffusion RE</i> em um paralelepípedo, para um volume de controle identificado por $(\xi = 16, \eta = 16, \gamma = 16)$	153
FIGURA 4.42	Sólido (fora de escala) usado na validação do programa utilizado para malhas não-ortogonais: (a) malha bidimensional que gerou o sólido; (b) sólido gerado pela extrusão de um losango.....	155
FIGURA 4.43	Plano central do sólido usado para validação do código computacional utilizado com destaque para os volumes de controle localizados face norte e sul.....	155
FIGURA 4.44	Superposição dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle localizados na fronteira sul e norte do plano central do losango.....	156
FIGURA 4.45	Plano central do sólido usado para validação do código computacional utilizado, com destaque para os volumes de controle $(\xi, \eta) = (30, 3)$ e $(\xi, \eta) = (3, 30)$	156
FIGURA 4.46	Superposição dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle localizados nos cantos da diagonal maior do plano central do losango.....	157
FIGURA 4.47	Superposição dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle $(\xi = 16, \eta = 17, \gamma = 17)$ e $(\xi = 17, \eta = 16, \gamma = 17)$, localizados no plano central do losango.....	157
FIGURA 4.48	Resultados dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle $(\xi = 17, \eta = 16, \gamma = 17)$; $(\xi = 16, \eta = 1, \gamma = 17)$ e $(\xi = 3, \eta = 30, \gamma = 17)$	158

FIGURA 4.49	Distribuição espacial de Φ sobre o plano central do sólido analisado: (a) $t = 0$ min; (b) $t = 12,5$ min; (c) $t = 25$ min; (d) $t = 50$ min; (e) $t = 87,5$ min; (f) $t = 137,5$ min e (g) $t = 500$ min.....	161
FIGURA 4.50	Superposição do transiente do volume de controle (16, 1, 17) de Φ do sólido em forma de losango, obtido pelas duas soluções numéricas: programa utilizado e <i>software Difussion RE</i>	162
FIGURA 4.51	Superposição do transiente do volume de controle ($\xi = 3, \eta = 30, \gamma = 17$) obtido pelas duas soluções numéricas: programa utilizado e <i>software Diffusion RE</i>	162
FIGURA 4.52	Superposição do transiente do volume de controle ($\xi = 16, \eta = 17, \gamma = 17$) obtido pelas duas soluções numéricas: programa utilizado e <i>software Diffusion RE</i>	163
FIGURA 4.53	Superposição do transiente do valor médio de Φ para o plano central do sólido que possui a seção transversal na forma de um losango.....	163
FIGURA 4.54	Esquema (fora de escala) para gerar um cilindro finito: (a) Malha circular utilizada para gerar o cilindro finito; (b) cilindro finito obtido a partir da extrusão de uma malha circular.....	164
FIGURA 4.55	Malha circular localizada no plano frontal do sólido, com destaque para os volumes de controle que tiveram seus transientes analisados.....	165
FIGURA 4.56	Superposição dos transientes dos volumes de controle de um cilindro finito, identificados por ($\xi = 1, \eta = 1, \gamma = 31$) e ($\xi = 30, \eta = 30, \gamma = 31$).....	166
FIGURA 4.57	Malha circular localizada no plano central do sólido, com destaque para os volumes de controle que tiveram seus transientes analisados.....	166
FIGURA 4.58	Superposição dos transientes em volumes de controle num cilindro finito, identificados por ($\xi = 14, \eta = 16, \gamma = 16$) e ($\xi = 16, \eta = 18, \gamma = 16$).....	167
FIGURA 4.59	Transientes de Φ para um volume de fronteira e para um volume no meio do sólido, obtidos com o programa computacional utilizado.....	167
FIGURA 4.60	Malha retangular usada na geração de um cilindro finito.....	168
FIGURA 4.61	Transiente da superposição do valor médio de Φ para um cilindro finito obtidos com o código computacional utilizado e <i>software Diffusion RE</i>	169

FIGURA 4.62	Superposição do transiente de Φ para o volume de controle identificado por ($\xi = 16, \eta = 16, \gamma = 16$) obtido com o programa utilizado e com o <i>Diffusion RE</i>	169
FIGURA 4.63	Superposição dos transientes de Φ para os volumes de controle identificado por ($\xi = 30, \eta = 16, \gamma = 1$) e ($\xi = 16, \eta = 1$), com o programa utilizado e com o <i>Diffusion RE</i>	170
FIGURA 4.64	(a) Foto frontal da telha que gerou a malha bidimensional; (b) Malha bidimensional 31x31 geratriz da malha 3D para as telhas cerâmicas; (c) Planos da telha em que foram geradas as malhas.....	172
FIGURA 4.65	(a) Telha, (b) malha tridimensional e (c) malha da metade da telha cerâmica....	173
FIGURA 4.66	Gráficos do ensaio E1: (a) comprimento versus teor de umidade médio; (b) espessura versus teor de umidade médio; (c) largura versus teor de umidade médio.....	175
FIGURA 4.67	Função difusividade de massa linear, função valor médio e a função difusividade constante da telha cerâmica para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4.....	179
FIGURA 4.68	Cinética de secagem obtida com a solução proposta e os dados experimentais, considerando volume e parâmetros termofísicos constantes para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E2; (d) E4.....	181
FIGURA 4.69	Distribuição do teor de umidade no plano central $z = 1,125$ ($\gamma = 5$), de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte e volume constantes, para o ensaio E ₁ nos seguintes instantes: a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 47,75 min e d) 85,5 min.....	183
FIGURA 4.70	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,275 min, considerando parâmetros de transporte e volume constantes, para ensaio E1 nos seguintes planos: (a) $z = 0$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1$ ($\gamma = 5$); (c) $z = 6,5$ ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,75$ ($\gamma = 25$) e $z = 15,05$ ($\gamma = 30$)	184
FIGURA 4.71	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 85,5 min, considerando parâmetros de transporte e volume constantes, para o ensaio E1 nos seguintes planos: (a) $z = 0$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1$ ($\gamma = 5$); (c) $z = 6,5$ ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,75$ ($\gamma = 25$) e $z = 15,05$ ($\gamma = 30$).....	185
FIGURA 4.72	Gráfico residuais versus valores preditos da função constante dos ensaios: (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4.....	186

FIGURA 4.73	Simulação da cinética de secagem para os ensaios (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4 considerando a difusividade variando com o teor de umidade.....	189
FIGURA 4.74	Gráfico residuais versus valores preditos da função linear dos ensaios: (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4.....	190
FIGURA 4.75	Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E1 nos instantes: a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 42,75 min e d) 85,5 min.....	192
FIGURA 4.76	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,275 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E1 nos planos: z = 0,125 ($\gamma = 1$); (b) z = 1,125 cm ($\gamma = 5$); (c) z = 7,11 cm ($\gamma = 15$), (d) z = 13,875 cm ($\gamma = 25$) e z = 15,175 cm ($\gamma = 30$).....	193
FIGURA 4.77	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 85,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E1 nos planos: z = 0,125 ($\gamma = 1$); (b) z = 1,125 cm ($\gamma = 5$); (c) z = 7,11 cm ($\gamma = 15$), (d) z = 13,875 cm ($\gamma = 25$) e z = 15,175 cm ($\gamma = 30$).....	194
FIGURA 4.78	Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E2 nos instantes: a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 42,75 min e d) 85,5 min.....	195
FIGURA 4.79	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,275 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E2 nos planos: (a) z = 0,125 ($\gamma = 1$); (b) z = 1,125 ($\gamma = 5$); (c) z = 7,0 ($\gamma = 15$), (d) z = 13,25 ($\gamma = 25$) e z = 14,875 ($\gamma = 30$).....	196
FIGURA 4.80	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 85,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E2 nos planos: z = 0,125 ($\gamma = 1$); (b) z = 1,125 cm ($\gamma = 5$); (c) z = 7,0 cm ($\gamma = 15$), (d) z = 13,25 cm ($\gamma = 25$) e (e) z = 14,875 cm ($\gamma = 30$).....	197
FIGURA 4.81	Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos instantes a) 4,225 min; b) 16,9 min; c) 42,25 min e d) 84,5 min.....	198

FIGURA 4.82	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,225 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,125$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) (e) $z = 15,1$ ($\gamma = 30$).....	199
FIGURA 4.83	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 84,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos planos: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,125$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 15,1$ cm ($\gamma = 30$).....	200
FIGURA 4.84	Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E4 nos instantes: a) 4,225 min; b) 16,9 min; c) 42,25 min e d) 84,5 min.....	201
FIGURA 4.85	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,225 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E4 nos planos: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 14,675$ cm ($\gamma = 30$).....	202
FIGURA 4.86	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 84,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E4 nos planos: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 14,675$ cm ($\gamma = 30$).....	203
FIGURA 4.87	Distribuição do teor de umidade no plano $z=3,5$ ($\gamma = 10$) da telha, em $t = 171,0$ min, para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4.....	204
FIGURA 4.88	Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,225 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos planos:(a) $z = 0,125$ cm ($\gamma = 1$); (b) $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).....	205
FIGURA 4.89	Localização dos pontos: (1) VC ($\xi = 1$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (2) VC ($\xi = 25$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (3) VC ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 15$).....	206
FIGURA 4.90	Perfis do teor de umidade médio para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4:(1) VC ($\xi = 1$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (2) VC ($\xi = 25$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (3) VC ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 15$).....	206
FIGURA 4.91	Localização dos pontos: (1) VC ($\xi = 1$; $\eta = 1$; $\gamma = 16$); (2) VC ($\xi = 30$; $\eta = 1$; $\gamma = 16$); (3) VC ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 16$).....	207

FIGURA 4.92	Perfis do teor de umidade médio para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4: (1) VC ($\xi = 1; \eta = 1; \gamma = 16$); (2) VC ($\xi = 30; \eta = 1; \gamma = 16$); (3) VC ($\xi = 30; \eta = 30; \gamma = 16$).....	207
FIGURA 4.93	Localização dos pontos: (1) VC no centro ($\xi = 16; \eta = 16; \gamma = 16$); (2) ponto externo ($\xi = 1; \eta = 1; \gamma = 1$); (3) ponto externo ($\xi = 30; \eta = 30; \gamma = 30$).....	208
FIGURA 4.94	Perfis do teor de umidade médio para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4:(1) VC no centro ($\xi = 16; \eta = 16; \gamma = 16$); (2) ponto externo ($\xi = 1; \eta = 1; \gamma = 1$); (3) ponto externo ($\xi = 30; \eta = 30; \gamma = 30$).)	208
FIGURA 4.95	Difusividades efetivas para os quatro ensaios em função do teor de umidade média, considerando parâmetros variáveis.....	209
FIGURA 4.96	Superposição das cinéticas de secagem para os quatro ensaios.....	210

LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1	Composição química da argila.....	112
TABELA 4.2	Ensaio realizados na pesquisa.....	113
TABELA 4.3	Ensaio, teor de umidade inicial (M_i), teor de umidade equilíbrio (M_{eq}) e dimensões iniciais das telhas.....	115
TABELA 4.4	Dados dos ajustes e indicadores estatísticos do período de secagem constante...	116
TABELA 4.5	Resultados da otimização para o período de taxa decrescente.....	118
TABELA 4.6	As primeiras seis raízes para cada número de Biot da Tabela 4.5.....	122
TABELA 4.7	Parâmetros físicos simulados para resolver a equação de difusão unidimensional.....	128
TABELA 4.8	Parâmetros físicos simulados para resolver a equação de difusão tridimensional.....	131
TABELA 4.9	Distribuição espacial de Φ para uma parede infinita em $t = 42,75$ min obtida via código computacional proposto para a condição de contorno prescrita.....	136
TABELA 4.10	Distribuição espacial de Φ para uma parede infinita em $t = 42,75$ min obtida via código computacional proposto para a condição de contorno convectiva.....	137
TABELA 4.11	Distribuição espacial de Φ para uma parede infinita em $t = 42,75$ min obtida via <i>ID Heat Transfer</i> para a condição de contorno convectiva.....	138
TABELA 4.12	Parâmetros físicos e as dimensões usados na resolução numérica da equação de difusão para uma geometria cúbica.....	144
TABELA 4.13	Identificação dos nós localizados no centro de cada face do cubo.....	144
TABELA 4.14	Distribuição espacial de Φ para um cubo em $t = 42,75$ min obtida via código computacional desenvolvido para a condição de contorno convectiva.....	145
TABELA 4.15	Pontos nodais localizados nos vértices de uma geometria cúbica.....	146
TABELA 4.16	Parâmetros físicos e as dimensões usados na resolução numérica da equação de difusão para um paralelepípedo.....	148
TABELA 4.17	Distribuição espacial de Φ no plano central para um paralelepípedo em $t = 42,75$ min obtida via código computacional desenvolvido para a condição de contorno convectiva.....	149
TABELA 4.18	Identificação dos nós nas faces do paralelepípedo mostrado na Figura 4.34.....	149

TABELA 4.19	Parâmetros físicos usados para resolver a equação de difusão em uma malha não-ortogonal para condição de contorno convectiva.....	154
TABELA 4.20	Distribuição espacial de Φ para o losango que representa o plano central do sólido, obtida com o programa computacional desenvolvido, para o instante $t = 25$ min.....	159
TABELA 4.21	Distribuição espacial de Φ para o plano central do sólido obtido com o <i>software Diffusion RE</i> para o instante $t = 25$ min.....	160
TABELA 4.22	Parâmetros físicos simulados para a solução da equação de difusão de uma malha cilíndrica para condição de contorno convectiva.....	165
TABELA 4.23	Funções usadas na otimização.....	174
TABELA 4.24	Apresenta os valores de A_1 e A_2 das funções da difusividade efetiva para o ensaio E1, o valor de h , o valor de qui-quadrado e o valor do coeficiente de determinação.....	176
TABELA 4.25	Apresenta os valores de A_1 e A_2 das funções da difusividade efetiva para o ensaio E2, o valor de h , o valor de qui-quadrado e o valor do coeficiente de determinação.....	177
TABELA 4.26	Apresenta os valores de A_1 e A_2 das funções da difusividade efetiva para o ensaio E3, o valor de h , o valor de qui-quadrado, valor do coeficiente de determinação e o valor médio da função.....	177
TABELA 4.27	Apresenta os valores de A_1 e A_2 das funções da difusividade efetiva para o ensaio E4, o valor de h , o valor de qui-quadrado, valor do coeficiente de determinação e o valor médio da função.....	178
TABELA 4.28	Valores para a difusividade efetiva de massa média, difusividade efetiva de massa constante e o coeficiente convectivo.....	180
TABELA 4.29	Resultados para os parâmetros de transporte considerando volume e difusividade efetiva variáveis - $D_{ef} = A_1M + A_2$	188

NOMENCLATURA

Letras Latinas

$A_p, A_w, A_e, A_n, A_s, A_f, A_b,$ – Coeficientes da equação de difusão discretizada.....	[-]
$A_{ne}, A_{nw}, A_{se}, A_{sw}, A_{fe}, A_{fw},$ – Coeficientes da equação de difusão discretizada.....	[-]
$A_{fn}, A_{fs}, A_{be}, A_{bw}, A_{bn}, A_{bs}$ – Coeficientes da equação de difusão discretizada.....	[-]
A_ϵ, B_ϵ – Coeficientes da série infinita que dá a solução analítica da equação de difusão para um paralelepípedo com condição de contorno prescrita.....	[-]
A_1, A_2 – Parâmetros de ajuste da expressão para a difusividade efetiva	[-]
B - Termo independente na equação de difusão discretizada.....	[-]
B_i - Número de Biot.....	[-]
C – Comprimento da telha cerâmica.....	[m]
c_p – Calor específico à pressão constante.....	[Jkg ⁻¹ K ⁻¹]
C_n, F_n – Coeficientes de série infinita que dá a solução analítica da equação de difusão para uma parede infinita com condição de contorno convectiva.....	[-]
D_ϵ, E_ϵ – Coeficientes de série infinita que dá a solução analítica da equação de difusão para um paralelepípedo com condição de contorno convectiva.....	[-]
D – Coeficiente de difusão.....	[m ² . s ⁻¹]
D_{ef} – Coeficiente de difusão efetivo de massa.....	[m ² . s ⁻¹]
E – Espessura da telha cerâmica.....	[m]
E_a – Energia de ativação.....	[J. mol ⁻¹]
$f_e, f_w, f_n, f_s, f_f, f_b, f_{ne}, f_{nw}$ – Fatores para a condição de contorno convectiva.....	[-]
$f_{se}, f_{sw}, f_{fe}, f_{fw}, f_{be}, f_{bw}$ – Fatores para condição de contorno convectiva.....	[-]
$f_{fn}, f_{fs}, f_{bn}, f_{bs}$ – Fatores para condição de contorno convectiva.....	[-]
\vec{G} - Grandeza vetorial.....	[-]
G_n – Componente de G na direção de \vec{n}	[-]
h – Coeficiente de transferência de massa por convecção.....	[m.s ⁻¹]
i, j, k – Índices para uma posição de pontos na malha.....	[-]
J – Jacobiano da transformação.....	[-]
\vec{J} – Fluxo difusivo de massa.....	[kg.m ⁻² s ⁻¹]
k – Condutividade térmica.....	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]

L1, L2, L3 – Dimensões de paralelepípedo.....	[m]
L_c – Comprimento característico.....	[m]
L – Espessura de parede infinita.....	[m]
L – Largura da telha cerâmica.....	[m]
L_z – Comprimento de cilindro.....	[m]
$\Delta L_\xi, \Delta L_\eta, \Delta L_\gamma$ – Distância elementar ao longo de ξ, η e γ	[m]
m – Massa da telha cerâmica.....	[kg]
m_{eq} – Massa de equilíbrio.....	[kg]
m_s – Massa seca.....	[kg]
M – Teor de umidade numa dada posição de um corpo.....	[kg.kg ⁻¹]
\bar{M} – Teor de umidade médio (base seca).....	[kg.kg ⁻¹]
\bar{M}^* – Teor de umidade médio após truncamento.....	[kg.kg ⁻¹]
M_i – Teor de umidade inicial (base seca).....	[kg.kg ⁻¹]
M_{eq} – Teor de umidade de equilíbrio (base seca).....	[kg.kg ⁻¹]
RM – Razão de umidade.....	[-]
N, S, E, W, F, B, P, – Pontos nodais.....	[-]
NE, NW, SE, SW, FE, FW, FN, FS, BE, BW, BN, BS – Pontos nodais.....	[-]
N_η – Número de linhas η no domínio.....	[-]
N_ξ – Número de linhas ξ no domínio.....	[-]
N_γ – Número de linhas γ no domínio.....	[-]
N_p – Número de pontos experimentais.....	[-]
Δn – Distância do ponto nodal à face de um volume de controle.....	[m]
\vec{n} – Vetor normal a uma área elementar.....	[-]
q – Fluxo de calor por unidade de área.....	[J.s ⁻¹ .m ⁻²]
Q, E, F, G – Fatores usados na equação de transformação.....	[-]
r – Coordenada radial.....	[m]
\vec{r} – Vetor posição.....	[m]
R – Constante universal dos gases ideais.....	[J.mol ⁻¹ k ⁻¹]
R – Raio de cilindro.....	[m]
R ² – Coeficiente de determinação.....	[-]
ΔS – Área elementar.....	[m ²]
S – Termo fonte.....	[-]

Φ_S – Termo fonte da equação de transporte.....	[-]
t – Tempo.....	[s]
t_i^{sim} – Tempo simulado.....	[s]
v – Velocidade do meio.....	[m s ⁻¹]
ΔV – Volume elementar.....	[m ³]
ΔV_{ijk} – Volume de volume de controle.....	[m ³]
V – Volume.....	[m ³]
\vec{V}_U – Vetor unitário perpendicular a uma face.....	[-]
x, y, z – Coordenadas cartesianas.....	[-]
$x_\xi, y_\xi, z_\xi, x_\eta, y_\eta, z_\eta, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ – Derivadas de x, y e z em relação a ξ, η e a γ	[m]

Letras Gregas

α_{ij} – Parâmetros da equação de difusão discretizada.....	[-]
Γ^Φ – Coeficiente de transporte.....	[-]
Δ – Variação.....	[-]
λ – Coeficiente de transporte.....	[-]
$\mu_n, \mu_n, \zeta_n, \zeta_n$ – Raízes de equação transcendental.....	[-]
ξ, η, γ – Eixos em coordenadas generalizadas.....	[-]
$\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – Derivadas de ξ, η e γ em relação a x, y e z	[-]
ρ – Densidade (massa específica).....	[kg.m ⁻³]
τ – Tempo no domínio transformado.....	[s]
Φ – Variável de transporte.....	[-]
$\bar{\Phi}$ – Valor médio da variável de transporte.....	[-]
Φ_{eq} – Variável de transporte de equilíbrio.....	[-]
Φ_i – Valor inicial da variável de transporte.....	[-]
Φ_∞ – Variável de transporte para um fluido ambiente.....	[-]
Φ_i – Valor do i-ésimo ponto experimental.....	[-]
$\delta\Phi_i$ – Desvio do i-ésimo ponto experimental.....	[-]
$\bar{\Phi}^*$ – Valor médio de Φ simulado.....	[-]
$\Phi_P, \Phi_E, \Phi_W, \Phi_N, \Phi_S$ – Variáveis dependentes na equação discretizada.....	[-]
$\Phi_F, \Phi_B, \Phi_{NE}, \Phi_{NW}$ – Variáveis dependentes na equação discretizada.....	[-]
$\Phi_{SE}, \Phi_{SW}, \Phi_{FE}, \Phi_{FW}$ – Variáveis dependentes na equação discretizada.....	[-]
$\Phi_{BE}, \Phi_{BW}, \Phi_{FN}, \Phi_{FS}$ – Variáveis dependentes na equação discretizada.....	[-]
Φ_{BN}, Φ_{BS} – Variáveis dependentes na equação discretizada.....	[-]

ϕ' – Fluxo de Φ	[-]
ϕ'' – Fluxo de Φ por unidade de área.....	[-]
ϕ''_n – Fluxo de Φ por unidade de área no contorno norte.....	[-]
χ^2 – Qui-quadrado.....	[-]
∇^2 – Laplaciano.....	[-]

Sobrescritos

0 – Tempo anterior

n – Face norte do volume de controle

P – Nó do volume de controle em estudo

n – Expoente da posição radial r

Subscritos

ef – efetiva

eq – equilíbrio

e, w, n, s, f, b – Fronteiras dos volumes de controle leste, oeste, norte, sul, front e back, respectivamente.

ne, nw, se, sw, fe, fw, be, bw, fn, fs, bn, bs – Vizinhos dos volumes de controle, nordeste, noroeste, sudeste, sudoeste, front leste, front oeste, back leste, back oeste, front norte, front sul, back norte e back sul, respectivamente.

i – inicial

s – seco

b.s. – base seca

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estudar teórica e experimentalmente o processo de difusão em três dimensões, para sólidos de forma arbitrária. O estudo apresenta soluções analíticas e numéricas da equação de difusão na descrição do transporte da grandeza de interesse para a condição de contorno do terceiro tipo. As ferramentas analíticas consideraram o produto com a forma de paralelepípedo, enquanto a solução numérica foi desenvolvida para sólidos com forma genérica. Para utilizar o método numérico, a solução da equação de difusão tridimensional foi discretizada usando o método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita, usando coordenadas generalizadas. Um código computacional desenvolvido em FORTRAN, usando o estúdio CVF 6.6.0 foi utilizado e os resultados acoplados ao *software* LS Optimizer para fazer a simulação, a partir de dados experimentais de secagem. Assim, foram determinados o coeficiente de difusão efetivo em função da razão de umidade para várias funções e também o valor do coeficiente de transferência convectivo. As ferramentas foram aplicadas à secagem de telhas cerâmicas para quatro condições experimentais. Os resultados mostraram que, ao se aumentar a temperatura ou a velocidade do fluxo de ar de secagem ou ambas, o tempo do processo diminui. Para as temperaturas e velocidades estudadas, as cinéticas de secagem apresentaram resultados coerentes do ponto de vista físico, em se tratando de um processo de secagem. Os valores dos coeficientes difusivos e de transferências convectivos foram obtidos com as incertezas e podem ser considerados estatisticamente coerentes. Em adição a isto, a análise e comparação dos resultados com dados reportados na literatura, para casos similares, mostraram que a solução apresentada forneceu resultados coerentes para todos os casos investigados.

Palavras-chaves: Geometria complexa, *LS Optimizer*, coordenadas generalizadas, malhas estruturadas, difusividade variável.

ABSTRACT

This work has the objective to study theoretically and experimentally the diffusion process in three dimensions, for solids of arbitrary form. The study presents numerical and analytical solutions of the diffusion equation in the description of the transport of the greatness of interest for the boundary condition of the third type. The analytical tools consider the product with the parallelepiped form, while the numerical solution was developed for generically form solids. To use the numerical method, the solution of the three-dimensional diffusion equation was discretized using the finite volume method, with a fully implicit formulation, using generalized coordinates. A computational code developed in FORTRAN, using the CVP 6.6.0 studio was used and the results coupled to the software LS Optimizer to make the simulation, from experimental data of drying. Thus, the effective diffusion coefficient was determined as a function of the moisture ratio for several functions and also the value of the convective transfer coefficient. The tools were applied to the drying of ceramic tiles for four experimental conditions. The results have shown that by increasing the temperature or the speed of the drying air flow or both, the process time decreases. For the temperatures and speeds studied, the drying kinetics presented physically coherent results in the drying process. The values of the diffusive coefficients and convective transfers were obtained with the uncertainties and can be considered statistically coherent. In addition to this, the analysis and comparison of the results with data reported in the literature, for similar cases, showed that the presented solution provided coherent results for all cases investigated.

Key-words: Complex geometry, LS Optimizer, generalized coordinates, structured meshes, variable diffusivity.

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

A secagem é um processo por meio do qual se retira água de corpos ou produtos constituídos por materiais porosos, sendo uma etapa muito importante em diversos setores de produção, abrangendo as mais diversas áreas da atividade humana, dentre as quais podem ser citadas as seguintes: armazenamento de alimentos, materiais cerâmicos, indústrias farmacêutica e de papel. A fim de estimar a quantidade de massa que é transferida do interior para as bordas dos produtos durante um processo de secagem, os parâmetros termofísicos destes produtos devem ser conhecidos. Entre esses parâmetros, podem ser citados a difusividade efetiva de massa e o coeficiente de transferência convectiva de massa. Se tais parâmetros não forem conhecidos, a priori, eles precisam ser determinados. Um dos métodos utilizados para determinação dos parâmetros termofísicos durante o processo de transferência de massa, explorando os dados experimentais da cinética de secagem de um dado produto, é o método inverso, que é utilizado através de algum algoritmo de otimização.

No processo de secagem se faz necessário o entendimento dos processos físicos envolvidos na transferência simultânea de calor e de massa. Durante a secagem de um sólido, o calor é transferido para a superfície e desta para o interior do sólido. Simultaneamente ocorre o movimento da água do interior do material até à superfície, de onde a água é evaporada. A resistência ao fluxo de massa na superfície é representada pelo coeficiente convectivo de massa, enquanto que no interior, é pela difusividade efetiva de massa.

Uma atividade industrial importante - no mundo em geral, e em particular na região nordeste - consiste na produção de materiais cerâmicos, que são compostos basicamente por argila. Os materiais cerâmicos têm ampla utilização na construção civil e são fabricados a partir de matérias-primas classificadas como naturais e sintéticas. Para a fabricação de peças cerâmicas, é fundamental observar as seguintes etapas: exploração das jazidas, tratamento prévio das matérias-primas, homogeneização, secagem e queima (SILVA et al., 2013a).

A secagem é uma das fases fundamentais na produção de materiais cerâmicos, pois é responsável por retirar a água que foi adicionada à argila durante o processo de extrusão. Sem essa fase, o processamento da queima seria prejudicado, pois as relações entre a secagem e a queima são bastante complexas e quaisquer mudanças na sequência

do processo poderiam ocasionar muitos defeitos nos materiais cerâmicos que causaria prejuízos para empresa (ALMEIDA, 2009).

Durante a etapa de secagem, surgem elevados gradientes de umidade e temperatura no interior do sólido. Com isso, simultaneamente, são geradas tensões térmicas e hídricas, que podem causar defeitos irreversíveis na peça produzida, diminuindo a qualidade do produto e aumentando custos operacionais. Quando a produção de peças cerâmicas acontece em escala industrial, uma variável que deve ser levada em consideração refere-se ao consumo da energia ao longo do processo produtivo. O consumo de energia térmica e elétrica representa, atualmente, uma grande parcela do custo total de produção dessas indústrias, estando a secagem entre as etapas que mais consomem energia. Neste contexto, é fundamental conhecer os efeitos da secagem e o seu controle, uma vez que estes alteram as propriedades físicas e químicas do produto, e tais alterações afetam sensivelmente o processo de transferência de calor e massa.

Vários modelos de secagem estão disponíveis na literatura e, em particular para materiais cerâmicos, podem ser citados os seguintes: modelos empíricos (SKANSI et al. 1995; SANDER et al. 2003), modelos baseados na lei de Darcy (SU 1997, CHEMKHI e ZAGROUBA, 2008), e modelos de difusão (PARK et al. 2002; NICOLIN, et al. 2015). Para que um modelo difusivo possa ser utilizado na descrição da cinética de secagem de um produto, a equação de difusão deve ser resolvida. A solução da equação de difusão, em diversas situações de interesse, requer muitas vezes a necessidade de se estabelecer certas hipóteses na descrição do processo físico. Uma delas está relacionada à geometria. De acordo com muitos pesquisadores, a difusão de calor e massa dentro de um corpo capilar poroso pode ser prevista por soluções analíticas através de hipóteses simplificadoras considerando a forma geométrica também simples. Estas simplificações geométricas também facilitam a solução numérica da equação de difusão. Entretanto, este procedimento, embora normalmente apresente bons resultados, às vezes não descreve de forma satisfatória os processos envolvidos, caso a forma geométrica do objeto em estudo seja significativamente diferente da considerada.

Com esta pesquisa pretende-se colocar à disposição do setor produtivo desta atividade econômica, subsídios teóricos no tocante à transferência de massa nos processos de secagem de sólidos cerâmicos com forma complexa. Sendo assim, este

trabalho pretende contribuir na solução de problemas específicos focados em necessidades técnicas de processos industriais e, possivelmente, viabilizar algumas inovações tecnológicas.

Para situar o possível avanço deste trabalho dentro da linha de pesquisa de transferência de calor e massa, deve-se observar que inúmeros trabalhos têm sido publicados sobre secagem de sólidos, de forma geral. Contudo, são escassos os artigos disponíveis em relação a corpos com geometria arbitrária, particularmente nos casos em que não se pode reduzir o problema a situações uni ou bidimensionais. Assim, diante da escassez de pesquisas sobre difusão de massa em sólidos, e em particular em materiais cerâmicos que envolvam geometria complexa, esta pesquisa deverá conter aspectos inovadores, fornecendo subsídios iniciais para que estudos posteriores, mais detalhados e aprofundados possam ser realizados e utilizados no processo produtivo. Em seguida enumera-se os objetivos geral e específico do plano de trabalho.

1.1 – Objetivo geral:

Estudar teórica e experimentalmente a difusão de massa em três dimensões, para sólidos de forma arbitrária, usando coordenadas generalizadas e o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita.

1.2 – Objetivos específicos:

- ✓ Realizar experimentos para obter a cinética de secagem de telhas cerâmicas em quatro condições de temperatura e velocidade do fluxo de ar;
- ✓ Simular a distribuição da grandeza de interesse no interior desses sólidos e suas respectivas cinéticas de difusão, utilizando-se de modelos matemáticos;
- ✓ Simular o processo da difusão em várias situações de interesse para várias geometrias visando uma melhor compreensão do código numérico apresentado;

- ✓ Modelar e examinar o efeito da difusão em corpos que possuam qualquer geometria;
- ✓ Construir trinta e uma malhas ao longo do comprimento assimétrico da telha para estudar o efeito da difusão.
- ✓ Apresentar solução numérica, em coordenadas generalizadas, para o problema de difusão transiente em três dimensões, em corpos com geometria arbitrária;
- ✓ Aplicar um código computacional na linguagem Fortran, desenvolvido por Farias, V. (2011) na plataforma *Windows*, para simular o processo da difusão em um sólido com geometria arbitrária;
- ✓ Acoplar o *software LS Optimizer* desenvolvido por Silva e Silva (2016) ao código numérico apresentado, visando determinar os parâmetros termofísicos a partir de dados experimentais;
- ✓ Aplicar os modelos numéricos desenvolvidos no estudo da secagem de telhas cerâmicas;
- ✓ Comparar os resultados da simulação numérica com os resultados experimentais, para os corpos selecionados, e determinar os coeficientes de transferência de massa, tanto o difusivo no interior quanto o convectivo na superfície do produto, para várias condições de secagem;
- ✓ Estudar os efeitos das considerações adotadas nos diversos modelos, sobre os coeficientes de transporte.

Observou-se que, no levantamento bibliográfico realizado, foram encontrados poucos trabalhos abordando a difusão tridimensional em corpos com geometria arbitrária usando coordenadas generalizadas e malhas não-ortogonais através do método dos volumes finitos. Assim, diante do exposto, esta pesquisa deverá disponibilizar para a comunidade científica, importantes subsídios sobre a difusão 3D em sólidos com geometria arbitrária.

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 – Considerações iniciais

O transporte de matéria ou de energia, ou ambas, em um meio pode ser feito por vários mecanismos, entre eles a difusão, que ocorre devido a existência do gradiente de concentração da matéria e/ou energia, enquanto o meio permanece estacionário. As grandezas são transportadas através do movimento molecular aleatório de uma região de alta concentração para uma de baixa concentração. Este processo deve ser descrito por um modelo matemático que usa a equação de difusão, a qual pode ser obtida a partir da equação geral de transporte (equação da conservação) ao se considerar o meio estacionário.

Vários estudos foram realizados sobre o fenômeno da difusão, nos quais se inclui as mais variadas hipóteses para resolver a equação de difusão. Sejam soluções analíticas ou numéricas, utilizando condições de contorno do primeiro tipo ou terceiro tipo, considerando os coeficientes de difusão como constantes ou variáveis, para diferentes geometrias. Entre estes trabalhos estão os de: Wu et al. (2004) que estudaram a difusão de calor e massa no núcleo de um grão de arroz; Cadé et al. (2005) realizaram pesquisas sobre a difusão de massa no interior de tijolos cerâmicos; Silva, W. et al. (2009b) investigaram a difusão de calor e massa em sólidos obtidos por revolução de superfície planas com forma arbitrária; Farias et al. (2010b) pesquisaram a difusão de massa em telhas cerâmicas usando solução analítica para diferentes geometrias; Silva et al. (2013e) trabalharam com placas cerâmicas e utilizaram um modelo de difusão de massa para descrever a secagem; Farias et al. (2015) usaram o modelo da difusão em coordenadas generalizadas para descrever o transporte de água em telhas cerâmicas; Doymaz (2017) estudou a influência da temperatura do ar de secagem, espessura das fatias e aplicação de pré-tratamento na secagem de fatias de cenoura usando o modelo da difusão líquida; Franco et al. (2017) usaram modelos da difusão líquida para descrever a secagem intermitente de arroz com casca.

Durante a revisão bibliográfica, foi possível verificar a existência de um grande número de trabalhos referentes à utilização da teoria da difusão abrangendo além da secagem, os seguintes processos físicos: pasteurização, desidratação osmótica, resfriamento e congelamento. Por exemplo, no processo de pasteurização destaca-se a pesquisa de Silva et al. (2018) que estudaram o fenômeno da difusão transiente de calor em produtos pastosos contidos em recipientes com geometria arbitrária obtidos através de revolução de áreas planas. No

processo de desidratação osmótica destaca-se o trabalho de Aires et al, (2018) que pesquisaram desidratação osmótica da maçã descrita por uma solução numérica tridimensional da equação de difusão. Para o processo de resfriamento, destaca-se o trabalho de Silva et al. (2018) que resfriaram bananas inteiras com casca visando determinar as propriedades térmicas do produto.

É importante ressaltar que alguns trabalhos realizados por pesquisadores da Universidade Federal de Campina Grande estão dentro da linha de pesquisa de transferência de calor e massa. Esses pesquisadores fazem parte de um grupo de pesquisa com ênfase na referida área e são responsáveis por várias publicações, inclusive em revistas internacionais com alto fator de impacto. Alguns dos trabalhos mencionados serviram de base para a pesquisa desenvolvida e apresentada neste trabalho.

Dentre eles, pode-se destacar: Lima (1999), que apresentou soluções numéricas e analíticas para a equação de difusão usando malhas ortogonais, geradas por expressões analíticas, válidas para sólidos do tipo esferoidal prolato, enquanto Nascimento (2002) usou vários modelos matemáticos para resolver problemas de difusão transiente em três dimensões, mas para uma geometria específica: sólidos na forma de paralelepípedos. Por sua vez, Carmo (2000) e Carmo (2004) apresentaram soluções numéricas da equação de difusão, válida para sólidos com geometria do tipo esferoidal oblata, enquanto Silva (2007) trabalhou com malhas estruturadas e não-ortogonais bidimensionais, geradas numericamente, válidas para qualquer sólido com simetria de revolução. Farias, V. (2011) resolveu numericamente a equação de difusão tridimensional em regime transiente para uma geometria arbitrária usando coordenadas generalizadas. Silva, L. (2012) utilizou alguns modelos matemáticos para resolver problemas de difusão transiente tridimensional em coordenadas cartesianas para sólidos na forma de paralelepípedos. Silva, C. (2012) desenvolveu ferramentas analíticas e numéricas para descrever processos difusivos em sólidos cilíndricos e em elipsoides. Na solução numérica, o pesquisador usou coordenadas generalizadas. Ataíde (2014) apresentou solução numérica da equação de difusão em coordenadas generalizadas para o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita para uma geometria arbitrária. Silva Júnior (2015) desenvolveu ferramentas numéricas e computacionais para descrever a difusão de massa em corpos com geometria cilíndrica. Aires (2016) apresentou solução numérica da equação de difusão escrita em coordenadas cartesianas e usando o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita para uma geometria em forma de paralelepípedo. No trabalho de Franco

(2016) foram desenvolvidos modelos matemáticos para prever a difusão de calor e massa durante a secagem contínua e intermitente de sólidos elipsoidais. Ainda podem ser mencionados, dentre outros, os trabalhos de Lins (2013); Costa (2015); Galvão (2017).

2.2 – Secagem

2.2.1 – Aspectos gerais

A secagem é a retirada, total ou parcial de um fluido (água ou vapor) de qualquer produto, envolvendo exclusivamente a transferência de calor e de massa. Consiste em duas etapas simultâneas: a transferência de calor seja por condução, convecção ou radiação ou ainda por uma combinação desses processos, do meio externo para o produto. Ao mesmo tempo ocorre a evaporação da água líquida contida no produto e sua retirada na forma de vapor, por convecção natural ou forçada (BROOKER et al., 1992; FIOREZE, 2004; PARK, et al., 2007).

No decorrer do processo de secagem, o calor é transferido ao produto por convecção, através do ar, ou por condução, através do contato com uma superfície quente. Esse calor é utilizado para vaporizar o líquido na superfície do sólido ou próximo a ela, se a mudança de estado ocorrer no interior do corpo (BROOKER et al., 1992). O vapor produzido é retirado pelo ar, seja em convecção natural ou forçada. Com a retirada de água da superfície e das camadas mais externas, cria-se um gradiente de concentração internamente ao produto causando um processo migratório de umidade do centro para a superfície (FIOREZE, 2004). Há ainda, em alguns casos, a vaporização da água no interior do corpo, ocorrendo, nesse caso, a migração de líquido e vapor para a superfície (LIMA e NEBRA, 1999).

A secagem é uma etapa bastante delicada, complexa e extremamente importante em diversos setores, tendo finalidades específicas em algumas áreas de produção (VIEIRA et al., 2003; FIOREZE, 2004). Inúmeros trabalhos são reportados na literatura com as mais diversas técnicas de secagem, empregados nos mais diversos setores produtivos, dentre os quais podem ser citados: indústria alimentícia, cerâmica vermelha, cerâmica avançada, madeira, concreto refratário e indústria química.

O processo de secagem aplicado à cerâmica reduz a quantidade de água ainda contida nas peças, após a etapa de conformação, proveniente da preparação da massa. É necessário eliminar essa água para evitar defeitos nas peças, tais como trincas, bolhas, empenos e quebras, e não restringir o desempenho do forno.

2.2.2 – Tipos de secagem

Os processos de secagem são classificados em: (i) quanto ao uso de equipamento como sendo natural e artificial. (ii) quanto a periodicidade no fornecimento de calor como sendo contínuo e intermitente e (iii) quanto a movimentação de massa o processo pode ser estacionário ou contínuo (GARCIA et al., 2004).

O método natural é feito há muito tempo e ainda é usado em alguns setores produtivos. Nesse método os produtos são colocados a livre para secar com as ações do vento e dos raios solares incidindo diretamente sobre eles (CORNEJO, et al 2003; FIOREZE, 2004; SILVA, A. et al. 2014). A vantagem do método natural é o seu baixo custo, pois não necessita de máquinas, de energia elétrica, etc. A desvantagem é que o processo depende das condições climáticas (sol, vento, etc.), ocasionando assim, uma insegurança quanto ao atendimento rápido à demanda de mercado.

O método artificial de secagem surgiu com a tentativa de se controlar parcialmente as condições de secagem e assim ela passou a ser feita em fogões especiais ou em salas aquecidas com a circulação de ar. No processo de secagem artificial tem-se a vantagem de poder controlar a temperatura, o fluxo de ar de secagem e o tempo em que os materiais ficam expostos ao ar aquecido para acelerar a extração de água dos produtos. Isso é fundamental para o sucesso do processo de secagem (GARCIA et al. 2004; SILVA, A. et al. 2014).

2.2.3 - Mecanismos de secagem

Vários mecanismos de transporte têm sido usados para analisar a transferência da massa de água do interior do sólido para a superfície. As análises mais usadas são baseadas nos seguintes mecanismos (PARK, et al., 2007; FARIAS, et al.; 2009; FARIAS, et al.; 2010a; SILVA, L et al., 2013; SILVA, W. et al., 2013a; SILVA, W. et al., 2013b; SILVA, et al., 2013c;

SILVA, W. et al., 2013d; SILVA, W. et al., 2013e; SILVA, W. et al., 2014b; SOUSA et al., 2014; CORREA, et al., 2015):

- I) Movimento do líquido devido à diferença de concentração de umidade (difusão líquida);
- II) Movimento do vapor devido à diferença de concentração de vapor (difusão de vapor);
- III) Movimento do líquido devido à difusão de umidade na superfície dos poros (difusão na superfície);
- IV) Movimento do vapor devido à diferença de temperatura (difusão térmica);
- V) Movimento do líquido devido às forças capilares (difusão capilar);
- VI) Movimento do vapor devido à diferença de pressão (fluxo hidrodinâmico).

Na literatura encontram-se várias teorias aplicadas ao processo de secagem e estão elencadas abaixo (BROOKER, et al., 1992; MARTINAZZO, et al. 2007; TRINDADE, 2013; PARK, et al., 2014):

- a) Teoria da difusão líquida;
- b) Teoria da condensação-evaporação;
- c) Teoria capilar;
- d) Teoria de Luikov;
- e) Teoria de Krischer;
- f) Teoria de Philip de Vries.

2.2.4 – Teor de umidade

Para descrever o transporte de um líquido no interior de um sólido poroso é necessário ter conhecimento do teor de umidade. Neste processo o sólido pode conter ou atingir os seguintes teores de umidades: teor de umidade inicial (M_i) e o teor de umidade de equilíbrio (M_e). O teor de umidade inicial consiste no valor da umidade no material no princípio do processo de secagem. O teor de umidade de equilíbrio é o valor do teor de umidade de um corpo que exposto a determinadas condições do meio que o envolve, após um tempo suficientemente longo, não se verifica mais mudança em sua massa nos instantes seguintes. O teor de umidade de um sólido é representado de duas formas:

2.2.4.1 – Teor de umidade em base úmida

O teor de umidade em base úmida M_{bu} é definido como a massa de água m_w contida em um corpo em relação à sua massa total m_t , dado em decimal ou porcentagem. Isto é,

$$M_{bu} = \frac{m_w}{m_t} \quad (2.1)$$

2.2.4.2 – Teor de umidade em base seca

O teor de umidade em base seca M_{bs} é definido como a razão entre a massa de água m_w contida em um corpo em relação à sua massa seca m_s , dado em decimal. A Equação (2.2) mostra a definição do teor de umidade em base seca.

$$M_{bs} = \frac{m_w}{m_s} \quad (2.2)$$

2.2.5 – Períodos de secagem

Durante o processo de secagem de alguns produtos pode-se observar os seguintes períodos de secagem: O período de indução, o período com taxa constante de secagem e o período com taxa decrescente de secagem (BROOKER, et al., 1992; PARK, et al., 2007).

Em geral a duração do período de indução para materiais cerâmicos é insignificante em relação ao período total de secagem e, portanto, não será de interesse deste trabalho fazer uma discussão sobre o mesmo. Passa-se a discutir, a seguir, os outros dois períodos de secagem.

2.2.5.1 – Período com taxa constante de secagem

O período de secagem com taxa constante é observado em produtos nos quais a resistência interna para transportar a massa de água é menor do que a resistência para a remoção do vapor d'água da superfície do produto (SILVA, C., 2010). Neste período, a superfície do produto atinge rapidamente a temperatura de bulbo úmido e continua constante enquanto existir

água na superfície. Isso decorre do fato de que a transferência de calor e massa se equilibram exatamente (PARK, et al., 2014).

2.2.5.2 – Período com taxa decrescente de secagem

No período com taxa de secagem decrescente o produto não é mais coberto com uma camada fina de água, sendo assim a resistência interna do produto se torna maior para o transporte da umidade do que a resistência externa. Isto é, à medida que o teor de umidade do produto fica abaixo do ponto crítico, o potencial de condução do processo de secagem, que é a diferença entre a pressão de vapor na superfície do produto e a pressão do ar, diminui com a taxa de secagem. Ao terminar este período o produto entrará em equilíbrio com o ar e a taxa de secagem é nula (BROOKER et al., 1992; SILVA, C., 2010; PARK, et al., 2014).

Alguns autores que investigaram a secagem de materiais cerâmicos verificaram que o processo ocorre em dois períodos distintos: período com taxa de secagem constante e período com taxa de secagem decrescente (CHEMKHI e ZAGROUBA, 2005; SILVA, L. 2012; SILVA, W. et al. 2013a). De acordo com os autores, os modelos difusivos não descrevem corretamente os períodos de taxa não-decrescente.

Silva, L. et al. (2013) descreveram a migração de água em placas de argila durante a secagem, enfatizando os dois períodos: taxa constante e taxa decrescente. Para o primeiro período, o processo de secagem foi descrito por uma equação empírica e, para o segundo, foi descrita através da solução numérica da equação de difusão 3D em coordenadas cartesianas com condição de contorno do terceiro tipo. Equações foram obtidas para expressar os parâmetros do processo em função da temperatura do ar de secagem e umidade local. Dados experimentais do teor de umidade das placas de argila ao longo do tempo foram comparados com valores simulados e os resultados foram consistentes.

Em outra pesquisa, Silva, W. et al. (2013b) utilizaram placas cerâmicas com o objetivo de descrever o processo de secagem durante o período de taxa de secagem decrescente de transferência de massa, usando modelos de difusão unidimensionais, incluindo otimização e simulação do processo. A transferência de massa em placas cerâmicas durante a secagem foi descrita usando modelos de difusão com condições de contorno de equilíbrio (modelo1) e

convectivo (modelo 2). A secagem foi realizada com ar quente com um teor de umidade inicial de 0,11 (base seca) e temperaturas de 50, 60, 70, 80 e 90 °C. Para esta umidade inicial, a secagem ocorreu a uma taxa de secagem decrescente. Uma solução analítica unidimensional da equação de difusão, referentes aos modelos 1 e 2 foi acoplada a um otimizador para determinar os parâmetros do processo em cada temperatura e assim possibilitar que as equações obtidas pudessem expressar estes parâmetros como uma função da temperatura do ar. Segundo os autores, as análises dos resultados indicaram que há uma boa concordância entre os resultados experimentais e as simulações correspondentes nos dois modelos. No entanto, os indicadores mostraram que o modelo 2 é melhor que o modelo 1 na descrição da secagem de placas cerâmicas.

Na área de secagem em geral, vários outros trabalhos podem ser citados: (MELLADO, 2007; MAČIULAITIS e MALAIŠKIENĖ, 2009; SILVA, W. et al, 2013e; ZHAO et al., 2014; DOYMAZ, 2017).

2.3 – Materiais cerâmicos

De acordo com a ABC – Associação Brasileira de Cerâmica (2016), cerâmica ou material cerâmico compreende todos os materiais inorgânicos ou não-metálicos de emprego em engenharia (materiais de construção) ou produtos químicos inorgânicos (com exceção dos metais e suas ligas), que são utilizados geralmente após tratamento em temperaturas elevadas.

A maioria dos materiais cerâmicos apresenta como características, alta dureza e elevada resistência mecânica, mesmo em altas temperaturas. Mesmo assim, eles são considerados frágeis. Vários materiais cerâmicos são desenvolvidos tendo como objetivos diversas aplicações, entre elas: na construção civil, em mecânica, em química, na indústria aeroespacial, em informática, em comunicação e em equipamentos militares (BARROS, 2003; RAMBO, 2006).

Na construção civil vários materiais cerâmicos são utilizados, entre eles a telha, que é composta basicamente de argila em sua formação. Os produtos cerâmicos são fabricados a partir de matérias-primas classificadas em naturais e sintéticas. Utilizando-se de um processamento adequado, suas propriedades químicas e fases cristalinas podem ser alteradas. Para a fabricação

de peças cerâmicas, é fundamental observar as seguintes etapas: exploração das jazidas, tratamento prévio das matérias primas, homogeneização, secagem e queima. Na homogeneização, água é adicionada à argila para dar características de plasticidade e facilitar a moldagem das peças. A secagem é o processo responsável pela retirada dessa água, durante a fabricação de produtos cerâmicos.

2.3.1 – Aspectos históricos

2.3.1.1 – A Cerâmica no mundo

A cerâmica é considerada o produto artificial mais antigo produzido pelo homem. Escavações arqueológicas indicam que a cerâmica é produzida a aproximadamente dez mil anos. Vasos de barro, sem asa com cor de argila natural ou escurecidas por óxido de ferro são as primeiras cerâmicas que se tem notícia e que surgiram no período pré-histórico. A cerâmica para construção e a cerâmica artista com características industriais só surgiram no período da Antiguidade em grandes centros comerciais (ANFACER, 2000).

No Japão, as mais antigas peças de cerâmica que arqueólogos conheceram, foram descobertas na área ocupada pela cultura Jomon há pelo menos oito mil anos (AIKIDO, 2011). A habilidade na indústria de peças cerâmica saiu do Japão e se espalhou pela Europa e Ásia, porém não existe um consenso como isso ocorreu.

A utilização da cerâmica na China e no Egito, por exemplo, existe há mais de cinco mil anos. No Antigo Egito, nas tumbas dos faraós, os vasos de cerâmicas guardavam óleos, vinhos e perfumes para atividades religiosas.

Os guerreiros de Xian foram quem expressou um dos grandes exemplos da antiga arte da cerâmica chinesa. Nessa localidade em 1974, os arqueólogos encontraram o túmulo do imperador Chiu-Huand-di, que nasceu por volta do ano de 240 a. C., decorado com um exército de soldados em tamanho natural feito com argila modelada e cozida em forno.

Na Europa, a cerâmica da Pérsia foi difundida, juntamente com sua técnica na cidade de Sicília na Itália e depois se espalhou para outras cidades da Espanha e para outros países

européus. Em Portugal as primeiras utilizações do azulejo como revestimento de paredes foram realizadas com os importados de Sevilha no ano de 1503.

A partir do século XVI, Portugal, apesar de não ser um grande produtor de revestimentos cerâmico foi o país europeu que mais utilizou o revestimento cerâmico em seus prédios. Nas igrejas, conventos e palácios nobres da alta burguesia o uso era frequente, porém se restringia, na sua maioria, aos interiores em forma de tapetes, ou apenas como material ornamental. Devido ao alto custo, o uso externo se limitava ao revestimento das partes mais altas e nas cúpulas das igrejas.

2.3.1.2 – A cerâmica no Brasil

No Brasil a tradição cerâmica não chegou, como muitos acreditam, com os portugueses ou com os escravos vindos da África. Aqui a cerâmica tem o começo marcado na Ilha de Marajó. A cerâmica marajoara indica a cultura avançada dos índios que surgiu na ilha. No entanto, pesquisas arqueológicas apontam a presença de uma cerâmica que indica ter sido criada na região amazônica em torno de cinco mil anos atrás (SANTOS, et al. 2015).

A cerâmica marajoara envolvia várias técnicas, tais como: raspagem, incisão, excisão e pintura. A modelagem destacava objetos como: bancos, estatuetas, rodela-de-fuso, tangas, colheres, adornos auriculares labiais, apitos e vasos miniaturas. Os índios, mesmo sem o conhecimento do torno e trabalhando com instrumentos rudimentares, criaram uma cerâmica de valor, dando a impressão de superação dos estágios primitivos da Idade da Pedra e do Bronze (ANFACER, 2000).

Os índios aborígenes consolidaram a cultura do trabalho em barro quando Pedro Álvares Cabral ancorou na costa brasileira. Estes colonizadores instalaram as primeiras olarias, mas nada de novo trouxeram, apenas estruturaram e concentraram a mão de obra.

As instalações de olarias nos colégios, engenhos e fazendas jesuítas, nas quais se produziam tijolos, telhas e louças de barro para consumo diário, implicou em modificações no processo empregado pelos índios. Uma das mais importantes dessas influências foi a introdução do uso de torno e das rodadeiras nas instalações de olarias da faixa litorânea dos engenhos, nos

povoados, nas fazendas, permanecendo nas regiões interioranas, as práticas manuais indígenas (ANFACER, 2000).

A introdução do uso de torno e das rodadeiras nas instalações de olarias melhorou a técnica de produção de cerâmica, permitindo ser fabricadas peças com maior simetria na forma, melhor acabamento e menor tempo de trabalho.

2.3.2 – Tipos de Cerâmica

Nos últimos anos a indústria da cerâmica evoluiu e adota hoje uma produção em massa que é garantido devido aos equipamentos utilizados, a introdução de técnicas de gestão que inclui o controle de matérias-primas, dos processos e dos produtos fabricados.

Na atualidade a indústria de cerâmica é dividida em várias categorias com níveis de avanços tecnológicos distintos que possui característica individualizada. Descreve-se a seguir algumas dessas categorias (ANFACER, 2000).

Cerâmica Vermelha: São aquelas com a coloração avermelhada que se emprega na construção civil. Entre estes tipos de cerâmica estão: telhas, lajes, tijolos, blocos, elementos vazados, tubos cerâmicos e argilas expandidas.

Cerâmica Branca: Este tipo compreende materiais constituídos por um corpo branco que em geral são recobertos por uma camada vítrea transparente e incolor e que eram assim agrupados pela cor branca da massa, necessária por razões estéticas ou técnicas. Este grupo é subdividido em: Louça sanitária; louça de mesa; isoladores elétricos para alta e baixa tensão; cerâmica artística (decorativa e utilitária); cerâmica técnica para diversos fins, tais como: elétrico, químico, térmico e mecânico.

Revestimento Cerâmico: Placas cerâmicas para revestimento é definida como um material composto por argila e outras matérias-primas inorgânicas geralmente utilizadas para revestir pisos e paredes. Essas placas cerâmicas são constituídas de três camadas, assim distribuídas: a) suporte ou biscoito que, no revestimento esmaltado, é a face inferior, formada de argila e outras matérias-primas, na qual é aplicado o esmalte, b) o engobe, que tem a função

de impermeabilizante e garante a aderência da terceira camada, e c) o esmalte, camada vítrea que também impermeabiliza, além de decorar uma das faces da placa.

Esses revestimentos são usados na construção civil para revestir paredes, pisos, bancadas e ambientes internos e externos de piscinas, etc. São designados por: azulejos, pastilhas, porcelanatos, lajotas, pisos, etc.

Cerâmica Avançada ou Cerâmica de Alta Tecnologia: O avanço dos conhecimentos em ciências dos materiais propiciou ao homem desenvolver novas tecnologias e aperfeiçoar as existentes nas diferentes áreas, tais como: aeroespacial, eletrônica, nuclear e outras que exigissem matérias de alta qualidade. Esses materiais começaram a ser desenvolvidos a partir de matérias-primas sintéticas de altíssima pureza e por processos rigidamente controlados. São classificados de acordo com suas funções em: eletrônicos, magnéticos, ópticos, químicos, térmicos, mecânicos, biológicos e nucleares.

A Cerâmica de Alta Tecnologia tem uso intenso em diferentes setores da produção industrial e cada vez mais tende a se ampliar. Como exemplo do uso, cita-se: suporte para catalizadores de automóveis, velas para automóveis, aparelhos de som e de vídeos, ferramentas de corte, brinquedos, usinas nucleares, acendedor de fogões, naves espaciais, satélites, materiais para implante em seres humanos, sensores, etc.

2.3.2.1 – Argila

A cozedura da argila em forno iniciou-se no fim da idade da pedra e modificou profundamente a sua utilização, pois lhe conferiu propriedades de resistência que permitiram seu uso em projetos mais audaciosos, como na Torre de Babel, na muralha da China e nas inscrições hieróglifos em placas de argilas (BLOG MARGON PORTUGAL, 2007).

Com o aperfeiçoamento das técnicas de cerâmicas, os romanos estimularam a utilização genérica deste material em diversos tipos de construções. Isso não ficou restrito a Roma, uma vez que tais conhecimentos foram difundidos em todo o seu império. Outros povos usaram a telha como cobertura das casas primitivas em substituição a cobertura de colmo ou madeira que não ofereciam muito conforto e apodreciam com o tempo.

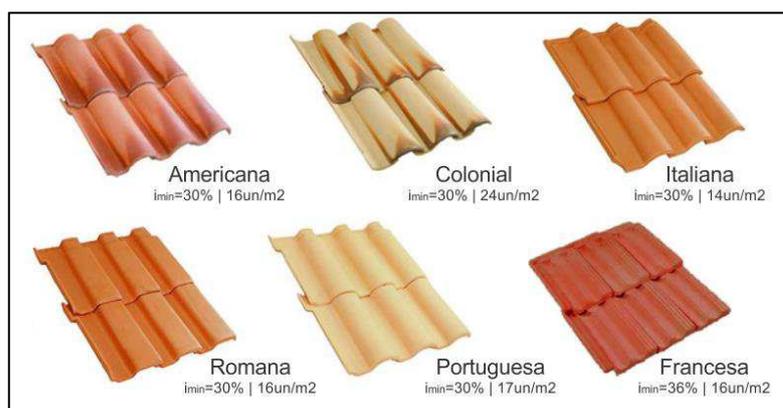
O invento da telha é atribuído a Kiniras, rei de Chipre, mas com ressalvas, pois, acredita-se também, que os assírios já conheciam sua aplicabilidade muito tempo antes dos chiprianos. Na verdade, julga-se que o emprego da telha é tão antigo quanto o uso de tijolos e do barro.

Com a modernização das técnicas de fabricação, destacou-se o modelo de telhas romanas, que se manteve em uso na Europa durante muito tempo até ser substituída pela forma trapezoidal que se adequava melhor às condições da região (BLOG MARGON PORTUGAL, 2007).

Em seguida apareceram novos tipos de telhas, até que em 1841 surgiram as telhas de encaixe, fabricadas mecanicamente e inventadas pelos irmãos *Gilardon d'Altkirche*, franceses, da Alsácia. Essa inovação revolucionou o seu uso, uma vez que proporcionou encaixes perfeitos e telhados mais uniformes (BLOG MARGON PORTUGAL, 2007).

Na atualidade existem vários modelos de telhas, tais como: Americana, colonial, romana, italiana, portuguesa, francesa, paulista, entre outras. A Figura 2.1 mostra alguns destes modelos.

Figura 2.1. – Tipos de telhas cerâmicas



Fonte: Rossi, (2012).

2.3.3 – Secagem de materiais cerâmicos

De acordo com Almeida (2009) e Silva, L. (2012), o processo de produção da cerâmica compreende diversas fases, elencadas a seguir:

- Exploração das jazidas;
- Tratamento prévio da matéria prima;
- Preparação de massa cerâmica com água;
- Modelagem da massa cerâmica para fazer as peças;
- Secagem apropriada;
- Queima de acordo com as especificações ABNT EB-19, ABNT-EB-14, PMSP-14.

A matéria prima fundamental na indústria de cerâmica é a argila, e a diversidade de sua origem pode causar variações no produto final. A plasticidade é a principal característica da argila, que permite a moldagem de peças em variados formatos usando equipamentos relativamente simples (SÁNCHEZ-MUÑOZ et al., 2002).

O processo de secagem das peças cerâmicas pode ser de forma natural ou artificial. O processo natural é lento, dependente das condições climáticas, está associada à utilização de mão de obra e não é viável para atender a demanda da indústria da construção civil. O processo artificial é vantajoso, pois é rápido, não depende das condições climáticas, utiliza uma pequena mão de obra e é viável para atender a demanda da indústria da construção civil.

Na secagem realizada em secadores, as peças cerâmicas são dispostas em prateleiras, esteiras ou no próprio piso do secador. Este tipo de secagem é rápido, uniforme e programado, com uma consequente melhoria na qualidade dos produtos. É indicado para processos de alta produtividade. No processo de secagem de peças cerâmicas, que é constituído de materiais porosos ocorre uma retração do corpo devido à perda de água e consequentemente uma diminuição de seu volume (SILVA, 2007).

Na literatura são reportados vários trabalhos que utilizaram materiais cerâmicos em suas pesquisas. Alguns deles são elencados abaixo:

Silva, J. (2009) em seu trabalho de pesquisa usou tijolos cerâmicos vazados de oito furos com o objetivo de estudar numérica e experimentalmente a secagem desses blocos cerâmicos na escala industrial. Apresentou um modelo matemático tridimensional transiente para prever a transferência de massa e calor e simular a distribuição do teor de umidade e temperatura no interior do sólido. Considerou, no seu modelo, a simetria do corpo em torno do centro,

propriedades termofísicas constantes e incluiu a variação de volume. Na secagem dos tijolos, o pesquisador utilizou temperaturas de 50, 60, 70, 80, 90 e 100 °C. Segundo o autor, para as temperaturas de 50 e 60 °C e umidades relativas de 20,8% e 13,5% respectivamente, a velocidade de secagem foi menor, diminuindo os riscos de defeitos no produto. Já nas temperaturas de secagem de 80, 90 e 100 °C, surgiram altos gradientes de temperatura e umidade no interior do tijolo que geraram tensões termo hídricas, ocasionando grandes fissuras e trincas, principalmente nas regiões dos vértices e paredes internas dos furos. Esses gradientes foram mais intensos no início, diminuindo aparentemente com o tempo de processo devido às contrações da camada exterior e superior.

Por outro lado Almeida (2009) em sua pesquisa utilizou tijolos cerâmicos industriais vazados com o objetivo de estudar teórica e experimentalmente a secagem desses sólidos em estufa e em secador industrial tipo túnel de fluxo cruzado, visando otimizar o processo de secagem. Apresentou um modelo matemático para descrever a transferência de calor e massa entre o ar e o produto. Considerou para o modelo as propriedades termofísicas variáveis. Os resultados foram analisados e comparados com os dados experimentais. Segundo o autor, a secagem em estufa com temperatura variável (50 a 100°C) e umidade relativa alta (70 a 85%), assegura tijolos com excelente qualidade. Em relação ao secador industrial, apresenta baixas eficiências energética (5,8%) e exergetica ($\approx 13,6\%$), alto consumo de energia para evaporar a água do produto e grande desperdício de energia contida no ar de exaustão, evidenciando ser a secagem um processo altamente dissipativo. Para um tempo total de secagem entre 8 a 10 horas no secador industrial, uma retração volumétrica, variando de 9,15 a 14,84%, foi verificada para o tijolo.

Os experimentos de Silva, L. et al. (2013) usaram modelo de difusão, incluindo otimização e simulação, para descrever a secagem de placas cerâmicas que podem ser usadas como revestimento de alvenaria. A secagem foi realizada em uma estufa com circulação de ar para várias temperaturas e o teor de umidade inicial das placas foi 0,11 (bs). A geometria considerada foi a de um paralelepípedo. Um otimizador foi acoplado à solução analítica tridimensional com condições de contorno convectiva. Assim, os parâmetros do processo foram determinados, por otimização, a partir de dados experimentais. Os autores concluíram que há uma boa concordância entre os resultados experimentais e as simulações correspondentes e

que os parâmetros do processo determinados na otimização são consistentes com valores disponíveis na literatura para estudos similares.

Na pesquisa realizada, Silva, W. et al. (2013a) estudaram a migração de água em placas de argila durante a secagem para uma abordagem convectiva tridimensional. A umidade inicial foi 0,23 em base seca e realizou os experimentos para as temperaturas 50, 60, 70, 80 e 90 °C. A secagem ocorreu em dois períodos distintos: taxa constante e taxa de decrescente. No primeiro período, o processo foi descrito por uma equação empírica e, no segundo, pela equação de difusão com condição de contorno do terceiro tipo. Uma abordagem numérica tridimensional foi usada para descrever o processo afim de eliminar possíveis restrições encontradas na literatura. Equações foram obtidas para expressar os parâmetros do processo em função da temperatura do ar de secagem e umidade local. Uma simulação usando os valores obtidos dessas equações para os parâmetros do processo é coerente com os dados experimentais.

Farias et al. (2018) realizaram uma investigação experimental e teórica na secagem de telhas cerâmicas com diferentes condições experimentais variando a temperatura ou a velocidade do ar de secagem ou ambas. A secagem ocorreu em dois períodos distintos: um período de taxa constante e um período de taxa decrescente. No primeiro período, o processo foi descrito por uma equação empírica e, no segundo, por um modelo de difusão com condição de contorno do terceiro tipo. Para este propósito uma solução analítica tridimensional foi usada para descrever o processo. Os parâmetros do processo foram determinados por otimização e a cinética de secagem foi simulada para cada condição experimental. Os resultados mostraram que o modelo de difusão descreve satisfatoriamente o processo de secagem, uma vez que os valores obtidos para os parâmetros são consistentes com aqueles mencionados na literatura para estudos similares. Além disso, há uma boa concordância entre os resultados experimentais e as correspondentes simulações obtidas. Os resultados também indicam que tanto a temperatura como a velocidade do fluxo de ar influenciam no processo de secagem, e, portanto, na taxa de secagem.

Outros trabalhos de pesquisa sobre materiais cerâmicos são reportados na literatura, entre eles pode-se citar: Chemkhi e Zagrouba (2005); Olek et al. (2005); Mačiulaitis e Malaiškienė (2009); Silva, A. et al. (2009); Silva, W. et al. (2012); Silva, W. et al. (2013e); Farias et al. (2013); Farias et al. (2015); Jarque et al. (2016); Mukeshbhai e Shah (2016).

2.4 – Equação de transporte

No problema geral de transporte, para um volume de controle, a equação é dada de forma genérica por (BIRD et al., 2001; SILVA, 2007; SILVA, 2009; MALISKA, 2012):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\Phi) + \vec{\nabla} \cdot (\lambda\vec{\nabla}\Phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma^\Phi\vec{\nabla}\Phi) + S \quad (2.3)$$

em que Φ é a variável dependente de interesse, λ e Γ^Φ são coeficientes de transporte, $\vec{\nabla}$ é o vetor velocidade do meio.

Na Equação (2.3), cada termo é definido como:

a) Transiente – $\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial \tau}$

b) Advecção – $\vec{\nabla} \cdot (\lambda\vec{\nabla}\Phi)$

c) Difusão – $\vec{\nabla} \cdot (\Gamma^\Phi\vec{\nabla}\Phi)$

d) Termo fonte – S.

2.4.1 – Equação de difusão

A equação de difusão é obtida a partir da Equação (2.3), com o termo advectivo igual a zero, pois neste caso o meio é estacionário e $\vec{\nabla} = 0$. Assim, a equação de difusão é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\Phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma^\Phi\vec{\nabla}\Phi) + S \quad (2.4)$$

2.4.1.1 – Equação de difusão de massa

Da Equação (2.4), fazendo-se $\lambda = 1$, $\Gamma^\Phi = D_{ef}$, $\Phi = M$ e $S = 0$, obtém-se a equação de difusão de massa dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D_{ef}\vec{\nabla}M) \quad (2.5)$$

em que M é o teor de umidade (em base seca) em um volume infinitesimal, no instante t , e D_{ef} é a difusividade efetiva de massa. Neste caso a grandeza a ser transportada é a massa de água.

O termo entre parêntesis no segundo membro da Equação (2.5) é o negativo da taxa de difusão de água por unidade de área, o que é conhecido como primeira lei de Fick.

$$\vec{J} = -D_{ef}\vec{\nabla}M \quad (2.6)$$

2.5 – Soluções para a equação de difusão

A solução da equação de difusão requer que sejam estabelecidas hipóteses sobre a situação física a ser estudada em relação à geometria dos corpos, às condições de contorno inicial, aos parâmetros de transporte, à consideração ou não da retração volumétrica, dentre outros. Vários trabalhos de pesquisa foram encontrados na literatura, nos quais a forma do corpo é aproximada para geometrias mais simples como parede infinita, esfera, cilindros infinito e finito, placa retangular e paralelepípedo. Somados a isto, alguns trabalhos não levam em consideração a variação dimensional do corpo e nem a variação da difusividade ao longo do processo. Com estas hipóteses, se houver uma distribuição uniforme da grandeza de interesse no início do processo, os cálculos analíticos fornecem uma solução exata das equações diferenciais, num domínio contínuo e para todo ponto, a qualquer instante, pode-se saber o valor da grandeza de interesse (LUIKOV, 1968; CRANK, 1992; INCROPERA e DEWITT, 1992; BROOKER et al., 1992; LIMA, 1999; LIU e SIMPSON, 1999; SILVA, 2007; SILVA, 2009. No entanto, tendo como base o universo das complexas equações necessárias para descrever situações reais, as soluções analíticas muitas vezes podem se distanciar demasiadamente do fenômeno físico real. Assim, para uma descrição mais precisa dessas situações, torna-se necessário a utilização dos métodos numéricos que praticamente não apresentam restrições e podem ser aplicados em qualquer domínio para resolver problemas complexos com condições de contorno gerais e ainda considerar as propriedades termofísicas usadas no modelo como parâmetros variáveis.

2.5.1 – Condições de contorno

As condições de contorno e iniciais são imposições ou medidas feitas para que se

obtenha uma específica solução para a equação. No caso da condição inicial, a imposição ou medição é feita no início do problema, enquanto que as condições de contorno são imposições feitas na superfície ao produto e são classificados como condições de contorno do primeiro, segundo e terceiro tipo.

2.5.1.1 – Condição de contorno de equilíbrio (primeiro tipo)

A condição de contorno de equilíbrio é aquela em que a superfície do corpo entra em equilíbrio imediatamente com o meio. Sendo também, conhecida como condição de contorno prescrita, ou condição de contorno de *Dirichlet*, ou ainda, condição de contorno do primeiro tipo.

2.5.1.2 – Condição de contorno com fluxo Φ prescrito (segundo tipo)

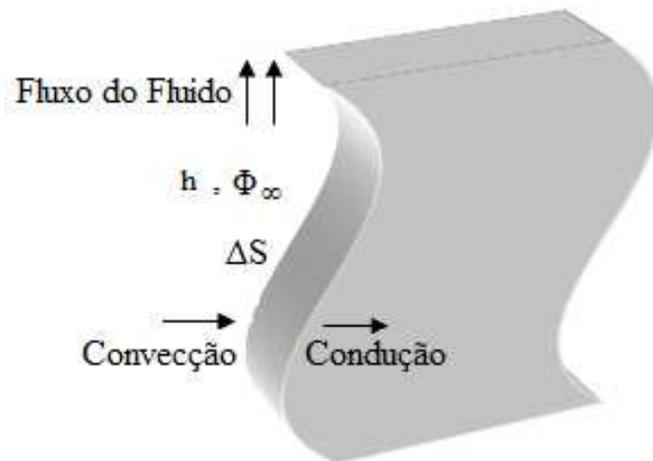
A condição de contorno com fluxo de Φ prescrito é aquela que considera conhecido um valor específico para a derivada da variável dependente no contorno do sólido. Essa condição de contorno é conhecida também como condição de contorno de *Newmann*, ou ainda condição de contorno do segundo tipo.

2.5.1.3 – Condição de contorno convectiva (terceiro tipo)

A condição de contorno convectiva ou condição de contorno do terceiro tipo ou ainda, a condição de contorno de *Cauchy* é aquela em que o transporte da grandeza genérica na superfície do sólido ocorre por convecção, com um coeficiente de transferência convectivo h , para o meio externo com um determinado valor da grandeza dado por Φ_{∞} .

A formulação matemática é obtida ao se igualar o fluxo por difusão no interior da superfície ao fluxo convectivo que chega nessa mesma superfície, pelo lado externo. Essa expressão é chamada de balanço do transporte da grandeza Φ na fronteira (ÖZİŞİK, 1990; BIRD et al., 2001).

A Figura 2.2 mostra uma representação da condição de contorno convectiva.

Figura 2.2 – Condição de contorno convectiva.

Fonte: Farias, V. (2011)

Assim, a expressão matemática para a condição de contorno convectiva mostrada na Figura 2.2 é escrita como:

$$h(\Phi_{\infty} - \Phi)|_s = -\Gamma^{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_s \quad (2.7)$$

onde n representa o módulo do vetor unitário perpendicular à área ΔS e o “s” subscrito significa a superfície do corpo.

O número de Biot (Bi) é um parâmetro adimensional e representa a razão entre a resistência externa e a resistência interna ao fluxo na superfície. Portanto, se um corpo tem comprimento característico L_c , o número de Biot é calculado pela expressão:

$$Bi = \frac{hL_c}{\Gamma^{\Phi}} \quad (2.8)$$

2.5.2 – Geometria do corpo

Em algumas situações de interesse, onde o modelo de difusão é utilizado na descrição do processo físico, a forma do corpo sob estudo pode ser aproximada para uma geometria

regular e condições de contorno simples, o que requer uma menor dificuldade para se obter a solução da equação.

A geometria do corpo no qual ocorre o transporte de energia, matéria ou ambas deve ser definida ao se estabelecer as hipóteses na descrição do processo físico na solução da equação de difusão. O modelo difusivo é utilizado por diversos trabalhos para descrever o fenômeno do transporte de matéria ou energia em que considera a geometria dos corpos, como parede infinita, paralelepípedos, cilindros e esferas. A equação de difusão, nestas geometrias, pode ser resolvida analiticamente ou por meio de soluções numéricas (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2012).

Quando o corpo em estudo pode ser aproximado para uma placa, um paralelepípedo ou para uma parede infinita usa-se a equação de difusão num sistema de coordenadas cartesianas para se obter a solução. Nos casos em que a difusão ocorre em corpos com a forma cilíndrica ou esférica, deve-se usar, para a solução da equação, sistemas de coordenadas cilíndricas ou esféricas, respectivamente. A análise vale para as situações uni, bi ou tridimensionais.

Assim, para escapar de algumas das limitações dos métodos que simplificam as soluções, uma opção é utilizar sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas ou ajustadas ao contorno (Boundary-fitted), que fornecem uma melhor aproximação do problema físico real. O método de coordenadas ajustadas ao contorno não somente está livre dos inconvenientes apresentados pelas soluções analíticas, mas tem também uma vantagem significativa – a possibilidade de usar uma malha curvilínea não-uniforme em um domínio físico, com refinamentos em subdomínios onde o problema principal o faz aconselhável e com um mapeamento em uma malha na forma de paralelepípedo no domínio computacional (FARIAS, V., 2011).

2.5.3 – Solução Analítica

Apesar das limitações do método analítico, ele é bastante usado na determinação de solução da equação de difusão, e uma das aplicações de seus resultados é validar a solução numérica. A forma do corpo a ser estudado é determinante no uso do método. Essa forma do corpo pode ser aproximada para uma geometria regular e condições de contorno simples, o que diminui a dificuldade de se encontrar a solução da equação.

A equação de difusão transiente unidimensional nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas pode ser compactada em uma única equação, dada por (ÖZİŞİK, 1990; SILVA, 2007):

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \quad (2.9)$$

em que:

$n = 0$ tem-se a equação de difusão em coordenadas cartesianas;

$n = 1$ tem-se a equação de difusão em coordenadas cilíndricas;

$n = 2$ tem-se a equação de difusão em coordenadas esféricas;

λ e Γ^Φ são os parâmetros de transporte.

Na literatura existem vários trabalhos que propõe soluções analíticas para a Equação (2.9), entre eles pode-se citar: Luikov (1968) e Crank (1992). Algumas soluções para condição de contorno convectiva são apresentadas a seguir:

2.5.3.1 – Solução analítica para parede infinita

A solução $\Phi(x, t)$ para a parede infinita é dada por:

$$\frac{\Phi(x, t) - \Phi_\infty}{\Phi_1 - \Phi_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left(-\zeta_n^2 \frac{\Gamma^\Phi}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} t \right) \cos \left(\frac{\zeta_n}{L} x \right) \quad (2.10)$$

onde:

$$C_n = \frac{4 \text{sen}(\zeta_n)}{2\zeta_n + \text{sen}(2\zeta_n)} \quad (2.11)$$

em que ζ_n são as raízes positivas da equação característica

$$\text{Bi} = \zeta_n \text{tg}(\zeta_n) \quad (2.12)$$

Para o processo de secagem e outros processos de transferência de matéria ou energia, é preciso conhecer o valor médio da grandeza no corpo inteiro, ao longo do processo. Para este caso, determina-se no espaço unidimensional, o valor médio da grandeza pela expressão:

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{\int \Phi(x, t) dx}{\int dx} \quad (2.13)$$

Assim a expressão do valor médio para a parede infinita é dada por:

$$\frac{\bar{\Phi}(t) - \Phi_{eq}}{\Phi_i - \Phi_{eq}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\zeta_n^2 \frac{\Gamma^\Phi}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} t\right) \quad (2.14)$$

$$B_n = \frac{2Bi}{\zeta_n^2 (Bi^2 + Bi + \zeta_n^2)} \quad (2.15)$$

A equação característica é dada pela Equação (2.12).

2.5.3.2 – Solução analítica para o paralelepípedo

Nesta seção, a solução analítica da equação de difusão será usada para descrever o transporte da grandeza em sólidos com forma de um paralelepípedo poroso.

Este estudo será feito para a condição de contorno do terceiro tipo para descrever o processo de secagem. Diversos autores comprovaram que a condição de contorno do terceiro tipo é mais adequada para descrever o processo de secagem (FARIAS, V., 2011; SILVA, L. 2012; SILVA, C. et al. 2012; SILVA, W. et al. 2013c; FARIAS et al. 2015).

Para o paralelepípedo, os valores da grandeza podem ser calculados para cada ponto no espaço e para cada instante t por:

$$\frac{\Phi(x, y, z, t) - \Phi_\infty}{\Phi_i - \Phi_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_n D_m D_k \cos\left(\zeta_n \frac{x}{\frac{L_1}{2}}\right) \cos\left(\zeta_m \frac{y}{\frac{L_2}{2}}\right) \cos\left(\zeta_k \frac{z}{\frac{L_3}{2}}\right)$$

$$\times \exp \left[- \left(\frac{\zeta_n^2}{\left(\frac{L_1}{2}\right)^2} + \frac{\zeta_m^2}{\left(\frac{L_2}{2}\right)^2} + \frac{\zeta_k^2}{\left(\frac{L_3}{2}\right)^2} \right) \Gamma^{\Phi} \times t \right] \quad (2.16)$$

onde:

$$D_{\varepsilon} = \frac{4\text{sen}(\zeta_{\varepsilon})}{2\zeta_{\varepsilon} + \text{sen}(2\zeta_{\varepsilon})} \quad (2.17)$$

em que o ε subscrito representa os índices n, m e k. Enquanto que, ζ_{ε} são as raízes positivas da equação transcendental dada por:

$$Bi = \zeta_{\varepsilon} \text{tg}(\zeta_{\varepsilon}) \quad (2.18)$$

A expressão do valor médio da grandeza de interesse em função do tempo para o paralelepípedo com dimensões L_1 , L_2 e L_3 é descrita por:

$$\frac{\bar{\Phi}(t) - \Phi_{\infty}}{\Phi_i - \Phi_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_n B_m B_k \exp \left[- \left(\frac{\zeta_n^2}{\left(\frac{L_1}{2}\right)^2} + \frac{\zeta_m^2}{\left(\frac{L_2}{2}\right)^2} + \frac{\zeta_k^2}{\left(\frac{L_3}{2}\right)^2} \right) \Gamma^{\Phi} \times t \right] \quad (2.19)$$

onde:

$$B_{\varepsilon} = \frac{2Bi}{\zeta_n^2 (Bi^2 + Bi + \zeta_n^2)} \quad (2.20)$$

onde a equação característica é dada pela Equação (2.18)

2.5.3.3 – Solução analítica para o cilindro infinito

A equação para o cilindro infinito de raio R tem a expressão:

$$\frac{\Phi(r, t) - \Phi_{\infty}}{\Phi_i - \Phi_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\zeta_n^2 \frac{\Gamma^{\Phi}}{\lambda R^2} t\right) j_0\left(\frac{\zeta_n}{R} r\right) \quad (2.21)$$

onde:

$$C_n = \frac{2}{\zeta_n} \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)} \quad (2.22)$$

em que ζ_n é determinado pela expressão

$$Bi = \zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} \quad (2.23)$$

sendo $J_0(\zeta_n)$ e $J_1(\zeta_n)$ as funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um, respectivamente, enquanto que Bi é o número de Biot.

O valor médio para o cilindro infinito é determinado pela expressão escrita a seguir:

$$\frac{\bar{\Phi}(t) - \Phi_{eq}}{\Phi_i - \Phi_{eq}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\zeta_n^2 \frac{\Gamma^{\Phi}}{R^2} t\right) \quad (2.24)$$

onde:

$$B_n = \frac{4Bi}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 + Bi^2)} \quad (2.25)$$

em que Bi é dado pela Equação (2.23)

2.5.3.4 – Solução analítica para a esfera

A solução analítica para uma geometria esférica é determinada pela expressão:

$$\frac{\Phi(r, t) - \Phi_{\infty}}{\Phi_i - \Phi_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\zeta_n^2 \frac{\Gamma^{\Phi}}{\lambda R^2} t\right) \frac{R}{\zeta_n r} \text{sen}\left(\frac{\zeta_n}{R} r\right) \quad (2.26)$$

onde:

$$C_n = \frac{4[\text{sen}(\zeta_n) - \zeta_n \cos(\zeta_n)]}{2\zeta_n - \text{sen}(2\zeta_n)} \quad (2.27)$$

em que ζ_n é determinado pela expressão

$$\text{Bi} = 1 - \frac{\zeta_n}{\text{tg}(\zeta_n)} \quad (2.28)$$

A expressão do valor médio para uma geometria esférica é escrita da forma:

$$\frac{\bar{\Phi}(t) - \Phi_{\text{eq}}}{\Phi_i - \Phi_{\text{eq}}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\zeta_n^2 \frac{\Gamma^{\Phi}}{R^2} t\right) \quad (2.29)$$

onde:

$$B_n = \frac{6\text{Bi}}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 + \text{Bi}^2 - \text{Bi})} \quad (2.30)$$

onde Bi é dado pela Equação (2.28).

Na literatura podem ser encontrados vários trabalhos de pesquisa que utilizam o método da solução analítica para a equação de difusão. Dentre os diversos trabalhos consultados, alguns são destacados a seguir:

Em trabalho de pesquisa Silva, C. et al. (2012) usaram uma metodologia para a determinação simultânea da difusividade efetiva e do coeficiente de transferência convectivo de massa em sólidos porosos que pudessem ser considerados como um cilindro infinito, durante sua secagem. Dois modelos foram utilizados para a otimização e a simulação do processo de secagem: o modelo 1 (volume e difusividade constantes, com condição de contorno de

equilíbrio); e o modelo 2 (volume e difusividade constantes, com condição de contorno convectiva). Algoritmos de otimização por varredura, baseados no método inverso, foram acoplados às soluções analíticas referentes aos dois modelos utilizados, possibilitando ajustar tais soluções aos dados experimentais da cinética de secagem em camada fina de produtos com a forma cilíndrica. Foi feita uma aplicação da metodologia de otimização na descrição da cinética de secagem de bananas inteiras, usando dados experimentais disponíveis na literatura. Segundo os autores, os indicadores estatísticos relativos aos ajustes possibilitam afirmar que a solução da equação de difusão com condição de contorno convectiva produz resultados significativamente melhores que aqueles considerando a condição de contorno de equilíbrio.

A pesquisa de Silva, L. et al. (2013) teve como objetivo o estudo do transporte de água, através do modelo de difusão líquida, em placas cerâmicas e a apresentação de um algoritmo de otimização baseado no método inverso. Para atingir os objetivos o algoritmo apresentado foi acoplado a solução analítica da equação de difusão, possibilitando determinar os parâmetros de processo a partir dos dados experimentais da secagem do produto. A geometria considerada foi a de um paralelepípedo e foi empregada a condição de contorno convectiva. O teor de umidade inicial foi de 0,11 (bs) e a temperatura de secagem foi de 50, 60, 70, 80 e 90 °C. Uma vez determinado os parâmetros do processo, a cinética de secagem foi simulada para cada temperatura. Para os autores, os valores obtidos para o coeficiente de transferência convectiva de massa e para a difusividade efetiva da água foram consistentes com valores disponíveis na literatura e o modelo de difusão líquida descreve de forma satisfatória a cinética de secagem do produto.

2.5.4 – Solução numérica da equação de difusão

A solução analítica de um problema difusivo é usada em vários trabalhos de pesquisa. Porém esse método de solução é usado em situações especiais, às vezes pouco realista, que muitas vezes distorcem a situação física envolvida. A vantagem da solução numérica sobre a analítica é que o uso da solução numérica possibilita aproximar o modelo objeto de estudo para as condições físicas reais. Desta forma, pode-se considerar as propriedades termofísicas do modelo como parâmetros variáveis, além de considerar a geometria real do corpo (SILVA, 2007).

O procedimento numérico consiste em substituir as derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a incógnitas para resolver uma ou mais equações diferenciais. Ao fazer uma aproximação numérica da equação diferencial é aceito que a solução seja obtida para um número discreto de pontos, com um determinado erro e que quanto maior for esse número de pontos mais próximo a solução numérica estará da solução exata (MALISKA, 2012).

2.5.4.1 – Métodos numéricos para a solução da equação de difusão

Para solucionar numericamente a equação de difusão é necessário que se defina, entre outras condições, o método a ser utilizado na discretização da equação. Os mais utilizados são: Método das Diferenças Finitas (MDF), Métodos de Elementos Finitos (MEF) e Método dos Volumes Finitos (MVF).

O MDF é um método de resolução de uma equação diferencial que substitui o operador diferencial pelo seu correspondente numérico. Este método não trabalha com volumes de controle e sim apenas com os pontos da malha e, portanto, não é conservativo em nível discreto. Ele foi desenvolvido baseado em sistemas de coordenadas ortogonais, mas pode ser aplicado a qualquer tipo de malha (MALISKA, 2012).

Na literatura encontram-se diversos trabalhos que foram desenvolvidos usando o MDF, como exemplo, cita-se: Fernandes et al. (2009), Monerat et al. (2010), Araújo e Pestana (2010), Fraga et al. (2013), Vaz (2013), Silveira et al. (2015).

O MEF foi desenvolvido fundamentalmente na área de elasticidade, empregando malhas não-ortogonais, o que permite que problemas com geometrias complexas possam ser resolvidos. Este método também não trabalha com volume de controle e sim com pontos da malha. O domínio de integração é dividido em um número finito de áreas chamadas de elementos finitos, que mantêm as mesmas propriedades do domínio contínuo, e cada elemento é chamado de nó. Na formulação do elemento é escolhida uma função aproximada para representar a solução dentro de cada elemento. Essa função deve conter coeficientes não conhecidos que serão determinados de forma a minimizar o erro na solução. Esses coeficientes devem ser escritos em função dos valores da grandeza em estudo, obtidos para os nós (SILVA, C. 2012).

Vários trabalhos são citados na literatura em que foi utilizado o MEF, entre eles, podem ser relacionados: Borsato et al. (2009), Almeida e Rijo (2011), Santos et al. (2011), Fernandes et al. (2013), Ladeia et al. (2013).

O MVF é um método de resolução de uma equação diferencial que satisfaz a conservação de uma grandeza física em nível de volumes finitos. Neste método o domínio é dividido em um número finito de Volumes de Controle (VC), e a equação da conservação é aplicada em cada volume de controle. Este é um dos métodos mais empregados na discretização de equações diferenciais parciais envolvendo problemas de mecânica devido ao princípio do balanço de energia e será utilizado neste trabalho de pesquisa (SCHÄFER, 2006).

Costa (2015) realizou uma pesquisa com o objetivo de estudar o comportamento da transferência de calor em polpa de jaca acondicionada em recipiente cilíndrico. Foi utilizado o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita e condição de contorno do primeiro tipo variável para resolver numericamente a equação de difusão em coordenadas cilíndricas bidimensionais. A solução numérica foi aplicada na descrição da pasteurização de polpa de jaca. Foram desenvolvidos dois *softwares*, um para estimar a difusividade e outro para a solução do problema direto. Segundo o autor, os resultados se mostraram coerentes, quando comparados aos valores encontrados na literatura e válidos para o *software* desenvolvido que pôde ser utilizado para outras simulações.

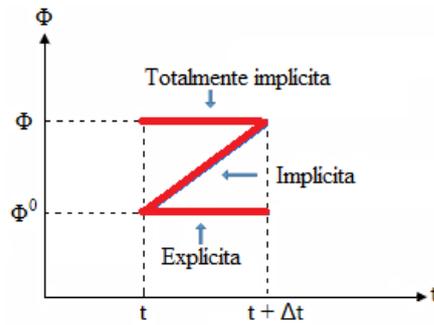
Na literatura existem ainda vários outros trabalhos que utilizam o MVF para resolver numericamente a equação de difusão. A seguir pode-se citar: Silva et al. (2007), Silva et al. (2008a), Silva, J. (2009), Silva, C. (2010), Cavalcanti et al. (2010), Farias, V., (2011), Silva, L. (2012), Silva Junior, (2012), Lins (2013), Demarque et al. (2015), Farias et al. (2015); Aires et al. (2018); Silva et al. (2018).

2.5.4.2 – Formulações explícitas, implícitas e totalmente implícitas

Em geral, em um método numérico é possível estabelecer as formulações: explícita, implícita e totalmente implícita. Isso de acordo com o tempo que é definido para representar a

grandeza de interesse ao se expressar as derivadas espaciais. A Figura 2.3 mostra as três possibilidades de interpolação no tempo.

Figura 2.3 – Formulações de interpolação no tempo.



Fonte: Silva, C. (2012).

A expressão que representa as três interpolações apresentadas na Figura 2.3 é dada por (MALISKA, 2012):

$$\Phi^0 = \theta\Phi + (1 - \theta)\Phi^0 \tag{2.31}$$

em que θ é o fator peso médio de ponderação.

Fazendo $\theta = 0$ na Equação (2.31), obtém-se a formulação explícita, em que a variável de interesse é avaliada no início do intervalo de tempo. Logo seu valor já é conhecido ($\Phi^0 = \Phi^0$). Desta forma, a discretização resulta em um conjunto de equações que podem ser resolvidas uma a uma. Assim, a variável de interesse para cada volume de controle pode ser determinada para o novo nível de tempo ($t + \Delta t$), sem a necessidade de que um sistema de equações seja resolvido. Daí a razão da denominação conjunto e não um sistema de equações. Existe nesta formulação uma limitação em relação ao tamanho do intervalo de tempo que deve ser seguido para progredir no tempo, de forma a manter a estabilidade da solução numérica (SILVA, W. 2009; MALISKA, 2012).

Alguns trabalhos de pesquisa são encontrados na literatura que usaram a formulação explícita para resolver a equação de difusão numericamente, como exemplo, cita-se: Carollo et al. (2012); Silva et al. (2015).

Na formulação implícita, $0 < \theta < 1$, a variável de interesse Φ que define as derivadas espaciais é uma média dos valores de Φ no início e no fim do intervalo de tempo. O mais conhecido método na formulação implícita é o de Crank-Nicolson (1947). Esse método consiste em adotar o valor Φ no volume de controle como sendo a média geométrica da variável no início do intervalo de tempo, Φ_p^0 , e no fim Φ_p (LINS, 2013).

Na resolução numérica da equação de difusão alguns trabalhos de pesquisa usaram a formulação implícita, entre eles, cita-se: Santos e Souto (2014), Dovich Filho (2015).

A formulação totalmente implícita, que será usada neste trabalho de pesquisa é visualizada na Equação (2.31) e destacada na Figura 2.4 ao se fazer $\theta = 1$. Nesta formulação a variável de interesse é definida no final do intervalo de tempo, diferenciando a vinculação das equações. E neste caso, tem que se resolver um sistema de equações para cada intervalo de tempo. Essa formulação é incondicionalmente estável para qualquer intervalo de tempo estipulado. Isso é uma vantagem, pois, pode-se avançar no tempo em intervalos sem um limite prefixado de magnitude (SILVA, C. 2012).

Lima (1999) apresentou soluções analíticas e numéricas da equação de difusão bidimensional para sólidos esferoidais prolatos com propriedades termofísicas constantes ou variáveis e condições de contorno de equilíbrio ou convectiva, com ou sem encolhimento, usando o método dos volumes finitos. A solução numérica utilizou o método dos volumes finitos com uma formulação implícita, e malhas ortogonais, geradas por expressões analíticas, válidas somente para elipsoides. Os modelos apresentados independem da natureza física do sólido. No entanto, o autor enfatizou a secagem de bananas, variedade “nanicão”. Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais da literatura que, segundo o autor foram consistentes.

No desenvolvimento de seu trabalho de pesquisa, Carmo (2004) exibiu soluções numéricas da equação de difusão, válidas para sólidos com geometria do tipo esferoidal oblata. Utilizando o método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita, o pesquisador levou em consideração o encolhimento dos corpos, bem como a variação nas propriedades termofísicas, além da condição de contorno convectiva. Os modelos formulados foram aplicados na descrição da secagem em multipasse (têmpera) de lentilhas e o autor

concluiu que os resultados são consistentes, na comparação dos dados experimentais com a simulação numérica.

Uma solução numérica da equação de difusão bidimensional transiente foi apresentada por Carmo e Lima (2008) para descrever a transferência de massa dentro de esferoides oblatos, considerando o coeficiente de difusão constante e condição de contorno convectiva. Utilizando o método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita, o pesquisador considerou as dimensões do sólido como os únicos parâmetros variáveis. O modelo foi validado com resultados analíticos encontrados na literatura e segundo os autores uma boa concordância foi observada. De acordo com os autores, o modelo matemático apresentado é consistente e pode ser utilizado para resolver outros problemas de difusão, desde que os corpos sejam aproximados para discos ou esferas e/ou outros casos com propriedades variáveis, quando pequenas modificações são feitas nos modelos.

Em sua pesquisa, Silva et al. (2010b) apresentaram uma solução numérica da equação de difusão com vistas a determinar o coeficiente de transferência convectivo de calor para frutas em forma esférica, usando dados experimentais da temperatura dentro das frutas ao longo do seu resfriamento. O método empregado foi o dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita. Na metodologia proposta, assume-se que a posição do termopar dentro da fruta é desconhecida e pode ser obtida através de várias simulações, supondo diferentes posições para este sensor. A posição do termopar é então determinada através da análise do indicador estatístico qui-quadrado, permitindo calcular o coeficiente de transferência convectivo de massa. A metodologia proposta foi aplicada a figos individuais, a tomates e laranjas, sendo a cinética de resfriamento descrita em detalhe para cada fruta. Em comparação com dados disponíveis na literatura, os autores afirmaram que os resultados encontrados para os parâmetros são coerentes, já que as discrepâncias entre os valores foram pequenas.

Silva et al. (2011) estudaram o efeito da representação geométrica de pepinos na simulação numérica da cinética de resfriamento. Conjecturaram que o modelo de difusão com condição de contorno do terceiro tipo descreve de forma satisfatória o arrefecimento, e que os parâmetros térmicos e físicos são constantes durante o processo. As geometrias utilizadas para representar o pepino foram: cilindro infinito, cilindro finito e elipsoide. A equação de difusão foi resolvida através do método de volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita,

usando coordenadas cilíndricas e generalizadas. O coeficiente de transferência de calor por convecção e a difusividade térmica foram determinados por meio de otimização, usando um método inverso. De acordo com os autores, o melhor modelo na representação da forma do pepino foi o elipsoide, mas o tempo exigido na sua otimização era cerca de 66 vezes maior do que o tempo para o cilindro infinito.

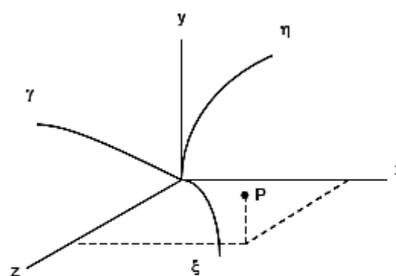
2.6 – Coordenadas generalizadas para a solução numérica de equação de difusão

A solução numérica de uma equação de difusão para um corpo com forma arbitrária requer um sistema de coordenadas adaptável a sua geometria. Assim deve-se transformar o sistema de eixos ortogonais para um sistema de eixos em que as coordenadas sejam generalizadas e não ortogonais. As coordenadas generalizadas foram estudadas por pesquisadores, tais como: (THOMPSON et al., 1982, BUTKOV, 1983; BOAS, 1983; SILVA, 2007; MALISKA, 2012), entre outros.

A Figura 2.5 mostra um ponto P que pode ser localizado por dois sistemas de eixos, ortogonais e não ortogonais. No sistema de eixos ortogonais o ponto P é localizado pelas coordenadas cartesianas x , y , z e no sistema de eixos não ortogonais pelas coordenadas generalizadas ξ , η , γ . O sistema de eixos em coordenadas generalizadas é também denominado de sistema transformado e possui eixos curvilíneos que podem ser dispostos em qualquer direção.

As coordenadas do ponto P da Figura 2.4 são transformadas de um sistema de eixo para outro pelas expressões apresentadas a seguir, denominadas métricas da transformação.

Figura 2.4 – Sistemas de eixos usado para identificar a localização do ponto P em coordenadas cartesianas e em coordenadas generalizadas.



Fonte: Silva, W. (2009).

2.6.1 – Métricas da transformação

As coordenadas cartesianas x, y, z do ponto P mostrado na Figura 2.4 estabelecem uma relação com as coordenadas generalizadas pelas expressões a seguir:

$$\xi = \xi(x, y, z) \tag{2.32}$$

$$\eta = \eta(x, y, z) \tag{2.33}$$

$$\gamma = \gamma(x, y, z) \tag{2.34}$$

Determinando as diferenciais totais das Equações (2.32) a (2.34) e organizando os termos, os resultados podem ser representados na forma matricial, da maneira a seguir:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

onde os termos do tipo r_s representam a derivada parcial de uma variável r em relação à variável s , isto é, r_s representa $\frac{\partial r}{\partial s}$.

Compactamente, a Equação (2.35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[DT] = [A][DF] \tag{2.36}$$

em que $[DT]$ é um vetor no sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η, γ) e é normalmente denominado de domínio transformado, e $[DF]$ é o seu correspondente no sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z), que é denominado de domínio físico.

Comparando as Equações (2.35) e (2.36) verifica-se que:

$$A = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Conhecidas as coordenadas do ponto P no domínio transformado e realizando um processo inverso ao que foi feito anteriormente é possível determinar suas coordenadas no domínio físico por meio das funções inversas:

$$x = x(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.38)$$

$$y = y(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.39)$$

$$z = z(\xi, \eta, \gamma), \quad (2.40)$$

Agora, determinando as diferenciais totais das Equações (2.38) a (2.40) e organizando os termos, os resultados podem ser representados na forma matricial, escrita como:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Compactamente a Equação (2.41) pode ser escrita no seguinte formato:

$$[DF] = [B][DT] \quad (2.42)$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Agora multiplicando a Equação (2.42) pela matriz inversa da matriz B dada por $[B]^{-1}$ e lembrando que $[B][B]^{-1}$ resulta na matriz identidade, obtém-se a relação:

$$[DT] = [B]^{-1}[DF] \quad (2.44)$$

Comparando-se as Equações (2.36) com (2.44) constata-se que:

$$[A] = [B]^{-1} \quad (2.45)$$

Lembrando que a inversa de uma matriz é igual a matriz dos cofatores dividida pelo determinante da matriz original, pode-se escrever:

$$[B]^{-1} = J \begin{bmatrix} (y_{\eta}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\eta}) & -(x_{\eta}z_{\gamma} - x_{\gamma}z_{\eta}) & (x_{\eta}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\eta}) \\ -(y_{\xi}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\xi}) & (x_{\xi}z_{\gamma} - x_{\gamma}z_{\xi}) & -(x_{\xi}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\xi}) \\ (y_{\xi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\xi}) & -(x_{\xi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\xi}) & (x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

em que:

$$J = \frac{1}{|B|} = |A| \quad (2.47)$$

é definido como o jacobiano da transformação. Como o jacobiano é igual ao inverso do determinante da matriz [B], logo pela identidade da Equação (2.45), o jacobiano deve ser igual também ao determinante da matriz [A].

Da Equação (2.37) e da Equação (2.47) pode-se escrever que:

$$J = \left[x_{\xi} (y_{\eta}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\eta}) - x_{\eta} (y_{\xi}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\xi}) + x_{\gamma} (y_{\xi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\xi}) \right]^{-1} \quad (2.48)$$

De acordo com a identidade definida pela Equação (2.45) e das Equações (2.36) e (2.48) as seguintes expressões são determinadas:

$$\xi_x = J (y_{\eta}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\eta}) \quad (2.49)$$

$$\xi_y = - J (x_{\eta}z_{\gamma} - x_{\gamma}z_{\eta}) \quad (2.50)$$

$$\xi_z = J (x_{\eta}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\eta}) \quad (2.51)$$

$$\eta_x = - J (y_{\xi}z_{\gamma} - y_{\gamma}z_{\xi}) \quad (2.52)$$

$$\eta_y = J(x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi) \quad (2.53)$$

$$\eta_z = -J(x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi) \quad (2.54)$$

$$\gamma_x = J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \quad (2.55)$$

$$\gamma_y = -J(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) \quad (2.56)$$

$$\gamma_z = J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (2.57)$$

As relações dadas nas Equações (2.49) a (2.57) são chamadas de métricas da transformação.

O teorema da função inversa garante a existência da inversa da transformação, sendo permitido calcular as métricas da transformação inversa. Essas métricas são dadas pelas expressões a seguir:

$$x_\xi = \frac{\eta_y \gamma_z - \eta_z \gamma_y}{J} \quad (2.58)$$

$$x_\eta = -\frac{\xi_y \gamma_z - \xi_z \gamma_y}{J} \quad (2.59)$$

$$x_\gamma = \frac{\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y}{J} \quad (2.60)$$

$$y_\xi = -\frac{\eta_x \gamma_z - \eta_z \gamma_x}{J} \quad (2.61)$$

$$y_\eta = \frac{\xi_x \gamma_z - \xi_z \gamma_x}{J} \quad (2.62)$$

$$y_\gamma = -\frac{\xi_x \eta_z - \xi_z \eta_x}{J} \quad (2.63)$$

$$z_\xi = \frac{\eta_x \gamma_y - \eta_y \gamma_x}{J} \quad (2.64)$$

$$z_\eta = -\frac{\xi_x \gamma_y - \xi_y \gamma_x}{J} \quad (2.65)$$

$$z_\gamma = \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{J} \quad (2.66)$$

Determinadas as métricas da transformação e as métricas da transformação inversa, isto é, as relações por meio das quais pode-se passar do sistema de eixos cartesianos para o sistema de eixos em coordenadas generalizadas e vice-versa, faz necessário determinar expressões neste novo sistema de coordenadas, tais como: comprimento, áreas, volumes e a distância de um ponto a um plano.

2.6.2 – Comprimentos, áreas e volumes em coordenadas generalizadas

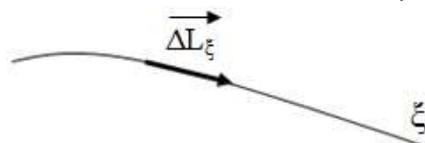
As deduções detalhadas para as equações que calculam comprimentos, áreas e volumes em coordenadas generalizadas são encontradas no texto de Silva (2007), Silva, W. (2009), Maliska (2012).

A seguir será apresentado um resumo para apresentar as expressões que calculam estas medidas.

2.6.2.1 – Comprimento ao longo de um eixo curvilíneo

A Figura 2.5 destaca um segmento situado no eixo curvilíneo ξ .

Figura 2.5 - Comprimento elementar ΔL_ξ no eixo curvilíneo ξ .



Fonte: Silva, W. (2009).

A expressão para o cálculo do comprimento da Figura 2.5 é dada por:

$$\Delta L_{\xi} = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \right] \Delta \xi \quad (2.67)$$

onde ΔL_{ξ} é o comprimento de um segmento ao longo do eixo ξ .

De maneira semelhante podem ser calculadas as distâncias elementares de ΔL_{η} e ΔL_{γ} ao longo dos eixos η e γ , respectivamente. Estas expressões são mostradas nas Equações (2.68) e (2.69) a seguir.

$$\Delta L_{\eta} = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} \right] \Delta \eta \quad (2.68)$$

$$\Delta L_{\gamma} = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2} \right] \Delta \gamma \quad (2.69)$$

onde:

ΔL_{η} é o comprimento de um segmento ao longo do eixo η .

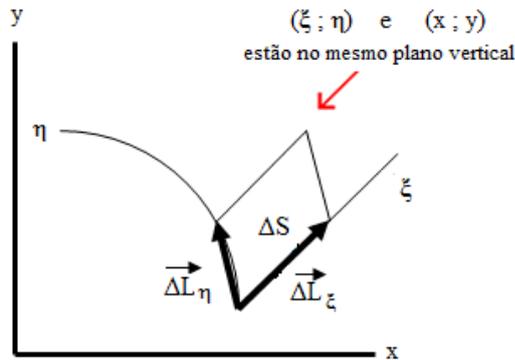
ΔL_{γ} é o comprimento de um segmento ao longo do eixo γ .

2.6.2.2 – Área definida por vetores elementares sobre eixos curvilíneos

Dados dois vetores num plano, a área da superfície por eles definida pode ser calculada como o módulo do produto vetorial entre eles.

Uma área definida por dois vetores elementares localizados no plano transformado $\xi\eta$ que está coincidindo com o plano físico xy é mostrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Área elementar ΔS definida pelos vetores elementares ΔL_ξ e ΔL_η .



Fonte: Silva, W. (2009).

A expressão para o cálculo da área do paralelogramo é dada por:

$$\Delta S = |\overrightarrow{\Delta L_\xi} \times \overrightarrow{\Delta L_\eta}| \tag{2.70}$$

Observando a Figura 2.6 e a Equação (2.70), pode-se escrever que:

$$\Delta S = \left(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \right) \Delta \xi \Delta \eta \tag{2.71}$$

O termo que aparece entre parênteses da Equação (2.71) é o inverso do jacobiano para uma situação bidimensional. Logo a área pode ser escrita da forma a seguir:

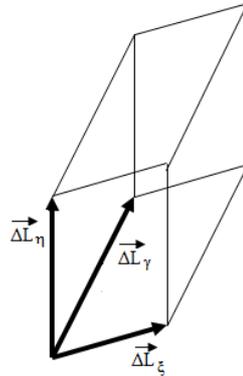
$$\Delta S = \frac{1}{J} \Delta \xi \Delta \eta \tag{272}$$

e $\Delta \xi \Delta \eta$ pode ser definido como a área no domínio transformado.

2.6.2.3 – Volume definido por vetores elementares sobre eixos curvilíneos

O volume pode ser calculado como o produto misto dos três vetores definidos nas arestas de um sólido, conforme pode ser visto na Figura 2.7, que mostra um paralelepípedo de arestas ΔL_ξ , ΔL_η e ΔL_γ .

Figura 2.7 - Paralelepípedo regular de volume elementar ΔV com arestas ΔL_ξ , ΔL_η e ΔL_γ .



Fonte: Silva, W. (2009).

Assim, o volume do sólido pode ser dado pela expressão a seguir:

$$\Delta V = |\overrightarrow{\Delta L}_\xi \cdot (\overrightarrow{\Delta L}_\eta \times \overrightarrow{\Delta L}_\gamma)| \quad (2.73)$$

Usando métricas, a Equação (2.73) pode ser escrita como:

$$\Delta V = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{vmatrix} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \quad (2.74)$$

O determinante da Equação (2.74) é identificado como o inverso do Jacobiano e assim, a expressão para o volume pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\Delta V = \frac{1}{J} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \quad (2.75)$$

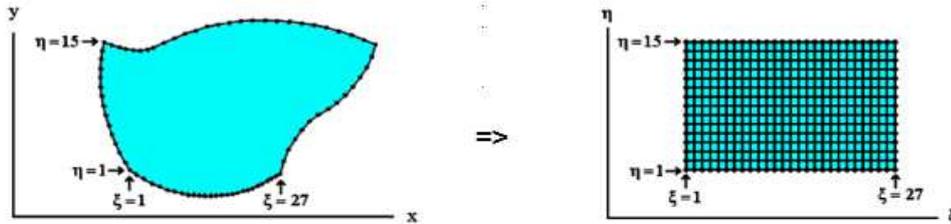
e $\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma$ pode ser definido como o volume no domínio transformado.

2.7 – Mapeamento da geometria

De acordo com Maliska (2012), a experiência no tratamento de escoamentos acumulada pelos pesquisadores na área de diferença finitas e a demanda de engenharia para simulações de escoamentos em geometrias complexas teve como consequência no final da década de 70, o início de uma forte atividade de pesquisa no desenvolvimento de métodos procurando expandir para problemas complexos as metodologias de mapeamento empregadas em mecânica dos fluidos, mas restrita a operadores simples. A possibilidade de encontrar a transformação,

mesmo numérica, entre o sistema de coordenadas original, geralmente o cartesiano, e o sistema de coordenadas generalizadas, coincidente com a geometria irregular, permite o mapeamento da geometria irregular, escrita no sistema (x, y, z) , em uma geometria regular no sistema (ξ, η, γ) , conforme mostra a Figura 2.8 para o caso bidimensional (MALISKA, 2012).

Figura 2.8 – (a) Plano de geometria irregular; (b) Plano de geometria regular.



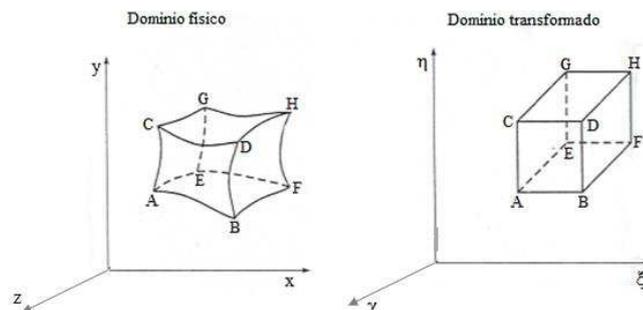
Fonte: Silva, W. (2009).

2.7.1 - Domínio físico e domínio transformado

O domínio físico é aquele que apresenta a geometria irregular que geralmente é descrito por um sistema de eixos ortogonais. O domínio transformado apresenta a geometria regular, que foi originada da geometria irregular, e via de regra, é descrita por um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas.

É importante ressaltar que, qualquer que seja a geometria irregular do sólido no espaço físico, a sua representação no domínio transformado será sempre a de um paralelepípedo, para o caso tridimensional, conforme pode ser visto na Figura 2.9. Em outras palavras, as geometrias são distintas, mas possuem um mesmo domínio transformado ou computacional, sendo essa a grande vantagem, do ponto de vista de implementação do programa, em se usar coordenadas generalizadas (MALISKA, 2012).

Figura 2.9 – (a) Domínio Físico; (b) Domínio Transformado.



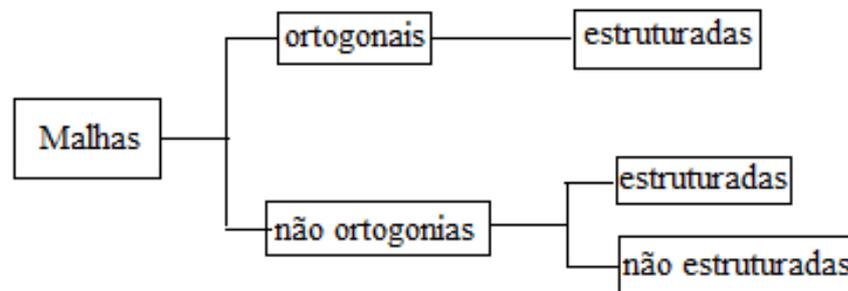
Fonte: Maliska, (2012).

2.7.2 – Geração de malhas

A discretização do domínio computacional, isto é, a geração da malha, é a tarefa mais complexa do processo de simulação numérica. Os algoritmos de geração das malhas são conceitualmente simples, mas de difícil implementação computacional em função da característica espacial das geometrias a serem discretizadas.

Os tipos de malhas podem ser agrupados, conforme mostrado na Figura 2.10:

Figura 2.10 – Tipos de malhas.

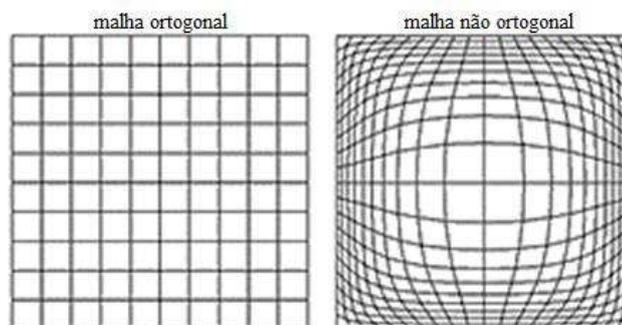


Fonte: Maliska, (2012)

2.7.2.1 – Malhas estruturadas e não-estruturadas

Malhas estruturadas são resultantes da discretização de volumes de controle seguindo um sistema de coordenadas generalizadas. Nestas malhas cada volume interno tem sempre o mesmo número de vizinhos, conforme mostrado na Figura 2.11.

Figura 2.11 – Malhas estruturadas.

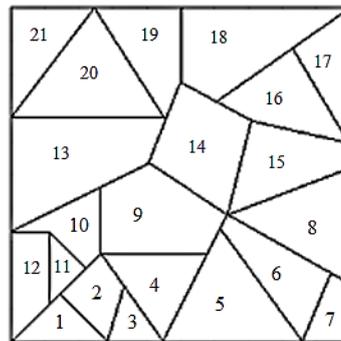


Fonte: Silva, W. (2009).

As malhas estruturadas têm a vantagem de permitir fácil ordenação de seus volumes e, como consequência, obter diagonais que permitem *softwares* mais fáceis de serem desenvolvidos e mais eficientes.

Muitos problemas reais, em função da complexidade de sua geometria, não permitem que malhas estruturadas sejam sempre empregadas. Nestes casos, as malhas não-estruturadas são usadas. Estas malhas se adaptam com mais facilidade e são mais aptas para discretizar geometrias irregulares com cantos e saliência. Entretanto ela apresenta dificuldade na ordenação de seus volumes. A Figura 2.12 apresenta uma malha não-estruturada em que é possível perceber a dificuldade de escolher um caminho de ordenação de seus volumes.

Figura 2.12 – Malha não-estruturada.



Fonte: Maliska (2012).

Por exemplo, para a ordenação feita, o volume 20 está ligado aos volumes 13, 19, e 21, enquanto que, o volume 14 está adjacente aos volumes 9, 13, 15, 16, 18 e 19. Demonstrando que o volume 20 possui três vizinhos e o volume 14 possui seis vizinhos. Para o caso do volume 20 a banda da matriz tem um tamanho de 13 a 21 e para o caso do volume 14 o tamanho da banda de matriz é de 9 a 19. Essa variação no tamanho da banda matriz impossibilita a aplicação de métodos de solução de sistemas lineares (MALISKA, 2012).

Os métodos de geração de malhas podem ser classificados em algébricos e diferenciais. Os algébricos usam diferentes tipos de interpolação e são extremamente flexíveis e rápidos. Os diferenciais, que utilizam sistemas de equações diferenciais, são mais gerais, mas, em compensação, apresentam tempo de computação consideravelmente maior e elaboração matemática mais complexa (MALISKA, 2012).

Neste trabalho é pesquisado o fenômeno da difusão que é regido por equações parciais elípticas, e por este motivo, na geração das malhas foi utilizado o *software 2D Grid Generation* desenvolvido por Silva (2008a), cuja base de construção do software são as equações elípticas de Laplace e Poisson as quais incluem termos fontes para permitir a atração de linhas onde for solicitado. Essas equações são escritas como:

$$\text{Laplace} \begin{cases} \nabla^2 \xi = 0 & (2.76) \\ \nabla^2 \eta = 0 & (2.77) \end{cases}$$

$$\text{Poisson} \begin{cases} \nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) & (2.78) \\ \nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) & (2.79) \end{cases}$$

Para encerrar este capítulo, cita-se a seguir alguns trabalhos que utilizaram em suas pesquisas, coordenadas generalizadas para resolver numericamente a equação de difusão e consideraram a geometria arbitrária dos corpos.

Maliska (1998), desenvolveu o *software Transcal*, cujo objetivo era disponibilizar à comunidade científica soluções da equação de difusão quando o problema físico envolver geometria arbitrária bidimensional. Este software é utilizado de forma geral para qualquer estudo que envolva problemas difusivos, não tendo sido observado na literatura aplicação específica sobre secagem (SILVA, 2007).

Silva et al. (2008b) realizaram um trabalho de pesquisa em que foi proposto uma solução numérica para a equação de difusão aplicada aos sólidos obtidos através da revolução de geometrias arbitrárias bidimensionais, usando coordenadas generalizadas e malhas não ortogonais. Para isso, a equação de difusão foi discretizada e resolvida utilizando o método dos volumes finitos, com formulação totalmente implícita, com condição de contorno do terceiro tipo. A solução proposta explora as condições de simetria e é justificada pela redução do esforço computacional exigido em comparação com o método tradicional, com o uso de malhas tridimensionais. A solução proposta foi aplicada para descrever a secagem de banana e, para as condições de secagem admitidas, houve uma boa concordância entre os resultados obtidos através da solução proposta e aqueles obtidos através de soluções disponíveis na literatura.

Farias, V. (2011) utilizou coordenadas generalizadas para discretizar a equação de difusão usando condições de contorno de: equilíbrio e convectiva, com o objetivo de fazer um estudo teórico e experimental da difusão, em três dimensões, para sólidos com geometria arbitrária, usando o método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita. Apresentou solução numérica da equação de difusão tridimensional em regime transiente. O sistema de equações obtido para uma dada malha estruturada foi resolvido pelo método Gauss-Seidel para cada passo no tempo. Desenvolveu um código computacional em FORTRAN, usando o estúdio CVF 6.6.0, na plataforma Windows Vista. Validou a solução proposta usando soluções analíticas e numéricas da equação de difusão para várias geometrias, que permitiu validar malhas ortogonais e não-ortogonais. Usou a secagem de telhas para as seguintes condições experimentais: temperaturas de 55,6, 69,7, 82,7 e 98,6 °C com teor de umidade inicial variando de 0,2345 até 0,2405 (b.s.) para aplicar na simulação de um código computacional. A simulação tornou possível determinar a difusividade efetiva em função da razão de umidade e da temperatura do ar de secagem e também o valor do coeficiente de transferência convectiva de massa correspondente para cada temperatura. Segundo a autora, a análise e comparação dos resultados mostraram que a solução proposta forneceu resultados coerentes para todos os casos investigados.

Wu et al. (2004) em seu trabalho de pesquisa produziram um modelo para descrever a difusão simultânea de calor e massa durante o processo de secagem de arroz em camada delgada. Para resolver a equação de difusão, os autores empregaram coordenadas generalizadas e utilizaram o método de volumes finitos, com malhas estruturadas ortogonais, válidas para elipsoides, em que essas geometrias são consideradas tridimensionais. Segundo os autores o modelo apresentado pode ser usado para descrever o processo de secagem em malhas ortogonais sem termos cruzados.

O trabalho de pesquisa de Silva (2007) foi realizado com o objetivo de estudar o fenômeno da difusão de calor ou de massa em sólidos com forma arbitrária, apresentar a solução numérica da equação que descreve o fenômeno para sólidos obtidos por extrusão e por revolução de uma área geratriz. A equação de difusão foi escrita em coordenadas generalizadas, discretizada e resolvida pelo método dos volumes finitos com uma formulação totalmente implícita e condições de contorno do primeiro, segundo e terceiro tipo, com propriedades constantes ou variáveis para o meio, incluindo variações dimensionais. O autor desenvolveu o

pacote computacional *Difusion RE* e aplicou na simulação da cinética de secagem de membranas cerâmicas em formato de tubos cilíndricos, usados em processos de filtragem nas condições experimentais de: temperatura variando de 45 a 105 °C, teor de umidade inicial de 25 a 30% e umidade relativa do ar de 58%. Os resultados numéricos comparados com os resultados experimentais possibilitou determinar uma expressão para o coeficiente de difusão em função da razão de umidade e da temperatura do ar de secagem, bem como o valor do coeficiente de transferência convectiva de massa correspondente a cada temperatura estudada. Segundo o autor, ao realizar diversas simulações com o software desenvolvido na plataforma Windows, os resultados obtidos, mostraram-se teoricamente consistentes e coerentes com os valores existentes na literatura.

Farias et al. (2015) realizaram um trabalho de pesquisa com o objetivo de estudar a difusão transiente de massa em sólidos com uma forma arbitrária destacando a condição de contorno do terceiro tipo. Para isso, apresentaram a solução numérica para a equação de difusão transiente tridimensional, discretizada em coordenadas generalizadas. Na discretização, foi utilizado o método de volumes finitos com uma formulação totalmente implícita. Foi feita uma aplicação para secagem de telhas. Foram utilizados três modelos para descrever o processo de secagem: (1) o volume V e a difusividade efetiva de massa D foram considerados constantes para uma condição de contorno do primeiro tipo; (2) V e D foram também considerados constantes para a condição de contorno do terceiro tipo; (3) V e D foram considerados variáveis para a condição de contorno do terceiro tipo. Para todos os modelos, o coeficiente de transferência convectiva de massa h foi considerado constante. Segundo os autores, após as análises dos resultados foi possível afirmar que o modelo 3 descreve o processo de secagem melhor que os outros modelos.

Na literatura consultada existem outros trabalhos de pesquisas em que a geometria arbitrária dos corpos foi considerada. Entre estes trabalhos pode-se citar: Silva, (2007) que estudou a difusão de calor ou massa em sólidos com geometria arbitrária para condição de contorno de primeiro, segundo e terceiro tipo; Farias et al. (2013) realizaram estudo da difusão de massa em sólido com geometria arbitrária para condição de contorno do primeiro tipo. Em outra pesquisa, Farias et al. (2015) desenvolveram um código computacional para resolver numericamente a equação de difusão em coordenadas generalizadas para condição de contorno convectiva. Com o objetivo de mostrar o potencial e a versatilidade do código desenvolvido, os

pesquisadores aplicaram-no na secagem de protótipos de telhas cerâmicas fabricadas em laboratório.

Pode-se observar, portanto, que apesar de se encontrar inúmeros trabalhos na linha de pesquisa de transferência de calor e massa, poucos trabalhos abordaram a difusão tridimensional em corpos com geometria arbitrária usando coordenadas generalizadas e malhas não ortogonais através do método dos volumes finitos, particularmente na área de secagem de materiais cerâmicos. No trabalho de pesquisa realizado por Farias, V. (2011), por exemplo, foram usados protótipos de telhas fabricada em laboratório com dimensões reduzidas em relação às telhas usadas na construção civil. Somando a este fato, as larguras das telhas não sofreram alterações ao longo do comprimento. Assim, a malha tridimensional foi obtida por extrusão de uma malha bidimensional ao longo do comprimento. Os ensaios de secagem foram feitos em uma estufa sem variação do fluxo de ar. Na pesquisa desenvolvida, abordou-se a difusão tridimensional com geometria arbitrária e coordenadas generalizadas, porém a telha usada no experimento foi do tipo canal, fabricada em uma cerâmica com fins comerciais, cuja largura e espessura variam ao longo do comprimento. A secagem foi feita em um secador tipo bandeja com variação de temperatura e variação do fluxo de ar.

Assim, diante do exposto, esta pesquisa deverá disponibilizar para a comunidade científica, importantes subsídios sobre a difusão tridimensional em sólidos com geometria complexa considerando qualquer tipo de geometria.

CAPÍTULO 3 – MATERIAIS E MÉTODOS

No Capítulo 2 foram apresentadas as relações de transformação através das quais as coordenadas de um sistema cartesiano podem ser convertidas em coordenadas generalizadas. Além disso, foram apresentadas também as expressões para os cálculos de comprimentos, áreas e volumes de figuras regulares representadas em um sistema de eixos curvilíneos, nos quais os vetores estão localizados na origem e dispostos sobre os eixos do sistema (Maliska, 2012). Nesses casos, os vetores são os lados ou arestas das figuras geométricas que representam o produto sob análise. Portanto, a intersecção dos vetores elementares que definem a região de interesse a ser trabalhada coincide com o cruzamento das linhas que delimitam a referida região, tornando-a uma figura regular.

Neste trabalho, o problema de difusão abordado ocorre num domínio arbitrário tridimensional. Torna-se necessário, então, generalizar esses cálculos para um sólido irregular, para que seja possível calcular o volume ou a área de corpos com qualquer forma geométrica. Uma abordagem dessa natureza com uma modelagem matemática complexa pode ser encontrado em Silva (2007) e Farias, V. (2011), sendo apresentada também neste capítulo.

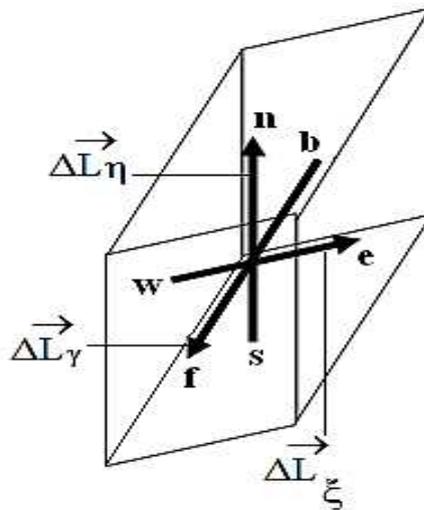
3.1 – Cálculo de volumes, áreas e distâncias em coordenadas generalizadas em três dimensões

A expressão utilizada para calcular a área usando a Equação (2.73) pressupõe ξ e η funções apenas de x e y , e assim elas só servem para o caso onde o quadrilátero regular está localizado no plano xy , que por sua vez coincide com o plano transformado $\xi\eta$ e os vetores que definem as áreas são os lados do quadrilátero em estudo. Assim, o cálculo para volumes e áreas deve ser generalizado e, portanto, considerar que as coordenadas ξ , η e γ sejam funções de x , y e z . Nesses casos, as figuras geométricas (superfície ou sólido) podem ser regulares ou irregulares, o que permite calcular áreas e volumes para corpos com qualquer forma geométrica.

3.1.1 – Volume de um sólido qualquer

Para generalizar o cálculo de volume, considere a situação mostrada na Figura 3.1, em que os vetores que definem o volume se originam do ponto médio de uma das faces e sua extremidade está localizada na face oposta.

Figura 3.1 – Volume elementar ΔV no domínio transformado.



Fonte: Silva, W. (2009).

A partir da observação da Figura 3.1, pode-se determinar a expressão para se calcular o volume de um volume elementar usando coordenadas generalizadas. Observa-se que a interseção dos vetores que definem as três direções no domínio transformado não coincide com nenhum vértice do volume de controle, mas ocorre no centro do volume de controle, denominado ponto nodal.

As expressões para os vetores $\Delta\vec{L}_\xi$, $\Delta\vec{L}_\eta$ e $\Delta\vec{L}_\gamma$ nas direções ξ , η e γ , respectivamente, são dadas por:

Direção: oeste – leste

$$\Delta\vec{L}_\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \hat{k} \right) \Delta\xi \quad (3.1)$$

Direção: sul – norte

$$\Delta\vec{L}_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \hat{k} \right) \Delta\eta \quad (3.2)$$

Direção: atrás – frente

$$\Delta \vec{L}_\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \gamma} \hat{k} \right) \Delta \gamma \quad (3.3)$$

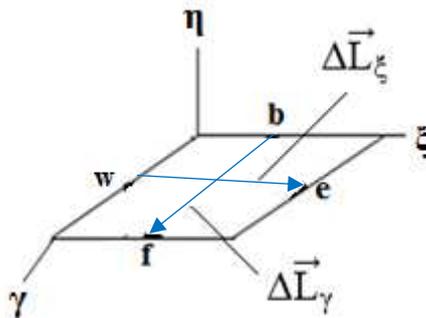
O módulo do produto misto dos três vetores é interpretado como o volume do sólido definido por tais vetores. Logo, o seu valor é calculado pela Equação (3.4):

$$\Delta V = |\Delta \vec{L}_\xi \cdot (\Delta \vec{L}_\eta \times \Delta \vec{L}_\gamma)| \quad (3.4)$$

3.1.2 – Área de um sólido qualquer

O quadrilátero em estudo está localizado num plano situado em qualquer parte do espaço e os vetores que definem o plano são direcionados do ponto médio de um dos lados ao ponto médio do lado oposto, conforme pode ser visto na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Quadrilátero de área elementar ΔS no plano transformado $\xi\gamma$.



Fonte: Autoria própria

Observa-se que os vetores que definem a área elementar, $\Delta \vec{L}_\xi$ e $\Delta \vec{L}_\gamma$ estão localizados dentro da figura geométrica. As expressões dos vetores $\Delta \vec{L}_\xi$ e $\Delta \vec{L}_\gamma$ são mostradas nas Equações (3.5) e (3.6), a seguir.

Direção: oeste – leste

$$\Delta \vec{L}_\xi = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \hat{k} \right) \Delta \xi \quad (3.5)$$

Direção: atrás – frente

$$\Delta\vec{L}_\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \gamma} \hat{k} \right) \Delta\gamma \quad (3.6)$$

O produto vetorial dos vetores definidos por $\Delta\vec{L}_\xi$ e $\Delta\vec{L}_\gamma$ é dado pela Equação 3.7.

$$\Delta\vec{L}_\xi \times \Delta\vec{L}_\gamma = (y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) \Delta\xi \Delta\gamma \hat{i} + (z_\xi x_\gamma - x_\xi z_\gamma) \Delta\xi \Delta\gamma \hat{j} + (x_\xi y_\gamma - y_\xi x_\gamma) \Delta\xi \Delta\gamma \hat{k} \quad (3.7)$$

Portanto, a área de qualquer quadrilátero, situado em qualquer parte do espaço formado pelas linhas ξ e γ , pode ser calculada como o módulo do produto vetorial, conforme descrito pela Equação (3.8).

$$\Delta S = |\Delta\vec{L}_\xi \times \Delta\vec{L}_\gamma| \quad (3.8)$$

Assim, a expressão final para o cálculo da área é dada pela Equação (3.9):

$$\Delta S = \sqrt{(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi)^2 + (z_\xi x_\gamma - x_\xi z_\gamma)^2 + (x_\xi y_\gamma - y_\xi x_\gamma)^2} \Delta\xi \Delta\gamma \quad (3.9)$$

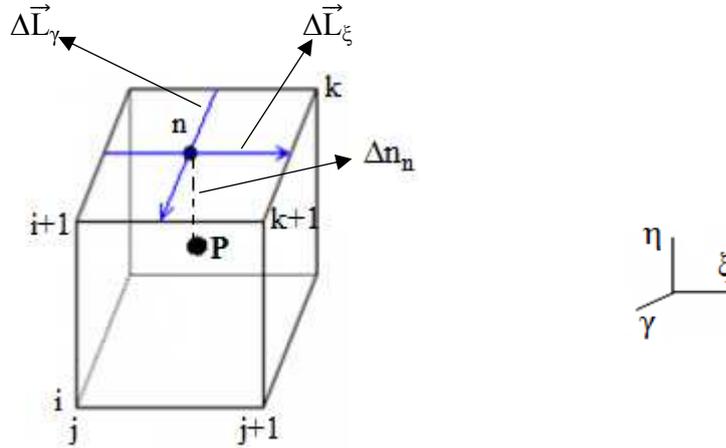
As expressões do volume e da área mostram que o volume continua sendo interpretado pelo módulo do produto misto dos três vetores elementares e a área pelo módulo do produto vetorial dos dois vetores elementares que definem o quadrilátero da figura. Observa-se, portanto que o sistema de coordenadas pode mudar, mas os conceitos físicos continuam valendo independente do sistema.

3.1.3 – Distância da face norte ao ponto nodal P

Farias, V. (2011) demonstrou como se calcula a distância da face oeste ao ponto nodal P em um volume de controle. Seguindo o mesmo roteiro pode-se mostrar, por exemplo, como se calcula a distância da face norte ao ponto nodal P.

Na Figura 3.3 é apresentado um volume de controle, destacando a face norte no domínio transformado, delimitado pelas linhas $\xi = j$, $\xi = j+1$, $\eta = i$, $\eta = i+1$, $\gamma = k$ e $\gamma = k+1$.

Figura 3.3 - Volume de controle interno no domínio transformado delimitado pelos planos $\xi = j, \xi = j+1, \eta = i, \eta = i+1, \gamma = k$ e $\gamma = k+1$: destaque para a distância entre a face norte e o ponto nodal P.



Fonte: Autoria própria.

Para calcular a área da face norte deve-se utilizar a Equação (3.8) devidamente adaptada:

$$\Delta S_n = \left| \Delta \vec{L}_\xi^n \times \Delta \vec{L}_\gamma^n \right| \quad (3.10)$$

que resulta em:

$$\Delta S_n = \sqrt{\left(x_\xi^n y_\gamma^n - x_\gamma^n y_\xi^n \right)^2 + \left(y_\xi^n z_\gamma^n - y_\gamma^n z_\xi^n \right)^2 + \left(x_\gamma^n z_\xi^n - x_\xi^n z_\gamma^n \right)^2} \Delta \xi \Delta \gamma \quad (3.11)$$

onde o subscrito “n” no membro da esquerda e o sobrescrito “n” no membro da direita representam a face norte.

Daí o vetor unitário perpendicular à face norte pode ser calculado pela expressão:

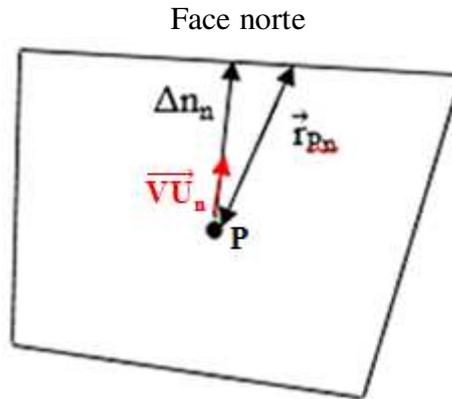
$$\vec{VU}_n = \frac{\Delta \vec{L}_\gamma^n \times \Delta \vec{L}_\xi^n}{\left| \Delta \vec{L}_\gamma^n \times \Delta \vec{L}_\xi^n \right|} \quad (3.12)$$

Identificando o denominador como a área da face norte, obtém-se:

$$\vec{\nabla}U_n = \frac{\Delta\vec{L}_\gamma \times \Delta\vec{L}_\xi}{\Delta S_n} \quad (3.13)$$

A distância da face norte ao ponto nodal P, representada por Δn_n é calculada a partir do produto escalar apresentado na Equação (3.4):

Figura 3.4 - Perfil de um volume de controle interno de um sólido com geométrica arbitrária no domínio físico.



Fonte: Autoria própria.

$$\Delta n_n = |\vec{r}_{Pn} \cdot \vec{\nabla}U_n| \quad (3.14)$$

em que \vec{r}_{Pn} representa o vetor distância entre um ponto qualquer da face norte, com coordenadas (x^n, y^n, z^n) e o ponto nodal P, com coordenadas (x^P, y^P, z^P) dado por:

$$\vec{r}_{Pn} = (x^n - x^P)\hat{i} + (y^n - y^P)\hat{j} + (z^n - z^P)\hat{k} \quad (3.15)$$

Substituindo as Equações (3.13) e (3.15) na Equação (3.14), obtém-se a expressão final para Δn_n :

$$\Delta n_n = \left| (x^n - x^P) \left(y_\xi^n z_\gamma^n - y_\gamma^n z_\xi^n \right) + (y^n - y^P) \left(x_\gamma^n z_\xi^n - x_\xi^n z_\gamma^n \right) + (z^n - z^P) \left(x_\xi^n y_\gamma^n - x_\gamma^n y_\xi^n \right) \right| \left| \frac{\Delta \xi \Delta \gamma}{\Delta S_n} \right| \quad (3.16)$$

A Equação (3.16) pode ser adaptada e utilizada para calcular a distância do ponto nodal P a qualquer face.

3.2 – Fluxo de uma grandeza em uma área curvilínea elementar

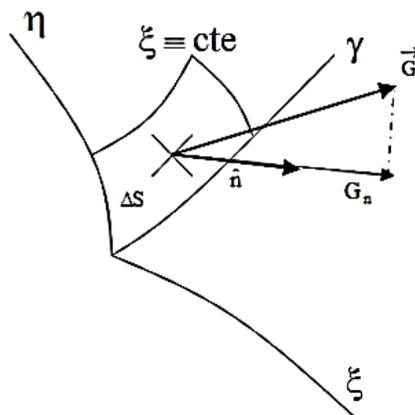
Sabe-se que a expressão geral para o fluxo ϕ' de uma grandeza vetorial \vec{G} que passa através de uma área ΔS é dada por:

$$\phi' = \int_{\Delta S} \vec{G} \cdot \vec{n} dS \tag{3.17}$$

onde \vec{n} é o vetor unitário perpendicular à área ΔS .

O conceito de fluxo instituído na Equação (3.17) será usado no sistema de eixos em coordenadas generalizadas, conforme outros autores já usaram, tais como: Silva (2007); Silva (2009); Farias, V. (2011); Maliska (2012). Na Figura 3.5 apresenta-se a grandeza vetorial \vec{G} e a sua componente G_n , perpendicular a uma área curvilínea situada na superfície definida pelas linhas η e γ ($\xi = \text{constante}$).

Figura 3.5 – Área curvilínea situada na superfície definida pelas linhas η e γ ($\xi = \text{cte}$), a grandeza \vec{G} e sua componente na direção normal, G_n .



Fonte: Silva, W. (2009).

Examinando a Figura 3.5 é possível ver que a projeção de \vec{G} na direção \hat{n} é perpendicular ao plano formado por η e γ é dada por:

$$G_n = \vec{G} \cdot \hat{n} \tag{3.18}$$

Enquanto a Equação (3.17) mostra uma expressão para o conceito geral de fluxo, a Equação (3.18) designa a expressão do fluxo ϕ'' por unidade de área, isto é:

$$\varphi'' = G_n = \vec{G} \cdot \hat{n} \quad (3.19)$$

Assim, tem-se que o fluxo da grandeza \vec{G} para uma área elementar ΔS pode ser calculado pela expressão:

$$\varphi' = \varphi'' \Delta S = \vec{G} \cdot \hat{n} \Delta S \quad (3.20)$$

Neste estudo, a componente G_n de interesse é o fluxo difusivo por unidade de área, da grandeza definida pela variável Φ , dada por:

$$G_n = \varphi'' = -\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (3.21)$$

Agora, o fluxo por difusão da grandeza Φ numa área ΔS pode ser reescrito do seguinte modo:

$$\varphi' = -\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Delta S \quad (3.22)$$

Tendo sido instituído a generalização para o cálculo de áreas, volumes e distâncias e apresentado a expressão para o fluxo a tarefa agora é apresentar como converter a equação de conservação do sistema de coordenadas cartesianas, para o sistema de coordenadas generalizadas, o que será feito na seção seguinte.

3.3 – Transformação da equação de difusão de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas

A equação que descreve um problema de transporte puramente difusivo, na forma diferencial em coordenadas cartesianas é dada pela expressão abaixo:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S^\Phi \quad (3.23)$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma (Silva, W. 2009; Maliska, 2012):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = S^\Phi \quad (3.24)$$

em que

$$Q = \lambda\Phi \quad (3.25)$$

$$E = -\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (3.26)$$

$$F = -\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (3.27)$$

$$G = -\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (3.28)$$

Nas Equações (3.25) a (3.28), a variável dependente é a grandeza genérica Φ , enquanto x , y , z e t são as variáveis independentes. Para escrever a equação de conservação no domínio transformado, definido pelas variáveis independentes ξ , η , γ e τ , onde τ é o tempo no domínio transformado, é preciso usar as métricas descritas pelas Equações (2.49) a (2.57) do Capítulo 2. Estas transformações podem ser encontradas com detalhes em, Silva (2007); Silva, W. (2009) e Maliska (2012).

Feitas as devidas conversões seguidas de várias manipulações matemáticas e organizando os termos, obtém-se a equação de difusão em coordenadas generalizadas, no espaço tridimensional, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\lambda\Phi}{J} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} \frac{\partial\Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} \frac{\partial\Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} \frac{\partial\Phi}{\partial \gamma} \right) J\Gamma^\Phi \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\alpha_{21} \frac{\partial\Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} \frac{\partial\Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} \frac{\partial\Phi}{\partial \gamma} \right) J\Gamma^\Phi \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\left(\alpha_{31} \frac{\partial\Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} \frac{\partial\Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} \frac{\partial\Phi}{\partial \gamma} \right) J\Gamma^\Phi \right] + \frac{S^\Phi}{J} \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que:

$$\alpha_{11} = \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{J^2} \quad (3.30)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}{J^2} \quad (3.31)$$

$$\alpha_{33} = \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{J^2} \quad (3.32)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z}{J^2} \quad (3.33)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{\xi_x \gamma_x + \xi_y \gamma_y + \xi_z \gamma_z}{J^2} \quad (3.34)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{\eta_x \gamma_x + \eta_y \gamma_y + \eta_z \gamma_z}{J^2} \quad (3.35)$$

Os termos que contém α_{ij} , com i diferente de j , são termos difusivos oriundos da não ortogonalidade da malha. E o jacobiano J que aparece nas Equações (3.30) a (3.35) é definido pela Equação (2.48) do Capítulo 2.

Os termos α_{ij} são definidos pelas métricas de transformação expressadas pelas Equações (2.49) a (2.66). A Equação (3.29) fica assim definida e pronta para ser discretizada.

3.3.1 – Linearização do termo fonte

Antes da discretização da equação de difusão deve-se fazer a linearização do termo fonte.

A representação das equações de conservação muitas vezes desloca termos importantes para o termo fonte S^ϕ . Nesses casos, cuidados especiais devem ser tomados para que o processo iterativo de solução dos sistemas de equações não divirja. A primeira regra a ser seguida é procurar fazer com que o termo fonte seja levado em consideração o mais implicitamente

possível. Isso significa não o manter constante ao longo do passo iterativo ou passo no tempo. Uma forma de fazer isso é linearizá-lo, tal que a variável em questão, presente no termo fonte, atue implicitamente e não seja apenas substituída pelo seu último valor disponível (Silva, W. 2009; Maliska, 2012). Assim, dado um termo fonte:

$$S^\Phi = f(\Phi) \tag{3.36}$$

a sua linearização pode ser feita por expansão em série de Taylor. Os detalhes do procedimento matemático podem ser encontrados em Silva, W. (2009). O objetivo é encontrar uma linearização do tipo:

$$S^\Phi = S_C + S_P \Phi \tag{3.37}$$

em que S_C e S_P são dados por:

$$S_C = f(\Phi^*) - \left. \frac{df(\Phi)}{d\Phi} \right|_{\Phi=\Phi^*} \tag{3.38}$$

$$S_P = \left. \frac{df(\Phi)}{d\Phi} \right|_{\Phi=\Phi^*} \tag{3.39}$$

A segunda regra é a imposição de que S_P seja negativo. Caso S_P seja positivo, é necessário criar artificialmente uma linearização impondo um valor negativo para S_P .

A discretização da Equação (3.29) será feita na seção seguinte.

3.4 – Discretização da equação de difusão tridimensional em coordenadas generalizadas

O método empregado na discretização das equações foi o dos volumes finitos, que consiste em dividir o domínio estudado em pequenos volumes, denominados volumes de controle, com cada volume de controle sendo representado por um ponto nodal, P.

A equação diferencial é integrada sobre o volume de controle, no espaço e no tempo e o resultado é a equação discretizada contendo o valor de Φ , a variável de interesse, nos pontos

nodais de cada volume de controle (PATANKAR, 1980; SILVA, W. 2009; FARIAS, V. 2011; MALISKA, 2012). Assim, a equação discretizada obtida desta forma satisfaz a conservação da propriedade em questão (massa ou energia) em nível de volumes de controle.

A formulação utilizada foi a totalmente implícita, isto é, a variável Φ de todos os volumes de controle deve ser avaliada no fim do intervalo de tempo. A razão da escolha desta formulação é que a solução se torna incondicionalmente estável para qualquer intervalo de tempo. (SILVA, W. 2009; MALISKA 2012; FARIAS et al. 2013).

3.4.1 – Integração das equações

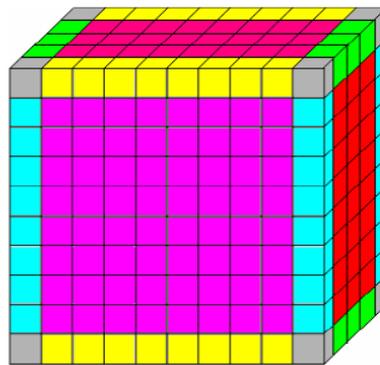
Após a integração dos termos da equação de difusão em coordenadas generalizadas tridimensional, no espaço $\Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma$ e no tempo $\Delta\tau$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_p\Phi_p - \lambda_p^0\Phi_p^0}{J_p} \frac{\Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\tau} &= \alpha_{11e}J_e\Gamma_e^\Phi\Delta\eta\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_e + \alpha_{12e}J_e\Gamma_e^\Phi\Delta\eta\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_e + \alpha_{13e}J_e\Gamma_e^\Phi\Delta\eta\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right|_e - \\
 &- \alpha_{11w}J_w\Gamma_w^\Phi\Delta\eta\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_w - \alpha_{12w}J_w\Gamma_w^\Phi\Delta\eta\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_w - \alpha_{13w}J_w\Gamma_w^\Phi\Delta\eta\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right|_w + \alpha_{21n}J_n\Gamma_n^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_n \\
 &+ \alpha_{22n}J_n\Gamma_n^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_n + \alpha_{23n}J_n\Gamma_n^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right|_n - \alpha_{21s}J_s\Gamma_s^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_s - \alpha_{22s}J_s\Gamma_s^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_s - \\
 &- \alpha_{23s}J_s\Gamma_s^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right|_s + \alpha_{31f}J_f\Gamma_f^\Phi\Delta\xi\Delta\eta \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_f + \alpha_{32f}J_f\Gamma_f^\Phi\Delta\xi\Delta\eta \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_f + \alpha_{33f}J_f\Gamma_f^\Phi\Delta\xi\Delta\eta \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right|_f - \\
 &- \alpha_{31b}J_b\Gamma_b^\Phi\Delta\xi\Delta\eta \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \right|_b - \alpha_{32b}J_b\Gamma_b^\Phi\Delta\xi\Delta\eta \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right|_b - \alpha_{33b}J_b\Gamma_b^\Phi\Delta\xi\Delta\eta \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right|_b + \frac{S_p\Phi_p}{J_p} \Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma \\
 &+ \frac{S_c}{J_p} \Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Em relação a Equação (3.40) o índice zero significa que o termo deve ser avaliado no início do intervalo de tempo e os termos sem este índice são avaliados no fim do intervalo de tempo.

A resolução da Equação (3.40) requer que seja definido os volumes de controle para os quais as derivadas serão calculadas. Pode-se distinguir vinte e sete tipos de volumes de controle posicionados diferentemente numa malha tridimensional, conforme mostrado na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Volumes de controle diferenciados quanto a localização numa malha tridimensional no domínio transformado.

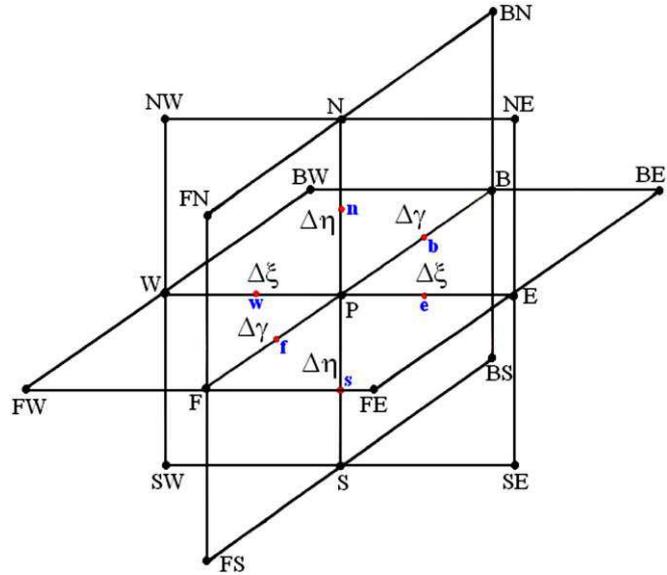


(Fonte: Silva, W. 2009)

A diferença entre os volumes de controle é determinada pelo número de faces que cada um possui em contato com o meio externo. Os volumes de controle internos não apresentam nenhuma face em contato com o exterior. Os volumes de controle que se destacam pela cor cinza da Figura 3.6 estão localizados nos vértices do domínio transformado e possuem três faces em contato com o meio. Os volumes de cores amarelos, verdes e azuis da mesma figura possuem duas faces em contato com o meio e formam as arestas do domínio transformado. Finalmente, os volumes de controle localizados nas faces do domínio têm apenas uma de suas faces em contato com o exterior, são os volumes de cores vermelhos e rosas da Figura 3.6.

Na Figura 3.7 são apresentadas as conexões entre o ponto nodal P e seus vizinhos (Silva, W., 2009). É possível observar que, para um problema tridimensional, o volume de controle interno com o ponto nodal P está ligado a dezoito volumes de controle vizinhos, gerando, portanto, uma matriz com estrutura de dezenove diagonais.

Figura 3.7 – Volume de controle interno com ponto nodal P e seus dezoito vizinhos.



(Fonte: Silva, W. 2009).

A equação de difusão foi discretizada para os vinte e sete tipos distintos de volumes de controle. Como exemplo são apresentados a seguir, a discretização para um volume interno, um volume localizado na face norte e um volume situado a noroeste.

3.4.2 – Derivadas da equação de difusão para volumes de controles internos

Observando-se as Figuras 3.6 e 3.7 pode-se determinar as expressões para as derivadas da Equação 3.40, para um volume de controle interno, usando a formulação totalmente implícita:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta \xi} \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\frac{\Phi_N + \Phi_{NE}}{2} - \left(\frac{\Phi_S + \Phi_{SE}}{2} \right)}{2\Delta \eta} = \frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4\Delta \eta} \quad (3.42)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_e = \frac{\frac{\Phi_F + \Phi_{FE}}{2} - \left(\frac{\Phi_B + \Phi_{BE}}{2} \right)}{2\Delta \gamma} = \frac{\Phi_F + \Phi_{FE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4\Delta \gamma} \quad (3.43)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta \xi} \quad (3.44)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\frac{\Phi_N + \Phi_{NW}}{2} - \left(\frac{\Phi_S + \Phi_{SW}}{2} \right)}{2\Delta \eta} = \frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4\Delta \eta} \quad (3.45)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_w = \frac{\frac{\Phi_F + \Phi_{FW}}{2} - \left(\frac{\Phi_B + \Phi_{BW}}{2} \right)}{2\Delta \gamma} = \frac{\Phi_F + \Phi_{FW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4\Delta \gamma} \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\frac{\Phi_E + \Phi_{NE}}{2} - \left(\frac{\Phi_W + \Phi_{NW}}{2} \right)}{2\Delta \xi} = \frac{\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4\Delta \xi} \quad (3.47)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta \eta} \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_n = \frac{\frac{\Phi_F + \Phi_{FN}}{2} - \left(\frac{\Phi_B + \Phi_{BN}}{2} \right)}{2\Delta \gamma} = \frac{\Phi_F + \Phi_{FN} - \Phi_B - \Phi_{BN}}{4\Delta \gamma} \quad (3.49)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\frac{\Phi_E + \Phi_{SE}}{2} - \left(\frac{\Phi_W + \Phi_{SW}}{2} \right)}{2\Delta \xi} = \frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4\Delta \xi} \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta \eta} \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_s = \frac{\frac{\Phi_F + \Phi_{FS}}{2} - \left(\frac{\Phi_B + \Phi_{BS}}{2} \right)}{2\Delta \gamma} = \frac{\Phi_F + \Phi_{FS} - \Phi_B - \Phi_{BS}}{4\Delta \gamma} \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_f = \frac{\frac{\Phi_E + \Phi_{FE}}{2} - \left(\frac{\Phi_W + \Phi_{FW}}{2} \right)}{2\Delta \xi} = \frac{\Phi_E + \Phi_{FE} - \Phi_W - \Phi_{FW}}{4\Delta \xi} \quad (3.53)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_f = \frac{\frac{\Phi_N + \Phi_{FN}}{2} - \left(\frac{\Phi_S + \Phi_{FS}}{2} \right)}{2\Delta \eta} = \frac{\Phi_N + \Phi_{FN} - \Phi_S - \Phi_{FS}}{4\Delta \eta} \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_f = \frac{\Phi_F - \Phi_P}{\Delta \gamma} \quad (3.55)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_b = \frac{\frac{\Phi_E + \Phi_{BE}}{2} - \left(\frac{\Phi_W + \Phi_{BW}}{2} \right)}{2\Delta \xi} = \frac{\Phi_E + \Phi_{BE} - \Phi_W - \Phi_{BW}}{4\Delta \xi} \quad (3.56)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_b = \frac{\frac{\Phi_N + \Phi_{BN}}{2} - \left(\frac{\Phi_S + \Phi_{BS}}{2} \right)}{2\Delta \eta} = \frac{\Phi_N + \Phi_{BN} - \Phi_S - \Phi_{BS}}{4\Delta \eta} \quad (3.57)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_b = \frac{\Phi_P - \Phi_B}{\Delta \gamma} \quad (3.58)$$

3.4.3 – Equação de difusão tridimensional discretizada (volumes internos)

A substituição das Equações (3.41) a (3.58) na Equação (3.40), resulta em:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_P \Phi_P - \lambda_P^0 \Phi_P^0}{J_P} \right) \left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \tau} \right) = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta \xi} \right) + \\ & + \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NE} - \Phi_S - \Phi_{SE}}{4\Delta \eta} \right) + \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_F + \Phi_{FE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4\Delta \gamma} \right) - \\ & - \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta \xi} \right) - \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_N + \Phi_{NW} - \Phi_S - \Phi_{SW}}{4\Delta \eta} \right) - \\ & - \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_F + \Phi_{FW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4\Delta \gamma} \right) + \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{NE} - \Phi_W - \Phi_{NW}}{4\Delta \xi} \right) + \\ & + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta \eta} \right) + \alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_F + \Phi_{FN} - \Phi_B - \Phi_{BN}}{4\Delta \gamma} \right) - \\ & - \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_W - \Phi_{SW}}{4\Delta \xi} \right) - \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta \eta} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_{23s}J_s\Gamma_s^\Phi\Delta\xi\Delta\gamma\left(\frac{\Phi_F+\Phi_{FS}-\Phi_B-\Phi_{BS}}{4\Delta\gamma}\right)+\alpha_{31f}J_f\Gamma_f^\Phi\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\Phi_E+\Phi_{FE}-\Phi_W-\Phi_{FW}}{4\Delta\xi}\right)+ \\
 & +\alpha_{32f}J_f\Gamma_f^\Phi\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\Phi_N+\Phi_{FN}-\Phi_S-\Phi_{FS}}{4\Delta\eta}\right)+\alpha_{33f}J_f\Gamma_f^\Phi\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\Phi_F-\Phi_P}{\Delta\gamma}\right)- \\
 & -\alpha_{31b}J_b\Gamma_b^\Phi\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\Phi_E+\Phi_{BE}-\Phi_W-\Phi_{BW}}{4\Delta\xi}\right)-\alpha_{32b}J_b\Gamma_b^\Phi\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\Phi_N+\Phi_{BN}-\Phi_S-\Phi_{BS}}{4\Delta\eta}\right)- \\
 & -\alpha_{33b}J_b\Gamma_b^\Phi\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\Phi_P-\Phi_B}{\Delta\gamma}\right)+\frac{S_P\Phi_P}{J_P}\Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma+\frac{S_C}{J_P}\Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

A organização dos termos semelhantes da Equação (3.59) resulta em:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\lambda_P}{J_P}\left(\frac{\Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\tau}\right)+\alpha_{11e}J_e\Gamma_e^\Phi\frac{\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\xi}+\alpha_{11w}J_w\Gamma_w^\Phi\frac{\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\xi}+\alpha_{22n}J_n\Gamma_n^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\gamma}{\Delta\eta}+\alpha_{22s}J_s\Gamma_s^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\gamma}{\Delta\eta}+ \right. \\
 & \left. \alpha_{33f}J_f\Gamma_f^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta\gamma}+\alpha_{33b}J_b\Gamma_b^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta\gamma}-\frac{S_P}{J_P}\Delta\xi\Delta\eta\Delta\gamma\right]\Phi_P= \\
 & =\left(\alpha_{11e}J_e\Gamma_e^\Phi\frac{\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\xi}+\alpha_{21n}J_n\Gamma_n^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}-\alpha_{21s}J_s\Gamma_s^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}+\alpha_{31f}J_f\Gamma_f^\Phi\frac{\Delta\eta}{4}-\alpha_{31b}J_b\Gamma_b^\Phi\frac{\Delta\eta}{4}\right)\Phi_E+ \\
 & +\left(\alpha_{11w}J_w\Gamma_w^\Phi\frac{\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\xi}-\alpha_{21n}J_n\Gamma_n^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}+\alpha_{21s}J_s\Gamma_s^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}-\alpha_{31f}J_f\Gamma_f^\Phi\frac{\Delta\eta}{4}+\alpha_{31b}J_b\Gamma_b^\Phi\frac{\Delta\eta}{4}\right)\Phi_W+ \\
 & +\left(\alpha_{22n}J_n\Gamma_n^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\gamma}{\Delta\eta}+\alpha_{12e}J_e\Gamma_e^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}-\alpha_{12w}J_w\Gamma_w^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}+\alpha_{32f}J_f\Gamma_f^\Phi\frac{\Delta\xi}{4}-\alpha_{32b}J_b\Gamma_b^\Phi\frac{\Delta\xi}{4}\right)\Phi_N+ \\
 & +\left(\alpha_{22s}J_s\Gamma_s^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\gamma}{\Delta\eta}-\alpha_{12e}J_e\Gamma_e^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}+\alpha_{12w}J_w\Gamma_w^\Phi\frac{\Delta\gamma}{4}-\alpha_{32f}J_f\Gamma_f^\Phi\frac{\Delta\xi}{4}+\alpha_{32b}J_b\Gamma_b^\Phi\frac{\Delta\xi}{4}\right)\Phi_S+ \\
 & +\left(\alpha_{33f}J_f\Gamma_f^\Phi\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta\gamma}+\alpha_{13e}J_e\Gamma_e^\Phi\frac{\Delta\eta}{4}-\alpha_{13w}J_w\Gamma_w^\Phi\frac{\Delta\eta}{4}+\alpha_{23n}J_n\Gamma_n^\Phi\frac{\Delta\xi}{4}-\alpha_{23s}J_s\Gamma_s^\Phi\frac{\Delta\xi}{4}\right)\Phi_F+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\alpha_{33b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} - \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} + \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} - \alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \right) \Phi_B + \\
 & + \left(\alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} + \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} \right) \Phi_{NE} + \left(-\alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} - \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} \right) \Phi_{NW} + \\
 & + \left(-\alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} - \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} \right) \Phi_{SE} + \left(\alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} + \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} \right) \Phi_{SW} + \\
 & + \left(\alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} + \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} \right) \Phi_{FE} + \left(-\alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} - \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} \right) \Phi_{FW} \\
 & + \left(\alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \right) \Phi_{FN} + \left(-\alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} - \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \right) \Phi_{FS} + \\
 & + \left(-\alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} - \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} \right) \Phi_{BE} + \left(\alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} + \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} \right) \Phi_{BW} + \\
 & + \left(-\alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} - \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \right) \Phi_{BN} + \left(\alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \right) \Phi_{BS} + \\
 & + \frac{\lambda_p^0 \Phi_p^0 \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J_p \Delta \tau} + \frac{S_C}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Assim obtêm-se a equação:

$$\begin{aligned}
 A_p \Phi_p & = A_e \Phi_e + A_w \Phi_w + A_n \Phi_n + A_s \Phi_s + A_f \Phi_f + A_b \Phi_b + A_{ne} \Phi_{NE} + A_{nw} \Phi_{NW} + \\
 & + A_{se} \Phi_{SE} + A_{sw} \Phi_{SW} + A_{fe} \Phi_{FE} + A_{fw} \Phi_{FW} + A_{fn} \Phi_{FN} + A_{fs} \Phi_{FS} + A_{be} \Phi_{BE} + A_{bw} \Phi_{BW} + \\
 & + A_{bn} \Phi_{BN} + A_{bs} \Phi_{BS} + B
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_p & = \frac{\lambda_p}{J_p} \left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \tau} \right) + \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \xi} + \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \xi} + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \gamma}{\Delta \eta} + \\
 & + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \gamma}{\Delta \eta} + \alpha_{33f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} + \alpha_{33b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} - \frac{S_p}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$A_e = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\xi} + \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} - \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} - \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.63)$$

$$A_w = \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta\Delta\gamma}{\Delta\xi} - \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} - \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} + \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.64)$$

$$A_n = \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\xi\Delta\gamma}{\Delta\eta} + \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} - \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} - \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} \quad (3.65)$$

$$A_s = \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\xi\Delta\gamma}{\Delta\eta} - \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} - \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} + \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} \quad (3.66)$$

$$A_f = \alpha_{33f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta\gamma} + \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} - \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} + \alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} - \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} \quad (3.67)$$

$$A_b = \alpha_{33b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{\Delta\gamma} - \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} + \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} - \alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} + \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} \quad (3.68)$$

$$A_{ne} = \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} \quad (3.69)$$

$$A_{nw} = -\alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} - \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} \quad (3.70)$$

$$A_{se} = -\alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} - \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} \quad (3.71)$$

$$A_{sw} = \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} \quad (3.72)$$

$$A_{fe} = \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} + \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.73)$$

$$A_{fw} = -\alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} - \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.74)$$

$$A_{fn} = \alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \quad (3.75)$$

$$A_{fs} = -\alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} - \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \quad (3.76)$$

$$A_{be} = -\alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} - \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} \quad (3.77)$$

$$A_{bw} = \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} + \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} \quad (3.78)$$

$$A_{bn} = -\alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} - \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \quad (3.79)$$

$$A_{bs} = \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \quad (3.80)$$

$$B = \frac{\lambda_P^0 \Phi_P^0 \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{J_P \Delta \tau} + \frac{S_C}{J_P} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \quad (3.81)$$

3.5 – Determinação das métricas

Segundo Maliska (2012), quando malhas curvilíneas generalizadas são empregadas com a transformação das equações de conservação para o domínio (ξ, η, γ) , será necessário conhecer as métricas da transformação, isto é, as grandezas $x_\xi, x_\eta, x_\gamma, y_\xi, y_\eta, y_\gamma, z_\xi, z_\eta, z_\gamma$.

3.5.1 – Coordenadas dos pontos nodais (volumes internos)

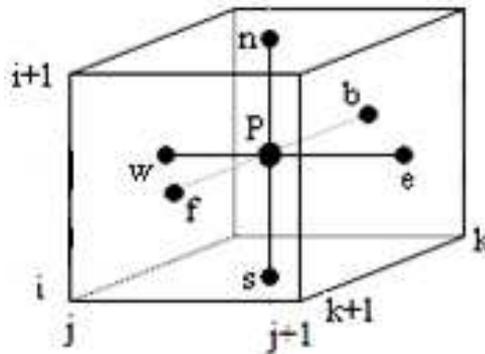
O termo que representa o jacobiano J e os termos que representam α_{ij} na Equação (3.59) devem ser calculados para o ponto nodal P de cada volume de controle e também para as faces leste, oeste, norte, sul, frente e atrás do mesmo volume de controle. Logo, para o cálculo destes termos, é necessário o conhecimento das métricas de transformação. Considerando que o jacobiano e os termos a_{ij} são determinados a partir de métricas inversas, que são calculadas

pelas derivadas parciais $x_\xi, x_\eta, x_\gamma, y_\xi, y_\eta, y_\gamma, z_\xi, z_\eta, z_\gamma$, expressões para estas derivadas devem ser instituídas para o ponto nodal P como também para os seus dezoito vizinhos.

Inicialmente mostra-se o cálculo das coordenadas cartesianas dos pontos nodais no domínio físico para volumes de controle internos, lembrando que os pontos conhecidos na geração da malha são aqueles procedentes dos cruzamentos das linhas ξ, η e γ .

Na Figura 3.8 percebe-se que qualquer volume de controle interno é limitado no domínio transformado pelos planos $\xi = i, \xi = i+1, \eta = j, \eta = j+1, \gamma = k$ e $\gamma = k+1$, em que j, i e k são índices que identificam os planos ξ, η , e γ , respectivamente.

Figura 3.8 – Volume de controle interno delimitado pelos planos $\xi = j, \xi = j+1, \eta = i, \eta = i+1, \gamma = k$ e $\gamma = k+1$.



Fonte: Silva, W. (2009).

Cada coordenada do ponto nodal P destacado na Figura 3.8, pode ser calculada pela média aritmética dos oito (8) vértices do paralelepípedo que representa o volume de controle, no domínio transformado. Logo:

$$x_P = \frac{x_{i,j+1,k} + x_{i,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k} + x_{i,j,k} + x_{i,j,k+1} + x_{i+1,j,k+1} + x_{i+1,j,k}}{8} \quad (3.82)$$

$$y_P = \frac{y_{i,j+1,k} + y_{i,j+1,k+1} + y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j+1,k} + y_{i,j,k} + y_{i,j,k+1} + y_{i+1,j,k+1} + y_{i+1,j,k}}{8} \quad (3.83)$$

$$z_P = \frac{z_{i,j+1,k} + z_{i,j+1,k+1} + z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i,j,k} + z_{i,j,k+1} + z_{i+1,j,k+1} + z_{i+1,j,k}}{8} \quad (3.84)$$

As coordenadas de todos os pontos nodais podem ser calculadas de maneira semelhante, a partir da média aritmética dos oito (8) vértices que formam o volume de controle.

3.5.2 – Coordenadas dos pontos médios das faces (volumes internos)

As coordenadas dos pontos centrais das faces que delimitam um volume de controle são obtidas pelo cálculo da média aritmética dos quatro vértices que formam o quadrilátero da face. Assim, para a face norte tomada como exemplo, tem-se:

$$x_n = \frac{x_{j+1,i+1,k} + x_{j+1,i+1,k+1} + x_{j+1,i,k+1} + x_{j+1,i,k}}{4} \quad (3.85)$$

$$y_n = \frac{y_{j+1,i+1,k} + y_{j+1,i+1,k+1} + y_{j+1,i,k+1} + y_{j+1,i,k}}{4} \quad (3.86)$$

$$z_n = \frac{z_{j+1,i+1,k} + z_{j+1,i+1,k+1} + z_{j+1,i,k+1} + z_{j+1,i,k}}{4} \quad (3.87)$$

Para calcular as coordenadas dos pontos médios das faces oeste, leste, sul, frente e atrás, expressões semelhantes podem ser determinadas.

3.5.3 – Métricas no ponto nodal P (volumes internos)

As derivadas no ponto nodal P podem ser determinadas, tendo em vista que as coordenadas dos pontos médios da face são conhecidas. As expressões para as derivadas no ponto nodal P são determinadas a seguir.

$$x_{\xi}^P = \frac{x_e - x_w}{\Delta\xi} \quad (3.88)$$

$$x_{\eta}^P = \frac{x_n - x_s}{\Delta\eta} \quad (3.89)$$

$$x_{\gamma}^P = \frac{x_f - x_b}{\Delta\gamma} \quad (3.90)$$

As expressões para as derivadas y_{ξ}^P , y_{η}^P , y_{γ}^P , z_{ξ}^P , z_{η}^P e z_{γ}^P são obtidas de maneira semelhante a utilizada para obter as expressões de x_{ξ}^P , x_{η}^P , x_{γ}^P . As coordenadas dos pontos médios das faces do volume de controle são calculadas da mesma forma como mostrada na Seção 3.5.1.3.

3.5.4 – Métricas nas interfaces dos volumes de controle

A partir da malha que foi gerada, as coordenadas dos pontos nodais podem ser determinadas. Agora, as métricas das faces dos volumes de controle serão conhecidas nesta seção. Serão mostradas, a seguir, as nove métricas da face norte.

$$x_{\xi}^n = \left[\frac{(x_{j+1,i+1,k} + x_{j+1,i+1,k+1}) - (x_{j+1,i,k} + x_{j+1,i,k+1})}{2} \right] \frac{1}{\Delta\xi} \quad (3.91)$$

$$x_{\eta}^n = \left[\frac{(x_{j+2,i,k} + x_{j+2,i,k+1} + x_{j+2,i+1,k} + x_{j+2,i+1,k+1})}{4} \right] \frac{1}{2\Delta\eta} - \left[\frac{(x_{j,i,k} + x_{j,i,k+1} + x_{j,i+1,k} + x_{j,i+1,k+1})}{4} \right] \frac{1}{2\Delta\eta} \quad (3.92)$$

$$x_{\gamma}^n = \left[\frac{(x_{j+1,i+1,k} + x_{j+1,i+1,k+1}) - (x_{j,i+1,k+1} + x_{j,i+1,k})}{2} \right] \frac{1}{\Delta\gamma} \quad (3.93)$$

$$y_{\xi}^n = \left[\frac{(y_{j+1,i+1,k} + y_{j+1,i+1,k+1}) - (y_{j+1,i,k} + y_{j+1,i,k+1})}{2} \right] \frac{1}{\Delta\xi} \quad (3.94)$$

$$y_{\eta}^n = \left[\frac{(y_{j+2,i,k} + y_{j+2,i,k+1} + y_{j+2,i+1,k} + y_{j+2,i+1,k+1})}{4} \right] \frac{1}{2\Delta\eta} - \left[\frac{(y_{j,i,k} + y_{j,i,k+1} + y_{j,i+1,k} + y_{j,i+1,k+1})}{4} \right] \frac{1}{2\Delta\eta} \quad (3.95)$$

$$y_\gamma^n = \left[\frac{(y_{j+1,i+1,k} + y_{j+1,i+1,k+1}) - (y_{j,i+1,k+1} + y_{j,i+1,k})}{2} \right] \frac{1}{\Delta\gamma} \quad (3.96)$$

$$z_\xi^n = \left[\frac{(z_{j+1,i+1,k} + z_{j+1,i+1,k+1}) - (z_{j,i+1,k} + z_{j,i+1,k+1})}{2} \right] \frac{1}{\Delta\xi} \quad (3.97)$$

$$z_\eta^n = \left[\frac{(z_{j+2,i,k} + z_{j+2,i,k+1} + z_{j+2,i+1,k} + z_{j+2,i+1,k+1})}{4} \right] \frac{1}{2\Delta\eta} - \left[\frac{(z_{j,i,k} + z_{j,i,k+1} + z_{j,i+1,k} + z_{j,i+1,k+1})}{4} \right] \quad (3.98)$$

$$z_\gamma^n = \left[\frac{(z_{j+1,i+1,k} + z_{j+1,i+1,k+1}) - (z_{j,i+1,k+1} + z_{j,i+1,k})}{2} \right] \frac{1}{\Delta\gamma} \quad (3.99)$$

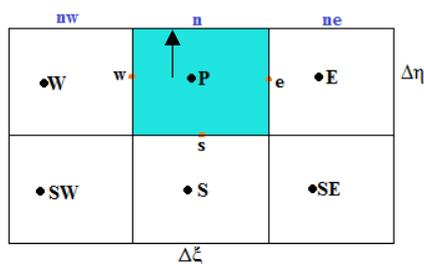
Usando o mesmo raciocínio, pode-se obter as derivadas de x, y e z em relação a ξ, η e γ nas faces localizadas a oeste, leste, sul, frente e atrás do volume de controle.

3.5.5 – Volumes de controle na fronteira (norte) com condição de contorno convectiva

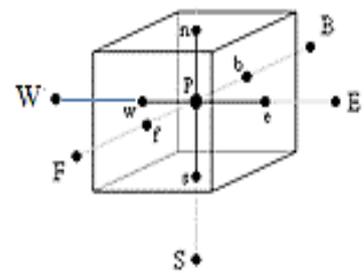
A discretização da equação de difusão para o caso do volume de controle localizado na parte interna da fronteira norte para a condição de contorno convectiva será apresentada a seguir. Pode-se observar o ponto nodal P e seus vizinhos nas Figuras 3.9 e 3.10.

Figura 3.9 – (a) Perfil da fronteira norte;

(b) Ponto nodal P na fronteira norte do domínio transformado.



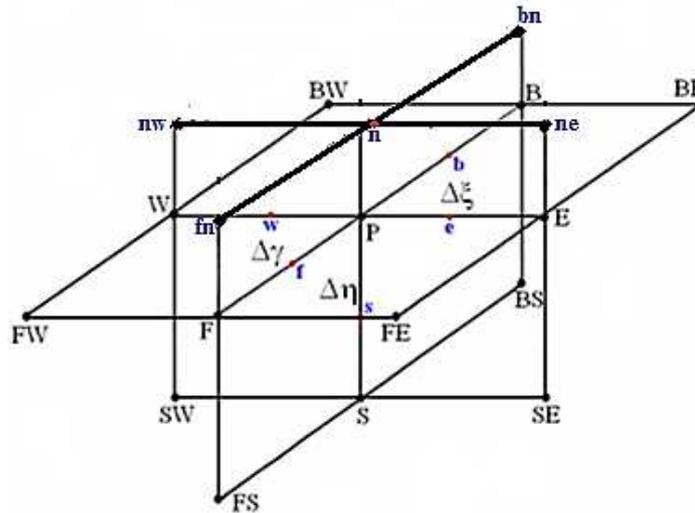
(a)



(b)

Fonte: Autoria própria.

Figura 3.10 - Ponto nodal P na fronteira norte e seus vizinhos.



Fonte: Autoria própria

3.5.5.1 – Derivadas da Equação (3.40) para volumes de controles na fronteira (norte)

A equação do fluxo é dada por:

$$G_n = \dot{\phi} = -\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (3.100)$$

Para a fronteira norte, a condição de contorno convectiva na forma discretizada tem a seguinte forma:

$$-\Gamma_n^\Phi \frac{\Phi_n - \Phi_P}{\Delta n_n} = h_n (\Phi_n - \Phi_{\infty n}) \quad (3.101)$$

onde h_n é o coeficiente de transferência convectivo de calor ou de massa na interface norte do volume de controle e $\Phi_{\infty n}$ é o valor da variável genérica referente ao fluido na vizinhança externa do corpo em estudo, na mesma fronteira. Δn_n é distância entre a face norte e o ponto nodal P.

O valor da variável Φ_n no contorno norte interna é obtida a partir da equação (3.101), sendo dada pela expressão abaixo:

$$\Phi_n = \frac{\Phi_P + f_n \Phi_{\infty n}}{1 + f_n} \quad (3.102)$$

De maneira análoga, as expressões de Φ_{ne} , Φ_{nw} , Φ_{fn} e Φ_{bn} estão apresentadas abaixo:

$$\Phi_{ne} = \frac{\Phi_E + f_{ne} \Phi_{\infty ne}}{1 + f_{ne}} \quad (3.103)$$

$$\Phi_{nw} = \frac{\Phi_W + f_{nw} \Phi_{\infty nw}}{1 + f_{nw}} \quad (3.104)$$

$$\Phi_{fn} = \frac{\Phi_F + f_{fn} \Phi_{\infty fn}}{1 + f_{fn}} \quad (3.105)$$

$$\Phi_{bn} = \frac{\Phi_B + f_{bn} \Phi_{\infty bn}}{1 + f_{bn}} \quad (3.106)$$

A forma genérica de f é dada por $f = \frac{h\Delta n}{\Gamma\Phi}$, onde, Δn é a distância do ponto nodal P à interface correspondente.

$$\phi_n'' = \frac{\Phi_P - \Phi_{\infty n}}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n\Phi}} \quad (3.107)$$

De maneira análoga se determina o fluxo para ϕ_{ne}'' , ϕ_{nw}'' , ϕ_{fn}'' e ϕ_{bn}'' . O fluxo na face norte na equação de difusão é dado pela expressão:

$$-\phi_n'' \Delta S_n = - \frac{\Phi_P - \Phi_{\infty n}}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n\Phi}} \Delta S_n = \alpha_{21n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_n + \alpha_{22n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_n + \alpha_{23n} J_n \Gamma_n^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right|_n \quad (3.108)$$

As derivadas que diferem daquelas determinadas para volumes internos são as que dependem do valor de Φ no contorno norte:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\Phi_E + \Phi_P - \Phi_S - \Phi_{SE} - \frac{2\Delta n_{ne}}{\Gamma_{ne}^\Phi} \phi_{ne}'' - \frac{2\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi} \phi_n''}{4\Delta \eta} \quad (3.109)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\Phi_W + \Phi_P - \Phi_S - \Phi_{SW} - \frac{2\Delta n_{nw}}{\Gamma_{nw}^\Phi} \phi_{nw}'' - \frac{2\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi} \phi_n''}{4\Delta \eta} \quad (3.110)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_f = \frac{\Phi_F + \Phi_P - \Phi_S - \Phi_{FS} - \frac{2\Delta n_{fn}}{\Gamma_{fn}^\Phi} \phi_{fn}'' - \frac{2\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi} \phi_n''}{4\Delta \eta} \quad (3.111)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_b = \frac{\Phi_B + \Phi_P - \Phi_S - \Phi_{BS} - \frac{2\Delta n_{bn}}{\Gamma_{bn}^\Phi} \phi_{bn}'' - \frac{2\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi} \phi_n''}{4\Delta \eta} \quad (3.112)$$

Substituindo agora a equação 3.107 e as demais equações para o fluxo nas equações 3.109 a 3.112, obtém-se as expressões abaixo:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_e = \frac{1}{4\Delta \eta} \left[\frac{1-f_n}{1+f_n} \Phi_P + \frac{1-f_{ne}}{1+f_{ne}} \Phi_E - \Phi_S - \Phi_{SE} + 2 \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{ne}}{1+f_{ne}} \Phi_{\infty ne} \right) \right] \quad (3.113)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_w = \frac{1}{4\Delta \eta} \left[\frac{1-f_n}{1+f_n} \Phi_P + \frac{1-f_{nw}}{1+f_{nw}} \Phi_W - \Phi_S - \Phi_{SW} + 2 \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{nw}}{1+f_{nw}} \Phi_{\infty nw} \right) \right] \quad (3.114)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_f = \frac{1}{4\Delta \eta} \left[\frac{1-f_n}{1+f_n} \Phi_P + \frac{1-f_{fn}}{1+f_{fn}} \Phi_F - \Phi_S - \Phi_{FS} + 2 \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{fn}}{1+f_{fn}} \Phi_{\infty fn} \right) \right] \quad (3.115)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_b = \frac{1}{4\Delta \eta} \left[\frac{1-f_n}{1+f_n} \Phi_P + \frac{1-f_{bn}}{1+f_{bn}} \Phi_B - \Phi_S - \Phi_{BS} + 2 \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{bn}}{1+f_{bn}} \Phi_{\infty bn} \right) \right] \quad (3.116)$$

3.5.5.2 – Equação de difusão discretizada (lado norte interno– convecção)

Substituindo as Equações 3.113 a 3.116 e a Equação 3.107 na equação 3.40 obtém-se a equação algébrica para o volume de controle situado no contorno norte interno.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{A_p \Phi_p - \lambda_p^0 \Phi_p^0}{J_p} \right) \left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \tau} \right) = \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_E - \Phi_p}{\Delta \xi} \right) + \\
 & + \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \frac{1}{4 \Delta \eta} \left[\frac{1 - f_n}{1 + f_n} \Phi_p + \frac{1 - f_{ne}}{1 + f_{ne}} \Phi_E - \Phi_S - \Phi_{SE} + 2 \left(\frac{f_n}{1 + f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{ne}}{1 + f_{ne}} \Phi_{\infty ne} \right) \right] + \\
 & + \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_F + \Phi_{FE} - \Phi_B - \Phi_{BE}}{4 \Delta \gamma} \right) - \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_p - \Phi_w}{\Delta \xi} \right) - \\
 & - \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \frac{1}{4 \Delta \eta} \left[\frac{1 - f_n}{1 + f_n} \Phi_p + \frac{1 - f_{nw}}{1 + f_{nw}} \Phi_w - \Phi_S - \Phi_{SW} + 2 \left(\frac{f_n}{1 + f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{sw}}{1 + f_{sw}} \Phi_{\infty sw} \right) \right] - \\
 & - \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \Delta \eta \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_F + \Phi_{FW} - \Phi_B - \Phi_{BW}}{4 \Delta \gamma} \right) - \frac{\Phi_p - \Phi_{\infty n}}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}} \Delta S_n - \\
 & - \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{SE} - \Phi_w - \Phi_{SW}}{4 \Delta \xi} \right) - \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_p - \Phi_S}{\Delta \eta} \right) - \\
 & - \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \Delta \xi \Delta \gamma \left(\frac{\Phi_F + \Phi_{FS} - \Phi_B - \Phi_{BS}}{4 \Delta \gamma} \right) + \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{FE} - \Phi_w - \Phi_{FW}}{4 \Delta \xi} \right) + \\
 & + \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \Delta \xi \Delta \eta \frac{1}{4 \Delta \eta} \left[\frac{1 - f_n}{1 + f_n} \Phi_p + \frac{1 - f_{fn}}{1 + f_{fn}} \Phi_F - \Phi_S - \Phi_{FS} + 2 \left(\frac{f_n}{1 + f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{fn}}{1 + f_{fn}} \Phi_{\infty fn} \right) \right] + \\
 & + \alpha_{33f} J_f \Gamma_f^\Phi \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\Phi_F - \Phi_p}{\Delta \gamma} \right) - \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\Phi_E + \Phi_{BE} - \Phi_w - \Phi_{BW}}{4 \Delta \xi} \right) - \\
 & - \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \Delta \xi \Delta \eta \frac{1}{4 \Delta \eta} \left[\frac{1 - f_n}{1 + f_n} \Phi_p + \frac{1 - f_{bn}}{1 + f_{bn}} \Phi_B - \Phi_S - \Phi_{BS} + 2 \left(\frac{f_n}{1 + f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{bn}}{1 + f_{bn}} \Phi_{\infty bn} \right) \right] - \\
 & - \alpha_{33b} J_b \Gamma_b^\Phi \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\Phi_p - \Phi_B}{\Delta \gamma} \right) + \frac{S_p \Phi_p}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma + \frac{S_C}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma \tag{3.117}
 \end{aligned}$$

Organizando os termos da equação 3.117 pode-se escrever:

$$A_p \Phi_P = A_e \Phi_E + A_w \Phi_W + A_s \Phi_S + A_f \Phi_F + A_b \Phi_B + A_{se} \Phi_{SE} + A_{sw} \Phi_{SW} + A_{fw} \Phi_{FW} + A_{fe} \Phi_{FE} +$$

$$+ A_{fs} \Phi_{FS} + A_{bw} \Phi_{BW} + A_{be} \Phi_{BE} + A_{bs} \Phi_{BS} + B \quad (3.118)$$

onde:

$$A_p = \frac{\lambda_p}{J_p} \left(\frac{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \tau} \right) + \frac{\Delta S_n}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}} + \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \xi} + \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \xi} + \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \gamma}{\Delta \eta} +$$

$$+ \alpha_{33f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} + \alpha_{33b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} - \frac{S_p}{J_p} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma - \frac{\Delta \gamma}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{1 - f_n}{1 + f_n} + \quad (3.119)$$

$$+ \frac{\Delta \gamma}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{1 - f_n}{1 + f_n} - \frac{\Delta \xi}{4} \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{1 - f_n}{1 + f_n} + \frac{\Delta \xi}{4} \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{1 - f_n}{1 + f_n}$$

$$A_e = \frac{\Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \xi} \alpha_{11e} J_e \Gamma_e^\Phi + \frac{\Delta \gamma}{4} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{1 - f_{ne}}{1 + f_{ne}} - \frac{\Delta \gamma}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi + \frac{\Delta \eta}{4} \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi - \frac{\Delta \eta}{4} \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \quad (3.120)$$

$$A_w = \frac{\Delta \eta \Delta \gamma}{\Delta \xi} \alpha_{11w} J_w \Gamma_w^\Phi - \frac{\Delta \gamma}{4} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{1 - f_{sw}}{1 + f_{sw}} + \frac{\Delta \gamma}{4} \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi - \frac{\Delta \eta}{4} \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi + \frac{\Delta \eta}{4} \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \quad (3.121)$$

$$A_s = \alpha_{22s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \gamma}{\Delta \eta} - \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} + \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} - \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} \quad (3.122)$$

$$A_f = \alpha_{33f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} + \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} - \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} - \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \frac{\Delta \xi}{4} \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{1 - f_{fn}}{1 + f_{fn}} \quad (3.123)$$

$$A_b = \alpha_{33b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{\Delta \gamma} - \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} + \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta \eta}{4} + \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \xi}{4} + \frac{\Delta \xi}{4} \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{1 - f_{bn}}{1 + f_{bn}} \quad (3.124)$$

$$A_{se} = -\alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} - \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta \gamma}{4} \quad (3.125)$$

$$A_{sw} = \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} + \alpha_{21s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\gamma}{4} \quad (3.126)$$

$$A_{fw} = -\alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} - \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.127)$$

$$A_{fe} = \alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} + \alpha_{31f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.128)$$

$$A_{fs} = -\alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} - \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} \quad (3.129)$$

$$A_{bw} = \alpha_{13w} J_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} + \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.130)$$

$$A_{be} = -\alpha_{13e} J_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} - \alpha_{31b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\eta}{4} \quad (3.131)$$

$$A_{bs} = \alpha_{23s} J_s \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} + \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \frac{\Delta\xi}{4} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{\lambda_p^0 \Phi_p^0}{J_p} \frac{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\gamma}{\Delta\tau} + \frac{S_C}{J_p} \Delta\xi \Delta\eta \Delta\gamma + \frac{\Delta\gamma}{2} \alpha_{12e} J_e \Gamma_e^\Phi \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{ne}}{1+f_{ne}} \Phi_{\infty ne} \right) - \\ & - \frac{\Delta\gamma}{2} \alpha_{12w} J_w \Gamma_w^\Phi \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{nw}}{1+f_{nw}} \Phi_{\infty nw} \right) + \frac{\Delta\xi}{2} \alpha_{32f} J_f \Gamma_f^\Phi \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty n} + \frac{f_{fn}}{1+f_{fn}} \Phi_{\infty fn} \right) - \\ & - \frac{\Delta\xi}{2} \alpha_{32b} J_b \Gamma_b^\Phi \left(\frac{f_n}{1+f_n} \Phi_{\infty e} + \frac{f_{bn}}{1+f_{bn}} \Phi_{\infty bn} \right) + \frac{\Phi_{\infty n}}{\frac{1}{h_n} + \frac{\Delta n_n}{\Gamma_n^\Phi}} \Delta S_n \end{aligned} \quad (3.133)$$

3.6 - Discretização do valor médio da variável de interesse ($\bar{\Phi}$)

O valor médio da variável de interesse é calculado pela Equação (2.17) para o caso unidimensional, conforme visto na Seção 2.3.4.1 do Capítulo 2. Quando se trabalha em um domínio tridimensional contínuo, o valor médio passa a ser calculado por:

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{\int_V \Phi(x, y, z, t) dV}{\int_V dV} \quad (3.134)$$

Os sólidos de interesse neste trabalho são tridimensionais, assim, a discretização da Equação (3.134) fornece a seguinte média ponderada (Silva, W. 2009):

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N_\gamma} \sum_{i=1}^{N_\eta} \sum_{j=1}^{N_\xi} \Phi(j, i, k) \Delta V_{jik} \quad (3.135)$$

em que

$$V = \sum_{k=1}^{N_\gamma} \sum_{i=1}^{N_\eta} \sum_{j=1}^{N_\xi} \Delta V_{jik} \quad (3.136)$$

onde V é o volume do sólido, j, i e k que definem a posição do ponto nodal do volume de controle na malha 3D, ΔV é a magnitude do volume deste volume de controle, enquanto N_ξ, N_η e N_γ definem o número de linhas ξ, η e γ , respectivamente. Neste trabalho, foi determinado que as linhas ξ, η e γ devem ser numeradas sequencialmente, através de números inteiros a partir de 1, o que significa $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\gamma = 1$. Assim, o volume de um volume de controle, pode ser escrito, a partir da Equação (2.75), como:

$$\Delta V_{jik} = \frac{1}{J_{jik}} \quad (3.137)$$

Em todo este trabalho, o jacobiano de um volume de controle com ponto nodal P é simbolizado de forma simplificada por J_P . Assim, a Equação (3.134) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\sum \frac{1}{J_P}} \sum \Phi_P \frac{1}{J_P} \quad (3.138)$$

onde o somatório deve ser aplicado a todos os volumes de controle. O termo $1/J_P$ corresponde ao volume do volume de controle cujo ponto nodal é P. Então o valor médio de Φ é determinado através de uma média ponderada em que o volume de cada volume de controle é usado na ponderação.

3.7 – Cálculo dos valores de Γ^Φ nas faces dos volumes de controle

Observando-se a Equação (3.40) da discretização da equação de difusão, verifica-se que é necessário o conhecimento dos valores de Γ^Φ nas interfaces leste, oeste, norte, sul, frente e atrás de cada volume de controle. Agora, se Γ^Φ for constante em todo domínio, também o será para todas as faces do volume de controle e assume o mesmo valor. Para os casos em que Γ^Φ seja variável no domínio, o cálculo dos seus valores pode ser feito presumindo a validade da Lei de Fourier ou da primeira lei de Fick. Estas leis, para uma variável dependente Φ , em que o coeficiente de transporte seja dado por Γ^Φ , podem ser reescritas do seguinte modo (Silva, W. 2009):

$$\vec{J} = - \Gamma^\Phi \vec{\nabla} \Phi \tag{3.139}$$

assim,

$$J = - \Gamma^\Phi \frac{\Delta \Phi}{\Delta n} \tag{3.140}$$

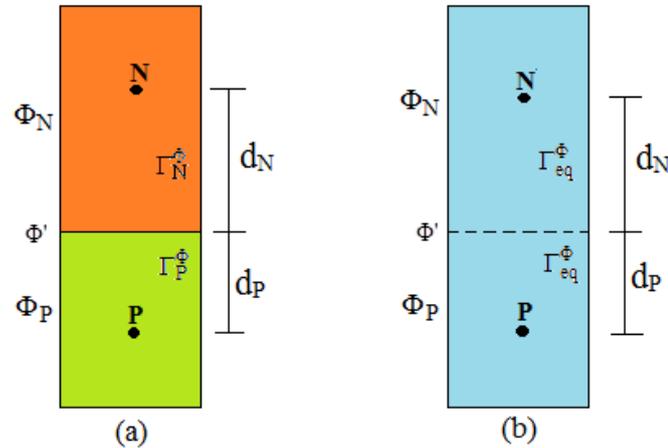
recordando que \vec{J} é o fluxo na face do volume de controle sob estudo e Δn é a distância do ponto nodal desse volume à face. A partir da Equação (3.140), pode-se escrever:

$$\Delta \Phi = - \frac{1}{\Gamma^\Phi} J \Delta n \tag{3.141}$$

A determinação de uma expressão para a estimativa de Γ^Φ em uma face comum a dois volumes de controle pode ser feita com base na Figura (3.11). Esta figura apresenta um volume de controle P e o seu vizinho ao norte (N), cada um com um valor específico para o coeficiente de transporte, Γ_P^Φ e Γ_N^Φ , respectivamente (Figura 3.11a). Na Figura 3.11b é mostrado um

domínio equivalente com coeficiente de transporte constante e igual a Γ_{eq}^Φ para os dois volumes de controle.

Figura 3.11 - Dois volumes de controle com Γ^Φ igual a: (a) Γ_P^Φ e Γ_N^Φ ; (b) Γ_{eq}^Φ .



Fonte: Autoria própria.

O que se busca é o valor de Γ^Φ na face norte do volume de controle identificado pelo ponto nodal N, que neste caso é a face comum aos dois volumes de controle. Para isso, pode-se imaginar que o domínio equivalente descrito na Figura 3.11(b) substitui a situação descrita na Figura 3.11(a). Em ambas as situações, Φ' é o valor da grandeza na face comum aos dois volumes, enquanto d_P representa a distância do ponto nodal P à face norte e d_N fornece a distância do ponto nodal N a essa mesma face. Essas distâncias devem ser calculadas pela Equação (3.16), devidamente adaptada para cada interface.

Usando a identidade

$$\Phi_N - \Phi_P = (\Phi_N - \Phi') + (\Phi' - \Phi_P) \tag{3.142}$$

e levando em conta que o fluxo \vec{J} deve ter o mesmo valor e substituindo a Equação (3.141) na Equação (3.142) e considerando as definições da Figura 3.11, chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{d_P + d_N}{\Gamma_{eq}^\Phi} = \frac{d_N}{\Gamma_N^\Phi} + \frac{d_P}{\Gamma_P^\Phi} \tag{3.143}$$

O primeiro membro da Equação (3.143) é uma decorrência da discretização da

Equação (3.141) aplicada à situação (b) da Figura (3.11), enquanto o segundo membro é decorrente da mesma discretização aplicada à situação (a) da mesma figura.

Fazendo-se alguns rearranjos na Equação (3.143) chega-se a expressão para o valor de Γ_{eq}^Φ dada na Equação (3.144), que é uma forma mais cômoda para fins de implementação computacional.

$$\Gamma_{eq}^\Phi = \frac{\Gamma_P^\Phi \Gamma_N^\Phi}{f_d \Gamma_N^\Phi + (1-f_d) \Gamma_P^\Phi} \quad (3.144)$$

em que

$$f_d = \frac{d_p}{d_p + d_N} \quad (3.145)$$

Obviamente, se Γ_{eq}^Φ é o valor equivalente da propriedade em todo domínio da Figura 3.11(b), este também é o valor de Γ^Φ na face comum entre os pontos nodais P e N.

3.8 – Determinação dos parâmetros de transporte Γ^Φ e h a partir de um conjunto de dados experimentais – processo de otimização

Na simulação de problemas difusivos é necessário que parâmetros do processo sejam conhecidos. Caso não sejam conhecidos, há a necessidade de determiná-los de alguma forma. Embora exista na literatura um grande número de expressões propostas para determinar essas propriedades, é importante obter valores a partir de dados medidos experimentalmente. O método inverso, que é um problema de otimização, tem sido usado com sucesso por diversos pesquisadores para determinar as propriedades termofísicas de problemas de difusão em um domínio cuja cinética de difusão seja conhecida através da medição de dados experimentais (SILVA, 2007; MARIANI et al., 2008; MARIANI et al., 2009). O método inverso consiste em atribuir valores aos parâmetros de interesse, seguido da solução da equação que descreve o sistema, sendo que os resultados obtidos são comparados com os dados experimentais relativos ao sistema. A partir da comparação, novos valores para os parâmetros são estabelecidos, e o

processo continua até que os resultados simulados possam ser considerados suficientemente próximos dos resultados experimentais. Esta comparação envolve a minimização de uma função, denominada de função objetivo.

Conforme se sabe, a expressão para o qui-quadrado envolve o ajuste de uma função explícita usada como um modelo (regressão) ou de uma curva simulada a dados experimentais, sendo calculado por (TAYLOR, 1997; SILVA E SILVA, 1998):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} (\delta\Phi_i)^2 \frac{1}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N_p} (\bar{\Phi}_i - \bar{\Phi}^{\text{sim}})^2 \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (3.146)$$

onde $\bar{\Phi}_i$ é o i-ésimo ponto experimental, $\bar{\Phi}_i^{\text{sim}}$ é o valor da grandeza correspondente ao ponto i obtido por simulação, N_p é o número de pontos experimentais, $1/\sigma_i^2$ é o peso estatístico referente ao i-ésimo ponto experimental. Se σ_i não foi obtido a partir dos pontos experimentais e é, portanto, desconhecido, então o peso estatístico $1/\sigma_i^2 = 1$ pode ser atribuído a todos os pontos experimentais, o que significa o mesmo peso estatístico para todos eles.

Vale ressaltar que σ_i é o desvio padrão do valor médio de $\bar{\Phi}_i$. O qui-quadrado depende de $\bar{\Phi}_i^{\text{sim}}$ que, por sua vez, depende dos parâmetros do processo Γ^Φ e h.

Dentre os otimizadores disponíveis na literatura que usam o método inverso na otimização de processos difusivos estão o *Convective software* desenvolvido por Silva (2009h) e o *LS Optimizer*, desenvolvido por Silva e Silva (2017). Ambos foram utilizados neste trabalho.

3.9 – Processo de otimização usando a solução analítica da equação de difusão 3D aplicada a um sólido cuja geometria possa ser aproximada a um paralelepípedo

Em algumas situações de interesse, onde o modelo de difusão é utilizado na descrição do processo físico, a forma do corpo sob estudo pode ser aproximada para uma geometria simples para condições de contorno também simples. Nesses casos, os cálculos analíticos

forneem uma solução exata das equações diferenciais, num domínio contínuo. Para todo ponto pode-se saber o valor da grandeza de interesse. No entanto, tendo como base o universo das complexas equações necessárias para descrever situações reais, as soluções analíticas muitas vezes podem se distanciar demasiadamente do fenômeno físico real. Assim, para uma descrição mais precisa dessas situações, torna-se necessário a utilização dos métodos numéricos que praticamente não apresentam restrições, podendo ser aplicados em qualquer domínio.

Apesar das limitações das soluções analíticas, elas são ferramentas bastante utilizadas e naturalmente, não devem ser descartadas, sendo uma de suas importantes aplicações, a validação das simulações numéricas.

Diante do exposto, nesta seção, o *software* utilizado para determinar os parâmetros do processo foi o *Convective* acoplado à solução analítica da equação da difusão 3D escrita em coordenadas cartesianas pressupondo condição de contorno de terceiro tipo. O *software* apresenta interface simples com o usuário e pode ser usado na otimização de problemas difusivos para várias geometrias: parede infinita, cilindro infinito, esfera, cilindro finito e paralelepípedo. Inicialmente deve-se carregar um arquivo texto contendo o conjunto de pontos obtidos experimentalmente. Posteriormente, o software disponibiliza as geometrias para as quais o otimizador tem solução. Após a escolha da geometria, o programa solicita que sejam colocadas a(s) dimensão(ões) do sólido, bem como o valor inicial e o valor de equilíbrio da grandeza medidos experimentalmente.

3.9.1 – Solução analítica 3D da equação de difusão com condição de contorno convectiva aplicada à secagem de sólidos cerâmicos

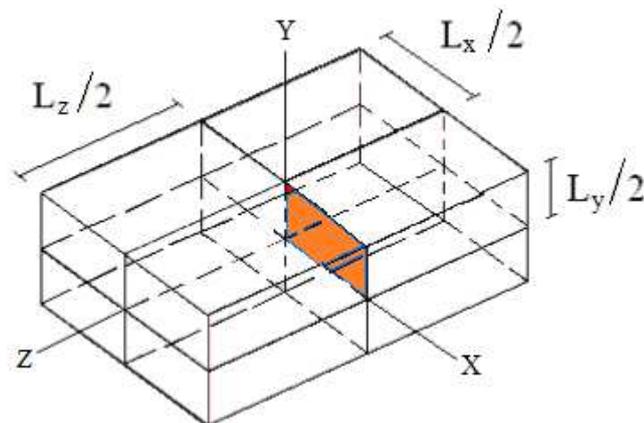
Partindo da equação de difusão escrita em coordenadas cartesianas e fazendo $\Phi = M$ (teor de umidade em base seca), $\Gamma^\Phi = D$ (difusividade efetiva da água), $\lambda = 1$ e $S = 0$, a Equação (3.23) passa ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial M}{\partial z} \right) \quad (3.147)$$

A Equação (3.147) pode ser resolvida numericamente e, sob certas condições também analiticamente. Nesta seção, a solução analítica será usada para descrever a difusão de água em

sólidos em forma de paralelepípedos porosos como o que é mostrado na Figura (3.12), cuja figura é uma aproximação da figura real da telha, tendo em vista que a telha usada no experimento foi do tipo canal, em que ela possui uma largura maior de um lado e uma largura menor do outro lado.

Figura 3.12 – Geometria considerada para o sólido destacando um plano xy na posição z onde a distribuição de umidade será analisada.



Fonte: Farias, V. (2011)

A Equação (3.146) pode ser resolvida analiticamente sob as seguintes hipóteses:

- a) as dimensões do sólido não variam durante a difusão da água;
- b) a difusão líquida é o único mecanismo de transporte de água dentro do sólido;
- c) a distribuição inicial do teor de umidade deve ser uniforme;
- d) o sólido é considerado homogêneo e isotrópico;
- e) o coeficiente de transferência convectivo de massa é constante durante a difusão da água;
- f) a difusividade efetiva da água não varia durante o processo.

A condição de contorno convectiva é obtida impondo a igualdade entre o fluxo difusivo no interior da superfície e o fluxo convectivo externo nas vizinhanças da mesma superfície. Para um paralelepípedo, essa imposição resulta em:

$$-D \frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pm L_x/2} = h \left(M(x, y, z, t) \Big|_{x=\pm L_x/2} - M_{eq} \right), \quad (3.148)$$

$$-D \frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm L_y/2} = h \left(M(x, y, z, t) \Big|_{y=\pm L_y/2} - M_{eq} \right) \quad (3.149)$$

$$-D \frac{\partial M(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\pm L_z/2} = h \left(M(x, y, z, t) \Big|_{z=\pm L_z/2} - M_{eq} \right), \quad (3.150)$$

Em que h é o coeficiente de transferência convectivo de massa, $M(x,y,z,t)$ é o teor de umidade na posição (x, y, z) dentro do paralelepípedo no instante t , M_{eq} é o teor de umidade de equilíbrio e L_x , L_y e L_z são os comprimentos das arestas do paralelepípedo ao longo de x , y e z , respectivamente.

Para um paralelepípedo homogêneo com teor de umidade inicial uniforme M_0 e condição de contorno definida pelas Equações (3.148 a 3.150), a solução analítica $M(x, y, z, t)$ da Equação (3.147) é obtida por separação de variáveis (LUIKOV, 1968; CRANK, 1992):

$$M(x, y, z, t) = M_{eq} - (M_{eq} - M_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_n A_m A_k \cos\left(\mu_n \frac{x}{L_x/2}\right) \times \cos\left(\mu_m \frac{y}{L_y/2}\right) \times \cos\left(\mu_k \frac{z}{L_z/2}\right) \exp\left[-\left(\frac{\mu_n^2}{\left(\frac{L_x}{2}\right)^2} + \frac{\mu_m^2}{\left(\frac{L_y}{2}\right)^2} + \frac{\mu_k^2}{\left(\frac{L_z}{2}\right)^2}\right) Dt\right] \quad (3.151)$$

em que

$$A_j = \frac{4 \text{sen}(\mu_j)}{2\mu_j + \text{sen}(2\mu_j)} \quad (3.152)$$

onde μ_j são raízes da equação característica para a parede infinita dada por:

$$\cot(\mu_j) = \frac{\mu_j}{Bi} \quad (3.153)$$

O parâmetro Bi é número de Biot definido como:

$$Bi = \frac{hL/2}{D} \quad (3.154)$$

onde L é um comprimento característico.

A expressão para o teor de umidade médio no tempo t pode ser escrito a partir da Equação (2.17) devidamente adaptada para o caso tridimensional:

$$\bar{M}(t) = \frac{1}{V} \int M(x, y, z, t) dV, \quad (3.155)$$

onde V é o volume do paralelepípedo.

Substituindo a Equação (3.151) na Equação (3.155), o teor de umidade médio, $\bar{M}(t)$ no tempo t é dado por:

$$\bar{M}(t) = M_{eq} - (M_{eq} - M_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_n B_m B_k \exp \left[- \left(\frac{\mu_n^2}{\left(\frac{L_x}{2}\right)^2} + \frac{\mu_m^2}{\left(\frac{L_y}{2}\right)^2} + \frac{\mu_k^2}{\left(\frac{L_z}{2}\right)^2} \right) Dt \right] \quad (3.156)$$

onde os parâmetros B_j são dados por:

$$B_j = \frac{2Bi^2}{\mu_j^2 (Bi^2 + Bi + \mu_j^2)} \quad (3.157)$$

Para a situação física analisada é razoável admitir o mesmo valor de h em todas as faces do paralelepípedo e esta suposição resulta em:

$$Bi_1 = \frac{h(L_x/2)}{D}, \quad (3.158)$$

$$Bi_2 = Bi_1 \frac{L_y}{L_x}, \quad (3.159)$$

$$Bi_3 = Bi_1 \frac{L_z}{L_x}, \quad (3.160)$$

A Equação (3.153) é uma equação transcendental que pode ser reescrita como:

$$\mu_j \text{sen}(\mu_j) - \text{Bicos}(\mu_j) = 0 \quad (3.161)$$

Para calcular cinquenta raízes da Equação (3.161) foi usado o *Root* do *software Lab Fit* e para calcular o Bi foi usado o *software Convective*.

3.9.2 – Erro de truncamento

Para se estabelecer o número de termos usados na série deve ser observado que o maior erro devido ao truncamento ocorre em $t = 0$. Assim, a Equação (3.156) pode ser reescrita para nt termos da seguinte forma:

$$\bar{M}^*(0) = \frac{\bar{M}(0) - M_{eq}}{M_0 - M_{eq}} = \sum_{n=1}^{nt} \sum_{m=1}^{nt} \sum_{k=1}^{nt} B_n B_m B_k \quad (3.162)$$

Verifica-se que $nt \rightarrow \infty$, $\bar{M}^*(0) = 1$, e não há erro de truncamento. Porém, para um valor finito nt , $\bar{M}^*(0)$ dado pela Equação (3.162) depende do número de Biot.

Silva, W. et al. (2012) mostraram que para o número de Biot menor que 10 pode ser usado no mínimo 16 termos e para número de Biot maior que 10 o número de termo pode ser no mínimo 25. Para se obter uma melhor convergência o número de termos deve ser aumentado. Mostraram também que, para um número de Biot igual a 200 e usando 25 termos o erro de truncamento foi de 1,3%.

3.10 – Processo de otimização usando a solução numérica da equação de difusão 3D em coordenadas generalizadas aplicada a sólidos com geometria arbitrária

A solução numérica apresentada por Farias, V. (2011) foi adaptada e aplicada no presente trabalho para resolver a equação de difusão 3D em coordenadas generalizadas com a condição de contorno do terceiro tipo. Baseado na solução numérica, a pesquisadora desenvolveu um código computacional que será utilizado neste trabalho. Este código tem como função principal simular processos de difusão considerando a geometria real dos corpos.

Conforme já mencionado, para simular um problema difusivo é necessário conhecer os parâmetros do transporte ou determiná-los através de algum método. Assim, os valores do coeficiente de transferência convectivo e uma expressão para difusividade efetiva de massa, podem ser determinados pelo uso de um otimizador, de forma que a solução numérica produza resultados para a cinética de secagem o mais próximo possível dos dados experimentais.

Visando à determinação de tais parâmetros, no código computacional desenvolvido por Farias, V. (2011), o otimizador *LS Optimizer*, desenvolvido por Silva e Silva (2016) foi acoplado e usado com o propósito de minimizar o qui-quadrado relativo ao processo de ajuste de uma curva simulada aos dados experimentais.

3.10.1 – Usando o *LS Optimizer* desenvolvido por Silva e Silva (2016)

O *LS Optimizer* que é um software que determina os parâmetros de uma equação diferencial (e também funções) através de dados experimentais, usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt (SILVA et al. 2018). Sendo bastante útil para determinar parâmetros da equação da difusão aplicada a problemas de transferência de massa ou de calor.

O otimizador apresenta interface simples com o usuário e contém um manual de instruções (help) bem explicativo. Para utilizá-lo, o primeiro procedimento a ser feito é colocar os dados experimentais num arquivo texto (nomeado de ‘exp.txt’) contendo três colunas. O número mínimo de pontos experimentais é 6 e o máximo 97. A primeira coluna corresponde a variável independente (geralmente refere-se a tempo), a segunda coluna corresponde aos dados experimentais da variável dependente (temperatura ou teor de umidade). Já a terceira coluna refere-se ao peso estatístico de cada valor da variável dependente, cujo valor atribuído, na ausência de informações, é igual à unidade (1), indicando que todas as medidas têm o mesmo peso.

Após colocar os arquivos em “txt” é preciso criar o Solver da equação de difusão em coordenadas generalizadas apresentadas no Capítulo 3. Entretanto, o “help” do *LS Optimizer* instrui o formato que o solucionador deve ter, pois o otimizador necessita de algumas instruções presentes no código original para que o processo seja realizado. A Figura 3.13 (extraída do help do otimizador) mostra as modificações necessárias que devem ser realizadas no código solucionador da equação de difusão para que seja gerado um arquivo executável e o otimizador

leia os arquivos com os dados experimentais chamado de 'exp.txt', os dados da malha e os dados do 'parameters.txt'.

Figura 3.13 – Modificações que devem ser feitas no código fonte original do solucionador para que o *LS Optimizer* leia os arquivos "exp.txt" e "parameters.txt".

```

program solver
use DFUB ← TO BE ADDED

Types and definitions of variables ← TO BE ADDED

LOGICAL(4) result
TYPE (qwinfo) winfo
double precision time(100), a1, a2, a3, a4
integer icont_, info_, N_Param, information

i = setexitqq(QWIN$EXITNOPERSIST) !the program is closed at the finish
! Minimize frame window
winfo%TYPE = QWIN$MIN
result = SETWSIZEQQ(QWIN$FRAMEWINDOW, winfo)

icont_ = 0
info_ = 0
open(unit = 5, file = 'exp.txt')
do while (info_ == 0)
  if(info_ == 0) icont_ = icont_ + 1 ← READ EXPERIMENTAL TIMES
  read(5,*, iostat = info_) time(icont_)
end do
close(5)

open(unit = 5, file = 'parameters.txt')
read(5, *) information !unsteady.txt, unsteady_a1.txt, unsteady_a2.txt, unsteady_a3.txt, unsteady_a4.txt
read(5, *) N_Param !number of parameters provide by optimizer ← READ INFORMATION PROVIDE BY OPTIMIZER
read(5, *) a1, a2, a3, a4 !parameters provide by optimizer
close(5)
    
```

Fonte: Silva e Silva, 2017.

O arquivo “parameters.txt” é gerado pelo *software LS Optimizer* com informações que devem ser lidas e usadas pelo solucionador da equação diferencial. Um exemplo do arquivo “parameters.txt” pode ser visto na Figura 3.14. O primeiro valor será lido pelo solver como uma variável inteira chamada "informação". O segundo valor fornecido pelo *software LS Optimizer* será lido pelo solucionador como uma variável inteira chamada “N_Param” que indica o número de parâmetros envolvidos na solução da equação diferencial. Finalmente, a terceira informação está relacionada aos valores estabelecidos pelo *software LS Optimizer* para os parâmetros (a_1 , a_2 , a_3 e a_4).

Figura 3.14 –Exemplo de arquivo “Parameters.txt”, fornecido pelo *software LS Optimizer*, a ser usado pelo solucionador.



Fonte: *Ls Optimizer*.

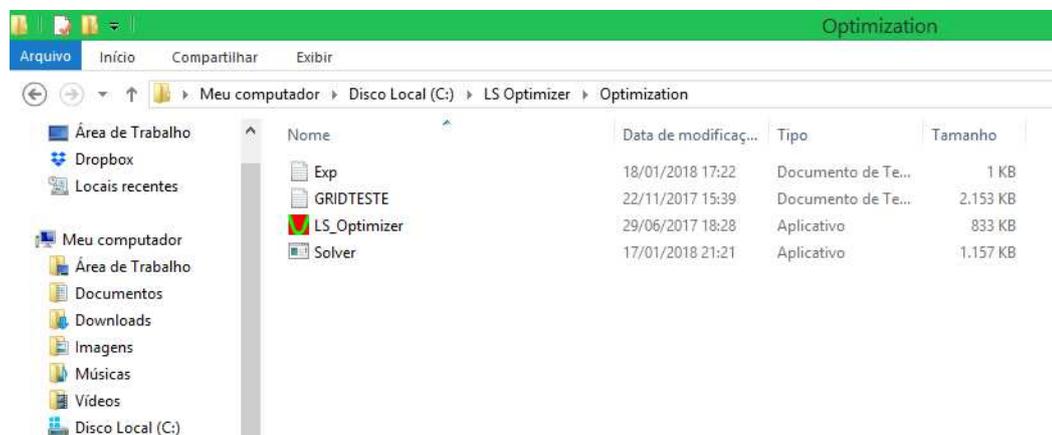
O princípio de funcionamento para o *LS Optimizer* é supor valores para os parâmetros da equação diferencial e calcular os valores da grandeza de interesse que correspondam aos dados experimentais contidos no arquivo “exp.txt”. Os valores simulados devem ser comparados aos experimentais de forma que a diferença entre os dois valores seja minimizada.

O método utilizado para minimização da diferença entre os valores simulados e experimentais foi o dos mínimos quadrados. A função a ser minimizada é o qui-quadrado (χ^2), expressa pela Equação 3.146. Por se tratar de solução numérica, em geral, Γ^Φ pode ser expresso por uma função $f(\Phi, a_1, a_2)$ em que “ a_1 ” e “ a_2 ” são constantes que podem ser determinadas via otimização. O h foi determinado pelo valor do parâmetro a_3 no processo de otimização.

O código solucionador após ser executado criará um arquivo executável com formato ‘.exe’. Este arquivo deve ser copiado e colado na pasta ‘*optimization*’ contida no arquivo do otimizador. Já na pasta ele deve ser renomeado com o nome ‘solver’. Nesta mesma pasta devem ser colocados o arquivo ‘exp.txt’ que contém os dados experimentais, como foi descrito anteriormente e um arquivo “txt” com os dados da malha tridimensional gerada para a geometria arbitrária.

Na pasta “*optimization*”, além dos arquivos em “txt” e o Solver deve conter também o aplicativo do otimizador conforme mostra a Figura 3.15. Este aplicativo é o arquivo executável do otimizador apresentado, enquanto o solver deve resolver a equação diferencial para os valores dos parâmetros a_1 , a_2 , a_3 e a_4 especificados pelo *LS Optimizer*.

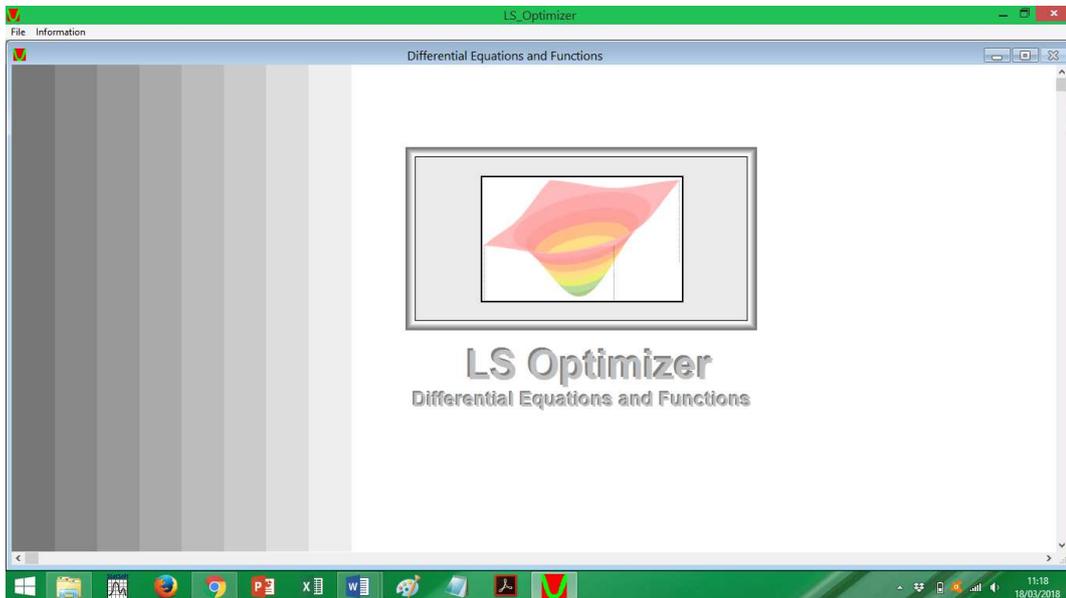
Figura 3.15 – Pasta “*Optimization*” do *LS Optimizer*.



Fonte: *Ls Optimizer*.

Após estes arquivos serem colocados nesta pasta, o aplicativo do programa deve ser aberto para ser iniciado o processo de otimização. Ao clicar no aplicativo “LS_Optimizer.exe” abre-se a janela mostrada na Figura 3.16.

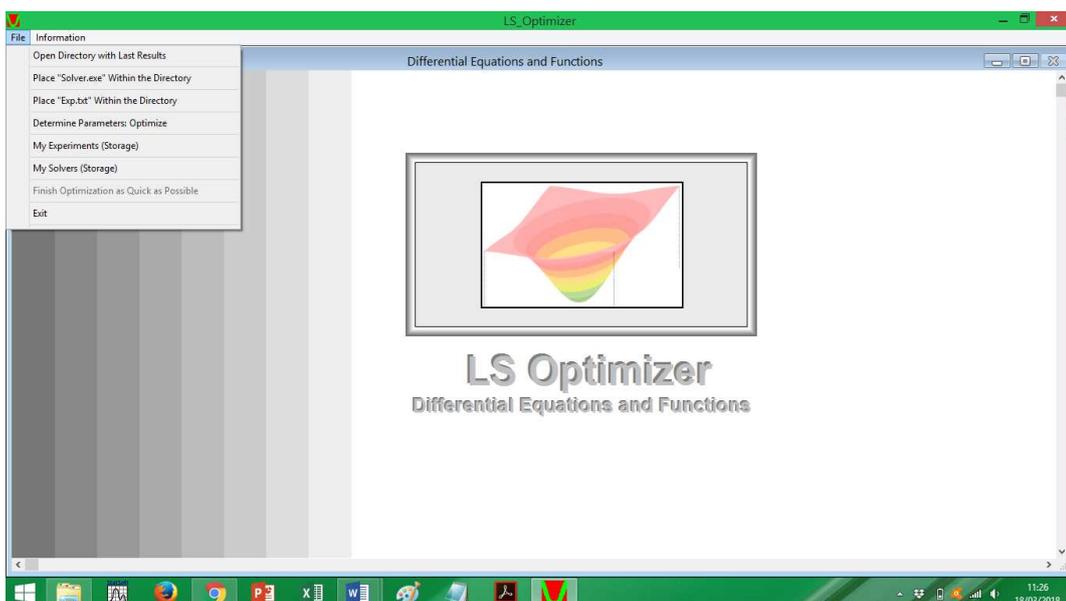
Figura 3.16 – Aplicativo *LS Optimizer* aberto.



Fonte: *LS optimizer*.

Após aberto o programa, basta clicar em *file*, em seguida selecionar a opção “Determine Parameters: Optimize” (Figura 3.17).

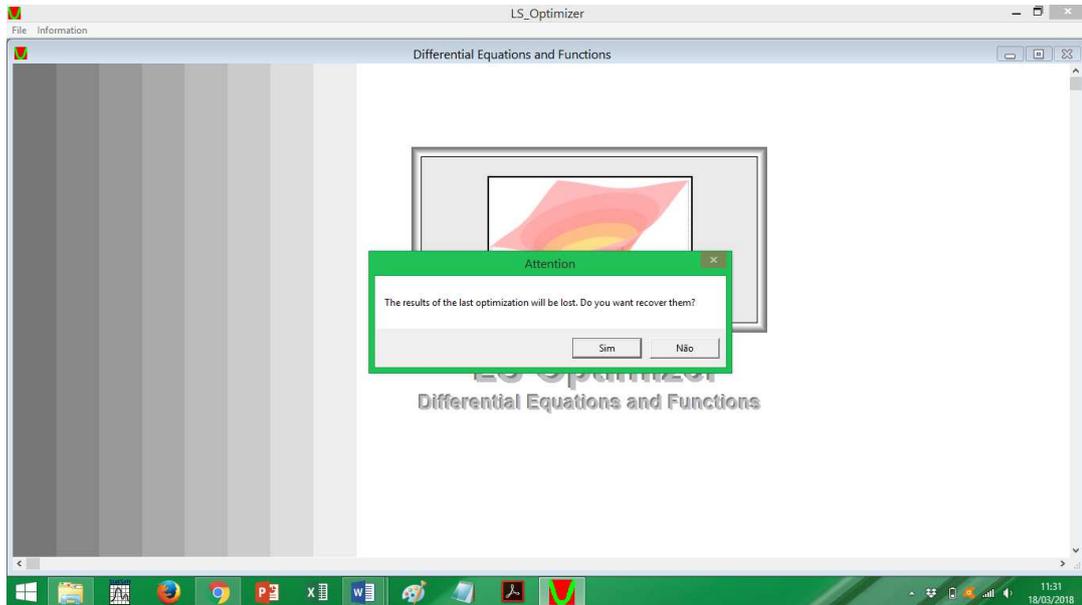
Figura 3.17 – Mostra as opções do arquivo *file*.



Fonte: *LS Optimizer*.

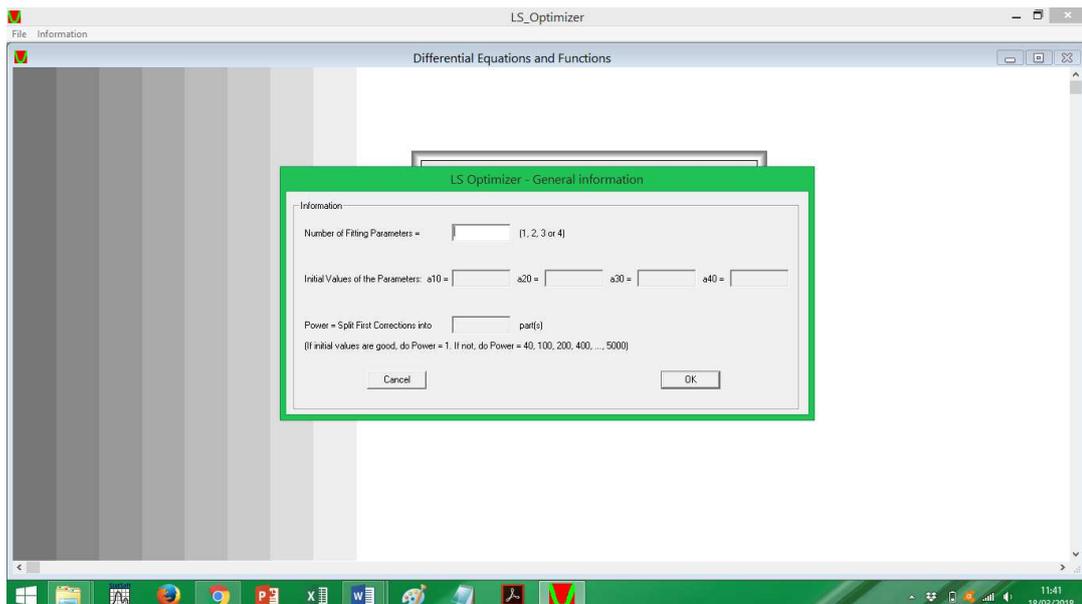
Ao clicar nessa opção, abre-se outra janela (Figura 3.18), na qual é avisado que os resultados da última otimização serão perdidos e pergunta se deseja recuperá-los. Basta, geralmente, clicar em “não” para aparecer a caixa de diálogo mostrada na Figura 3.19.

Figura 3.18 – Caixa de diálogo alertando que os resultados anteriores serão perdidos.



Fonte: *LS Optimizer*.

Figura 3.19 – Caixa de diálogo solicitando informações do processo de otimização.



Fonte: *LS Optimizer*.

A caixa de diálogo mostrado na Figura 3.19 solicita que sejam informados os números de parâmetros, os valores estimados inicialmente para esses parâmetros, bem como, a quantidade de partes iniciais que devem ser divididas as primeiras correções. Após cada informação ser fornecida, clica-se no botão “OK” para iniciar o processo de otimização.

Terminado o processo, o *LS Optimizer* gera o arquivo “*Results.txt*” que contém o histórico da otimização, apresentando os valores dos parâmetros, incertezas, resíduos e outros resultados. Logo em seguida é perguntado se o usuário quer que seja plotado o gráfico do processo, no qual é mostrado os pontos experimentais e a curva simulada utilizando os parâmetros obtidos na otimização.

No caso desta pesquisa, foram determinados três parâmetros (a_1 , a_2 e a_3), sendo que a_1 e a_2 são os parâmetros da função que expressa a difusividade efetiva de massa, enquanto a_3 representa o valor do coeficiente de transferência convectivo de massa. As primeiras correções foram divididas em 40 partes.

3.11 – Usando o código numérico desenvolvido por Farias, V. (2011)

A previsão de aplicações do código computacional proposto por Farias, V. (2011) é diversificada, podendo ser utilizado em qualquer situação que envolva processo de difusão bi e tridimensional em um domínio arbitrário. Para exemplificar as possíveis aplicações, pode-se citar, a transferência de massa, condução de calor, secagem de sólidos porosos, aquecimento, resfriamento e, em alguns casos, congelamento de corpos.

O código apresentado foi desenvolvido na plataforma Windows, através da utilização do estúdio *Compaq Visual Fortran (CVF)*, versão 6.6.0 *Professional Edition*, usando a opção de programação *QuickWin Application* e, para o seu entendimento e utilização, foram realizadas simulações para as quais uma solução analítica ou numérica seja conhecida.

As simulações para testar o código computacional utilizado envolveram os seguintes cenários:

- Difusão em regime transiente para sólidos gerados por malhas ortogonais;

- Difusão em regime transiente para sólidos gerados por malhas não-ortogonais e retilíneas. Neste caso, o sólido gerado possui a seção transversal na forma de um losango;
- Difusão em regime transiente para sólidos gerados por malhas curvilíneas. Neste caso foram estudados o cilindro finito e o cilindro infinito;
- Análise da distribuição espacial de Φ em planos dos sólidos para alguns instantes de tempo previamente especificados;
- Análise do valor de Φ em função do tempo para alguns volumes de controle previamente escolhidos;
- Análise do valor médio de Φ em função do tempo para o plano central de alguns sólidos;
- Análise do valor médio de Φ em função do tempo para o cilindro finito;
- Análise do efeito de variações no parâmetro Γ^Φ ao longo do tempo para o cilindro infinito;

3.12 - Programas computacionais usados neste trabalho

Além dos programas computacionais utilizados e mencionados anteriormente os programas computacionais listados a seguir e disponíveis na internet também foram utilizados neste trabalho.

1) Neste trabalho o programa computacional *LAB Fit Curve Fitting* V 7.2.46 (SILVA e SILVA 2011b) foi usado para determinar os gráficos da cinética de secagem das telhas e também a curva da taxa de secagem e encontrar as raízes da equação transcendental (2.21). Este programa computacional foi criado para tratamento e análises de dados experimentais.

2) O Programa computacional 2D *Grid Generation* V. 5.1 (SILVA, 2008a) foi usado para gerar as malhas a partir dos pontos de contorno de uma foto da telha digitalizada em “bmp”. Este programa computacional foi criado, a partir das equações elípticas de Laplace e Poisson para a geração de malhas estruturadas não-ortogonais, simplesmente conexas e bidimensionais a partir da informação de pontos (x, y) dos contornos. Estes pontos que podem estar contidos em um arquivo de dados com extensão “txt” ou a partir da digitalização de pontos dos contornos disponíveis em uma figura contida em um arquivo de extensão “bmp”.

3) O programa computacional 1D *Heat Transfer*, (SILVA, 2008b) que foi usado para validação do código foi desenvolvido e é destinado ao estudo da difusão transiente unidimensional. Resolve numericamente a equação de difusão unidimensional.

4) O *Diffusion RE V 2.2.0*, (SILVA, 2008c) que foi usado para validar o código proposto é um programa computacional desenvolvido na plataforma Windows que resolve a equação de difusão para qualquer sólido que possa ser obtido a partir da revolução de uma superfície arbitrária em torno de um eixo de simetria ou para sólidos longos de extrusão gerados por malhas bidimensionais arbitrárias.

5) O “*Convective*” *software V. 2.4* (SILVA, 2009b) simula a cinética de secagem de produtos usando a solução analítica da equação de difusão empregando condição de contorno de terceiro tipo. Com este software foi possível determinar os números de Biot, as difusividades D e os coeficientes de transferência convectiva de massa h entre outros dados do experimento.

6) O software *Contour Plot* (SILVA, W. 2010) possibilita analisar visualmente a evolução temporal da distribuição espacial do transporte da grandeza Φ em uma malha bidimensional no domínio físico. As figuras da distribuição de umidade deste trabalho foram feitas utilizando este *software*.

3.13 – Aplicação do código computacional à secagem de sólidos cerâmicos

Apresenta-se a seguir todo o procedimento da secagem das telhas cerâmicas, desde a metodologia experimental, passando pela análise granulométrica e química até o processo de secagem para em seguida aplicar o código computacional desenvolvido por Farias, V. (2011).

3.13.1 – Metodologia experimental

Para a realização do experimento a metodologia foi baseada nas experiências usadas pelos pesquisadores Almeida (2009) e Farias, V. (2011) em seus trabalhos de pesquisas de teses.

3.13.2 – Procedimento e materiais

Os sólidos utilizados para o desenvolvimento da parte experimental deste trabalho foram telhas ornamentais tipo canal adquiridas na Cerâmica Barra, localizada no município de Araçagi no Estado da Paraíba, Brasil.

3.13.3 – Procedimento de fabricação de telha na Cerâmica Barra

Inicialmente foi feita uma visita à Cerâmica Barra visando acompanhar o processo de fabricação e secagem das telhas. Durante a visita, antes da secagem das telhas, foram adquiridas algumas amostras ainda úmidas do produto para servir como corpos de prova da presente pesquisa.

No processo de fabricação das telhas é usado um só tipo de argila (piolho) que é retirada de uma jazida localizada próxima à cerâmica. A argila é transportada das jazidas para os galpões de estocagem ficando armazenada ao ar livre, não sendo necessário triturar, pois ao ser retirada dos depósitos ela já sai adequada para ser misturada à água.

A obtenção da umidade e plasticidade adequada para extrusão é feita misturando-se manualmente, água numa proporção aproximada de 25% na argila e batendo-se para se obter o ponto ideal de levar a mistura para a extrusora. Este procedimento é feito doze horas antes do início do processo de conformação das telhas.

Após a etapa descrita acima, a argila úmida passa por um laminador, que completa a mistura, e é responsável por um adensamento, eliminando bolhas de ar ou aglomerados remanescentes.

Em seguida, ao sair do laminador, a massa é transportada para uma extrusora que é responsável pela conformação do produto. Esse transporte é feito conforme mostrado na Figura 3.20.

Figura 3.20 – Transporte da argila para conformação.



Fonte: Autoria própria.

Na extrusora a massa é impulsionada por um propulsor através de uma chapa de aço perfurada, lançando-a dentro de uma câmara de vácuo. O ar é retirado pela câmara de vácuo e o material é extraído, através de uma matriz de aço (boquilha), conformando a massa no formato de telha canal.

O corte das telhas é feito continuamente em tamanhos padronizados por meio de uma cortadeira automática acoplada à extrusora operando em sincronia com o deslocamento do bloco em extrusão obtendo-se as telhas, que em seguida são transportadas para iniciar o processo de secagem.

A Figura 3.21 mostra as telhas expostas ao ar livre durante o processo de secagem por um período aproximado de 5 horas.

Figura 3.21 – Início da secagem das telhas.



Fonte: Autoria própria.

A seguir as telhas são levadas para o forno e lá são submetidas a uma temperatura inicial que chega a 110 °C, por um período de aproximadamente 10 horas. Em seguida a temperatura do forno é aumentada gradativamente até 800 °C, iniciando-se o período da queima das telhas que ficam submetidas a essa temperatura por um período de 48 horas. A temperatura do forno é medida por meio de um termopar digital de fio.

Após esse período, as telhas permanecem no forno, que é desligado para o processo de resfriamento por um tempo de aproximadamente 24 horas. Ao final deste procedimento as telhas estão prontas para serem usadas pela indústria da construção civil.

3.13.4 – Procedimento dos experimentos em laboratório

Na Cerâmica Barra, as telhas úmidas (sem a retirada da água) foram escolhidas

aleatoriamente, sendo acondicionadas em sacos plásticos e depois lacrados para evitar a perda de umidade. Em seguida, foram transportadas para o Laboratório de Transferência de Calor e Massa da Universidade Federal da Campina Grande, Campus I, onde ficaram aguardando o processo de secagem.

3.13.5 – Análise granulométrica

Para a análise granulométrica e química, a telha cerâmica que secou ao ar livre, por uma semana, foi triturada em almofariz com uso de pistilo e em seguida foi passada em peneira de tela em inox com malha 200. A trituração foi realizada no Laboratório de Tecnologia dos Materiais da Unidade Acadêmica de Engenharia de Materiais da Universidade Federal de Campina Grande. Na análise granulométrica foi utilizada a técnica de difração a Laser para realizar a caracterização. O equipamento utilizado foi o Mastersizer 2000 da Malvern Instruments (Figura 3.22).

O Mastersizer 2000 é um aparelho utilizado para medir o tamanho das partículas, ou mais especificamente, a distribuição dos diferentes tamanhos de partículas em uma amostra através da difração de raio laser, realizando uma medição rápida e confiável de ampla variedade de tipos de amostras, em um só aparelho, com alta resolução. Possui unidade de dispersão aquosa e a seco. Alguns materiais só podem ser medidos em dispersões aquosas como as argilas (esmectita, caulinita, etc), ou materiais que têm a tendência a aglomerar quando secos como o dióxido de titânio. Para as análises aquosas, o acessório utilizado foi Hydro 2000MU. O equipamento possui um sistema de detectores com luz vermelha, que detectam o espalhamento frontal, lateral e posterior. A fonte de luz vermelha é o Laser néon de Hélio, cujo comprimento de onda define a faixa de tamanho de partícula que o aparelho mede. Nesse caso, como $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, o Mastersizer mede de 0,1 a 1000 microns (WAGNER e ARANHA, 2007).

Figura 3.22 – Equipamento usado na caracterização da argila



Fonte: Autoria própria.

3.13.6 – Análise química

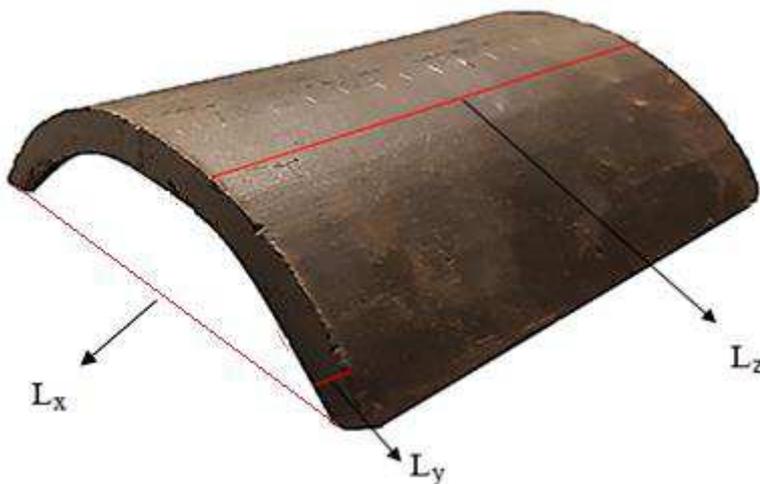
A análise química da amostra foi realizada para identificação de constituintes mineralógicos por meio de um estudo qualitativo utilizando a técnica de DRX. As análises das amostras, na forma seca e tratadas com etileno glicol, foram realizadas em difratômetro de raios X da Shimadzu, XRD-6000, operando com radiação K- α de cobre, com voltagem de 40 kV e 30 mA de corrente. As amostras foram analisadas com varredura entre 5° e 60°; a taxa de velocidade do goniômetro foi 2 °/min.

3.13.7 – Processo de secagem

A secagem das telhas foi realizada no Laboratório de Armazenamento e Processamento de Produtos Agrícolas da Unidade Acadêmica de Engenharia Agrícola da Universidade Federal de Campina Grande.

Antes de iniciar o processo de secagem foram realizadas todas as medições das telhas, largura (L_x), espessura (L_y), comprimento (L_z), e massa (m). As dimensões de uma das telhas utilizadas neste trabalho estão identificadas na Figura 3.14. Imediatamente, antes de colocar as amostras no secador foram realizadas as medidas da temperatura, da velocidade do ar de secagem do secador, bem como da umidade relativa e da temperatura ambiente do local.

Figura 3.23 – Amostra de uma das telhas cerâmicas utilizadas nesta pesquisa



Fonte: Autoria própria

A medida da espessura de cada telha, bem como as medidas das larguras (na parte da frente e na parte detrás) foram feitas com um paquímetro digital TDS marca *Digimess*, modelo 100.174BL, com uma resolução de 0,01 mm e fundo de escala 150 mm. Vale destacar que a parte da frente foi considerada a que tem a menor largura. O comprimento das telhas foi feito com uma trena da marca STARRETT modelo TS34-5ME, com graduação em milímetros, centímetros e polegadas.

A massa da telha foi medida com uma balança digital da marca RADWAG, modelo PS 510/C/1, número de série 227099/08, com uma resolução de 0,001 g e capacidade máxima de 510 g.

A temperatura e umidade relativa do ambiente foram medidos com um higrômetro digital da ICEL, modelo HT 208, série 3126.

A temperatura do ar de secagem, ajustada manualmente no secador, foi medida com um termopar com leitura digital de fio modelo MT 455 – THERMOMETER que mede a temperatura no interior do secador.

A velocidade do ar de secagem, ajustada manualmente no secador, foi medida com um anemômetro de palhetas com leitura digital da marca TDA 800 – INSTRUTEMP com precisão de leitura de $\pm 2\%$.

Depois destes procedimentos, a telha foi colocada no secador de bancada com controlador manual de temperatura e de velocidade do fluxo de ar, construído no Laboratório de Armazenamento e Processamento de Produtos Agrícolas da Unidade Acadêmica de Engenharia Agrícolas da Universidade Federal de Campina Grande. As temperaturas para o processo de secagem foram de 71 °C e 62 °C com velocidades do fluxo de ar de 0,62 m s⁻¹ e 1,17 m s⁻¹ para cada temperatura. Assim foram realizados quatro ensaios para o processo de secagem.

Após a amostra ser colocada no secador, houve um acompanhamento da evolução temporal das dimensões e da massa da telha. A cada período de tempo a telha era retirada do secador e todas as suas dimensões e massa eram medidas e anotadas em uma tabela. Em seguida

a amostra era recolocada no secador. O período de tempo de retirada da telha para avaliação das medidas variou, no início a cada cinco minutos, chegando a cada duas horas no final do processo de secagem. Os intervalos de tempo variaram para cada temperatura e velocidade do ar de secagem, este procedimento aconteceu até que a massa atingisse seu valor de equilíbrio.

Ao término de cada processo de secagem, após 1440 minutos, as telhas foram levadas para uma estufa regulada a 105 °C e lá permaneceram por mais 1440 minutos para a eliminação total da água permitindo assim, que se determinasse a massa seca, de acordo com o método oficial da *Association of Official Agricultural Chemists* (AOAC, 2005).

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE E RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados referentes aos estudos experimental e teórico do processo de difusão de sólidos com forma arbitrária. O estudo experimental foi direcionado para secagem de telhas cerâmicas com ar aquecido, destacando dois períodos de secagem: período com taxa de secagem constante e período com taxa de secagem decrescente. Inicialmente, serão apresentados os resultados experimentais de secagem contínua para quatro condições experimentais combinando duas temperaturas e duas velocidades do fluxo de ar. Em seguida, são apresentados os resultados teóricos da otimização usando solução analítica 3D em coordenadas cartesianas, considerando as telhas na forma de paralelepípedo e aqueles referentes à aplicação do modelo numérico desenvolvido.

O estudo analítico resultou no desenvolvimento de um código numérico em que foi possível resolver a Equação (3.158) e obter os valores da distribuição do teor de umidade para uma placa de forma retangular.

Para realizar a otimização, o *LS optimizer* foi acoplado ao código computacional utilizado. Quanto ao método numérico, a equação de difusão tridimensional foi resolvida numericamente em coordenadas generalizadas com a condição de contorno do terceiro tipo usando o código computacional desenvolvido por Farias, V. (2011) e adaptado para o caso da presente pesquisa. Visando à compreensão do código numérico utilizado, vários testes foram simulados envolvendo diversas situações físicas para diferentes geometrias. Finalmente são apresentados os resultados da aplicação da solução numérica aos dados experimentais da secagem de telhas cerâmicas.

4.1 – Experimentais

4.1.1 – Caracterização da matéria-prima

Antes do processo da secagem das telhas cerâmicas foi realizada a caracterização da matéria prima para se determinar a granulometria e a análise química da massa cerâmica. Neste item apresentam-se os resultados obtidos dos ensaios de caracterização química da massa cerâmica utilizada neste trabalho de pesquisa.

4.1.1.1 – Análise química

A Tabela 4.1 apresenta a composição química da massa cerâmica utilizada na

fabricação da telha e que serviu de amostra deste trabalho.

Tabela 4.1 – Composição química da argila.

Componentes	SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	K ₂ O	MgO	SO ₃	CaO	Outros
Composição química (%)	59,17	26,34	5,95	3,15	1,94	1,05	0,99	1,41

Fonte: Autoria própria.

Após uma análise da Tabela 4.1 verifica-se que o material argiloso apresenta uma composição típica de argila para cerâmica vermelha com predominância de sílica (SiO₂) e óxido de alumínio (Al₂O₃) e alto teor de óxido de ferro (Fe₂O₃). O material cerâmico possui outros constituintes com percentuais menores como, por exemplo, óxido de potássio (K₂O) com 3,15%, óxido de magnésio (MgO) com 1,94%, óxido sulfúrico (SO₃) com 1,05% e óxido de cálcio (CaO), que tem um percentual de 0,99%. Existem outros elementos que compõem a massa com percentuais menores que um e, portanto, foram dispensados da apresentação na tabela.

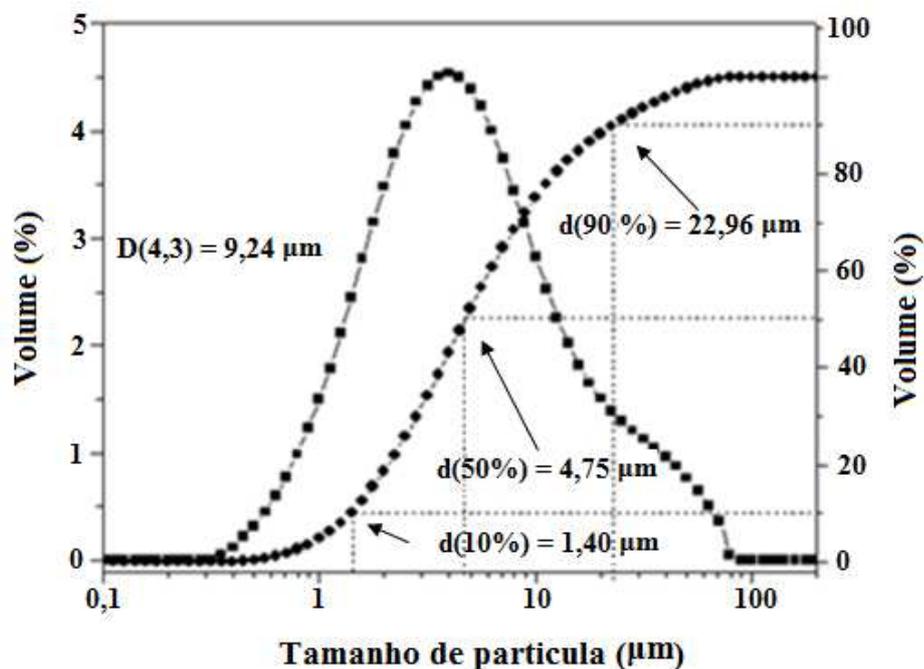
O percentual de sílica acima de 59% e óxido de alumínio acima de 26% presentes na argila indica, segundo Silva, J. (2009), que ela possui uma grande quantidade de material não plástico, elevando a porosidade da telha e consequentemente diminuindo o tempo de secagem e a retração volumétrica. Com um percentual de óxido de ferro de 5,95%, as peças cerâmicas produzidas com essa argila vão ter uma cor tipicamente avermelhada após a queima, pois, segundo Facincani (1992), percentuais de teores de óxido de ferro acima de 4% nas argilas acentua a cor avermelhada do produto após a queima.

4.1.1.2 – Análise granulométrica

Na Figura 4.1 são apresentadas a caracterização da granulometria da argila e a curva cumulativa.

Pode-se observar que a faixa de distribuição granulométrica varia de 0 a 100 µm com tamanho de diâmetro médio D(10 %) de 1,40µm, D(50 %) de 4,75µm e D(90 %) de 22,96 µm, cujo tamanho médio de aglomerados de partículas foi de 9,24 µm.

Figura 4.1 – Distribuição granulométrica da argila e curva cumulativa.



Fonte: Autoria própria.

4.1.2 – Dados experimentais da secagem

As informações sobre a metodologia experimental da secagem do material cerâmico foram apresentadas no Capítulo 3, tendo sido realizados os quatro ensaios experimentais denominados E1, E2, E3 e E4, conforme descritos na Tabela. 4.2.

A média da umidade relativa e temperatura ambiente na realização do processo de secagem foram respectivamente 40,36 % e 35,11 °C.

Tabela 4.2 – Ensaios realizados na pesquisa.

Ensaio	Temperatura (°C)	Velocidade (m s^{-1})
E1	62	0,62
E2	62	1,17
E3	71	0,62
E4	71	1,17

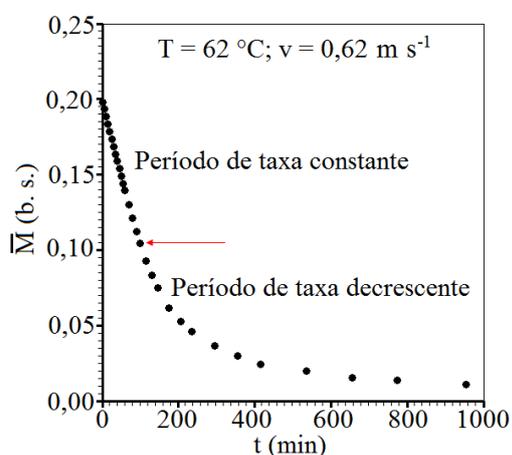
Fonte: Autoria própria.

Os dados coletados oriundos dos quatro ensaios realizados estão expostos em tabelas localizadas no apêndice 1.

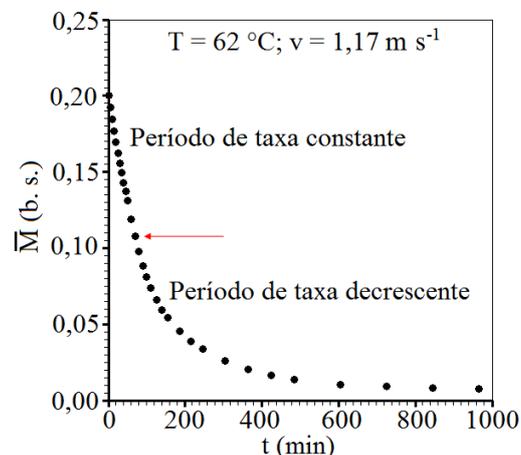
4.1.2.1 – Cinética de secagem a partir dos dados experimentais

Os dados experimentais mostraram que no processo de secagem existem duas etapas distintas de secagem: a primeira em que a secagem ocorre a uma taxa constante, e a segunda, no restante do processo, em que a taxa é decrescente. Gráficos mostrando o desempenho da cinética de secagem para as quatro situações estudadas são apresentados na Figura 4.2.

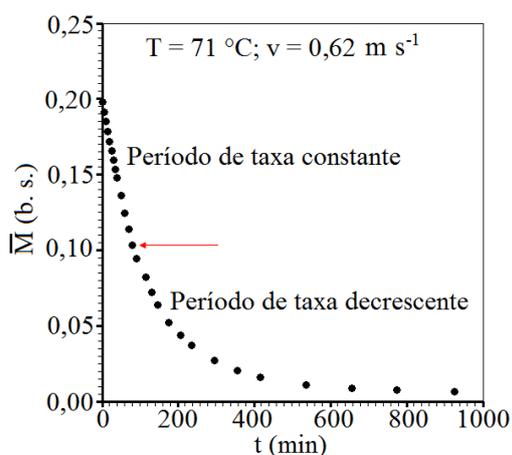
Figura 4.2 – Gráficos da cinética de secagem para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.



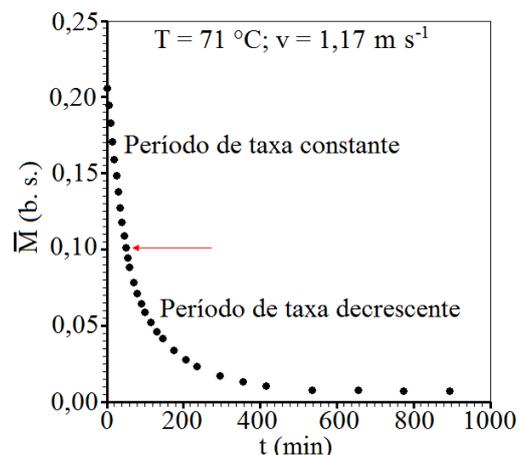
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Autoria própria.

Em cada gráfico há uma seta que destaca o instante em que o processo deixa de acontecer a uma taxa de secagem constante, passando a ocorrer a uma taxa de secagem decrescente. Esses gráficos mostram também que o instante em que ocorre a mudança de taxa constante para taxa decrescente é diferente para cada temperatura. No entanto, o teor de umidade para o referido instante é aproximadamente o mesmo para todas as temperaturas, possuindo valores que variam entre 0,10 (bs) e 0,11 (bs), aproximadamente.

A Tabela 4.3 contém informações sobre as condições de secagem das telhas cerâmicas para os quatro ensaios. A tabela mostra, para cada ensaio: o teor de umidade inicial em base seca (M_i), o teor de umidade de equilíbrio em base seca (M_{eq}) e as dimensões das telhas no início de cada período considerado (período de taxa de secagem constante e período de taxa de secagem decrescente)

Tabela 4.3 – Ensaios, teor de umidade inicial (M_i), teor de umidade equilíbrio (M_{eq}), espessura, largura da parte maior e comprimento iniciais das telhas.

Ensaios	M_i (b.s.)	M_{eq} (b.s.)	Espessura (m)	Largura (m)	Comprimento (m)
Período de taxa constante					
E1	0,19811	-	$10,71 \times 10^{-3}$	$141,55 \times 10^{-3}$	$157,00 \times 10^{-3}$
E2	0,20030	-	$11,15 \times 10^{-3}$	$137,58 \times 10^{-3}$	$155,00 \times 10^{-3}$
E3	0,19775	-	$11,17 \times 10^{-3}$	$141,20 \times 10^{-3}$	$157,00 \times 10^{-3}$
E4	0,20568	-	$11,38 \times 10^{-3}$	$145,12 \times 10^{-3}$	$153,00 \times 10^{-3}$
Período de taxa decrescente					
E1	0,10424	0,00981	$10,10 \times 10^{-3}$	$137,72 \times 10^{-3}$	$153,00 \times 10^{-3}$
E2	0,10769	0,00650	$10,28 \times 10^{-3}$	$133,58 \times 10^{-3}$	$150,00 \times 10^{-3}$
E3	0,10338	0,00571	$10,10 \times 10^{-3}$	$137,52 \times 10^{-3}$	$152,00 \times 10^{-3}$
E4	0,10086	0,00635	$10,45 \times 10^{-3}$	$138,23 \times 10^{-3}$	$148,00 \times 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria.

Como os dados experimentais revelam que o processo apresenta duas fases distintas: primeira em que a secagem acontece a uma taxa constante, e a segunda, no restante do processo de secagem, em que a taxa é decrescente, parece razoável que o uso da equação de difusão para descrever o processo deve ser feito a partir do instante em que o processo acontece a taxa decrescente.

Os limites entre os dois períodos foram visualmente identificados na Figura 4.2 para os instantes 100, 70, 80 e 50 min para os ensaios E1, E2, E3 e E4, respectivamente. Assim, a análise do processo foi dividido em duas etapas: a primeira usou o modelo linear e a segunda o modelo difusivo.

4.1.2.2 – Período de taxa constante de secagem

Para o período de taxa constante, a análise apresentada usou um modelo linear expresso pela Equação 4.1, relacionando o teor de umidade diretamente com o tempo, a partir do teor inicial de umidade até um teor de umidade de aproximadamente 0,11.

$$M = a.t + b \quad (4.1)$$

Na Tabela 4.4, apresentam-se os parâmetros de ajustes e os indicadores estatísticos do período de taxa de secagem constante.

Tabela 4.4 – Dados dos ajustes e indicadores estatísticos do período de taxa constante.

Ensaíos	a	b	χ^2	R ²
E1	-0,96275x10 ⁻³	0,19768	0,44612x10 ⁻⁵	0,9996
E2	-1,35553x10 ⁻³	0,19796	2,27121x10 ⁻⁵	0,9968
E3	-1,20726x10 ⁻³	0,19658	0,77757x10 ⁻⁵	0,9990
E4	-2,17233x10 ⁻³	0,20418	2,03608x10 ⁻⁵	0,9979

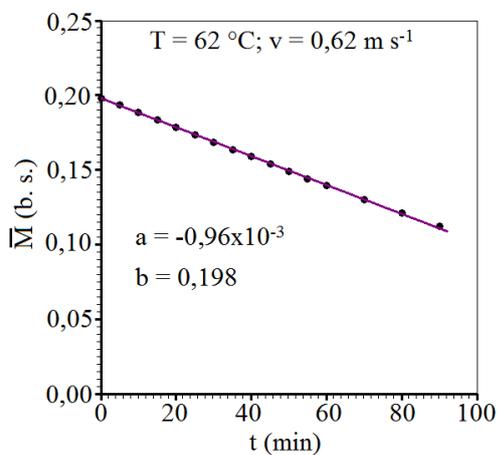
Fonte: Autoria própria.

A Figura 4.3 apresenta os ajustes de curvas para o período de taxa constante de

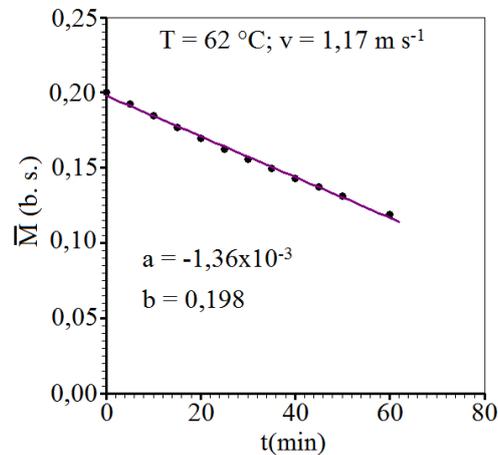
secagem para os ensaios E1, E2, E3 e E4.

Figura 4.3 – Gráficos da cinética de secagem, no período de taxa constante para os ensaios

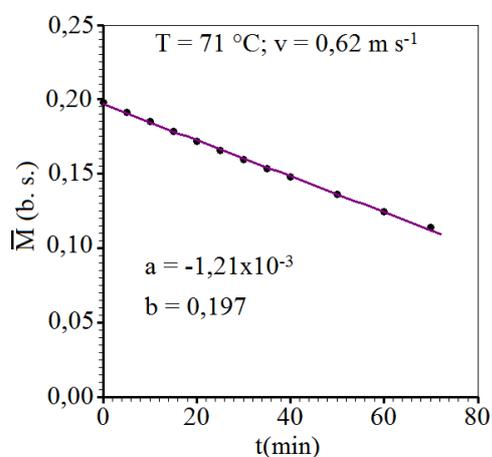
(a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.



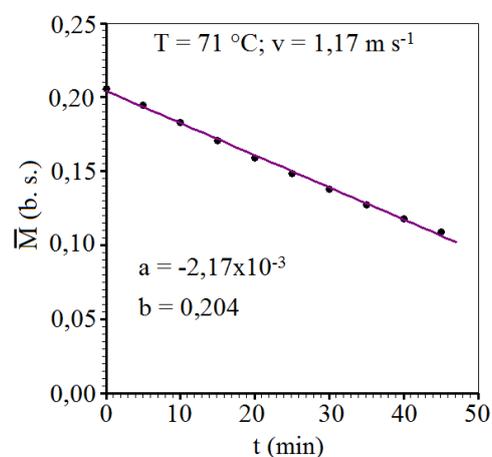
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Autoria própria.

No presente estudo, o instante em que começa o processo com taxa decrescente foi tomado como o instante inicial do processo difusivo e a distribuição de umidade foi considerada uniforme nesse instante. Esta consideração é razoável, porque durante o intervalo de tempo em que o processo acontece a uma taxa constante, pode-se considerar que, a exemplo da lei de resfriamento de Newton, a distribuição da grandeza de interesse é uniforme em todos pontos no interior do sólido.

4.2 – Análise da cinética de secagem para telhas cerâmicas usando solução analítica

As soluções analíticas, usando aproximações e simplificações permitem identificar relações entre as variáveis e podem ser ajustadas aos casos reais mediante uso de coeficientes apropriados. Assim, uma solução analítica da equação de difusão foi usada inicialmente para descrever o processo de secagem das telhas cerâmicas.

Serão apresentados nesta seção os resultados de um estudo teórico/experimental usando a solução analítica da equação de difusão e os dados experimentais da secagem de telhas cerâmicas, colhidos durante a realização deste trabalho de acordo com o que foi descrito no Capítulo 3. Nesta etapa do estudo, a geometria conferida à telha foi de um paralelepípedo.

Durante a descrição da secagem de materiais cerâmicos utilizando modelos difusivos, alguns autores verificaram que os resultados indicam que um fator significativo na descrição do processo é a escolha correta da condição de contorno, que deve ser do terceiro tipo (FARIAS, V. 2011; SILVA, C. et al. 2012). Deste modo, a condição de contorno empregada em todo o desenvolvimento deste trabalho foi a convectiva.

Nesta etapa da pesquisa, foi utilizado o “*Convective*” *software* desenvolvido por Silva e Silva (2009), para a otimização dos processos difusivos com condição de contorno do terceiro tipo.

Os números de Biot para a transferência de massa, a difusividade efetiva de água, bem como os coeficientes de transferência de massa convectiva foram obtidos por otimização e são apresentados na Tabela 4.5. Nesta tabela, os números de Biot referem-se à dimensão menor das telhas.

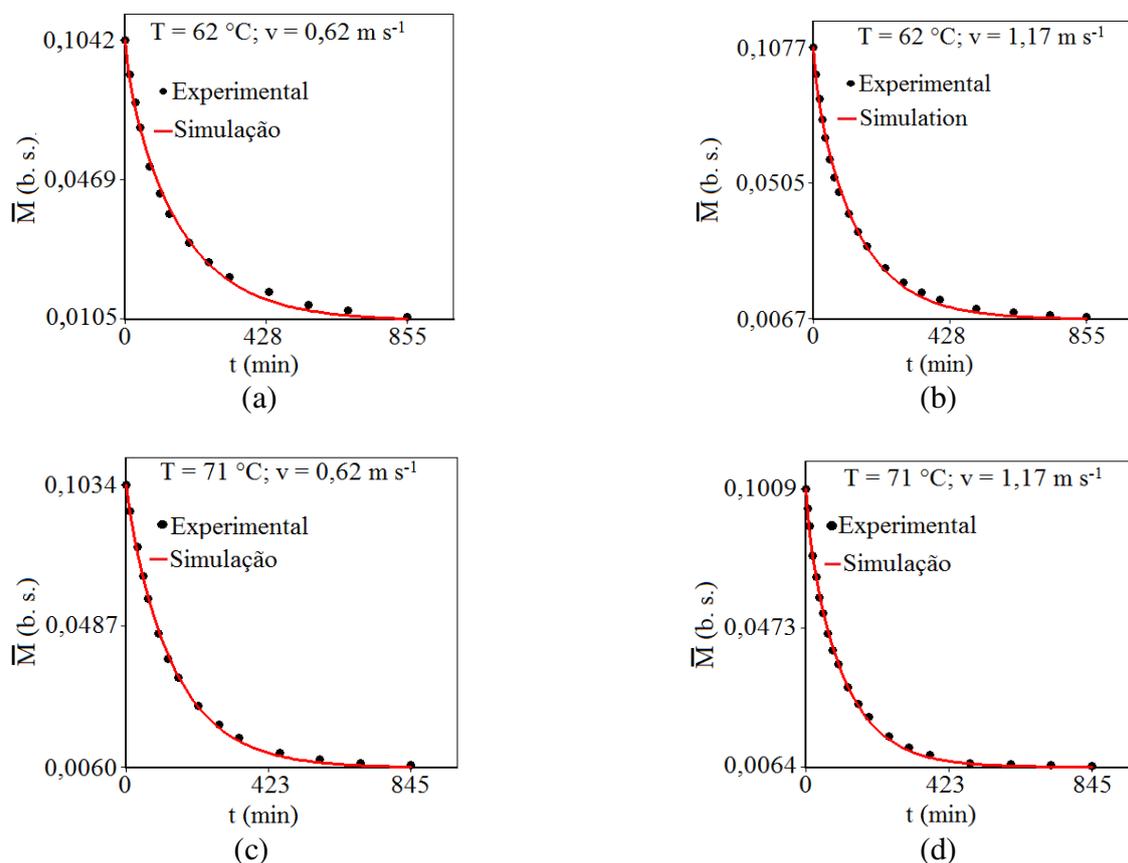
Tabela 4.5 – Resultados da otimização para o período de taxa decrescente.

Ensaio	Bi	D_{ef} ($m^2 \text{ min}^{-1}$)	h ($m \text{ min}^{-1}$)	χ^2	R^2
E1	4,4375	$0,84313 \times 10^{-7}$	$0,74087 \times 10^{-4}$	$5,25320 \times 10^{-5}$	0,9964
E2	6,7500	$0,88473 \times 10^{-7}$	$1,16185 \times 10^{-4}$	$4,40624 \times 10^{-5}$	0,9981
E3	3,7500	$1,18955 \times 10^{-7}$	$0,77412 \times 10^{-4}$	$0,11101 \times 10^{-5}$	0,9995
E4	5,2500	$1,30637 \times 10^{-7}$	$1,31262 \times 10^{-4}$	$1,54413 \times 10^{-5}$	0,9993

Fonte: Autoria própria.

Uma vez determinados os parâmetros do processo, foi possível construir os gráficos que representam a cinética de secagem, incluindo os dados experimentais que podem ser vistos na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Cinética de secagem para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.



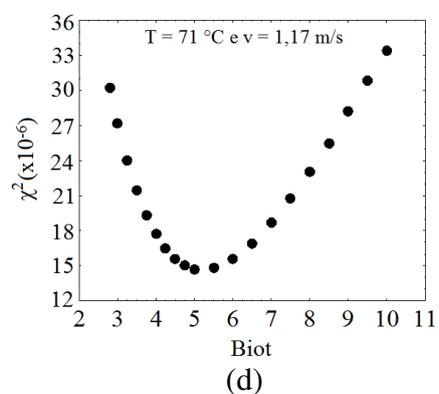
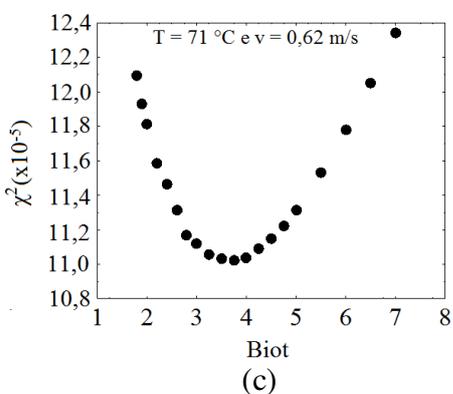
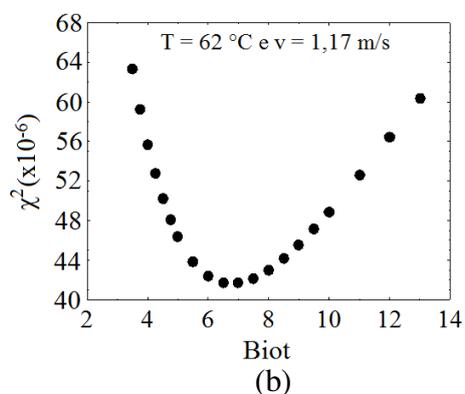
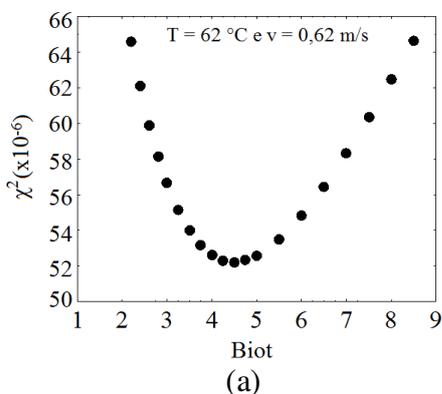
Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 4.4, é possível verificar para o ensaio da Figura 4.4(a) que existe certa compatibilidade entre os dados experimentais e os da simulação, principalmente nos instantes iniciais. A partir de 428 min, aproximadamente, até os instantes finais, percebe-se pequena discrepância entre os resultados simulados e os dados experimentais, indicando que a difusividade efetiva neste intervalo de tempo deveria ter um valor menor do que nos instantes iniciais, já que a curva simulada passa abaixo dos pontos experimentais. O mesmo comportamento pode se observado nos gráficos das Figuras 4.4(b), 4.4(c) e 4.4(d).

O algoritmo de otimização acoplado ao *software Convective* permitiu determinar a relação entre o qui-quadrado (χ^2) e o número de Biot (Bi). Essa relação pode ser observada na Figura 4.5, para cada ensaio, nas vizinhanças do ponto ótimo, para a condição de contorno convectiva.

Figura 4.5 – Qui-quadrado versus número de Biot em torno do ponto ótimo, para os ensaios:

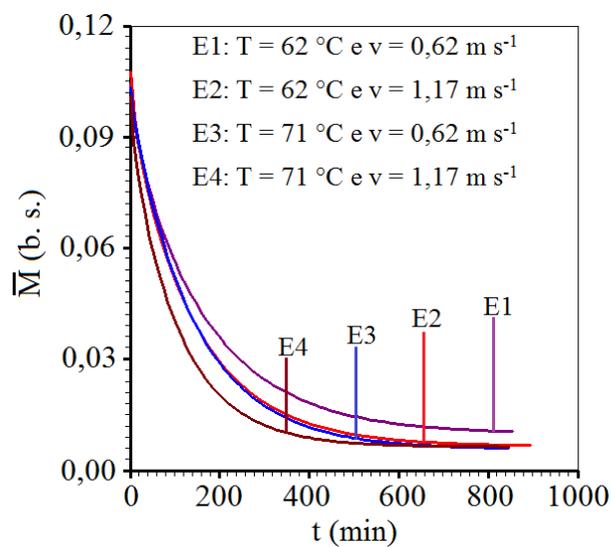
(a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4.



Fonte: Autoria própria.

A superposição das curvas simuladas que representam as cinéticas de secagem para as quatro condições experimentais pode ser observada na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Cinéticas de secagem para os quatro ensaios.



Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 4.6 verifica-se que a temperatura e a velocidade do ar de secagem influenciaram fortemente a taxa de secagem como era esperado. Quando a temperatura ou a velocidade do ar de secagem ou ambas aumentam, também aumenta a taxa de secagem. Pode-se atribuir a redução do tempo de secagem não apenas ao aumento da temperatura, mas também ao aumento da velocidade do ar de secagem.

Na figura 4.6, pode-se ainda observar que os ensaios E2 e E3 tem praticamente a mesma taxa de secagem durante o processo de secagem. Isto é, pouco difere a condição experimental E2 da condição experimental E3 podendo-se dizer que ambas são equivalentes.

Com uma inspeção na Tabela 4.5 e da Figura 4.6 e analisando os resultados é possível afirmar que o modelo empregado para descrever a cinética de secagem de telhas cerâmicas, em que foram considerados volume e parâmetros de transporte constantes, pode ser avaliado como razoavelmente bom. Esta conclusão é possível devido aos indicadores estatísticos obtidos e à razoável compatibilidade das curvas simuladas com os dados experimentais.

Uma vez que os parâmetros h e D foram obtidos por otimização usando o *software* Convective, o teor médio de umidade em um dado instante pode ser calculado pela Equação (3.156) e a Equação (3.151) possibilita determinar o teor de umidade em qualquer ponto dentro do paralelepípedo, em um instante previamente estipulado, para cada condição de secagem. Para a construção dos gráficos de contorno mostrando a distribuição do teor de umidade no interior das telhas, foi necessário utilizar as primeiras raízes da Equação (3.161) para cada número de Biot da Tabela 4.5. O *software convective* não apresenta estas raízes e, devido a isso, a Equação (3.161) foi resolvida numericamente substituindo B_i pelo valor correspondente. Para o cálculo dessas raízes foi utilizado o *software LAB Fit Curve Fitting Software* (SILVA e SILVA 2001b).

Como exemplo, as seis primeiras raízes para cada número de Biot da Tabela 4.5 estão expostas na Tabela 4.6.

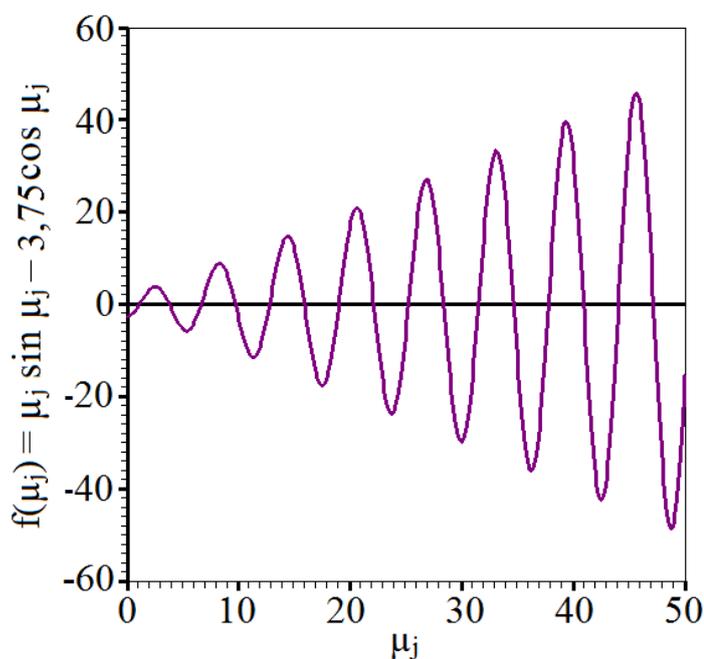
Um gráfico mostrando as primeiras 16 raízes para $B_i = 3,7500$ é apresentado na Figura 4.7. Este número de Biot corresponde aos dados do ensaio E3.

Tabela 4.6 – As primeiras seis raízes para cada número de Biot da Tabela 4.4.

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
3,7500	1,24923	3,90655	6,78791	9,79056	12,8503	15,9390
4,4375	1,28825	3,98115	6,85752	9,84813	12,8977	15,9788
5,2500	1,32379	4,05475	6,93142	9,91188	12,9515	16,0246
6,7500	1,37048	4,16007	7,04706	10,0177	13,0439	16,1049

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.7 – Gráfico da função $f(\mu_j) = \mu_j \text{sen}(\mu_j) - 3,75 \text{cos}(\mu_j)$ destacando as 16 primeiras raízes.



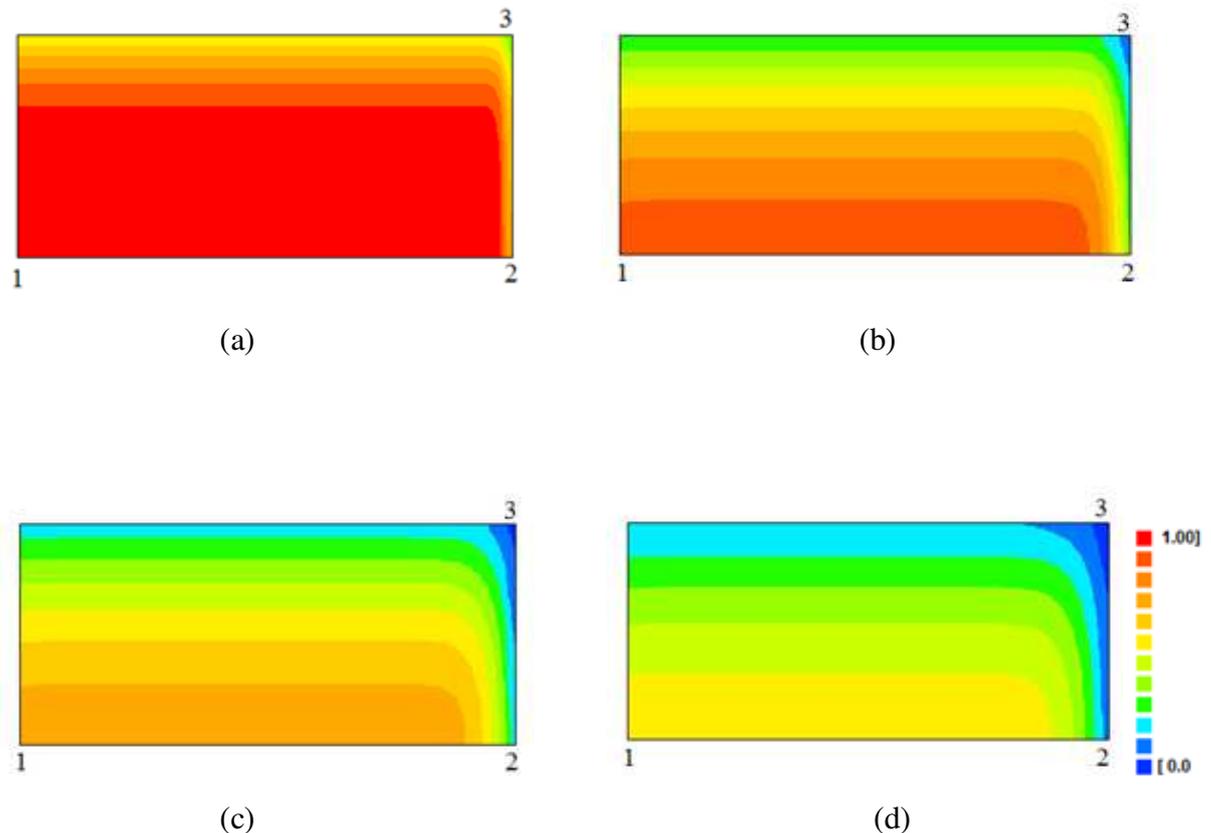
Fonte: Autoria Própria

Com essas raízes, um código computacional auxiliar para prever o teor de umidade adimensional dentro das telhas cerâmicas foi desenvolvido (apêndice 4) usando a linguagem Fortran-90. Os cálculos numéricos foram realizados para os quatro ensaios de secagem acima mencionadas. Esses dados foram utilizados pelo *software Contour Plots* (SILVA, W., 2010) e a distribuição do teor de umidade nos instantes $t = 10, 60, 100$ e 150 min, em um plano vertical em $z = 0$ (plano destacado na Figura 3.12) são apresentados nas Figuras 4.8 a 4.11 para as quatro condições experimentais.

Na Figura 4.8, estão os gráficos de contorno mostrando a distribuição espacial do teor

de umidade no plano vertical $z = 0$ para o ensaio E1.

Figura 4.8 – Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E1 nos instantes: (a) 10 min; (b) 60 min; (c) 100 min e (d) 150 min.

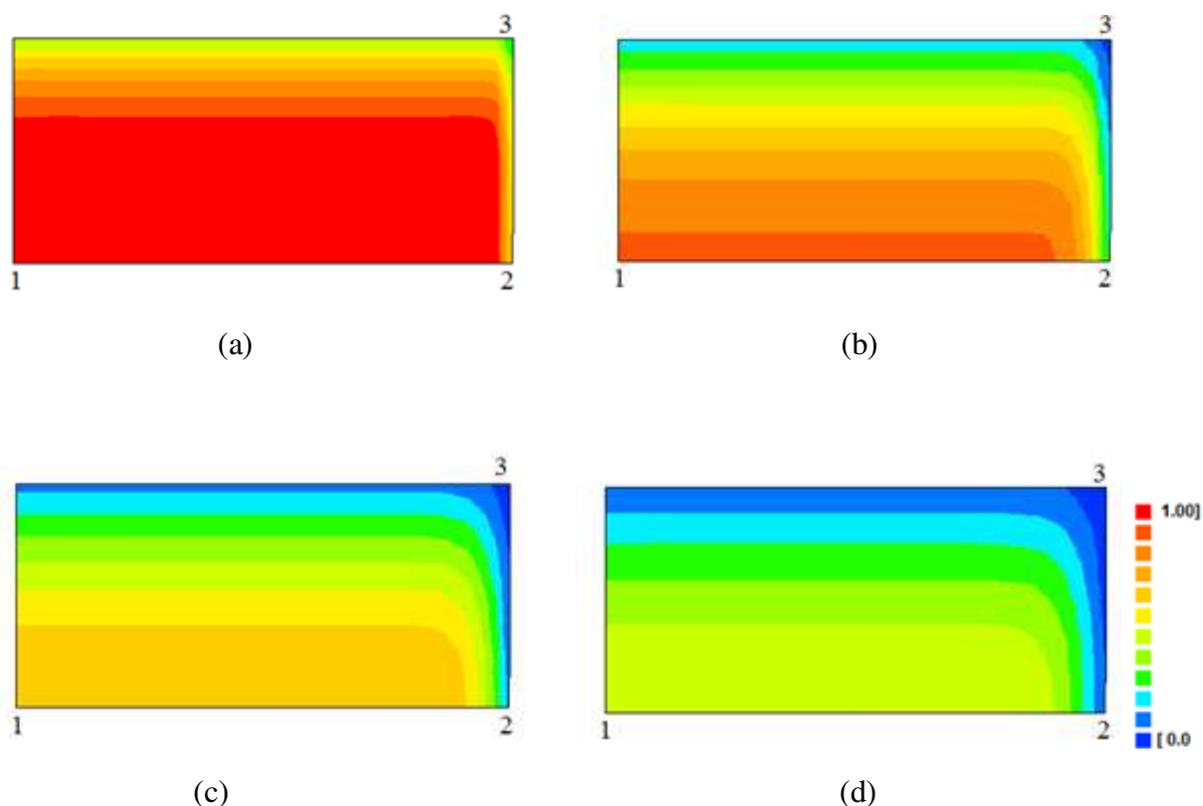


Fonte: Autoria própria.

Como é esperado, e pode ser visto na Figura 4.8, durante o processo de secagem os menores gradientes de umidade são encontrados próximos ao centro e os mais altos são encontrados próximos à superfície. Examinando essa figura, percebe-se que as telhas secam mais rapidamente nas regiões próximas ao vértice 3, pois nesse trecho, dois lados do sólido estão em contato com o meio externo. Já o vértice 2 seca mais lentamente que o 3, porque apenas um dos lados deste vértice está em contato com o meio externo. O vértice 1 é o que demora mais a secar devido ao fato de que todos os pontos são internos ao sólido e, portanto, não possuem nenhum contato com o ar de secagem.

Os gráficos de contorno mostrando a distribuição espacial do teor de umidade no plano vertical $z = 0$ para o ensaio E2 estão na Figura 4.9.

Figura 4.9 – Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E2 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.



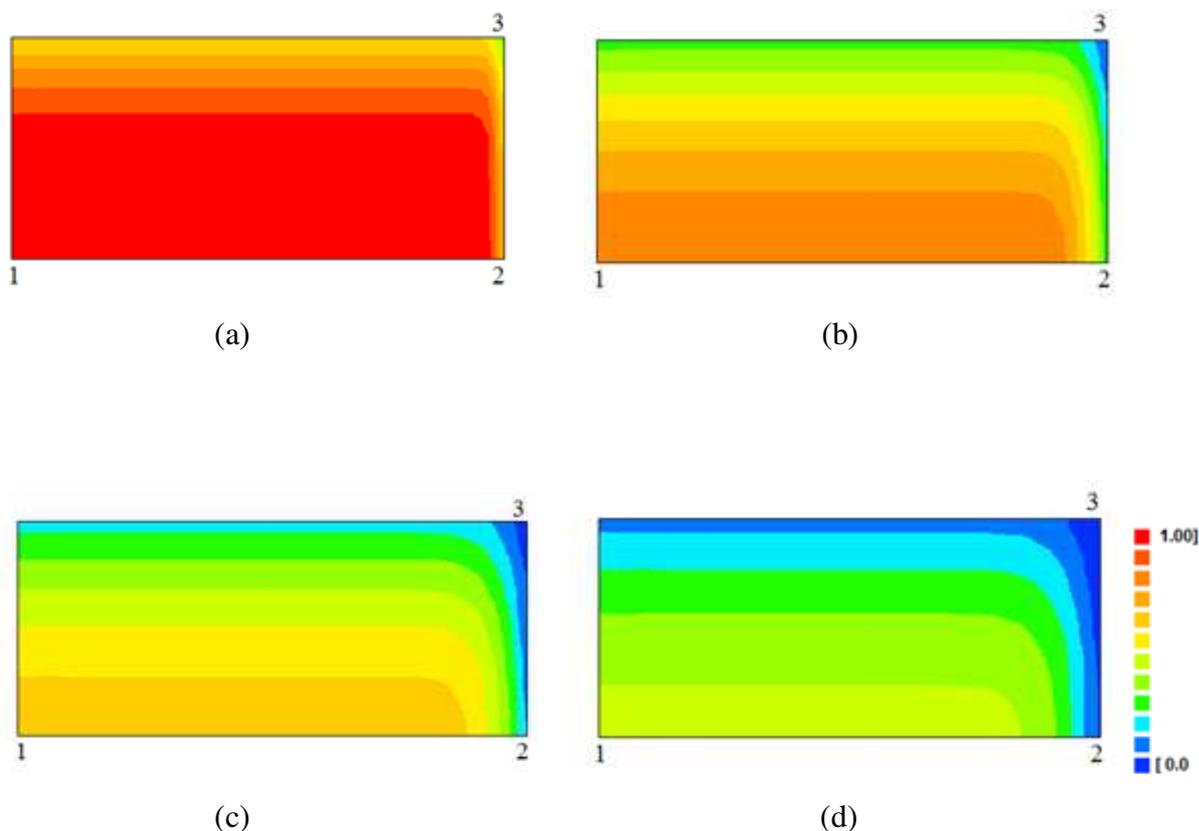
Fonte: Autoria própria.

Para o ensaio mostrado na Figura 4.9 percebe-se que a mudança de velocidade não invalida os argumentos usados no parágrafo anterior. Isto é, percebe-se que as telhas secam mais rapidamente nas regiões próximas ao vértice 3, pois nesse trecho, como observado anteriormente, os dois lados do sólido estão em contato com o meio externo. Já o vértice 2 seca mais lentamente que o 3, porque apenas um dos lados deste vértice está em contato com o meio externo. O vértice 1 é o que demora mais a secar devido ao fato de que todos os pontos são internos ao sólido e, portanto, não possuem nenhum contato com o ar de secagem.

No entanto, ao se comparar as Figuras 4.8 e 4.9 em cada tempo estudado, verifica-se que, mantida a temperatura em 62°C e elevando-se a velocidade do fluxo de ar de $0,62\text{ m s}^{-1}$ para $1,17\text{ m s}^{-1}$, a perda de água do sólido ocorre mais rapidamente. Assim neste caso, o aumento do fluxo de ar torna-se importante para que a secagem ocorra em um menor espaço de tempo.

A distribuição espacial do teor de umidade no plano vertical $z = 0$ para o ensaio E3 é mostrado nos gráficos de contorno da Figura 4.10.

Figura 4.10 – Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E3 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.



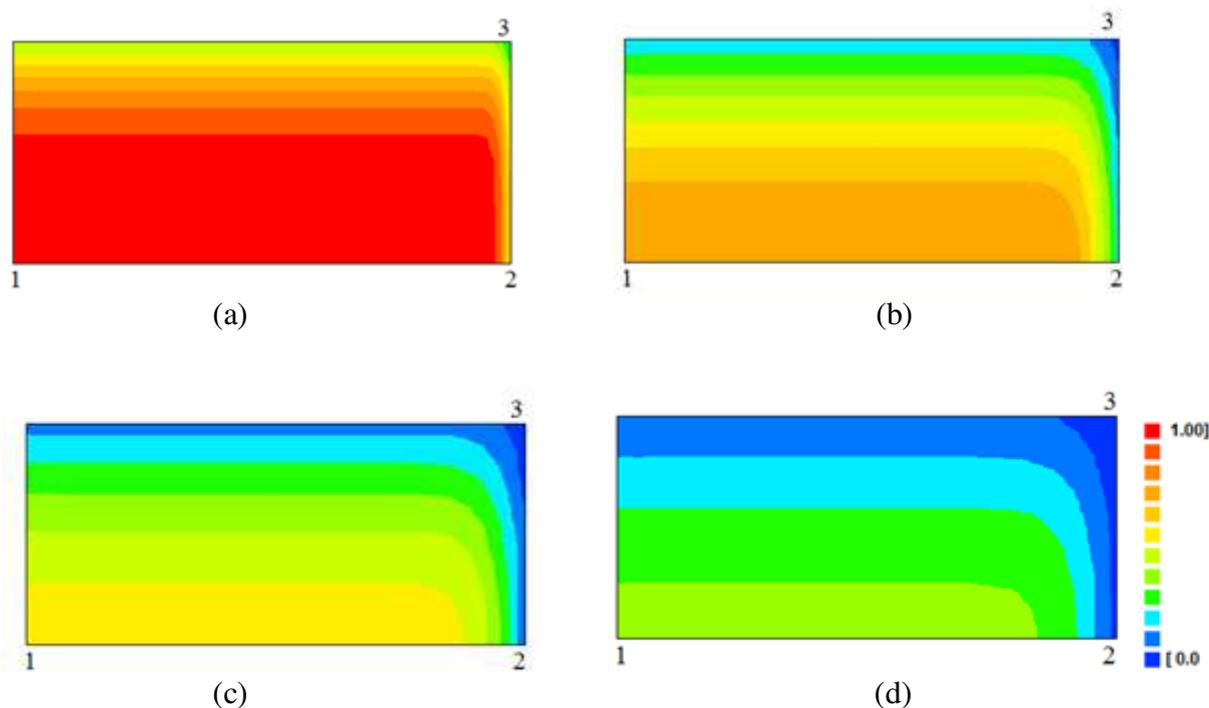
Fonte: Autoria própria.

Inspecionando a Figura 4.10 verifica-se que a secagem ocorre de forma semelhante aos outros ensaios, isto é, os pontos mais externos da telha secam mais rapidamente que os pontos mais internos. Isso se deve ao fato de que os pontos mais externos possuem uma área de contato maior com o ar de secagem.

Observando as Figuras 4.8 a 4.10 pode-se perceber que quando se aumentou a velocidade do fluxo de ar de $0,62$ para $1,17 \text{ m s}^{-1}$ e manteve-se a temperatura fixa em $62 \text{ }^\circ\text{C}$ a perda de água foi ligeiramente mais acentuada do que quando se fixou a velocidade em $0,62 \text{ m s}^{-1}$ e aumentou a temperatura de $62 \text{ }^\circ\text{C}$ para $71 \text{ }^\circ\text{C}$. Isso demonstra que o aumento da velocidade do fluxo de ar tem maior influência sobre a perda de água.

Para a temperatura do ensaio E4 a distribuição espacial do teor de umidade no plano vertical $z = 0$ é mostrado nos gráficos de contorno da Figura 4.11.

Figura 4.11 – Distribuição espacial do teor de umidade para o ensaio E4 nos tempos (a) 10 min; (b) 60 min. (c) 100 min e (d) 150 min.



Fonte: Autoria própria.

É possível perceber na Figura 4.11 que a perda de água, assim como nos outros ensaios, é mais rápida nos pontos mais externos da telha e mais lenta nos pontos internos.

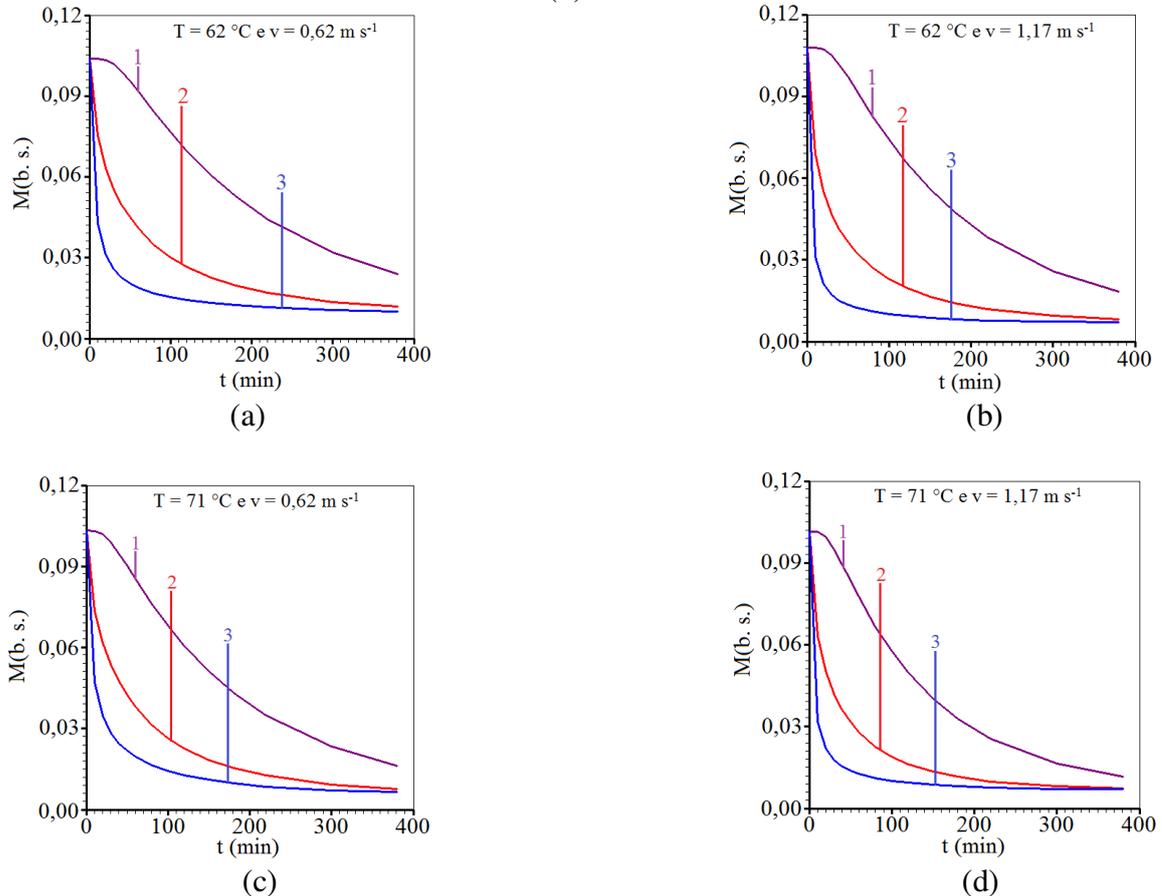
Para essa condição experimental nota-se também, que devido ao aumento da temperatura de 62°C para 71 °C e da velocidade do fluxo de ar de 0,62 m s⁻¹ para 1,17 m s⁻¹ a perda de água em todos os pontos acontece mais rapidamente, comparando-se ponto a ponto da telha, do que nos outros ensaios anteriormente apresentados. Esse resultado demonstra coerência no fenômeno.

Os resultados apresentados demonstram a influência da velocidade do fluxo de ar na perda de água, mesmo quando não há mudança de temperatura. Portanto, pode-se escolher, em um processo de secagem, aumentar a velocidade do ar de secagem usando temperaturas mais baixas, pois altas temperaturas e longos tempos de secagem necessários para remover a água do material cerâmico podem causar sérios danos ao produto final.

Informações sobre como o teor de umidade é diferente no centro e nos contornos do paralelepípedo é importante porque tais diferenças geram tensões que podem danificar o

produto. Assim, para se ter uma ideia de quanto os teores de umidade são diferentes nos pontos 1, 2 e 3 dos resultados anteriores, na Figura 4.12, são apresentados gráficos para todas as condições de secagem utilizadas nas otimizações.

Figura 4.12 – Teor de umidade nos pontos (1), (2) e (3) para os ensaios (a) E1; (b) E2 (c) E3 e (d) E4.



Fonte: Autoria própria

Analisando os resultados obtidos, é possível afirmar que o modelo empregado para descrever a cinética de secagem de telhas cerâmicas, usando soluções analíticas, pode ser considerado razoavelmente bom. Esta conclusão pode ser inferida devido aos indicadores estatísticos obtidos e à razoável coincidência das curvas simuladas com os dados experimentais. No entanto, em vários processos de secagem, a retração é tão significativa que ela não pode ser desprezada na descrição do processo e, conseqüentemente, os valores dos parâmetros termofísicos devem ser afetados. Nesses casos, o modelo usado nesta secção não é o mais apropriado para descrever o processo de difusão, o qual pode ser descrito de forma mais precisa levando em consideração as variações dos parâmetros termofísicos das telhas cerâmicas (FARIAS, V. 2011; SILVA, L. 2012). Procura-se com isso, melhorar ainda mais os resultados obtidos, tornando-os mais próximos da realidade.

4.3 – Solução numérica

Foram realizados estudos experimentais e teóricos, incluindo análise numérica, relativos ao processo de difusão em sólidos com geometria arbitrária. Os estudos teóricos resultaram na aplicação de um código computacional desenvolvido por Farias, V. (2011) e apresentado em sua tese de doutorado. O referido código utilizou a equação da difusão escrita em coordenadas generalizadas usando as condições de contorno de terceiro tipo.

Visando à compreensão do código numérico utilizado, vários testes foram realizados para simular diversas situações físicas envolvendo diferentes geometrias, entre elas: parede infinita, paralelepípedo e cilindro. Os resultados foram comparados com outros oriundos de soluções analíticas e numéricas disponíveis na comunidade científica.

4.3.1 - Validação usando solução analítica para uma parede infinita

A simulação inicial utilizando o código proposto para descrever o processo de difusão refere-se a uma geometria unidimensional. Como este trabalho pressupõe que a equação a ser resolvida envolve um domínio físico tridimensional, foi simulada uma parede infinita utilizando-se um paralelepípedo com comprimento L_1 , largura L_2 e espessura L_3 . (ERDOĞDU, 2005; UKRAINCZYK, 2009), sendo que L_1 e L_2 foram consideradas muito maiores que L_3 .

As dimensões atribuídas ao paralelepípedo, bem como as características físicas usadas nesta simulação para as condições de contorno prescrita e convectiva, estão na Tabela 4.7.

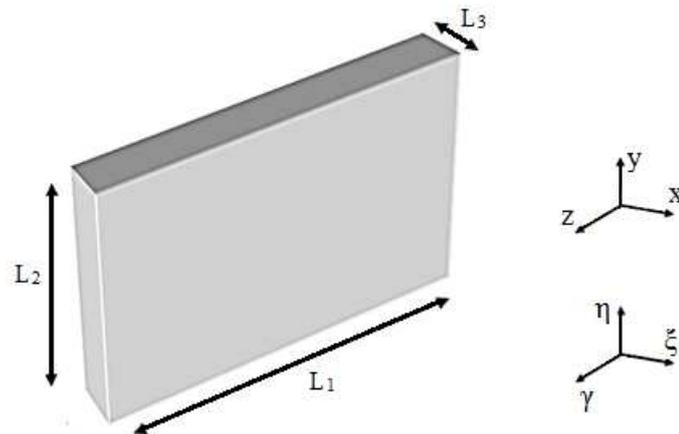
Tabela 4.7 – Parâmetros físicos simulados para resolver a equação de difusão unidimensional

Condição de contorno	Φ_i	Φ_{eq}	Γ^Φ ($m^2 \text{ min}^{-1}$)	h ($m \text{ min}^{-1}$)	L_1 ($10^{-3}m$)	L_2 ($10^{-3}m$)	L_3 ($10^{-3}m$)
1º tipo	0,1038	0,00938	$5,915 \times 10^{-8}$	$1,000 \times 10^{+10}$	157,0	141,55	10,71
3º tipo	0,1038	0,00938	$9,500 \times 10^{-8}$	$1,0423 \times 10^{-5}$	157,0	141,55	10,71

Fonte: Autoria própria.

A situação física é mostrada na Figura 4.13, com destaque para as coordenadas generalizadas, cujos eixos ξ , η e γ coincidiram, respectivamente com os das coordenadas cartesianas no domínio físico x , y , z . A parede infinita foi simulada com 30 volumes de controle, 2000 passos no tempo para um $\Delta t = 0,4275$ min.

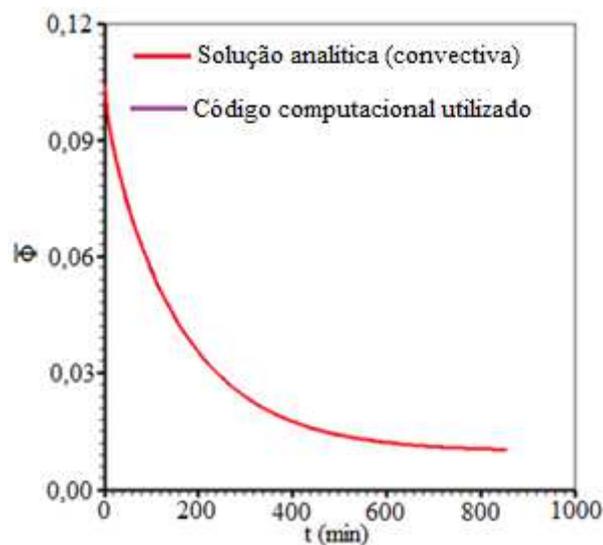
Figura 4.13 – Esquema do paralelepípedo usado na simulação de uma parede Infinita.



Fonte: Farias, V. (2011)

Os gráficos das soluções obtidas pelos dois métodos (analítico e numérico) para a condição de contorno do terceiro tipo (Cauchy) são apresentados na Figura 4.14.

Figura 4.14 – Superposição das soluções obtidas via método numérico proposto e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em uma parede infinita com condição de contorno convectiva.

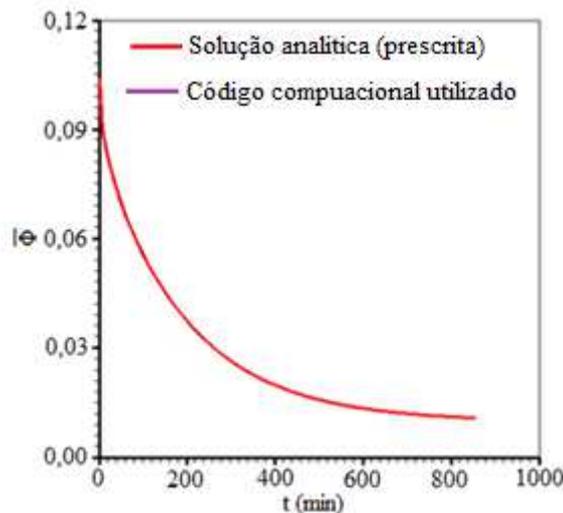


Fonte: Autoria própria.

Observando o gráfico apresentado na Figuras 4.14 verifica-se que existe uma boa concordância entre as soluções originárias do método numérico proposto e do método analítico para o caso da condição de contorno convectiva. Isto é, o resultado para o transiente do valor médio de Φ obtido pela solução numérica proposta coincide com o respectivo da solução analítica.

Para a condição de contorno do primeiro tipo (Dirichlet) estão mostrados na Figura 4.15, os resultados obtidos.

Figura 4.15 – Superposição das soluções obtidas via método numérico proposto e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em uma parede infinita com condição de contorno prescrita.



Fonte: Autoria própria.

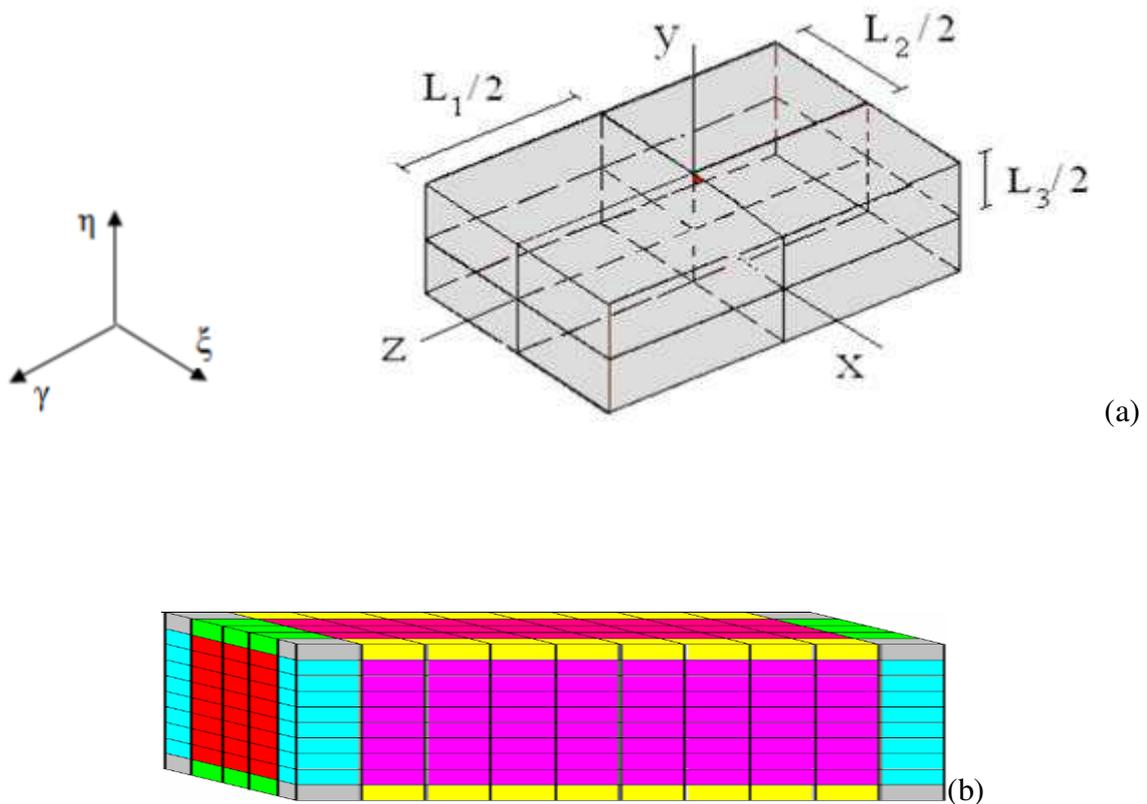
A Figura 4.15 mostra que existe uma boa concordância entre as soluções originárias do método numérico proposto e do método analítico. Isto é, os resultados para o transiente do valor médio de Φ obtidos pela solução numérica proposta coincide com o respectivo transiente obtido com a solução analítica.

4.3.2 – Validação usando solução analítica para um paralelepípedo e valor médio de Φ

O estudo do código computacional proposto foi realizado também para uma malha ortogonal tridimensional, simulando um processo difusivo em um paralelepípedo. A malha utilizada para obtenção da solução numérica teve por base os estudos feitos no item anterior, bem como os estudos feitos por Farias, V. (2011) para paralelepípedos. Na malha foram

utilizadas 31 linhas ξ , 31 linhas η e 31 linhas γ , 2000 passos no tempo para um intervalo $\Delta t = 0,4275$ min.

Figura 4.16 – Paralelepípedo (fora de escala) usado na validação da solução numérica proposta para a equação de difusão tridimensional via solução analítica: (a) domínio físico; (b) domínio computacional.



Fonte: Silva, L. (2012)

Os parâmetros físicos e as dimensões do sólido utilizado na simulação são apresentados na Tabela 4.8, para as duas condições de contorno: primeiro tipo e terceiro tipo.

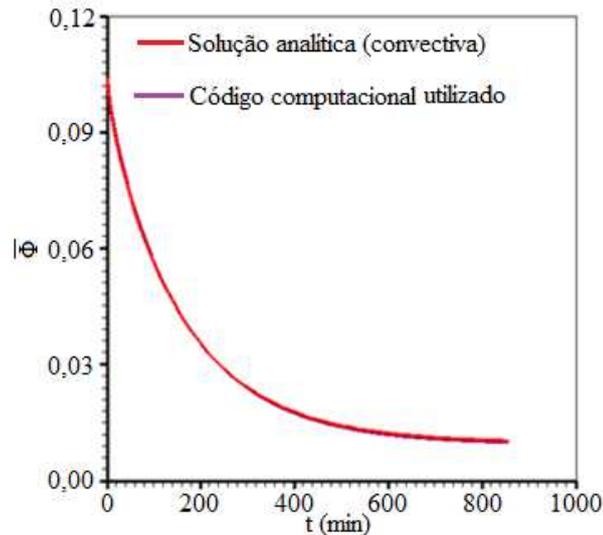
Tabela 4.8 – Parâmetros físicos simulados para resolver a equação de difusão tridimensional

Cond. de contorno	Φ_i	Φ_{eq}	Γ^Φ ($m^2 \text{ min}^{-1}$)	h ($m \text{ min}^{-1}$)	L_1 $\times 10^{-3}$ (m)	L_2 $\times 10^{-3}$ (m)	L_3 $\times 10^{-3}$ (m)
1º tipo	0,1038	0,0094	$5,17 \times 10^{-8}$	$1,0 \times 10^{+10}$	157,0	141,55	10,71
3º tipo	0,1038	0,0094	$9,82 \times 10^{-8}$	$7,7 \times 10^{-5}$	157,0	141,5	10,71

Fonte: Autoria própria.

Os resultados do valor médio de Φ em função do tempo obtidos pelos dois métodos, para a condição de contorno convectiva são apresentados na Figura 4.17, na qual observa-se pela disposição das linhas dos gráficos que não há distinção entre as curvas traçadas.

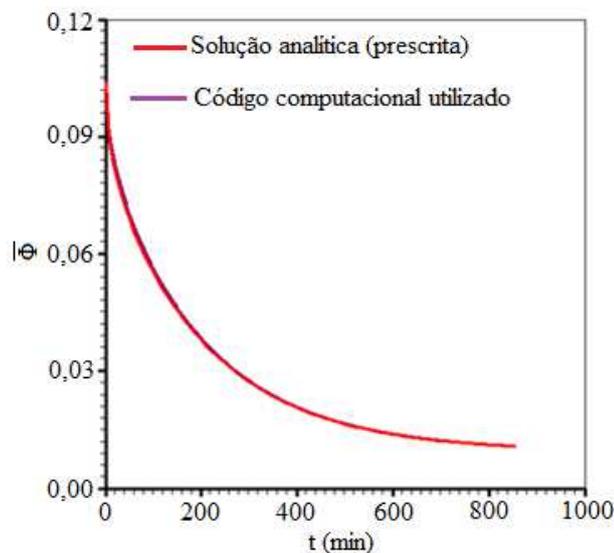
Figura 4.17 – Superposição das soluções obtidas via método numérico e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em um paralelepípedo com condição de contorno convectiva.



Fonte: Autoria própria.

Para a condição de contorno prescrita, foram encontrados resultados semelhantes para a mesma geometria. As curvas para as duas soluções são mostradas na Figura 4.18.

Figura 4.18 – Superposição das soluções obtidas via método numérico e via método analítico para o valor $\bar{\Phi}$ em um paralelepípedo com condição de contorno prescrita, para ensaio E1.



Fonte: Autoria própria

A superposição das soluções mostradas nas Figuras 4.17 e 4.18 possibilitam constatar uma boa concordância entre a solução numérica e a solução analítica para o valor médio da grandeza em um paralelepípedo, tanto para condição de contorno primeiro tipo (prescrita) quanto para a condição de contorno do terceiro tipo (convectiva).

Os resultados apresentados nesta seção sobre a utilização do código computacional desenvolvido mostraram que houve uma excelente concordância entre os resultados analíticos e os resultados obtidos com a solução numérica. Assim, é possível afirmar que a solução numérica proposta pode ser usada para resolver a equação de difusão, caso o interesse seja obter o transiente do valor médio de Φ em uma parede infinita ou em um paralelepípedo para a condição de contorno do primeiro tipo ou para a condição de contorno do terceiro tipo.

4.4 – Validação do código computacional desenvolvido por Farias, V. (2011) usando soluções numéricas da equação de difusão.

Esta seção foi iniciada com as situações mais simples e gradativamente foi elevando-se o nível de complexidade nas formas geométricas empregadas. Desta forma, foi seguida a seguinte ordem em relação a geometria: parede infinita, paralelepípedo, cilindro. Os resultados serão apresentados nas próximas seções deste capítulo.

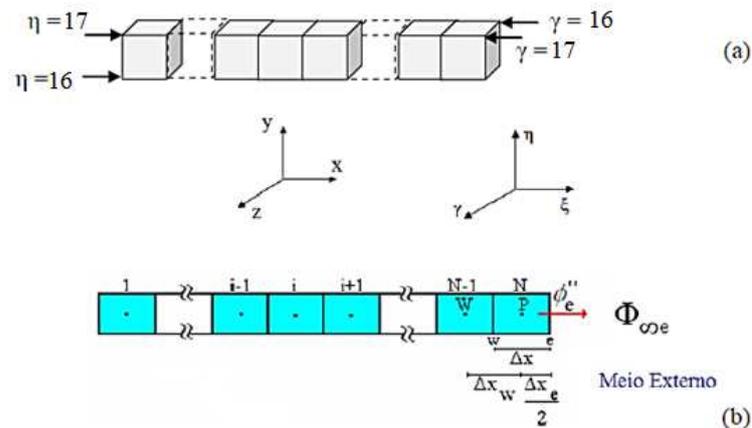
4.4.1 – Malha unidimensional: valor médio e distribuição espacial em uma parede infinita com propriedades físicas constantes.

A geometria inicialmente utilizada para os testes foi a unidimensional, aproximando a forma do corpo para uma parede infinita e foi feito testes de consistência, explorando-se condições de simetria, bem como testes de validação.

Apesar da equação de difusão estar sendo resolvida para uma geometria tridimensional, na solução apresentada para este teste foram usadas as mesmas medidas de largura, comprimento e espessura que foram as medidas reais da telha usadas no experimento. A diferença foi feita no programa Convective no qual se fez a opção de parede infinita e depois paralelepípedo para se obter os parâmetros físicos. A malha utilizada foi 32x32x32 linhas ξ , η , γ e foi analisado os volumes de controle delimitados pelos planos correspondentes a

$\eta = 16$ e $\eta = 17$, $\gamma = 17$ e $\gamma = 16$. Estes volumes de controle estão localizados na linha central do paralelepípedo na direção do eixo x , no domínio físico, que por sua vez coincide com o eixo ξ , no domínio transformado. Um esquema desta situação física está descrito na Figura 4.19.

Figura 4.19– Geometria unidimensional usada para validar o código computacional proposto via solução numérica: (a) discretização tridimensional; (b) aproximação unidimensional.



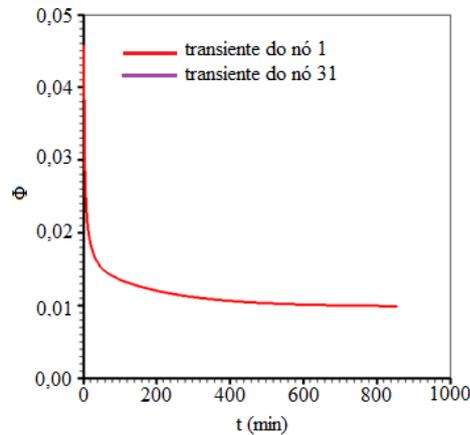
Fonte: Farias, V. (2011).

Nesta simulação os parâmetros físicos usados foram os mesmos empregados para a validação da solução numérica via soluções analíticas, assumindo-se uma distribuição inicial uniforme da grandeza. Para o parâmetro λ foi assumido um valor constante e igual a unidade. Os outros parâmetros, bem como, as dimensões do corpo foram consideradas constantes.

Para a simulação foi imposto um domínio computacional de 30 volumes de controle, o número de passos no tempo igual a 2000 e $\Delta t = 0,4275$ min, sendo determinada primeiro, a descrição do regime transiente para os volumes de controle representados pelos nós oeste e leste da parede infinita, identificado como nó 1 e nó 31, respectivamente.

Nesta seção os primeiros testes tiveram como desígnio verificar a consistência da solução numérica apresentada neste trabalho que para isso foi atribuída a mesma condição de contorno a leste e a oeste. Assim, os resultados obtidos para o nó 1 e o nó 31 devem ser análogos devido a condição de simetria fixada, o que pode ser comprovado ao se esboçar as curvas referentes aos dois transientes e isso é apresentado na Figura 4.20, para a condição de contorno do primeiro tipo.

Figura 4.20 – Superposição dos transientes de Φ , numa parede infinita, para os volumes de controle representados pelos nós 1 e 31 com a condição de contorno prescrita para ensaio E1.

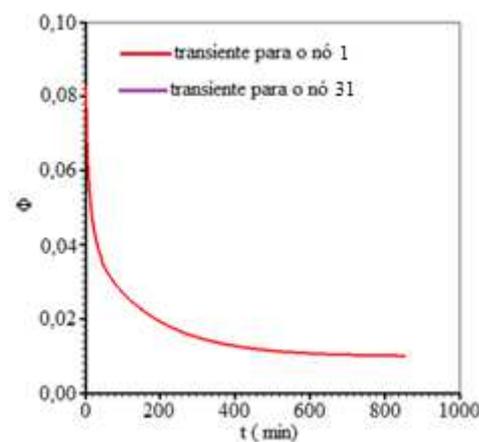


Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.20 é possível observar que existe uma concordância entre os transientes dos nós localizados em posições simétricas no contorno. Além disso há uma coerência no resultado esperado, pois pela condição de contorno imposta, em um processo difusivo, a grandeza de interesse nos nós 1 e 31 deve assumir quase que instantaneamente o valor de equilíbrio, por estarem próximo dos contornos oeste e leste, respectivamente (SILVA et al., 2007; SILVA et al., 2009b).

Os resultados do regime transiente para a condição de contorno convectiva calculados para os mesmos nós, isto é, nó 1 e nó 31, estão apresentados na Figura 4.21.

Figura 4.21 – Superposição dos transientes de Φ , numa parede infinita, para os volumes de controle dos nós 1 e 31 com a condição de contorno convectiva para ensaio E1.

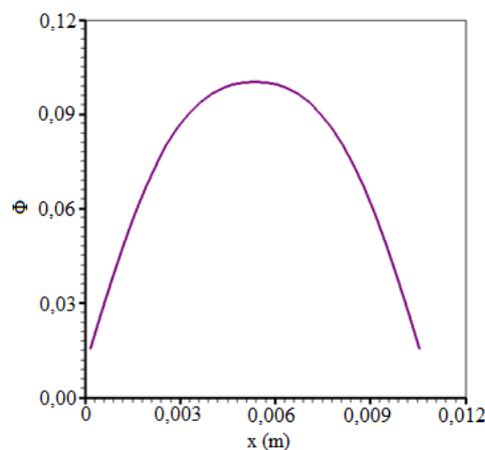


Fonte: Autoria própria.

Comparando-se as Figuras 4.20 e 4.21 é possível observar que o transporte da grandeza na fronteira ocorre de forma mais lenta para a condição de contorno convectiva do que para a condição de contorno prescrita.

A Figura 4.22 apresenta uma curva simétrica, com eixo de simetria em $x = 0,006\text{m}$ para a condição de contorno prescrita.

Figura 4.22 – Distribuição espacial de Φ , numa parede infinita, para a condição de contorno prescrita em $t = 42,75$ min.



Fonte: Autoria própria.

A situação física mostrada na Figura 4.22 era esperada, pois foi instituído a mesma condição de contorno nas fronteiras leste e oeste (SILVA, 2007).

A seguir apresenta-se na Tabela 4.9, valores da grandeza em alguns nós da parede infinita para o mesmo instante de tempo $t = 42,75$ min e para a condição de contorno prescrita, na qual pode se verificar que, apesar das pequenas diferenças numéricas existentes, existe uma concordância de valores nos nós relativos aos volumes de controle situados em posições simétricas.

Tabela 4.9 – Valores das grandezas de alguns nós da parede infinita em $t = 42,75$ min obtida via código computacional proposto para a condição de contorno prescrita.

	nó = 11	nó = 12	nó = 13	nó = 14	nó = 15
x (m)	0,003627581	0,003973065	0,004318548	0,004664032	0,005009516
Φ	0,093650879	0,096267040	0,098175274	0,099466273	0,100210870

Continuação da Tabela 4.9

nó =16	nó = 17	nó = 18	nó = 19	nó = 20	nó = 21
0,005355000	0,005700484	0,006045968	0,006391452	0,006736935	0,007082419
0,100453633	0,100210911	0,099466349	0,098175378	0,096267158	0,093650996

Fonte: Autoria própria.

Situações semelhantes foram avaliadas para a condição de contorno convectiva, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Distribuição espacial de Φ para uma parede infinita em $t = 42,75$ min obtida via código computacional proposto para a condição de contorno convectiva.

	nó = 11	nó = 12	nó = 13	nó = 14	nó = 15
x (m)	0,003627581	0,003973065	0,004318548	0,004664032	0,005009516
Φ	0,091340863	0,093553305	0,095234959	0,096413695	0,097111527

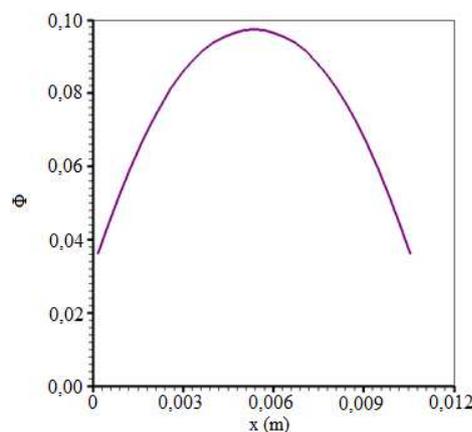
Continuação da Tabela 4.10

nó =16	nó = 17	nó = 18	nó = 19	nó = 20	nó = 21
0,005355000	0,005700484	0,006045968	0,006391452	0,006736935	0,007082419
0,097342527	0,097111527	0,096413689	0,095234944	0,093553279	0,091340826

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.23 é mostrado o gráfico da distribuição espacial de Φ , numa parede infinita, para a condição de contorno convectiva em $t = 42,75$ min.

Figura 4.23 – Distribuição espacial de Φ , numa parede infinita, para a condição de contorno convectiva em $t = 42,75$ min.



Fonte: Autoria própria.

A situação física mostrada na Figura 4.23, assemelha-se a situação apresentada na Figura 4.22.

Tabela 4.11 – Distribuição espacial de Φ para uma parede infinita em $t = 42,75$ min obtida via 1D Heat Transfer para a condição de contorno convectiva.

	nó = 11	nó = 12	nó = 13	nó = 14	nó = 15
x (m)	0,003627600	0,003973100	0,004318500	0,004664000	0,005009500
Φ	0,091340318	0,093552768	0,095234431	0,096413173	0,097111009

Continuação da Tabela 4.11

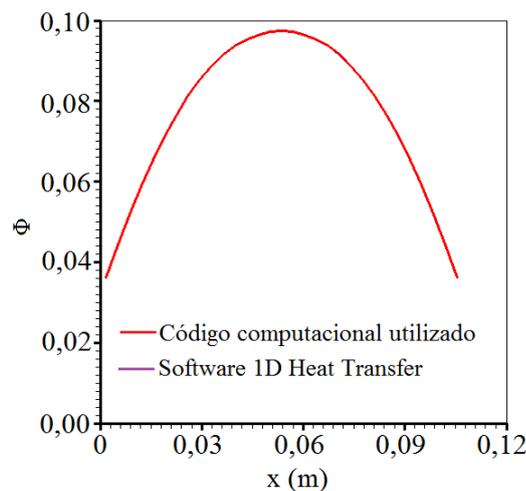
nó = 16	nó = 17	nó = 18	nó = 19	nó = 20	nó = 21
0,005355000	0,005700500	0,006046000	0,006391500	0,006736900	0,007082400
0,097342007	0,097111009	0,096413173	0,095234431	0,093552768	0,091340318

Fonte: Autoria própria.

Observando as Tabelas 4.10 e 4.11, verifica-se que os valores correspondentes são coerentes, a menos de pequenos erros numéricos.

Na Figura 4.24 é apresentada as curvas traçadas com valores das Tabelas 4.10 e 4.11.

Figura 4.24 – Superposição dos gráficos da distribuição espacial de Φ com o código computacional utilizado versus o software 1D Heat Transfer numa parede infinita, para a condição de contorno convectiva em $t = 42,75$ min.



Fonte: Autoria própria.

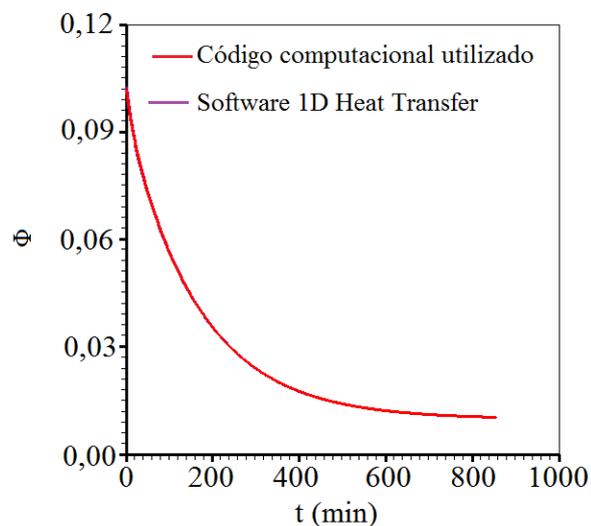
Para traçar os gráficos no mesmo sistema de eixo com a intenção de comparar a distribuição espacial para as situações apresentadas nas duas Tabelas 4.10 e 4.11 foi necessário completá-las com valores relativos aos nós de 1 a 10 e 22 a 31, cujo resultado foi apresentado na Figura 4.24.

Observando a Figura 4.24 verifica-se que os resultados obtidos com o código computacional utilizado coincidiram com aqueles originários do software 1D Heat Transfer, validando assim, a solução numérica proposta para a situação estudada.

Foram avaliados, também, os resultados para a grandeza de interesse em função do tempo para os volumes de controle da parede infinita representados pelos: nó 1, localizado ao oeste, delimitado pelas linhas $\xi = 1$ e $\xi = 2$; nó central, delimitado pelas linhas $\xi = 16$ e $\xi = 17$; nó 31, localizado a leste, delimitado pelas linhas $\xi = 31$ e $\xi = 32$.

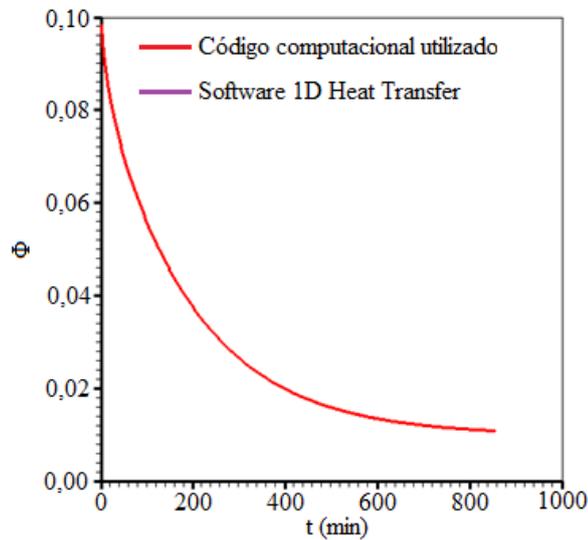
As soluções obtidas foram traçadas em um mesmo sistema de eixos e os resultados para o nó 1 são apresentados na Figura 4.25, para a condição de contorno convectiva, na qual se verifica a coincidência dos resultados. Estão mostrados na Figura 4.26, os resultados referentes à condição de contorno prescrita para o volume de controle do nó 1.

Figura 4.25 – Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 1 obtida com o código computacional utilizado e com o software 1D Heat Transfer, para a condição de contorno convectiva.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4.26 – Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 1 obtida com o código computacional utilizado e com o software *1D Heat Transfer*, para a condição de contorno prescrita.

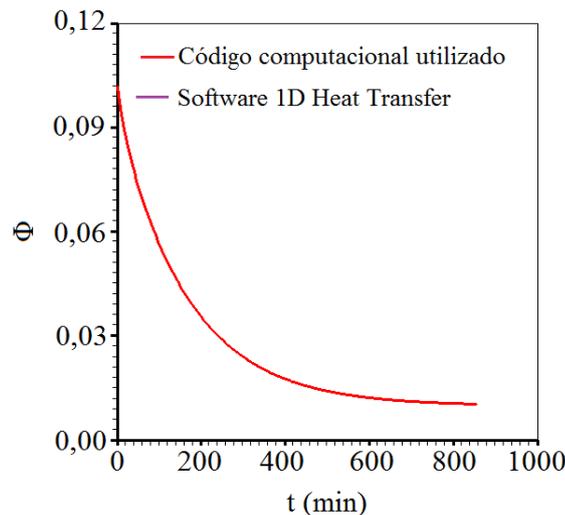


Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 4.25 e 4.26 observa-se que não há distinção entre as curvas apresentadas.

As soluções obtidas com o código computacional utilizado e com o software *1D Heat Transfer* empregando a condição de contorno convectiva para o nó central (nó 16) geraram os gráficos mostrados na Figura 4.27.

Figura 4.27 – Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 16 obtida com o código computacional utilizado e com o software *1D Heat Transfer*, para a condição de contorno convectiva.

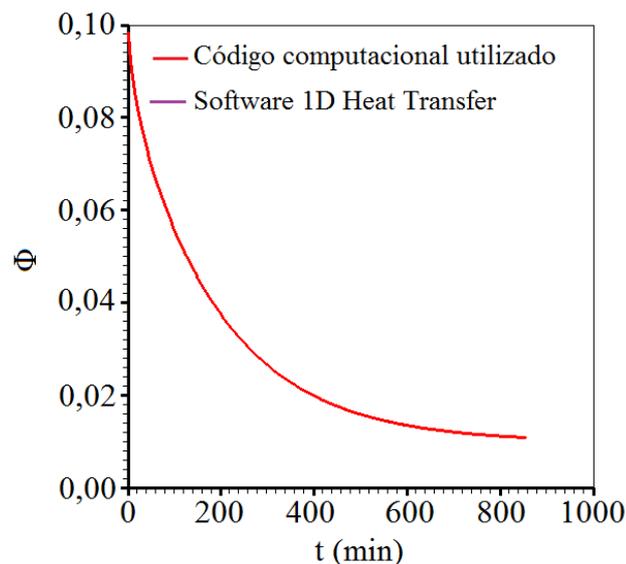


Fonte: Autoria própria.

Nos gráficos apresentados na Figura 4.27 é possível confirmar a validação do código computacional, pois observa-se que existe uma coincidência entre as curvas geradas. Além disso, verifica-se que para volumes de controle localizados no meio do sólido, o processo inicial do transporte da grandeza ocorre de forma lenta. Este resultado mostra coerência com a situação física esperada (SILVA, 2007; SILVA, W. 2009).

Para a condição de contorno prescrita do nó 16, os transientes obtidos através das soluções numéricas estão mostrados na Figura 4.28.

Figura 4.28 – Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 16 obtida com o código computacional utilizado e com o software *1D Heat Transfer*, para a condição de contorno prescrita.

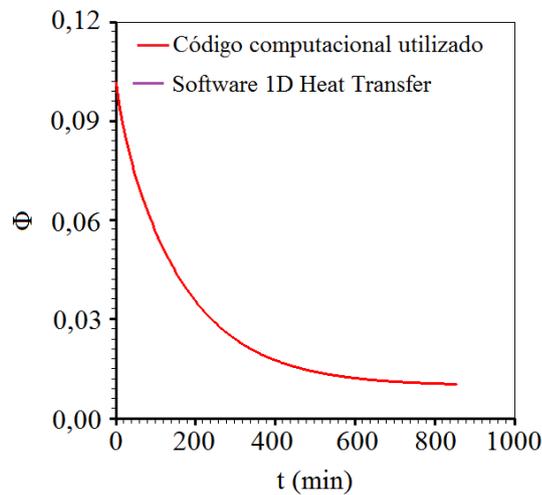


Fonte: Autoria própria.

A superposição das curvas da Figura 4.28 mostra mais uma vez que os resultados das soluções estão coerentes para validar o código computacional com a condição de contorno prescrita para o nó central de uma geometria unidimensional.

Continuando com a sequência de testes, foi analisado o regime transiente do valor médio de Φ para o volume de controle no contorno leste (nó 31) para as duas condições de contorno estudadas. Para a condição de contorno convectiva o resultado é mostrado na Figura 4.29.

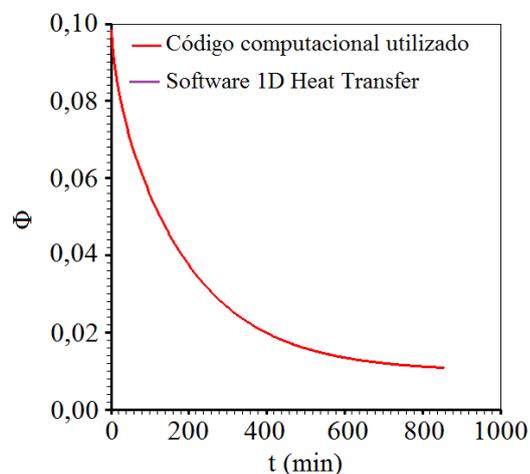
Figura 4.29 – Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 31 obtida com o código computacional utilizado e com o software *1D Heat Transfer*, para a condição de contorno convectiva.



Fonte: Autoria própria.

Ao se analisar as curvas traçadas na Figura 4.29 para a condição de contorno convectiva verifica-se que existe uma boa concordância entre a curva traçada com os resultados do código computacional utilizado e a curva traçada com os resultados do *software 1D Heat Transfer*. Neste caso, também validando o código computacional desenvolvido. Na Figura 4.30 estão as curvas das soluções para a condição de contorno prescrita.

Figura 4.30 – Superposição das soluções do transiente de Φ numa parede infinita, para o nó 31 obtida com o código computacional utilizado e com o *software 1D Heat Transfer*, para a condição de contorno prescrita.



Fonte: Autoria própria.

Após todos os testes realizados nesta seção para uma geometria unidimensional com condição de contorno do primeiro e terceiro tipo e a comprovação da consistência e da validação, os quais foram compatíveis com previsões teóricas e com outras soluções numéricas disponíveis na literatura é possível assegurar que o código computacional desenvolvido é válido para descrever o processo de difusão para a geometria unidimensional.

4.4.2 – Malha tridimensional: valor médio e distribuição espacial em um paralelepípedo

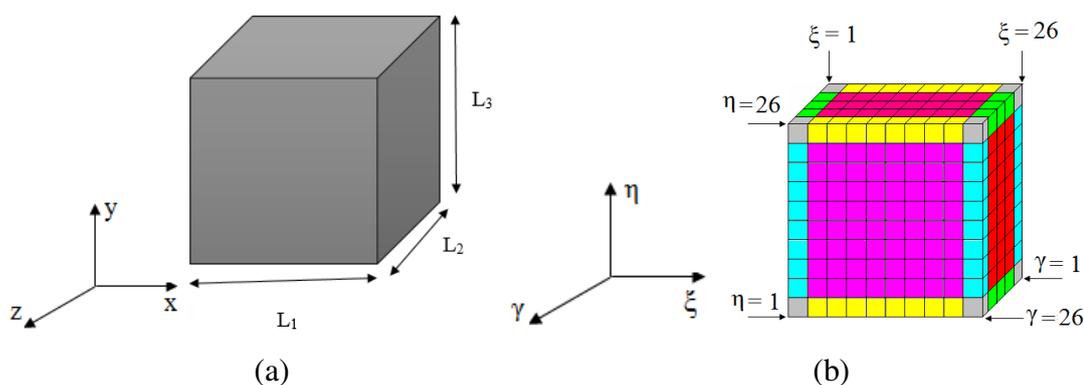
Inicialmente foram realizados testes de consistência para uma geometria cúbica, explorando a condição de simetria inerente a esta forma geométrica. Depois, foram realizados testes de validação código computacional para sólido na forma de paralelepípedo.

4.4.2.1 – Testes de consistência por meio da análise de Φ para uma geometria cúbica

A discretização espacial para a simulação física envolveu 26 linhas ξ , 26 linhas η e 26 linhas γ e foram usados 2000 passos para um intervalo de tempo 0,4275 min. A malha e o intervalo de tempos usados são compatíveis com os resultados obtidos por Nascimento (2002) e Farias, V. (2011) que estudaram problemas semelhantes em coordenadas cartesianas.

Na Figura 4.31 é apresentado um esquema da geometria cúbica da situação física simulada para avaliar a consistência do programa desenvolvido para a difusão, na qual se observa o domínio físico, destacando-se os eixos cartesianos, x, y e z e o domínio transformado, como os eixos em coordenadas generalizadas ξ , η e γ .

Figura 4.31 – Geometria cúbica utilizada para testar a consistência da solução numérica proposta: (a) domínio físico; (b) domínio transformado.



Fonte: Farias, V. (2011).

Os testes para o cubo foram realizados com o pressuposto de uma distribuição inicial uniforme para a grandeza com valor 0,10424 e um valor constante para λ . Foi imposto que o volume do sólido e os parâmetros termofísicos permanecessem constante durante o processo, e que a grandeza de equilíbrio assumisse o valor de 0,00981 e que a condição de contorno fosse a do terceiro tipo.

São apresentados na Tabela 4.12 os parâmetros físicos e as dimensões do sólido utilizado para simular esta situação.

Tabela 4.12 – Parâmetro físicos e as dimensões usados na resolução numérica da equação de difusão para uma geometria cúbica.

Geometria	$\Gamma^{\Phi}(\text{m}^2 \text{min}^{-1})$	$h(\text{m min}^{-1})$	$L_1(\text{m})$	$L_2(\text{m})$	$L_3(\text{m})$
Cubo	$3,2451 \times 10^{-8}$	$2,3482 \times 10^{-5}$	$10,71 \times 10^{-3}$	$10,71 \times 10^{-3}$	$10,71 \times 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria.

Com a intenção de explorar a condição de simetria intrínseca à situação física apresentada, foi estabelecida a mesma condição de contorno para todas as faces do sólido, sendo analisados os transientes de volumes de controle escolhidos nas seis faces, de tal modo que o resultado esperado para Φ fosse o mesmo.

A identificação dos pontos nodais dos volumes de controle para se obter os transientes localizados no centro de cada face da geometria cúbica é apresentada na tabela 4.13.

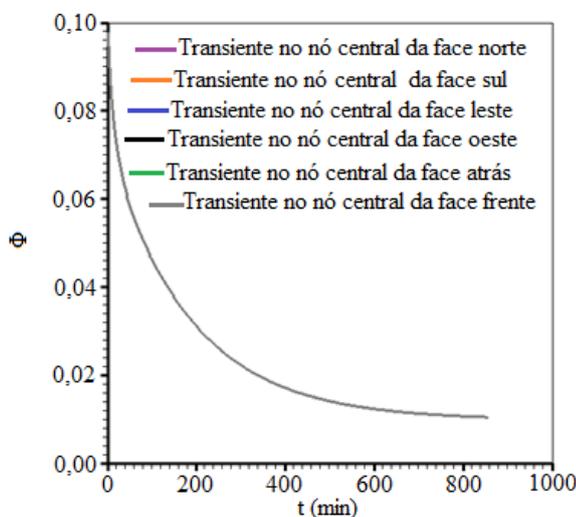
Tabela 4.13 – Identificação dos nós localizados no centro de cada face do cubo

Face norte	nó (13, 25, 13)
Face sul	nó (13, 1, 13)
Face leste	nó (25, 13, 13)
Face oeste	nó (1, 13, 13)
Face atrás	nó (13, 13, 1)
Face frente	nó (13, 13, 25)

Fonte: Autoria própria.

São apresentados na Figura 4.32 os resultados para os transientes dos nós listados na Tabela 4.13.

Figura 4.32 – Transientes de Φ nos pontos nodais dos volumes de controle localizados no centro de cada face de uma geometria cúbica para a condição de contorno do terceiro tipo.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.32 verifica-se que há concordância entre as seis curvas referentes aos transientes dos pontos nodais localizados no centro de cada face do cubo.

A análise da distribuição espacial Φ no plano xy , em $z = L_3/2$, foi feita para o instante $t = 42,75$ min, em alguns volumes de controle situados em posições simétricas, para os quais, espera-se que os valores da grandeza sejam similares. No domínio transformado, esses volumes de controle estão delimitados pelos planos correspondentes a $\gamma = 13$ e $\gamma = 14$.

Tabela 4.14 Distribuição espacial de Φ para um cubo em $t = 42,75$ min obtida via código computacional desenvolvido para a condição de contorno convectiva.

Nó	$\xi = 10$	$\xi = 11$	$\xi = 12$	$\xi = 13$	$\xi = 14$	$\xi = 15$	$\xi = 16$
$\eta = 16$	0,102779	0,103006	0,103111	0,103141	0,103111	0,103006	0,102779
$\eta = 15$	0,103006	0,103234	0,103339	0,103369	0,103339	0,103234	0,103006
$\eta = 14$	0,103111	0,103339	0,103444	0,103474	0,103444	0,103339	0,103111
$\eta = 13$	0,103141	0,103369	0,103475	0,103505	0,103475	0,103369	0,103141
$\eta = 12$	0,103111	0,103339	0,103444	0,103474	0,103444	0,103339	0,103111
$\eta = 11$	0,103006	0,103234	0,103339	0,103369	0,103339	0,103234	0,103006
$\eta = 10$	0,102779	0,103006	0,103111	0,103141	0,103111	0,103006	0,102779

Fonte: Autoria própria.

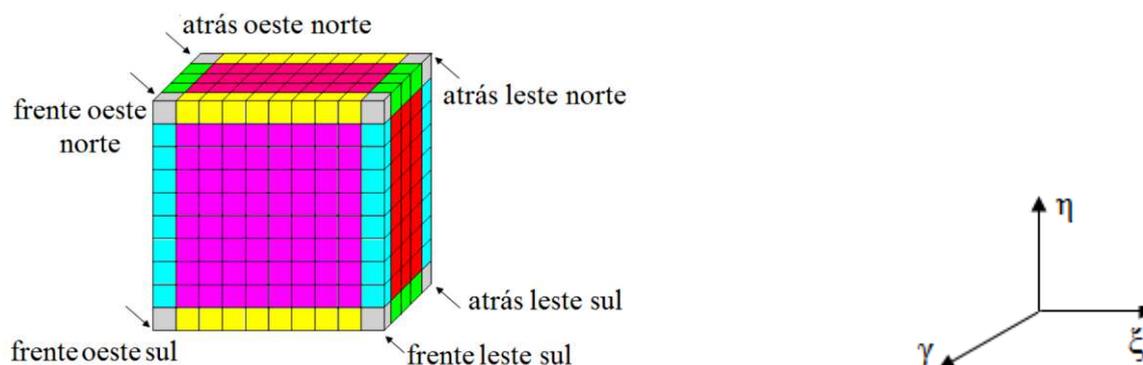
Na Tabela 4.14, verifica-se a coerência de resultados para volumes de controle situados em posições simétricas.

Os resultados apresentados na Figura 4.32 e na Tabela 4.14 comprovam a consistência da solução numérica, pois a condição de simetria referente à situação apresentada foi verificada nos volumes de controle que tiveram seus transientes analisados.

Neste trabalho foram analisados também, os transientes dos volumes de controle localizados nos vértices do cubo, cujos volumes possuem três faces em contato com o meio.

Estes volumes de controle são identificados de acordo com as faces que estão em contato com o meio, conforme pode ser visto na Figura 4.33.

Figura 4.33 – Geometria cúbica discretizada: destaque para os volumes de controle localizados nos vértices do cubo.



Fonte: Farias, V. (2011).

Cada ponto nodal referente ao respectivo volume de controle que teve seu transiente analisado está identificado na Tabela 4.14.

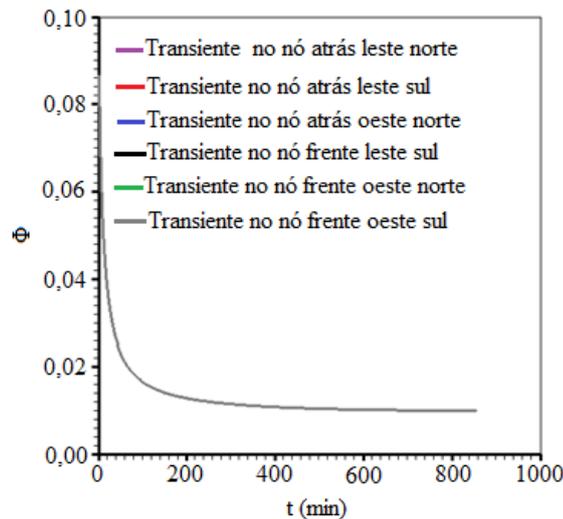
Tabela 4.15 – Pontos nodais localizados nos vértices de uma geometria cúbica

frente oeste norte	nó (1, 25, 25)
frente oeste sul	nó (1, 1, 23)
frente leste sul	nó (25, 1, 25)
atrás oeste norte	nó (1, 25, 1)
atrás leste norte	nó (25, 25, 1)
atrás leste sul	nó (25, 1, 1)

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.34 são mostrados os resultados para os transientes dos pontos nodais apresentados na Tabela 4.15, na qual se observa uma perfeita coincidência entre as curvas, confirmando que a condição de simetria própria da situação apresentada foi satisfeita.

Figura 4.34 – Transientes de Φ nos pontos nodais dos volumes de controle localizados nos vértices do cubo.



Fonte: Autoria própria.

Observando-se a Figura 4.34 verifica-se que o valor de Φ diminui mais rapidamente nos instantes iniciais do que na situação observada na Figura 4.19 o que valida a solução proposta. Isso é esperado, pois o processo de difusão deve ocorrer mais rápido nos volumes de controle dos vértices, tendo em vista que estes volumes possuem três faces em contato como o meio, enquanto que os volumes de controle localizados no centro de cada face do cubo possuem apenas uma face em contato como o meio, tornando, assim, a difusão um processo mais lento para essa situação.

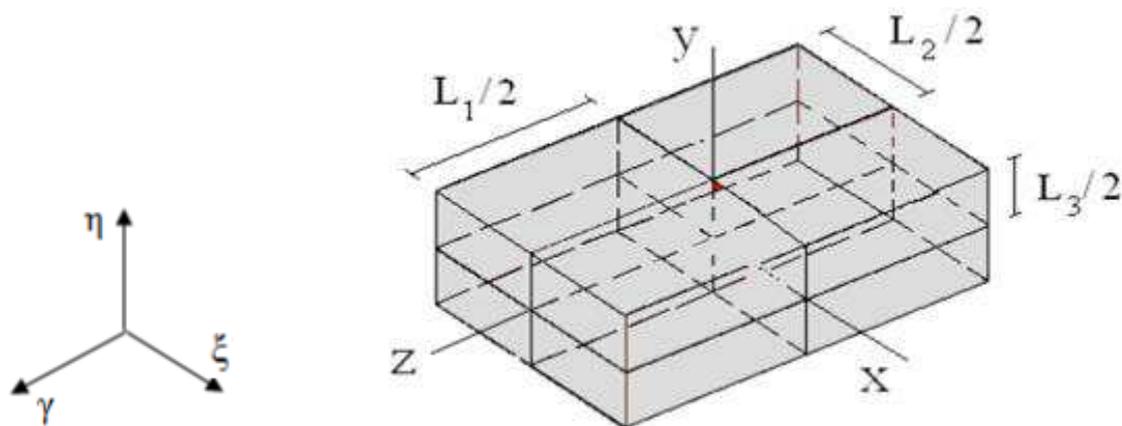
Os resultados apresentados para os testes realizados nesta seção ratificam a consistência do programa computacional desenvolvido, evidenciando a coerência da solução numérica proposta para uma geometria cúbica, tendo em vista que a condição de simetria foi verificada em todas as análises realizadas.

4.4.2.2 – Validação do código computacional utilizado para um paralelepípedo

A validação o código computacional utilizado para malhas estruturadas ortogonais

tridimensionais foi feita utilizando-se a geometria de um paralelepípedo, cujo esquema está apresentado na Figura 4.35.

Figura 4.35 – Paralelepípedo utilizado para validação do código computacional desenvolvido.



Fonte: Farias, V. (2011).

A Figura 4.35 apresenta o domínio físico estudado, nela verifica-se que o eixo z está direcionado na maior dimensão do sólido. Além disso, deve ser destacado que a distribuição espacial será analisada no plano xy (plano central).

Os testes para a geometria do paralelepípedo foram realizados com o pressuposto de uma distribuição inicial uniforme para a grandeza com valor 0,10424 e um valor constante para λ . Admitiu-se ainda que o volume do sólido e os parâmetros termofísicos permanecessem constante durante o processo, e que a grandeza de equilíbrio assumisse o valor de 0,00981 e que a condição de contorno fosse a do terceiro tipo. Na Tabela 4.16 são apresentados outros parâmetros e as dimensões do sólido.

Tabela 4.16 – Parâmetro físicos e as dimensões usados na resolução numérica da equação de difusão para um paralelepípedo.

Geometria	Γ^Φ (m ² min ⁻¹)	h (m min ⁻¹)	L ₁ (m)	L ₂ (m)	L ₃ (m)
Paralelepípedo	9,8200x10 ⁻⁸	7,6790x10 ⁻⁵	10,71x10 ⁻³	141,55x10 ⁻³	157,00x10 ⁻³

Fonte: Autoria própria.

Resultados da distribuição espacial para o plano central no tempo $t = 42,75$ min, são apresentados na Tabela 4.17.

Tabela 4.17 – Distribuição espacial de Φ no plano central para um paralelepípedo em $t = 42,75$ min obtida via código computacional desenvolvido para a condição de contorno convectiva.

Nó	$\xi = 14$	$\xi = 15$	$\xi = 16$	$\xi = 17$	$\xi = 18$
$\eta = 31$	0,042499	0,042499	0,042499	0,042499	0,042499
$\eta = 30$	0,049910	0,049910	0,049910	0,049910	0,049910
$\eta = 29$	0,056875	0,056875	0,056875	0,056875	0,056875
$\eta = 3$	0,056875	0,056875	0,056875	0,056875	0,056875
$\eta = 2$	0,049910	0,049910	0,049910	0,049910	0,049910
$\eta = 1$	0,042499	0,042499	0,042499	0,042499	0,042499

Fonte: Autoria própria.

Na tabela 4.18 são apresentados a identificação de alguns nós das faces do paralelepípedo.

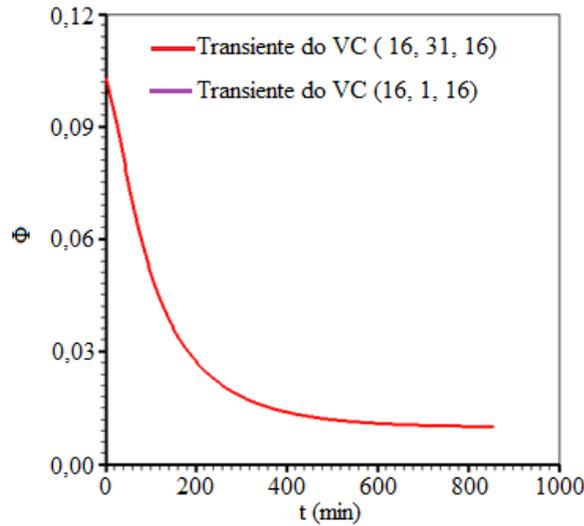
Tabela 4.18 – Identificação dos nós nas faces do paralelepípedo mostrado na Figura 4.34

Face norte	nó (16, 31, 16)
Face sul	nó (16, 1, 16)
Face leste	nó (31, 16, 16)
Face oeste	nó (1, 16, 16)
Face atrás	nó (16, 16, 1)
Face frente	nó (16, 16, 31)

Fonte: Autoria própria.

A superposição dos transientes de Φ para os pontos nodais das faces norte e sul identificados na Tabela 4.17 são apresentados na Figura 4.36.

Figura 4.36 – Transientes de Φ para pontos nodais nas faces norte sul do paralelepípedo.

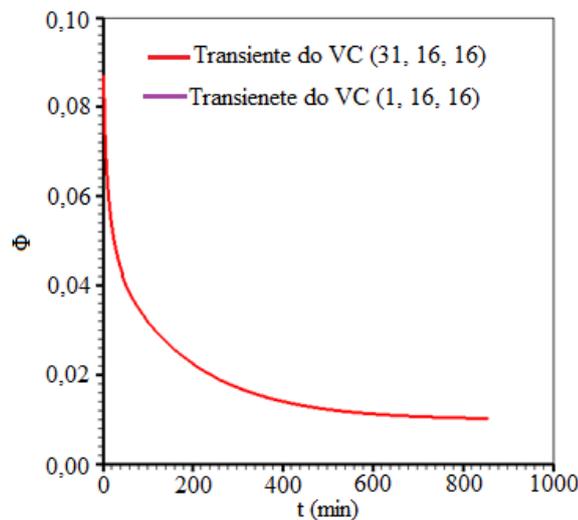


Fonte: Autoria própria.

A Figura 4.36 mostra que existe uma total concordância entre os transientes das faces norte e sul. Neste caso, também validando o código computacional desenvolvido.

Os resultados para os transientes dos pontos nodais das faces leste e oeste do paralelepípedo da Figura 4.35 estão mostrados na Figuras 4.37.

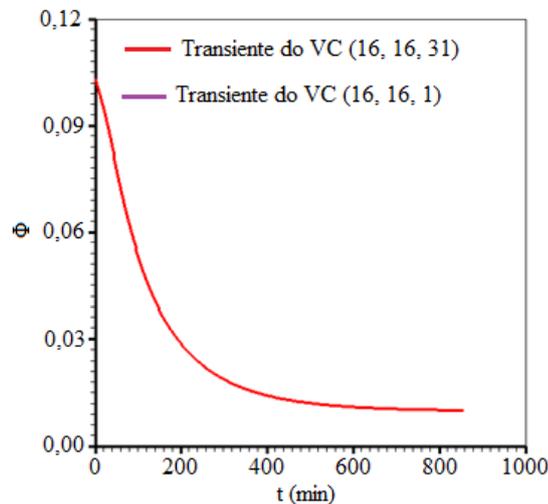
Figura 4.37 – Transientes de Φ para pontos nodais nas faces leste oeste do paralelepípedo.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.38 são apresentados os resultados para os transientes dos pontos nodais das faces atrás e frente do paralelepípedo da Figura 4.35.

Figura 4.38 – Transientes de Φ para pontos nodais nas faces atrás frente do paralelepípedo.



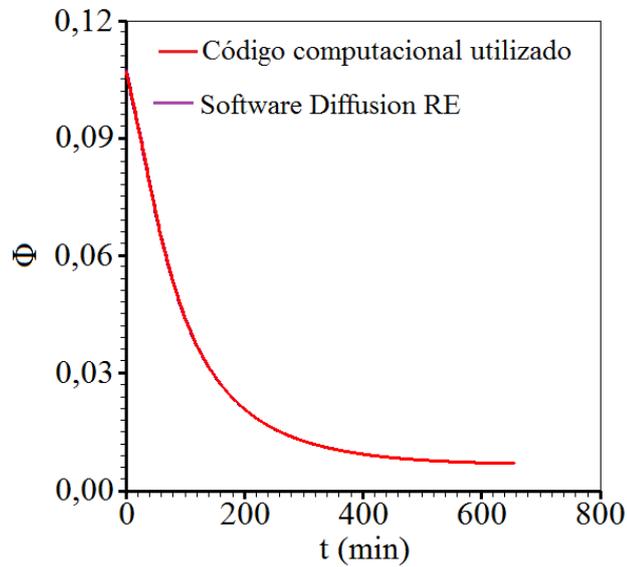
Fonte: Autoria própria.

Observando as Figuras 4.36, 4.37 e 4.38, verifica-se que existe uma boa concordância em todos estes casos analisados. Fisicamente, a consistência do código computacional pode ser verificada através dos resultados acima, pois a Figura 4.37, mostra que nos instantes iniciais a queda no valor de Φ para as faces leste e oeste é mais acentuada do que a observada nas faces das Figuras 4.36 e 4.38. Isso ocorre devido à dimensão do eixo x ser bem menor que as outras, fazendo com que o processo difusivo seja mais rápido nessa direção, lenta na direção y e mais lenta na direção z , que é a maior dimensão do paralelepípedo. Estes resultados estão de acordo com a situação física esperada (NASCIMENTO 2002; FARIAS, V. 2011).

Fazendo agora os testes de validação para o paralelepípedo três volumes de controle foram escolhidos, um localizado na fronteira norte correspondente ao nó ($\xi = 16, \eta = 31, \gamma = 16$) outro, localizado na fronteira leste identificado pelo nó ($\xi = 31, \eta = 16, \gamma = 16$) e o terceiro localizado no meio do sólido cujo nó é identificado por ($\xi = 16, \eta = 16, \gamma = 16$). O regime transiente foi analisado, e os resultados obtidos pelo programa computacional utilizado nesta pesquisa foram comparados com aqueles obtidos pelo *Diffusion RE*.

A superposição dos transientes para o ponto nodal localizado na fronteira norte está mostrada na Figura 4.39.

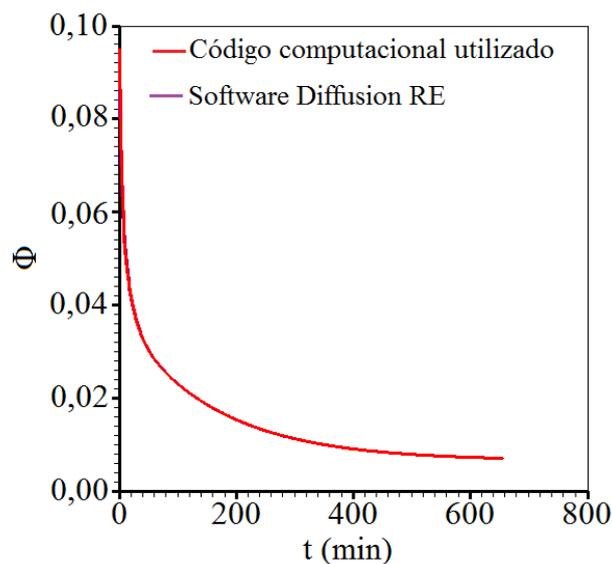
Figura 4.39 – Superposição dos transientes de Φ obtidos pelo programa computacional utilizado e pelo *software Diffusion RE*, em um paralelepípedo, para um volume de controle identificado por ($\xi = 16, \eta = 31, \gamma = 16$).



Fonte: Autoria própria.

Por sua vez, os transientes para o volume de controle localizado na fronteira leste se encontram apresentados na Figura 4.40.

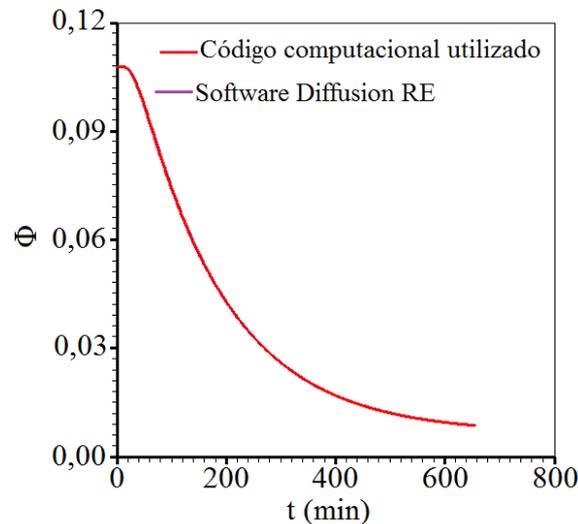
Figura 4.40 – Superposição dos transientes de Φ obtidos pelo programa computacional utilizado e pelo *software Diffusion RE*, em um paralelepípedo, para um volume de controle identificado por ($\xi = 31, \eta = 16, \gamma = 16$).



Fonte: Autoria própria.

Por fim, os transientes para o volume de controle localizado no meio do sólido estão apresentados na Figura 4.41.

Figura 4.41 – Superposição dos transientes de Φ obtidos pelo programa computacional utilizado e pelo *software Diffusion RE* em um paralelepípedo, para um volume de controle identificado por ($\xi = 16, \eta = 16, \gamma = 16$).



Fonte: Autoria própria.

As Figuras 4.39 a 4.41 validam numericamente a solução proposta, pois os resultados obtidos possuem uma boa concordância com aqueles obtidos pelo *Diffusion RE*. Além disso, os resultados também mostram coerência com o fenômeno físico esperado para o transporte da grandeza nas situações analisadas. Pois, verifica-se que para o ponto nodal localizado no meio do sólido, a queda no valor de Φ é bem mais lenta nos instantes iniciais, já que o processo difusivo demora mais a acontecer no centro do sólido, o que é observado na Figura 4.41. Por outro lado, nos volumes de fronteira, a queda é mais acentuada, já que nesses locais, o processo de difusão é mais rápido devido ao contato direto desses volumes com o meio externo, o que pode ser examinado nas Figuras 4.39 e 4.40 (LIMA, 1999; FARIAS, V. 2011).

4.4.3 – Malhas estruturadas tridimensionais e não-ortogonais

Terminado os testes para geometria regulares em que os resultados foram todos positivos, validando assim, o código computacional desenvolvido para resolver a equação de difusão para malhas estruturadas ortogonais, inicia-se então os testes de validação do código computacional desenvolvido para malhas estruturadas 3D e não-ortogonais. Como o código

desenvolvido não propõe a geração de malhas, foram selecionadas algumas geometrias, tal que suas malhas tridimensionais pudessem ser obtidas a partir da extrusão de malhas bidimensionais. As malhas bidimensionais foram geradas pelo software *2D Grid Generation*, desenvolvido por Silva 2008a e os arquivos de extensão “txt” obtidos foram utilizados como dados de entrada para o código computacional aplicado.

4.4.3.1 – Sólido gerado a partir da extrusão de um losango

Para a realização do estudo desta seção algumas figuras geométricas foram escolhidas. A primeira figura escolhida de malhas não ortogonais foi a de um sólido obtido a partir da extrusão, ao longo do eixo z, de um losango no plano xy com a diagonal maior, d_2 medindo o dobro da diagonal menor, d_1 , conforme ilustrado na figura 4.34.

A Tabela 4.19 mostra as constantes do processo atribuídas ao sólido, bem como suas dimensões e condições iniciais e de contorno usadas no transporte da grandeza.

O valor do parâmetro λ foi assumido como constante e igual à unidade.

Tabela 4.19 – Parâmetros físicos usados para resolver a equação de difusão em uma malha não-ortogonal para condição de contorno convectiva.

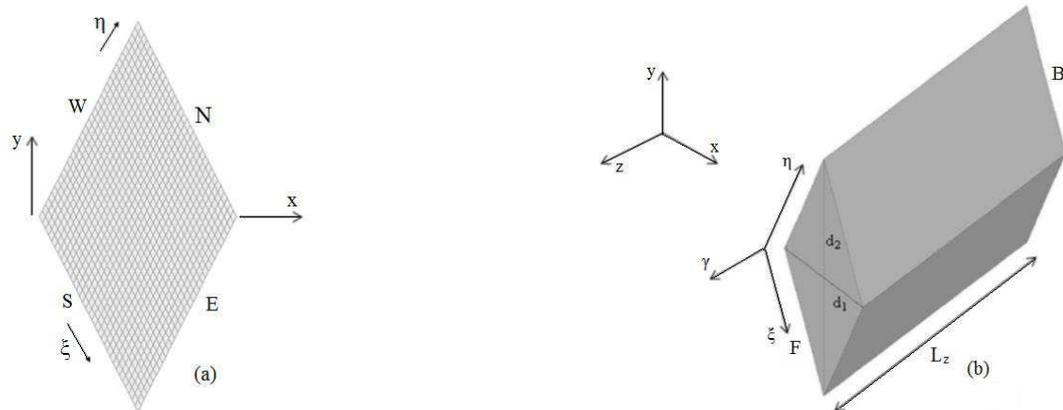
Φ_i	Φ_{eq}	$\Gamma^\Phi(m^2min^{-1})$	$h(m\ min^{-1})$	$d_1(m)$	$d_2(m)$	$L_z(m)$
1,0	0,1	$1,0 \times 10^{-7}$	$5,0 \times 10^{-5}$	$8,0 \times 10^{-3}$	$16,0 \times 10^{-3}$	$100,0 \times 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria.

O domínio transformado envolveu um intervalo de tempo arbitrariamente estipulado em $\Delta t = 0,25$ min para 2000 passos no tempo e uma discretização espacial de 33 linhas ξ , 33 linhas η e 34 linhas γ .

A Figura 4.42 ilustra a situação geométrica tratada, onde se destaca a malha que originou o sólido, bem como os eixos das coordenadas generalizadas e os das coordenadas cartesianas. Os símbolos W, E, N, S, F e B significam as fronteiras oeste, leste, norte, sul, frente e atrás, respectivamente.

Figura 4.42 – Sólido (fora de escala) usado na validação do programa desenvolvido para malhas não-ortogonais: (a) malha bidimensional que gerou o sólido; (b) sólido gerado pela extrusão de um losango.

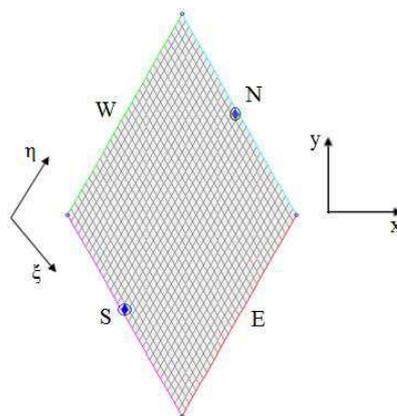


Fonte: Farias, V. (2011).

Os testes de consistência foram feitos no plano central da Figura 4.43, correspondente a $z = L_z/2$, impondo-se a mesma condição de contorno convectiva em todas as faces do sólido e analisando-se o transiente de Φ em volumes de controle localizados em posições simétricas, de tal forma que os resultados esperados para Φ nesses volumes fossem equivalentes entre si.

Os primeiros transientes analisados foram os dos nós relativos aos volumes de controle localizados lado norte e sul da região delimitada pelos planos $\gamma = 17$ e $\gamma = 18$, conforme podem ser vistos em destaque na Figura 4.43. Estes volumes de controle correspondem aos seguintes pontos nodais: $(\xi, \eta) = (16, 1)$ e $(\xi, \eta) = (16, 32)$.

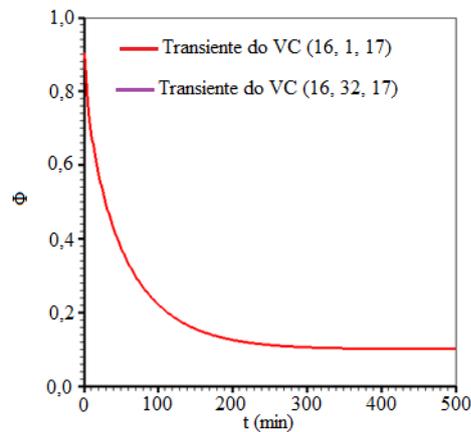
Figura 4.43 – Plano central do sólido usado para validação do código computacional utilizado com destaque para os volumes de controle localizados face norte e sul.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 4.44 mostra os resultados para a evolução temporal da grandeza transportada obtidos com o código numérico proposto para os dois volumes de controle destacados na Figura 4.43. Como não se observa diferença entre os dois gráficos gerados, pode-se afirmar que a condição de simetria inerente ao problema físico foi verificada através da solução numérica proposta.

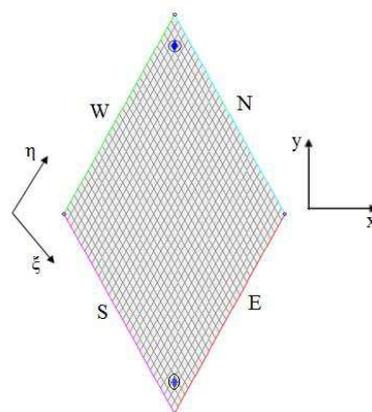
Figura 4.44 – Superposição dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle localizados na fronteira sul e norte do plano central do losango.



Fonte: Autoria própria.

Prosseguindo com os testes de consistência para malhas retilíneas e não-ortogonais, foram analisados os transientes dos pontos nodais correspondentes aos volumes de controle $(\xi, \eta) = (30, 3)$ e $(\xi, \eta) = (3, 30)$ do plano central do sólido, conforme destaque na Figura 4.45.

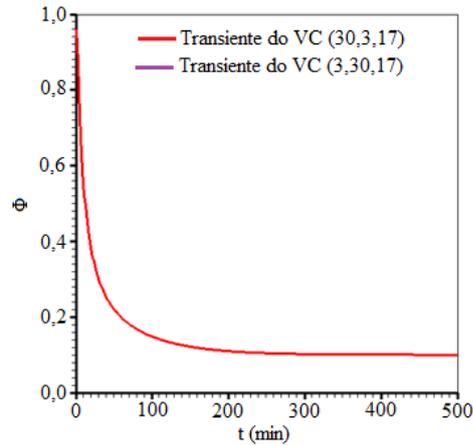
Figura 4.45 – Plano central do sólido usado para validação do código computacional utilizado, com destaque para os volumes de controle $(\xi, \eta) = (30, 3)$ e $(\xi, \eta) = (3, 30)$.



Fonte: Autoria própria.

Os gráficos dos transientes de Φ para os dois nós da Figura 4.45, podem ser observados na Figura 4.46, onde se verifica uma boa concordância entre os dois transientes e uma queda maior para o valor de Φ nesses pontos nodais do que para aqueles apresentados na Figura 4.44.

Figura 4.46 – Superposição dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle localizados nos cantos da diagonal maior do plano central do losango.

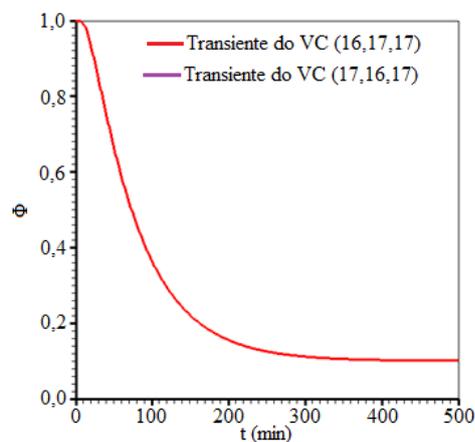


Fonte: Autoria própria.

Com a coincidência das curvas apresentadas na Figura 4.46, verifica-se mais um teste com resultado positivo, possibilitando a aplicação do código numérico utilizado.

A seguir é apresentado na Figura 4.47, um teste que foi realizado para dois volumes de controle internos identificados por $(\xi = 16, \eta = 17, \gamma = 17)$ e $(\xi = 17, \eta = 16, \gamma = 17)$.

Figura 4.47 – Superposição dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle identificados por $(\xi = 16, \eta = 17, \gamma = 17)$ e $(\xi = 17, \eta = 16, \gamma = 17)$.

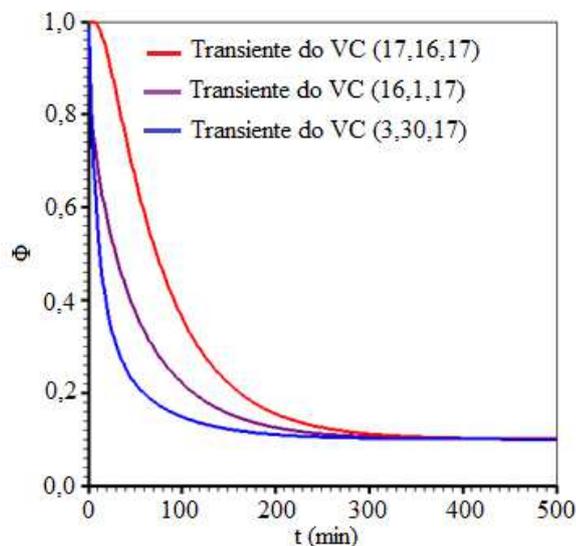


Fonte: Autoria própria.

Verificando os gráficos apresentados nas Figuras 4.44, 4.45 e 4.46, é possível afirmar que existe uma consistência numérica, e também há uma coerência nos resultados obtidos pelo código computacional desenvolvido quanto ao fenômeno físico do processo de difusão. O transporte da grandeza acontece de forma mais rápida nos volumes de fronteira, diminuído gradativamente a velocidade à medida que se aproxima do centro do corpo (SILVA, 2007). Logo, é possível assegurar que, para a malha não-ortogonal estudada, a difusão acontece de forma mais rápida nos volumes de controle do canto da diagonal maior, sendo intermediária nos volumes que se aproximam do meio do sólido e chegando a ser mais lenta nos volumes de controle localizados no meio do sólido.

Essas verificações podem ser comprovadas graficamente ao se traçar, num mesmo sistema de eixos, os transientes para três volumes de controle: volume de controle representado por ($\xi = 16, \eta = 1, \gamma = 17$), o outro volume descrito por ($\xi = 3, \eta = 30, \gamma = 17$) e, por último, um volume de controle interno ($\xi = 17, \eta = 16, \gamma = 17$). Os três gráficos podem ser vistos na Figura 4.48, no qual se comprova a veracidade da informação.

Figura 4.48 – Resultados dos transientes de Φ nos nós referentes aos volumes de controle ($\xi = 17, \eta = 16, \gamma = 17$); ($\xi = 16, \eta = 1, \gamma = 17$) e ($\xi = 3, \eta = 30, \gamma = 17$).



Fonte: Autoria própria.

Como a consistência foi verificada em todos os testes realizados e, além disso, foi verificada a coerência dos resultados obtidos quanto ao fenômeno físico em todas as situações simuladas, assim, pode-se afirmar que o código computacional utilizado é consistente para malhas estruturadas não-ortogonais.

Terminado os testes de verificação da consistência do código computacional utilizado, as próximas simulações objetivam validar a solução numérica proposta. Para comparação dos resultados, foi utilizado o *software Diffusion RE*.

O primeiro teste realizado refere-se à evolução temporal da distribuição espacial de Φ no plano central do sólido apresentado na Figura 4.41, que no domínio computacional, corresponde aos volumes de controle identificados por $\gamma = 17$, para qualquer ξ e η . Essa evolução temporal foi acompanhada para alguns instantes de tempo. No entanto, para apresentar os resultados em forma de tabelas foi escolhido o instante de tempo $t = 25$ min. Essa distribuição espacial de Φ para alguns volumes de controle, obtida com a solução numérica proposta, está apresentada na Tabela 4.20.

Tabela 4.20 – Distribuição espacial de Φ para o losango que representa o plano central do sólido, obtida com o programa computacional desenvolvido, para o instante $t = 25$ min.

Pos. nodal	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 4$	$\xi = 29$	$\xi = 30$	$\xi = 31$	$\xi = 32$
$\eta = 32$	0,21949	0,24306	0,26876	0,29535	0,50620	0,49248	0,47639	0,45811
$\eta = 31$	0,24306	0,27177	0,30136	0,33113	0,53844	0,52149	0,50120	0,47639
$\eta = 30$	0,26876	0,30136	0,33419	0,36665	0,56625	0,54585	0,52149	0,49248
$\eta = 29$	0,29535	0,33113	0,36665	0,40138	0,58989	0,56625	0,53844	0,50620
$\eta = 4$	0,50620	0,53844	0,56625	0,58989	0,40138	0,36665	0,33113	0,29535
$\eta = 3$	0,49248	0,52149	0,54585	0,56625	0,36665	0,33419	0,30136	0,26876
$\eta = 2$	0,47639	0,50120	0,52149	0,53844	0,33113	0,30136	0,27177	0,24306
$\eta = 1$	0,45811	0,47639	0,49248	0,50620	0,29535	0,26876	0,24306	0,21949

Fonte: Autoria própria.

Para comparar com os dados da Tabela 4.20 foi construído com auxílio do *software Diffusion RE* para o instante $t = 25$ min, no plano central nos volumes de controle identificados por $\gamma = 17$ a Tabela 4.21.

Tabela 4.21 – Distribuição espacial de Φ para o plano central do sólido obtido com o *software Diffusion RE* para o instante $t = 25$ min.

Pos.nodal	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 4$	$\xi = 29$	$\xi = 30$	$\xi = 31$	$\xi = 32$
$\eta = 32$	0,21949	0,24306	0,26876	0,29535	0,50620	0,49248	0,47639	0,45811
$\eta = 31$	0,24306	0,27177	0,30136	0,33113	0,53844	0,52149	0,50120	0,47639
$\eta = 30$	0,26876	0,30136	0,33419	0,36665	0,56625	0,54585	0,52149	0,49248
$\eta = 29$	0,29535	0,33113	0,36665	0,40138	0,58989	0,56625	0,53844	0,50620
$\eta = 4$	0,50620	0,53844	0,56625	0,58989	0,40138	0,36665	0,33113	0,29535
$\eta = 3$	0,49248	0,52149	0,54585	0,56625	0,36665	0,33419	0,30136	0,26876
$\eta = 2$	0,47639	0,50120	0,52149	0,53844	0,33113	0,30136	0,27177	0,24306
$\eta = 1$	0,45811	0,47639	0,49248	0,50620	0,29535	0,26876	0,24306	0,21949

Fonte: Autoria própria.

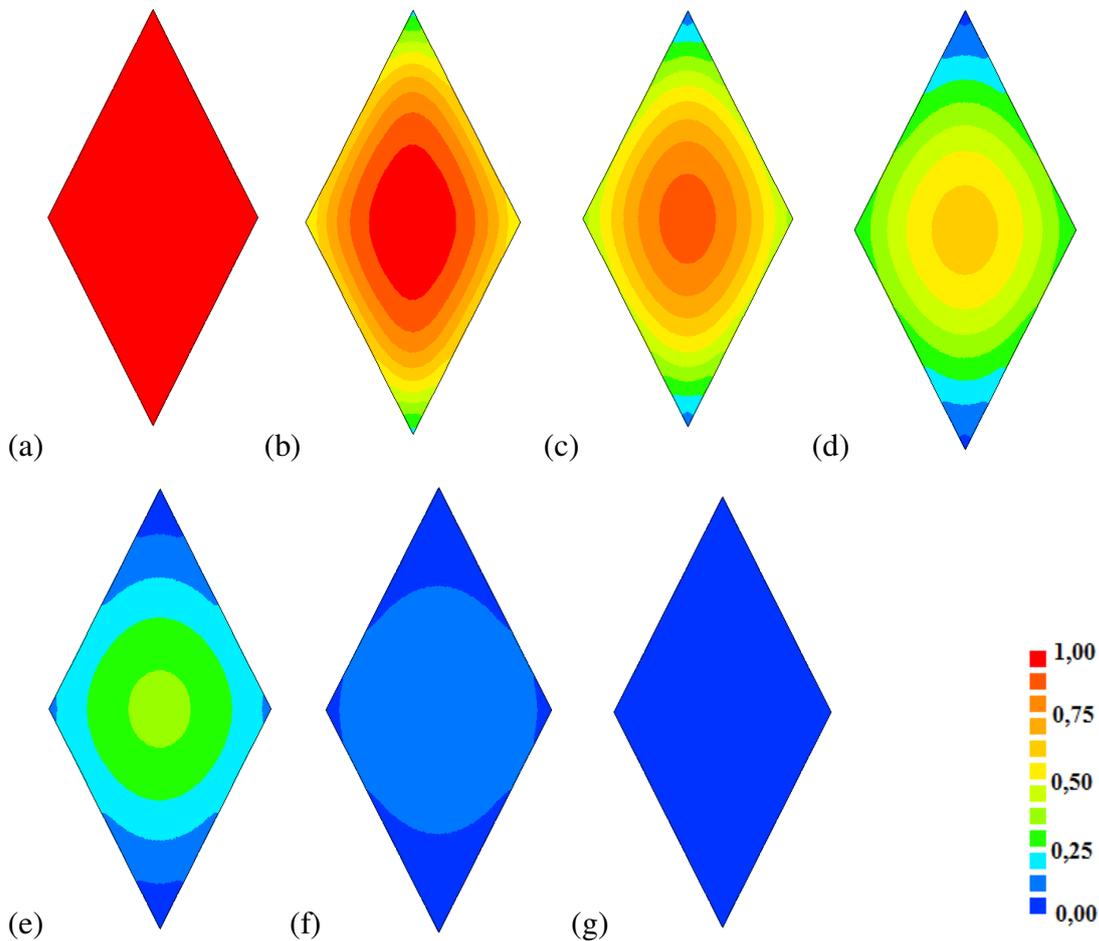
Comparando os valores da grandeza de interesse em volumes de controle correspondentes das Tabelas 4.20 e 4.21, pode-se perceber que para uma tolerância da ordem de 10^{-5} , há uma boa concordância entre os resultados obtidos pelas duas soluções numéricas.

Para a análise visual da evolução temporal da distribuição espacial da grandeza Φ em uma geometria bidimensional no domínio físico fez-se uso do *software Contour Plots* desenvolvido por Silva (2008c). Essa análise foi feita para o plano central do sólido que possui a forma de um losango. A evolução temporal foi acompanhada para vários instantes de tempo:

a) $t = 0$ min; b) $t = 12,5$ min; c) $t = 25$ min; d) $t = 50$ min; e) $t = 87,5$ min; f) $t = 137,5$ min; g) $t = 500$ min.

A distribuição da variável Φ sobre o plano central do sólido estão apresentadas na Figura 4.49.

Figura 4.49 – Distribuição espacial de Φ sobre o plano central do sólido analisado: (a) $t = 0$ min; (b) $t = 12,5$ min; (c) $t = 25$ min; (d) $t = 50$ min; (e) $t = 87,5$ min; (f) $t = 137,5$ min e (g) $t = 500$ min.



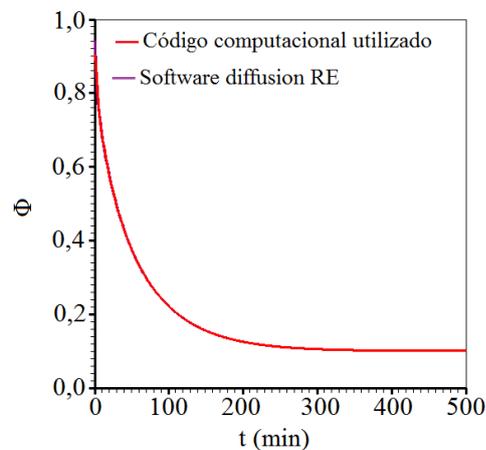
Fonte: Autoria própria.

A evolução temporal observada nos gráficos de contorno apresentados na Figura 4.48 confirma que há coerência nos resultados obtidos pelo código computacional proposto em relação ao fenômeno físico do processo de difusão observado na malha não-ortogonal que está sendo estudada. Houve concordância dos últimos resultados com aqueles apresentados na Figura 4.49.

Para os instantes iniciais, a velocidade do transporte da grandeza no interior do sólido é menor do que nas regiões próximas à fronteira. Observa-se também que os volumes de controle localizados próximos aos cantos da diagonal maior possuem uma velocidade de transporte maior do que os volumes de controle localizados próximos aos cantos da diagonal menor.

Os volumes de controle cujos transientes foram analisados pelo código computacional proposto e que seus gráficos estão mostrados na Figura 4.29, consistiram também de avaliação pelo *Diffusion RE* e os resultados obtidos pelas duas soluções numéricas foram comparados entre si. Na Figura 4.50 aparecem os resultados referentes ao volume de controle, identificado por ($\xi = 16, \eta = 1, \gamma = 17$).

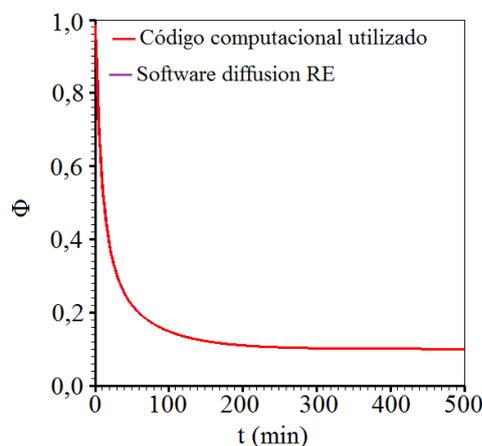
Figura 4.50 – Superposição do transiente do volume de controle (16, 1, 17) de Φ do sólido em forma de losango, obtido pelas duas soluções numéricas: programa utilizado e *software Diffusion RE*.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 4.51 apresenta o valor de Φ em função do tempo para o ponto nodal localizado no volume de controle identificado por ($\xi = 3, \eta = 30, \gamma = 17$) e que está localizado em um dos cantos da diagonal menor.

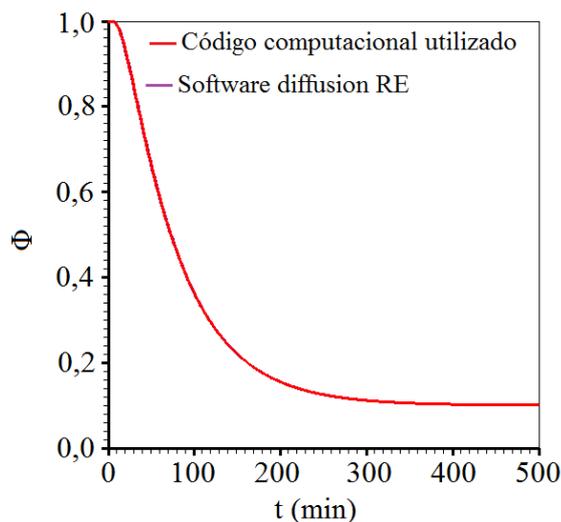
Figura 4.51 – Superposição do transiente do volume de controle ($\xi = 3, \eta = 30, \gamma = 17$) obtido pelas duas soluções numéricas: programa computacional utilizado e *software Diffusion RE*.



Fonte: Autoria própria.

Foi escolhido o volume de controle para análise da evolução temporal do processo difusivo localizado no meio do sólido, sendo identificado por ($\xi = 16, \eta = 17, \gamma = 17$). O resultado está descrito pelos gráficos mostrados na Figura 4.52.

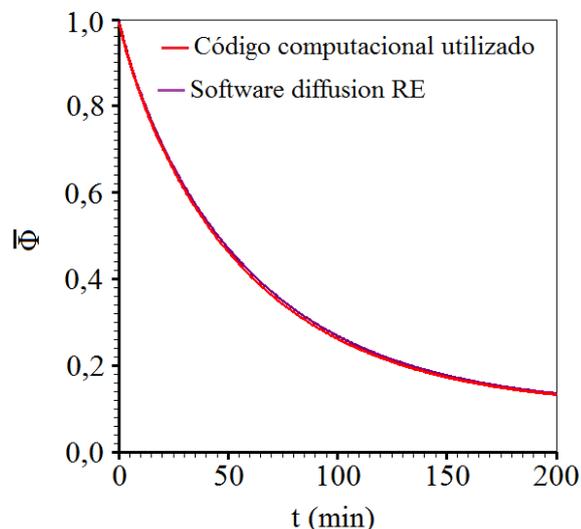
Figura 4.52 – Superposição do transiente do volume de controle ($\xi = 16, \eta = 17, \gamma = 17$) obtido pelas duas soluções numéricas: programa computacional utilizado e software *Diffusion RE*.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.53 é apresentado os resultados obtidos com as duas soluções numéricas do regime transiente do valor médio da grandeza para o plano central sob análise.

Figura 4.53 – Superposição do transiente do valor médio de Φ para o plano central do sólido que possui a seção transversal na forma de um losango.



Fonte: Autoria própria.

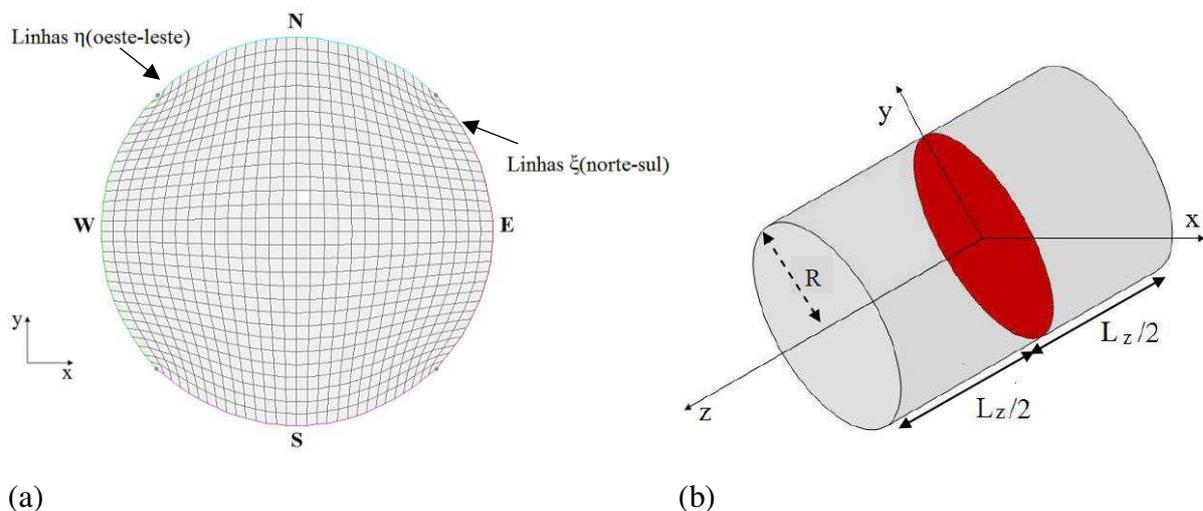
Observando-se os gráficos apresentados nas Figuras 4.50 a 4.53, verifica-se que todos os resultados obtidos com o código computacional utilizado coincidiram com aqueles provenientes do software *Diffusion RE*. Assim, levando em consideração também, os outros testes apresentados nesta seção, os quais foram bem-sucedidos, é possível afirmar que o código computacional desenvolvido neste trabalho é válido para malhas tridimensionais estruturadas e não-ortogonais similares àquela apresentada na Figura 4.42.

4.4.3.2 - Sólido gerado a partir da extrusão de um círculo

Para expandir o número de aplicações do código computacional utilizado, foi escolhida uma forma geométrica mais complexa que as anteriores: um cilindro finito, cuja geometria foi gerada a partir da extrusão, ao longo do eixo z, de uma malha bidimensional circular obtida no software *2D Grid Generation*. O domínio usado nesta simulação está esquematizado em detalhes nas Figuras 4.54a e 4.54b.

Nesta simulação, a discretização no espaço envolveu uma malha com 31 linhas ξ , 31 linhas η e 32 linhas γ , enquanto que a discretização no tempo envolveu 2000 passos para a utilização de um intervalo $\Delta t = 219,24$ s.

Figura 4.54 – Esquema (fora de escala) para gerar um cilindro finito: (a) Malha circular utilizada para gerar o cilindro finito; (b) Cilindro finito obtido a partir da extrusão de uma malha circular.



Fonte: Farias, V. (2011).

Para que a condição de simetria fosse explorada ao longo do eixo z, foi necessário e suficiente impor a condição de fluxo zero em uma das faces da fronteira (atrás ou frente). Isto corresponde a um refino na malha ao longo do eixo z de 32 para 64 linhas γ .

Para analisar o processo de difusão no cilindro finito apresentado na Figura 4.54, impondo-se a condição de contorno convectiva, foram utilizados os parâmetros de transporte e as características físicas sintetizados na Tabela 4.22.

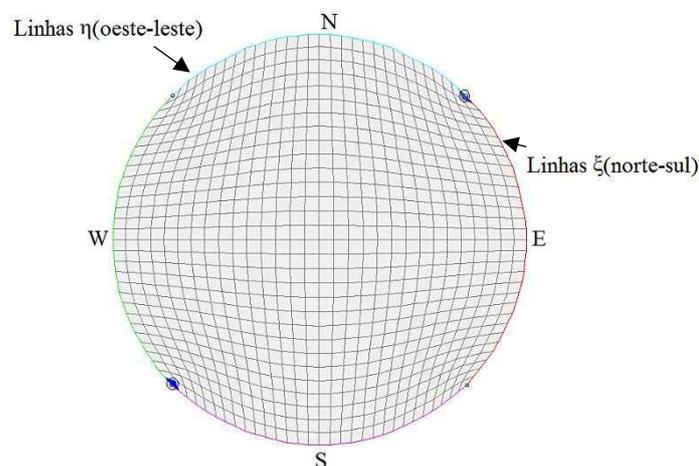
Tabela 4.22 - Parâmetros físicos simulados para a solução da equação de difusão de uma malha cilíndrica para condição de contorno convectiva.

Φ_i	Φ_{eq}	$\Gamma^\Phi (m^2 s^{-1})$	$h(m s^{-1})$	R(m)	$L_z(m)$
1,00	0,00	$6,737 \times 10^{-10}$	$9,175 \times 10^{-8}$	$1,768 \times 10^{-2}$	$6,400 \times 10^{-2}$

Fonte: Autoria própria.

A consistência do código computacional utilizado para malhas estruturadas curvilíneas foi testada a partir da comparação dos transientes para volumes de controle localizados em posições simétricas, de tal forma que os resultados esperados para Φ fossem equivalentes entre si. Para a realização destes testes foram escolhidos, inicialmente, dois volumes de fronteira, situados no plano frontal do sólido, sendo identificados, respectivamente por: ($\xi = 1, \eta = 1, \gamma = 31$) e ($\xi = 30, \eta = 30, \gamma = 31$).

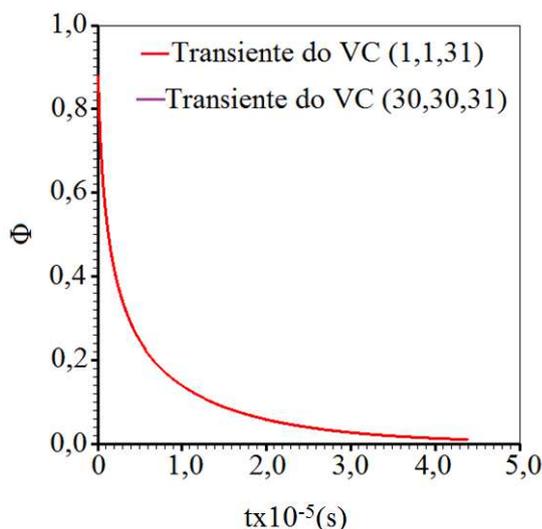
Figura 4.55 – Malha circular localizada no plano frontal do sólido, com destaque para os volumes de controle que tiveram seus transientes analisados.



Fonte: Autoria própria.

Os transientes obtidos com o código computacional utilizado estão mostrados na Figura 4.56, onde se verifica que, pela superposição das curvas traçadas o resultado deste primeiro teste realizado foi satisfatório.

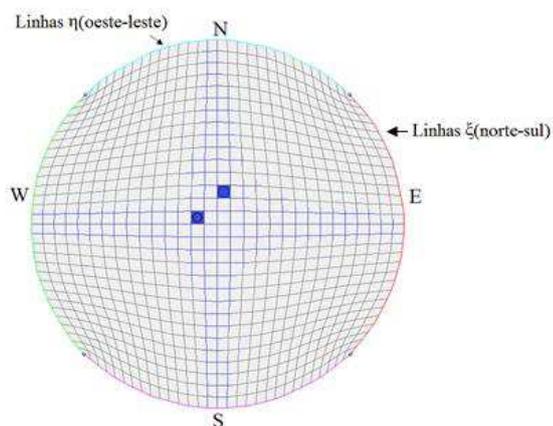
Figura 4.56 – Superposição dos transientes dos volumes de controle de um cilindro finito, identificados por $(\xi = 1, \eta = 1, \gamma = 31)$ e $(\xi = 30, \eta = 30, \gamma = 31)$.



Fonte: Autoria própria.

Para dar continuidade aos teste de consistência, mais dois volumes de controle internos foram escolhidos, localizados em posições simétricas no plano central e identificados por: $(\xi = 14, \eta = 16, \gamma = 16)$ e $(\xi = 16, \eta = 18, \gamma = 16)$. Estes volumes estão destacados na malha apresentada na Figura 4.57.

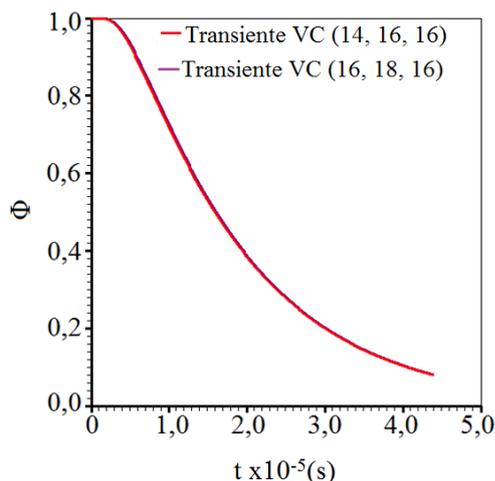
Figura 4.57 – Malha circular localizada no plano central do sólido, com destaque para os volumes de controle que tiveram seus transientes analisados.



Fonte: Autoria própria.

Na figura 4.58 é apresentado os transientes obtidos a partir da solução numérica proposta para os dois pontos nodais na qual se observa uma concordância entre as curvas. Isso era esperado, devido à condição de simetria intrínseca da situação.

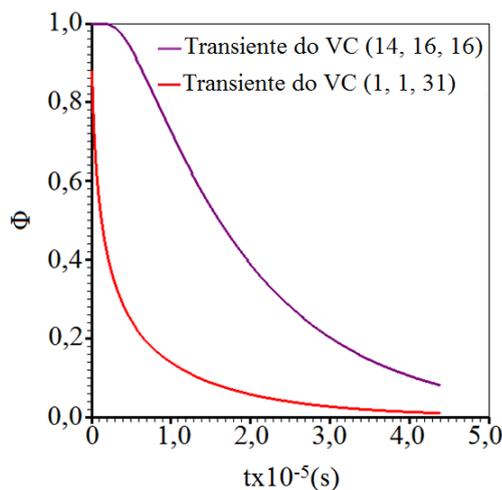
Figura 4.58 – Superposição dos transientes em volumes de controle num cilindro finito, identificados por $(\xi = 14, \eta = 16, \gamma = 16)$ e $(\xi = 16, \eta = 18, \gamma = 16)$.



Fonte: Autoria própria.

Observando as Figuras 4.56 e 4.58 é possível verificar a coerência da solução numérica proposta, em relação ao fenômeno físico da difusão, uma vez que o transporte da grandeza ocorre de forma mais rápida nos volumes de fronteira e de forma mais lenta nos volumes de controle localizados no meio do sólido, conforme é mostrado na Figura 4.59.

Figura 4.59 – Transientes de Φ para um volume de fronteira e para um volume no meio do sólido, obtidos com o programa computacional utilizado.



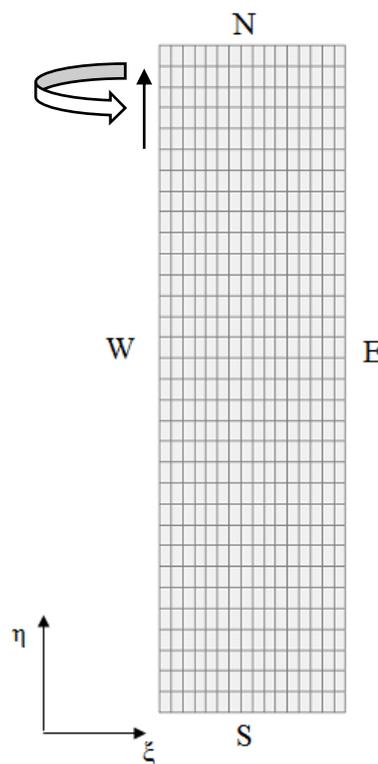
Fonte: Autoria própria.

A comprovação das observações feitas nas Figuras 4.56 e 4.58 é percebida na Figura 4.59, quando foram feitos os gráficos dos transientes de Φ para dois pontos nodais, um na fronteira e outro no meio do sólido.

4.4.3.3 - Sólido gerado a partir de uma malha retangular

No *software 2D Grid Generation* foi gerada uma malha retangular com a largura equivalente ao raio do cilindro e um comprimento com valor igual à sua altura a fim de validar a solução numérica desenvolvida para a geometria estudada. Esta malha, com um domínio transformado de 17 linhas ξ e 33 linhas η , está esquematizada na Figura 4.60 e foi utilizada pelo *software Diffusion RE* para gerar um cilindro finito, a partir da sua revolução em torno do eixo de simetria η e, conseqüentemente, avaliar o fenômeno da difusão.

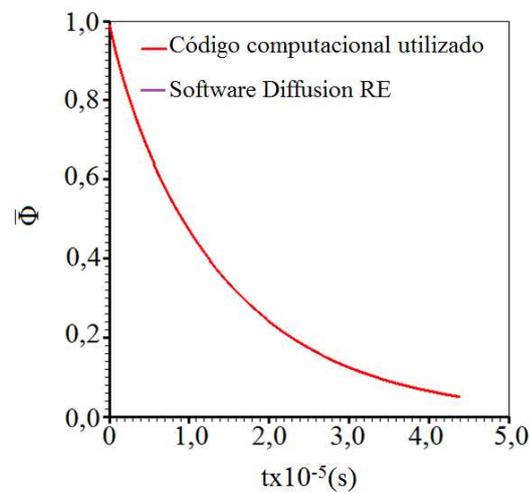
Figura 4.60 – Malha retangular usada na geração de um cilindro finito.



Fonte: Farias, V. (2011).

O primeiro teste realizado para validar numericamente o código computacional utilizado para um cilindro finito foi o valor médio da grandeza transportada em função do tempo, cujas soluções numéricas e os resultados são apresentados na Figura 4.61.

Figura 4.61 – Transiente da superposição do valor médio de Φ para um cilindro finito obtidos com o código computacional utilizado e *software Diffusion RE*.

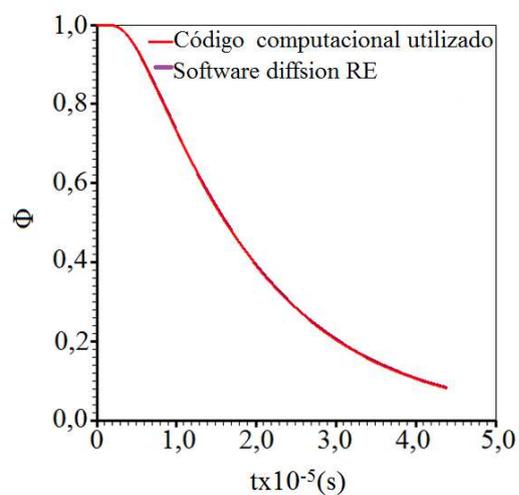


Fonte: Autoria própria.

Observando-se a superposição das curvas obtidas, verifica-se que o resultado foi satisfatório.

Dando continuidade aos testes visando à validação numérica do código computacional utilizado foi analisado o transiente de um volume de controle no meio do sólido, sendo identificado por ($\xi = 16, \eta = 16, \gamma = 16$).

Figura 4.62 – Superposição do transiente de Φ para o volume de controle identificado por ($\xi = 16, \eta = 16, \gamma = 16$) obtido com o programa utilizado e com o *Diffusion RE*.

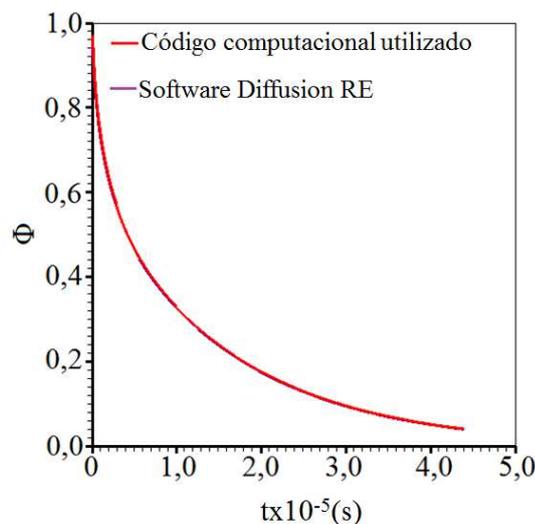


Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 4.62, verifica-se mais um resultado satisfatório para a validação numérica do código computacional desenvolvido, pois é possível ver que houve uma boa concordância entre o transiente obtido com a solução numérica proposta e a obtida com o *Diffusion RE*. Além disso, verifica-se que para os instantes iniciais, o valor de Φ tem uma queda branda. Isso ocorre devido os volumes de controle estarem localizados no centro do sólido e terem como características a queda lenta no valor de Φ (SILVA, 2007).

Outro volume que teve seu transiente avaliado é identificado por ($\xi = 30, \eta = 16, \gamma = 1$), sendo comparado com o transiente do volume de controle ($\xi = 16, \eta = 1, \gamma = 1$) da malha retangular usada para obter um cilindro por revolução pelo *software Diffusion RE*. Os respectivos gráficos são mostrados na Figura 4.63.

Figura 4.63 - Superposição dos transientes de Φ para os volumes de controle identificado por ($\xi = 30, \eta = 16, \gamma = 1$) e ($\xi = 16, \eta = 1, \gamma = 1$), com o programa utilizado e com o *Diffusion RE*.



Fonte: Autoria própria.

4.5 – Aplicação da solução numérica na secagem de materiais cerâmicos

A aplicação do código computacional adaptado para este trabalho na secagem de telhas cerâmicas pressupõe que as seguintes hipóteses sejam assumidas:

- O sólido é considerado homogêneo e isotrópico.

- O campo do teor de umidade é simétrico com relação aos eixos z . Assim, a malha gerada representa 1/2 da telha, o que resulta num menor esforço computacional para um melhor refinamento da malha.
- O campo do teor de umidade é uniforme no início da secagem.
- O único mecanismo de transporte de massa no interior do sólido é o mecanismo da difusão líquida.
- Para todos os contornos das telhas cerâmicas é suposto o mesmo valor para o coeficiente de transferência convectiva de massa, que é admitido constante;
- A difusividade efetiva de uma dada massa numa dada posição ou é constante ou depende somente do teor de umidade naquele ponto;
- No caso da inclusão de variação no volume da telha ao longo da simulação, considera-se que a sua forma não seja alterada, mas apenas as suas dimensões são reduzidas.

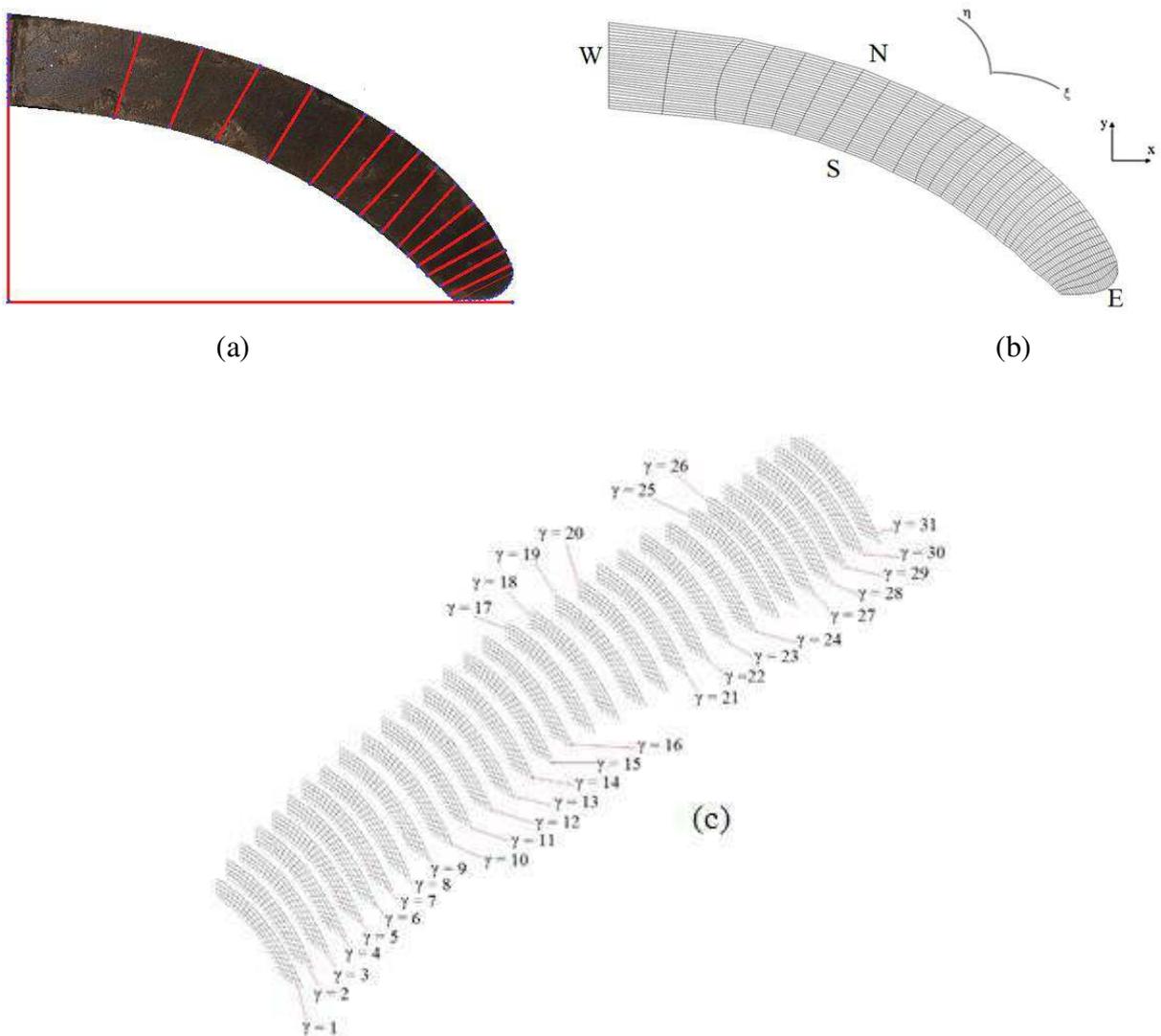
4.5.1 Malha para o sólido

Visando resolver a equação de difusão numericamente para a geometria real do sólido e explorando a condição de simetria ao longo do comprimento da telha, inicialmente foram geradas 31 malhas bidimensionais ao longo do comprimento. Assim, as malhas foram geradas utilizando metade do sólido, como pode ser visto na Figura 4.64, que apresenta uma das malhas bidimensionais obtida com o software *2D Grid Generation*. Esta referida simetria proporciona economia em tempo de processamento computacional, em alocação de memória e em energia.

Para construir a malha tridimensional foi preciso medir largura, comprimento e espessura da telha cerâmica correspondente a cada ensaio (E1, E2, E3 e E4). A espessura (L_y) foi medida uma única vez para cada ensaio. O comprimento (L_z) foi dividido em 31 planos e em cada plano era feita a medida da largura (L_x) (Figura 4.64 (c)). Assim foi gerada a malha bidimensional da telha cerâmica no *2D Grid Generation* com a medida da espessura e a metade da medida da largura para cada valor de z do plano. Desta maneira, foram geradas as 31 malhas

bidimensionais para cada ensaio. A malha inicial apresentava 16 linhas ao longo da largura e 16 linhas ao longo da espessura. Em seguida foi feito o refinamento das malhas, chegando-se ao resultado final de 31x31 linhas em cada dimensão (espessura e largura).

Figura 4.64 – (a) Foto frontal da telha que gerou a malha bidimensional; (b) Malha bidimensional 31x31 geratriz da malha 3D para as telhas cerâmicas; (c) Planos da telha em que foram geradas as malhas.

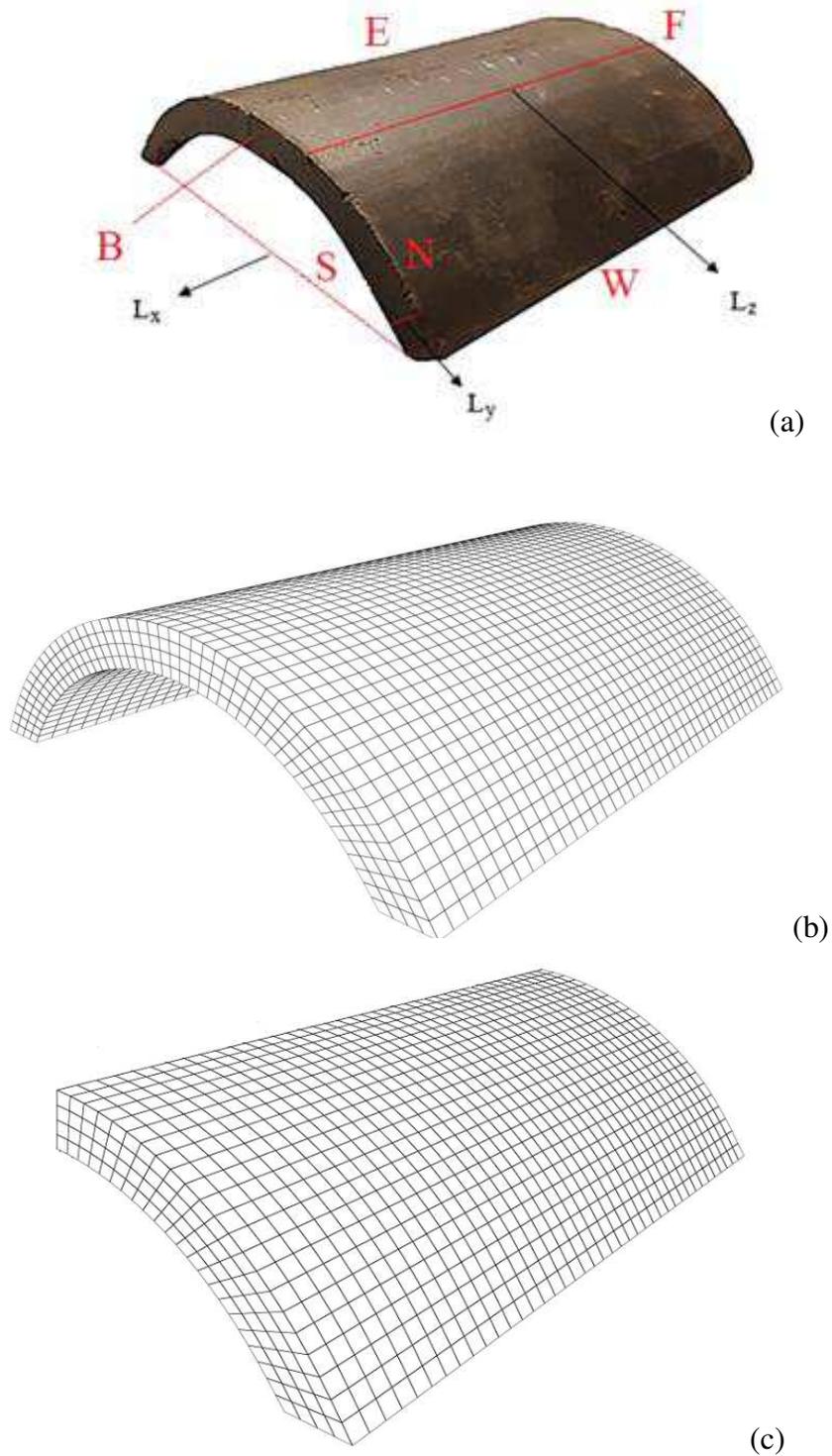


Fonte: Autoria Própria

Terminada a geração das malhas bidimensionais, os valores de z de cada ensaio foram colocados no correspondente arquivo de texto obtido para cada malha em cada plano com ajuda de um programa de computador (Apêndice – código A4.2) criado para colocar a terceira coluna obtendo-se assim, a malha tridimensional da telha que foi usada como dados de entrada no programa utilizado e no *software LS Optimizer*. Na Figura 4.65 apresenta-se a foto de uma telha

e a correspondente malha tridimensional, bem como, a malha tridimensional da metade da telha cerâmica, destacando a condição de simetria.

Figura 4.65 – (a) Telha, (b) malha tridimensional e (c) malha da metade da telha cerâmica.



Fonte: Autoria Própria.

A medida da largura ($L_x = 137,72 \times 10^{-3}$ m) da telha do lado *back* é maior que a medida da largura ($L_x = 128,17 \times 10^{-3}$ m) do lado *front*. Essas medidas são da telha do ensaio E1. As medidas da largura da metade da telha de cada ensaio que foram usadas no *2D Grid Generation* se encontram no apêndice 2.

4.5.2 - Resultados e análise das otimizações

Nesta seção, serão apresentados e analisados os resultados obtidos nas otimizações usando o *software L.S. Optimizer* para os quatro ensaios da experiência com a secagem de telha cerâmica. É sabido que a difusividade efetiva de massa é sensível ao teor de umidade no interior do produto no qual ocorre o transporte de massa. Se existir uma distribuição do teor de umidade, a consideração de uma expressão para a difusividade em função do teor de umidade local é uma opção para melhorar os resultados obtidos. Assim, foram analisadas nove funções crescentes para a difusividade efetiva de massa, dentre as disponíveis na literatura consultada com o objetivo de verificar qual delas melhor representa o fenômeno estudado. Ressalte-se que para todas as otimizações um valor qualquer para a difusividade efetiva de massa foi atribuído, pois, na fase inicial, o valor da difusividade efetiva de massa não é usado pelo *software*, ele apenas ler o valor. A Tabela 4.23 identifica as respectivas funções que foram usadas nas otimizações.

Tabela 4.23 – Funções usadas na otimização.

Identificação das funções (F)	Função para difusividade ($m^2 \text{ min}^{-1}$)
F ₁	$A_1 \cosh(A_2 \Phi)$
F ₂	$A_1 \exp(A_2 \Phi)$
F ₃	$A_1 (\Phi)^2 + A_2$
F ₄	$A_1 \cosh(A_2 (\Phi)^{(0,5)})$
F ₅	$A_1 \exp(A_2 (\Phi)^{(0,5)})$
F ₆	$A_1 \Phi + A_2$
F ₇	$A_1 \log(A_2 \Phi)$
F ₈	$A_1 \log(A_2 (\Phi)^{(0,5)})$
F ₉	A_1

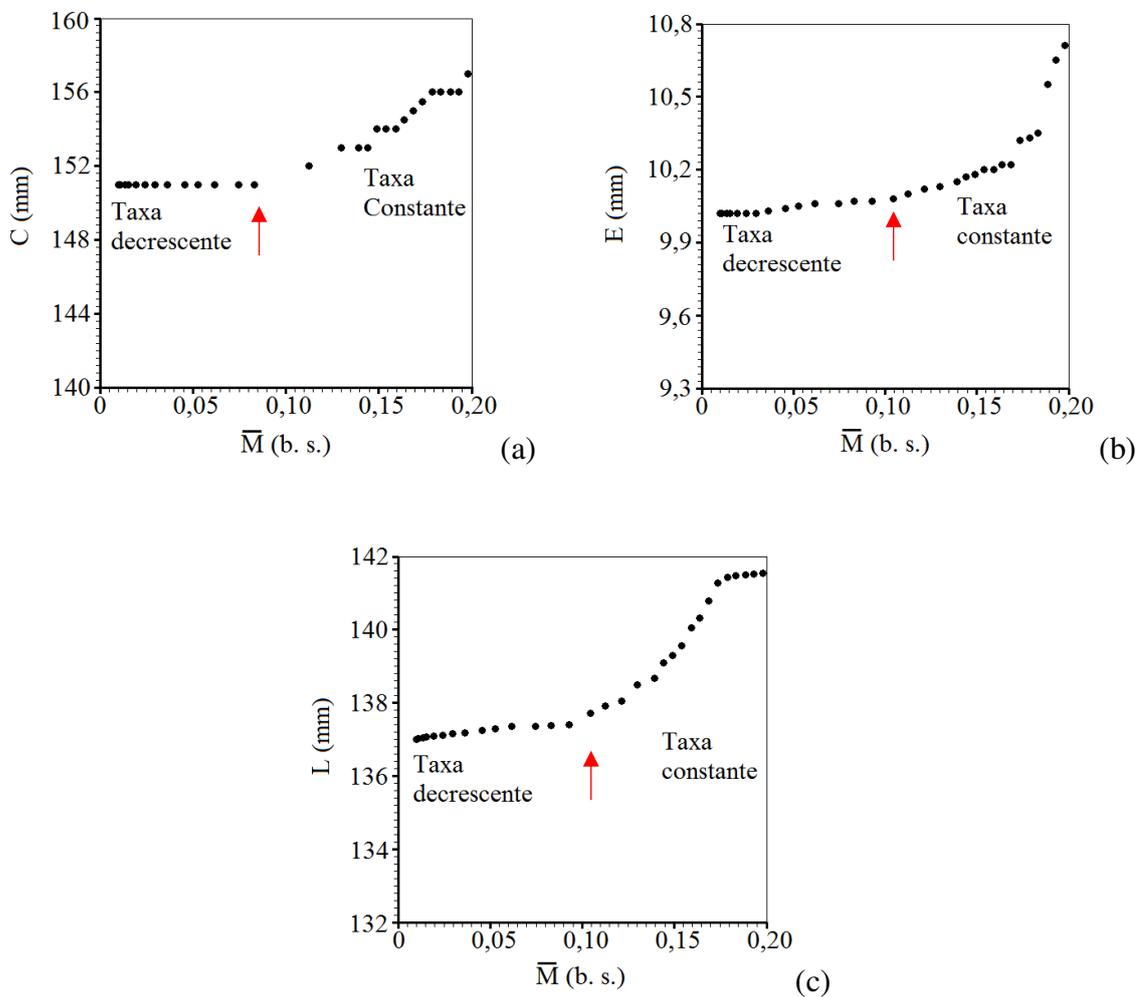
Fonte: Autoria própria.

O tempo médio necessário para realizar cada uma das otimizações foi de 18 horas para uma malha 31x31x31 com 2000 passos no tempo utilizando-se a bateria do notebook no plano

de energia auto desempenho. Se mudasse o plano de energia da bateria para equilibrado, o tempo necessário para a otimização subiria para 44 horas. Como foram feitas 36 otimizações, então, foram necessárias 648 horas de trabalho.

Para avaliar o comportamento da variação volumétrica com o tempo, foram traçados gráficos do comprimento, espessura e largura das telhas cerâmicas em função do teor de umidade médio para o ensaio E1. Esses gráficos são mostrados na Figura 4.66.

Figura 4.66 – Gráficos do ensaio E1: (a) comprimento versus teor de umidade médio; (b) espessura versus teor de umidade médio; (c) largura versus teor de umidade médio.



Fonte: Autoria própria.

Conforme observa-se na Figura 4.66, uma variação apreciável nas dimensões acontece principalmente no período em que a secagem ocorre à taxa constante. No entanto, durante o período de processo difusivo (taxa decrescente de secagem) não há, praticamente, variação das dimensões. Esse fato foi verificado para todas as condições experimentais investigadas.

Diante dos resultados expostos, não foi detectado um encolhimento apreciável nas telhas cerâmicas, assim, a retração volumétrica não será apreciada no estudo a seguir, considerando-se apenas a difusividade efetiva de massa constante ou variável. Esses resultados estão em concordância com as pesquisas de Silva, W. et al. 2012; Silva, L. 2012 que realizaram estudos similares na secagem de produtos cerâmicos.

De posse dos resultados obtidos nos processos de otimização, em todas as experiências, as funções foram colocadas em Tabelas, por ordem crescente do valor do χ^2 . Tal fato ocorre, pois, a melhor função corresponde a que possui menor χ^2 e maior R^2 . Na Tabela 4.24 são apresentados os resultados obtidos nos processos de otimização para todo o ensaio E1. A tabela apresenta os valores de a_1 e a_2 das funções da difusividade efetiva, bem como os valores de h , do χ^2 e do coeficiente de determinação R^2 .

Tabela 4.24 – Valores de A_1 e A_2 para as funções da difusividade efetiva, bem como os valores de h , do χ^2 e do coeficiente de determinação para o ensaio E1.

F	A₁	A₂	h (m min⁻¹) (x 10⁻⁵)	χ^2 (x10⁻⁵)	R²
F ₁	(6,47±0,33)x10 ⁻⁸	36,3 ± 2,4	(4,76±0,13)	0,1164	0,9999110
F ₂	(4,42±0,33)x10 ⁻⁸	29,6±3,0	(4,95±0,20)	0,1540	0,9998841
F ₃	(5,0±0,6)x10 ⁻⁵	(5,7±0,4)x10 ⁻⁸	(5,20±0,16)	0,1566	0,9998820
F ₄	(3,2±0,5)x10 ⁻⁸	10,7±1,0	(5,36±0,27)	0,2231	0,9998334
F ₅	(1,76±0,32)x10 ⁻⁸	10,3 ± 1,2	(5,40±0,30)	0,2418	0,9994538
F ₆	(2,87±0,44)x10 ⁻⁶	(1,62±0,98)x10 ⁻⁸	(5,91±0,32)	0,3422	0,9997438
F ₇	(6,9±1,3)x10 ⁻⁸	146±30	(6,9±0,5)	0,7228	0,9994538
F ₈	(1,39±0,26)x10 ⁻⁷	12,1±1,3	(6,9±0,6)	0,7228	0,9998198
F ₉	(1,04 ±0,12)x10 ⁻⁷	0	(9,98±0,17)	2,4826	0,9981725

Fonte: Autoria própria.

Para os outros ensaios (E2, E3 e E4) os resultados são apresentados nas Tabelas 4.25 a 4.27.

Tabela 4.25 – Valores de A_1 e A_2 para as funções da difusividade efetiva para o ensaio E2 o valor de h , o valor do qui-quadrado, valor do coeficiente de determinação.

F	A_1	A_2	h (m min ⁻¹) $\times 10^{-5}$	χ^2 $\times 10^{-5}$	R^2
F ₁	$(1,001 \pm 0,027) \times 10^{-7}$	$26,2 \pm 1,4$	$(6,8 \pm 2,3)$	0,1782	0,9999115
F ₂	$(3,9 \pm 0,5) \times 10^{-5}$	$(9,41 \pm 0,35) \times 10^{-8}$	$(7,31 \pm 2,7)$	0,2471	0,9998780
F ₃	$(7,53 \pm 0,34) \times 10^{-8}$	$18,8 \pm 1,9$	$(7,31 \pm 3,9)$	0,2998	0,9998542
F ₄	$(6,5 \pm 0,5) \times 10^{-8}$	$7,6 \pm 0,6$	$(7,9 \pm 0,4)$	0,4144	0,9997989
F ₅	$(4,2 \pm 0,5) \times 10^{-8}$	$6,6 \pm 0,8$	$(8,1 \pm 0,5)$	0,4825	0,9997673
F ₆	$(2,36 \pm 0,34) \times 10^{-6}$	$5,7 \pm 0,8 \times 10^{-8}$	$(8,4 \pm 0,5)$	0,5164	0,9997488
F ₇	$(5,3 \pm 1,0) \times 10^{-8}$	$(35 \pm 12) \times 10$	$(9,9 \pm 0,7)$	0,9665	0,9995287
F ₈	$(1,09 \pm 0,19) \times 10^{-7}$	$18,8 \pm 3,2$	$(9,9 \pm 0,7)$	0,96652	0,9995288
F ₉	$(1,14 \pm 0,08) \times 10^{-7}$	0	$(15,1 \pm 2,4)$	3,5402	0,9984041

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4.26 – Valores de A_1 e A_2 para as funções da difusividade efetiva para o ensaio E3, o valor de h , o valor do qui-quadrado, valor do coeficiente de determinação.

F	A_1	A_2	h (m min ⁻¹) $\times 10^{-5}$	χ^2 $\times 10^{-6}$	R^2
F ₈	$(1,4 \pm 0,4) \times 10^{-7}$	24 ± 7	$(5,83 \pm 0,37)$	2,3073	0,9998348
F ₆	$(2,86 \pm 0,15) \times 10^{-6}$	$(1,14 \pm 0,21) \times 10^{-7}$	$(5,24 \pm 0,38)$	2,4290	0,9998311
F ₅	$(8,9 \pm 1,6) \times 10^{-8}$	$5,0 \pm 1,7$	$(5,3 \pm 0,5)$	2,4416	0,9998295
F ₄	$(1,58 \pm 0,16) \times 10^{-7}$	$6,5 \pm 1,6$	$(5,2 \pm 0,5)$	2,5740	0,9998225
F ₂	$(1,47 \pm 0,14) \times 10^{-7}$	14 ± 6	$(5,1 \pm 0,5)$	2,8120	0,9998079
F ₃	$(9 \pm 5) \times 10^{-5}$	$(1,788 \pm 0,022) \times 10^{-7}$	$(4,64 \pm 0,28)$	2,9627	0,9998051
F ₁	$(1,96 \pm 0,25) \times 10^{-7}$	33 ± 10	$(4,41 \pm 0,35)$	3,1632	0,9997964
F ₇	Não conv.	Não conv.	Não conv.	Não conv.	Não conv.
F ₉	$(1,54 \pm 0,17) \times 10^{-7}$	0	$(7,5 \pm 0,7)$	7,4247	0,9995507

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4.27 – Apresenta os valores de A_1 e A_2 para as funções da difusividade efetiva para o ensaio E4, o valor de h , o valor do qui-quadrado, valor do coeficiente de determinação.

F	A_1	A_2	h (m min ⁻¹) $\times 10^{-5}$	χ^2 $\times 10^{-6}$	R^2
F ₁	$(1,485 \pm 0,034) \times 10^{-7}$	$19,2 \pm 1,2$	$(9,8 \pm 0,4)$	1,3606	0,9999311
F ₃	$(2,9 \pm 0,4) \times 10^{-5}$	$(1,445 \pm 0,037) \times 10^{-7}$	$(10,1 \pm 0,4)$	1,5293	0,9999229
F ₂	$(1,22 \pm 0,04) \times 10^{-7}$	$11,2 \pm 1,4$	$(10,6 \pm 0,5)$	2,0746	0,9998967
F ₄	$(1,16 \pm 0,06) \times 10^{-7}$	$5,3 \pm 0,5$	$(11,0 \pm 0,5)$	2,3518	0,9998834
F ₅	$(8,6 \pm 0,7) \times 10^{-8}$	$3,9 \pm 0,6$	$(11,3 \pm 0,6)$	2,3791	0,9998651
F ₆	$(3,12 \pm 0,31) \times 10^{-6}$	$(1,14 \pm 0,39) \times 10^{-7}$	$(11,3 \pm 0,6)$	2,5365	0,9998745
F ₇	Não conv.	Não conv.	Não conv.	Não conv.	Não conv.
F ₈	$(9,0 \pm 1,8) \times 10^{-8}$	37 ± 12	$(12,6 \pm 0,7)$	3,9749	0,9998058
F ₉	$(1,57 \pm 0,07) \times 10^{-7}$	0	$(15,9 \pm 1,2)$	9,2673	0,9995428

Fonte: Autoria própria.

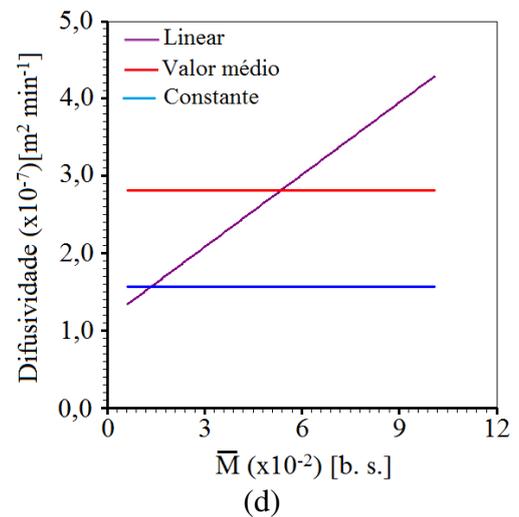
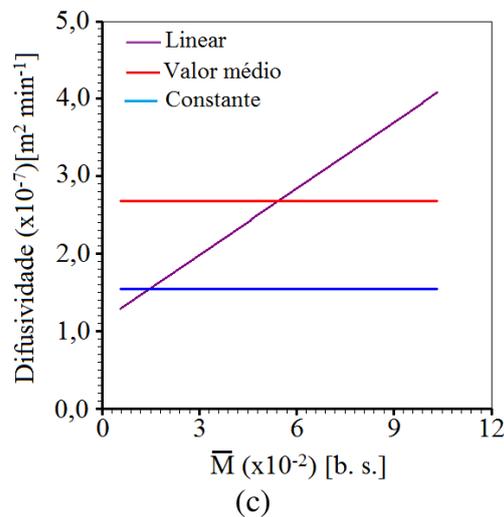
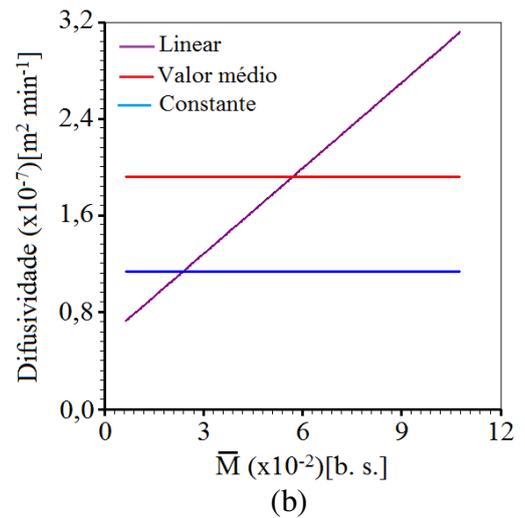
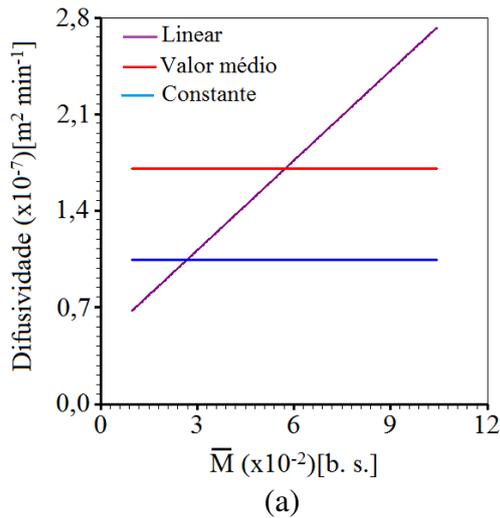
Os dados apresentados nas Tabelas 4.24 a 4.27 mostraram que os indicadores estatísticos obtidos ao se considerar a difusividade efetiva de massa quando expressa por uma função que varia com o teor de umidade local, são melhores que os obtidos ao se considerar a difusividade efetiva de massa constante. Esse fato foi verificado para todas as funções. Pode-se observar também que algumas funções não convergiram, mesmo com 70 iterações.

Nas Tabelas 4.24 a 4.27, os resultados apresentam um intervalo de confiança de ligeiramente inferior a 68,3%, uma vez que as otimizações são referentes a (N-3) graus de liberdade.

Os dados obtidos não apresentaram uma unanimidade em relação ao melhor resultado para uma determinada função. Assim, para a escolha da melhor função, foram analisadas as coerências em relação aos resultados físicos, como o maior valor, bem como o valor médio para a difusividade. Os resultados foram confrontados entre si e comparados com alguns trabalhos reportados na literatura que utilizaram a mesma matéria prima, argila vermelha (Silva, W. et al. 2012; Farias et al. 2015). Depois dessas análises, optou-se pela função F6, que representa uma variação linear da difusividade efetiva de massa com o teor de umidade local.

Mostra-se na Figura 4.67 a difusividade de massa da telha cerâmica dada pela função linear, o valor médio calculado para essa função e a difusividade de massa constante para os ensaios E1, E2, E3 e E4.

Figura 4.67 – Função linear difusividade de massa, valor médio e a função difusividade constante da telha cerâmica para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se na Figura 4.67 que há compatibilidade entre os valores obtidos para a difusividade de massa constante, o valor médio e a difusividade de massa linear em função do teor de umidade para todos os ensaios.

Na Tabela 4.28 apresenta-se um resumo, dos valores médios para a difusividade efetiva de massa (D_{ef}) e dos valores ao se considerar este mesmo parâmetro constante para a solução numérica e os valores do coeficiente de transferência convectivo (h) dos quatro ensaios.

Tabela 4.28 – Valores para a difusividade efetiva de massa média, difusividade efetiva de massa constante e o coeficiente convectivo.

Ensaio	$\bar{D}_{ef}(\text{m}^2 \text{ min}^{-1})$	$D_{ef}(\text{m}^2 \text{ min}^{-1})$	$h (\text{m min}^{-1})$
E1	$1,7051 \times 10^{-7}$	$1,0463 \times 10^{-7}$	$5,9142 \times 10^{-5}$
E2	$1,9215 \times 10^{-7}$	$1,1398 \times 10^{-7}$	$8,3995 \times 10^{-5}$
E3	$2,6803 \times 10^{-7}$	$1,5432 \times 10^{-7}$	$5,9447 \times 10^{-5}$
E4	$2,8143 \times 10^{-7}$	$1,5672 \times 10^{-7}$	$11,257 \times 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 4.28 mostra que o aumento da velocidade do fluxo de ar tem influência maior no aumento do valor do coeficiente de transferência convectivo (h) e menor influência no aumento da difusividade efetiva de massa (D_{ef}). Por exemplo, observa-se que ao se aumentar a velocidade do fluxo de ar de $0,62 \text{ m s}^{-1}$ do E1 para $1,17 \text{ m s}^{-1}$ do E2 e mantida a temperatura fixa, h aumentou o seu valor em mais de 40%, enquanto que os valores da difusividade de massa (constante e médio) aumentaram pouco. Por outro lado, o aumento da temperatura do ar tem influência maior no aumento da difusividade efetiva de massa. Comparando-se E1 com E3 verifica-se que ao se aumentar a temperatura de $62 \text{ }^\circ\text{C}$ de E1 para $71 \text{ }^\circ\text{C}$ de E3 e mantida a velocidade do fluxo de ar fixa, os valores da difusividade efetiva de massa (constante e médio) aumentaram cerca de 50%, enquanto que o valor de h ficou praticamente constante. Como era de se esperar o aumento da temperatura e da velocidade do fluxo de ar influenciam tanto o aumento do valor da difusividade efetiva de massa como o aumento do valor do coeficiente de transferência convectivo, é o caso de E4.

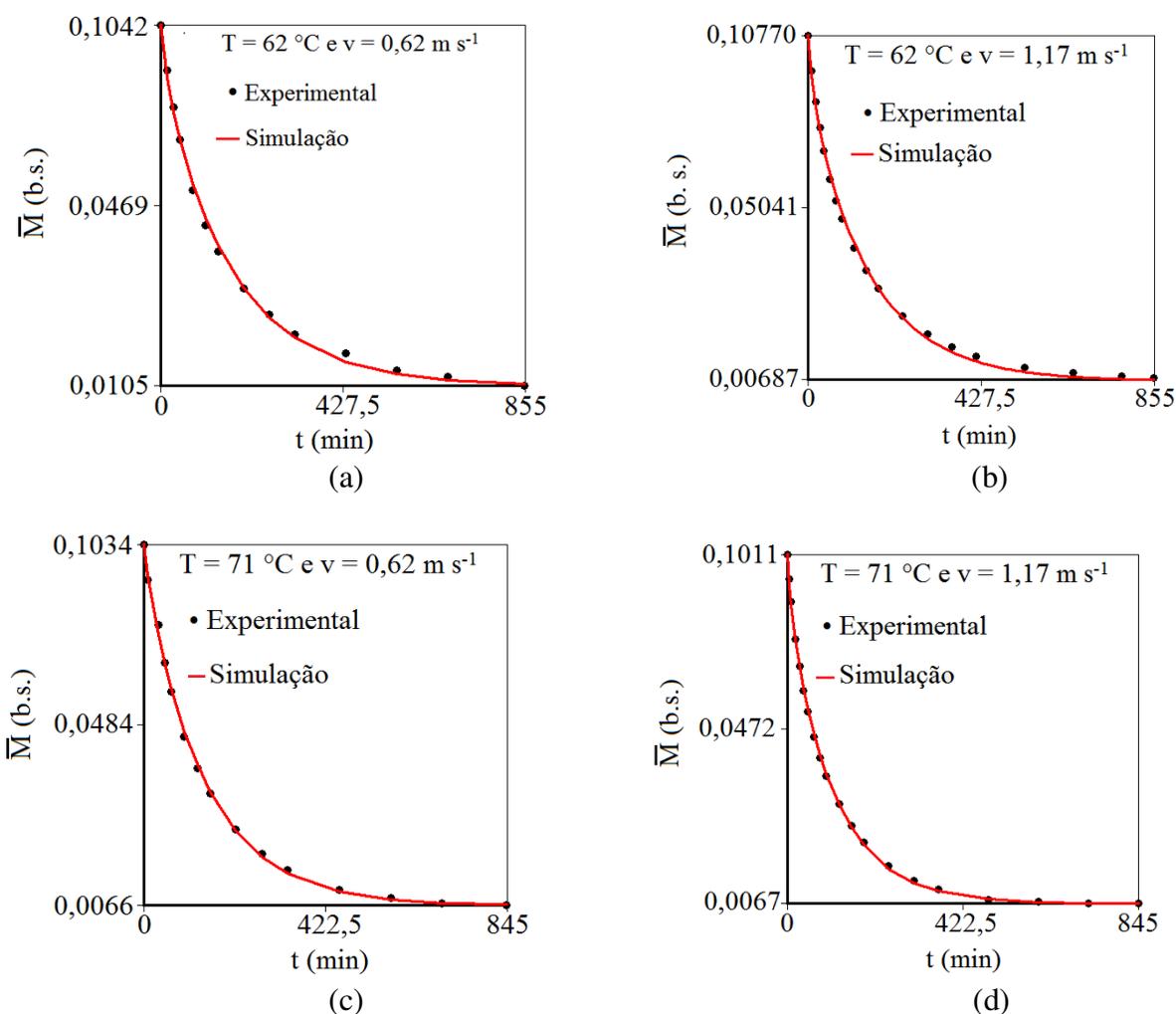
Os valores mostrados na Tabela 4.28, apesar de dependerem da geometria e composição do produto, bem como do processo de fabricação e temperatura de secagem, são compatíveis com valores disponíveis na literatura para a D_{ef} de água em materiais cerâmicos (Nascimento, 2002; Silva, 2007; Farias, V. 2011).

Uma vez que os parâmetros de transporte foram determinados por otimização, as cinéticas de secagem podem ser simuladas para as condições experimentais investigadas.

4.5.3 – Análise numérica considerando difusividade efetiva de massa constante

Como não foi detectado um encolhimento apreciável durante o período de taxa de secagem decrescente, pode-se supor que não houve uma grande mudança na estrutura interna do produto e que, portanto, a difusividade constante pode descrever bem o fenômeno estudado. Assim, apesar dos parâmetros estatísticos não terem sido os melhores para a difusividade constante, optou-se por fazer uma análise dos resultados para essa difusividade. O *LS Optimizer* disponibiliza os gráficos em que os pontos experimentais e a curva de secagem simulada são sobrepostos. Os gráficos gerados estão ilustrados na Figura 4.68.

Figura 4.68 – Curvas simuladas com a difusividade constante: (a) E1; (b) E2; (c) E3; (d) E4.



Fonte: Autoria própria.

Observando-se a Figura 4.68a pode-se verificar que existe uma boa concordância entre dados experimentais e simulação nos instantes iniciais, apresentando uma ligeira discrepância

entre os resultados simulados e os dados experimentais a partir de 427,5 min., aproximadamente. Esse fato sugere que a difusividade efetiva neste intervalo de tempo deveria ter um valor menor do que nos instantes iniciais. Para os outros ensaios, os resultados mostram que existe uma boa concordância entre dados experimentais e simulação em todo intervalo de tempo.

Para se analisar a distribuição espacial do teor de umidade no sólido foi escolhido o ensaio E1, e os gráficos de contorno foram traçados para algumas seções transversais em alguns instantes de tempo selecionados arbitrariamente. Os gráficos mostram como o teor de umidade é distribuído no interior e no contorno do sólido. As informações sobre a distribuição do teor de umidade são importantes para se observar esses gradientes que geram tensões que podem provocar danos ao produto, tais como trincas, fissuras ou deformações (Nascimento, 2002).

Na Figura 4.69 são apresentados os gráficos de contorno que representam a evolução temporal da distribuição de água nos volumes de controle localizados no plano identificado por $z = 1,125$ cm, que corresponde a linha $\gamma = 5$, para o ensaio E1.

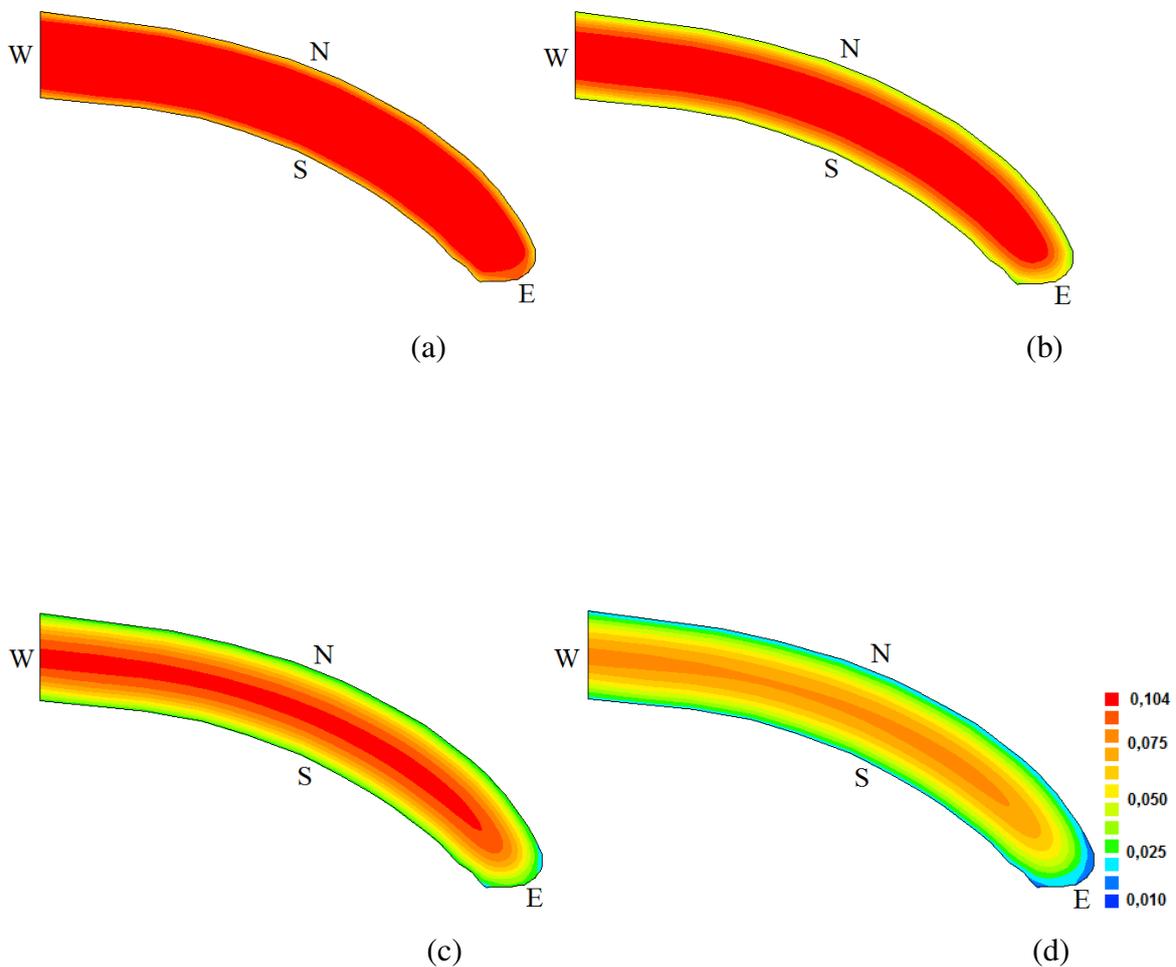
Os instantes de tempo selecionados para análise foram:

- a) $t = 4,275$ min;
- b) $t = 17,1$ min;
- c) $t = 47,75$ min;
- d) $t = 85,5$ min.

Na Figura 4.69, é possível perceber a coerência e a consistência do fenômeno, visto que durante o regime transiente, a velocidade do transporte da grandeza no centro do plano é menor do que nas regiões próximas ao contorno. Há, portanto diferença na distribuição do teor de umidade dos volumes de controle localizados no interior do sólido daqueles situados nas fronteiras. Nota-se que os volumes de controle localizados na face leste são os que secam de forma mais rápida, isso porque eles além de estarem na fronteira e, portanto, em contato direto com o ar de secagem, estão localizados numa região mais estreita. Já a face mais interna (oeste) é a que seca de forma mais lenta quando comparada com as outras faces. Isto se deve ao fato de que essa face não possui nenhum contato com o meio externo.

Analisando ainda a Figura 4.69, verifica-se que nos instantes iniciais há uma ligeira assimetria na distribuição de água em relação às faces sul e norte. A face norte possui uma maior área de contato com o meio e, conseqüentemente, uma maior transferência de água, enquanto a face sul, apesar de estar em contato com o meio, possui uma curvatura que reduz ligeiramente a taxa de secagem em relação à face norte.

Figura 4.69 – Distribuição do teor de umidade no plano central $z = 1,125 \text{ cm}$ ($\gamma = 5$), de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte e volume constantes, para o ensaio E_1 nos seguintes instantes: a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 47,75 min e d) 85,5 min.

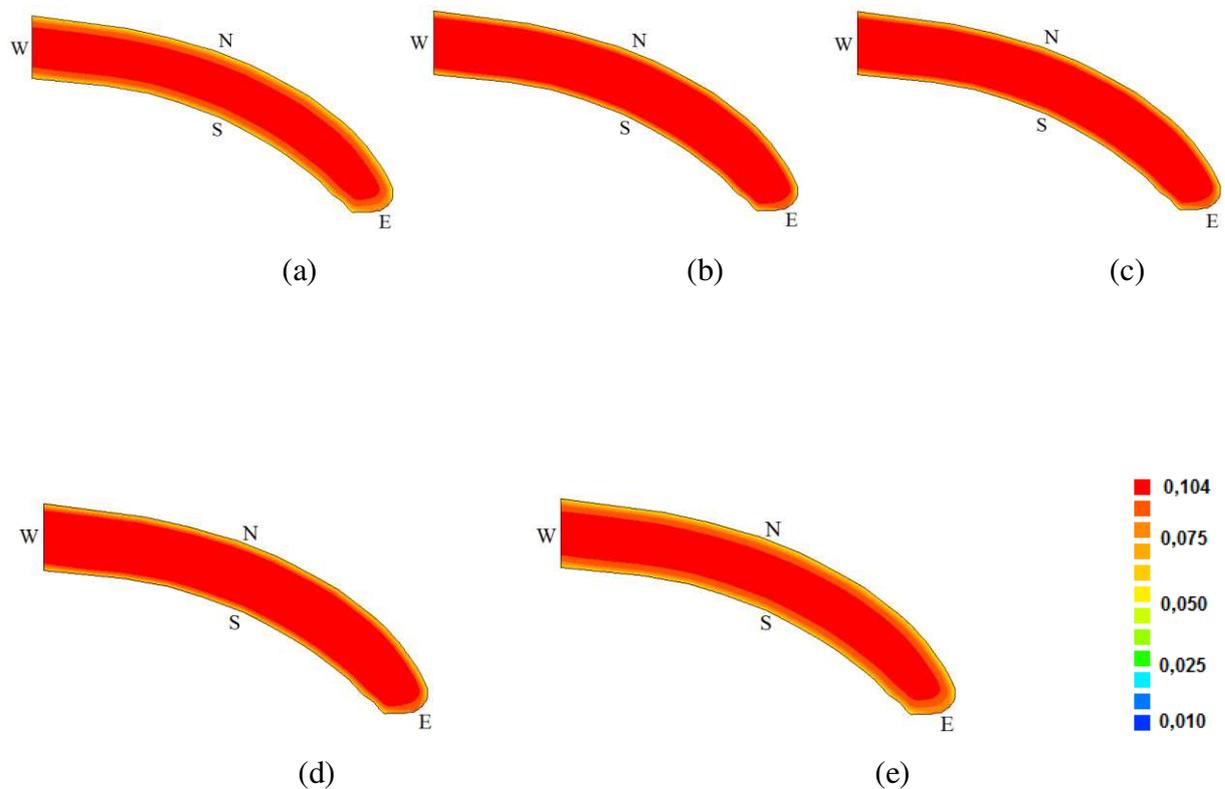


Fonte: Autoria própria.

Para o instante 47,75 min, percebe-se que os volumes de controle localizados no centro ainda mantêm a distribuição inicial do teor de umidade, o que não é mais verificado em 85,5 min, quando o teor de umidade já está bastante reduzido. Nesse instante, alguns volumes de controle da face leste, por exemplo, já estão com o teor de umidade de equilíbrio.

Apresenta-se na Figura 4.70, para o ensaio E1, a distribuição do teor de umidade nos volumes de controle localizados em alguns planos ao longo do comprimento da telha para o instante de tempo igual a 4,275 min. Esses planos são (a) $z = 0,125$ cm ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,11$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) (e) $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).

Figura 4.70 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,275 min, considerando parâmetros de transporte e volume constantes, para ensaio E1 nos seguintes planos: (a) $z = 0,125$ cm ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,11$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) (e) $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).



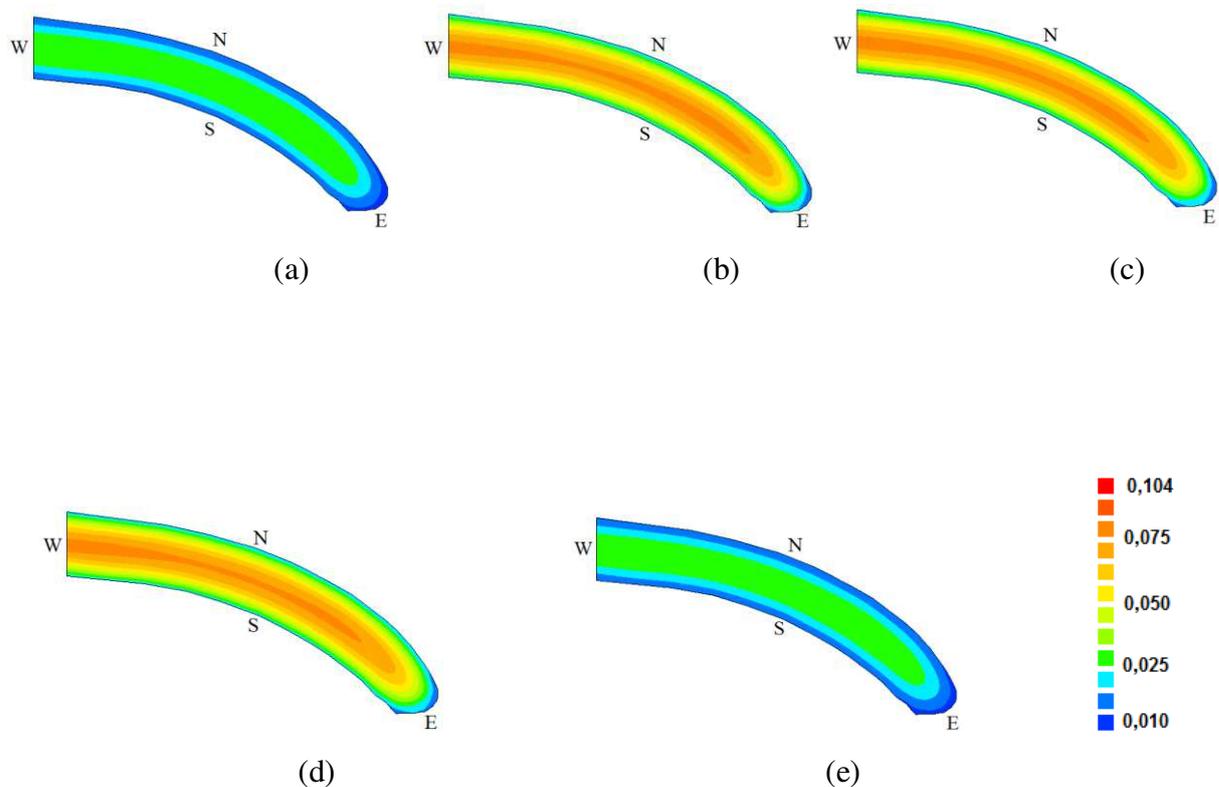
Fonte: Autoria Própria.

Analisando-se os gráficos apresentados na Figura 4.70, percebe-se que, para o instante analisado ($t = 4,275$ min), os planos localizados no interior da telha possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade, o que pode ser observado nas Figuras 4.69b, 4.69c e 4.69d. Por outro lado os planos localizados nas fronteiras $z = 0,125$ cm ($\gamma = 1$) e $z = 15,15$ cm ($\gamma = 30$) possuem uma maior velocidade de secagem, e, conseqüentemente apresentam um menor teor de umidade para os volumes localizados na fronteira do referido plano como mostra as Figuras 4.69a e 4.69e. Pode observar ainda que nesse instante a

distribuição de água é muito aproximada da distribuição inicial da grandeza e , apenas os volumes de controle localizados na fronteira tiveram uma ligeira redução no teor de umidade.

Na Figura 4.71 está apresentada a distribuição espacial do teor de umidade para os mesmos planos da Figura 4.70, desta vez para um instante de tempo maior: $t = 85,5$ min.

Figura 4.71 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 85,5 min, considerando parâmetros de transporte e volume constantes, para o ensaio E₁ nos seguintes planos: (a) $z = 0,125$ cm ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,11$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).



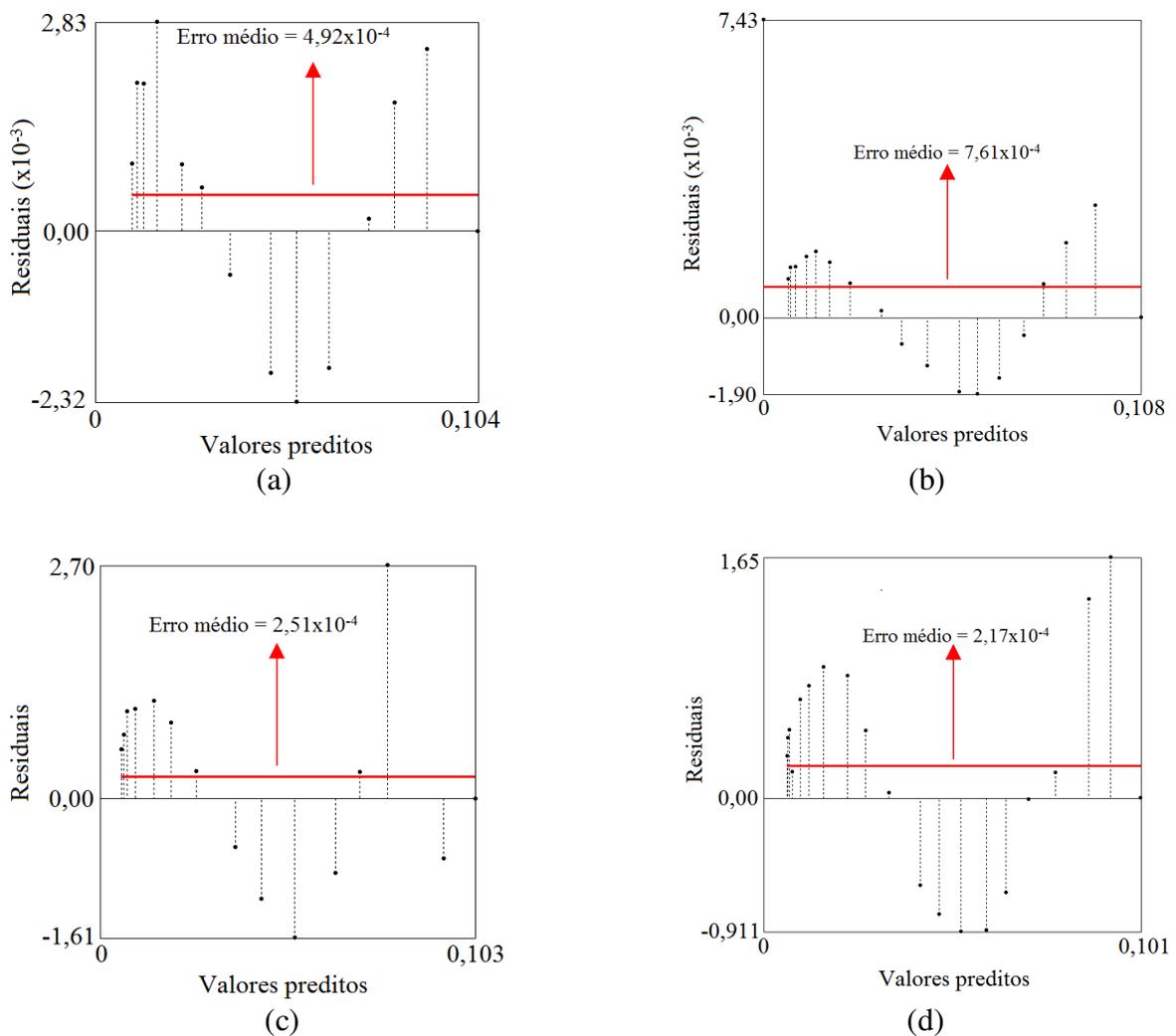
Fonte: Autoria própria.

Observando-se os gráficos da Figura 4.71, verifica-se que no instante de tempo 85,5 min, o perfil da distribuição espacial do teor de umidade ainda se mantém aproximadamente o mesmo para os planos localizados no interior do sólido. Isto pode ser evidenciado através das Figuras, 4.70b, 4.70c e 4.70d, que mostram os perfis para os planos no interior do sólido, $z = 1,12$, $z = 7,11$ e $z = 13,875$ cm, respectivamente. Por outro lado, para todos os volumes localizados nos planos da fronteira ($z = 0,125$ e $z = 15,175$), em todo o decorrer do tempo, o

transporte de água acontece de forma mais rápida, o que pode ser observado nas Figuras 4.71a e 4.71e.

O *LS Optimizer* ainda disponibiliza os gráficos dos resíduos em função do teor de umidade médio predito, bem como o valor médio, cujo valor esperado teoricamente é zero. Os gráficos gerados pelo otimizador aparecem na Figura 4.72.

Figura 4.72 – Gráfico residuais versus valores preditos para a difusividade constante dos ensaios: (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4.



Fonte: Autoria própria.

Analisando os dados informados na Figura 4.72, verifica-se que apesar dos erros médios, representado pela linha vermelha, terem sido pequenos, há uma certa correlação entre os resíduos e o teor de umidade predito. Essa ocorrência é mais acentuada para os experimentos E2 e E4.

Observando-se a Tabela 4.28 e as Figuras 4.68 a 4.72 e analisando-se os resultados, pode-se afirmar que o modelo empregado para descrever a cinética de secagem de telhas cerâmicas, considerando-se constantes os parâmetros de transporte são razoavelmente bom. Como mencionado anteriormente que não foi detectado um encolhimento apreciável durante o período de taxa de secagem decrescente e, conseqüentemente, pode-se considerar que a estrutura interna do produto não sofreu grandes modificações. Assim, como esperado, a consideração de uma difusividade constante descreveu bem o processo de secagem para o material cerâmico. Essa afirmação pode ser corroborada pelos indicadores estatísticos obtidos e a superposição das curvas simuladas com os dados experimentais. No entanto, pode-se tentar melhorar os resultados, adotando-se outro modelo para a difusividade efetiva de massa.

4.6 – Análise numérica considerando difusividade efetiva variável

Terminado o estudo sobre a análise numérica considerando a difusividade efetiva de massa constante, foi iniciada uma análise do processo considerando a difusividade efetiva de massa variável com o teor de umidade local no intuito de verificar se realmente melhoram os resultados da simulação da cinética de secagem. Neste novo estudo a difusividade efetiva de massa varia com o teor de umidade, enquanto que a condição de contorno é do terceiro tipo. Como já mencionado anteriormente, e em concordância com os trabalhos de Silva, W. et al. 2012, a retração volumétrica das telhas cerâmicas não foi incluída no processo de análise, pois o período considerado para descrição do fenômeno é o da taxa decrescente de secagem. É sabido da literatura que o modelo difusivo não descreve bem a secagem no período de taxa constante.

4.6.1 – As expressões para representar a difusividade efetiva de massa

Os gráficos da Figura 4.67, mostraram que a difusividade deveria ser menor quando o teor de umidade diminui ao final do processo. Assim, a difusividade e o teor de umidade devem decrescer durante a secagem em um mesmo sentido. Logo, a difusividade sendo representada por uma função crescente em relação ao teor de umidade deve descrever melhor a cinética de secagem do que a difusividade constante (Farias, V. 2011; Silva, W. et al. 2012, Silva et al. 2013c, Farias et al. 2015). De acordo com Silva et al. 2013c, são abundantes na literatura, expressões para a difusividade de massa em função da razão de umidade média e/ou da temperatura. Neste trabalho, como já foi mostrado anteriormente, após a realização das

otimizações foi escolhida a expressão linear para expressar a difusividade de massa em função do teor de umidade local.

$$D_{ef} = A_1 \Phi + A_2 \quad (4.2)$$

em que A_1 e A_2 são os parâmetros obtidos com a otimização.

Após a realização das otimizações, os resultados foram apresentados nas Tabelas 4.24 a 4.27. Na Tabela 4.29, estão resumidos os valores obtidos para os parâmetros da Equação (4.2) e do coeficiente de transferência convectiva de massa. Nessa tabela, encontram-se também os indicadores estatísticos.

Tabela 4.29 – Resultados para os parâmetros de transporte considerando a difusividade efetiva variável: $D_{ef} = A_1\Phi + A_2$.

Ensaio	D_{ef} ($m^2 \text{ min}^{-1}$)	h ($m \text{ min}^{-1}$)	χ^2	R^2
E1	$2,17 \times 10^{-6}\Phi + 4,62 \times 10^{-8}$	$5,9142 \times 10^{-5}$	$3,4220 \times 10^{-6}$	9997438
E2	$2,36 \times 10^{-6}\Phi + 5,74 \times 10^{-8}$	$8,3995 \times 10^{-5}$	$5,1640 \times 10^{-6}$	9997488
E3	$2,86 \times 10^{-6}\Phi + 1,12 \times 10^{-7}$	$5,9457 \times 10^{-5}$	$2,4290 \times 10^{-6}$	9998311
E4	$3,12 \times 10^{-6}\Phi + 1,14 \times 10^{-7}$	$11,257 \times 10^{-5}$	$2,5365 \times 10^{-6}$	9998745

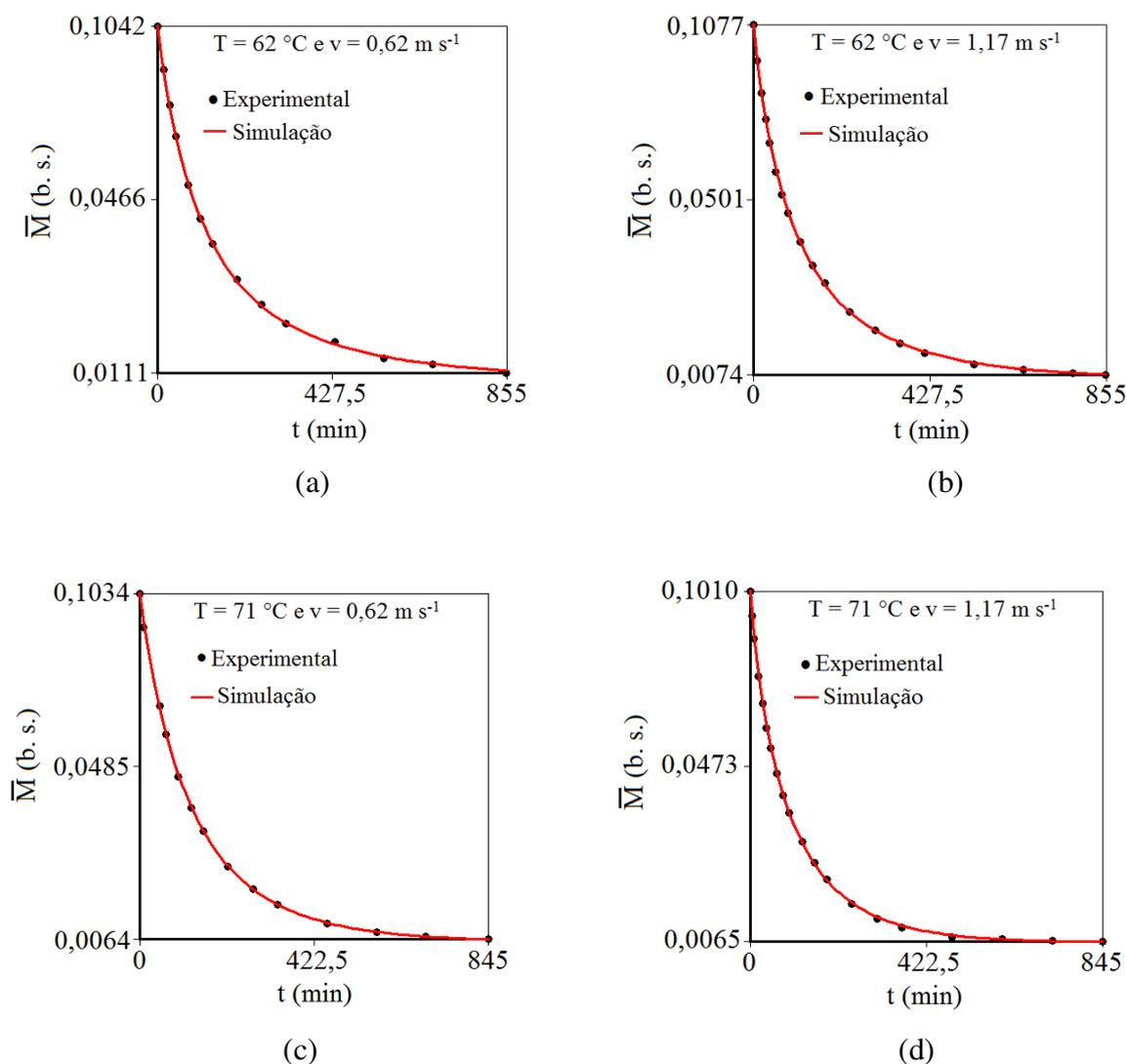
Fonte: Autoria própria.

Os resultados expostos na Tabela 4.29 comparados com aqueles apresentados na Tabela 4.5, mostram que os indicadores estatísticos são significativamente melhores quando se inclui as variações na difusividade efetiva de massa do que os valores obtidos ao se considerar estes parâmetros constantes. Quando se usa para a difusividade efetiva de massa a Equação (4.2), o χ^2 , por exemplo, diminui cerca de 3 a 7 vezes em média, em relação ao valor constante do referido parâmetro.

Com os resultados para D_{ef} e h determinados pelo processo de otimização usando o *LS Optimizer*, foram feitas as simulações das cinéticas de secagem para os ensaios E1, E2, E3 e E4. O otimizador disponibiliza os gráficos em que os pontos experimentais e a curva de secagem (gerada pela simulação que o otimizador realiza, mediante carregamento dos dados

reais da secagem) são sobrepostos. Os gráficos gerados pelo otimizador para as quatro simulações realizadas estão ilustrados na Figura 4.73. A expressão para a difusividade efetiva, o valor do coeficiente de transporte convectivo e os indicadores estatísticos foram apresentados na Tabela 4.29.

Figura 4.73 – Simulação da cinética de secagem para os ensaios (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4 considerando a difusividade variando com o teor de umidade.



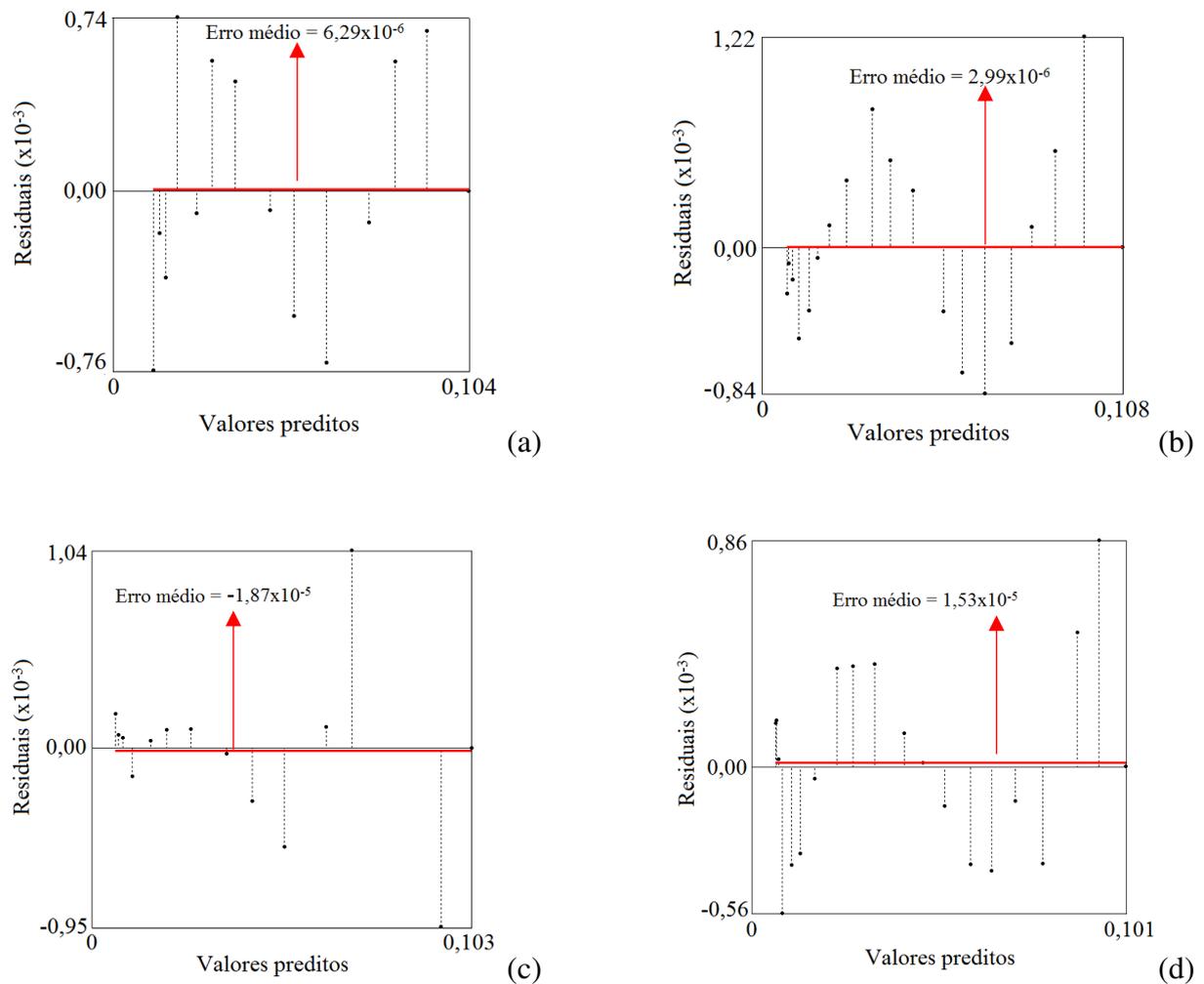
Fonte: Autoria própria.

Comparando-se os gráficos das cinéticas de secagem da Figura 4.73 com aqueles mostrados na Figura 4.68, verifica-se que os resultados são significativamente melhores quando a difusividade efetiva de massa é variável do que quando se considera tal parâmetro constante. As curvas simuladas estão mais coincidentes com os dados experimentais.

4.6.2 – Gráficos dos resíduos versus valores preditos considerando a difusividade variável

Os gráficos dos resíduos versus valores preditos para o teor de umidade médio, considerando a difusividade efetiva de massa como uma função linear do teor de umidade local, foram gerados pelo otimizador. A Figura 4.74 apresenta os gráficos para os quatro ensaios realizados. Em cada figura os erros médios são representados pelas linhas vermelhas e os seus valores estão escritos na parte superior do gráfico.

Figura 4.74 – Gráficos residuais versus valores preditos da função linear dos ensaios: (a) E1, (b) E2, (c) E3 e (d) E4.



Fonte: Autoria Própria.

Observando a Figura 4.74, verifica-se que os erros médios para esse modelo são significativamente menores que os erros médios mostrados na Figura 4.72 para o modelo que considera a função constante. Nota-se ainda que a distribuição dos erros torna-se mais aleatória

provocando uma redução na correlação entre os erros e o teor de umidade média. Esse resultado ocorre para todos os ensaios. Isto significa que a função linear é melhor que a função constante para representar a difusividade.

Como o valor teórico esperado para o erro médio é zero, observando-se a Figura 4.74, pode-se concluir, que os valores dos erros médios obtidos estão em concordância com o valor esperado.

4.6.3 – Gráficos da distribuição do teor de umidade para difusividade variável

Nesta seção são apresentados e analisados os gráficos da distribuição espacial do teor de umidade para os ensaios E1, E2, E3 e E4.

4.6.3.1 – Gráficos de contorno para o ensaio E1

São apresentados na Figura 4.75 a evolução temporal da distribuição espacial do teor de umidade para os volumes de controle localizados no plano identificado por $z = 1,125$ cm, correspondentes a $\gamma = 5$ nos seguintes instantes de tempo:

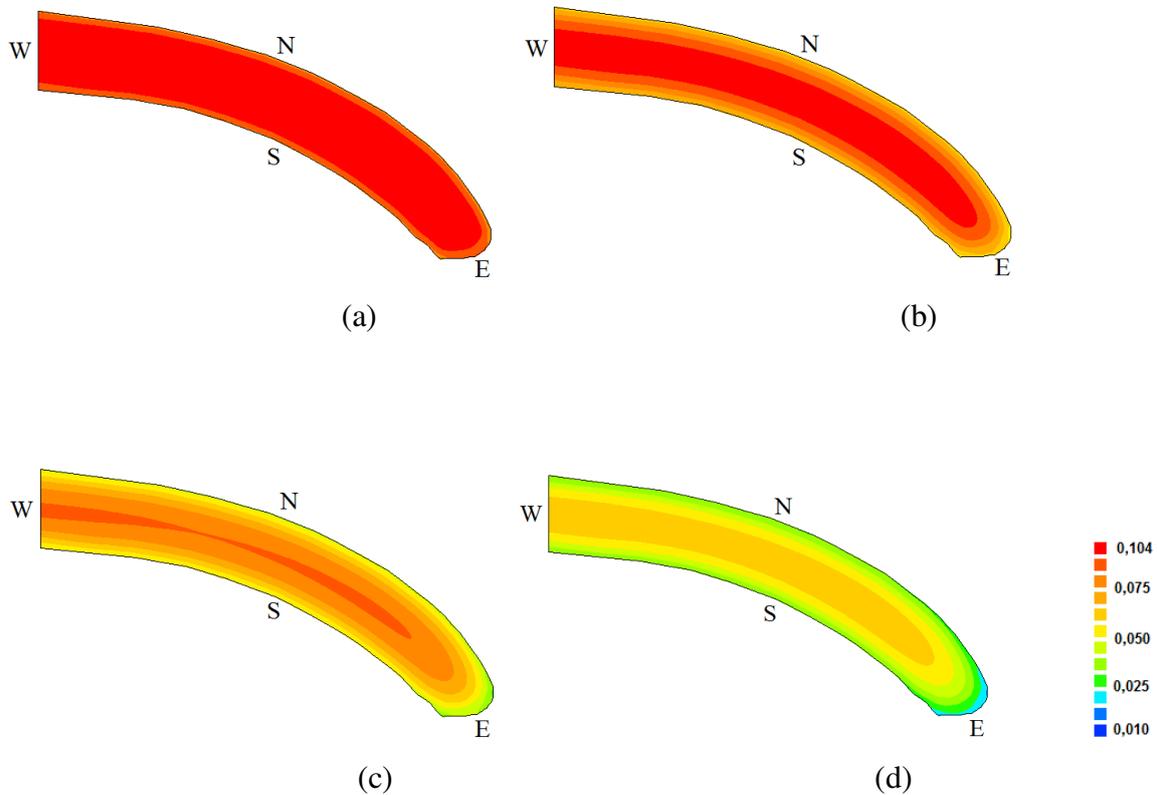
a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 42,75 min e d) 85,5 min.

Nos gráficos apresentados na Figura 4.75 é possível perceber que os volumes de controle localizados na face leste secam mais rapidamente, isso porque sua área superficial de contato com o meio é mais estreita, causando um aumento na taxa de secagem. Isso pode ser observado durante todo processo. Os volumes de controle que estão localizados no interior do sólido, mas estão próximos à face leste secam também de forma rápida. Por outro lado, os volumes de controle localizados mais internamente na telha, secam de forma bem mais lenta.

Analisando o gráfico de contorno para $t = 17,1$ min, nota-se que ainda existem volumes de controle no interior do sólido que estão com o teor de umidade inicial. Esse fato não ocorre mais para $t = 42,75$ min. Para $t = 85,5$ min, já existem volumes de controle com teor de umidade menor que 0,025. Estudando os gráficos de contorno com bastante cautela é possível notar que existe uma sutil assimetria em relação às faces norte e sul.

Figura 4.75 – Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E1 nos instantes:

a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 42,75 min e d) 85,5 min.



Fonte: Autoria própria.

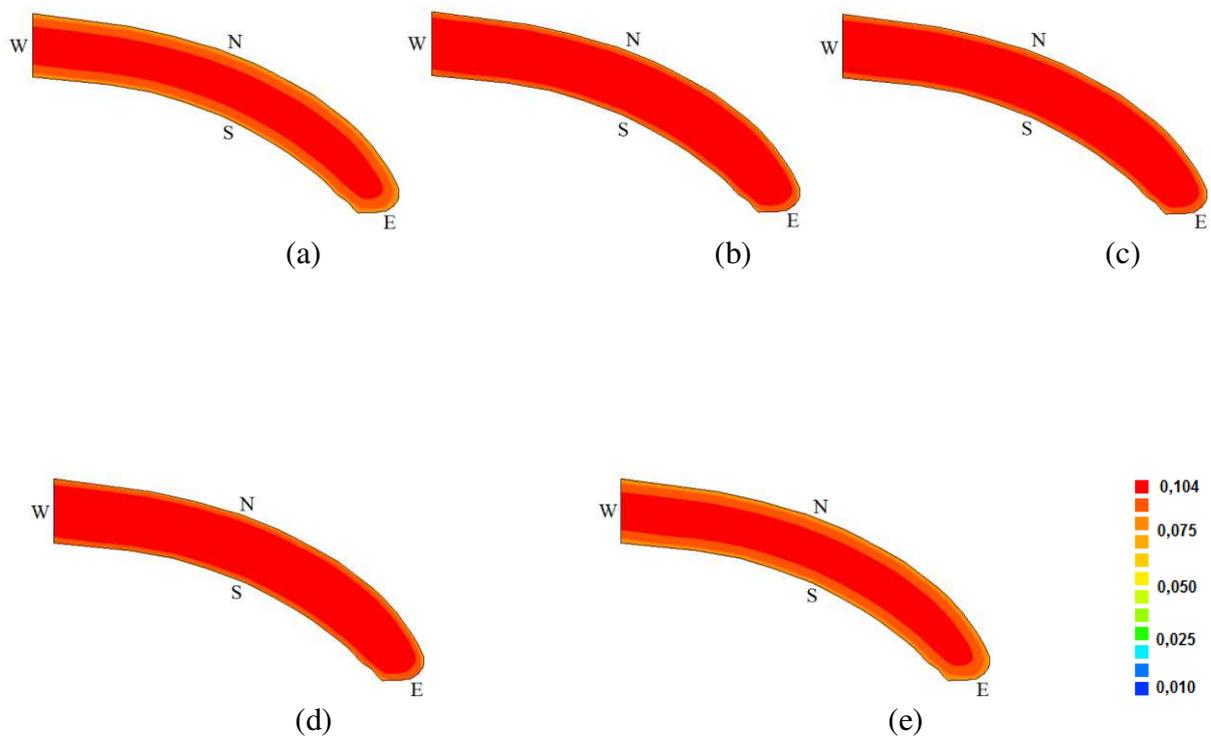
Com o intuito de analisar a distribuição do teor de umidade em um instante de tempo arbitrariamente escolhido, como $t = 4,275$ min para vários planos da telha que vão desde o meio até a face frontal (varredura na direção do eixo z), apresenta-se na Figura 4.75 a distribuição para vários planos. Esses planos são identificados por:

- (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$);
- (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$);
- (c) $z = 7,111$ cm ($\gamma = 15$),
- (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$)
- (e) $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).

Os gráficos apresentados na Figura 4.75, mostram que, para os instantes iniciais do processo, os planos localizados no interior da telha possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade e próximos ao teor de umidade inicial, o que é

comprovado pelas Figuras 4.75b, 4.75c e 4.75d. Por outro lado, os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.75a e 4.75e, secam mais rapidamente e apresenta um menor teor de umidade para os volumes localizados no referido plano. Este fato já tinha sido observado também, no caso da difusividade constante.

Figura 4.76 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,275 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E1 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,11$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).

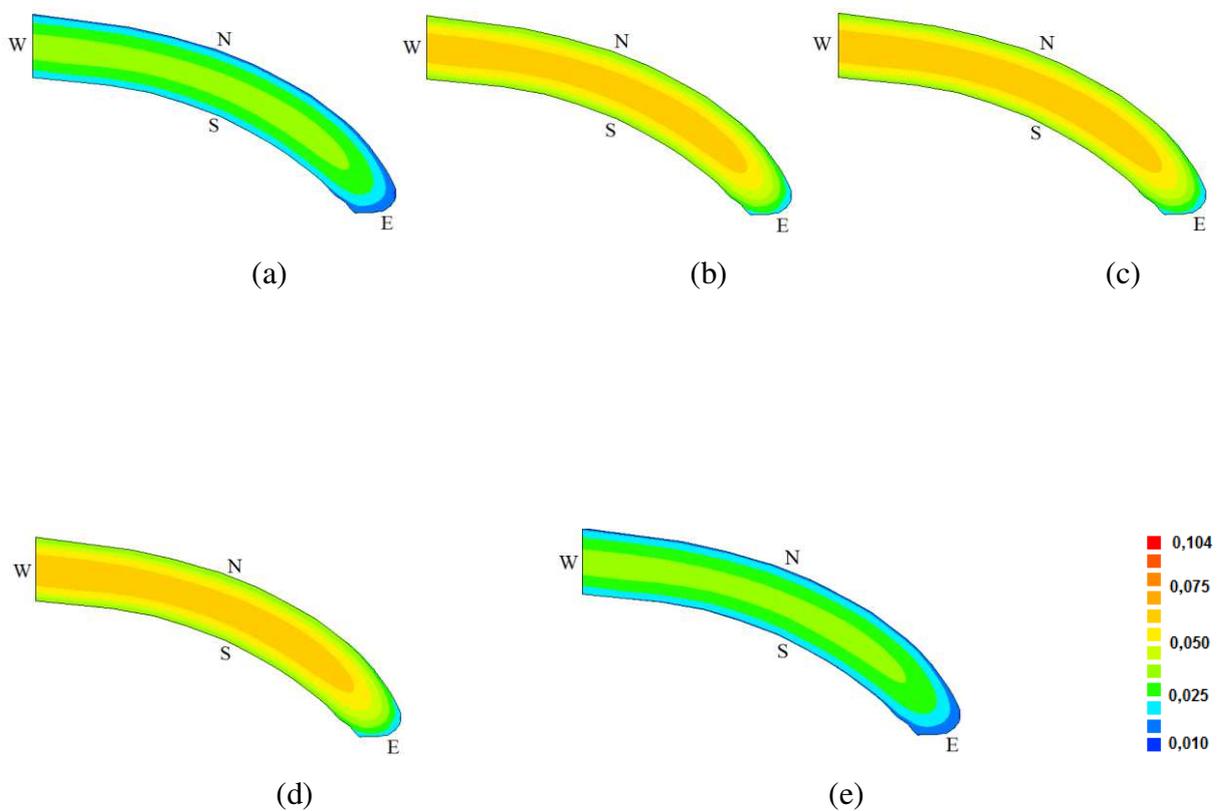


Fonte: Autoria própria.

A fim de verificar se este comportamento acontece em outros momentos do processo de secagem, apresenta-se na Figura 4.77 a distribuição espacial do teor de umidade para os planos identificados por: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,11$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$), para o instante de tempo $t = 85,5$ min. Nessa figura, os gráficos mostram que, para o instante 85,5 min do processo, os planos localizados no interior da telha possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade, o que é comprovado pelas Figuras 4.76b, 4.76c e 4.76d. Por outro lado os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.77a e 4.77e, secam mais rapidamente e apresenta um

menor teor de umidade para todos os volumes localizados no referido plano. Este comportamento já tinha sido observado também, no caso da difusividade constante, bem como para a caso apresentado na Figura 4.76

Figura 4.77 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 85,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E1 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,11$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 15,175$ cm ($\gamma = 30$).



Fonte: Autoria própria.

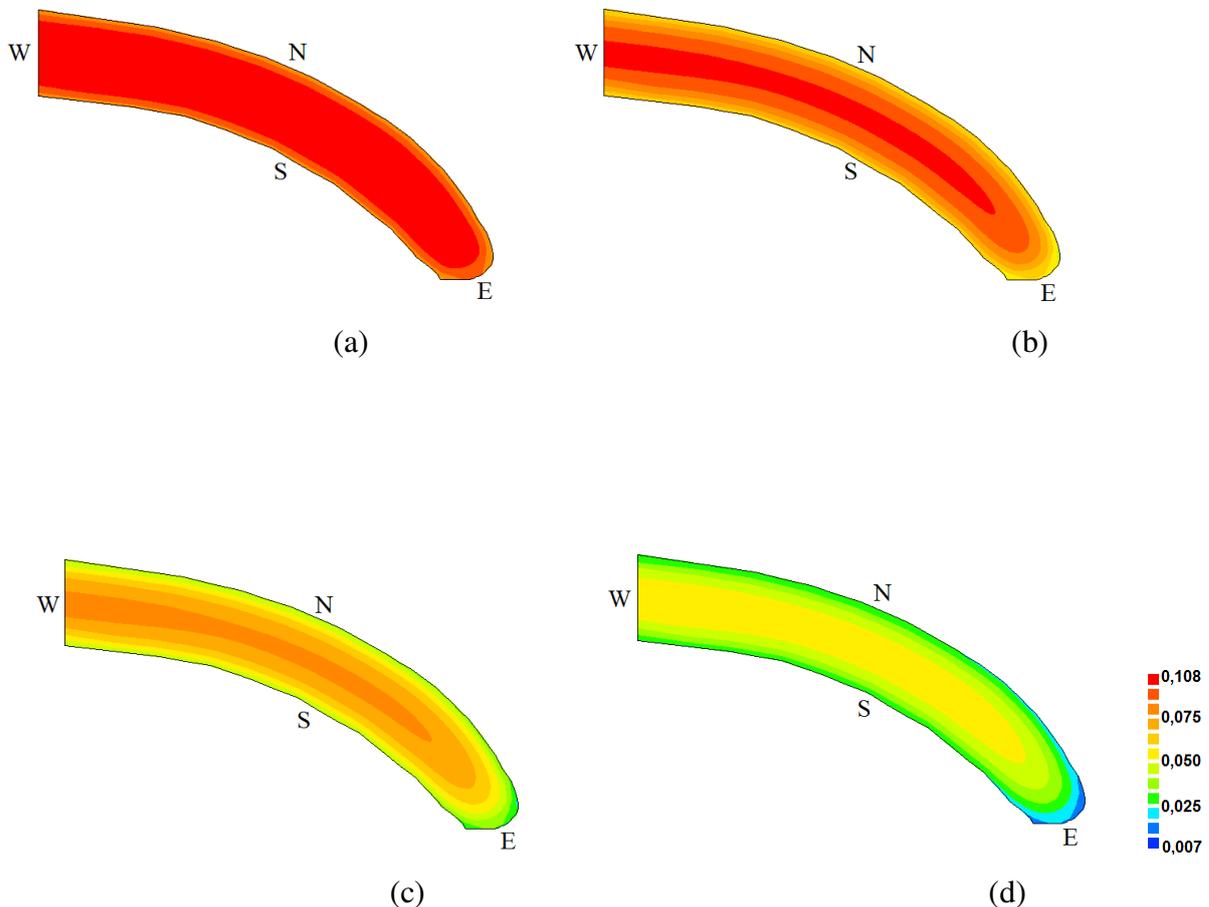
Para as outras temperaturas e respectivas velocidades do fluxo foram feitas as análises que são apresentadas nas seções a seguir.

4.6.3.2 – Gráficos de contorno para o ensaio E2

Na Figura 4.78, ilustra-se a distribuição espacial do teor de umidade nos volumes de controle localizados no plano identificado por $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$), para o ensaio E2 nos instantes de tempo: a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 42,75 min e d) 85,5 min.

Figura 4.78 – Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E2 nos instantes:

a) 4,275 min; b) 17,1 min; c) 42,75 min e d) 85,5 min.

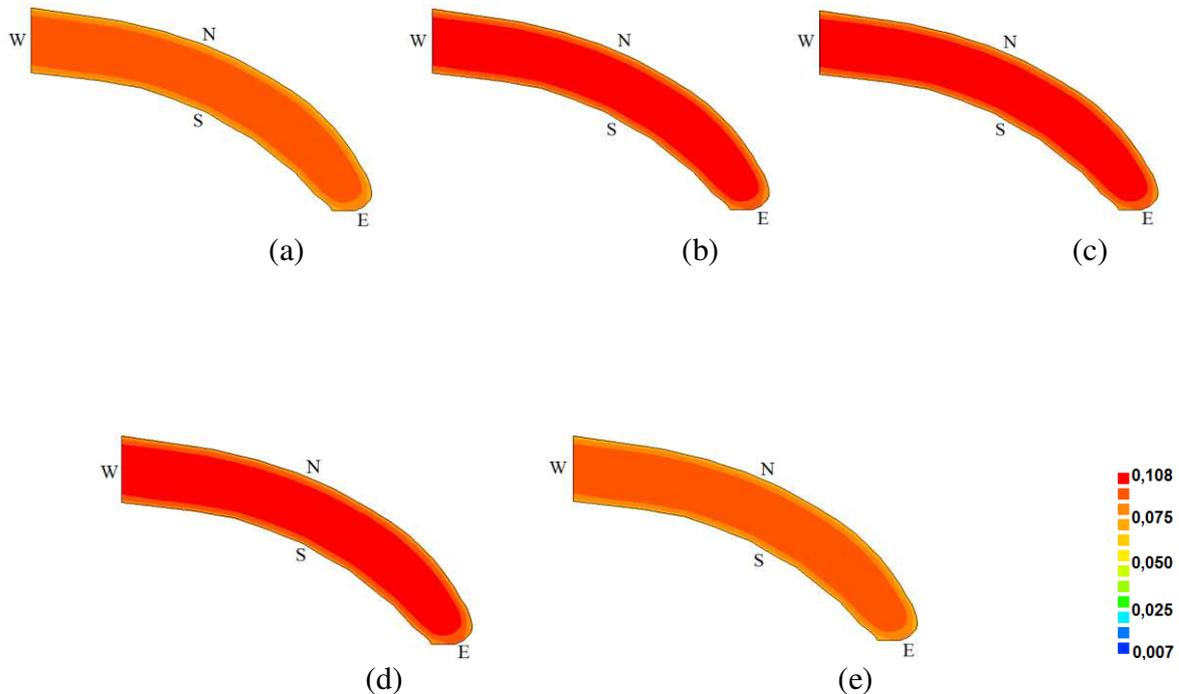


Fonte: Autoria própria.

Nos gráficos apresentados na Figura 4.78 também é possível perceber que os volumes de controle localizados na face leste secam mais rapidamente, enquanto, os volumes de controle localizados mais internamente a telha, secam de forma mais lenta. Comparando-se as Figuras 4.78 e 4.75, observa-se que o aumento na velocidade do fluxo de ar de $0,62 \text{ m s}^{-1}$ para $1,17 \text{ m s}^{-1}$ contribuiu para o aumento na velocidade da perda de água.

Com a finalidade de analisar a distribuição do teor de umidade em um instante de tempo arbitrariamente escolhido como $t = 4,275 \text{ min}$ para vários planos da telha que vão desde o meio até a face frontal (varredura na direção do eixo z). Apresenta-se na Figura 4.79 a distribuição para os planos identificados por: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125 \text{ cm}$ ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0 \text{ cm}$ ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25 \text{ cm}$ ($\gamma = 25$) e $z = 14,875 \text{ cm}$ ($\gamma = 30$).

Figura 4.79 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,275 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E2 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ ($\gamma = 25$) e $z = 14,875$ ($\gamma = 30$).

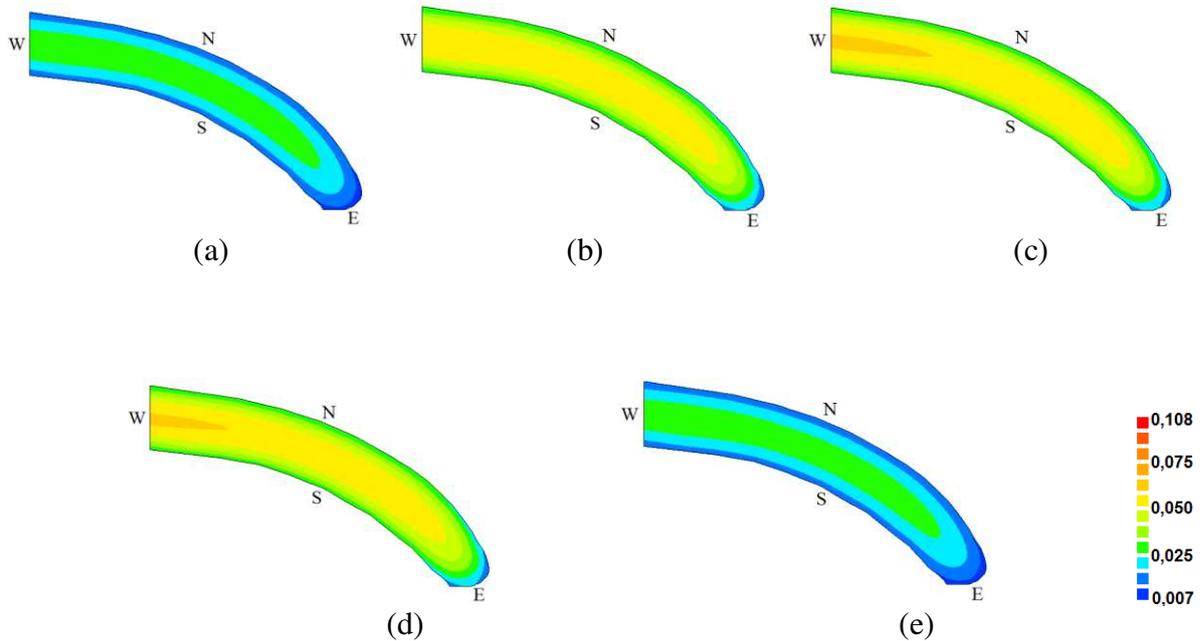


Fonte: Autoria própria.

Os gráficos apresentados na Figura 4.79, mostram que, para os instantes iniciais do processo, os planos localizados no interior da telha possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade, o que é comprovado pelas Figuras 4.79b, 4.79c e 4.79d. Por outro lado, os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.79a e 4.79e secam mais rapidamente e apresenta um menor teor de umidade para todos os volumes localizados no referido plano. Comparando as Figuras 4.76a e 4.76e com as Figuras 4.79a e 4.79e, pode-se notar que os volumes de controle localizados nesses planos secaram mais rápidos com o aumento na velocidade do fluxo de ar de $0,62 \text{ m s}^{-1}$ para $1,17 \text{ m s}^{-1}$. Pode assim, afirmar que mantendo-se a temperatura constante, um aumento na velocidade do fluxo de ar de secagem causa um aumento na taxa de secagem.

Para examinar se este comportamento acontece em outros instantes do processo de secagem, é mostrado na Figura 4.80 a distribuição espacial do teor de umidade para os planos identificados por: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125 \text{ cm}$ ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0 \text{ cm}$ ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25 \text{ cm}$ ($\gamma = 25$) e $z = 14,875$ ($\gamma = 30$), para o instante de tempo $t = 85,5 \text{ min}$.

Figura 4.80 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 85,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E2 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 14,875$ cm ($\gamma = 30$).



Fonte: Autoria própria.

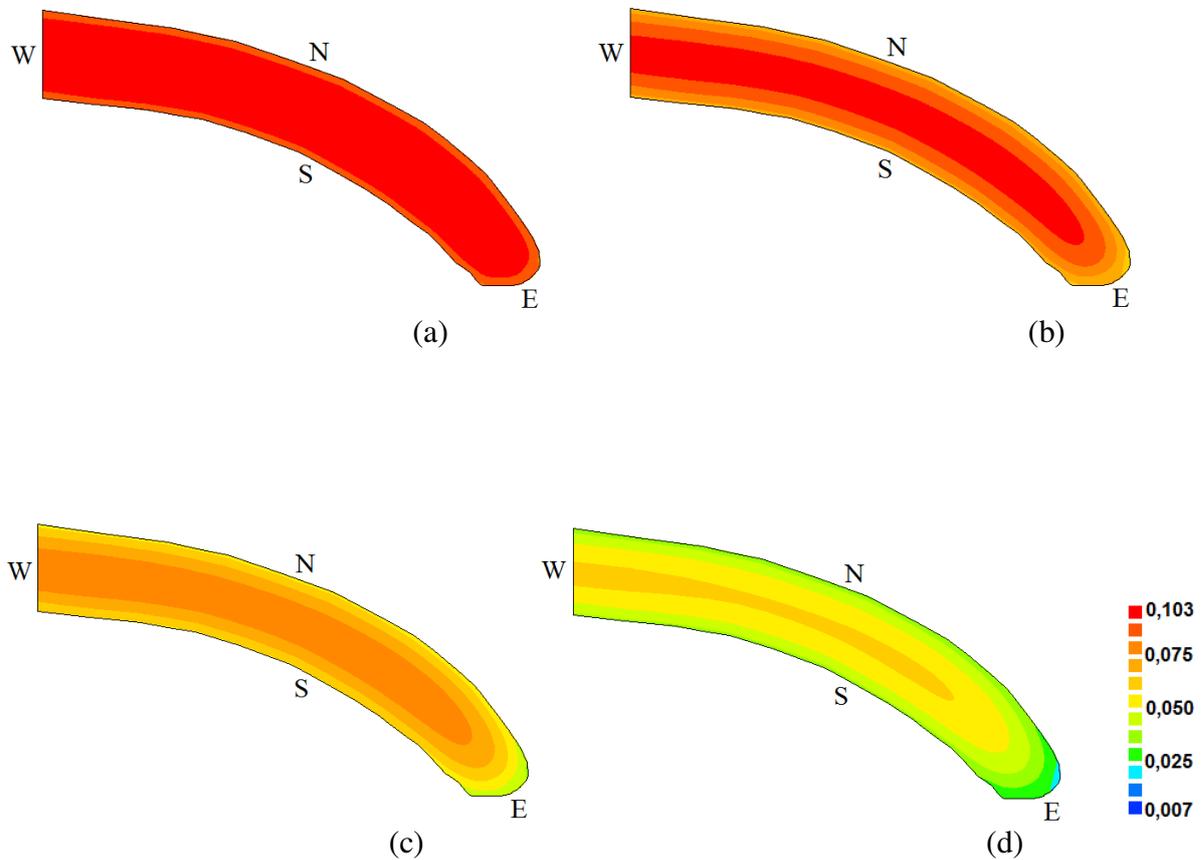
Os gráficos apresentados na Figura 4.80, mostram que, para o instante 85,5 min do processo, os planos localizados no interior da telha também possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade, com uma pequena diferença na Figura 4.80b para as Figuras 4.80c e 4.80d. Por outro lado os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.80a e 4.80e, secam mais rapidamente e apresenta um menor teor de umidade para todos os volumes localizados no referido plano. É notória a influência da velocidade do ar no processo de secagem ao se comparar os gráficos de contorno da Figura 4.77 (velocidade do ar de secagem de $0,62 \text{ m s}^{-1}$) e os da Figura 4.80 (velocidade do ar de secagem de $1,17 \text{ m s}^{-1}$). Na Figura 4.80, todos os planos apresentam uma distribuição para o teor de umidade com valores menores que na Figura 4.77.

4.6.3.3 – Gráficos de contorno para o ensaio E3

Apresenta-se na Figura 4.81 a evolução temporal da distribuição espacial do teor de umidade nos volumes de controle localizados no plano identificado por $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$), para o ensaio E3 nos instantes de tempo: a) 4,225 min; b) 16,9 min; c) 42,25 min e d) 84,5 min.

Figura 4.81 – Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos instantes:

a) 4,225 min; b) 16,9 min; c) 42,25 min e d) 84,5 min.



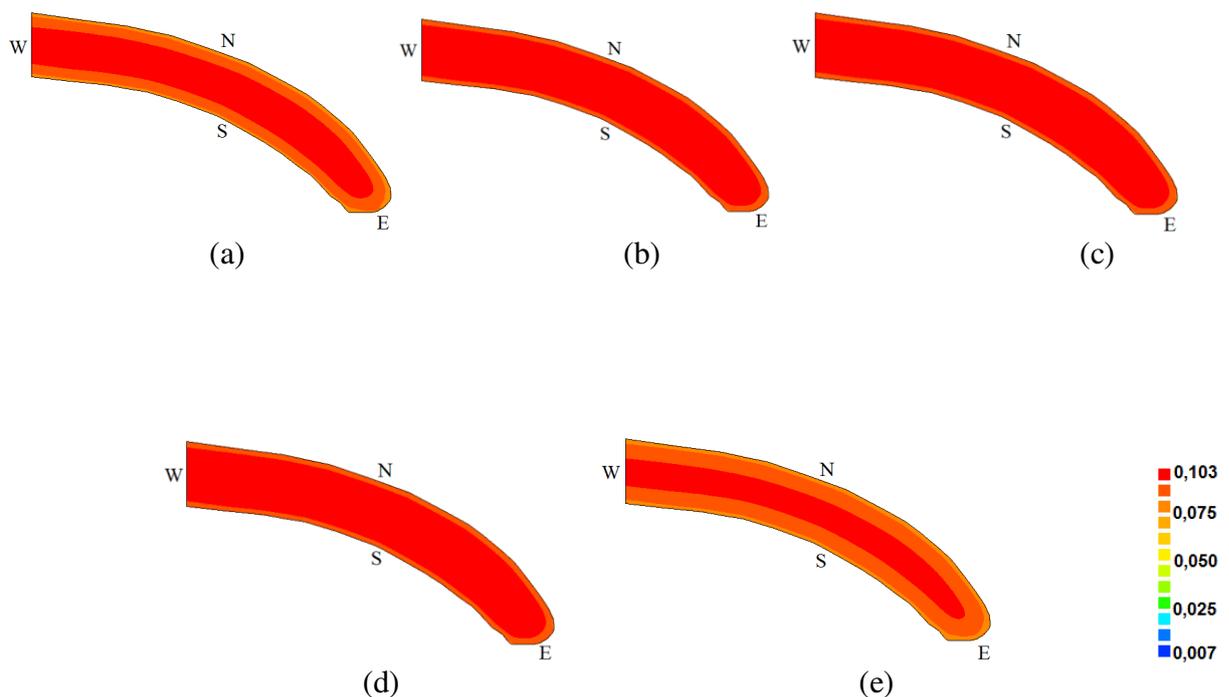
Fonte: Autoria própria

Nos gráficos apresentados na Figura 4.81 observa-se um comportamento semelhante na secagem aos apresentados anteriormente. É possível perceber que os volumes de controle localizados na face leste secam mais rapidamente, devido ao fato de que esses volumes além de estarem em contato direto com o ar de secagem, a face possui a área superficial de contato mais estreita. Isso pode ser observado durante todo processo. Por outro lado, os volumes de controle localizados mais internamente a telha, secam de forma mais lenta. Para o instante 4,225 min, percebe-se que os volumes de controle internos possuem uma distribuição quase uniforme do teor de umidade e ainda muito próxima à distribuição inicial.

Com a finalidade de analisar a distribuição do teor de umidade em um instante de tempo arbitrariamente escolhido como $t = 4,225$ min, para vários planos da telha, que vão desde o meio até a face frontal (varredura na direção do eixo z), apresenta-se na Figura 4.81 a

distribuição para os planos identificados por: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,125$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 15,1$ cm ($\gamma = 30$).

Figura 4.82 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,225 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,125$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) (e) $z = 15,1$ ($\gamma = 30$).

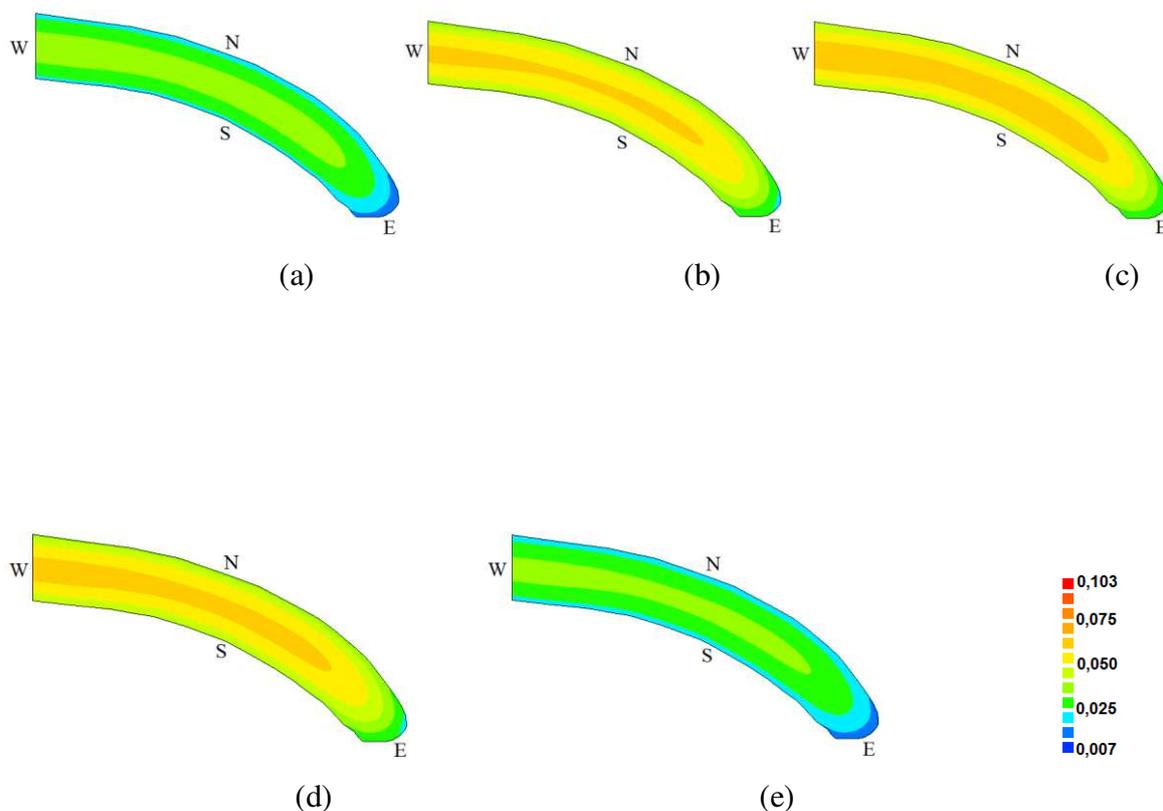


Fonte: Autoria própria.

Os gráficos apresentados na Figura 4.82, mostram que, para os instantes iniciais do processo, os planos localizados no interior da telha possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade, o que é comprovado pelas Figuras 4.82b, 4.82c e 4.82d. Por outro lado os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.82a e 4.82e, secam mais rapidamente e apresentam um menor teor de umidade para os volumes de controle localizados nas faces do referido plano que estão em contato com o ar de secagem (norte, sul e leste).

Para examinar se este comportamento acontece em outros instantes do processo de secagem, exhibe-se na Figura 4.83 a distribuição espacial do teor de umidade para os planos identificados por: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,125$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 15,1$ cm ($\gamma = 30$), para o instante de tempo $t = 84,5$ min.

Figura 4.83 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 84,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,125$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,875$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 15,1$ cm ($\gamma = 30$).



Fonte: Autoria própria.

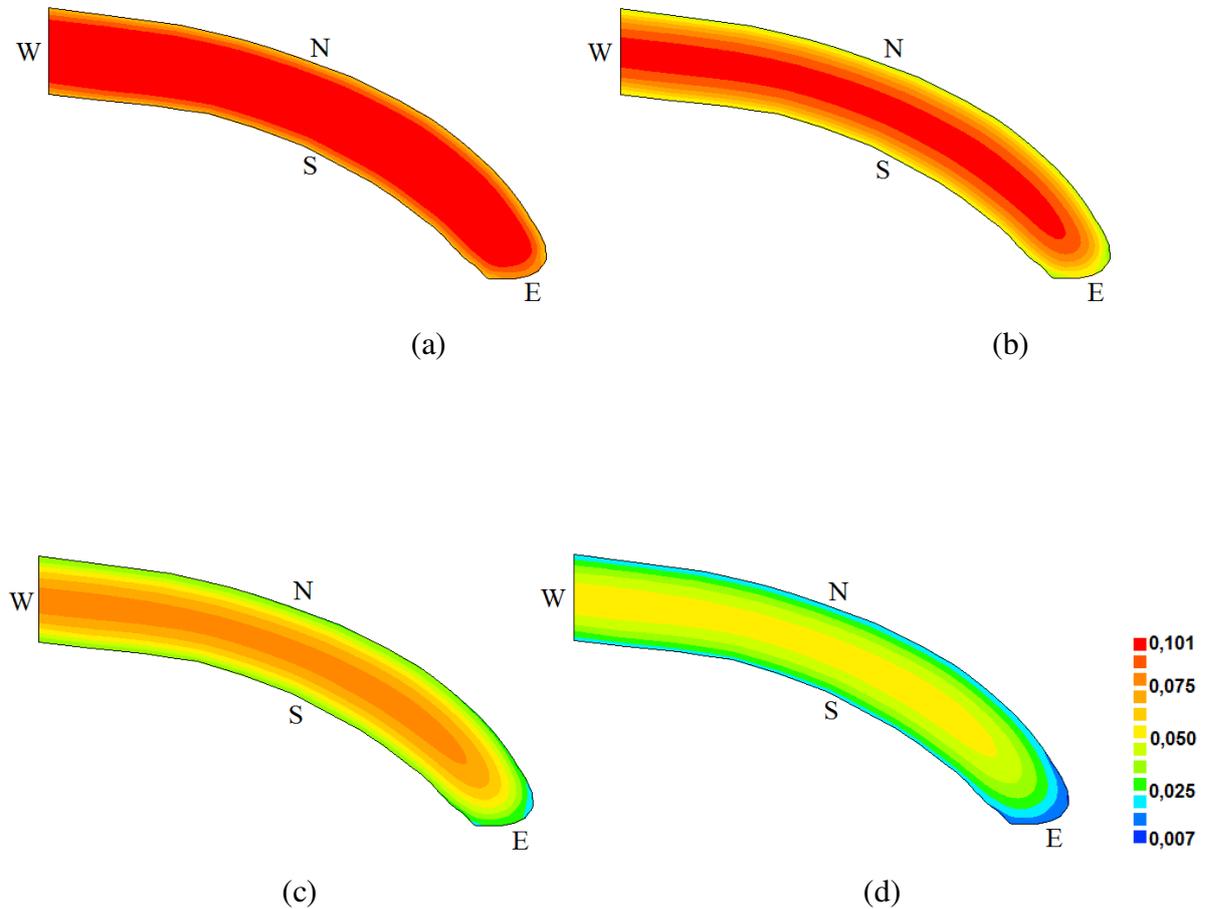
Os gráficos apresentados na Figura 4.83, também mostram que, para o instante 84.5 min do processo, os planos localizados no interior da telha apresentam semelhanças no perfil da distribuição espacial do teor de umidade, o que é comprovado pelas Figuras 4.83b, 4.83c e 4.83d. Por outro lado os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.83a e 4.83e, secam mais rapidamente e apresenta um menor teor de umidade para todos os volumes localizados no referido plano. Este fato já tinha sido observado também, nos casos apresentados anteriormente.

4.6.3.4 – Gráficos de contorno para o ensaio E4

A distribuição espacial do teor de umidade nos volumes de controle localizados no plano identificado por $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$), para o ensaio E4 para os instantes de tempo: a) 4,225 min; b) 16,9 min; c) 42,25 min e d) 84,5 min é apresentada na Figura 4.84.

Figura 4.84 – Distribuição do teor de umidade no plano central de uma telha cerâmica, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E4 nos instantes:

a) 4,225 min; b) 16,9 min; c) 42,25 min e d) 84,5 min.

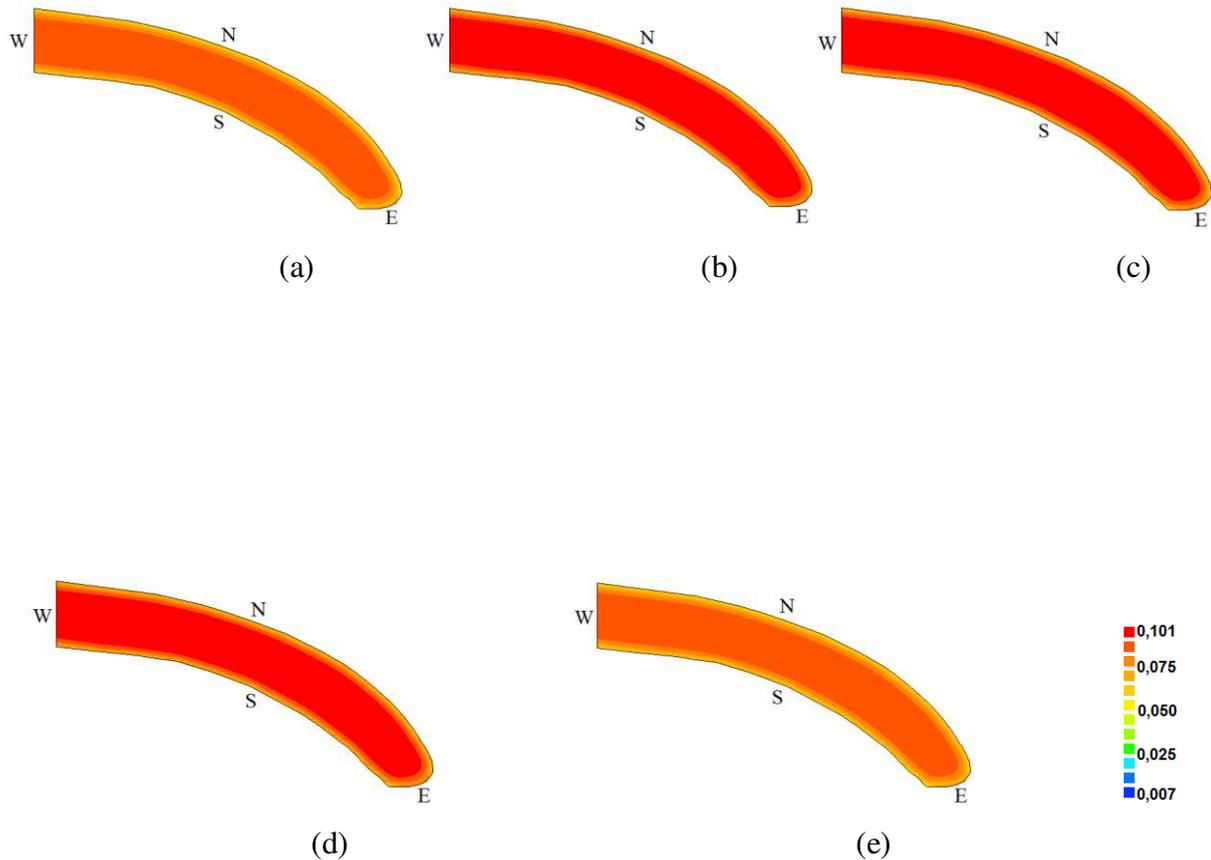


Fonte: Autoria própria.

A Figura 4.84, mostra neste caso também, que os volumes de controle localizados na face leste secam mais rapidamente, isso porque sua área superficial de contato com o meio é mais estreita. Isso pode ser observado durante todo processo. Por outro lado, os volumes de controle localizados mais internamente a telha, secam de forma mais lenta. Para o instante 4,225 min, percebe-se que os volumes de controle internos possuem uma distribuição quase uniforme do teor de umidade.

A fim de avaliar a distribuição do teor de umidade em um instante de tempo arbitrariamente escolhido como, $t = 4,225$ min para vários planos da telha que vão desde o meio até a face frontal (varredura na direção do eixo z), apresenta-se na Figura 4.85 a distribuição para os planos identificados por: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e $z = 14,675$ cm ($\gamma = 30$).

Figura 4.85 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,225 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E4 nos planos: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 14,675$ cm ($\gamma = 30$).

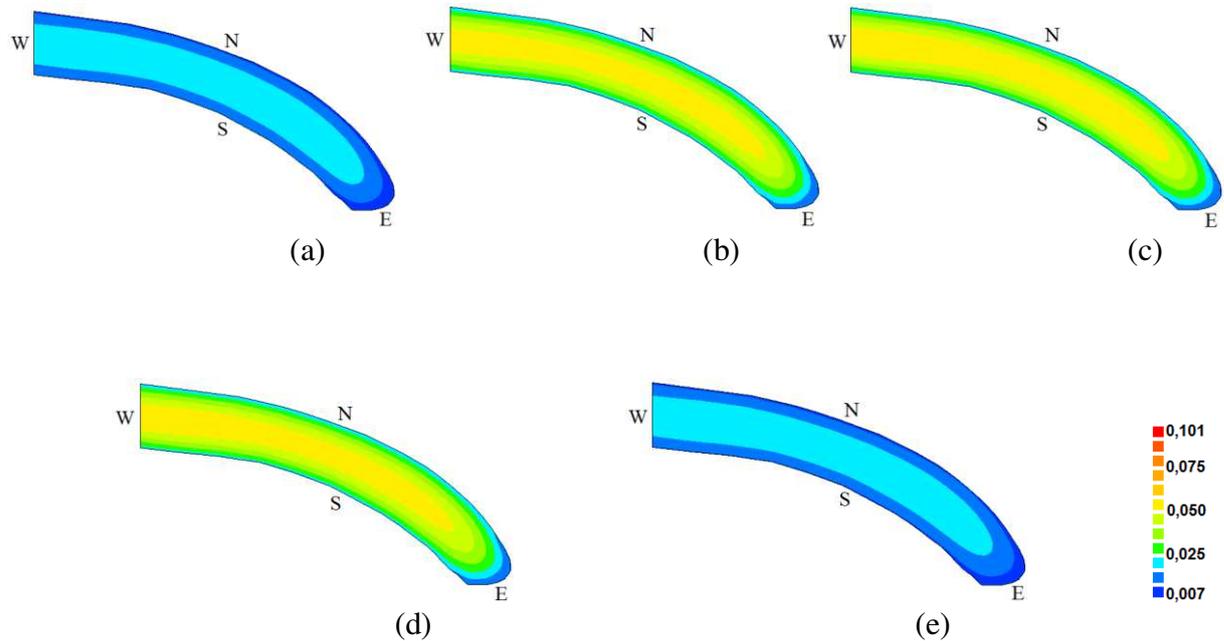


Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.85 é mostrado nos gráficos que, para os instantes iniciais do processo, os planos localizados no interior da telha possuem praticamente o mesmo perfil da distribuição espacial do teor de umidade, o que é comprovado pelas Figuras 4.85b, 4.85c e 4.85d. Por outro lado os planos localizados nas fronteiras, Figuras 4.85a e 4.85e, secam mais rapidamente e apresentam um menor teor de umidade para todos os volumes localizados no referido plano.

Para avaliar se esta conduta acontece em outros instantes do processo de secagem, mostra-se na Figura 4.86 a distribuição espacial do teor de umidade para os planos identificados por: $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 14,675$ cm ($\gamma = 30$), para o instante de tempo $t = 84,5$ min.

Figura 4.86 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 84,5 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E4 nos planos: (a) $z = 0,125$ ($\gamma = 1$); (b) $z = 1,125$ cm ($\gamma = 5$); (c) $z = 7,0$ cm ($\gamma = 15$), (d) $z = 13,25$ cm ($\gamma = 25$) e (e) $z = 14,675$ cm ($\gamma = 30$).



Fonte: Autoria própria.

Verifica-se na Figura 4.86 que os planos do interior do sólido apresentam perfis semelhantes para a distribuição do teor de umidade. Os planos localizados nas fronteiras apresentam valores menores para os teores de umidade em todos os seus volumes de controle quando comparados com os volumes de controle do interior do sólido.

Comparando os gráficos de contorno da Figura 4.86 com os da Figura 4.82, nota-se que os volumes de controles localizados nesses planos para o experimento E4 (Figura 4.86) estão bem mais secos que os mesmos volumes que foram submetidos ao processo de secagem nas condições experimentais do ensaio E3. Assim, pode-se concluir que a temperatura e a velocidade do ar de secagem influenciaram fortemente a taxa de secagem, como era esperado.

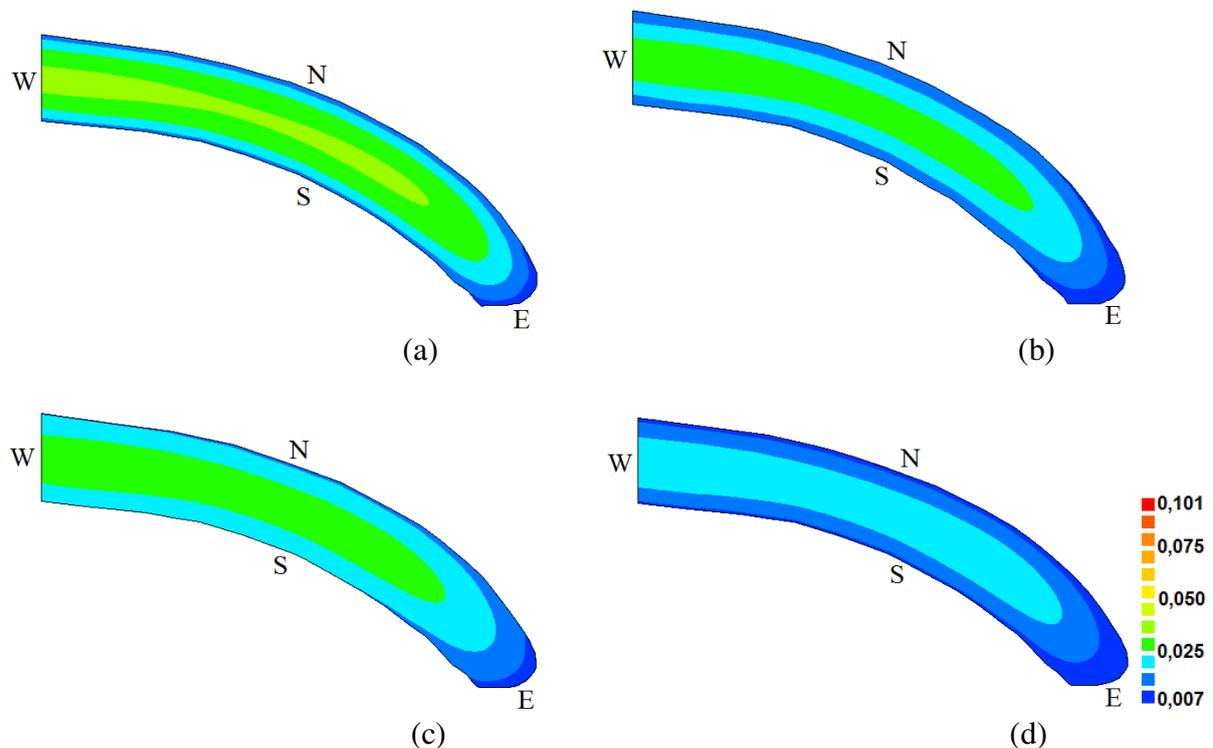
Diante do exposto, é possível afirmar que, quando a temperatura e/ou a velocidade do ar aumentam, também aumenta a taxa de secagem. O experimento identificado como E4 possui maior temperatura e maior velocidade do ar de secagem e, portanto, verifica-se que esse processo ocorreu a uma taxa de secagem maior em relação aos demais experimentos. Visando detalhar mais essa influência, dados sobre os quatro experimentos serão apresentados conjuntamente e comparados entre si.

4.6.4 – Influência da temperatura e da velocidade do ar de secagem na taxa de secagem

Nesta seção discute-se a influência da temperatura e da velocidade do ar na taxa de secagem de telha cerâmica.

Apresenta-se na Figura 4.87 a distribuição espacial do teor de umidade para $t = 171$ min, sobre o plano da telha correspondente a $z = 3,25$ cm ($\gamma = 10$), para todos os ensaios usados no processo de otimização.

Figura 4.87 - Distribuição do teor de umidade no plano $z = 3,25$ cm ($\gamma = 10$) da telha, em $t = 171,0$ min, para os ensaios: (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4.



Fonte: Autoria própria.

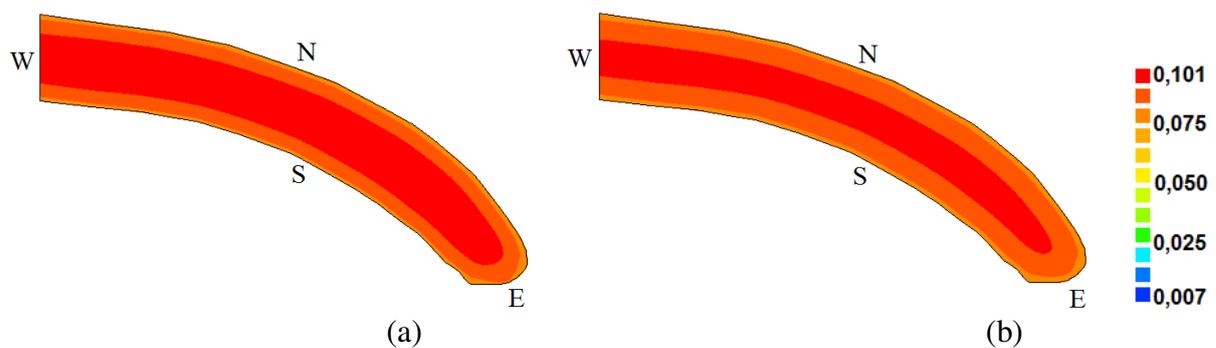
Como é esperado, e pode ser observado na Figura 4.87 é possível concluir que as telhas secam mais rapidamente a medida que a temperatura e/ou fluxo do ar de secagem aumentam. A secagem mais lenta ocorreu em $T = 62$ ° C e $v = 0,62$ m s⁻¹ em todo o domínio, incluindo contornos. Por outro lado, o plano interno da telha para o ensaio 4 apresentado na Figura 4.86d, mostra um perfil diferente dos demais, com valores menores para o teor de umidade em todos os seus volumes de controle quando comparados com os volumes de controle dos demais ensaios. Quando a velocidade do fluxo de ar aumentou de 0,62 para 1,17 m.s⁻¹ e a temperatura

permaneceu em 62 °C, a perda de água aumentou como mostra a Figura 4.86b. Pode-se observar, no entanto, que essa variação apenas na velocidade forneceu uma distribuição de água semelhante à mudança que manteve a velocidade em 0,62 m s⁻¹ e a temperatura aumentou de 62 a 71 °C.

Este fato demonstra a influência da velocidade do fluxo de ar na perda de água, mesmo quando não há mudança de temperatura. Portanto, pode-se escolher, em um processo de secagem, aumentar a velocidade do ar de secagem usando temperaturas mais baixas, porque altas temperaturas e longos tempos de secagem necessários para remover a água do material cerâmico podem causar sérios danos ao produto final.

Para verificar a assimétrica da telha ao longo do eixo z, apresenta-se na Figura 4.88 a distribuição do teor de umidade de dois planos do ensaio E3 para t = 4,225 min: um localizado no lado de largura maior (plano $\gamma = 1$) e o outro localizado no lado de largura menor (plano $\gamma = 30$) da telha para analisar o teor de umidade nestes planos.

Figura 4.88 – Distribuição do teor de umidade de uma telha cerâmica no instante de tempo 4,225 min, considerando parâmetros de transporte variáveis, para o ensaio E3 nos planos:(a) z = 0,125 cm ($\gamma = 1$); (b) z = 15,175 cm ($\gamma = 30$).



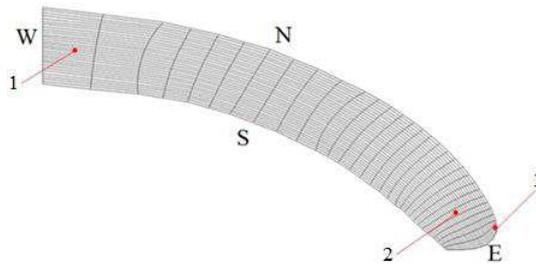
Fonte: Autoria própria.

Sendo a telha assimétrica em relação a z, a Figura 4.88 mostra que os volumes de controle localizados no plano $\gamma = 30$ (Figura 4.88b) na qual a área superficial de contato com o meio é mais estreita, seca mais rapidamente que os volumes de controles localizados no plano $\gamma = 1$ (Figura 4.88a) na parte mais larga da telha.

Com o objetivo de ter uma noção do quanto a cinética de secagem difere nos volumes de controle interno e externo da telha, apresenta-se na Figura 4.89 a localização de pontos dos

três volumes de controle de um mesmo plano para se construir os gráficos do teor de umidade médio destes volumes de controle para os quatro ensaios.

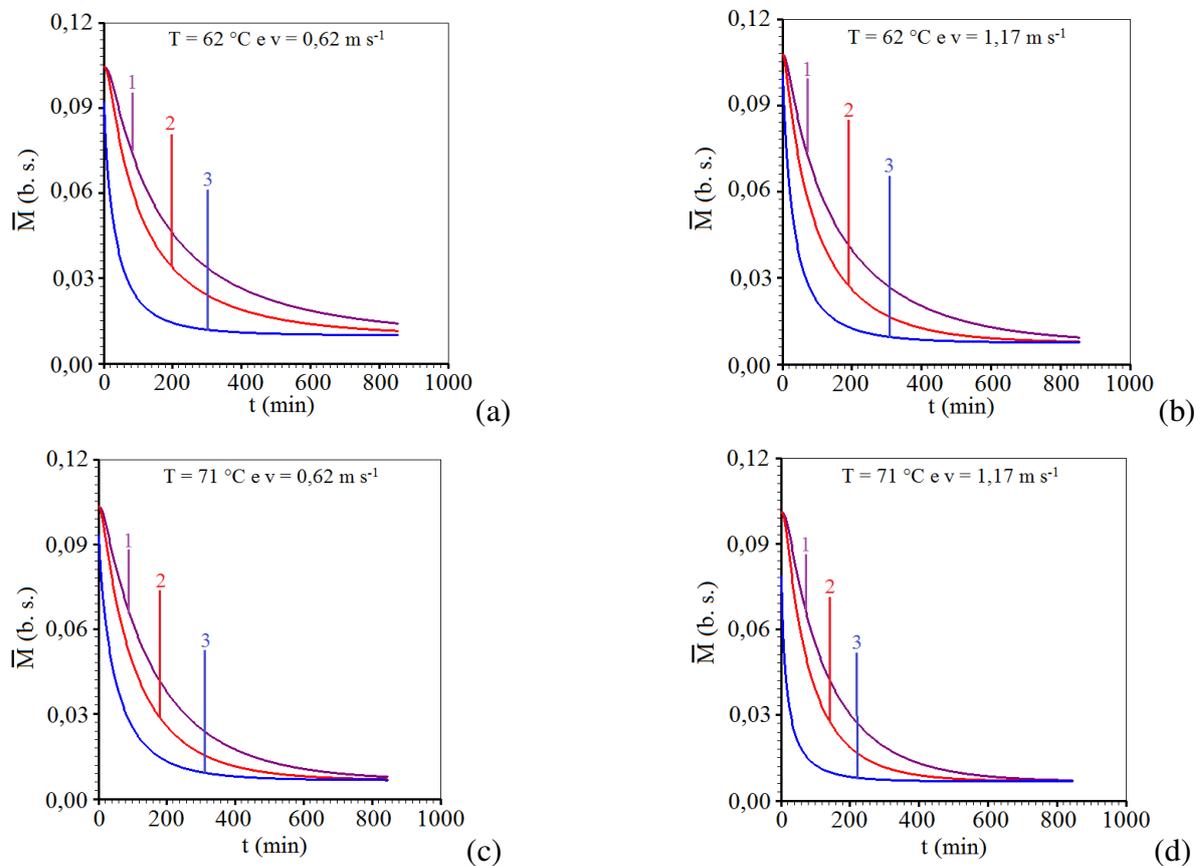
Figura 4.89 – Localização dos pontos: (1) VC ($\xi = 1$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (2) VC ($\xi = 25$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (3) VC ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 15$).



Fonte: Autoria própria.

Apresenta-se na Figura 4.90 os perfis do teor de umidade médio dos volumes de controle representados na Figura 4.89.

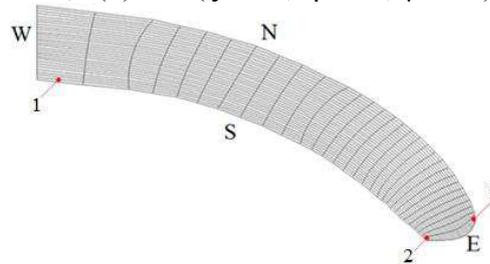
Figura 4.90 - Perfis do teor de umidade médio para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4: (1) VC ($\xi = 1$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (2) VC ($\xi = 25$; $\eta = 15$; $\gamma = 15$); (3) VC ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 15$).



Fonte: Autoria própria.

Continuando com a análise na Figura 4.91 é mostrado a localização de três pontos para construção do gráfico dos perfis do teor de umidade médio para três volumes de controle do plano central.

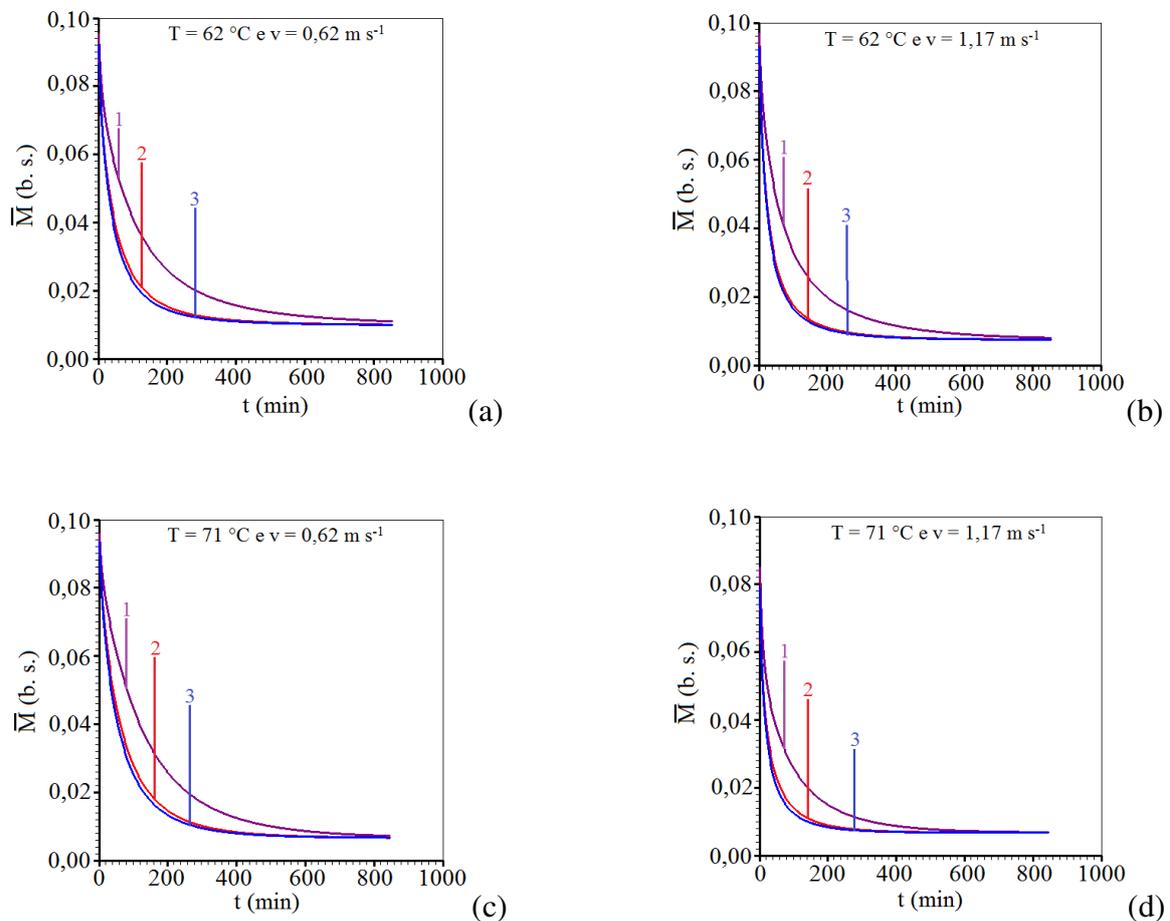
Figura 4.91 – Localização dos pontos: (1) VC ($\xi = 1; \eta = 1; \gamma = 16$); (2) VC ($\xi = 30; \eta = 1; \gamma = 16$); (3) VC ($\xi = 30; \eta = 30; \gamma = 16$).



Fonte: Autoria própria.

Apresenta-se na Figura 4.92, os perfis do teor de umidade médios dos volumes de controle representados pelos pontos da Figura 4.91.

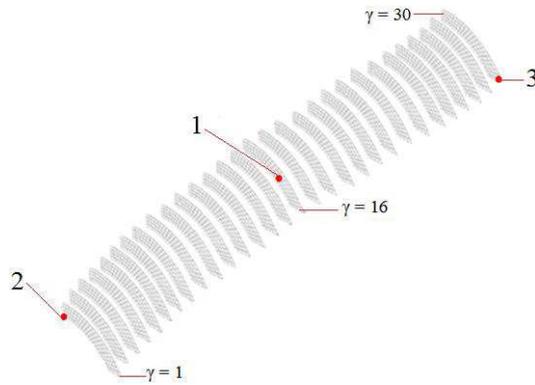
Figura 4.92 - Perfis do teor de umidade médio para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4: (1) VC ($\xi = 1; \eta = 1; \gamma = 16$); (2) VC ($\xi = 30; \eta = 1; \gamma = 16$); (3) VC ($\xi = 30; \eta = 30; \gamma = 16$).



Fonte: Autoria própria.

Apresenta-se ainda na Figura 4.93 os pontos que representam os volumes de controle em três planos diferentes para construir o gráfico os perfis do teor de umidade médio.

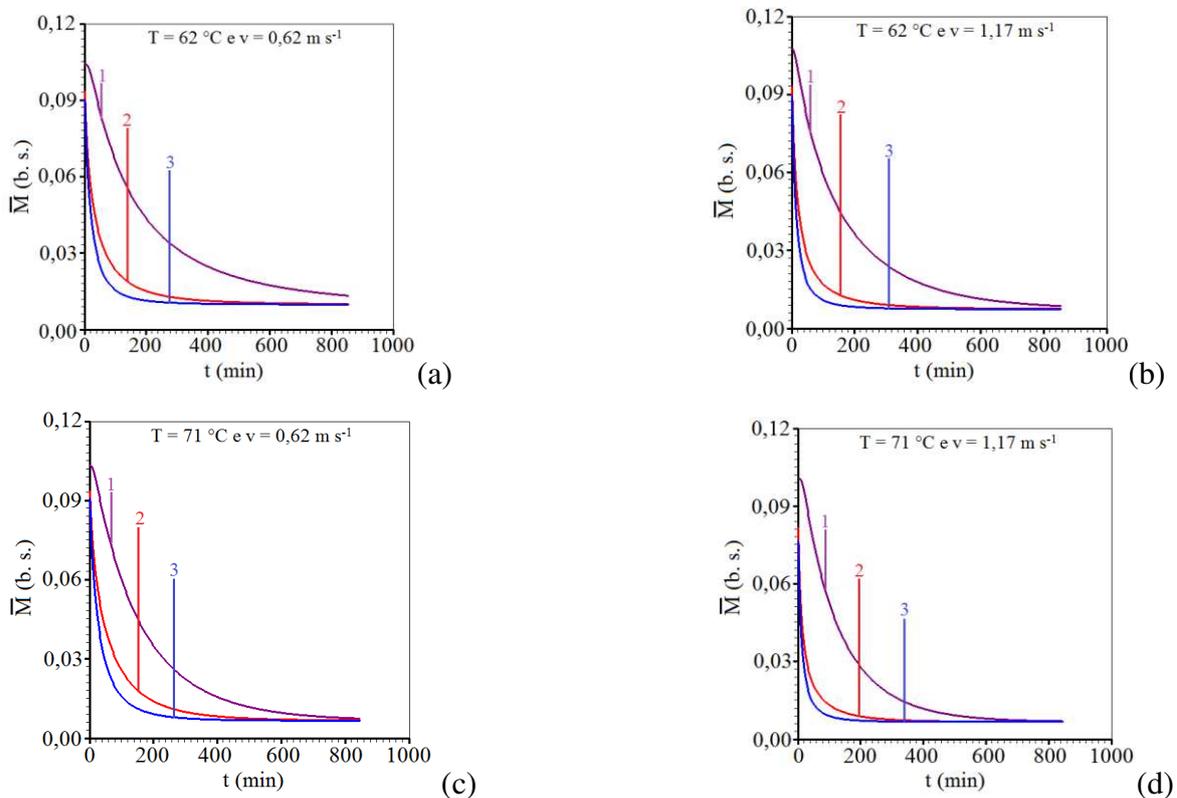
Figura 4.93 – Localização dos pontos: (1) VC no centro ($\xi = 16$; $\eta = 16$; $\gamma = 16$); (2) ponto externo ($\xi = 1$; $\eta = 1$; $\gamma = 1$); (3) ponto externo ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 30$).



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 4.94 é apresentado os gráficos do teor de umidade médio dos volumes de controle representados pelos pontos da Figura 4.93.

Figura 4.94 - Perfis do teor de umidade médio para os ensaios (a) E1; (b) E2; (c) E3 e (d) E4: (1) VC ($\xi = 16$; $\eta = 16$; $\gamma = 16$); (2) VC ($\xi = 1$; $\eta = 1$; $\gamma = 1$); (3) VC ($\xi = 30$; $\eta = 30$; $\gamma = 30$).



Fonte: Autoria própria.

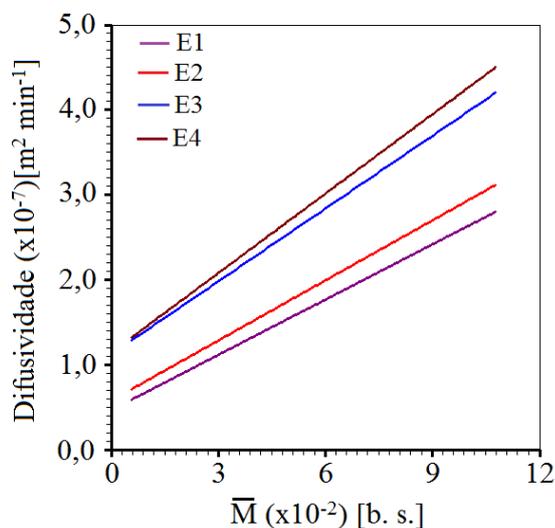
Observando-se as Figuras 4.90 e 4.92 que mostram os três volumes de controle do plano central da telha verifica-se que os volumes de controle 2 e 3 que ficam localizados mais na extremidade da telha e possuem, portanto, contato com o ar de secagem secam mais rapidamente que o volume de controle 1, localizado no centro do sólido.

Analisando a Figura 4.94 observa-se que o volume de controle 3 que fica localizado na extremidade do lado mais estreito da telha devido à área superficial de contato com o meio ser mais estreita, seca mais rapidamente que o volume de controle 1 localizado no centro do sólido. Já o volume de controle 2, localizado na parte mais larga da telha e com uma área de contato com meio maior, seca, portanto em uma velocidade intermediária entre os volumes 1 e 3, mas muito próxima do volume de controle 3.

Assim como ocorreu com os resultados apresentados na Figura 4.88, também nos resultados mostrados nas Figuras 4.90, 4.92 e 4.94 pode-se concluir que os maiores gradientes do teor umidade ocorrem na superfície do sólido, tornando essa região mais vulnerável a rachaduras e tensões. Este desempenho é observado durante todo processo de secagem para todos os ensaios.

Os gráficos das expressões da difusividade efetiva de massa em função do teor de umidade, obtidas para os quatro ensaios foram construídos em um único sistema de eixos, e o resultado é mostrado na Figura 4.95.

Figura 4.95 - Difusividades efetivas para os quatro ensaios em função do teor de umidade média, considerando parâmetros variáveis.

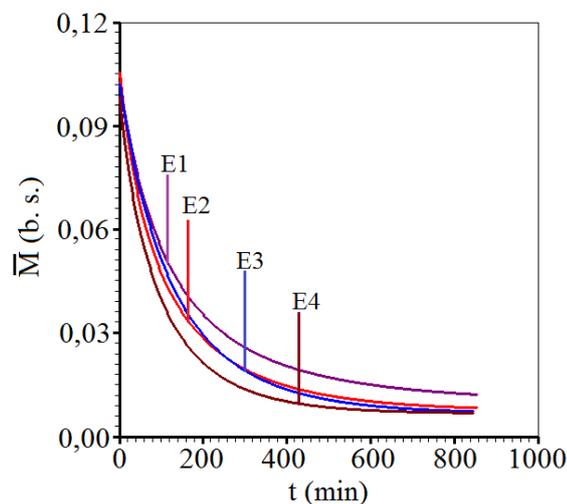


Fonte: Autoria própria.

A Figura 4.95 corrobora com os resultados apresentados na Tabela 4.28. Os dois resultados mostram que o aumento da velocidade do fluxo de ar tem influência maior no aumento do valor do coeficiente de transferência convectivo (h) e menor influência no aumento da difusividade efetiva de massa (D_{ef}). Por outro lado, o aumento da temperatura do ar tem influência maior no aumento da difusividade efetiva de massa.

A superposição das curvas que representam as cinéticas de secagem para os quatro ensaios realizados na pesquisa pode ser observada por meio da Figura 4.96.

Figura 4.96 - Superposição das cinéticas de secagem para os quatro ensaios.



Fonte: Autoria própria

Na Figura 4.96, comparando-se os dados, pode-se perceber que a temperatura e a velocidade do fluxo de ar de secagem influenciam fortemente a taxa de secagem como esperado. Quando a temperatura ou a velocidade do ar aumenta ou ambas aumentam, a taxa de secagem também aumenta. Assim, pode-se atribuir a redução do tempo de secagem não só ao aumento da temperatura do ar de secagem, mas também ao aumento da velocidade do fluxo de ar de secagem.

Observando ainda a figura 4.96, pode-se perceber que quando a velocidade do fluxo de ar aumentou de $0,62 \text{ m s}^{-1}$ para $1,17 \text{ m s}^{-1}$ e a temperatura permaneceu constante em $62 \text{ }^\circ\text{C}$ (E2) a secagem foi semelhante à quando a velocidade manteve-se constante em $0,62 \text{ m s}^{-1}$ e a temperatura passou de $62 \text{ }^\circ\text{C}$ para $71 \text{ }^\circ\text{C}$ (E3).

A cinética de secagem, bem como a distribuição de umidade, difere pouco da condição experimental E2 para a condição experimental E3 podendo-se dizer que ambas são equivalentes.

Este fato demonstra a influência da velocidade do fluxo de ar na perda de água, mesmo quando não há mudança de temperatura. Assim em um processo de secagem, pode-se escolher, aumentar a velocidade do ar de secagem e manter a temperaturas mais baixas, porque altas temperaturas para remover a água do material cerâmico podem causar danos ao produto final.

Terminada a análise dos resultados, descreve-se no próximo capítulo as conclusões da tese.

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões relativas à pesquisa realizada e sugestões de temas para trabalhos futuros.

5.1 – Conclusões

Em conformidade com os resultados obtidos da caracterização da argila e das técnicas analíticas e numéricas empregadas para otimizar e simular o processo difusivo em sólidos com geometria arbitrária, é possível apresentar algumas conclusões relacionadas a seguir.

5.1.1 – Caracterização da argila

- † O resultado da granulometria da argila apresentou diâmetro médio D (10 %) de 1,40 μm , D (50 %) de 4,75 μm e D (90 %) de 22,96 μm , com tamanho médio de aglomerados de partículas de 9,24 μm . Esses dados estão em conformidade com a literatura sobre o assunto;
- † Na amostra da argila o percentual de sílica foi acima de 59% e óxido de alumínio acima de 26%. Segundo Silva, J. (2009), isso indica que a amostra possui uma grande quantidade de material não plástico, elevando a porosidade da telha e conseqüentemente diminuindo o tempo de secagem e a retração volumétrica;

5.1.2 – Resultados experimentais

- † Foi observado que a secagem das telhas cerâmicas ocorreu em dois períodos distintos: inicialmente em taxa de secagem constante e posteriormente em taxa de secagem decrescente. Assim, o modelo difusivo foi empregado considerando que o processo ocorreu durante o período de taxa de secagem decrescente.
- † Quando se aumentou, a temperatura e/ou a velocidade do fluxo do ar de secagem, e, as demais condições experimentais foram mantidas constantes, ocorreu uma diminuição no tempo de secagem;

- † Não foram detectados defeitos nas peças estudadas, causados pelo processo de secagem para as temperatura e velocidades do fluxo de ar investigados nas condições descritas. Assim, a escolha de uma temperatura e/ou de uma velocidade para o fluxo de ar de secagem deve ser condicionada a outros requisitos do processo produtivo tais como custo e duração;

5.1.3 – Conclusões sobre soluções analíticas

- † As ferramentas analíticas propostas foram utilizadas para descrever o processo de difusão com condição de contorno do terceiro tipo. Os resultados foram compatíveis com os resultados de parâmetros termofísicos a partir de dados experimentais.
- † Para os quatro ensaios estudados, as cinéticas de secagem da solução analítica da equação de difusão, apresentam uma boa similaridade.
- † Os resultados permitem concluir que o modelo de difusão descreve de forma satisfatória a cinética de secagem de telhas de cerâmica, considerando a geometria de um paralelepípedo.
- † Percebeu-se em todos os ensaios que as telhas secam mais rapidamente na região para a qual os pontos possuem dois lados em contato com o meio externo. Na região em que os pontos estão em contato com o meio externo em apenas um lado, a secagem é mais lenta. Porém, mais rápida que a região na qual os pontos são internos ao sólido.
- † Observou-se também que, quando se aumentou a velocidade do fluxo de ar 0,62 m/s para 1,17 m/s e manteve-se a temperatura em 62°C o processo de secagem ocorreu de forma ligeiramente mais rápido do que quando se aumentou a temperatura de 62 °C para 71 °C e manteve-se a velocidade do fluxo de ar em 0,62 m/s. Isso demonstra a forte influência da velocidade do fluxo de ar.

5.1.4 – Conclusões sobre o emprego de soluções numéricas

- † As cinéticas de secagem da solução numérica da equação de difusão dos quatro

ensaios realizados, também, apresentam uma boa similaridade. Apenas para o ensaio E1 foi detectado uma certa discrepância entre os dados simulados e os experimentais a partir dos 300 minutos até 600 minutos. Sugerindo que a difusividade efetiva neste intervalo de tempo deveria ter um valor menor do que nos instantes iniciais.

- † O código computacional, desenvolvido por Farias, V. (2011) e adaptado para os dados experimentais desta pesquisa apresentou validação e consistência satisfatória para várias formas geométricas.
- † O otimizador *LS Optimizer* desenvolvido por Silva (2016) e acoplado na solução numérica da equação de difusão apresentou uma boa performance em relação ao tempo de execução para simular as cinéticas de secagem. Foi necessário um tempo médio de 18 horas para concluir o trabalho de otimização para cada função com o plano de energia da bateria do computador em auto desempenho. Se o plano de energia fosse o equilibrado, o tempo necessário para otimizar cada função aumentaria para 44 horas. Mostrou também que para os dados experimentais utilizados, o otimizador apresentou convergência para a maioria das funções, analisadas. Algumas funções não apresentaram convergência.
- † Considerando a função linear para difusividade efetiva de massa, os parâmetros termofísicos obtidos e as respectivas incertezas obtidos na otimização são estatisticamente consistentes. Os desvios relativos oscilaram em torno de 10%.
- † Comparando-se os resultados obtidos através dos processos de otimização, verifica-se que os indicadores estatísticos obtidos para a difusividade efetiva de massa variável foram significativamente melhores do que aqueles obtidos ao se considerar a difusividade efetiva de massa constante. Por exemplo, os qui-quadrados dos ajustes considerando a difusividade efetiva de massa variáveis foram de 3,1 a 7,5 vezes menores em relação à otimização considerando a difusividade constantes.
- † Percebeu-se em todos os ensaios representado nas figuras com geometria arbitrária, que as telhas secam mais rapidamente na região leste, na qual, os pontos estão em contato com o meio externo. Na região central seca mais lentamente.

- † Os valores para a difusividade efetiva de massa, embora fortemente dependentes da geometria e composição do produto, bem como do processo de fabricação e temperatura de secagem, são compatíveis com valores disponíveis na literatura para materiais cerâmicos. Esta afirmação vale tanto para o modelo que considerou tal parâmetro constante quanto para o modelo que considerou a difusividade como função linear da razão de umidade. Neste caso, o valor utilizado para comparação foi o valor médio da função;
- † O tratamento matemático utilizado para obtenção da solução numérica da equação de difusão em coordenadas generalizadas com condição de contorno convectiva, incluindo distâncias, volumes e áreas é adequado para descrever processos difusivos em corpos com forma geométrica qualquer e podem ser aplicados em fenômenos, tais como aquecimento, resfriamento, secagem e umidificação.

5.2 – Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho teve como proposta básica resolver problemas de difusão para sólidos, com forma geométrica arbitrária. Quanto aos tipos de problemas, podem ser resolvidos tanto aqueles para os quais os parâmetros de processo são conhecidos quanto aqueles em que tais parâmetros são determinados a partir de dados experimentais via otimização.

No sentido de dar mais opções à aplicação do código computacional desenvolvido resultante desta pesquisa, é sugerido que:

- † Embora o termo fonte não tenha sido incluído nas simulações realizadas, a sua linearização foi implementada no código computacional utilizado, o qual pode, portanto, ser aplicado a qualquer problema difusivo com geração de energia, para geometrias arbitrárias tridimensionais;
- † Embora as metodologias desenvolvidas tenham sido aplicadas em um problema de secagem, elas independem da natureza física do processo e podem, portanto, ser aplicadas a qualquer problema que envolva difusão. Assim, sugerem-se novas

aplicações, tais como umidificação, aquecimento, resfriamento, congelamento ou qualquer outro processo de sorção e dessorção para sólidos tridimensionais com geometria arbitrária.

5.3 – Contribuição desta pesquisa

Diante do exposto, a principal e grande contribuição desta pesquisa foi colocar à disposição de interessados, subsídios teóricos no tocante à transferência de massa, com ênfase nos processos de secagem de sólidos com geometrias complexas tridimensionais, o que é pouco estudado e discutido na comunidade científica. Nesta pesquisa foi usada uma telha tipo canal assimétrica em relação ao seu comprimento e sendo, neste caso, necessário construir 31 malhas para cada ensaio. Além disso, disponibilizou-se, também, uma ferramenta computacional que pode ser utilizada por pesquisadores de áreas que envolvam difusão de matéria ou de energia em sólidos com geometria arbitrária tridimensional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

ABC (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CERAMICA). **Cerâmica no Brasil**: introdução, 2016. Disponível em:< http://www.abceram.org.br/asp/abc_21.asp >. Acesso: 22/11/2016.

AIKIDO, G. K. **As eras do Japão**, 2011. Disponível no site: <http://www.gansekikai.org/as-eras-do-japao/>. Acessado em 27/12/2016.

AIRES, K. L. C. A. F. **Desidratação osmótica e secagem convectiva de maçã cortada em forma de paralelepípedo descritas por solução numérica tridimensional da equação de difusão**. 2016, 272 f. Tese de doutorado em Engenharia de Processos – Universidade Federal de Campina Grande – Campina Grande – PB.

AIRES, K. L. C. A. F.; SILVA, W. P. S.; AIRES, J. E. F.; SILVA JÚNIOR, A. F. SILVA, C. M. D. P. S. **Apple osmotic dehydration described by threedimensional numerical solution of the diffusion equation**. *Drying Technology*, 2018, disponível no site: <https://doi.org/10.1080/07373937.2018.1431274>.

ALMEIDA, F. L.; RIJO, L. **Modelagens direta e inversa de dados mCSEM 3D**. *Revista Brasileira de Geofísica*, vol. 29, nº 2, São Paulo – SP, 2011.

ALMEIDA, G. S. **Simulação e experimentação da secagem de cerâmica vermelha em sistemas térmicos industriais**. 2009, 211 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande – PB.

ANFACER. **Associação nacional dos fabricantes de cerâmicas para revestimento. História da cerâmica**. [2000?]. Disponível em: www.anfacer.org.br – acesso em março, 2017.

AOAC. 2005. Association of Official Analytical Chemists, **Official Method of Analysis**, 18th ed., Washington DC, USA – United State American.

ARAUJO, E. S.; PESTANA, R. C. **Análise dos métodos de diferenças finitas e expansão rápida na migração reversa no tempo**. *Rev. Bras. Geof.* vol. 28, nº 4, São Paulo – SP, 2010.

ATAÍDE, J. S. P. **Transferência de calor durante o processo de pasteurização de polpas de frutas armazenadas em recipientes obtidos por revolução de áreas planas.** 2014, Tese de doutorado em Engenharia de Processos – Universidade Federal de Campina Grande – Campina Grande – PB.

BARROS, J. V. **Produção e estudo da microestrutura e propriedade mecânica da cerâmica Ba₂HoZrO_{5,5} a base de zircônia para fabricação de cadinhos de alta temperatura.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Centro de Tecnologia e Geociências, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco, 2003.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport phenomena.** 2nd Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

BLOG MARGON PORTUGAL. **História da telha, 2007.** Disponível no site: <<http://margonportugal.blogspot.com.br/2007/03/histria-da-telha.html>>, acessado em: 15/03/2017.

BOAS, M. L. **Mathematical methods in the physical sciences.** New York: John Wiley & Sons, Inc., 783 p., 1983.

BORSATO, D.; MOREIRA, I.; NÓBREGA, M. M.; MOREIRA, M. B.; SILVA, R. S. S. F.; BONA, E. **Modelagem e simulação da desidratação osmótica em pedaços de abacaxi utilizando o método de elementos finitos.** Revista Química Nova, vol. 32, nº 8 São Paulo – SP, 2009.

BROOKER, D. B.; BAKKER-ARKEMA, F. W.; Hall, C. W. **Drying and storage of grains and oilseeds.** New York: The AVI Publishing Company, 450 p, 1992.

BUTKOV, E. **Física Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S. A., 725 p., 1983.
CADÉ, M. A.; NASCIMENTO, J. J. S.; LIMA, A. G. B. **Secagem de tijolos cerâmicos vazados: uma aproximação por volumes finitos.** Revista Matéria, v. 10, n. 3, p. 433-453, 2005.

CARMO, J. E. F. **Difusão em sólidos esferoidais oblato: modelagem e simulação.** 2000. 76 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande.

CARMO, J. E. F. **Fenômeno de difusão transiente em sólidos esferoidais oblato. Estudo de caso: secagem de lentilhas.** 2004, 139 p. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil.

CARMO, J. E. F.; LIMA, A. G. B. **Mass transfer inside oblate spheroidal solids: modelling and simulation.** Brazilian Journal of Chemical Engineering, v. 25, nº 1, p. 19-26, 2008.

CAROLLO, L. F. S.; GRAVENA, D. A.; SILVA, S. M. M. L. **Sonda metálica reduzida para a caracterização térmica de polímeros.** Revista Polímeros vol. 22, nº 3, São Carlos – SP 2012.

CAVALCANTI, W. S.; LIMA, A. G. B.; CARVALHO, L. H. **Sorção de água em compósitos de poliéster insaturado reforçados com tecido de juta e juta/vidro modelagem, simulação e experimentação.** Revista Polímeros vol. 20, nº 1, São Carlos – SP, 2010.

CHEMKHI, S.; ZAGROUBA, F. **Water diffusion coefficient in clay material from drying data.** Desalination, v. 185, iss. 1-3, p 491-498, 2005.

CHEMKHI, S.; ZAGROUBA, F. **Development of a Darcy-flow model applied to simulate the drying of shrinking media.** Brazilian Journal of Chemical Engineering, v. 25, n. 3, p. 503-514, 2008.

CORNEJO, F. E. P.; NOGUEIRA, R. I; WILBERG, V. C. **Secagem como método de conservação de frutas.** Rio de Janeiro: Embrapa Agroindústria de Alimentos, 2003.

CORREA FILHO, L. C.; ANDRADE, E. T.; MARTINAZZO, A. P.; D'ANDREA E. M.; SOUSA, F. A.; FIGUEIRA, V. G. **Cinética de secagem, contração volumétrica e análise da**

difusão líquida do figo, Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, Vol 19, Vol. 8, 2015.

COSTA, W. S. Descrição da transferência de calor em produtos alimentares submetidos a processos com condição de contorno variável. 2015, 259 f. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos – UFCG – Campina Grande – PB.

CRANK, J. The mathematics of diffusion. Oxford Science Publications, New York 1992.

CRANK, J.; NICOLSON, P. A Practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society v. 43, 50-67, 1947.

DEMARQUE, R.; CASTRO, J. A.; XAVIER, C. R.; ALMEIDA, D. S. S.; MARCELO, C. J.; SANTOS, E. P.; QUEIROZ, A. V. Estudo numérico e experimental da evolução microestrutural e das propriedades de juntas soldadas de vergalhões pelo processo GMAW. Revista de Soldagem Inspeção vol. 20, nº 4, São Paulo – SP, 2015.

DOVICH FILHO, F. B. Aprimoramento da técnica de diferentes intensidades de fluxo de calor para estimação de propriedades térmicas, 2015, 69 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá – MG.

DOYMAZ, I. Drying kinetics, rehydration and colour characteristics of convective hot-air drying of carrot slices. Heat Mass Transfer, 2017.

ERDOĞDU, F. Mathematical approaches for use of analytical solutions in experimental determination of heat and mass transfer parameters. Journal of Food Engineering, v. 68, n. 2, p. 233-238, 2005.

FACINCANI, E. Tecnologia cerâmica – I laterizi. Itália, Gruppo Editoriale Faenza Editrice. Faenza. Seconda edizione. 1992, 267p.

FARIAS, R. P. Secagem de banana em estufa: efeitos térmicos e geométricos. 2011, 160 p.

Tese de Doutorado em Engenharia de Processos. Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

FARIAS, V. S. O.; SOUZA, J. A. R.; SILVA, W. P.; NEVES, G. A.; LIMA, A. G. B. **Estudo da cinética de secagem de telhas cerâmicas através do modelo de difusão usando solução analítica e método inverso.** Anais do XXXIV ENEMP, 2009.

FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. S.; SILVA, W. P.; LIMA, A. G. B. **Influência da geometria na simulação do processo de secagem de telhas cerâmicas através do modelo de difusão usando soluções analíticas e método inverso.** Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, CD ROOM, 2010a.

FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. S.; NASCIMENTO, P. L.; SILVA, W. P.; LIMA, A. G. B. **Simulação do processo de secagem de telhas cerâmicas através do modelo de difusão usando soluções analíticas para diferentes geometrias.** Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química, CD ROOM, 2010b.

FARIAS, V. S. O. **Difusão 3D em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas.** 2011, 265 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) –Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande.

FARIAS, V. S. O.; SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; LIMA, A. G.; ROCHA, V. P. T. **Drying of solids with irregular geometry: numerical study and application using a three-dimensional model.** Springer-Verlag – Berlin Heidelberg, 2013.

FARIAS, V. S. O.; SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA JÚNIOR, A. F.; AIRES, J. E. F.; ROCHA, V. P. T. **Assessment of diffusion models to describe drying of roof tiles using generalized coordinates.** Springer-Verlag – Berlin Heidelberg, 2015.

FARIAS, V. S. O.; ARAÚJO, L. F.; SILVA, W. P.; FRANCO, C. M. R.; ROCHA, P. I. O. **Drying study of ceramic tiles using three-dimensional analytical solution of the diffusion equation.** JP Journal of Heat and Mass Transfer, v. 15, p.409-432, Allahabad, India, 2018.

FERNANDES, K. P.; LOULA, A. F. D.; MALTA, S. C. M. **Uma formulação hibridizada de elementos finitos para problemas parabólicos.** Revista TEMA, vol. 14, nº 3, São Carlos – SP, 2013.

FERNANDES, L. L.; CRUZ, J. C. R.; BLANCO, C. J. C.; BARP, A. R. B. **Seismic Modeling by finites difference method - case of Amazon basin.** Revista Acta Amazônica, vol. 39, nº 1, Manaus – AM, 2009.

FIGUEIREDO, R. **Princípios de secagem de produtos biológicos.** João Pessoa: editora Universitária/UFPB, 2004.

FRAGA, F. F.; CARVALHO, G. C.; OLIVEIRA, T. F. **Transferência de calor aplicada à prototipagem rápida por deposição de metal em camadas sucessivas utilizando soldagem 3D.** Revista Soldagem e Inspeção, vol.18, nº 4, São Paulo – SP, 2013.

FRANCO, M. R. F. **Modelagem, simulação e experimentação da secagem contínua e intermitente de sólidos elipsoidais. Estudo de caso: secagem de grãos de arroz em casca.** 2016, 262 f. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos – UFCG – Campina Grande – PB.

FRANCO, C. M. R.; LIMA, A. G. B.; NUNES, A. G.; FARIAS, V. S. O.; SILVA JÚNIOR, A. F. **Um modelo de difusão para descrever secagem intermitente de grãos de arroz em casca.** 13º Congresso Ibero-americano de Engenharia Mecânica 13º Congresso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica Lisboa, Portugal, 23-26 de outubro de 2017.

GALVÃO, I. B. **Estudo teórico-experimental de secagens contínua e intermitente de pedaços de maçã cortados na forma de paralelepípedo.** 170 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil, 2017.

GARCIA, D. C.; BARROS, A. C. S. A.; PESKE, S. T.; MENEZES, N. L. **A secagem de sementes.** Ciência Rural, vol. 34, nº 2, Santa Maria – RS, 2004.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1992, 455 p.

JARQUE, J. C.; SEGARRA, C.; CANTAVELLA, V.; MONDRAGÓN, R. **Non-Isothermal Modeling of Drying Kinetics of Ceramic Tiles**. *Drying Technology*, v. 34, p. 761 – 772, 2016.

LADEIA, C. A.; ROMEIRO, N. M. L.; NATTI, P. L.; CIRILO, E. R. Formulações semi-discretas para a equação 1D de Burgers. *Revista TEMA* vol. 14, nº 3, São Carlos – SP, 2013.

LIMA, A. G. B.; NEBRA S. A. **The finite-volume approach for the solution of the transient diffusion equation applied to prolate spheroidal solids**. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1999, Água de Lindóia – São Paulo, SP.

LIMA, A. G. B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de bananas**. 1999, 244 p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas – São Paulo, Brasil.

LINS, M. A. A. **Determinação de parâmetros termo físicos em produtos pastosos durante processos de transferência de calor**. 2013, 293 f. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos – UFCG – Campina Grande – PB.

LIU, J. Y.; SIMPSON, W. T. **Inverse determination of diffusion coefficient for moisture diffusion in wood**. *Proceedings of 33RD ASME National Heat Transfer Conference: Heat and Mass Transfer in Porous Media*, 1999, Albuquerque, New Mexico.

LUIKOV, A. V. **Analytical heat diffusion theory**. Academic Press, New York and London, 684 p., 1968.

MAČIULAITIS, R.; MALAIŠKIENĖ, J. **The regulation of structural parameters of ceramics depending on the drying regime**. *Journal of Civil Engineering and Management*, v. 15, n. 2, p. 197–204, 2009.

MALISKA, C. R. **Transcal V 1.1 (1998)**, software livre, disponível no site: <http://www.sinmec.ufsc.br/site/software.php?id=2>, acessado em maio/2016.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2^a ed., LTC Editora S.A., Rio de Janeiro, re., 2012.

MARIANI, V. C.; LIMA, A. G. B.; COELHO, L. S. **Apparent thermal diffusivity estimation of the banana during drying using inverse method**. Journal of Food Engineering, v. 85 n. 4, p. 569–579, 2008.

MARIANI, V. C.; AMARANTE, A. C. C.; COELHO, L. S. **Estimation of apparent thermal conductivity of carrot purée during freezing using inverse problem**. International Journal of Food Science & Technology, v. 44, p. 1292–1303, 2009.

MARTINAZZO, A. P.; CORRÊA, P. C. MELO, E. C.; BARBOSA, F. F.; **Difusividade efetiva em folhas de Cymbopogon citratus (DC.) Stapf submetidas à secagem com diferentes comprimentos de corte e temperaturas do ar**. Rev. Bras. Pl. Med., vol.9, nº1, p.68-72, Botucatu, SP, 2007.

MELLADO, E. C. E. R. **Modelo de transferência de calor e massa na secagem de madeira serrada de pinus**. 2007, 155 p. Tese de doutorado em Engenharia Florestal do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal do Setor de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Paraná, PR, Brasil.

MONERAT, G. A.; FERREIRA FILHO, L. G.; SILVA, E. V. C.; OLIVEIRA-NETO, G.; NOUGUEIRA, P. H. A. S. ASSUNÇÃO A. R. P. **Quantização de sistemas hamiltonianos via método de diferenças finitas**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 32, nº 1, 1304, Resende – RJ, 2010.

MUKESHBHAI, S. K.; SHAH, S. R. **Analysis of drying process in ceramic tiles industries**. IJARIE, v. 2, ed. 3, p. 409-418, 2016.

NASCIMENTO, J. J. S. **Fenômeno de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. Estudo de caso: secagem de matérias cerâmicos**. 2002, 181 p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Centro de Tecnologia, UFPB, João Pessoa – PB.

NICOLIN, D. J.; ROSSONI, D. F.; JORGE, L. M. M. **Estudo das incertezas no ajuste da difusividade efetiva a partir da solução analítica da segunda lei de Fick.** XXXVII ENEMP, 2015 – São Carlos – SP.

OLEK, W.; PERRÉ, P.; WERES, J. **Inverse analysis of the transient bound water** diffusion in wood. *Holzforschung* vol.1, nº 59, p. 38-45, 2005.

ÖZISIK, M. N. **Transferência de calor: um texto básico.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A., 1990, 661 p.

PARK, K.J.; VOHNIKOVA, Z.; BROD, F. P. R. **Evaluation of drying parameters and desorption isotherms of garden mint leaves** (*Mentha crispa* L.). *Journal of Food Engineering*, v.51, n.3, p.193-199, 2002.

PARK, K. J.; ANTONIO, G. C.; OLIVEIRA, R. A.; PARK, K. J. B. **Conceitos de processo e equipamentos de secagem.** Disponível em: <http://www.feagri.unicamp.br/ctea/projpesq.html>, Campinas, SP, 2007.

PARK, K. J. B.; PARK, K. J.; ALONSO, L. F. T.; CORNEJO, F. E. P.; FABBRO, M. D. **Secagem: fundamentos e equações** *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*, Campina Grande, v.16, n.1, p.93-127, 2014

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow.** New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 197 p.

RAMBO, C. R. **Materiais avançados inspirados na natureza: estruturas celulares, fibras e compósitos.** *Exacta*, São Paulo, v. 4, nº 1, p. 95-103, 2006.

ROSSI, F. **Telhas cerâmicas: Tipos e Características, passo a passo**, [2012?]. Disponível no site: [<https://pedreiro.com.br/telhas-ceramicas-tipos-e-caracteristicas-passo-a-passo/>](https://pedreiro.com.br/telhas-ceramicas-tipos-e-caracteristicas-passo-a-passo/), acessado em 01/07/2018.

SÁNCHEZ-MUÑOZ, L.; CAVA, S. S.; PASKOCIMAS, C. A.; CERISUELO, E.; LONGO,

E.; CARDA, J. B. **Influência da composição das matérias-primas no processo de gresificação de revestimentos cerâmicos**, Cerâmica Industrial. v. 48, n. 307, p. 137-145. 2002.

SANDER, A.; SKANSI, D.; BOLF, N. **Heat and mass transfer models in convection drying of clay slabs**. Ceramics International, v. 29, n.3, p. 641-653, 2003.

SANTOS, L. B. L.; CAMPOS-VELHO, H. F. CHIWIACOWSKY, L. D. Análise de robustez do método híbrido de estimação de dano estrutural. TEMA, vol.12, nº 3, São Carlos – SP, 2011.

SANTOS, R. D.; SOUTO, H. P. A. **Resolução da equação de Burgers empregando uma formulação implícita e métodos de Krylov**. REUCP, Vol. 8, nº 2, 2014, Petrópolis, RJ.

SANTOS, I. C. P.; HARTHMANN, D.; CÂNDIDO, P. H. W.; FERRO, V. ZINGANO, E. **Cerâmica no Brasil: Sobre a origem e cultura**. Uniassevi, 2015.

SCHÄFER, M. **Computational Engineering –Introduction to Numerical Methods**. Springer: Germany, 2006, 321 p.

SILVA, A. A.; NASCIMENTO, J. J.S.; LIMA, A. G. B. **Estudo analítico de secagem de placas cerâmicas usando o método integral baseado em Galerkin e condição de contorno de Dirichlet**. Revista Eletrônica de Materiais e Processos, vol. 4, nº 2, pp 48-55, Campina Grande, 2009.

SILVA, A. C.; PITHON, A. J. C.; FERNANDES, J. L.; SANTOS, L. M. **Análise de viabilidade econômica financeira para a implantação de uma central de massa em uma indústria cerâmica de Itaboraí, RJ**. Cerâmica vol. 60, nº 356, São Paulo, 2014.

SILVA, C. M. D. P. S. **Difusão de massa em corpos cilíndricos: modelagem e desenvolvimento de software com aplicação à secagem de bananas**. 2010, 129 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola), Departamento de Engenharia Agrícola, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, C. M. D. P. S. **Ferramentas analíticas e numéricas para a descrição da secagem de sólidos na forma de cilindros e de elipsóides.** 2012, 293 p. Tese em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, W. P.; FARIAS, V. S. O.; GOMES, J. P. **Difusividade efetiva e coeficiente de transferência convectivo de massa durante a secagem de bananas.** Engenharia Agrícola, vol. 32, nº 2 Jaboticabal, 2012.

SILVA, J. B. **Simulação e experimentação da secagem de tijolos cerâmicos vazados.** 2009. Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação de Engenharia de Processos, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande.

SILVA JUNIOR, A. F. **Método dos volumes finitos para equação de convecção e difusão em uma dimensão espacial.** 2012, 135 p. Dissertação de Mestrado em Modelagem Computacional em Ciências e Tecnologia, UFF, Volta Redonda – RJ.

SILVA JUNIOR, A. F. **Desenvolvimento de ferramentas numéricas e computacionais para a descrição de transferência de massa em corpos cilíndricos: aplicação em desidratação osmótica e secagem complementar de banana.** 2015, 269 f. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos – UFCG – Campina Grande – PB.

SILVA, L. D. **Técnicas analíticas e numéricas para a secagem de sólidos na forma de paralelepípedo uma abordagem tridimensional.** 2012, 182 p. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos. Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, L. D.; SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; FARIAS, V. S. O. **Descrição da secagem de placas cerâmicas por meio de um modelo de difusão.** Cerâmica, v. 59, pp. 409-416, 2013.

SILVA, W. P. e SILVA, C. M. D. P. S., **Tratamento de Dados Experimentais.** João Pessoa: UFPB/Editora Universitária, 2ª Edição, 1998, 197 p.

SILVA, W. P. **Transporte difusivo em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas**

generalizadas. 2007, 263 p. Tese de Doutorado em Engenharia de Processos. Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, PB, Brasil.

SILVA, W. P.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA, C. D. P. S; LIMA, A. G. B. **Simulação numérica da transferência de massa em sólidos de revolução via volumes finitos e coordenadas generalizadas**. 8º Congresso Ibero-americano de Engenharia Mecânica, Cusco, Peru, 2007.

SILVA, W. P. **Software “2D Grid Generation”, V 5.1** (2008a) disponível no endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/gg.htm>, data de acesso: abril/2015.

SILVA, W. P. **Software 1D Heat Transfer**, V.6.1 (2008b) online, disponível no endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/ht.htm>, data de acesso: abril/2015.

SILVA, W. P. **Software “Diffusion RE”, V 2.2.0** (2008c) online, disponível no endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/diffusion.htm>, data de acesso: junho/2016.

SILVA, W. P.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA, C. M. D. P. S; SILVA, C. D. P. S. **Numerical simulation of the water diffusion in cylindrical solids**. International Journal of Food Engineering, v. 4, n. 2, iss. 2, article 6, doi: 10.2202/1556-3758.1394, 2008a.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S; LIMA, A. G. B. **Mass transfer study in solids through finite volume method and generalized coordinates for boundary condition of the third kind**. 16th International Drying Symposium (IDS 2008b), p. 412-419, 2008b.

SILVA, W. P. **Discretizações em fenômenos de transporte computacional, Cursos 1 e 2** (2009) Apresentações em Powerpoint, online, disponível no endereço eletrônico: <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/TCMFC.htm>, data de acesso: setembro/2014.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. **“Convective” software** (2009), online, disponível no endereço eletrônico: <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/Convective.htm> data de acesso: maio/2015.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; SILVA, D. D. P. S; LIMA, A. G. B. **Simulação da**

cinética de secagem de sólidos de revolução usando o modelo difusivo e o método inverso.

Brazilian Journal of Food Technology, v. 12, n. 1, p 77-84, 2009a.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA, C. D. P. S; LIMA, A. G. B.

Numerical simulation of diffusive processes in solids of revolution via finite volume method and generalized coordinates. International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 52, nº 21-22, p 4976-4985, 2009b.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, C. M. D. P. S; SILVA, D. D. P. S. **Determination of the effective diffusivity via minimization of the objective function by scanning: Application to drying of cowpea.** Journal of Food Engineering, vol. 95, nº 2, 2009c.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; NASCIMENTO, P. L.; SILVA, D. D. P. S; SILVA, C. D. P. S **Influence of the Geometry on the Numerical Simulation of Isothermal Drying Kinetics of Bananas.** World Applied Sciences Journal, vol. 7, nº 7, p. 846-855, 2009d.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S; FARIAS, V. S. O.; SILVA, NEVES, G. A.; LIMA, A. G. B. **Numerical simulation of water transport in banana using generalized coordinates and Cauchy boundary condition.** 20th International Congress of Mechanical Engineering, 2009e.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; LIMA, A. G. B. **Drying Kinetics of Lima Bean (*Phaseolus lunatus* L.) Experimental Determination and Prediction by Diffusion Models.** International Journal of Food Engineering. vol. 5, n. 3, Article 9, 2009f.

SILVA, W. P. “**Contour plots**” software (2010) online, disponível no seguinte endereço eletrônico <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/Contour.zip>, data de acesso: junho/2016.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S; SILVA, D. D. P. S.; NEVES, G. A.; LIMA, A. G. B. **Mass and heat transfer study in solids of revolution via numerical simulations using finite volume method and generalized coordinates for the Cauchy boundary condition.** International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 53, nº 5-6, p. 1183-1194, 2010a.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, D. D. P. S. **Calculation of the convective heat transfer coefficient and cooling kinetics of an individual fig fruit.** Heat Mass Transfer, v.46, n° 3; p. 371–380, 2010b.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; NASCIMENTO, P. L. CARMO, J. E. F.; SILVA, D. D. P. S. **Influence of the geometry on the numerical simulation of the cooling kinetics of cucumbers.** Journal of Agricultural Research – Spanish – vol. 9 n° 1, 2011.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. **Lab fit curve fitting software, V.7.2.46** (2011); online, disponível em: www.labfit.net, data de acesso: agosto/2015).

SILVA, W. P.; FARIAS, V. S. O.; NEVES, G. A.; LIMA, A. G. B. **Modeling of water transport in roof tiles by removal of moisture at isothermal conditions,** Heat and Mass Transfer v. 48 p. 809-821, 2012.

SILVA, W. P.; SILVA, L. D.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. P. S. **Water migration in clay slabs during drying: A three-dimensional numerical approach.** Ceramics International v. 39 p. 4, 2013a. Disponível no site: <http://www.elsevier.com/locate/ceramint>.

SILVA, W. P.; SILVA, L. D.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. P. S. **Drying of Clay Slabs during the Falling Rate Period: Optimization and Simulation of the Process Using Diffusion Models.** Vol. 2, No. 2; 2013b. Published by Canadian Center of Science and Education.

SILVA, W. P.; SILVA, L. D.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. P. S. **Drying of clays labs: Experimental determination and prediction by two-dimensional diffusion models.** Ceramics International, 2013c.

SILVA, W. P.; SILVA, L. D.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. P. S. **Descrição da secagem de placas cerâmicas por meio de um modelo de difusão.** Revista Cerâmica, vol. 59, n°. 351, São Paulo – SP, 2013d.

SILVA, W. P.; SILVA, L. D.; FARIAS, V. S. O.; SILVA, C. M. D. P. S.; ATAÍDE, J. S. P. **Three-dimensional numerical analysis of water transfer in wood: determination of an**

expression for the effective mass diffusivity. Journal of the International Academy of Wood Science, 2013e.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. **Calculation of the convective heat transfer coefficient and thermal diffusivity of cucumbers using numerical simulation and the inverse method.** J Food Sci Technol. vol. 51, nº 9, pp. 1750–1761, Berlim, 2014b.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. **LS Optimizer**, 2016. Disponível em: <http://zeus.df.ufcg.edu.br>, acessado em: junho/2017.

SILVA, W. P.; ATAÍDE, J. S. P.; OLIVEIRA, M. E. G.; SILVA, C. M. D. P. S.; NUNES, J. S. **Heat transfer during pasteurization of fruit pulps stored in containers with arbitrary geometrics obtained through revolution of flat áreas.** Journal of Food Engineering, 217 – p 58-67; 2018.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D.P.S.; SOUTO, L. M.; MOREIRA, I. S.; SILVA, E. C. O. **Mathematical model for determining thermal properties of whole bananas with peel during the cooling process.** Journal of Food Engineering, 227 – p 11-17; 2018.

SILVEIRA, J. C.; COSTA, A. O. S.; COSTA JUNIOR, E. F.; **Modelagem da extração de óleos essenciais empregando coeficiente de difusão variável.** Engenharia Agrícola, vol. 35 nº 2, Jaboticabal – SP, 2015.

SKANSI, D.; TOMAS, S. **Microwave drying kinetics of a clay-plate.** Ceramics International, v. 21, n. 3, p. 207-211, 1995.

SOUSA, F. A.; ANDRADE, E. T.; FIGUEIRA, V. G.; D´ANDREA, E. M.; COOREA FILHO, L. C. **Estudo da cinética de secagem, contração volumétrica e análise da difusão líquida do morango.** 2014, ENGEVISTA, V. 16, n. 1, p.8-18, Rio de Janeiro – RJ.

SU, S. L. **Modeling of multi-phase moisture transfer and induced stress in drying clay bricks.** Applied Clay Science, v. 12, n. 3, p. 189-207, 1997.

TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis.** Sausalito, California: University Science Books, 2nd Edition, 1997, 327 p.

THOMPSON, J. F.; WARSI, Z. U. A.; MASTIN, C. W. **Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations – A Review**. Journal of Computational Physics 47, 1-108, 1982.

TRINDADE, M. S. **Secagem de soja em camada espessa: modelagem matemática e simulação numérica**. 2013, 109 p. Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Rio Grande do Sul, Ijuí – RS.

UKRAINCZYK, N. **Thermal diffusivity estimation using numerical inverse solution for 1D heat conduction**. International Journal of Heat and Mass Transfer. v. 52, p. 5675-5681, 2009.

VAZ, N. A. P. **Sistema tutor inteligente com personalização estruturada pelo método das diferenças finitas**. 2013, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção e Sistema, UFG, Goiânia – GO.

VIEIRA, C. M. F.; FEITOSA, H. S.; MONTEIRO, S. N. **Avaliação da secagem de cerâmica vermelha através da curva de Bigot**. Revista da Cerâmica Industrial, v. 8, nº 1, p. 42 – 46, 2003.

WAGNER, D. T.; ARANHA, I. B. **Método para análise de tamanho de partícula por espalhamento de luz para Bentonita Chocolate**. In XV Jornada de Iniciação Científica – CETEM, 2007.

WU, B.; YANG, W.; JIA, C. **A three-dimensional numerical simulation of transient heat and mass transfer inside a single rice kernel during the drying process**. Biosystems Engineering, v. 87, n. 2, p. 191-299, 2004.

ZHAO, D.; AN, K.; DING, S.; LIU, L.; XU, Z.; WANG, Z. **Two-Stage Intermittent Microwave Coupled with Hot-Air Drying of Carrot Slices: Drying Kinetics and Physical Quality**. Food Bioprocess Technol, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Dados experimentais da cinética de secagem

Tabela A1.1 – Dados experimentais relativos a cinética de secagem da telha para o ensaio E1.

t (min)	m (g)	L (mm)	C (mm)	E (mm)	M (b. s.)	RM
0	486,698	141,55	157,00	10,71	0,19811	1,00000
5	484,709	141,53	156,00	10,71	0,19321	0,97400
10	482,764	141,37	156,00	10,55	0,18842	0,94857
15	480,767	141,48	156,00	10,35	0,18351	0,92246
20	478,784	141,44	156,00	10,33	0,17863	0,89654
25	476,707	141,28	155,50	10,32	0,17351	0,86939
30	474,719	140,79	155,00	10,22	0,16862	0,84340
35	472,709	140,31	154,50	10,22	0,16367	0,81712
40	470,880	140,06	154,00	10,20	0,15917	0,79321
45	468,710	139,56	154,00	10,20	0,15383	0,76484
50	466,700	139,30	154,00	10,18	0,14888	0,73856
55	464,715	139,10	153,00	10,13	0,14399	0,71261
60	462,790	138,67	153,00	10,26	0,13925	0,68744
70	459,040	138,50	153,00	10,03	0,13002	0,63842
80	455,479	138,04	153,00	10,23	0,12126	0,59187
90	451,845	137,92	153,00	10,01	0,11231	0,54436
100	448,568	137,72	153,00	10,10	0,10424	0,50152
115	443,877	137,39	152,00	10,26	0,09270	0,44019
130	440,018	137,37	152,00	10,14	0,08320	0,38974
145	436,569	137,06	151,00	10,04	0,07471	0,34465
175	431,295	137,36	151,00	10,08	0,06172	0,27570
205	427,583	137,40	151,00	10,05	0,05258	0,22717
235	424,840	137,25	151,00	10,08	0,04583	0,19131
295	420,935	137,18	151,00	10,63	0,03622	0,14026
355	418,272	137,30	151,00	10,08	0,02966	0,10545
415	416,150	137,32	151,00	10,18	0,02444	0,07771
535	414,177	137,32	151,00	10,09	0,01958	0,05191
655	412,405	137,32	151,00	10,10	0,01522	0,02875
775	411,670	137,31	151,00	10,05	0,01341	0,01914
955	410,713	137,00	151,00	10,03	0,01106	0,00663
1135	410,352	137,00	151,00	10,19	0,01017	0,00191
1440	410,206	137,00	151,00	10,15	0,00981	0,00000

Fonte: Autoria própria.

Tabela A1.2 – Dados experimentais relativos a cinética de secagem da telha para o ensaio E2.

t (min)	m (g)	L (mm)	C (mm)	E (mm)	M(b. s.)	RM
0	482,279	137,68	155,0	11,15	0,20030	1,00000
5	479,177	137,17	155,0	10,75	0,19258	0,96016
10	475,930	137,00	154,5	10,65	0,18449	0,91847
15	472,890	136,52	154,0	10,63	0,17693	0,87943
20	469,920	136,40	154,0	10,41	0,16954	0,84128
25	467,017	135,50	153,0	10,37	0,16231	0,80400
30	464,392	134,59	153,0	10,51	0,15578	0,77029
35	461,770	134,93	153,0	10,49	0,14925	0,73662
40	459,237	134,28	152,0	10,43	0,14295	0,70409
45	456,990	134,32	152,0	10,56	0,13736	0,67524
50	454,556	134,19	152,0	10,23	0,13130	0,64398
60	449,470	133,95	151,0	10,22	0,11864	0,57866
70	445,070	133,58	150,0	10,28	0,10769	0,52216
80	441,005	133,96	150,0	10,30	0,09757	0,46996
90	437,308	133,64	150,0	10,34	0,08837	0,42248
100	434,270	133,19	150,0	10,28	0,08081	0,38346
110	431,528	133,82	150,0	10,35	0,07399	0,34825
125	428,248	133,54	150,0	10,39	0,06582	0,30613
140	425,630	133,71	150,0	10,44	0,05931	0,27251
155	423,500	133,88	150,0	10,30	0,05401	0,24516
185	420,136	133,80	150,0	10,34	0,04563	0,20195
215	417,430	133,87	150,0	10,36	0,03890	0,16720
245	415,390	133,89	150,0	10,29	0,03382	0,14101
305	412,134	133,94	150,0	10,26	0,02572	0,09919
365	409,979	133,67	150,0	10,19	0,02036	0,07152
425	408,489	133,13	150,0	10,24	0,01665	0,05238
485	407,356	133,87	150,0	10,35	0,01383	0,03783
605	406,010	133,87	150,0	10,17	0,01048	0,02055
725	405,423	133,47	150,0	10,19	0,00902	0,01301
845	405,039	133,45	149,0	10,20	0,00806	0,00808
965	404,785	133,25	149,0	10,25	0,00743	0,00482
1145	404,598	133,65	149,0	10,30	0,00696	0,00241
1325	404,423	133,64	149,0	10,20	0,00653	0,00017
1505	404,410	133,64	149,0	10,20	0,00650	0,00000

Fonte: Autoria própria.

Tabela A1.3 – Dados experimentais relativos a cinética de secagem da telha para o ensaio E3.

t (min)	m (g)	L (mm)	C (mm)	E (mm)	M (b. s.)	RM
0	487,222	141,25	157,00	11,17	0,19775	1,00000
5	484,608	141,23	157,00	10,59	0,19133	0,96654
10	482,010	141,23	157,00	10,63	0,18494	0,93328
15	479,306	140,91	156,00	10,40	0,17829	0,89867
20	476,710	140,81	155,00	10,45	0,17191	0,86544
25	474,200	140,41	155,00	10,34	0,16574	0,83331
30	471,580	139,97	155,00	10,28	0,15930	0,79977
35	469,163	139,44	154,00	10,25	0,15336	0,76883
40	466,875	139,12	154,00	10,24	0,14773	0,73954
50	462,134	138,01	153,00	10,18	0,13608	0,67885
60	457,316	137,97	153,00	10,17	0,12423	0,61718
70	453,008	137,56	153,00	10,19	0,11364	0,56203
80	448,832	137,52	152,00	10,10	0,10338	0,50858
90	445,079	137,16	152,00	10,24	0,09415	0,46054
115	440,083	136,74	152,00	10,21	0,08187	0,39658
130	436,024	136,90	152,00	10,13	0,07189	0,34462
145	432,826	136,84	152,00	10,28	0,06403	0,30369
175	427,940	136,76	152,00	10,13	0,05202	0,24114
205	424,450	136,79	152,00	10,13	0,04344	0,19647
235	421,733	136,71	152,00	10,19	0,03676	0,16169
295	417,761	136,82	151,00	10,15	0,02699	0,11084
355	415,130	136,75	151,00	10,09	0,02053	0,07716
415	413,344	136,80	151,00	10,25	0,01614	0,05430
535	411,212	136,64	151,00	10,09	0,01090	0,02701
655	410,270	136,61	151,00	10,08	0,00858	0,01495
775	409,745	136,59	151,00	10,14	0,00729	0,00823
925	409,460	136,62	151,00	10,15	0,00659	0,00458
1105	409,189	136,53	151,00	10,12	0,00592	0,00111
1440	409,102	136,40	151,00	10,10	0,00571	0,00000

Fonte: Autoria própria.

Tabela A1.4 – Dados experimentais relativos a cinética de secagem da telha para o ensaio E4.

t (min)	m (g)	L (mm)	C (mm)	E (mm)	M (b. s.)	RM
0	473,684	145,12	153,00	11,38	0,20568	1,00000
5	469,352	143,20	152,00	11,04	0,19465	0,94468
10	464,646	142,91	151,50	10,73	0,18268	0,88459
15	459,901	141,89	151,00	10,81	0,17060	0,82400
20	455,383	141,22	150,50	10,56	0,15910	0,76631
25	451,091	140,47	150,00	10,50	0,14817	0,71151
30	446,961	139,56	149,00	10,43	0,13766	0,65877
35	442,950	138,65	149,00	10,32	0,12745	0,60755
40	439,228	138,57	149,00	10,66	0,11798	0,56003
45	435,725	138,47	148,00	10,35	0,10906	0,51530
50	432,504	138,23	148,00	10,45	0,10086	0,47417
55	429,952	138,32	148,00	10,19	0,09437	0,44158
60	427,556	138,19	148,00	10,15	0,08827	0,41099
70	423,572	138,13	148,00	10,18	0,07813	0,36011
80	420,711	138,12	148,00	10,28	0,07085	0,32358
90	418,099	138,27	148,00	10,22	0,06420	0,29023
100	415,935	137,74	148,00	10,17	0,05869	0,26260
115	413,245	138,23	148,00	10,10	0,05184	0,22825
130	410,987	138,07	148,00	10,19	0,04610	0,19942
145	409,074	138,09	148,00	10,42	0,04123	0,17499
175	406,087	138,15	148,00	10,56	0,03362	0,13685
205	403,788	138,16	148,00	10,38	0,02777	0,10749
235	402,048	138,15	148,00	10,27	0,02334	0,08527
295	399,508	138,13	148,00	10,13	0,01688	0,05284
355	397,938	138,14	148,00	10,35	0,01288	0,03279
415	396,995	138,08	148,00	10,14	0,01048	0,02075
535	395,934	138,10	147,00	10,25	0,00778	0,00720
655	395,733	137,82	147,00	10,30	0,00727	0,00464
775	395,600	137,12	147,00	10,19	0,00693	0,00294
895	395,511	137,12	147,00	10,14	0,00670	0,00180
1440	395,370	137,10	147,00	10,12	0,00635	0,00000

Fonte: Autoria própria.

APÊNDICE 2

Dados para o software 2D Grid GenerationTabela A2.1 – Coordenadas usadas no *software 2D Grid Generation* para o ensaio E1.

Malha	z (m)	y (m)	x (m)
1	0,0000x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,8600x10 ⁻³
2	2,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,8086x10 ⁻³
3	5,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,7571x10 ⁻³
4	7,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,7057x10 ⁻³
5	10,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,6543x10 ⁻³
6	12,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,6029x10 ⁻³
7	15,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,5514x10 ⁻³
8	20,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,2180x10 ⁻³
9	25,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	68,0513x10 ⁻³
10	30,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	67,8846x10 ⁻³
11	35,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	67,7179x10 ⁻³
12	40,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	67,5512x10 ⁻³
13	45,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	67,3845x10 ⁻³
14	55,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	67,0178 x10 ⁻³
15	65,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	66,6511x10 ⁻³
16	76,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	66,2844x10 ⁻³
17	88,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	65,9177x10 ⁻³
18	99,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	65,5510x10 ⁻³
19	110,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	65,1843x10 ⁻³
20	115,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	65,0643x10 ⁻³
21	120,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,9443x10 ⁻³
22	125,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,8243x10 ⁻³
23	130,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,7043x10 ⁻³
24	135,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,5843x10 ⁻³
25	137,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,5129x10 ⁻³
26	140,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,4414x10 ⁻³
27	142,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,3700x10 ⁻³
28	145,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,2986x10 ⁻³
29	147,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,2272x10 ⁻³
30	150,5000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,1557x10 ⁻³
31	153,0000 x10 ⁻³	38,1000x10 ⁻³	64,0843x10 ⁻³

Fonte: Autoria própria.

Tabela A2.2 – Dados usados no *software 2D Grid Generation* para o ensaio E2.

Malha	Valor de z	Valor de y	Valor de x
1	0,0000x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7900x10 ⁻³
2	2,5000x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7816x10 ⁻³
3	5,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7721x10 ⁻³
4	7,5000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7627x10 ⁻³
5	10,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7513x10 ⁻³
6	12,5000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7429x10 ⁻³
7	15,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,7324x10 ⁻³
8	20,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,6841x10 ⁻³
9	25,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,6357x10 ⁻³
10	30,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,5874x10 ⁻³
11	35,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,5391x10 ⁻³
12	40,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,4907x10 ⁻³
13	45,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,4424x10 ⁻³
14	55,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,3924x10 ⁻³
15	65,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,3424x10 ⁻³
16	75,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,2924x10 ⁻³
17	85,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,2424x10 ⁻³
18	95,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,1924x10 ⁻³
19	100,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	66,0535x10 ⁻³
20	105,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,9146x10 ⁻³
21	110,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,7757x10 ⁻³
22	115,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,6389x10 ⁻³
23	120,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,4979x10 ⁻³
24	125,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,3590x10 ⁻³
25	130,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,2201x10 ⁻³
26	135,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	65,0812x10 ⁻³
27	140, 0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	64,9423x10 ⁻³
28	142,5000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	64,9201x10 ⁻³
29	145,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	64,8902x10 ⁻³
30	147,5000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	64,8742x10 ⁻³
31	150,0000 x10 ⁻³	40,2800x10 ⁻³	64, 8532x10 ⁻³

Fonte: Autoria própria.

Tabela A 2.3 – Dados usados no *software 2D Grid Generation* para o ensaio E3.

Malha	Valores de z	Valores de y	Valores de x
1	0,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,7600x10 ⁻³
2	2,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,6514x10 ⁻³
3	5,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,5419 x10 ⁻³
4	7,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,4343 x10 ⁻³
5	10,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,3257 x10 ⁻³
6	12,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,2171 x10 ⁻³
7	15,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,1086 x10 ⁻³
8	20,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	68,0086 x10 ⁻³
9	25,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,9086 x10 ⁻³
10	30,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,8086 x10 ⁻³
11	35,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,7086 x10 ⁻³
12	40,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,6086 x10 ⁻³
13	45,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,5086 x10 ⁻³
14	55,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,3169 x10 ⁻³
15	65,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	67,1253 x10 ⁻³
16	77,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	66,9336 x10 ⁻³
17	90,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	66,7419 x10 ⁻³
18	100,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	66,5503 x10 ⁻³
19	110,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	66,3586 x10 ⁻³
20	115,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	66,1886 x10 ⁻³
21	120,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	66,0186 x10 ⁻³
22	125,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	65,8486 x10 ⁻³
23	130,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	65,6786 x10 ⁻³
24	135,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	65,5086 x10 ⁻³
25	137,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	65,3800 x10 ⁻³
26	140,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	65,2514 x10 ⁻³
27	142,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	65,1228 x10 ⁻³
28	145,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	64,9942 x10 ⁻³
29	147,5000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	64,8656 x10 ⁻³
30	150,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	64,7370 x10 ⁻³
31	152,0000 x10 ⁻³	38,6000x10 ⁻³	64,6084 x10 ⁻³

Fonte: Autoria própria.

Tabela A2.4 – Dados usados no *software 2D Grid Generation* para o ensaio E4.

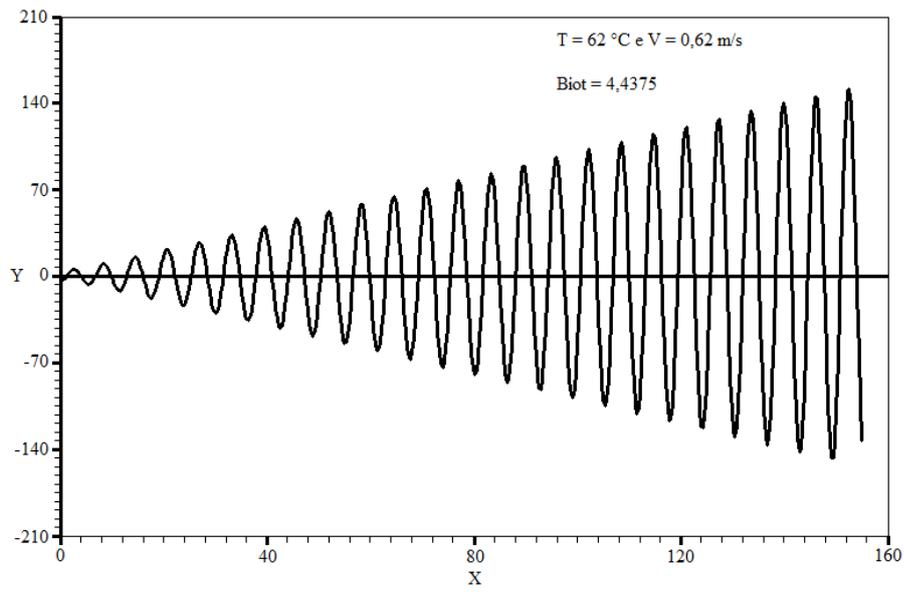
Malha	Valores de z	Valores de y	Valores de x
1	0,0000 x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,5000x10 ⁻³
2	2,5000 x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,4286 x10 ⁻³
3	5,0000 x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,3572 x10 ⁻³
4	7,5000 x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,2858 x10 ⁻³
5	10,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,2144 x10 ⁻³
6	12,5000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,1430 x10 ⁻³
7	15,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	69,0715 x10 ⁻³
8	20,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	68.8513 x10 ⁻³
9	25,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	68.6311 x10 ⁻³
10	30,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	68,4109 x10 ⁻³
11	35,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	68,1907 x10 ⁻³
12	40,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	67,9705 x10 ⁻³
13	45,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	67,7503 x10 ⁻³
14	55,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	67,4503 x10 ⁻³
15	65,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	67,1503 x10 ⁻³
16	75,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	66,8503 x10 ⁻³
17	85,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	66,5503 x10 ⁻³
18	95,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	66,2503 x10 ⁻³
19	100,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	66,0940 x10 ⁻³
20	105,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	65,9377 x10 ⁻³
21	110,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	65,7814 x10 ⁻³
22	115,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	65,4688 x10 ⁻³
23	120,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	65,3125 x10 ⁻³
24	125,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	65,1562 x10 ⁻³
25	130,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64,9999 x10 ⁻³
26	135,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64.8436 x10 ⁻³
27	137,5000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64,6749 x10 ⁻³
28	140,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64,5062 x10 ⁻³
29	142,5000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64,3375 x10 ⁻³
30	145,5000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64,1688 x10 ⁻³
31	148,0000x10 ⁻³	38,4500x10 ⁻³	64,0001 x10 ⁻³

Fonte: Autoria própria.

APÊNDICE 3

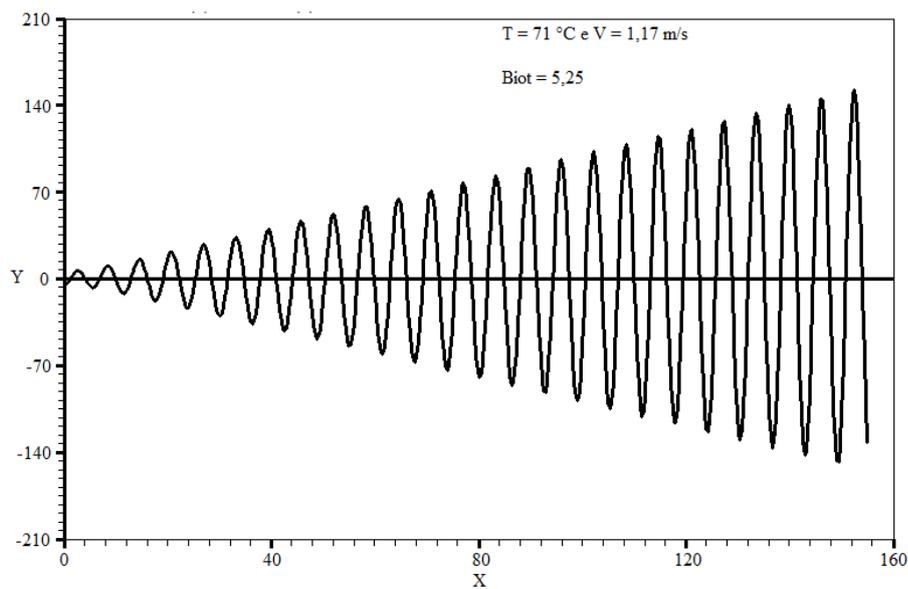
Gráficos das raízes características para cada Biot.

Figura A3.1 – Raízes da equação característica Biot = 4,4375.



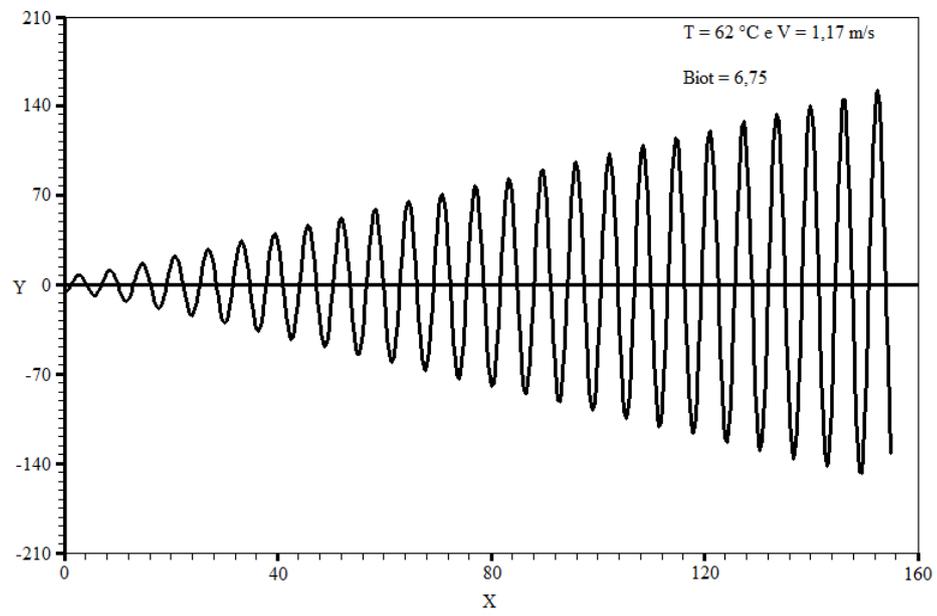
Fonte: Autoria própria.

Figura A3.2 – Raízes da equação característica – Biot = 5,25.



Fonte: Autoria própria.

Figura A3.3 – Raízes da equação característica – Biot = 6,75.



Fonte: Autoria própria.

APÊNDICE 4

Código A4.1 – Código analítico da equação de difusão para o paralelepípedo

```
PROGRAM Umidade
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
DOUBLE PRECISION M_r(85,85), RU(85,85), x(85,85), y(85,85) u_n(55), u_m(55),  
u_k(55), A_n(55), A_m(55), A_k(55), D, t, Vi, V_eq, C_Lx, C_Ly, C_Lz.
```

```
INTEGER icont(4), info, s, N, M, K, i, j, icona, message
```

```
!_____
```

```
!Valores da umidade inicial e de equilíbrio
```

```
V_i = 0.10338d+00
```

```
V_eq = 0.00571d+00
```

```
!_____
```

```
!Dimensões do paralelepípedo
```

```
C_Lx = 137.72d-3
```

```
C_Ly = 10.10d-3
```

```
C_Lz = 153.00d-3
```

```
!_____
```

```
!valor da difusividade
```

```
D = 1.3064d-7
```

```
!_____
```

```
! Leitura do arquivo raizesn
```

```
open(unit = 1, file = 'Raizesn.txt')
```

```
do n= 1, 50
```

```
read(1, *) u_n(n)
```

```
end do
```

```
close (unit = 1)
```

```
!_____
```

Apêndices

! Leitura do arquivo raizesm

```
open(unit = 2, file = 'Raizesm.txt')
```

```
Do m = 1, 50
```

```
read(2, *) u_m(m)
```

```
end do
```

```
close (unit = 2)
```

!

```
open(unit = 3, file = 'Raizesk.txt')
```

```
do k = 1, 50
```

```
read(3, *) u_k (k)
```

```
end do
```

```
close (unit = 3)
```

!

! Leitura da malha

!

```
open(unit = 4, file = 'Nodal.txt')
```

```
do j = 1, 20
```

```
do i = 1, 80
```

```
read (4,*) x(i,j), y(i,j)
```

```
!Open ( unit = 5, file = 'pontosnodais.txt')
```

```
!Write (5,*) x(i,j), y(i,j)
```

```
!Pause
```

```
end do
```

```
end do
```

```
close (unit = 4)
```

```
!close (unit = 5)
```

```
!pause
```

!

!Cálculo dos A_n

!

Apêndices

```
Open ( unit = 6, file = 'ValoresA_n.txt')
```

```
do n = 1, 50
```

```
A_n(n) = 4*sin(u_n(n))/(2*u_n(n)+sin(2*u_n(n)))
```

```
Write (6,*) A_n(n)
```

```
!Pause
```

```
end do
```

```
!Write (*,*) A_n(1)
```

```
!pause
```

```
close( unit = 6)
```

```
!
```

```
Open ( unit = 7, file = 'ValoresA_m.txt')
```

```
do m = 1, 50
```

```
A_m(m) = 4*sin(u_m(m))/(2*u_m(m)+sin(2*u_m(m)))
```

```
Write (7,*) A_m(m)
```

```
!Pause
```

```
end do
```

```
!Write (*,*) A_m(1)
```

```
!Pause
```

```
close (unit =7)
```

```
!
```

```
Open ( unit = 8, file = 'ValoresA_k.txt')
```

```
do k = 1, 50
```

```
A_k(k) = 4*sin(u_k(k))/(2*u_k(k)+sin(2*u_k(k)))
```

```
Write (8,*) A_k(k)
```

```
!Pause
```

```
end do
```

```
!Write (*,*) A_k(1)
```

```
!Pause
```

```
close (unit = 8)
```

```
!Pause
```

Apêndices

!

!Parte da equação de difusão

!

```
Open ( unit = 9, file = 'ValoresRU.txt')
```

```
do j = 1, 20
```

```
do i = 1, 80
```

```
RU (i, j) = 0
```

```
do n = 1, 50
```

```
do m = 1, 50
```

```
do k = 1, 50
```

```
RU(i, j) = RU(i, j) + A_n(n)*A_m(m)*A_k(k)*cos(u_n(n)*x(i,j)/(C_Lx/2))*  
cos(u_m(m)*y(i,j)/(C_Ly/2))*cos(u_k(k)*0.0/(C_Lz/2))*exp(-((u_n(n)**2)/  
((C_Lx/2)**2) + (u_m(m)**2)/(C_Ly/2)**2) + (u_k(k)**2)/(C_Lz/2)**2))*D*t)
```

```
end do
```

```
end do
```

```
end do
```

```
Write (9,*)RU(i,j)
```

```
end do
```

```
end do
```

```
close (unit = 9)
```

```
end program
```

Código A4.2 – Código das malhas 3D da telha

Program Malhas – Ensaio E3

```
integer Nqsi, Neta, Ngama
double precision x (31,31,31), Y(31,31,31), Z(31,31,31)
Nqsi = 31
Neta = 31
Ngama= 31
```

!

```
open (unit=50,file = 'Malha1.txt')
Do i = 1,Neta
Do j = 1,Nqsi
read (50,*) x(j,i,1), y(j,i,1)!, z(j,i,k)
z(j,i,1)=0.0d+03
!write (*,*) x(j,i,1), y(j,i,1), z(j,i,1)
end do
end do
close (50)
```

!

```
open (unit=60,file = 'MALHA2.txt')
Do i = 1,Neta
Do j = 1,Nqsi
read (60,*) x(j,i,2), y(j,i,2)!, z(j,i,k)
z(j,i,2)=2.5E-03
end do
end do
close (60)
```

!

```
open (unit=70,file = 'MALHA3.txt')
Do i = 1,Neta
Do j = 1,Nqsi
```

Apêndices

```
read (70,*) x(j,i,3), y(j,i,3)!, z(j,i,k)
z(j,i,3)= 5.0E-03
```

```
end do
```

```
end do
```

```
close (70)
```

```
!
```

```
open (unit=80,file = 'MALHA4.txt')
```

```
Do i = 1,Neta
```

```
Do j = 1,Nqsi
```

```
read (80,*) x(j,i,4), y(j,i,4)!, z(j,i,k)
```

```
z(j,i,4)=7.50E-03
```

```
end do
```

```
end do
```

```
close (80)
```

```
!
```

```
open (unit=100,file = 'MALHA5.txt')
```

```
Do i = 1,Neta
```

```
Do j = 1,Nqsi
```

```
read (100,*) x(j,i,5), y(j,i,5)!, z(j,i,k)
```

```
z(j,i,5)= 10.00E-03
```

```
end do
```

```
end do
```

```
close (100)
```

```
!
```

```
open (unit=110,file = 'MALHA6.txt')
```

```
Do i = 1,Neta
```

```
Do j = 1,Nqsi
```

```
read (110,*) x(j,i,6), y(j,i,6)!, z(j,i,k)
```

```
z(j,i,6)= 12.50E-03
```

Apêndices

```
end do
end do
close (110)
```

```
!_____
open (unit=120,file = 'MALHA7.txt')
```

```
Do i = 1,Neta
  Do j = 1,Nqsi
    read (120,*) x(j,i,7), y(j,i,7)!, z(j,i,k)
    z(j,i,7)= 15.00E-03
  end do
end do
close (120)
```

```
!_____
  open (unit=130,file = 'MALHA8.txt')
```

```
Do i = 1,Neta
  Do j = 1,Nqsi
    read (130,*) x(j,i,8), y(j,i,8)!, z(j,i,k)
    z(j,i,8)= 20.00E-03
  end do
end do
close (130)
```

```
!_____
open (unit=140,file = 'MALHA9.txt')
```

```
Do i = 1,Neta
  Do j = 1,Nqsi
    read (140,*) x(j,i,9), y(j,i,9)!, z(j,i,k)
    z(j,i,9)= 25.00E-03
  end do
end do
close (140)
```

Apêndices

```
open (unit=150,file = 'MALHA10.txt')
```

```
  Do i = 1,Neta
```

```
    Do j = 1,Nqsi
```

```
      read (150,*) x(j,i,10), y(j,i,10)!, z(j,i,k)
```

```
      z(j,i,10)= 30.00E-03
```

```
    end do
```

```
  end do
```

```
close (150)
```

```
!
```

```
open (unit=160,file = 'MALHA11.txt')
```

```
  Do i = 1,Neta
```

```
    Do j = 1,Nqsi
```

```
      read (160,*) x(j,i,11), y(j,i,11)!, z(j,i,k)
```

```
      z(j,i,11)= 35.00E-03
```

```
    end do
```

```
  end do
```

```
close (160)
```

```
!
```

```
open (unit=170,file = 'MALHA12.txt')
```

```
  Do i = 1,Neta
```

```
    Do j = 1,Nqsi
```

```
      read (170,*) x(j,i,12), y(j,i,12)!, z(j,i,k)
```

```
      z(j,i,12)= 40.00E-03
```

```
    end do
```

```
  end do
```

```
    close (170)
```

```
!
```

```
open (unit=180,file = 'MALHA13.txt')
```

```
  Do i = 1,Neta
```

Apêndices

```
        Do j = 1,Nqsi

read (180,*) x(j,i,13), y(j,i,13)!, z(j,i,k)
        z(j,i,13)= 45.00E-03
end do
end do
close (180)

!_____

open (unit=190,file = 'MALHA14.txt')
        Do i = 1,Neta
                Do j = 1,Nqsi
                        read (190,*) x(j,i,14), y(j,i,14)!, z(j,i,k)
                        z(j,i,14)= 55.00E-03
                end do
        end do
close (190)

!_____

        open (unit=200,file = 'MALHA15.txt')
        Do i = 1,Neta
                Do j = 1,Nqsi
                        read (200,*) x(j,i,15), y(j,i,15)!, z(j,i,k)
                        z(j,i,15)= 65.00E-03
                end do
        end do
close (200)

!_____

        open (unit=210,file = 'MALHA16.txt')
        Do i = 1,Neta
                Do j = 1,Nqsi
                        read (210,*) x(j,i,16), y(j,i,16)!, z(j,i,k)
```

Apêndices

```
        z(j,i,16)= 75.00E-03
    end do
end do
close (210)
!_____
open (unit=220,file = 'MALHA17.txt')
    Do i = 1,Neta
        Do j = 1,Nqsi
            read (220,*) x(j,i,17), y(j,i,17)!, z(j,i,k)
            z(j,i,17)= 85.00E-03
        end do
    end do
close (220)
!_____
open (unit=230,file = 'MALHA18.txt')
    Do i = 1,Neta
        Do j = 1,Nqsi
            read (230,*) x(j,i,18), y(j,i,18)!, z(j,i,k)
            z(j,i,18)= 95.00E-03
        end do
    end do
close (230)
!_____
open (unit=240,file = 'MALHA19.txt')
    Do i = 1,Neta
        Do j = 1,Nqsi
            read (240,*) x(j,i,19), y(j,i,19)!, z(j,i,k)
            z(j,i,19)= 100.00E-03
        end do
    end do
```

Apêndices

```
close (240)
!


---


open (unit=250,file = 'MALHA20.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (250,*) x(j,i,20), y(j,i,20)!, z(j,i,k)
      z(j,i,20)= 105.00E-03
    end do
  end do
close (250)
!


---


open (unit=260,file = 'MALHA21.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (260,*) x(j,i,21), y(j,i,21)!, z(j,i,k)
      z(j,i,21)= 110.00E-03
    end do
  end do
close (260)
!


---


open (unit=270,file = 'MALHA22.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (270,*) x(j,i,22), y(j,i,22)!, z(j,i,k)
      z(j,i,22)= 115.00E-03
    end do
  end do
close (270)
!


---


open (unit=280,file = 'MALHA23.txt')
  Do i = 1,Neta
```

Apêndices

```
      Do j = 1,Nqsi
        read (280,*) x(j,i,23), y(j,i,23)!, z(j,i,k)
        z(j,i,23)= 120.00E-03
      end do
    end do
  close (280)
!_____
open (unit=290,file = 'MALHA24.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (290,*) x(j,i,24), y(j,i,24)!, z(j,i,k)
      z(j,i,24)= 125.00E-03
    end do
  end do
  close (290)
!_____
open (unit=300,file = 'MALHA25.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (300,*) x(j,i,25), y(j,i,25)!, z(j,i,k)
      z(j,i,25)= 130.00E-03
    end do
  end do
  close (300)
!_____
open (unit=310,file = 'MALHA26.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
  read (310,*) x(j,i,26), y(j,i,26)!, z(j,i,k)
      z(j,i,26)= 135.00E-03
```

Apêndices

```
end do
end do
close (310)
open (unit=320,file = 'MALHA27.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (320,*) x(j,i,27), y(j,i,27)!, z(j,i,k)
      z(j,i,27)= 137.50E-03
    end do
  end do
close (320)
!_____
open (unit=330,file = 'MALHA28.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (330,*) x(j,i,28), y(j,i,28)!, z(j,i,k)
      z(j,i,28)= 140.00E-03
    end do
  end do
close (330)
!_____
open (unit=340,file = 'MALHA29.txt')
  Do i = 1,Neta
    Do j = 1,Nqsi
      read (340,*) x(j,i,29), y(j,i,29)!, z(j,i,k)
      z(j,i,29)= 142.50E-03
    end do
  end do
close (340)
!_____
open (unit=350,file = 'MALHA30.txt')
```

Apêndices

```
Do i = 1,Neta
```

```
  Do j = 1,Nqsi
```

```
    read (350,*) x(j,i,30), y(j,i,30)!, z(j,i,k)
```

```
z(j,i,30)= 145.50E-03
```

```
  end do
```

```
end do
```

```
close (350)
```

```
!
```

```
open (unit=360,file = 'MALHA31.txt')
```

```
  Do i = 1,Neta
```

```
    Do j = 1,Nqsi
```

```
      read (360,*) x(j,i,31), y(j,i,31)!, z(j,i,k)
```

```
z(j,i,31)= 148.00E-03
```

```
    end do
```

```
  end do
```

```
close (360)
```

```
!
```

```
open (unit=90,file = 'GRID.txt')
```

```
  Do k = 1,Ngama
```

```
    Do i = 1,Neta
```

```
      Do j = 1,Nqsi
```

```
        WRITE (90,*) x(j,i,k), y(j,i,k), z(j,i,k)
```

```
      end do
```

```
    end do
```

```
  end do
```

```
  CLOSE (90)
```

```
!
```

```
STOP
```

```
END PROGRAM
```