

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# O Problema de Riemann para um Modelo Matemático de um Escoamento Trifásico em Meio Poroso

por

Patrício Luiz de Andrade †

sob orientação do

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

†Este trabalho contou com apoio do IFSERTÃO-PE

# O Problema de Riemann para um Modelo Matemático de um Escoamento Trifásico em Meio Poroso

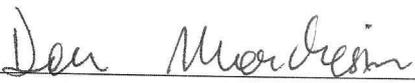
por

Patrício Luiz de Andrade

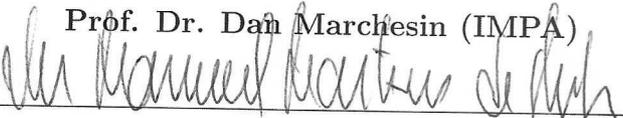
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

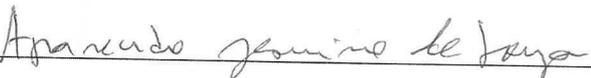
Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Dan Marchesin (IMPA)

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Vitor Manuel Martins de Matos (Un. do Porto, PT).

  
\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza (UFCG)

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Maio/2013

# Agradecimentos

A Deus por seu infinito amor.

A minha esposa Antonia, pelo seu amor, amizade e companheirismo em todos os momentos.

Aos meus pais, Maria de Fátima(Lia) e Luiz Domingos, e aos meus irmãos, Antonio Petrus e Eduardo, por todo apoio e incentivo.

Ao professor Aparecido Jesuíno de Souza por todo apoio, orientação e pela oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Laboratório de Dinâmica dos Fluidos do IMPA por ter disponibilizado os programas “PAKMAN” e “RPN” utilizados neste trabalho.

Aos professores Dan Marchesin e Vitor Manuel por terem aceitado participar da avaliação deste trabalho e pelas valiosas sugestões.

A todos colegas do mestrado, em especial: Luciano, Romildo, Fábio, Luis, Israel, Débora, Brito e Arthur.

Aos professores do DME/UFCEG, em especial: Amauri, Ângelo, Aparecido, Brandão, Claudianor, Horácio, Jaime, Marco Aurélio, Mendes e Paulo Pinto que muito contribuíram para a minha formação.

Aos funcionários do DME, Daví, Sóstenes, Dú, Renato, Suênia e Andrezza.

Aos colegas do IF SERTÃO-PE pelo apoio e em especial aos colegas da Coordenação de Licenciatura em Física: Aléssio, Cícero, George, Miguel e Pedro, que assumiram minhas aulas possibilitando o meu afastamento.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano por permitir meu afastamento e também pelo apoio financeiro dado através de seu Programa de Qualificação Institucional.

A todos amigos que sempre me incentivaram, em especial ao meu grande amigo Paulo, ao casal Francisco/Memeu e a família Lira.

# Dedicatória

A minha esposa Antonia, ao meu  
filho André Victor e a minha irmã  
Elisângela (*In Memoriam*).

# Resumo

Neste trabalho construímos uma solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento trifásico num meio poroso representando a propagação de misturas do tipo água-gás-óleo num projeto de recuperação de um reservatório petrolífero. Usando métodos analíticos e computacionais encontramos a geometria das curvas de onda sob a condição de entropia de viscosidade, com matriz de viscosidade sendo a identidade. Mostramos que para dados à direita representando misturas próximas de óleo puro, a solução do problema de Riemann consiste genericamente de uma sequência de dois grupos de ondas relacionados às duas famílias características, para quaisquer dados à esquerda representando uma mistura água-gás. No entanto, para dados à direita representando misturas ainda com óleo dominante, mas com uma composição maior de água e gás, surge a necessidade de acrescentar um grupo de ondas transicional na sequência que descreve a solução, para um pequeno conjunto de dados à esquerda.

Palavras chave: leis de conservação, problema de Riemann, escoamento em meio poroso.

# Abstract

In this work we construct a solution of the Riemann problem for a system of conservation laws arising from the mathematical modeling of a three-phase flow in a porous medium representing the propagation of water-gas-oil mixtures in a recovery project of a petroleum reservoir. Using analytical and computational methods we find the geometry of the wave curves under the viscous profile entropy condition, with the identity as the viscosity matrix. We show that for the right data representing almost pure oil compositions the solution of the Riemann problem generically consists of a sequence of two wave groups, related to the two characteristics families, for any left data considered representing a water-gas mixture. However, for right data representing mixtures with oil still dominant, but with a larger proportion of gas and water, a transitional wave group is required in the sequence for a small subset of left data.

Keywords: conservation laws, Riemann problem, porous media flow.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	6
<b>1 Propriedades Básicas do Modelo</b>	<b>9</b>
1.1 O Sistema de Leis de Conservação. . . . .	9
1.2 Curvas Integrais e Conjuntos de Inflexão. . . . .	11
1.3 Curvas de Hugoniot Explícitas. . . . .	12
1.4 Redução ao Fluxo Bifásico. . . . .	18
<b>2 Construção da Solução do Problema de Riemann</b>	<b>20</b>
2.1 Introdução. . . . .	20
2.2 Estado de Produção $P = O$ . . . . .	20
2.3 Estado de Produção $P$ numa Vizinhança $R_1$ de $O$ . . . . .	24
2.3.1 Estado $P$ sobre o Segmento de Reta $(O, \bar{U})$ . . . . .	24
2.3.2 Estado $P$ fora do Segmento de Reta $(O, \bar{U})$ . . . . .	35
2.3.3 Estado $P$ sobre a Fronteira $F_1$ da Vizinhança $R_1$ de $O$ . . . . .	45
2.4 Estado de Produção $P$ numa Região $R_2$ . . . . .	47
<b>A Resultados Básicos sobre Leis de Conservação</b>	<b>58</b>
A.1 Introdução. . . . .	58
A.2 Soluções Fundamentais. . . . .	59
A.2.1 Soluções Contínuas. . . . .	59
A.2.2 Soluções Descontínuas. . . . .	61
A.3 Choques de Lax/ Condição de Entropia de Lax. . . . .	62
A.4 Choques Viscosos/ Condição de Entropia de Viscosidade. . . . .	63
A.5 Compatibilidade Geométrica e Curvas de Onda. . . . .	65

	2
A.6 Conjuntos Relevantes. . . . .	67
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>69</b>

# Introdução

Neste trabalho consideramos o problema de Riemann associado a um sistema de leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento isotérmico num meio poroso, consistindo de três fases móveis e imiscíveis (água, gás e óleo). A dedução do modelo matemático adotado pode ser encontrada por exemplo em (GUEDES, 2009) e está baseado nas leis de balanço de massa das fases e na lei de Darcy. As variáveis de estado consideradas são as saturações das três fases, as quais variam no chamado triângulo das saturações. Usamos o modelo de Corey para as curvas de permeabilidades relativas, em que a permeabilidade de cada fase é uma função quadrática dependente apenas da saturação da própria fase. As viscosidades das fases são consideradas todas diferentes entre si, porém com valores fixos.

A evolução da resolução do problema de Riemann para o modelo de Corey tem seguido essencialmente os seguintes passos. Um primeiro passo foi dado em (ISAACSON et al, 1992) considerando as viscosidades das três fases constantes e iguais, acarretando uma simetria tripla no triângulo das saturações. Para este caso a solução do problema de Riemann foi determinada completamente para dados iniciais arbitrários no triângulo das saturações. Em seguida, um segundo passo foi dado em (SOUZA, 1992), considerando-se a viscosidade de uma das fases ligeiramente superior às outras duas e então houve a quebra de uma simetria, restando ainda uma dupla simetria no triângulo das saturações. Para este caso de quebra de simetria, a solução também foi determinada para dados iniciais arbitrários. Em (GUEDES, 2009) a simetria foi quebrada na direção oposta de (SOUZA, 1992), sendo que a solução do problema de Riemann foi determinada para dados à direita restritos ao lado do triângulo de saturações representando misturas do tipo água-óleo no poço produtor e para dados à esquerda no lado

do triângulo representando misturas do tipo água-gás. Em seguida (BARROS, 2010) considerou o mesmo modelo que (GUEDES, 2009), por sua vez, com dados à direita restritos à outro lado correspondente a misturas do tipo gás-óleo.

A quebra total de simetria foi tratada em (AZEVEDO et al, 2010) em que as três viscosidade foram consideradas arbitrárias para o caso particular do estado à direita representar a situação de um reservatório virgem, isto é, o dado à direita sendo o vértice  $O$  do triângulo de saturações exibido na Fig. 1.1 representando óleo puro. Os dados à esquerda foram considerados como em (GUEDES, 2009).

Nossa contribuição neste trabalho com relação aos anteriores é que, embora fixadas as três viscosidades com valores distintos, perturbamos o dado à direita para uma vizinhança do vértice  $O$ , correspondendo a misturas do tipo água-gás-óleo dominadas pelo óleo. O dado à esquerda é considerado como em (GUEDES, 2009), (BARROS, 2010) e (AZEVEDO et al, 2010) correspondendo a uma mistura do tipo água-gás.

Nossos resultados são no sentido de que para dados à direita suficientemente próximos do vértice  $O$ , a solução do problema de Riemann consiste genericamente de uma sequência de dois grupos de ondas relacionados às duas famílias características, para quaisquer dados à esquerda do tipo considerado. No entanto, ao distanciar os dados à direita do vértice  $O$  surge a necessidade de acrescentar um grupo de ondas transicional na sequência que descreve a solução, para um subconjunto de dados iniciais à esquerda. As soluções são obtidas através de uma combinação de métodos analíticos e computacionais. Para estados à direita restritos aos chamados segmentos de retas de bifurcação secundárias as curvas de Hugoniot são obtidas explicitamente, sendo possível fazer demonstrações analíticas inclusive com a ajuda de gráficos feitos com o MATLAB. Já para outros estados estas curvas são obtidas numericamente e conseqüentemente as evidências passam a ser numéricas. Utilizamos a condição de entropia de viscosidade, com matriz de viscosidade igual a identidade, sendo que a análise dos planos de fase também foi feita numericamente. Os resultados numéricos foram obtidos utilizando os programas “RPN”, “PAKMAN” (gentilmente cedidos pelo Laboratório de Dinâmica dos Fluidos do IMPA) e o MATLAB.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 1 apresentamos o sistema de leis de conservação considerado. Também no Capítulo 1 exibimos os perfis das curvas integrais das duas famílias caracterís-

ticas e os respectivos conjuntos de inflexão. Além disso, determinarmos as expressões explícitas das curvas de Hugoniot para estados ao longo dos chamados segmentos de retas de bifurcações secundárias no triângulo de saturações.

O Capítulo 2 é o principal desta dissertação. Nele, inicialmente recapitularemos a construção da solução do problema de Riemann para o caso em que o estado à direita, que denotamos por  $P$  (produção), corresponde a apenas óleo, isto é,  $P = O$  feita em (AZEVEDO et al, 2010). A partir daí, na Subseção 2.3.1, perturbamos o estado à direita  $P$  considerando-o primeiro no chamado segmento de reta de bifurcação secundária pelo vértice  $O$ . Este caso tem a vantagem de termos a curva de Hugoniot por  $P$  explícita e exploramos este fato fortemente nas justificativas de uma sequência de afirmações preparatórias, culminando com o principal resultado desta subseção, que fornece as soluções do problema de Riemann para os vários casos de dados à esquerda. Em seguida, na Subseção 2.3.2, perturbamos o estado à direita  $P$  para fora do segmento de bifurcação secundária e desenvolvemos procedimentos análogos da subseção anterior. A principal diferença aqui é que não temos mais a curva de Hugoniot por  $P$  explícita e as evidências foram numéricas, mas consistentes com o primeiro caso. Estes dois subcasos representam um caso genérico numa vizinhança mais próxima do vértice  $O$ , no qual as soluções consistem de dois grupos de onda correspondentes às duas famílias características do sistema. A fronteira desta primeira região, Subseção 2.3.3, é caracterizada pelo fato que a partir dela as soluções passam a possuir três grupos de onda, um deles transicional, para um conjunto de dados à esquerda, conforme mostra o principal resultado da Seção 2.4. Uma vez descritas as soluções para este segundo caso genérico, determinamos a fronteira da região para os estados à direita que a caracterizam encerrando o Capítulo 2.

Por último, no Apêndice A apresentamos alguns conceitos e resultados básicos que norteiam a construção da solução de um problema de Riemann em geral.

# Capítulo 1

## Propriedades Básicas do Modelo

### 1.1 O Sistema de Leis de Conservação.

A dedução do sistema de leis de conservação pode ser encontrada por exemplo em (GUEDES, 2009) e está baseada nas leis de balanço de massa das fases e na lei de Darcy. Tal sistema é dado por quaisquer duas das três equações:

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w(s_w, s_o, s_g)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial f_o(s_w, s_o, s_g)}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial f_g(s_w, s_o, s_g)}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

onde  $s_w(x, t)$ ,  $s_o(x, t)$  e  $s_g(x, t)$  são as saturações das fases (água, óleo, gás), e  $f_w$ ,  $f_o$  e  $f_g$  denotam as funções de fluxo fracionário, dadas por

$$f_w(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_w(s_w)/\mu_w}{D(s_w, s_o, s_g)}, \quad (1.4)$$

$$f_o(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_o(s_o)/\mu_o}{D(s_w, s_o, s_g)}, \quad (1.5)$$

$$f_g(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_g(s_g)/\mu_g}{D(s_w, s_o, s_g)}, \quad (1.6)$$

em que

$$D(s_w, s_o, s_g) = \frac{k_w(s_w)}{\mu_w} + \frac{k_o(s_o)}{\mu_o} + \frac{k_g(s_g)}{\mu_g}. \quad (1.7)$$

Adotaremos o modelo de Corey em que as permeabilidades relativas de cada fase são funções da saturação da própria fase, em particular vamos considerar funções quadráticas como a seguir:

$$k_w(s_w) = s_w^2, \quad k_o(s_o) = s_o^2, \quad k_g(s_g) = s_g^2. \quad (1.8)$$

Fixaremos em todo o trabalho as viscosidades como:

$$\mu_w = 1.0, \quad \mu_g = 0.5, \quad \mu_o = 2.0. \quad (1.9)$$

O problema de Riemann para o sistema (1.1)-(1.3) em que estamos interessados pode ser escrito resumidamente como

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(U(x,t))}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.10)$$

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_- \equiv I, & \text{se } x < 0, \\ U_+ \equiv P, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

onde  $U = \begin{pmatrix} s_w \\ s_o \\ s_g \end{pmatrix}$  e  $F(U) = \begin{pmatrix} f_w \\ f_o \\ f_g \end{pmatrix}$ .

Tendo em vista que  $s_w$ ,  $s_o$  e  $s_g$  são as saturações, representaremos o espaço de estados  $\Omega = \{(s_w, s_o, s_g) \text{ t.q. } 0 \leq s_w, s_o, s_g \leq 1, s_w + s_o + s_g = 1\}$  como um triângulo equilátero em coordenadas baricêntricas, veja Fig. 1.1. Os segmentos de reta pelos vértices do triângulo e pelo ponto interior  $\bar{U}$  representados na Fig. 1.1 desempenham papel importante na construção da solução do problema de Riemann. Mais adiante faremos as suas caracterizações.

### Notações:

- (a) Usaremos a notação  $\triangle ABC$  para indicar um triângulo genérico de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- (b) Usaremos a mesma notação de intervalos na reta para denotar um segmento conexo de uma curva. Por exemplo, a notação  $[A, B)$  significa um segmento de curva entre os pontos  $A$  e  $B$  em que  $A$  pertence ao segmento e  $B$  não pertence.

- (c) Fixado um estado  $U_0$ , usaremos as notações  $\mathcal{H}_L(U_0)$  e  $\mathcal{H}_N(U_0)$ , para indicar um ramo local e um ramo não local da curva de Hugoniot por  $U_0$ , respectivamente. Por local queremos dizer um ramo que contenha o estado  $U_0$ . Por não local um ramo que não contenha  $U_0$ .
- (d) Denotaremos a velocidade  $\sigma_0$  de uma descontinuidade entre  $U_-$  e  $U_+$  por  $\sigma(U_-; U_+)$ .

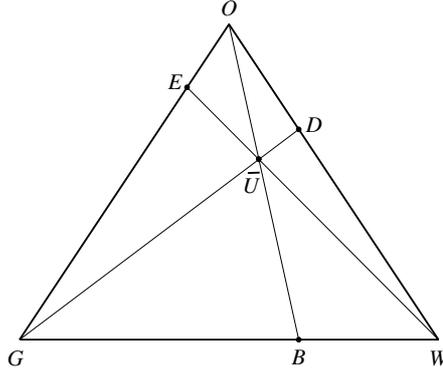


Figura 1.1: Triângulo de saturações em coordenadas baricêntricas e segmentos de reta  $[G, D]$ ,  $[O, B]$  e  $[E, W]$  cuja interseção é o ponto umbílico  $\bar{U}$ .

## 1.2 Curvas Integrais e Conjuntos de Inflexão.

Levando em conta que  $s_w + s_o + s_g = 1$  e que  $f_w + f_o + f_g = 1$ , uma das variáveis  $s_w$ ,  $s_o$  ou  $s_g$  e uma das equações (1.1)-(1.3) podem ser desprezadas. Considerando  $s_g = 1 - s_w - s_o$  e  $f_g = 1 - f_w - f_o$  a matriz Jacobiana do sistema correspondente restante é dada por

$$A(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_w}{\partial s_w} & \frac{\partial f_w}{\partial s_o} \\ \frac{\partial f_o}{\partial s_w} & \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

As expressões dos autovalores, ou velocidades características, da matriz Jacobiana  $A(U)$  são dadas por

$$\lambda_1(U) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_o}{\partial s_w} \frac{\partial f_w}{\partial s_o}}, \quad (1.13)$$

$$\lambda_2(U) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_w}{\partial s_w} + \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\partial f_w}{\partial s_w} - \frac{\partial f_o}{\partial s_o} \right)^2 + 4 \frac{\partial f_o}{\partial s_w} \frac{\partial f_w}{\partial s_o}}. \quad (1.14)$$

Claramente temos  $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U)$ ,  $\forall U \in \Omega$ .

Fazendo uma substituição direta em (1.13)-(1.14) e usando as expressões de  $f_w$  e  $f_o$  dadas em (1.4) e (1.5), obtemos que a velocidade característica  $\lambda_1$  se anula ao longo dos lados  $[G, W]$ ,  $[W, O]$  e  $[G, O]$  do triângulo de saturações e que a velocidade característica  $\lambda_2$  se anula nos vértices  $G$ ,  $W$  e  $O$ . Além disto, temos também que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos no interior do triângulo de saturações com  $\lambda_2$  positivo também ao longo dos lados (exceto nos vértices). As curvas integrais dos dois campos característicos estão estudadas em detalhes em (AZEVEDO et al, 2010) e tem o perfil geométrico exibidos nas Figs. 1.2(a) e 1.3(a) os quais foram obtidos numericamente. As “setas” nestas duas figuras indicam o sentido de crescimento dos autovalores ao longo das curvas integrais. Nas Figs. 1.2(b) e 1.3(b) exibimos os gráficos de  $\lambda_1(U)$  e de  $\lambda_2(U)$ , respectivamente, ao longo de curvas integrais específicas para ilustrar pontos de inflexão e a não negatividade dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

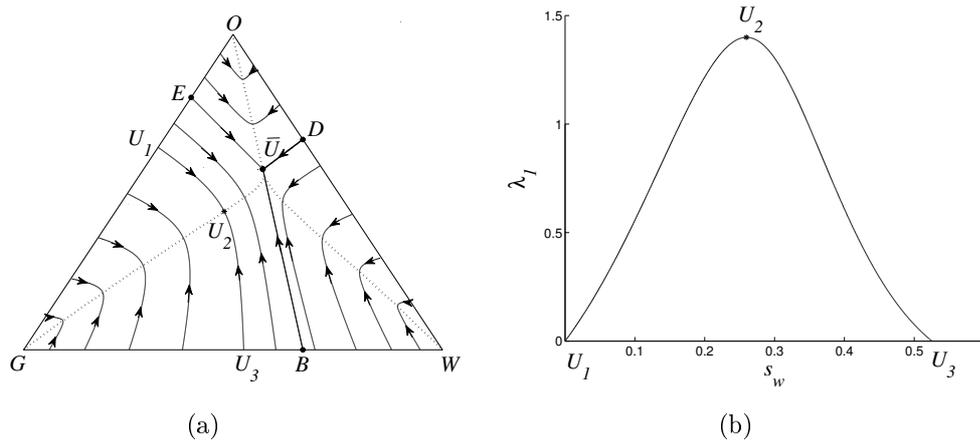


Figura 1.2: (a) Curvas integrais (linhas contínuas) e conjunto de inflexão (linha pontilhada) associados à família característica-1. (b) Gráfico da velocidade característica  $\lambda_1$  sobre a curva integral-1 pelos estados  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ .

### 1.3 Curvas de Hugoniot Explícitas.

Considere os segmentos de reta  $[O, B]$ ,  $[G, D]$  e  $[E, W]$  mostrados na Fig. 1.1. No caso estes segmentos são partes das retas cujas equações estão identificadas a seguir:

$$[O, B] = \{(s_w, s_o, s_g) \text{ t.q. } s_w = \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g, \quad s_o = 1 - s_w - s_g\}; \quad (1.15)$$

$$[E, W] = \{(s_w, s_o, s_g) \text{ t.q. } s_g = \frac{\mu_g}{\mu_o} s_o, \quad s_w = 1 - s_o - s_g\}; \quad (1.16)$$

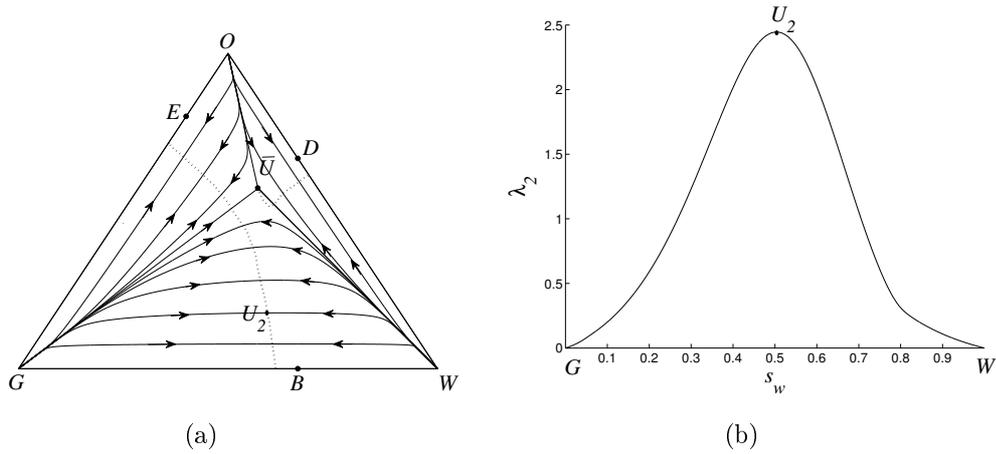


Figura 1.3: (a) Curvas integrais (linhas contínuas) e conjunto de inflexão (linha pontilhada) associados à família característica-2. (b) Gráfico da velocidade característica  $\lambda_2$  sobre a curva integral-2 pelos estados  $G$ ,  $U_2$  e  $W$ .

$$[G, D] = \{(s_w, s_o, s_g) \text{ t.q. } s_o = \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w, \quad s_g = 1 - s_w - s_o\}. \quad (1.17)$$

No caso as extremidades destes segmentos de reta tem coordenadas:

$$W = (1, 0, 0), \quad O = (0, 1, 0), \quad G = (0, 0, 1), \quad B = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_g}, 0, \frac{\mu_g}{\mu_w + \mu_g} \right),$$

$$D = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}, \frac{\mu_o}{\mu_w + \mu_o}, 0 \right) \text{ e } E = \left( 0, \frac{\mu_o}{\mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{\mu_o + \mu_g} \right).$$

**Obs. 1.1** Para os valores das viscosidades considerados em (1.9) temos

$$B = \left( \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right), \quad D = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) \text{ e } E = \left( 0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Como estamos interessados em considerar  $P$  próximo do vértice  $O$  do triângulo de saturações, vamos considerar os cálculos explícitos para curvas de Hugoniot por  $U_+$  ao longo do segmento  $[O, B]$ . Para os segmentos  $[G, D]$  e  $[E, W]$  os cálculos são análogos.

**Proposição 1.1** Seja  $U_+ = (s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  um estado sobre o segmento de reta  $(O, B)$  do triângulo de saturações. Então a curva de Hugoniot por  $U_+$ ,  $\mathcal{H}(U_+)$ , consiste do segmento  $[O, B]$  e de dois ramos de hipérbole.

**Prova:** Da condição de Rankine-Hugoniot para o sistema em questão, segue que

$$\sigma(s_w - s_w^+) = f_w - f_w^+, \quad (1.18)$$

$$\sigma(s_o - s_o^+) = f_o - f_o^+, \quad (1.19)$$

$$\sigma(s_g - s_g^+) = f_g - f_g^+. \quad (1.20)$$

Aqui é conveniente escolher as variáveis  $(s_w, s_g)$  e as equações (1.18) e (1.20). Isolando  $\sigma$  em (1.20) e substituindo-o em (1.18) obtemos

$$s_g(f_w - f_w^+) - s_g^+(f_w - f_w^+) = s_w(f_g - f_g^+) - s_w^+(f_g - f_g^+). \quad (1.21)$$

Como  $U_+ \in (O, B)$  temos que

$$s_g^+ = \frac{\mu_g}{\mu_w} s_w^+. \quad (1.22)$$

Assim, substituindo  $s_g^+$  e as expressões das funções de fluxo  $f_w$ ,  $f_o$  e  $f_g$  em (1.21), obtemos após algumas manipulações algébricas

$$\left( s_w - \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g \right) \left[ D(s_w^+)^2 + D^+ \left( \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g s_w - s_w^+ \left( s_w + \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g \right) \right) \right] = 0, \quad (1.23)$$

onde  $D^+ \equiv D(s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  e  $D = D(s_w, s_o, s_g)$ .

Note que o primeiro fator do produto dado pela Eq. (1.23) igualado a zero é justamente a expressão que define o segmento de reta  $[O, B]$  em (1.15), o que prova a primeira parte da Proposição.

Eliminando o primeiro fator multiplicativo em (1.23) e substituindo a expressão da mobilidade  $D$ , dada em (1.7), na Eq. (1.23) e usando que  $s_o = 1 - s_w - s_g$ , chegamos à seguinte equação quadrática, nas variáveis  $s_w$  e  $s_g$ ,

$$as_w^2 + bs_w s_g + cs_g^2 - ds_w - es_g + f = 0, \quad (1.24)$$

onde seus coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a &= \frac{(s_w^+)^2}{\mu_w} + \frac{(s_w^+)^2}{\mu_o}, \\ b &= \frac{\mu_w}{\mu_g} D^+ + \frac{2}{\mu_o} (s_w^+)^2, \\ c &= \frac{(s_w^+)^2}{\mu_g} + \frac{(s_w^+)^2}{\mu_o}, \\ d &= \frac{2}{\mu_o} (s_w^+)^2 + D^+ s_w^+, \\ e &= \frac{2}{\mu_o} (s_w^+)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_g} D^+ s_w^+, \\ f &= \frac{(s_w^+)^2}{\mu_o}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

A Eq. (1.24) está na forma mais geral de uma curva cônica no plano. Lembramos que, quando  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , podemos classificar esta cônica como uma elipse, parábola ou hipérbole, ou outras curvas degeneradas destas, dependendo do discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad (1.26)$$

ser negativo, nulo ou positivo. No caso dos coeficientes obtidos em (1.25), após substituí-los em (1.26), utilizando os valores de viscosidades dados em (1.9), verificamos que o discriminante é positivo. Logo a equação (1.24) representa uma hipérbole, o que conclui a prova da Proposição 1.1. ■

**Obs. 1.2** *Da continuidade dos coeficientes com relação aos parâmetros, a Proposição 1.1 continua válida para  $\mu_o$ ,  $\mu_w$  e  $\mu_g$  numa vizinhança dos valores considerados em (1.9).*

A Eq. (1.24) pode ser resolvida explicitamente em termos da saturação da água  $s_w$  ou da saturação do gás  $s_g$ , dependendo das hipóteses do Teorema da Função Implícita serem satisfeitas. Se considerarmos a saturação do gás como função da saturação da água, isto é,  $s_g = s_g(s_w)$ , a Eq. (1.24) se reduz à seguinte equação do segundo grau

$$cs_g^2 + (bs_w - e)s_g + (as_w^2 - ds_w + f) = 0. \quad (1.27)$$

Dessa maneira, resolvendo a Eq. (1.27), temos que

$$s_g = \frac{-(bs_w - e) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2c}, \quad (1.28)$$

desde que

$$\Delta_1(s_w) = (bs_w - e)^2 - 4c(as_w^2 - ds_w + f) \quad (1.29)$$

seja não negativo. Por outro lado, se considerarmos a saturação da água como função da saturação do gás, isto é,  $s_w = s_w(s_g)$ , a Eq. (1.24) pode ser reescrita na forma

$$as_w^2 + (bs_g - d)s_w + (cs_g^2 - es_g + f) = 0. \quad (1.30)$$

Dessa maneira, resolvendo a Eq. (1.30), temos que

$$s_w = \frac{-(bs_g - d) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2a}, \quad (1.31)$$

desde que

$$\Delta_2(s_g) = (bs_g - d)^2 - 4a(cs_g^2 - es_g + f) \quad (1.32)$$

seja não negativo.

Com isto, obtivemos as expressões explícitas das curvas de Hugoniot por estados bases  $U_+ \in (O, B)$ , as quais serão utilizadas posteriormente para obter mais detalhes das curvas de Hugoniot por estados base ao longo do segmento  $(O, B)$ . Uma curva de Hugoniot por um estado genérico  $U_+ \in (O, \bar{U})$  da Fig. 1.1 pode ser vista na Fig. 2.4.

**Obs. 1.3** *Note que se  $U_+ = O$ , isto é,  $s_w^+ = s_g^+ = 0$  e  $s_o^+ = 1$ , então usando as expressões em (1.25) a Eq. (1.24) se reduz à  $s_w s_g = 0$  e reobtemos os lados  $[G, O]$  e  $[W, O]$ , como obtido em (AZEVEDO et al, 2010).*

### Curva de Hugoniot pelo ponto $U_+ = B$

Vamos obter explicitamente a expressão que define a curva de Hugoniot pelo ponto  $B$  do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações.

Para determinar a curva de Hugoniot por  $B$  basta aplicar as coordenadas de  $B$  como sendo os estados à direita  $(s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  no segundo fator do produto em (1.23). Após algumas manipulações obtemos que a curva de Hugoniot por  $B$  tem equação:

$$(1 - s_w - s_g) \left( s_w - \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g \right) \left( (\mu_g + \mu_o) s_g + \frac{\mu_g (\mu_w + \mu_o)}{\mu_w} s_w - \mu_g \right) = 0. \quad (1.33)$$

Assim chegamos a conclusão que a curva de Hugoniot por  $B$  degenera nos três segmentos de reta (ver Fig. 1.4(a)):

$$[G, W] \text{ definido por: } 1 - s_w - s_g = 0, \quad (1.34)$$

$$[O, B] \text{ definido por: } s_w - \frac{\mu_w}{\mu_g} s_g = 0, \quad (1.35)$$

$$[E, D] \text{ definido por: } (\mu_g + \mu_o) s_g + \frac{\mu_g (\mu_w + \mu_o)}{\mu_w} s_w - \mu_g = 0. \quad (1.36)$$

Fazendo a interseção dos segmentos de retas  $[O, B]$  e  $[E, D]$ , obtemos as coordenadas do ponto  $T^B$  a seguir:

$$T^B = \left( \frac{\mu_w}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g}, \frac{2\mu_o}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g}, \frac{\mu_g}{\mu_w + 2\mu_o + \mu_g} \right). \quad (1.37)$$

**Obs. 1.4** *Para os gráficos das velocidades vamos usar a seguinte convenção: linha pontilhada para a velocidade característica  $\lambda_1$ , linha contínua para a velocidade característica  $\lambda_2$  e linha tracejada para a velocidade de choque  $\sigma$ . Além disto, cometeremos o abuso de indicar pontos no gráfico da velocidade de choque e não no domínio da função em questão. Quando conveniente, também indicaremos o ponto umbílico  $\bar{U}$  ao longo dos gráficos das velocidades características.*

Observando na Fig. 1.4(b) os gráficos de  $\sigma(M; B)$  e  $\lambda_1(M)$ , com  $M$  variando no segmento  $[O, B]$  da Fig. 1.4(a), vemos que  $\sigma(T^B; B) = \lambda_1(T^B)$ . E também pode-se verificar que  $T^B$  é um ponto de 1-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(B)$ .

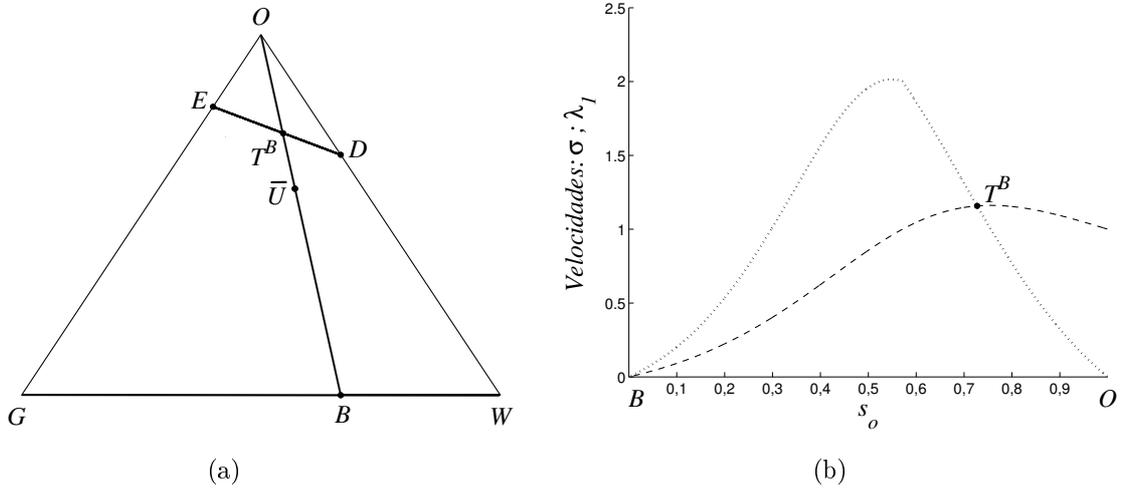


Figura 1.4: (a) Curva de Hugoniot por  $B$ . (b) Gráficos da velocidade  $\lambda_1(M)$  e da velocidade de choque  $\sigma(M; B)$  com  $M$  variando sobre o segmento  $[O, B]$  em (a) ilustrando a existência do ponto  $T^B$  de 1-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(B)$ .

De maneira análoga à Proposição 1.1 temos as duas outras proposições a seguir.

**Proposição 1.2** *Seja  $U_+ = (s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  um estado sobre o segmento  $(E, W)$  do triângulo de saturações. Então a curva de Hugoniot por  $U_+$  consiste do segmento  $[E, W]$  e de dois ramos de hipérbole.*

A demonstração desta Proposição pode ser encontrada em (BARROS, 2010). A expressão da curva de Hugoniot por um estado  $U_+$  sobre o segmento  $(E, W)$  pode ser escrita como

$$\left( s_o - \frac{\mu_o}{\mu_g} s_g \right) \left[ D(s_o^+)^2 + D^+ \left( \frac{\mu_o}{\mu_g} s_g s_o - s_o^+ \left( s_o + \frac{\mu_o}{\mu_g} s_g \right) \right) \right] = 0. \quad (1.38)$$

**Proposição 1.3** *Seja  $U_+ = (s_w^+, s_o^+, s_g^+)$  um estado sobre o segmento  $(G, D)$  do triângulo de saturações. Então a curva de Hugoniot por  $U_+$  consiste do segmento  $[G, D]$  e de dois ramos de hipérbole.*

A expressão da curva de Hugoniot por um estado  $U_+$  sobre o segmento  $(G, D)$  pode ser escrita como

$$\left( s_o - \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w \right) \left[ D(s_o^+)^2 + D^+ \left( \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w s_o - s_o^+ \left( s_o + \frac{\mu_o}{\mu_w} s_w \right) \right) \right] = 0. \quad (1.39)$$

**Obs. 1.5** *As expressões explícitas para  $\mathcal{H}(U_+)$  com  $U_+$  nos lados  $[W, O]$  e  $[G, O]$  do triângulo de saturações podem ser encontradas em (GUEDES, 2009) e em (BARROS, 2010).*

## 1.4 Redução ao Fluxo Bifásico.

Ao longo dos segmentos de reta  $[O, B]$ ,  $[W, E]$  e  $[G, D]$  o fluxo se reduz a um fluxo bifásico, sendo que nesta seção são apresentados os cálculos, também feitos em (AZEVEDO et al, 2010), apenas para  $[O, B]$ , tendo em vista que os outros casos são análogos.

Considere as saturações  $(s_w, s_o, s_g)$  restritas ao ramo  $[O, B]$  da curva de Hugoniot por um estado  $P \in [O, B]$ . Veja a Fig. 2.4, por exemplo.

Defina a saturação mista água/gás, denotada por  $s_{wg}$ , como sendo

$$s_{wg} := s_w + s_g = 1 - s_o, \quad (1.40)$$

e denote a soma das viscosidades da água e do gás por,

$$\mu_{wg} := \mu_w + \mu_g. \quad (1.41)$$

Usando as equações (1.40) e (1.41) podemos reparametrizar as saturações  $s_w$  e  $s_g$  por  $s_w = \frac{\mu_w}{\mu_{wg}} s_{wg}$  e  $s_g = \frac{\mu_g}{\mu_{wg}} s_{wg}$ . Substituindo estas expressões de  $s_w$  e  $s_g$  nas equações (1.1) e (1.3), obtemos

$$\frac{\mu_w}{\mu_{wg}} \frac{\partial s_{wg}}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0, \quad (1.42)$$

$$\frac{\mu_g}{\mu_{wg}} \frac{\partial s_{wg}}{\partial t} + \frac{\partial f_g}{\partial x} = 0, \quad (1.43)$$

onde as funções de fluxo fracionário reparametrizadas são dadas por

$$f_w = \frac{\mu_w}{\mu_{wg}} \left( \frac{s_{wg}^2}{s_{wg}^2 + \frac{\mu_{wg}}{\mu_o} (1 - s_{wg})^2} \right), \quad (1.44)$$

$$f_g = \frac{\mu_g}{\mu_{wg}} \left( \frac{s_{wg}^2}{s_{wg}^2 + \frac{\mu_{wg}}{\mu_o} (1 - s_{wg})^2} \right) = \frac{\mu_g}{\mu_w} f_w. \quad (1.45)$$

Assim as equações (1.42) e (1.43) são múltiplas uma da outra, e definindo  $\nu = \frac{\mu_{wg}}{\mu_o}$ , temos que o sistema (1.1)-(1.3) ao longo de  $[O, B]$  se reduz à equação de Buckley-Leverett dependendo do parâmetro  $\nu$ ,

$$\frac{\partial s_{wg}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{s_{wg}^2}{s_{wg}^2 + \nu(1 - s_{wg})^2} \right) = 0. \quad (1.46)$$

A Eq. (1.46) pode então ser escrita na forma

$$s_t + f(s; \nu)_x = 0, \quad (1.47)$$

com

$$f(s; \nu) = \frac{s^2}{s^2 + \nu(1-s)^2} \text{ e } s \equiv s_{wg} = s_w + s_g. \quad (1.48)$$

Como  $s_{wg} + s_o = 1$ , a partir da Eq. (1.46) obtemos

$$\frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{s_o^2}{s_o^2 + \frac{1}{\nu}(1-s_o)^2} \right) = 0. \quad (1.49)$$

Isto mostra que se tomarmos na condição inicial os estados constantes  $U_-$  e  $U_+$  ao longo do segmento de reta  $[O, B]$ , então a solução do problema de Riemann para o escoamento trifásico se reduz à resolução da equação de Buckley-Leverett para o escoamento bifásico nas variáveis  $s_{wg}$  e  $s_o$ .

De maneira análoga ao que fizemos até aqui, se considerarmos na condição inicial os estados constantes  $U_-$  e  $U_+$  ao longo dos segmentos de reta  $[G, D]$  ou  $[E, W]$ , então a solução do problema de Riemann para o escoamento trifásico se reduz à resolução das equações de Buckley-Leverett (1.50) ou (1.51) para os escoamentos bifásicos nas variáveis  $s_{wo}$  e  $s_g$  ou  $s_{og}$  e  $s_w$ , respectivamente.

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{s_g^2}{s_g^2 + \frac{1}{\nu}(1-s_g)^2} \right) = 0, \quad \text{com } \nu = \frac{\mu_w + \mu_o}{\mu_g}, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{s_w^2}{s_w^2 + \frac{1}{\nu}(1-s_w)^2} \right) = 0, \quad \text{com } \nu = \frac{\mu_o + \mu_g}{\mu_w}. \quad (1.51)$$

## Capítulo 2

# Construção da Solução do Problema de Riemann

### 2.1 Introdução.

No triângulo de saturações representado na Fig. 1.1, vamos considerar dados de produção correspondendo a um estado  $P$  arbitrário, próximo do vértice  $O$  do triângulo de saturações, no quadrilátero  $OE\bar{U}D$  e os dados de injeção correspondendo a um estado  $I$  no lado  $[G, W]$ .

As justificativas de algumas afirmações e resultados serão feitas usando argumentos geométricos, através de gráficos de funções, para os casos em que temos expressões explícitas como obtidas na Proposição 1.1, já que na maioria das vezes, os cálculos seriam demasiadamente longos. Outras afirmações e resultados não serão justificados, mas poderão (e foram) verificados numericamente através dos programas “PAKMAN” e “RPN”, bem como através do MATLAB, por inúmeros experimentos.

### 2.2 Estado de Produção $P = O$ .

A construção da solução do problema de Riemann para  $P = O$  foi inicialmente descrita em (AZEVEDO et al, 2010), mas por conveniência repetimo-la resumidamente aqui para podermos comparar as soluções que vamos obter para estados  $P$  próximos de  $O$ .

A curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(O)$  está exibida na Fig. 2.1(a). Ela é composta por três segmentos de retas no triângulo de saturações: o lado  $[G, O]$ , o segmento  $[O, B]$  e o lado  $[W, O]$ . Na Fig. 2.1(a) os estados  $G_*$ ,  $B_*$  e  $W_*$ , são tais que  $\sigma(G_*; O) = \lambda_2(G_*)$ ,  $\sigma(B_*; O) = \lambda_1(B_*)$  e  $\sigma(W_*; O) = \lambda_2(W_*)$ , ou seja,  $G_*$ ,  $W_*$  e  $B_*$  são extensões do vértice  $O$ , características neles próprios, sendo  $G_*$  e  $W_*$  extensões-2 e  $B_*$  extensão-1. Temos também que o estado  $B_*$  é extensão-1 dos estados  $B_*^G$  e  $B_*^W$  característica em  $B_*$ , conforme (AZEVEDO et al, 2010). Ainda na Fig. 2.1(a), o estado  $\bar{U}$  corresponde ao ponto umbílico. Os estados de extensão  $G_*$ ,  $B_*$  e  $W_*$  são justificados usando os gráficos das velocidades, como ilustram as Figs. 2.1(b) e 2.2. Note que  $G_*$ ,  $B_*$  e  $W_*$  são pontos que satisfazem o Teorema de Bethe-Wendroff (A.19) correspondendo a valores máximos da velocidade  $\sigma$ .

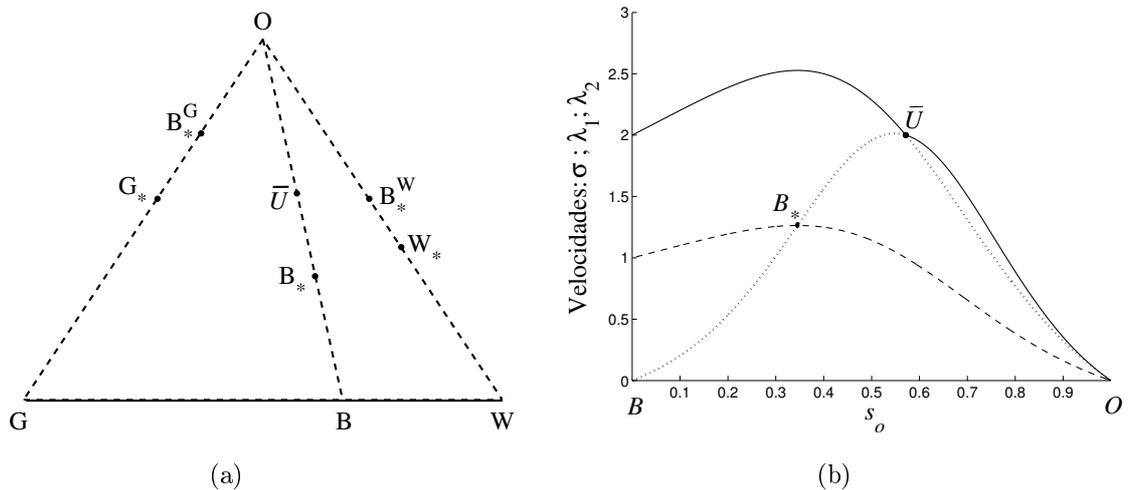


Figura 2.1: (a)  $\mathcal{H}(O)$  (linhas tracejadas). (b) Gráficos de  $\lambda_1(M)$ ,  $\lambda_2(M)$  e  $\sigma(M; P)$  com  $M$  ao longo do segmento  $[O, B]$  de  $\mathcal{H}(O)$ , justificando a existência do estado  $B_*$ .

Os estados de injeção que separam segmentos no lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações com construções distintas para a sequência de ondas que compõe as respectivas soluções dos problemas de Riemann estão ilustrados na Fig. 2.3. São eles:  $I_1$ ,  $B$  e  $I_2$ , sendo que  $I_1$  e  $I_2$  são obtidos pelas interseções das curvas de onda-1 reversas por  $G_*$  e  $W_*$  com o lado  $[G, W]$ , respectivamente.

As possibilidades de soluções do problema de Riemann para este caso  $P = O$  estão descritas a seguir, podendo ser acompanhadas com o auxílio da Fig. 2.3.

- (i) Se  $I = G$ , ou seja, se o estado inicial à esquerda corresponder a apenas gás,

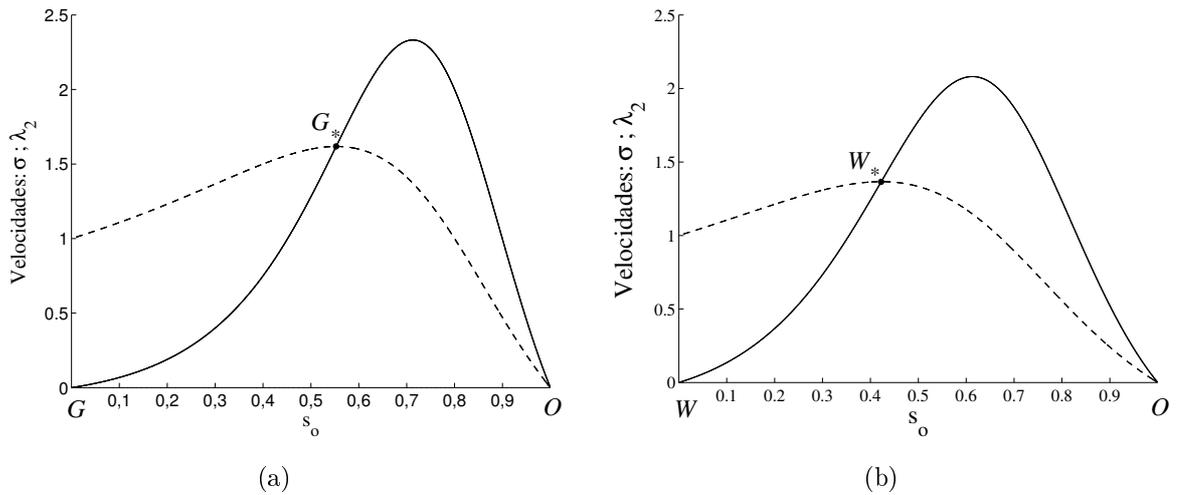


Figura 2.2: Gráficos das velocidades  $\lambda_2(M)$  e  $\sigma(M; P)$ . (a)  $M$  variando sobre o ramo  $[G, O]$  da curva de Hugoniot por  $O$ , justificando a existência do estado  $G_*$ . (b)  $M$  variando sobre o ramo  $[W, O]$  da curva de Hugoniot por  $O$ , justificando a existência do estado  $W_*$ .

então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo  $f_o$  (ou do gás  $f_g$ ) restrita ao lado  $[G, O]$  do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução é dada por uma onda de rarefação-2 de  $G$  para  $G_*$ , seguida de uma onda de choque de  $G_*$  para  $O$ , com  $\sigma(G_*; O) = \lambda_2(G_*)$ .

(ii) Se  $I \in (G, I_1)$  ou  $I \in (I_2, W)$ , então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de  $I$  para um estado  $M$ , onde  $M$  é um estado sobre os segmentos  $(G, G_*)$  ou  $(W, W_*)$  respectivamente, seguida de uma composta-2 de  $M$  para  $O$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para o estado  $T$  (extensão-1 do ponto  $M$ ) seguida de um choque de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ . A composta-2 é formada por uma onda de rarefação-2 de  $M$  para  $G_*$  ou de  $M$  para  $W_*$ , seguida de um choque de  $G_*$  para  $O$  ou de  $W_*$  para  $O$ , com  $\sigma(G_*; O) = \lambda_2(G_*)$  ou  $\sigma(W_*; O) = \lambda_2(W_*)$ , respectivamente.

(iii) Se  $I \in [I_1, B)$  ou  $I \in (B, I_2]$ , então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de  $I$  para  $M$ , onde

$M$  é um estado sobre o segmento  $[G_*, B_*^G)$  se  $I \in [I_1, B)$  ou sobre  $[W_*, B_*^W)$  se  $I \in (B, I_2]$ , seguida de um choque de  $M$  para  $O$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para o estado  $T$  (extensão-1 do estado  $M$ ) seguida de um choque de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ .

(iv) Se  $I = B$ , então a solução do problema de Riemann é dada por uma rarefação-1 de  $B$  para o estado  $B_*$ , seguida de um choque de  $B_*$  para  $O$ .

(v) Se  $I = W$ , ou seja, se o estado inicial à esquerda corresponder a apenas água, então a solução é dada pela própria solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo  $f_o$  (ou da água  $f_w$ ) restrita ao lado  $[W, O]$  do triângulo de saturações. Portanto, a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada por uma composta-2 de  $W$  para  $O$ . Esta composta-2 é formada de uma rarefação-2 de  $W$  para  $W_*$  seguida de um choque de  $W_*$  para  $O$ , com  $\sigma(W_*; O) = \lambda_2(W_*)$ .

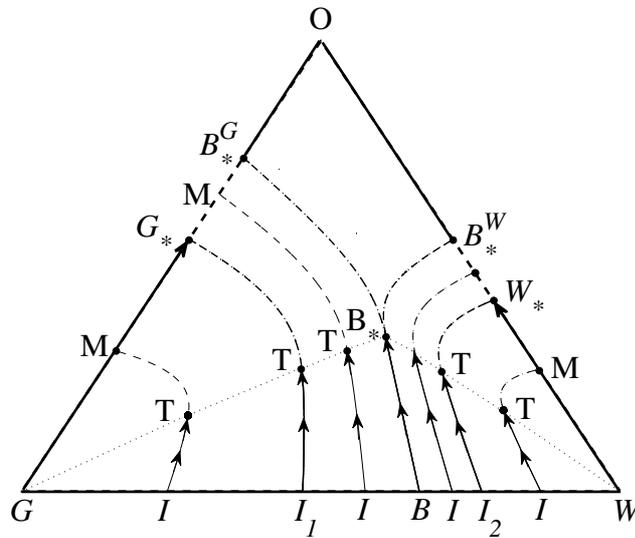


Figura 2.3: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para  $P = O$ , de acordo com a localização do estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ . As curvas  $[G, B_*]$  e  $[B_*, W]$  (pontilhadas) são extensões-1 dos segmentos  $[G, B_*^G]$  e  $[W, B_*^W]$  da curva de Hugoniot por  $O$ , características em  $[G, B_*]$  e  $[B_*, W]$ , respectivamente.

**Obs. 2.1** Note que no item (iv) em que consideramos  $I = B$  temos como consequência da Regra do Choque Triplo que a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de três maneiras distintas no espaço de estados, são elas:

- (a) *Rarefação-1 de  $B$  para o estado  $B_*$ , seguida de um choque de  $B_*$  para  $B_*^G$ , com  $\sigma(B_*; B_*^G) = \sigma(B_*^G; O) = \lambda_1(B_*)$ .*
- (b) *Solução da equação de Buckley-Leverett ao longo do segmento  $[O, B]$  correspondendo a apenas uma onda de rarefação-1 de  $B$  para  $B_*$  seguida de um choque de  $B_*$  para  $O$ , com  $\sigma(B_*; O) = \lambda_1(B_*)$ .*
- (c) *Rarefação-1 de  $B$  para o estado  $B_*$ , seguida de um choque de  $B_*$  para  $B_*^W$ , com  $\sigma(B_*; B_*^W) = \sigma(B_*^W; O) = \lambda_1(B_*)$ .*

*Observe que nos três casos acima a velocidade do choque que atinge  $O$  é a mesma, assim como a velocidade final no segmento de rarefação, o que caracteriza a mesma solução no espaço físico- $xt$ .*

Isto conclui a descrição de uma solução do problema de Riemann para o caso em que  $U_+ = P = O$ . A unicidade é provada em (AZEVEDO et al, 2013).

Passemos então a descrever uma solução do problema de Riemann perturbando  $P$  para o interior do quadrilátero  $OE\bar{U}D$  do triângulo de saturações da Fig. 1.1. Iniciaremos considerando  $P$  numa vizinhança suficientemente pequena de  $O$  e em seguida o deslocaremos mais até que haja uma mudança na estrutura da sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann. Quando detectarmos esta mudança estaremos cruzando a fronteira desta vizinhança inicial de  $O$ .

## 2.3 Estado de Produção $P$ numa Vizinhança $R_1$ de $O$ .

**Notação:** Vamos escrever  $P \approx O$  para indicar que  $P$  é um estado suficientemente próximo do vértice  $O$ .

Para facilitar a descrição e a própria compreensão iniciaremos considerando  $P$  no segmento de reta  $(O, \bar{U})$ , pois neste caso temos as expressões que definem as curvas de Hugoniot de forma explícita, como vimos na Proposição 1.1 da Seção 1.3.

### 2.3.1 Estado $P$ sobre o Segmento de Reta $(O, \bar{U})$ .

Fixado um estado de produção  $P$  sobre o segmento  $(O, \bar{U})$  do segmento de reta  $[O, B]$ , com  $P$  suficientemente próximo de  $O$ , queremos determinar estados especiais ao longo do lado  $[G, W]$  que definam segmentos disjuntos para estados de injeção  $I$ ,

nos quais as respectivas construções da solução do problema de Riemann ocorram de maneira diferenciada.

Para determinarmos uma solução do problema de Riemann (1.10) - (1.11) com  $U_+ = P \approx O$  e  $U_- = I \in [G, W]$  de uma maneira clássica, isto é, usando uma onda da família-1 seguida de uma onda da família-2 conectando  $U_- = I$  a  $U_+ = P$ , separados por apenas um estado intermediário constante  $M$  (como no caso  $P = O$ ), primeiramente procuramos descrever segmentos da curva de onda-2 reversa por  $P$ ,  $W_-^2(P)$ , e a partir deles, as curvas de onda-1 reversas por  $M$ ,  $W_-^1(M)$ , com  $M$  variando em cada segmento de  $W_-^2(P)$  considerado. Após verificar a admissibilidade das descontinuidades e a condição de compatibilidade geométrica das velocidades, caso  $W_-^1(M)$  cubra univocamente todo o segmento  $[W, G]$ , uma solução do problema de Riemann será descrita por uma sequência de uma onda-1 a partir do estado de injeção  $I$  para um estado  $M$ , seguida por uma onda-2 de  $M$  para o estado de produção  $P$ , com  $M \in W_+^1(I) \cap W_-^2(P)$ , exatamente como no caso  $P = O$ .

Os elementos necessários para a descrição de tal solução serão dados a partir de uma sequência de afirmações, culminando no resultado principal da subseção, que fornece esta solução para estados de injeção representando cada intervalo disjunto no lado  $[G, W]$ .

**Obs. 2.2** *Relembramos que a curva de Hugoniot por  $P$ , com  $P \in (O, B)$ , foi obtida explicitamente na Proposição 1.1 e pode ser parametrizada pelas expressões (1.28) ou (1.31) de acordo com a conveniência do momento em que estiver sendo utilizada. Neste caso em que  $P \approx O$ , a curva de Hugoniot está exibida na Fig. 2.4.*

**Afirmção 2.1** *Fixado  $U_+ = P \approx O$ , com  $P$  no segmento  $(O, \bar{U})$ , existem dois segmentos em  $\mathcal{H}_N(P)$ , indicados por  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$  na Fig. 2.4, tais que se  $M \in (A_1, A_3)$  ou  $M \in (A_2, A_4)$ , então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque-2 de Lax.*

**Justificativa.** A justificativa será feita com base nas Figs. 2.4 e 2.5. Como podemos observar na Fig. 2.4, a curva de Hugoniot por  $P$  consiste de dois ramos de hipérbole, um local que não é relevante para nosso problema e outro não local, contendo os pontos  $G_1, A_1, A_3, A_4, A_2$  e  $W_1$ , além do ramo local consistindo do segmento de reta  $[O, B]$  que também contém o ponto  $A_4$ . Os pontos  $A_1^*, A_2^*, A_3^*$  e  $A_4^*$  da Fig. 2.4 serão definidos mais adiante.

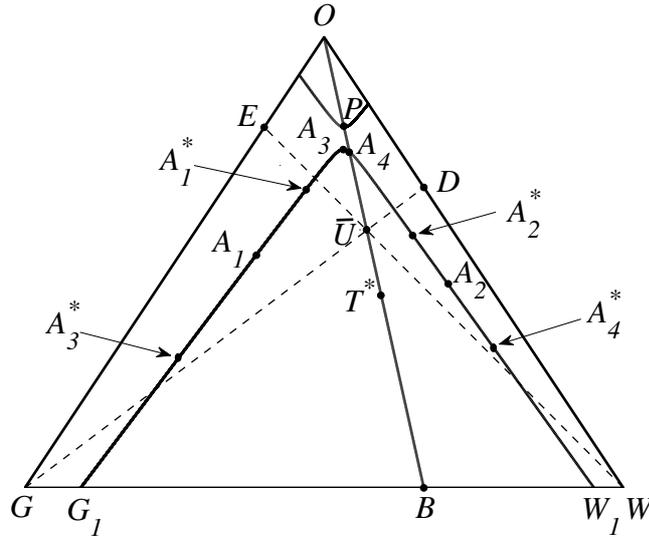


Figura 2.4: Curva de Hugoniot por  $P \in (O, \bar{U})$  e segmentos de retas de bifurcação  $[G, D]$  e  $[E, W]$ .

Considere os gráficos das velocidades características  $\lambda_1(M)$  e  $\lambda_2(M)$ , e da velocidade de choque  $\sigma(M; P)$  mostrados na Fig. 2.5(a), com  $M$  variando ao longo do ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$  da Fig. 2.4. Nessa mesma Fig. 2.5(a) considere as retas horizontais de altura  $\lambda_1(P)$  e  $\lambda_2(P)$ . Observando estes gráficos, vemos a existência dos estados  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  ao longo de  $\mathcal{H}_N(P)$  definindo os dois segmentos  $(A_1, A_3)$  e  $(A_2, A_4)$  da Fig. 2.4 tais que as desigualdades em (A.14), que definem um choque-2 de Lax, são satisfeitas, sendo que os estados  $A_3$  e  $A_4$  são melhor visualizados na Fig. 2.5(b) onde é feita uma ampliação de parte da Fig. 2.5(a). ■

Na Fig. 2.5 está ilustrado o Teorema de Bethe-Wendroff para os estados  $A_1, A_2$  e  $A_3$  em que a velocidade de choque é extremal (máximo local em  $A_1$  e  $A_2$ , e mínimo local em  $A_3$  com  $\sigma(A_1; P) = \lambda_2(A_1)$ ,  $\sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2)$ ,  $\sigma(A_3; P) = \lambda_1(A_3)$ ). Ainda na Fig. 2.5 vemos o estado  $A_4$ , que não satisfaz o Teorema de Bethe-Wendroff, mas é tal que  $\sigma(A_4; P) = \lambda_1(A_4)$ . Na realidade  $A_4$  é a interseção do ramo local  $[O, B]$  com o ramo não local de  $\mathcal{H}(P)$ , isto é,  $A_4$  é um ponto de 1-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(P)$ , como será visto na Afirmação 2.3.

**Obs. 2.3** Note na Fig. 2.4 que o estado  $A_1$  localiza-se no triângulo  $\triangle G\bar{U}E$  e que o estado  $A_2$  localiza-se no triângulo  $\triangle W\bar{D}\bar{U}$ .

**Obs. 2.4** Comparando com o caso  $P = O$  temos a seguinte correspondência de estados da Fig. 2.4 com estados da Fig. 2.1(a):  $G_1 \leftrightarrow G$ ,  $A_1 \leftrightarrow G_*$ ,  $A_1^* \leftrightarrow B_*^G$ ,  $A_3 \leftrightarrow O$ ,

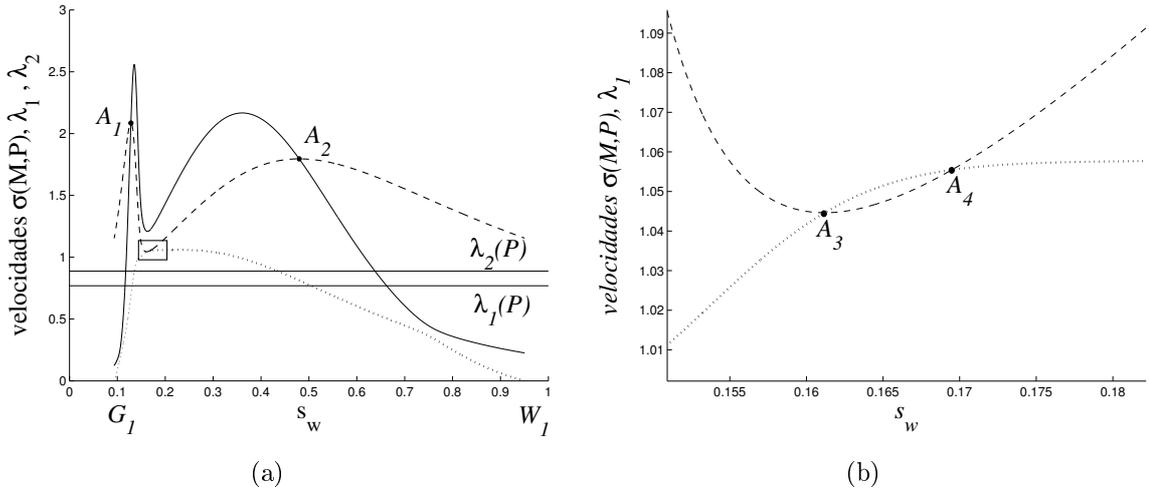


Figura 2.5: (a) Gráficos de  $\lambda_1(M)$ ,  $\lambda_2(M)$  e  $\sigma(M;P)$  com  $M$  ao longo do ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$  da Fig. 2.4 mostrando a existência dos estados  $A_1$  e  $A_2$ . Retas horizontais de altura  $\lambda_1(P)$ ,  $\lambda_2(P)$ . (b) Ampliação da região retangular destacada em 2.5(a), mostrando a existência dos estados  $A_3$  e  $A_4$ .

$$A_4 \leftrightarrow O, A_2^* \leftrightarrow B_*^W, A_2 \leftrightarrow W_*, W_1 \leftrightarrow W \text{ e } T^* \leftrightarrow B_*.$$

**Afirmção 2.2** Fixado  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in (O, \bar{U})$ , então os choques de  $M$  para  $P$ , com  $M$  nos segmentos  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$  de  $\mathcal{H}(P)$  na Fig. 2.4 definidos na Afirmção 2.1 são admissíveis segundo a condição de entropia de viscosidade com matriz de viscosidade sendo a identidade.

Para verificar numericamente a validade da Afirmção 2.2, via o programa “PAK-MAN”, procedemos da seguinte maneira. Restringimos nossa atenção para  $M$  nos segmentos  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$ , e analisamos numericamente e exaustivamente os planos de fases do sistema de EDO’s (A.18), com  $B(U) \equiv I$ , verificando a existência de órbitas conectando  $U_-$  a  $U_+$ .

Vamos agora considerar o ramo da curva de Hugoniot por  $P$  que coincide com o segmento  $[O, B]$ .

**Afirmção 2.3** Fixado  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in (O, \bar{U})$ , então existem os pontos, ao longo de  $(O, B)$ , denotados por  $A_4$  e  $T^*$  na Fig. 2.4, tais que  $\sigma(A_4; P) = \lambda_1(A_4)$  e  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$ . Além disto se  $M \in [B, T^*)$  então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque-2 de Lax, enquanto se  $M \in (T^*, A_4)$  então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque supercompressivo. Por último, temos que  $A_4$  é o ponto de 1-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(P)$ .

**Justificativa.** Considere os gráficos da velocidade de choque  $\sigma(M; P)$  e das velocidades características  $\lambda_1(M)$  e  $\lambda_2(M)$ , com  $M$  variando em  $[O, B]$ , exibidos na Fig. 2.6(a). Observando estes gráficos, fica claro a existência dos pontos  $A_4$  e  $T^*$ , correspondentes aos estados onde as interseções dos gráficos de  $\sigma$  e de  $\lambda_1$  ocorrem, de tal forma que as desigualdades em (A.14) e (A.16) que definem os tipos dos segmentos de choque são válidas. Além disto temos que  $\sigma(A_4; P) = \lambda_1(A_4)$ , mas  $A_4$  não é um ponto de caracterizado pelo Teorema de Bethe-Wendroff, o que confirma que  $A_4$  é o ponto de bifurcação secundária-1 de  $\mathcal{H}(P)$ . ■

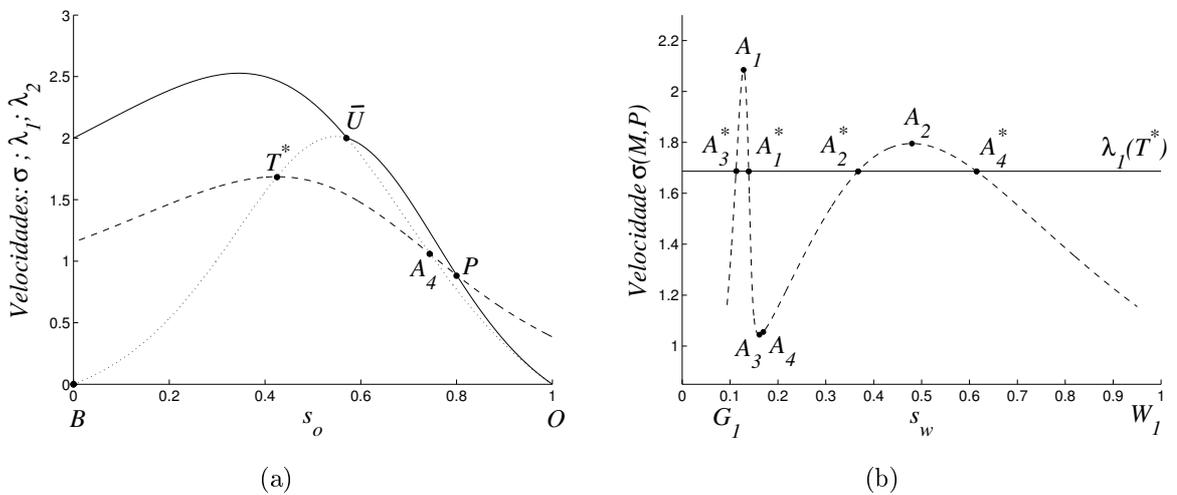


Figura 2.6: (a) Gráficos de  $\lambda_1(M)$ ,  $\lambda_2(M)$  e  $\sigma(M; P)$  com  $M$  ao longo do segmento  $[O, B]$ , ilustrando a existência dos estados  $A_4$  e  $T^*$  tais que  $\sigma(A_4; P) = \lambda_1(A_4)$  e  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$ . (b) Velocidade de choque  $\sigma(M; P)$ , com  $M$  variando ao longo de  $H_N(P)$  e a reta de altura  $\lambda_1(T^*)$  ilustrando os estados  $A_3^*$ ,  $A_1^*$ ,  $A_2^*$ ,  $A_4^*$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_2$  e  $A_4^*$ .

Note que o ponto  $T^*$  dado na Afirmação 2.3 satisfaz o Teorema de Bethe-Wendroff. Este ponto  $T^*$  tem papel de destaque na construção da solução do problema de Riemann, análogo ao papel de  $B_*$  no caso  $P = O$ .

**Afirmação 2.4** *Seja  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in (O, \bar{U})$ , como nas afirmações anteriores. Os choques-2 de  $M$  para  $P$  com  $M \in [B, T^*)$  não satisfazem a condição de entropia de viscosidade (com matriz de viscosidade sendo a identidade), enquanto os choques supercompressivos de  $M$  para  $P$  com  $M \in [T^*, A_4)$  a satisfazem.*

Como na Afirmação 2.2, a verificação da condição de entropia de viscosidade foi realizada através da análise numérica dos planos de fase.

A afirmação a seguir relaciona estados do ramo local  $[O, B]$  de  $\mathcal{H}(P)$  com estados no ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$  da Fig. 2.4.

**Afirmção 2.5** *Seja  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in (O, \overline{U})$ . Seja  $T^*$  o ponto de  $\mathcal{H}(P)$  ao longo de  $[O, B]$  definido na Afirmação 2.3. Existem quatro pontos sobre o ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$ , denotados por  $A_1^*$ ,  $A_2^*$ ,  $A_3^*$  e  $A_4^*$  na Fig. 2.4, tais que  $\sigma(A_i^*; P) = \lambda_1(T^*) = \sigma(T^*; P)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .*

**Justificativa.** Na Fig. 2.6(b) estão mostrados o gráfico da velocidade de choque  $\sigma(M; P)$ , com  $M$  variando ao longo do ramo não local,  $\mathcal{H}_N(P)$  da Fig. 2.4, e a reta horizontal de altura  $\lambda_1(T^*)$ . Observe que o gráfico da velocidade de choque  $\sigma(M; P)$  tem quatro pontos de interseção com a reta de altura  $\lambda_1(T^*)$ . Estas quatro interseções definem os quatro pontos  $A_i^* \in \mathcal{H}_N(P)$  tais que  $\sigma(A_i^*; P) = \lambda_1(T^*)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . ■

**Afirmção 2.6** *Sejam  $P$ ,  $T^*$  e  $A_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  como na Afirmação 2.5. Então os estados  $A_1^*$  e  $A_2^*$  estão nos segmentos de choques admissíveis  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$  da Fig. 2.4, respectivamente, enquanto que  $A_3^*$  e  $A_4^*$  estão localizados em segmentos de descontinuidades não admissíveis.*

**Justificativa.** Ainda considerando a Fig. 2.6(b) e comparando com a Fig. 2.5(a), podemos observar que  $A_1^*$  e  $A_2^*$  estão nos segmentos de choques admissíveis  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$ , respectivamente, enquanto que  $A_3^*$  e  $A_4^*$  estão localizados em segmentos de descontinuidades não admissíveis. ■

**Obs. 2.5** *Com relação à Fig. 1.1 (ou à Fig. 2.4) os estados  $A_1$  e  $A_1^*$  estão localizados no triângulo  $\triangle G\overline{U}E$ , enquanto os estados  $A_2$  e  $A_2^*$ , estão localizados no triângulo  $\triangle W\overline{D}U$ .*

**Consequência 2.1** *Sejam  $P$ ,  $T^*$  e  $A_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  como nas Afirmações 2.5 e 2.6. Então  $A_i^*$  está na curva de Hugoniot por  $T^*$  e vale a cadeia de igualdades:*

$$\sigma(T^*; A_i^*) = \lambda_1(T^*) = \sigma(A_i^*; P) = \sigma(T^*; P), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.1)$$

**Justificativa.** Das Afirmações 2.3 e 2.5 temos que  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$  e  $\sigma(A_i^*; P) = \lambda_1(T^*)$ , respectivamente. Assim basta aplicar a regra do choque triplo (Teorema A.25) para obtermos que  $A_i^* \in \mathcal{H}(T^*)$  e que  $\sigma(T^*; A_i^*) = \lambda_1(T^*)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . ■

**Obs. 2.6** *Note que  $P$  é extensão-1 do ponto  $T^*$ , característica em  $T^*$ , pois  $T^* \in \mathcal{H}(P)$  e  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$ . Além disto, da Consequência 2.1, os pontos  $A_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são extensões-1 do ponto  $T^*$ , também características em  $T^*$ .*

Embora os estados  $A_1^*$  e  $A_2^*$  estejam em segmentos de choques admissíveis, eles estão relacionados com a perda da compatibilidade geométrica de velocidades, devido a satisfazerem a cadeia de igualdades (2.1), conforme mostraremos na Afirmação 2.7 mais adiante. Já os estados  $A_3^*$  e  $A_4^*$  por não pertencerem a segmentos de choques admissíveis não tem relevância na construção da solução do problema de Riemann.

Na Fig. 2.7(a) vemos que os estados  $A_1$  e  $A_2$  estão também localizados “abaixo” da curva de inflexão-2. Portanto, de acordo com o perfil das curvas integrais-2 exibidas na Fig. 1.3(a) é possível continuar a partir do estado  $A_1$  com uma rarefação-2 reversa até o vértice  $G$  e a partir do estado  $A_2$  também com uma rarefação-2 reversa até o vértice  $W$ . Disto concluímos que os segmentos de rarefação-2  $[G, A_1]$  e  $[W, A_2]$  também fazem parte da curva de onda reversa  $W_-^2(P)$ . Portanto, fazendo a união com os segmentos de choque admissíveis  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$  temos que a curva de onda reversa  $W_-^2(P)$  contém os segmentos  $[G, A_3]$  e  $[W, A_4]$  como mostrado na Fig. 2.7(a).

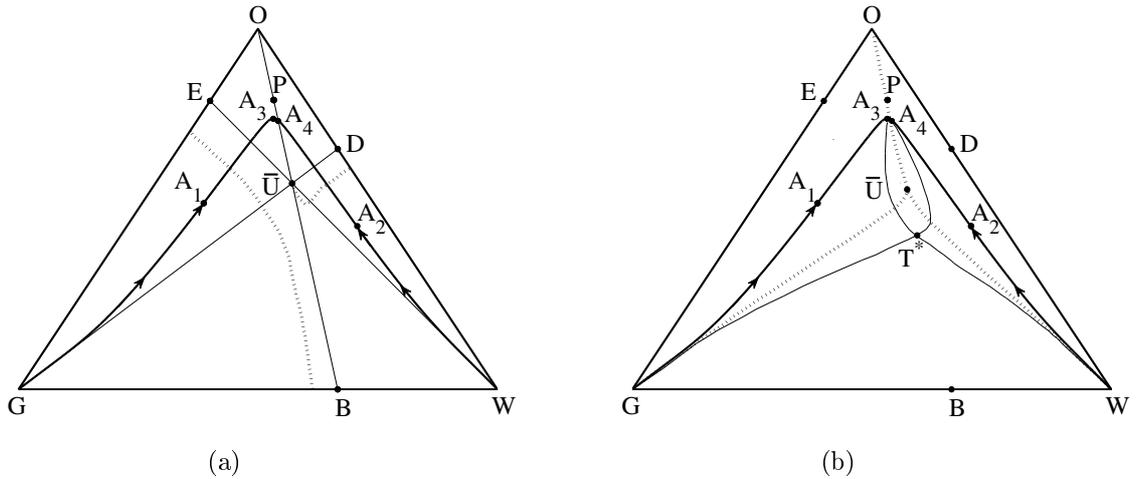


Figura 2.7: (a)Partes de  $W_-^2(P)$  dadas por  $[G, A_3]$  e  $[W, A_4]$  (linha contínua mais grossa), conjunto de inflexão-2 (pontilhado) e segmentos de reta de bifurcação secundária  $[G, O]$ ,  $[O, B]$  e  $[E, W]$ . (b)Partes de  $W_-^2(P)$  dadas por  $[G, A_3]$  e  $[W, A_4]$ (linha contínua mais grossa), sua extensão-1 (linha contínua fina) característica na própria extensão e conjunto de inflexão-1 (linha pontilhada).

Para tratarmos da compatibilidade geométrica entre velocidades vamos considerar o conjunto de extensão-1 dos segmentos  $[G, A_3]$  e  $[W, A_4]$ , que seja característico na própria extensão. Este conjunto foi obtido numericamente com o auxílio do programa “RPN” e está mostrado na Fig. 2.7(b). Frisamos que os choques que definem

esta extensão-1 correspondem a descontinuidades de um estado  $T$  (à esquerda) para um estado  $M$  (à direita), com  $M$  nos segmentos  $(G, A_3]$  ou  $(W, A_4]$  tais que estas descontinuidades correspondem a choques admissíveis segundo a condição de entropia de viscosidade com matriz identidade. Para ser mais específico, os estados  $T$  estão sobre ramos locais das curvas de Hugoniot por  $M$  e são limites de choques-1 de Lax de  $T$  para  $M$  (com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ ).

Registramos aqui também que há outros estados no conjunto de extensão-1 de  $(G, A_3] \cup (W, A_4]$ , característicos na própria extensão, mas que não serão utilizados na construção das soluções dos problemas de Riemann que apresentaremos.

Também devemos salientar que, conforme mostrado na Fig. 2.7(b), os segmentos  $[G, T^*]$  e  $[T^*, W]$  do conjunto de extensão-1 considerado localizam-se “abaixo” da curva de inflexão-1. Logo, de acordo com o perfil das curvas integrais-1 mostrado na Fig. 1.2(a) é possível conectar um estado de injeção  $I$  no lado  $[G, W]$  a um estado  $T$ , nesta extensão-1, por uma curva de rarefação-1.

Uma vez discutido este conjunto de extensão-1, passemos a analisar a questão da compatibilidade geométrica das velocidades nas possíveis sequências de ondas que poderão compor as soluções dos problemas de Riemann.

**Afirmção 2.7 (Compatibilidade de velocidades de choque/choque)** *Seja  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in (O, \bar{U})$ . Considere  $M$  ao longo dos segmentos  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$  correspondentes a choques admissíveis em  $\mathcal{H}_N(P)$  conforme Afirmção 2.2 e  $T \equiv T(M)$  a sua extensão-1, tal que  $\sigma(T(M); M) = \lambda_1(M)$ , mostrada na Fig. 2.7(b). Sejam  $A_1^* \in [A_1, A_3]$  e  $A_2^* \in [A_2, A_4]$  tais que  $\sigma(T^*; A_1^*) = \sigma(T^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*)$  como na Consequência 2.1. Então  $\sigma(T(M); M) \leq \sigma(M; P)$ , isto é, o choque de  $T(M)$  para  $M$  possui velocidade compatível com a velocidade do choque de  $M$  para  $P$  na solução do problema de Riemann, com estado à esquerda  $U_- = T(M)$  e estado à direita  $U_+ = P$ , se e somente se  $M \in [A_1, A_1^*]$  ou  $M \in [A_2, A_2^*]$ .*

**Justificativa.** Considere  $M$  variando em  $[A_1, A_3]$ . Exibindo na Fig. 2.8(a) os gráficos de  $\sigma(T(M); M)$  e  $\sigma(M; P)$ , com  $M$  variando ao longo dos segmentos de choque  $[A_1, A_3]$  e  $[A_2, A_4]$ , vemos que  $\sigma(T(M); M) \leq \sigma(M; P)$  para  $M \in [A_1, A_1^*]$ . De maneira análoga, observando a Fig. 2.8(b), vemos a mesma desigualdade para  $M$  variando em  $[A_2, A_2^*]$ . Por outro lado  $\sigma(T(M); M) > \sigma(M; P)$  para  $M$  ao longo de  $(A_1^*, A_3]$  ou de  $(A_2^*, A_4]$ .

■

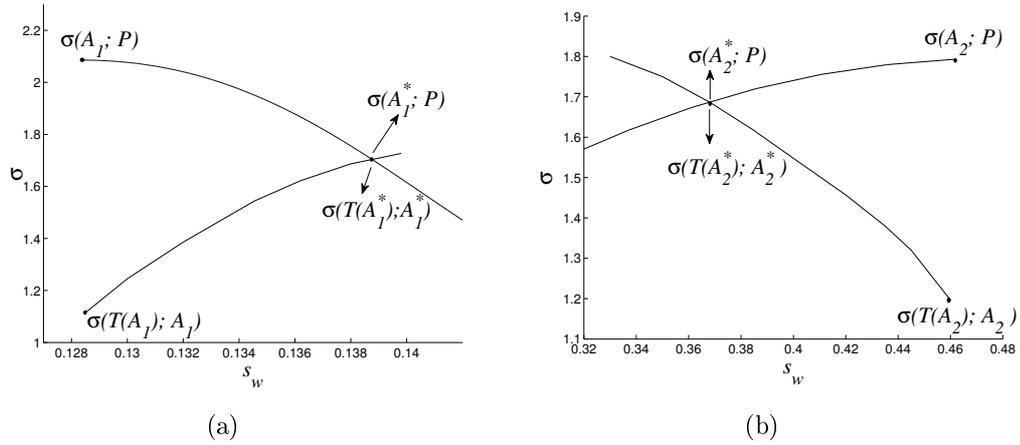


Figura 2.8: Gráficos das velocidades de choque  $\sigma(T(M); M) \equiv \lambda_1(T(M))$  e  $\sigma(M; P)$ . (a)  $M$  variando em  $[A_1, A_3]$ . (b)  $M$  variando em  $[A_2, A_4]$ .

Tratemos agora da compatibilidade da velocidade de um choque com a velocidade de início de uma onda de rarefação-2. O significado de “velocidade de início de uma onda de rarefação” está explicado na Seção A.5, pg 65.

**Afirmção 2.8 (Compatibilidade de velocidades de choque/rarefação)** *Seja  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in (O, \bar{U})$ . Considere a extensão-1 dos segmentos  $[G, A_1]$  e  $[W, A_2]$  de  $\mathcal{W}_-(P)$ . Seja  $M \in [G, A_1]$  ou  $M \in [W, A_2]$  e  $T \equiv T(M)$  a sua extensão-1 característica em  $T(M)$ . Então  $\sigma(T(M); M) < \lambda_2(M)$ , ou seja, o choque de  $T \equiv T(M)$  para  $M$  possui velocidade compatível com a velocidade de início da onda de rarefação-2 que parte de  $M$ , para formar uma onda composta-2 conectando  $M$  a  $P$ .*

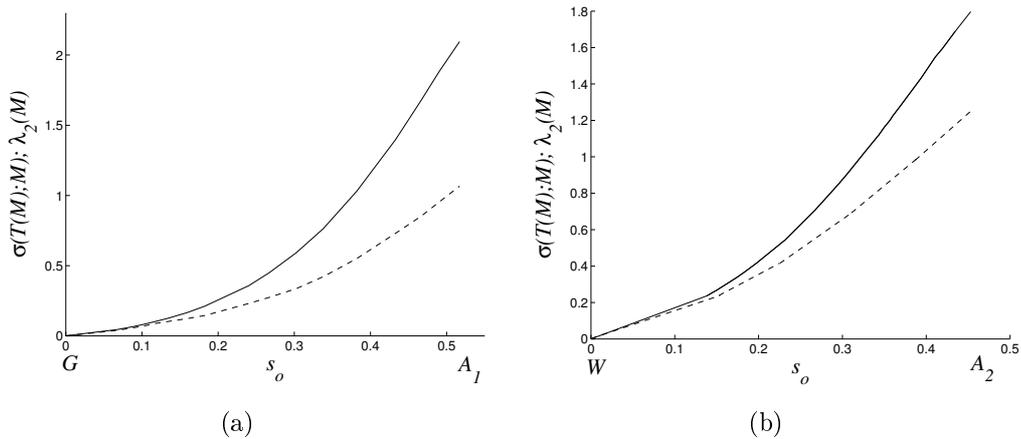


Figura 2.9: Gráficos da velocidade de choque  $\sigma(T(M); M) \equiv \lambda_1(T(M))$  e da velocidade característica  $\lambda_2(M)$ . (a)  $M$  variando em  $[G, A_1]$ . (b)  $M$  variando em  $[W, A_2]$ .

**Justificativa.** Considere  $M \in [G, A_1]$ . Exibindo na Fig. 2.9(a) os gráficos da veloci-

dade de choque  $\sigma(T(M); M) = \lambda_1(T(M))$  e da velocidade característica  $\lambda_2(M)$ , vemos que  $\sigma(T(M); M) \leq \lambda_2(M)$ , para  $M \in [G, A_1]$ . Para  $M \in [W, A_2]$  obtemos a mesma desigualdade observando a Fig. 2.9(b). ■

Concluída a sequência de afirmações preparatórias temos então o resultado principal desta subseção, que descreve soluções dos problemas de Riemann para  $P \in (O, \bar{U})$ ,  $P \approx O$ .

**Resultado 2.1** *Fixado um estado de produção  $P$  suficientemente próximo de  $O$ , com  $P$  no segmento  $(O, \bar{U})$ , e variando o estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ , então uma solução do problema de Riemann (1.10)-(1.11) com  $U_- = I$  e  $U_+ = P$  consiste genericamente de uma sequência de uma onda (composta) da família-1 de  $I$  para um estado intermediário constante  $M$ , seguida de uma onda da família-2 (composta ou choque) de  $M$  para  $P$ .*

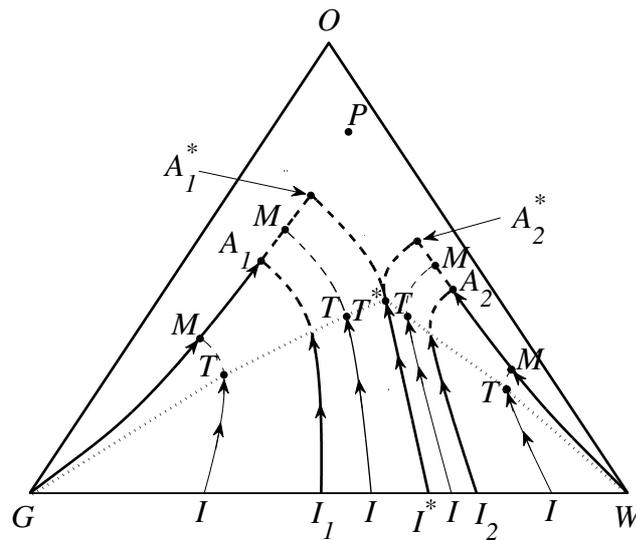


Figura 2.10: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para  $P \in (O, \bar{U})$ , de acordo com a localização do estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ .

**Justificativa.** Acompanhe na Fig. 2.10. Considere as partes da curva de onda reversa  $W_-^2(P)$  denotadas por  $[G, A_1] \cup [A_1, A_1^*]$  e  $[W, A_2] \cup [A_2, A_2^*]$ . Considere ainda as curvas de onda reversas  $W_-^1(A_1)$ ,  $W_-^1(T^*)$  e  $W_-^1(A_2)$ . A interseção destas curvas com o lado  $[W, G]$  definem os estados  $I_1$ ,  $I^*$  e  $I_2$  representados na Fig. 2.10, respectivamente, sendo que pelo fato de  $T^*$  pertencer ao segmento de reta  $[O, B]$  o estado  $I^*$  coincide com  $B$ .

Com esta divisão do lado  $[G, W]$  nos segmentos  $[G, I_1)$ ,  $[I_1, I^*)$ ,  $(I^*, I_2]$  e  $(I_2, W]$  temos condições de exibir soluções do problema de Riemann para  $P$  fixo e  $I$  variando em  $[G, W]$ , como a seguir:

- (i) Se  $I = G$ , ou seja, se o estado inicial à esquerda corresponder a apenas gás, então uma solução do problema de Riemann é dada por uma onda composta-2, a qual é constituída por uma rarefação-2 de  $G$  para  $A_1$ , seguida de um choque de  $A_1$  para  $P$ , com  $\sigma(A_1; P) = \lambda_2(A_1)$ .
- (ii) Se  $I \in (G, I_1)$  ou  $I \in (I_2, W)$ , então uma sequência de ondas que compõe a correspondente solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de  $I$  para  $M$ , onde  $M$  é um estado sobre os segmentos  $(G, A_1)$  ou  $(A_2, W)$ , respectivamente, seguida de uma composta-2 de  $M$  para  $P$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para  $T$  (extensão-1 do ponto  $M$  na curva  $W_-^2(P)$ ) seguida de um choque de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ . Em cada caso a composta-2 é formada por uma rarefação de  $M$  para  $A_i$ , seguida de um choque de  $A_i$  para  $P$ , com  $\sigma(A_i; P) = \lambda_2(A_i)$ ,  $i = 1, 2$ .
- (iii) Se  $I \in [I_1, I^*)$  ou  $I \in (I^*, I_2]$ , então uma sequência de ondas que compõe a correspondente solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de  $I$  para  $M$ , onde  $M$  é um estado no segmento  $[A_1, A_1^*)$  se  $I \in [I_1, I^*)$  ou no segmento  $[A_2^*, A_2]$  se  $I \in (I^*, I_2]$ , seguida de um choque de  $M$  para  $P$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para  $T$  (extensão-1 do ponto  $M$  na curva  $W_-^2(P)$ ) seguida de um choque de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ .
- (iv) Se  $I = I^* \equiv B$ , então uma solução para o correspondente problema de Riemann é constituída por uma rarefação-1 do estado  $I^*$  para o estado  $T^*$ , seguida de um choque de  $T^*$  para  $P$ .
- (v) Se  $I = W$ , ou seja, se o estado inicial à esquerda corresponder a apenas água, então a solução do problema de Riemann é dada por uma onda composta-2, a qual é constituída por uma rarefação-2 de  $W$  para  $A_2$ , seguida de um choque de  $A_2$  para  $P$ , com  $\sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2)$ .

■

**Obs. 2.7** Note que, assim como na Obs. 2.1 do caso  $P = O$ , no item (iv) da justificativa do Resultado 2.1, também temos aparentemente três possibilidades de sequências de ondas no espaço de estados. Porém estas três sequências de ondas representam a mesma solução no espaço físico- $xt$ , uma vez que todos os choques têm velocidades coincidindo com  $\lambda_1(T^*)$ . São estas as três possibilidades:

- (a) rarefação-1 de  $I^*$  para  $T^*$  seguida de um choque de  $T^*$  para  $A_1^*$  (com  $\sigma(T^*; A_1^*) = \lambda_1(T^*)$ , formando a composta-1), seguida de um choque de  $A_1^*$  para  $P$ , com  $\sigma(A_1^*; P) = \sigma(T^*; A_1^*) = \lambda_1(T^*)$ ;
- (b) solução de Buckley-Leverett ao longo do segmento  $[O, B]$  consistindo de uma rarefação-1 de  $I^*$  para  $T^*$  seguida de um choque de  $T^*$  para  $P$ , com  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$ ;
- (c) rarefação-1 de  $I^*$  para  $T^*$  seguida de um choque de  $T^*$  para  $A_2^*$  (com  $\sigma(T^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*)$ , formando a composta-1), seguida de um choque de  $A_2^*$  para  $P$ , com  $\sigma(A_2^*; P) = \sigma(T^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*)$ .

Isto conclui a descrição de uma solução para o estado de produção  $P$  numa vizinhança de  $O$  sobre o segmento  $(O, \bar{U})$ . Observamos que se fizermos  $P$  tender ao estado  $O$  então obteremos a mesma solução obtida em (AZEVEDO et al, 2010) para  $P = O$ , a qual está recapitulada na Seção 2.2, em que os estados  $A_1, A_1^*, T^*, A_2^*$  e  $A_2$  da Fig. 2.10 podem ser obtidos como perturbações dos estados  $G_*, B_*^G, B_*, B_*^W$  e  $W_*$  da Fig. 2.3, respectivamente.

Passemos agora a perturbar o estado de produção  $P$  para fora do segmento  $(O, \bar{U})$ .

### 2.3.2 Estado $P$ fora do Segmento de Reta $(O, \bar{U})$ .

Neste caso perturbamos o estado de produção  $P$  considerado na Subseção 2.3.1 para o interior do triângulo  $\triangle OE\bar{U}$ . Depois determinamos numericamente através do programa “RPN” a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(P)$ , a qual está mostrada na Fig. 2.11. Como observa-se na Fig. 2.11,  $\mathcal{H}(P)$  é formada por dois ramos locais, um que não é relevante para o nosso problema e o outro contendo os pontos  $G_1, A_1, P$  e  $O_1$ , além de um ramo não local contendo os pontos  $B_1, A_4, A_2$  e  $W_1$ . Note que os conjuntos de pontos  $\{G_1, A_1, P, O_1\}$  e  $\{B_1, T^*, A_4, A_2, W_1\}$  da Fig. 2.11 são as perturbações dos conjuntos  $\{G_1, A_1, P, O\}$  e  $\{B, T^*, A_4, A_2, W_1\}$  da Fig. 2.4, respectivamente. Para o ponto  $P$  aqui considerado, o ponto  $A_3$  da Fig. 2.4 passa a coincidir com o ponto  $P$  na Fig. 2.11, no sentido que todo o segmento  $(A_1, P)$  corresponde a um choque-2 de Lax.

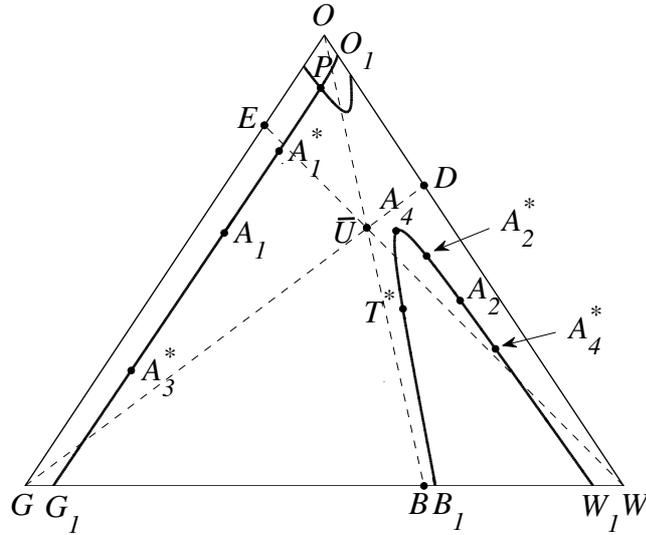


Figura 2.11: Curva de Hugoniot por um estado  $P \approx O$ , com  $P \in \triangle OE\bar{U}$  e segmentos de retas  $[G, D]$  e  $[E, W]$ .

A sequência de afirmações através da qual definimos os elementos necessários para a descrição da solução, será a mesma do caso para  $P \in (O, \bar{U})$ , também culminando no próprio resultado que fornece a solução para estados de injeção representando cada intervalo disjunto no lado  $[G, W]$ . As justificativas aqui serão todas numéricas, uma vez que não temos mais a expressão explícita da curva de Hugoniot como na Proposição 1.1. No entanto todos os resultados podem ser facilmente vistos como perturbações do caso  $P \in (O, \bar{U})$ , com  $P$  próximo de  $O$ .

**Afirmção 2.9** Fixado  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in \triangle OE\bar{U}$ , existem dois segmentos em  $\mathcal{H}_N(P)$ , denotados por  $[A_2, A_4]$  e  $[T^*, B_1]$  na Fig. 2.11, tais que se  $M \in (A_2, A_4)$  ou  $M \in (T^*, B_1)$ , então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque-2 de Lax. Além disso se  $M \in (A_4, T^*)$  então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque supercompressivo.

**Justificativa.** A justificativa é análoga às justificativas das Afirmações 2.1 e 2.3 e baseia-se nas Figs. 2.11 e 2.12(a). ■

**Afirmção 2.10** Considere o ramo local  $[G_1, O_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$  na Fig. 2.11. Existe um segmento, denotado por  $[A_1, P]$ , neste ramo local  $[G_1, O_1]$  tal que se  $M \in (A_1, P)$ , então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque-2 de Lax.

**Justificativa.** A justificativa também é análoga às justificativas das Afirmações 2.1 e 2.3 e baseia-se nas Figs. 2.11 e 2.12(b). ■

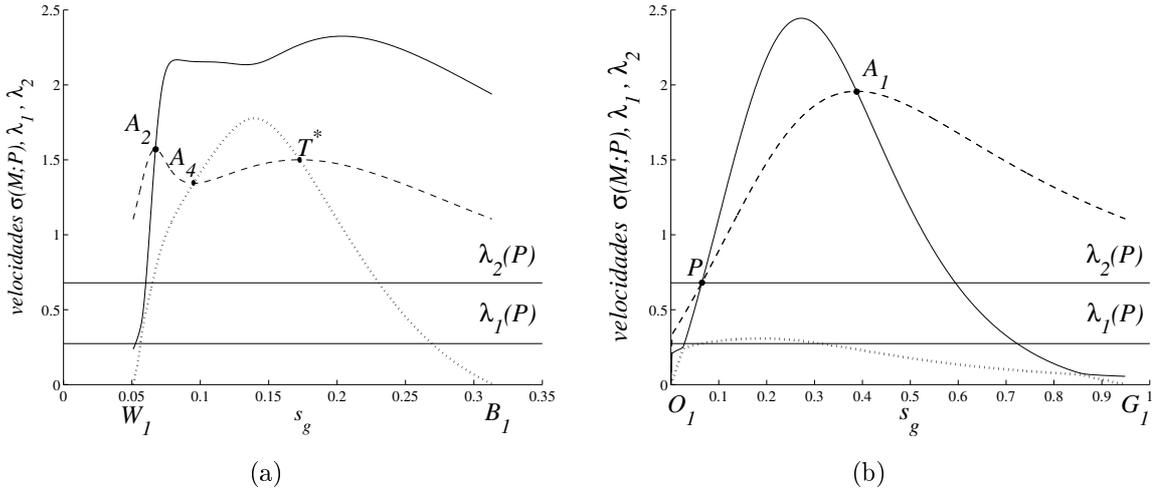


Figura 2.12: Gráficos de  $\lambda_1(M)$ ,  $\lambda_2(M)$  e  $\sigma(M;P)$ . Retas de alturas  $\lambda_1(P)$  e  $\lambda_2(P)$ . (a)  $M$  variando ao longo do ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$  da Fig. 2.11 ilustrando a existência dos estados  $A_2$ ,  $A_4$  e  $T^*$  na Afirmação 2.9. (b)  $M$  variando ao longo do ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$  ilustrando a existência do estado  $A_1$  na Afirmação 2.10.

**Obs. 2.8** Note nas Figs. 2.12(a) e 2.12(b) que temos as igualdades

$$\sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2), \quad \sigma(A_4; P) = \lambda_1(A_4),$$

$$\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*), \quad \sigma(A_1; P) = \lambda_2(A_1),$$

ilustrando o Teorema de Bethe-Wendroff.

**Afirmação 2.11** Fixado  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in \triangle OE\bar{U}$ , então os choques de  $M$  para  $P$  com  $M \in [A_1, P]$ ,  $M \in [A_2, A_4]$  e  $M \in [A_4, T^*]$ , definidos nas Afirmações 2.9 e 2.10, satisfazem a condição de entropia de viscosidade com matriz de viscosidade sendo a identidade, enquanto os choques de  $M$  para  $P$  com  $M \in (T^*, B_1]$  não a satisfazem.

A validade desta Afirmação também é verificada numericamente como no caso da Afirmação 2.2.

**Afirmação 2.12** Sejam  $P$  e  $T^*$  como nas Afirmações 2.9 e 2.11. Existem dois pontos denotados por  $A_1^*$  e  $A_3^*$  sobre  $[G_1, O_1]$  e dois pontos denotados por  $A_2^*$  e  $A_4^*$  sobre  $\mathcal{H}_N(P)$  na Fig. 2.11 tais que  $\sigma(A_i^*, P) = \lambda_1(T^*)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Justificativa.** A justificativa é análoga à da Afirmação 2.5 e baseia-se nas Figs. 2.13(a) e 2.13(b) bastando comparar os gráficos da velocidade de choque nestes ramos de  $\mathcal{H}(P)$  com a reta de altura  $\lambda_1(T^*)$ . ■

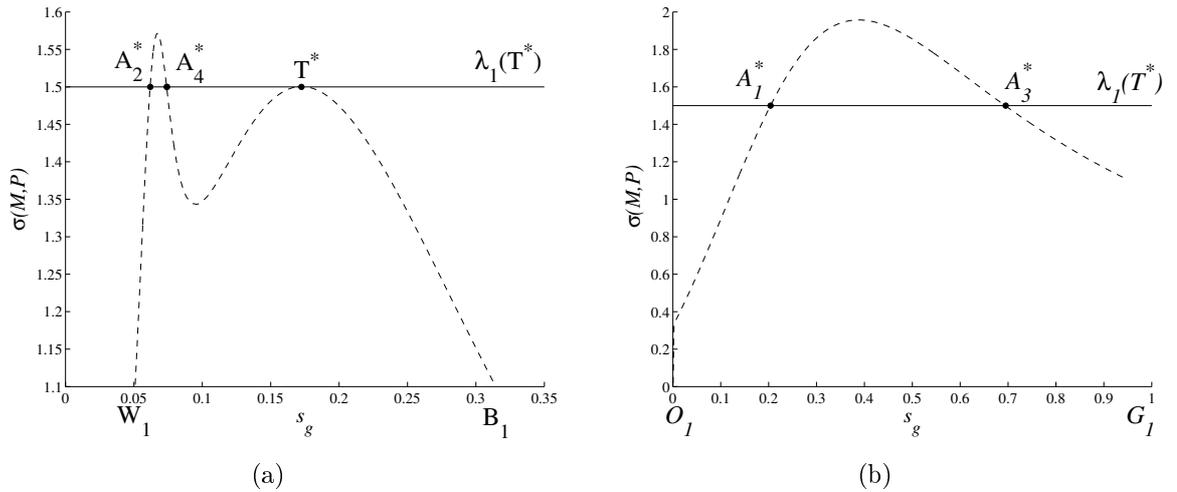


Figura 2.13: Gráfico de  $\sigma(M; P)$  e a reta de altura  $\lambda_1(T^*)$ . (a)  $M$  variando ao longo do ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$  da Fig. 2.11 mostrando a existência dos pontos  $A_2^*$ ,  $A_4^*$  e  $T^*$ . (b)  $M$  ao longo do ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$  da Fig. 2.11 mostrando a existência dos pontos  $A_1^*$  e  $A_3^*$ .

**Afirmção 2.13** *Sejam  $P$ ,  $T^*$  e  $A_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  como na Afirmção 2.12. Então os estados  $A_1^*$  e  $A_2^*$  estão nos segmentos de choques admissíveis  $[A_1, P]$  e  $[A_2, A_4]$  da Fig. 2.11, respectivamente, enquanto que  $A_3^*$  e  $A_4^*$  estão localizados em segmentos de discontinuidades não admissíveis.*

**Justificativa.** Justificativa análoga à da Afirmção 2.6 e baseia-se nas Figs. 2.12 e 2.13. ■

**Obs. 2.9** *Com relação às Figs. 1.1 e 2.11 os estados  $A_1$  e  $A_1^*$  estão localizados no triângulo  $\triangle G\bar{U}E$ , enquanto os estados  $A_2$  e  $A_2^*$  estão localizados no triângulo  $\triangle W\bar{U}D$ .*

**Consequência 2.2** *Sejam  $P$ ,  $T^*$  e  $A_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , como nas Afirmções 2.12 e 2.13. Então  $A_i^* \in \mathcal{H}(T^*)$  e vale a cadeia de igualdades:*

$$\sigma(T^*; A_i^*) = \lambda_1(T^*) = \sigma(A_i^*; P) = \sigma(T^*; P), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.2)$$

**Justificativa.** Da Obs. 2.8 e da Afirmção 2.12 temos que  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$  e  $\sigma(A_i^*; P) = \lambda_1(T^*)$ , respectivamente. Assim basta aplicar a regra do choque triplo para obtermos a cadeia de igualdades em (2.2). ■

**Obs. 2.10** *Note que  $T^*$  é extensão-1 tanto do ponto  $P$  como dos pontos  $A_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , característica em  $T^*$ .*

As observações sobre a localização dos estados  $A_1$  e  $A_2$ , bem como de  $A_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , a seguir são praticamente as mesmas para o caso  $P \in (O, \bar{U})$ . Apenas as recapitularemos para facilitar a leitura.

Embora os estados  $A_1^*$  e  $A_2^*$  estejam em segmentos de choques admissíveis, devido a satisfazerem a cadeia de igualdades (2.2) eles estão relacionados com a perda da compatibilidade geométrica de velocidades conforme mostraremos na Afirmação 2.14 mais adiante. Já os estados  $A_3^*$  e  $A_4^*$  por não pertencerem à segmentos de choques admissíveis não tem relevância na construção da solução do problema de Riemann.

Na Fig. 2.14(a) vemos que os estados  $A_1$  e  $A_2$  estão também localizados “abaixo” da curva de inflexão-2. Portanto, de acordo com o perfil das curvas integrais-2 exibidas na Fig. 1.3(a) é possível continuar a partir do estado  $A_1$  com uma rarefação-2 reversa até o vértice  $G$  e a partir do estado  $A_2$  também com uma rarefação-2 reversa até o vértice  $W$ . Disto concluímos que os segmentos de rarefação-2  $[G, A_1]$  e  $[W, A_2]$  também fazem parte da curva de onda reversa  $W_-^2(P)$ . Portanto, fazendo a união com os segmentos de choque admissíveis  $[A_1, P]$  e  $[A_2, A_4]$  temos que a curva de onda reversa  $W_-^2(P)$  contém os segmentos  $[G, P]$  e  $[W, A_4]$  como mostrado na Fig. 2.14(a).

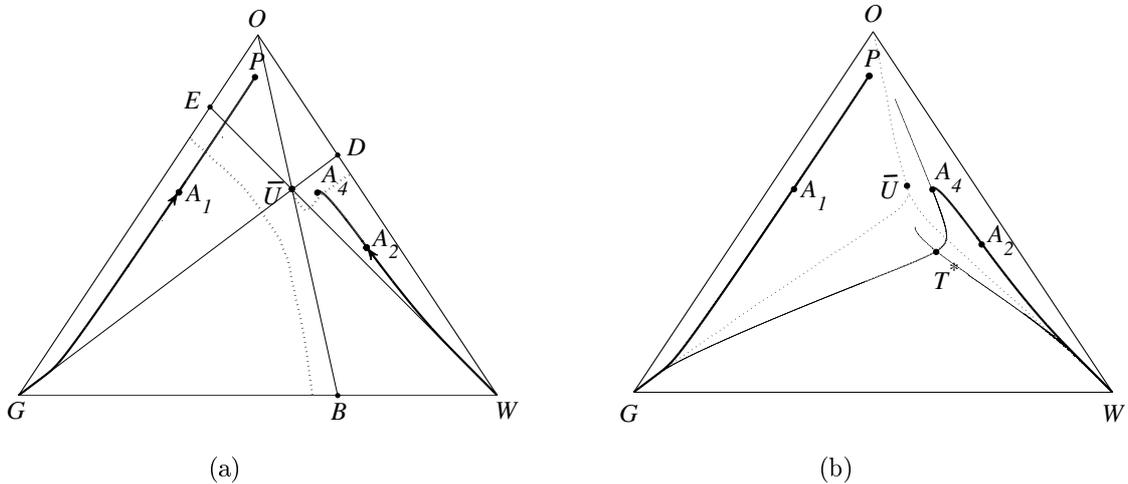


Figura 2.14: (a) Partes de  $W_-^2(P)$  dadas por  $[G, P]$  e  $[W, A_4]$  (linha contínua mais grossa); conjunto de inflexão-2 (pontilhado) e segmentos de reta de bifurcação secundária  $[G, O]$ ,  $[O, B]$  e  $[E, W]$ . (b) Parte de  $W_-^2(P)$  dada por  $[G, P]$  e  $[W, A_4]$  (linha contínua mais grossa), sua extensão-1 (linha contínua fina) característica na própria extensão e conjunto de inflexão-1 (linha pontilhada).

Também devemos salientar, conforme mostrado na Fig. 2.14(b), que a extensão-1

a ser considerada na solução localiza-se abaixo da inflexão-1, justificando que é possível conectar um estado de injeção  $I$  no lado  $[G, W]$  a um estado  $T$ , nesta extensão-1, por uma onda de rarefação-1.

As afirmações a seguir que tratam da questão da compatibilidade geométrica das velocidades são análogos às Afirmações 2.7 e 2.8 do caso anterior.

**Afirmção 2.14 (Compatibilidade de velocidades de choque/choque)** *Seja  $U_+ = P \approx O$ , com  $P$  no triângulo  $\triangle OE\bar{U}$ . Considere  $M$  variando ao longo dos segmentos  $[A_1, P]$  e  $[A_2, A_4]$  correspondentes a choques admissíveis em  $\mathcal{H}(P)$  conforme a Afirmação 2.11 e  $T \equiv T(M)$  a sua extensão-1, tal que  $\sigma(T(M); M) = \lambda_1(M)$ , mostrada na Fig. 2.14(b). Sejam  $A_1^* \in [A_1, P]$  e  $A_2^* \in [A_2, A_4]$  tais que  $\sigma(T^*; A_1^*) = \sigma(T^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*)$  como na Consequência 2.2. Então  $\sigma(T(M); M) \leq \sigma(M; P)$ , isto é, o choque de  $T(M)$  para  $M$  possui velocidade compatível com o choque de  $M$  para  $P$  na solução do problema de Riemann, com estado à esquerda  $U_- = T(M)$  e estado à direita  $U_+ = P$ , se e somente se  $M \in [A_1, A_1^*]$  ou  $M \in [A_2, A_2^*]$ .*

**Justificativa.** Análoga à justificativa da Afirmação 2.7 fazendo a comparação entre os gráficos de  $\sigma(T(M); M)$  e  $\sigma(M; P)$  com  $M$  variando ao longo dos segmentos  $[A_1, P]$  e  $[A_2, A_4]$ . ■

**Afirmção 2.15 (Compatibilidade de velocidades de choque/rarefação)** *Seja  $U_+ = P \approx O$ , com  $P \in \triangle OE\bar{U}$ . Considere a extensão-1 dos segmentos  $[G, A_1]$  e  $[W, A_2]$  de  $\mathcal{W}_-^2(P)$ . Seja  $M \in [G, A_1]$  ou  $M \in [W, A_2]$  e  $T \equiv T(M)$  a sua extensão-1 característica em  $T(M)$ . Então  $\sigma(T(M); M) < \lambda_2(M)$ , ou seja, o choque de  $T \equiv T(M)$  para  $M$  possui velocidade compatível com a velocidade de início da onda de rarefação-2 que parte de  $M$ , para formar uma onda composta-2 conectando  $M$  à  $P$ .*

**Justificativa.** Análoga à justificativa da Afirmação 2.8. ■

Concluída a sequência de afirmações preparatórias temos então o resultado principal desta subseção, que descreve soluções dos problemas de Riemann para  $P \in \triangle OE\bar{U}$ , com  $P \approx O$ .

**Resultado 2.2** *Fixado um estado de produção  $P$  suficientemente próximo de  $O$ , com  $P \in \triangle OE\bar{U}$ , e variando o estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ , então uma solução do problema de Riemann (1.10)-(1.11) com  $U_- = I$  e  $U_+ = P$  consiste genericamente de uma sequência de uma onda (composta) da família-1 de  $I$  para um estado intermediário constante  $M$ , seguida de uma onda da família-2 (composta ou choque) de  $M$  para  $P$ .*

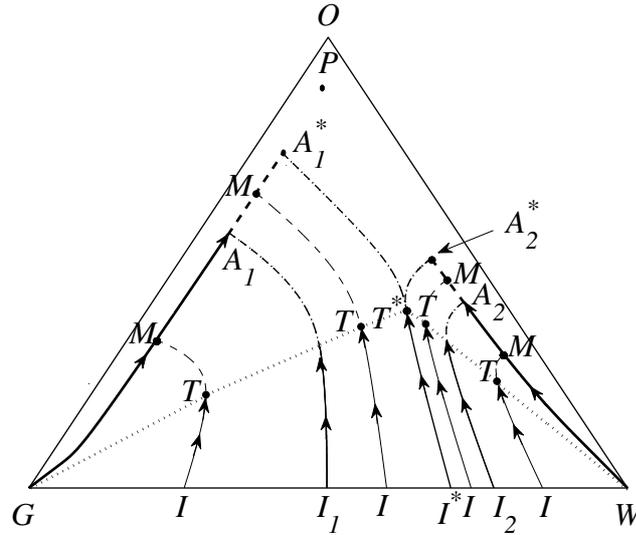


Figura 2.15: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para  $P \simeq O$  (na região  $R_1^G$ ), de acordo com a localização do estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ .

**Justificativa.** A justificativa é exatamente como no caso em que o estado  $P$  está sobre o segmento  $(O, \bar{U})$  e pode ser acompanhada com o auxílio da Fig. 2.15 em que os estados  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$  do triângulo de saturações são subdivididos nos casos  $I = G$ ,  $I \in (G, I_1)$  ou  $I \in (I_2, W)$ ,  $I \in [I_1, I^*)$  ou  $I \in (I^*, I_2]$ ,  $I = I^*$  e  $I = W$ . ■

**Obs. 2.11** Apresentamos no Resultado 2.2 a descrição de uma solução do problema de Riemann em que o estado à direita  $U_+ = P$  foi perturbado do segmento  $(O, \bar{U})$  para o triângulo  $\triangle OE\bar{U}$ . Para o caso de  $P$  ser perturbado para o triângulo  $\triangle OD\bar{U}$  a descrição é análoga e não será apresentada.

**Obs. 2.12** Se perturbarmos o estado  $P$  até o lado  $[G, O]$ ,  $P$  ainda próximo de  $O$ , teremos exatamente a solução descrita em (BARROS, 2010) em que os estados  $A_1$ ,  $A_1^*$ ,  $T^*$ ,  $A_2$  e  $A_2^*$  daqui correspondem, respectivamente, aos estados  $W_*^P$ ,  $P_*^W$ ,  $P_*$ ,  $G_*^P$ ,  $P_*^G$  de lá. Por outro lado, perturbando  $P$  até o lado  $[W, O]$  temos a solução descrita em (GUEDES, 2009).

Vamos agora determinar a fronteira da vizinhança do vértice  $O$ , do triângulo de saturações da Fig. 1.1, em que a solução do problema de Riemann para um estado de produção  $P$  nesta vizinhança tenha a mesma sequência de ondas que este caso que acabamos de descrever. Também por simplicidade vamos descrever os detalhes apenas para  $P \in \triangle OE\bar{U}$ , uma vez que para  $P \in \triangle OD\bar{U}$  a descrição é análoga.

### Fronteira da vizinhança $R_1$ do estado $O$ .

Consideremos agora a Afirmação 2.6 (para  $P \in (O, \overline{U})$ ) e sua análoga, a Afirmação 2.13, para  $P$  no triângulo  $\triangle OE\overline{U}$ , com  $P \approx O$ . Como vimos nas Afirmações 2.6 e 2.13 os estados  $A_1^*$  e  $A_2^*$  satisfazem a regra do choque triplo com o estado  $T^*$  e se localizam no interior dos triângulos  $\triangle G\overline{U}E$  e  $\triangle W\overline{D}\overline{U}$  da Fig. 1.1, respectivamente. No caso,  $A_1^*$  e  $A_2^*$  (assim como  $A_3^*$  e  $A_4^*$ ) são extensões-1, características em  $T^* \in \mathcal{H}(P)$ , que de acordo com a regra do choque triplo satisfazem  $\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)$ , como visto nas Consequências 2.1 e 2.2.

Ao afastar o ponto  $P$  do vértice  $O$ , interiormente ao triângulo  $\triangle OE\overline{U}$  da Fig. 1.1, vemos que a tendência é que o ponto  $A_1^*$  se aproxime do segmento  $[E, \overline{U}]$  interiormente ao triângulo  $\triangle G\overline{U}E$  e que o ponto  $A_2^*$  se aproxime do segmento  $[\overline{U}, W]$  interiormente ao triângulo  $\triangle W\overline{D}\overline{U}$ , sendo que  $A_1^*$  atinge  $[E, \overline{U}]$  simultaneamente quando  $A_2^*$  atinge  $[\overline{U}, W]$ . Algumas órbitas do sistema de EDO's (A.18) para a descontinuidade entre  $T^*$  e  $A_1^*$  (em que  $A_1^*$  está em  $\triangle G\overline{U}E$  e  $A_2^*$  em  $\triangle W\overline{D}\overline{U}$ ) estão ilustradas na Fig 2.16(a). A partir do momento em que  $A_1^*$  cruza o segmento  $[E, \overline{U}]$  para o interior de  $\triangle OE\overline{U}$  e  $A_2^*$  cruza o segmento  $[\overline{U}, W]$  para o interior de  $\triangle W\overline{D}\overline{U}$  a descontinuidade de  $T^*$  para  $A_1^*$  deixa de ser admissível. Como mostrado na Fig. 2.16(b), o que ocorre é que no momento que  $A_1^*$  atinge  $[E, \overline{U}]$ , a órbita do sistema de EDO's (A.18) que conectava  $T^*$  à  $A_1^*$  é “quebrada” surgindo então uma órbita que conecta  $A_2^*$  à  $A_1^*$  sobre o segmento  $[E, W]$  em adição à órbita que conecta  $T^*$  à  $A_2^*$ . Note que temos  $\sigma(T^*; A_1^*) = \sigma(T^*; A_2^*) = \sigma(A_2^*; A_1^*)$ .

Continuando a perturbar  $P$  para longe de  $O$  na direção de  $[E, \overline{U}]$ , a partir deste momento o estado  $A_1^*$  ficaria do lado oposto do segmento  $[E, W]$  em relação ao estado  $T^*$  e descontinuidade de  $T^*$  para  $A_1^*$  não é mais admissível conforme ilustra a Fig. 2.17.

Definimos então parte da fronteira da vizinhança  $R_1$  do vértice  $O$  no triângulo  $\triangle EO\overline{U}$ , onde as construções dos casos anteriores são válidas, como sendo o conjunto dos estados de produção  $P$  tais que os estados  $A_1^*$  e  $A_2^*$ , dados nas Afirmações 2.6 e 2.13, estão sobre o segmento de reta de bifurcação secundária  $[E, W]$ . Mais precisamente, seja:

$$E_1^W = \{T^* \in \triangle W\overline{U}B \text{ tal que } \exists A_1^* \in [E, \overline{U}] \text{ e } \exists A_2^* \in [\overline{U}, W] \text{ com } T^* \in \mathcal{H}(A_1^*) \cap \mathcal{H}(A_2^*) \\ \text{ e } \sigma(T^*; A_1^*) = \sigma(T^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*)\}. \quad (2.3)$$

Note que os estados  $A_1^*$  não precisam cobrir todo o segmento  $[E, \overline{U}]$ , apesar disto

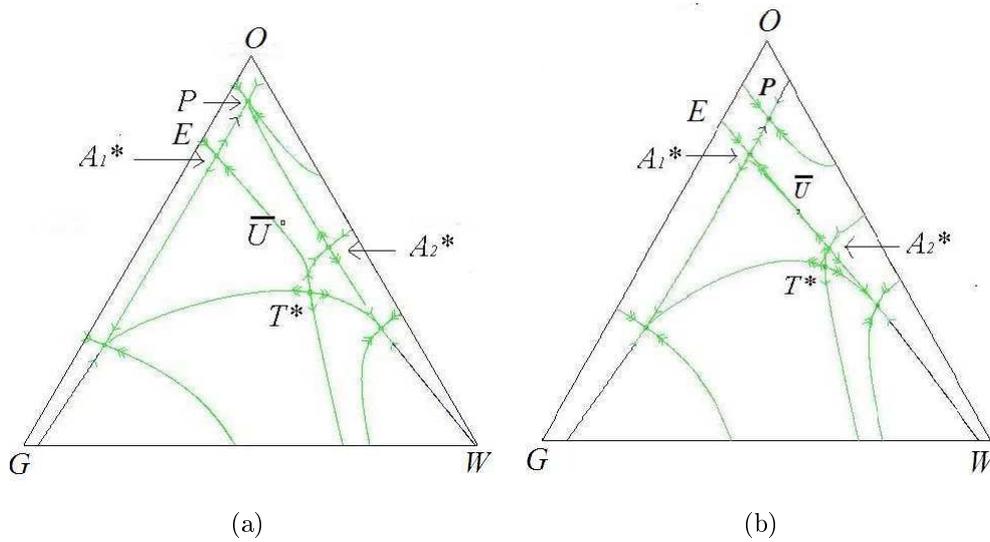


Figura 2.16: Órbitas do sistema de EDO's (A.18). (a) Mostrando a admissibilidade do choque de  $T^*$  para  $A_1^*$ , com  $A_1^* \in \triangle G\bar{U}E$ . (b) Mostrando a não admissibilidade do choque de  $T^*$  para  $A_1^*$ , com  $A_1^* \in [E, \bar{U}]$ .

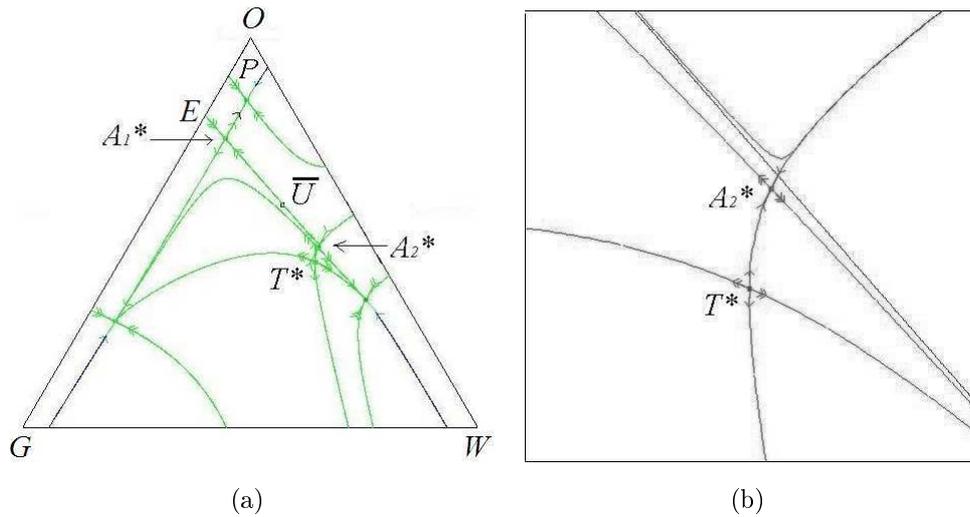


Figura 2.17: Órbitas do sistema de EDO's (A.18). (a) Mostrando a não admissibilidade do choque de  $T^*$  para  $A_1^*$ , com  $A_1^* \in \triangle EO\bar{U}$ . (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 2.17(a).

ocorrer neste caso, assim como os estados  $A_2^*$  não precisam cobrir o segmento  $[\bar{U}, W]$  por inteiro. O que ocorre aqui é que  $E_1^W$  é uma extensão-1 “dupla” do segmento  $[E, \bar{U}]$  e do segmento  $[\bar{U}, Q]$ , característica em  $E_1^W$ . Na realidade para obter este conjunto numericamente basta determinar a extensão-1 do segmento  $[E, \bar{U}]$  ou do segmento  $[\bar{U}, Q]$ .

Uma vez definido o conjunto  $E_1^W$ , vamos caracterizar a fronteira da região  $R_1$  no

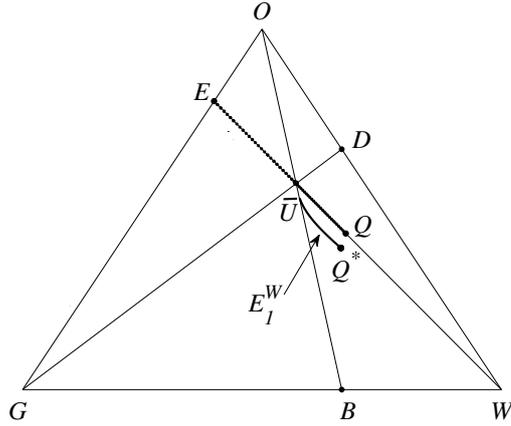


Figura 2.18: Extensão-1  $E_1^W$  dos segmentos  $[E, \bar{U}]$  e  $[\bar{U}, Q]$ , característica em  $E_1^W$  e segmentos de retas  $[G, D]$ ,  $[E, W]$  e  $[O, B]$ .

triângulo  $\triangle OE\bar{U}$  como uma extensão-1 de  $E_1^W$ , característica em  $E_1^W$  como a seguir:

$$F_1^G = \{P \in \triangle OE\bar{U}, P \notin [E, \bar{U}] \text{ tal que } \exists T^* \in E_1^W \text{ com } P \in \mathcal{H}(T^*) \\ \text{e } \sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)\}. \quad (2.4)$$

Portanto  $F_1^G$  é uma “terceira” extensão-1 de  $E_1^W$ , característica em  $E_1^W$ , além dos segmentos  $[E, \bar{U}]$  e  $[\bar{U}, W]$ .

Note que juntando as definições dos conjuntos  $E_1^W$  e  $F_1^W$ , temos a seguinte cadeia de igualdades como consequência da Regra do Choque Triplo:

$$\begin{aligned} \sigma(T^*; A_1^*) &= \sigma(T^*; A_2^*) = \sigma(T^*; P) = \sigma(A_1^*; P) = \sigma(A_2^*; P) \\ &= \sigma(A_1^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*), \quad \forall P \in F_1^G, \forall T^* \in E_1^W. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A parte da fronteira da vizinhança  $R_1$  que está no triângulo  $\triangle OE\bar{U}$  da Fig. 1.1, denotada por  $R_1^G$ , é a curva definida por  $F_1^G$  a qual foi obtida numericamente e está mostrada na Fig. 2.19.

No caso, o ponto de intersecção  $P_1^G$  de  $F_1^G$  com  $[G, O]$  na Fig. 2.19 é precisamente o ponto  $P_1$  obtido em (BARROS, 2010) quando foram descritas as soluções considerando apenas estados de produção  $P$  ao longo do lado  $[G, O]$ .

De maneira análoga definimos a parte da fronteira de  $R_1$  que está no triângulo  $\triangle O\bar{U}D$  como a seguir.

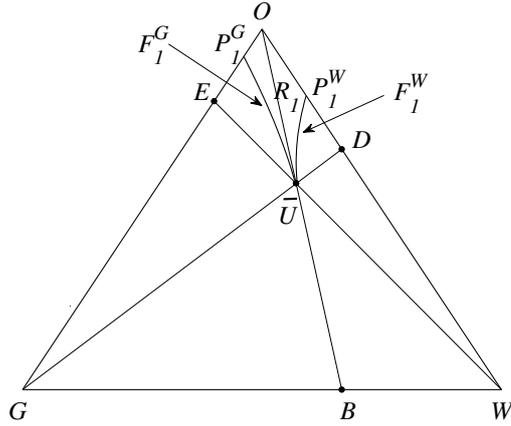


Figura 2.19: Vizinhança  $R_1$  do vértice  $O$  com fronteira inferior  $F_1 = F_1^G \cup F_1^W$ .

Seja

$$E_1^G = \{T^* \in \triangle G\bar{U}E \text{ tal que } \exists A_1^* \in [\bar{U}, D] \text{ e } \exists A_2^* \in [G, \bar{U}] \text{ com } T^* \in \mathcal{H}(A_1^*) \cap \mathcal{H}(A_2^*) \\ \text{ e } \sigma(T^*; A_1^*) = \sigma(T^*; A_2^*) = \lambda_1(T^*)\}. \quad (2.6)$$

Daí definimos a outra parte da fronteira representada na Fig. 2.19:

$$F_1^W = \{P \in \triangle O\bar{U}D, P \notin (\bar{U}, D) \text{ tal que } \exists T^* \in E_1^G \text{ com } P \in \mathcal{H}(T^*) \\ \text{ e } \sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*)\}. \quad (2.7)$$

A fronteira da vizinhança  $R_1$  do vértice  $O$ , que estamos procurando é então definida por

$$F_1 = F_1^G \cup F_1^W.$$

### 2.3.3 Estado $P$ sobre a Fronteira $F_1$ da Vizinhança $R_1$ de $O$ .

Neste caso consideramos o estado de produção  $P$  sobre a fronteira  $F_1$  exibida na Fig. 2.19. Como também não temos a expressão explícita da curva de Hugoniot para estados  $P$  sobre a fronteira  $F_1$ , obtemos a curva de Hugoniot por  $P$  numericamente, a qual está exibida na Fig. 2.20.

Todos os resultados são análogos aos resultados das Subseções 2.3.1 e 2.3.2, com a única diferença que neste caso específico os pontos  $A_1^*$  e  $A_2^*$  estão sobre os segmentos  $(E, \bar{U})$  e  $(\bar{U}, W)$  respectivamente.

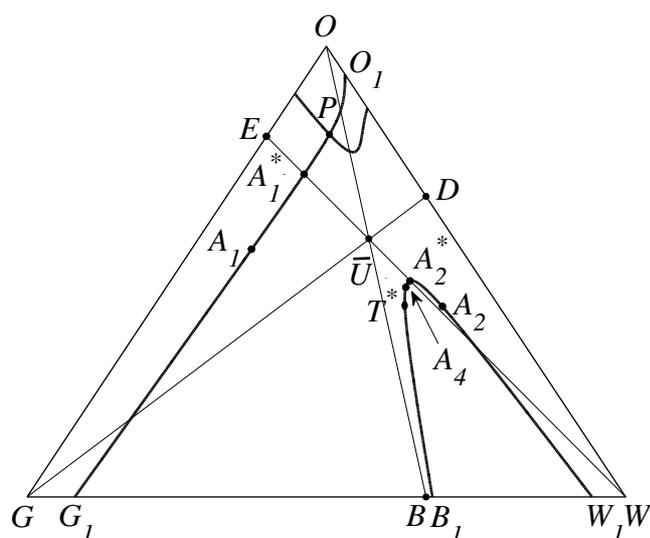


Figura 2.20: Curva de Hugoniot para um estado de produção  $P$  sobre a fronteira  $F_1^G$  e segmentos de reta de bifurcação  $[G, D]$ ,  $[E, W]$  e  $[O, B]$ .

Assim, para efeito de acompanhamento da descrição das soluções do problema de Riemann exibimos apenas a Fig. 2.21, sendo que as mesmas já estão descritas na justificativa do Resultado 2.2.

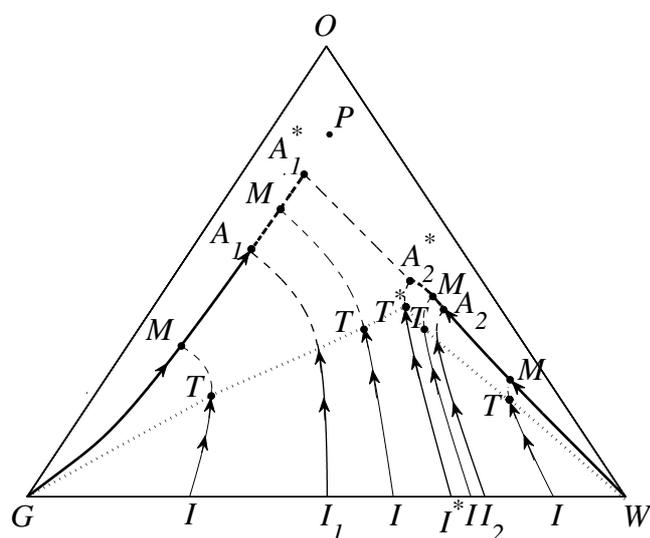


Figura 2.21: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para  $P \in F_1^G$ , de acordo com a localização do estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ .

Uma vez descrita as soluções dos problemas de Riemann para  $U_+ = P$  na vizinhança  $R_1$  do vértice  $O$ , inclusive na fronteira  $F_1$ , passemos a considerar o estado  $P$

além da fronteira  $F_1$  numa região que chamaremos de  $R_2$ , com fronteira “superior”  $F_1$  e fronteira “inferior”  $F_2$  a ser definida ao final.

## 2.4 Estado de Produção $P$ numa Região $R_2$ .

Considere um estado de produção  $P$  no interior da região  $R_2$  do triângulo  $\triangle OE\bar{U}$ , limitada “superiormente” pela fronteira  $F_1^G$  definida em (2.4) e “inferiormente” pela fronteira  $F_2$  que será definida mais adiante, após a descrição da solução para  $P$  próximo de  $F_1$ . Do mesmo modo que antes, vamos considerar  $R_2 = R_2^G \cup R_2^W$  em que  $R_2^G$  é a subregião à “esquerda” do segmento  $[O, \bar{U}]$  e  $R_2^W$  à “direita” de  $[O, \bar{U}]$ . Também por simplicidade vamos descrever as soluções do problema de Riemann apenas para  $P$  na subregião  $R_2^G$ , já que para  $P \in R_2^W$  a descrição é análoga.

Assim como no caso em que  $P \in R_1^G$ , a curva de Hugoniot por  $P$  mostrada na Fig. 2.22(a) consiste de um ramo local (não relevante para a nossa construção), do ramo local  $[G_1, O_1]$  e do ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$  contendo os pontos  $B_1, T^*, A_4, A_7, A_2$  e  $W_1$ . O ponto  $A_7$  é definido como sendo a intersecção de  $\mathcal{H}_N(P)$  com o segmento  $[\bar{U}, W]$ .

O ponto  $Z$ , na Fig. 2.22(a), é definido como sendo a intersecção do ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$  com o segmento de reta  $[E, \bar{U}]$ . A curva de Hugoniot pelo estado  $Z$  pode ser vista na Fig. 2.22(b). Ela consiste dos ramos locais  $[G_Z, O_Z]$  e  $[E, W]$  e do ramo não local  $\mathcal{H}_N(Z)$  contendo os estados  $B_Z, A_5$  e  $D_Z$ . O ponto  $A_5$  é definido como sendo a intersecção de  $\mathcal{H}_N(Z)$  com o segmento de reta  $[\bar{U}, W]$ , ou seja, é o ponto de 1-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(Z)$ . Para melhorar a visualização, exibimos na Fig. 2.23 uma ampliação da Fig. 2.22(b) numa vizinhança do ponto  $A_5$ .

**Afirmção 2.16** *Fixado  $U_+ = P$ , com  $P$  na região  $R_2^G$ , existem dois segmentos em  $\mathcal{H}_N(P)$ , indicados por  $[T^*, B_1]$  e  $[A_2, A_4]$  na Fig. 2.22(a), tais que se  $M \in (T^*, B_1)$  ou  $M \in (A_2, A_4)$ , então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque-2 de Lax. Também existe um segmento no ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$ , indicado por  $[A_1, P]$  na Fig. 2.22(a), tal que se  $M \in (A_1, P)$ , então a descontinuidade de  $M$  para  $P$  é um choque-2 de Lax.*

**Justificativa.** A justificativa é análoga à das Afirmções 2.1 e 2.9 e baseia-se nas Figs. 2.24(a) e 2.24(b). ■

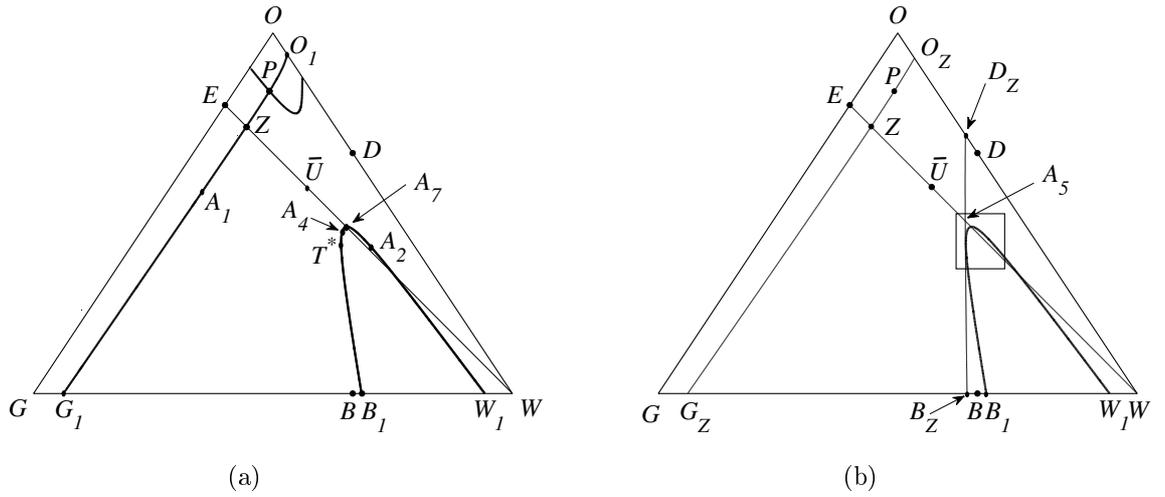


Figura 2.22: (a) Curva de Hugoniot por um estado  $P$  na subregião  $R_2^G$  e segmento  $[E, W]$ . (b) Curva de Hugoniot por  $Z$  em (a) e o ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$ .

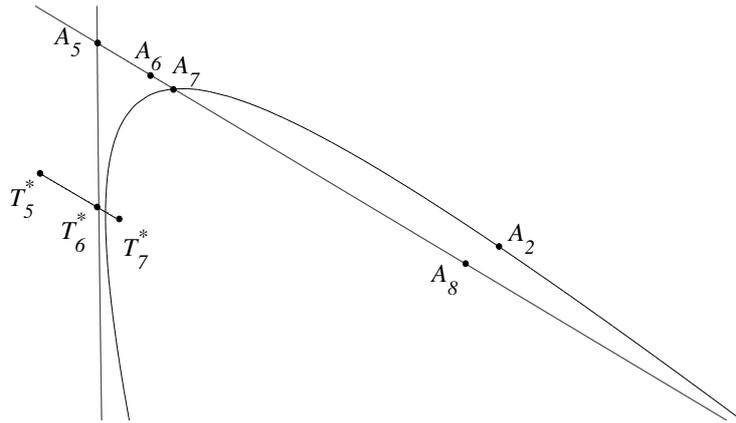


Figura 2.23: Ampliação da região retangular contida na Fig. 2.22(b) mostrando detalhes de  $\mathcal{H}_N(P)$  e de  $\mathcal{H}(Z)$ .  $[T_5^*, T_7^*]$  é a extensão-1 de  $[A_5, A_7]$ , característica em  $[T_5^*, T_7^*]$ .

**Obs. 2.13** O estado  $A_2$  localiza-se no triângulo  $\triangle W D \bar{U}$  e  $A_4$  em  $\triangle W \bar{U} B$  da Fig. 1.1.

**Obs. 2.14** Perceba ainda nas Figs. 2.24(a) e 2.24(b) que temos as igualdades

$$\sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2), \quad \sigma(A_4; P) = \lambda_1(A_4),$$

$$\sigma(T^*; P) = \lambda_1(T^*), \quad \sigma(A_1; P) = \lambda_2(A_1).$$

ilustrando o Teorema de Bethe-Wendroff.

**Afirmção 2.17** Considere  $U_+ = P$ , com  $P \in R_2^G$  e  $A_7$  o ponto de interseção de  $\mathcal{H}_N(P)$  com o segmento de reta  $[\bar{U}, W]$ . Então os choques de  $M$  para  $P$ , com  $M$

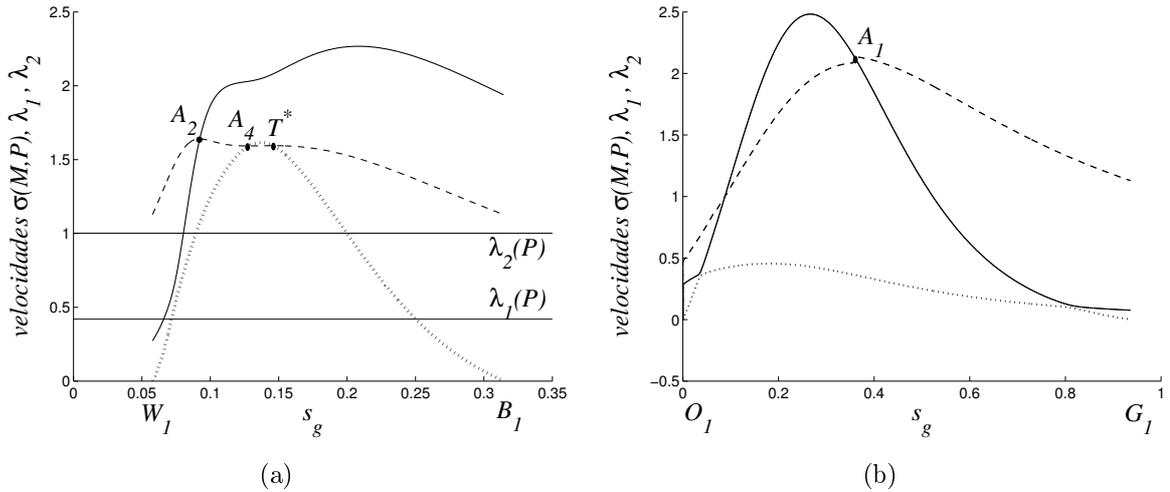


Figura 2.24: Gráficos de  $\lambda_1(M)$ ,  $\lambda_2(M)$  e  $\sigma(M;P)$ . (a)  $M$  variando ao longo do ramo não local  $\mathcal{H}_N(P)$ , exibido na Fig. 2.22(a) ilustrando a existência dos pontos  $A_2$ ,  $A_4$  e  $T^*$  e retas de alturas  $\lambda_1(P)$  e  $\lambda_2(P)$ . (b)  $M$  variando ao longo do ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$ , exibido na Fig. 2.22(a) ilustrando a existência do ponto  $A_1$ .

nos segmentos  $[A_1, P]$  e  $[A_2, A_7]$  (ilustrados nas Figs. 2.22(a) e 2.23) são admissíveis segundo a condição de entropia de viscosidade com matriz de viscosidade sendo a identidade.

**Justificativa.** Considere o sistema de EDO's (A.18) nas três situações a seguir. Na Fig. 2.25(a) mostramos as variedades estáveis e instáveis do ponto de equilíbrio  $M$ , com  $M$  no segmento  $(A_2, A_7)$ , provando a existência de uma órbita conectando  $M$  a  $P$ . Mostramos também através da Fig. 2.25(b) que para  $M = A_7$  a conexão entre  $M$  e  $P$  é “quebrada”, havendo as conexões de  $A_7$  (sela) para  $Z$  (sela) e de  $Z$  para  $P$  (atrator). Já na Fig. 2.26 tomamos um estado  $M$  em  $\mathcal{H}_N(P)$  com  $M$  no segmento  $(A_7, A_4]$  mostrando que não há órbitas conectando  $M$  à  $P$ . ■

**Afirmção 2.18** *Sejam  $U_+ = P \in R_2^G$  e  $Z$  o ponto de interseção do ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$  com o segmento de reta  $[E, \bar{U}]$  como nas Figs. 2.22(a) e 2.22(b). Então curva de Hugoniot por  $Z$  possui um segmento sobre  $[\bar{U}, W]$  indicado por  $[A_5, A_8]$  na Fig. 2.23, tal que se  $K \in (A_5, A_8)$ , então a descontinuidade de  $K$  para  $Z$  é um choque de cruzamento.*

**Justificativa.** Note que  $\mathcal{H}(Z)$  foi obtida explicitamente na Proposição 1.2, logo os gráficos e desigualdades aqui são precisos. Considerando  $K$  variando ao longo do ramo  $[E, W]$  de  $\mathcal{H}(Z)$  na Fig. 2.22(b) e exibindo na Fig. 2.27 os gráficos de  $\sigma(K; Z)$ ,  $\lambda_1(K)$ ,

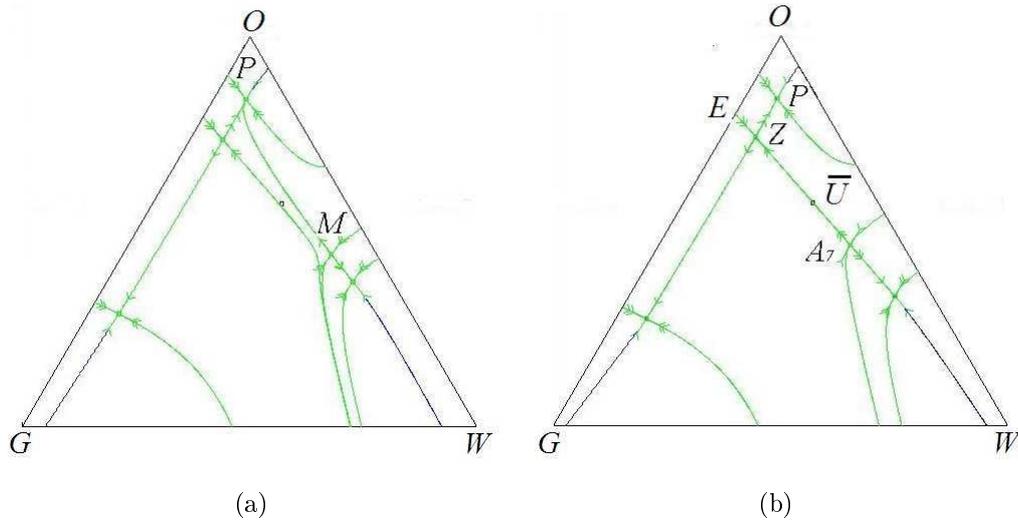


Figura 2.25: Órbitas do sistema de EDO's (A.18). (a) Mostrando admissibilidade do choque de  $M$  para  $P$  com  $M \in [A_2, A_7]$ . (b) Mostrando admissibilidade do choque de  $A_7$  para  $Z$ .

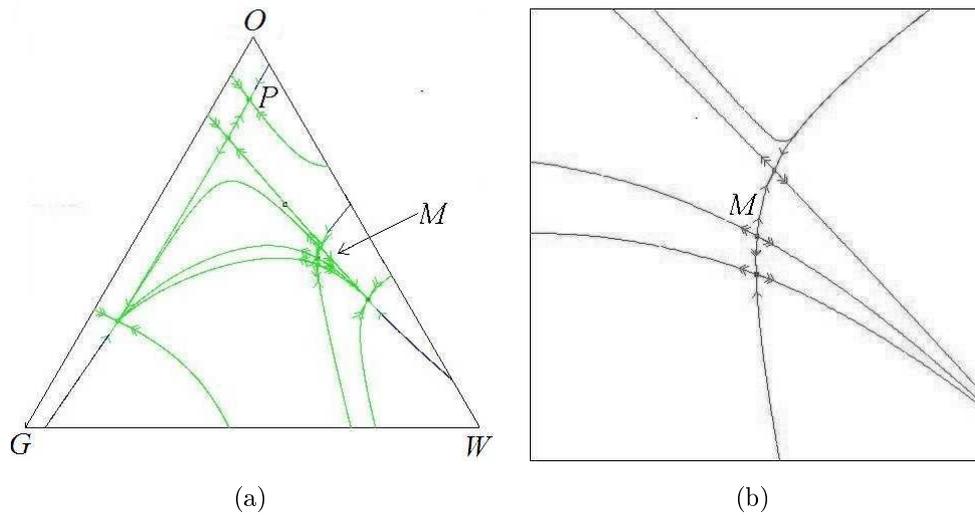


Figura 2.26: (a) Órbitas do sistema de EDO's (A.18) mostrando a não admissibilidade do choque de  $M$  para  $P$  com  $M \in (A_7, A_4] \subset \mathcal{H}_N(P)$ . (b) Ampliação da região retangular contida na Fig. 2.26(a) mostrando que as variedades instáveis de  $M$  não podem atingir  $P$ .

$\lambda_2(K)$  e as retas de alturas  $\lambda_1(Z)$  e  $\lambda_2(Z)$ , verificamos a existência do segmento  $(A_5, A_8)$  tal as desigualdades (A.15) que definem um choque de cruzamento são satisfeitas. ■

**Obs. 2.15** Na Fig. 2.27 o ponto  $A_8$  está mais uma vez ilustrando o Teorema de Bethe-Wendroff e o ponto  $A_5$  ilustrando o ponto de 1-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(Z)$ .

**Afirmção 2.19** Nas mesmas hipóteses da Afirmção 2.18, se  $K \in [A_5, A_8]$  então o choque de  $K$  para  $Z$  satisfaz a condição de entropia de viscosidade com matriz de

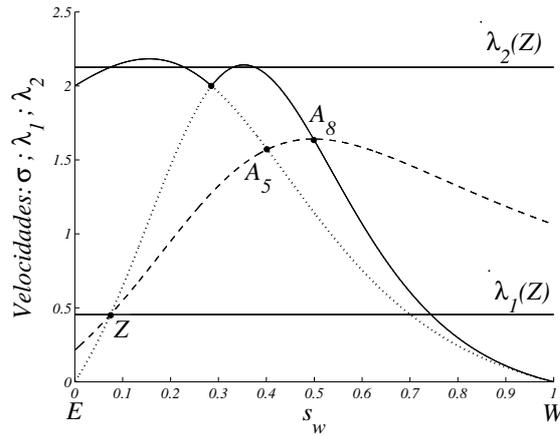


Figura 2.27: Gráficos de  $\lambda_1(K)$ ,  $\lambda_2(K)$ ,  $\sigma(K; P)$  com  $K$  ao longo do ramo local  $[E, W]$  exibido na Fig. 2.22(b) e retas de alturas  $\lambda_1(Z)$  e  $\lambda_2(Z)$  mostrando o segmento do choque de cruzamento  $(A_5, A_8)$  da Fig. 2.23.

viscosidade sendo a identidade, isto é,  $(A_5, A_8)$  corresponde à um segmento de choque transicional.

**Justificativa.** Veja na Fig. 2.25(b) a órbita conectando  $M = A_7 \in [A_5, A_8]$  ao estado  $Z$ . Para outros estados  $M \in [A_5, A_8]$  esta conexão é mantida. ■

**Afirmção 2.20 (Compatibilidade de velocidades de choque/choque)** *Sejam  $U_+ = P \in R_2^G$  e  $Z$  o ponto de interseção do ramo local  $[O_1, G_1]$  de  $\mathcal{H}(P)$  com o segmento de reta  $[E, \bar{U}]$  como nas Figs. 2.22(a) e 2.22(b). Considere  $K$  variando ao longo do segmento  $[A_5, A_8]$  da Fig. 2.23 correspondente a choques de  $K$  para  $Z$  admissíveis como na Afirmção 2.19. Então  $\sigma(K; Z) \leq \sigma(Z; P)$ , isto é, o choque de  $K$  para  $Z$  possui velocidade compatível com a velocidade de choque de  $Z$  para  $P$  na solução do problema de Riemann, com estado à esquerda  $U_- = K$  e estado à direita  $U_+ = P$ , se e somente se  $K \in [A_5, A_7]$ .*

**Justificativa.** Considere  $K$  variando ao longo do segmento  $[A_5, A_8]$  de  $\mathcal{H}(Z)$  da Fig. 2.23. Exibindo na Fig. 2.28(a) o gráfico da velocidade de choque  $\sigma(K; Z)$  e a reta de altura  $\sigma(Z; P)$  vemos que existe uma única interseção destes gráficos num ponto que por enquanto denotaremos por  $J$ . Assim da regra do choque triplo temos que  $J \in \mathcal{H}(P)$  e como, segundo a Fig. 2.23, a única interseção de  $\mathcal{H}_N(P)$  com o segmento  $[A_5, A_8]$  ocorre em  $A_7$ , segue que  $J = A_7$ .

Também observando a Fig. 2.28(a) vemos que  $\sigma(K; Z) \leq \sigma(Z; P)$ , para  $K \in [A_5, A_7]$  e  $\sigma(K; Z) > \sigma(Z; P)$  para  $K \in (A_7, A_8]$ . ■

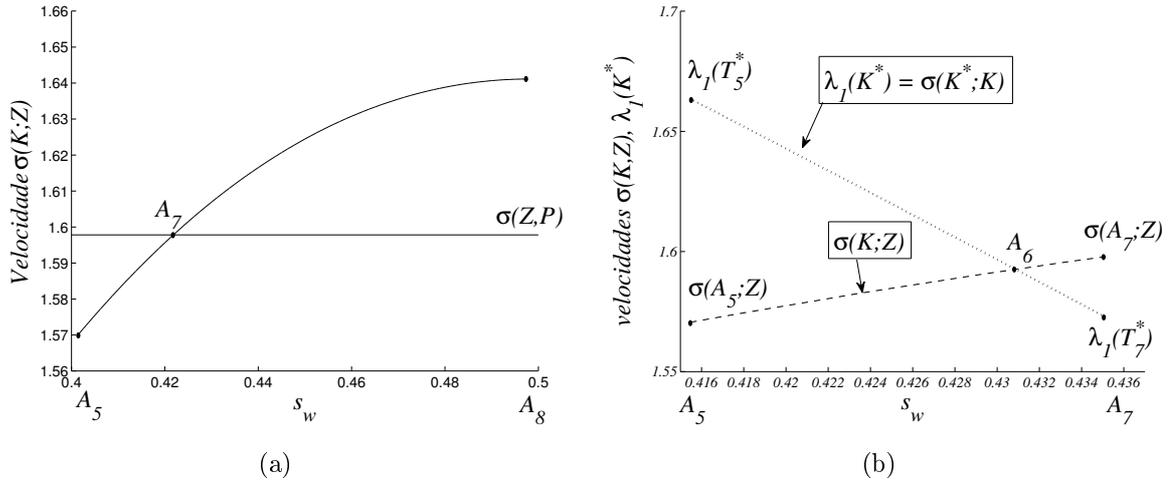


Figura 2.28: (a) Gráfico de  $\sigma(K;Z)$  com  $K$  ao longo do segmento  $[A_5, A_8]$  de  $\mathcal{H}(Z)$  e reta de altura  $\sigma(Z;P)$  mostrando que  $\sigma(A_7;P) = \sigma(Z;P)$ . (b) Gráficos da velocidades de choque  $\sigma(K;Z)$ , com  $K \in [A_5, A_7]$ , e da velocidade característica  $\lambda_1(K^*)$ , com  $K^* \in [T_5^*, T_7^*]$  e tal que  $\lambda_1(K^*) = \sigma(K^*;K)$ .

**Afirmção 2.21 (Compatibilidade de velocidades de choque/choque)** *Considere  $U_+ = P$ , com  $P$  na região  $R_2^G$ . Sejam  $A_7$  o ponto de intersecção de  $\mathcal{H}_N(P)$  com  $[\bar{U}, W]$  e  $A_5$  o ponto de 1-bifurcação de  $\mathcal{H}(Z)$  também em  $[\bar{U}, W]$ . Considere  $K$  variando ao longo do segmento  $[A_5, A_7]$  de  $\mathcal{H}(Z)$  (Figs. 2.22(b) e 2.23) e  $K^*$  sua extensão-1 com  $\sigma(K^*;K) = \lambda_1(K^*)$  definindo o segmento  $[T_5^*, T_7^*]$  na Fig. 2.23. Então existe um único ponto  $A_6 \in \mathcal{H}(Z)$ , com  $A_6 \in [A_5, A_7]$ , tal que o choque de  $K^*$  para  $K$  tem velocidade compatível com o choque de  $K$  para  $Z$ , se e somente se  $K \in [A_6, A_7]$ , isto é,*

$$\sigma(K^*;K) \leq \sigma(K;Z), \quad \forall K \in [A_6, A_7], \quad \forall K^* \in [T_6^*, T_7^*].$$

**Justificativa.** Consideramos  $K$  variando ao longo do segmento  $[A_5, A_7]$  e exibimos na Fig. 2.28(b) os gráficos da velocidade característica  $\lambda_1(K^*) = \sigma(K^*;K)$  e da velocidade de choque  $\sigma(K;Z)$  mostrando a existência e unicidade de  $A_6$ . Então observando a Fig. 2.28(b) vemos que para  $K \in [A_6, A_7]$ , temos  $\lambda_1(K^*) = \sigma(K^*;K) \leq \sigma(K;Z)$ , caracterizando a compatibilidade geométrica entre as velocidades dos choques de  $K^*$  para  $K$  e de  $K$  para  $Z$ . ■

Uma vez determinados os segmentos de curva de onda relevantes em  $W_-^2(P)$  e em  $W_-^t(Z)$  temos o resultado principal desta seção.

**Resultado 2.3** *Fixado um estado de produção  $P$ , com  $P$  na região  $R_2^G$ , e variando o estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ , então uma solução do problema de*

Riemann (1.10)-(1.11) com  $U_- = I$  e  $U_+ = P$  consiste genericamente e exclusivamente de

- (a) uma seqüência de uma onda (composta) da família-1 de  $I$  para um estado intermediário  $M$ , seguida de uma onda da família-2 (composta ou choque) de  $M$  para  $P$ , ou
- (b) de uma seqüência de uma onda (composta) da família-1 de  $I$  para um estado intermediário  $K$ , seguida de um choque (transicional) de  $K$  para um estado intermediário  $Z$ , seguida de um choque-2 de Lax de  $Z$  para  $P$ .

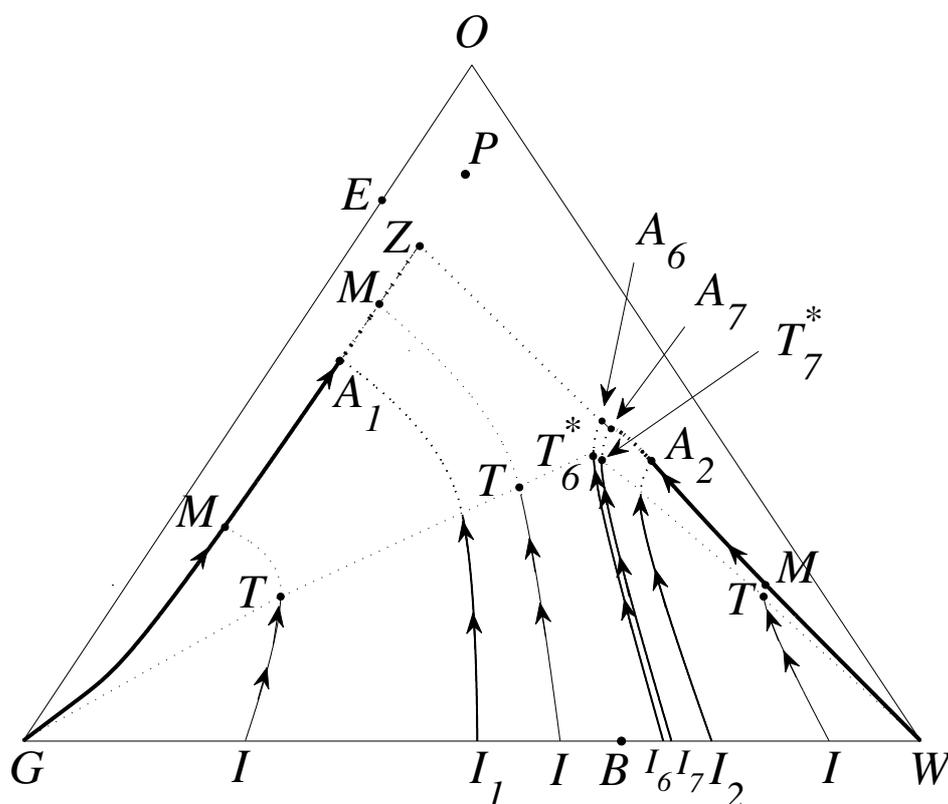


Figura 2.29: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para  $P \in R_2^G$ , de acordo com a localização do estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ .

**Justificativa.** Considere os estados  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $T_6^*$  e  $T_7^*$  definidos nas Afirmações 2.16 - 2.21 e as curvas de onda reversas  $W_-^1(A_1)$ ,  $W_-^1(A_2)$ ,  $W_-^1(T_6^*)$  e  $W_-^1(T_7^*)$ . As interseções destas curvas com o lado  $[W, G]$  definem os pontos  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_6$  e  $I_7$  como mostrado na Fig. 2.29.

Com esta divisão do lado  $[G, W]$  nos segmentos  $[G, I_1]$ ,  $[I_1, I_6]$ ,  $[I_6, I_7]$ ,  $[I_7, I_2]$  e  $[I_2, W]$  temos as soluções do Problema de Riemann como a seguir:

- (i) Se  $I = G$ , ou seja, se o estado inicial à esquerda corresponder a apenas gás, então a solução do Problema de Riemann é dada por uma onda composta-2, a qual é constituída por uma rarefação-2 de  $G$  para  $A_1$ , seguida de um choque de  $A_1$  para  $P$ , com  $\sigma(A_1; P) = \lambda_2(A_1)$ .
- (ii) Se  $I \in (G, I_1)$  ou  $I \in (I_2, W)$ , então uma sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann correspondente é constituída por uma composta-1 de  $I$  para  $M$ , onde  $M$  é um estado sobre os segmentos  $(G, A_1)$  ou  $(A_2, W)$ , respectivamente, seguida de uma composta-2 de  $M$  para  $P$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para  $T$  (extensão-1 do ponto  $M$  na curva  $W_-^2(P)$ ) seguida de um choque de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ . Em cada caso a composta-2 é formada por uma rarefação de  $M$  para  $A_i$ , seguida de um choque de  $A_i$  para  $P$ , com  $\sigma(A_i; P) = \lambda_2(A_i)$ ,  $i = 1, 2$ .
- (iii) Se  $I \in [I_1, I_6)$  ou  $I \in (I_7, I_2]$ , então uma sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann correspondente é constituída por uma composta-1 de  $I$  para  $M$ , onde  $M$  é um estado no segmento  $[A_1, Z)$  se  $I \in [I_1, I_6)$  ou no segmento  $(A_7, A_2]$  se  $I \in (I_7, I_2]$ , seguida de um choque de  $M$  para  $P$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para  $T$  (extensão -1 do ponto  $M$  na curva  $W_-^2(P)$ ) seguida de um choque de  $T$  para  $M$ , com  $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$ .
- (iv) Se  $I \in [I_6, I_7]$ , então a sequência de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de  $I$  para  $K$ , com  $K$  sobre o segmento  $[A_6, A_7]$  de  $\mathcal{H}(Z)$ , seguida de um choque (transicional) de  $K$  para  $Z$  e depois de um choque-2 de Lax de  $Z$  para  $P$ . A composta-1 é formada por uma rarefação-1 de  $I$  para um estado  $T$  sobre o segmento  $[T_6^*, T_7^*]$  extensão-1 do segmento  $[A_6, A_7]$  seguida de um choque de  $T$  para  $K$ , com  $\sigma(T; K) = \lambda_1(T)$ .
- (v) Se  $I = W$ , ou seja, se o estado inicial à esquerda corresponder a apenas água, então a solução do problema de Riemann é dada por uma onda composta-2, a qual é constituída por uma rarefação-2 de  $W$  para  $A_2$ , seguida de um choque de  $A_2$  para  $P$ , com  $\sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2)$ .

■

### Fronteira “inferior” da região $R_2$ .

Como antes vamos considerar apenas a parte da fronteira “inferior” de  $R_2^G$  correspondente à parte de  $R_2$  no triângulo  $\triangle OE\bar{U}$ . Denotamos esta fronteira por  $F_2^G$  como na Fig. 2.30. Ela é obtida ao perturbar o estado de produção  $P$  interiormente à região  $R_2^G$  na direção do segmento  $[E, \bar{U}]$  da Fig. 1.1, provocando que o ponto  $A_2$  de  $\mathcal{H}_N(P)$ , localizado no triângulo  $\triangle WD\bar{U}$ , com  $\sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2)$ , atinja o segmento  $[\bar{U}, W]$ . Portanto esta fronteira também é definida como um conjunto de extensão de parte do segmento  $[\bar{U}, W]$ , só que neste caso extensão-2, característica em  $[\bar{U}, W]$ . Assim definimos

$$F_2^G = \{P \in \triangle OE\bar{U}, P \notin [E, \bar{U}] \text{ tal que } \exists A_2 \in [\bar{U}, W] \text{ com } P \in \mathcal{H}(A_2) \\ \text{ e } \sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2)\}. \quad (2.8)$$

O fato peculiar aqui observado numericamente é que quando  $P$  atinge a fronteira  $F_2^G$ , como consequência os pontos  $A_2$ ,  $A_7$  e  $A_8$  passam a coincidir num só que continuamos a denominar apenas por  $A_2$ .

Uma vez definida e determinada a fronteira  $F_2^G$  da Fig. 2.30, variando  $P$  ao longo da mesma até que  $P$  atinja o segmento  $[E, \bar{U}]$  e portanto  $P$  passando a coincidir com  $Z$  (por definição de  $Z$ ), temos que  $P = Z$  é o ponto de 2-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(A_2)$ . Denotando neste caso extremo  $P = Z$  por  $Z^G$  e  $A_2$  por  $A_2^W$  (veja Fig. 2.30) temos como consequência das definições que

$$\lambda_2(Z^G) = \sigma(A_2^W; Z^G) = \lambda_2(A_2^W),$$

donde concluímos que  $Z^G$  e  $A_2^W$  são pontos do chamado conjunto de contato duplo (ISAACSON et al, 1992) do sistema (1.1)-(1.3).

De maneira análoga definimos a outra parte da fronteira “inferior” de  $R_2$  no triângulo  $\triangle \bar{U}DO$  como

$$F_2^W = \{P \in \triangle O\bar{U}D, P \notin [\bar{U}, D] \text{ tal que } \exists A_2 \in [G, \bar{U}] \text{ com } P \in \mathcal{H}(A_2) \\ \text{ e } \sigma(A_2; P) = \lambda_2(A_2)\}. \quad (2.9)$$

Como no caso anterior definimos o ponto  $Z^W$  como sendo a interseção de  $F_2^W$  com  $[\bar{U}, D]$  e que é o ponto de 2-bifurcação secundária de  $\mathcal{H}(A_2^G)$  (veja Fig. 2.30).

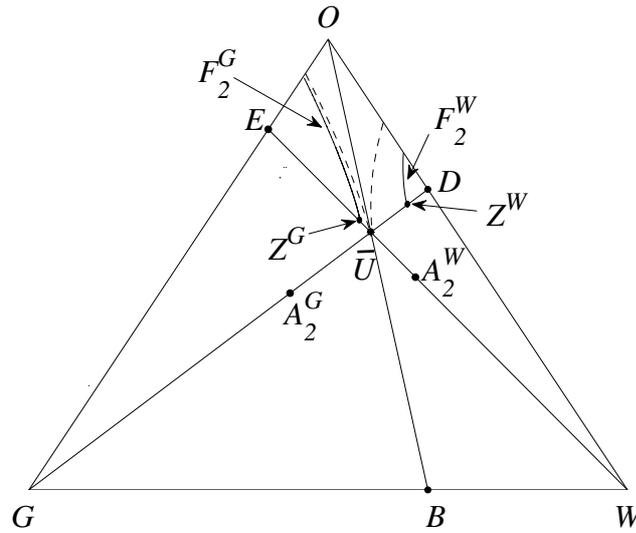


Figura 2.30: Fronteira  $F_2$  (linha contínua) e fronteira  $F_1$  (linha tracejada).

Finalmente, definimos a fronteira “inferior” de  $R_2$  como mostrado na Fig. 2.30

$$F_2 = F_2^G \cup [Z^G, \bar{U}] \cup [\bar{U}, Z^W] \cup F_2^W.$$

Para concluir, temos que nos casos limites em que o estado de produção  $P$  pertença a fronteira  $F_2^G$  a única mudança na solução do problema de Riemann, ilustrada na Fig. 2.31, com relação ao caso em que  $P$  pertencia ao interior da região  $R_2^G$  é que a onda composta-2 para  $I$  no segmento  $(I_2, W]$  do lado  $[G, W]$  passa a ser uma composta transicional, pois  $A_2^W \equiv A_8 \equiv A_7 \equiv A_2$  passa a ser a extremidade do segmento de choque transicional  $[A_6, A_7]$  do caso  $P \in R_2^G$ , com a particularidade de que o segmento de rarefação-2 está ao longo do segmento de reta  $[E, W]$ .

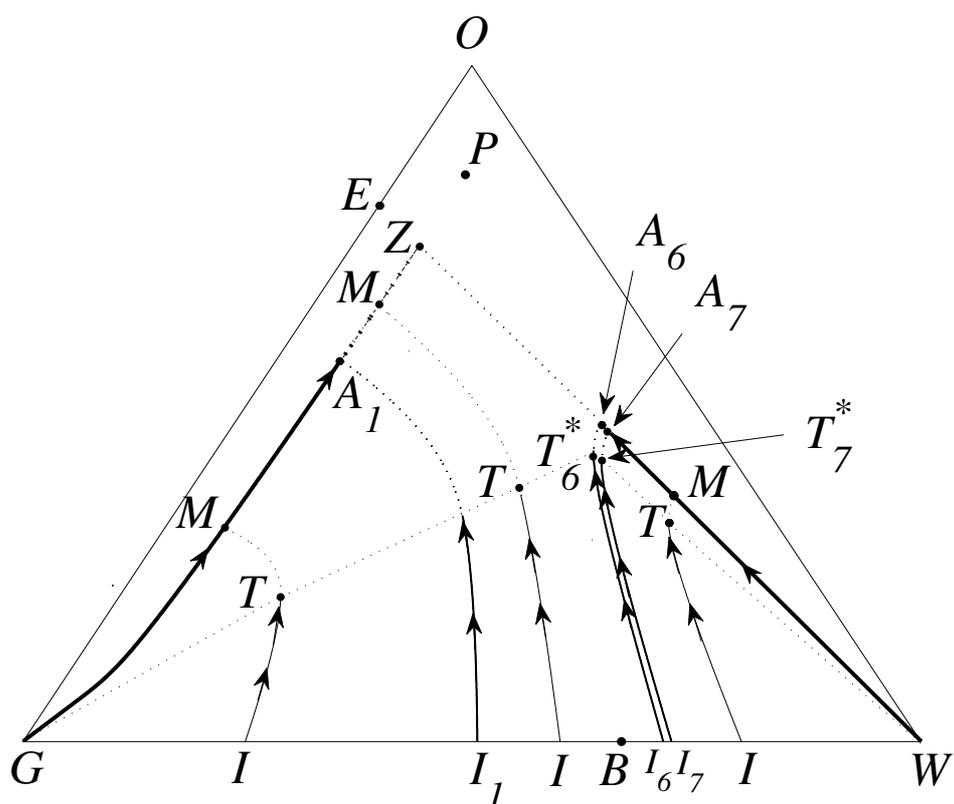


Figura 2.31: Representação das diversas possibilidades para a solução do problema de Riemann para  $P \in F_2^G$ , de acordo com a localização do estado de injeção  $I$  ao longo do lado  $[G, W]$ .

# Apêndice A

## Resultados Básicos sobre Leis de Conservação

### A.1 Introdução.

Este Apêndice tem por objetivo listar os principais resultados sobre a construção da solução de um problema de Riemann para um sistema de leis de conservação em geral e que são utilizados neste trabalho, tornando-o auto suficiente. Para um estudo mais detalhado sugerimos por exemplo (FURTADO, 1989), (ISAACSON, MARCHESIN, PLOHR, 1990), (SMOLLER, 1983), (SERRE, 1999) e (SOUZA, 1989).

O problema de Riemann para um sistema unidimensional de  $n$  leis de conservação em  $n$ -variáveis, centrado na posição  $x = 0$ , é um caso particular do problema de Cauchy para o sistema

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(U(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{A.1})$$

sujeito à condição inicial do tipo salto, como a seguir

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x < 0, \\ U_+, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

em que  $U$  pertencente a um domínio  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$  representa as variáveis de estados e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de fluxo associada, normalmente considerada de classe  $C^2(\Omega)$ . Em dinâmica dos fluidos o conjunto  $\Omega$  é geralmente referido como o espaço de estados e  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  é referido como o espaço físico- $xt$ . No caso  $U_-$  e  $U_+$  são dois estados que

representam funções constantes no espaço físico- $xt$

**Definição A.1** *O sistema (A.1) é dito hiperbólico em  $\Omega$  quando a matriz jacobiana de  $F$ , denotada por  $DF(U) = A(U)$ , tem autovalores reais,  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , para todo  $U \in \Omega$ . Se as desigualdades forem todas estritas o sistema é dito estritamente hiperbólico. Estados onde ocorrem a igualdade entre velocidades características, são ditos pontos de singularidade hiperbólica do sistema. No caso de existir uma singularidade hiperbólica isolada  $\bar{U}$  tal que  $DF(\bar{U})$  seja múltipla da matriz identidade, o ponto  $\bar{U}$  é chamado ponto umbílico.*

## A.2 Soluções Fundamentais.

O sistema de equações (A.1) com valores iniciais (A.2) resulta num problema independente de escala; queremos dizer com isto que uma mudança de coordenadas  $(x, t) \rightarrow (ax, at)$ , com  $a > 0$ , não altera nem o sistema de equações nem as condições iniciais. Assim, é esperado que as soluções contínuas do problema de Riemann sejam constantes ao longo de retas pela origem, variando de acordo com suas inclinações, isto é,  $U(x, t) = \mathcal{U}(x/t)$ , onde  $\mathcal{U}$  é uma função em  $\mathbb{R}^n$  de apenas uma variável, no caso a razão  $x/t$ .

### A.2.1 Soluções Contínuas.

Seja  $\xi = x/t$ . Supondo que  $\mathcal{U}(\xi)$  seja uma solução clássica do sistema (A.1), por substituição direta obtemos

$$[A(\mathcal{U}(\xi)) - \xi I]\mathcal{U}'(\xi) = 0, \quad (\text{A.3})$$

em que  $I$  é a matriz identidade do  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{U}'(\xi)$  representa o vetor derivada de  $\mathcal{U}(\xi)$ . Assim se  $\mathcal{U}'(\xi) \neq 0$ , da Eq. (A.3) segue que  $\mathcal{U}'(\xi)$  deve ser um vetor característico (à direita) da matriz  $A(U) \equiv DF(U)$  associado à velocidade característica  $\lambda(U) = \xi$ . Sendo assim, as soluções suaves do sistema (A.1) devem estar sobre as curvas integrais dos campos característicos (à direita) de  $A(U)$  no espaço de estados  $\Omega$ . Logo, satisfazem ao sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\mathcal{U}'(\xi) = e^i(\mathcal{U}(\xi)), \quad (\text{A.4})$$

em que  $e^i$  denota um vetor característico (à direita) da matriz Jacobiana  $A(U)$ , associado à velocidade característica  $\lambda_i(U)$ .

**Definição A.2** Dizemos que um estado constante  $U_+$  é conectável ao estado constante  $U_-$  por uma onda de rarefação- $i$ , se  $U_-$  e  $U_+$  estão na mesma curva integral do  $i$ -ésimo campo característico definido por (A.4) e  $\lambda_i(U(\xi))$  é crescente com  $\xi$  ao longo de tal curva integral no sentido de  $U_-$  para  $U_+$ .

Na Definição (A.2), impor que  $\lambda_i$  seja crescente de  $U_-$  para  $U_+$ , significa que no espaço físico- $xt$  a inclinação  $\xi = x/t$  deve ser estritamente crescente de  $\xi_- = \lambda_i(U_-)$  para  $\xi_+ = \lambda_i(U_+)$  de modo que as retas características de inclinação  $\lambda_i(U(\xi))$  cubram todo o setor do semiplano- $xt$ ,  $t > 0$ , entre as retas de inclinações  $\lambda_i(U_-)$  e  $\lambda_i(U_+)$ , conforme ilustrado na Fig. A.1(a).

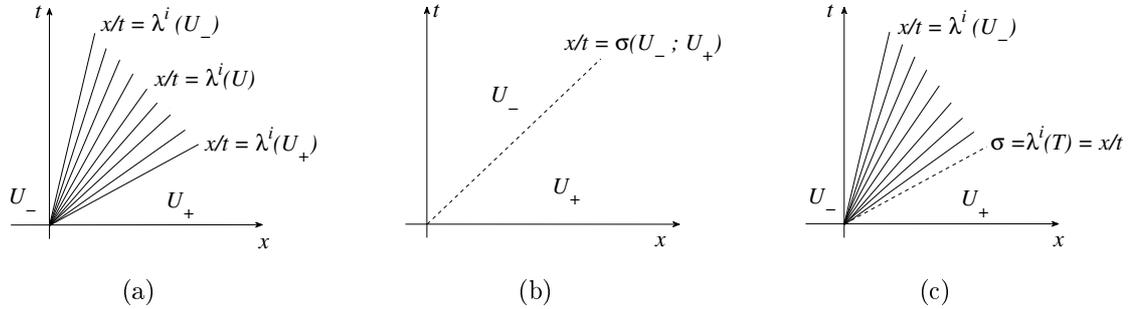


Figura A.1: Soluções de Problemas de Riemann. (a) Por uma onda de rarefação. (b) Por uma onda de choque. (c) Por uma onda composta rarefação-choque.

**Definição A.3** Uma curva de rarefação- $i$  por um estado inicial  $U_-$  é o conjunto dos estados  $U \in \Omega$  que podem ser conectados ao estado  $U_-$  por uma onda de rarefação- $i$ .

Uma solução (fraca) para o problema de Riemann (A.1)-(A.2) por uma onda de rarefação- $i$  (no espaço físico- $xt$ ) tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x \leq \lambda_i(U_-)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U_-)t \leq x \leq \lambda_i(U_+)t, \\ U_+, & \text{se } \lambda_i(U_+)t \leq x. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

É importante observar que uma solução por uma onda de rarefação é contínua, mas não é necessariamente diferenciável ao longo das retas  $x/t = \lambda_i(U_-)$  e  $x/t = \lambda_i(U_+)$ .

**Definição A.4** O  $i$ -ésimo campo característico de  $A(U)$  é genuinamente não linear num subconjunto  $\Omega' \subset \Omega$ , se  $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) \neq 0$ , para todo  $U \in \Omega'$ . Por outro lado, se  $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) = 0$ , para todo  $U \in \Omega'$  diz-se que o campo é linearmente degenerado em  $\Omega'$ .

**Definição A.5** *O conjunto de inflexão associado à  $i$ -ésima família característica é formado pelos estados  $U \in \Omega$  tais que  $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) = 0$ . Ou seja, o conjunto de inflexão é formado pelos pontos críticos das velocidades características, restritas as curvas integrais dos respectivos campos característicos dados pela Eq. (A.4).*

Das Definições (A.2)-(A.5) segue que pontos num conjunto de inflexão em geral estão associados com pontos iniciais ou pontos finais de curvas de rarefação.

## A.2.2 Soluções Descontínuas.

As soluções descontínuas têm que, de certa forma, satisfazer a Lei de Conservação; mais propriamente satisfazem a sua forma integral, ver (LAX, 1957),

$$\frac{d}{dt} \int_a^b U(x, t) dx = F(U(a, t)) - F(U(b, t)), \quad (\text{A.6})$$

para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a < b$ .

Suponhamos que exista uma descontinuidade de  $U$  ao longo de uma reta  $x/t = \sigma_0$ , com limite esquerdo  $U_-$  e limite direito  $U_+$ . Então esta descontinuidade satisfaz à lei integral A.6 se e só se satisfazer a relação de Rankine-Hugoniot a seguir.

**Definição A.6** *Chama-se relação de Rankine-Hugoniot entre a descontinuidade envolvendo  $U_-$  e  $U_+$ , de velocidade  $\sigma_0$ , à expressão*

$$\mathcal{H}(U_-, \sigma_0, U_+) \equiv F(U_+) - F(U_-) - \sigma_0(U_+ - U_-) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Considerando  $U_-$  fixo na Eq. (A.7) com  $\sigma_0$  e  $U_+$  variáveis, e então substituindo  $\sigma_0$  por  $\sigma$  arbitrário em  $\mathbb{R}$  e  $U_+$  por  $U$  arbitrário em  $\Omega$ , teremos um sistema de  $n$  equações algébricas nas  $n + 1$  incógnitas  $\sigma$  e  $U$  dado por

$$\mathcal{H}(U_-, \sigma, U) \equiv F(U) - F(U_-) - \sigma(U - U_-) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Do mesmo modo, podemos fixar  $U_+$  em (A.7) e variar  $\sigma$  e  $U_-$  obtendo o sistema

$$\mathcal{H}(U, \sigma, U_+) \equiv F(U_+) - F(U) - \sigma(U_+ - U) = 0. \quad (\text{A.9})$$

**Definição A.7** *Fixado  $U_0 \in \Omega$ , a curva de Hugoniot por  $U_0$ , denotada por  $\mathcal{H}(U_0)$ , é o conjunto dos estados  $U \in \Omega$  tais que exista  $\sigma \in \mathbb{R}$  satisfazendo a Eq. (A.8) com  $U_- = U_0$  ou a Eq. (A.9) com  $U_+ = U_0$ .*

Uma solução para o problema de Riemann (A.1)-(A.2), por uma descontinuidade entre  $U_-$  e  $U_+$ , se propagando com velocidade  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x < \sigma_0 t, \\ U_+, & \text{se } x > \sigma_0 t, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

como ilustrado na Fig. A.1(b).

**Definição A.8** *Uma curva composta por um estado inicial  $U_-$ , associado ao  $i$ -ésimo campo característico, ou composta- $i$ , é o conjunto dos estados  $U$  de  $\Omega$  tais que exista um estado  $T \in \Omega$  de modo que  $T$  seja conectável a  $U_-$  por uma rarefação- $i$ , e que  $T$  seja conectável a  $U$  por uma descontinuidade de velocidade  $\sigma = \lambda_i(T)$ .*

Assim, uma solução para o problema de Riemann (A.1)-(A.2) por uma onda composta- $i$  tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_-, & \text{se } x \leq \lambda_i(U_-)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U_-)t \leq x \leq \lambda_i(T)t, \\ U_+, & \text{se } \lambda_i(T)t \leq x, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

como ilustrado na Fig. A.1(c).

Note que a solução do problema de Riemann por uma onda composta é contínua ao longo da reta  $x/t = \lambda_i(U_-)$  e descontínua ao longo da reta  $x/t = \lambda_i(T)$ .

### A.3 Choques de Lax/ Condição de Entropia de Lax.

**Definição A.9 (Condição de Entropia de Lax)** *Uma descontinuidade entre os estados  $U_-$  e  $U_+$ , que se propaga com velocidade  $\sigma_0$  é dita um choque admissível segundo a condição de entropia de Lax, ou apenas um choque- $i$  de Lax, se satisfaz as seguintes desigualdades,*

$$\lambda_{i-1}(U_-) < \sigma_0 < \lambda_i(U_-), \quad \lambda_i(U_+) < \sigma_0 < \lambda_{i+1}(U_+). \quad (\text{A.12})$$

Note que um choque- $i$  de Lax está associado à  $i$ -ésima família característica, significando que as retas características associadas à esta  $i$ -ésima família se “chocam” ao longo da reta de descontinuidades  $x = \sigma_0 t$ , quando provenientes de lados opostos desta reta no sentido de crescimento do tempo.

No caso particular de duas leis de conservação (como é o caso deste trabalho) estas condições resumem-se a admitir apenas dois tipos de choque de Lax, Choque-1 e

Choque-2, como em (A.13) e (A.14) ilustrados nas Fig. A.2(a) e Fig. A.2(b), respectivamente.

Choque-1, denotado por  $S_1$ :

$$\lambda_1(U_+) < \sigma_0 < \lambda_1(U_-), \quad \sigma_0 < \lambda_2(U_+). \quad (\text{A.13})$$

Choque-2, denotado por  $S_2$ :

$$\lambda_2(U_+) < \sigma_0 < \lambda_2(U_-), \quad \lambda_1(U_-) < \sigma_0. \quad (\text{A.14})$$

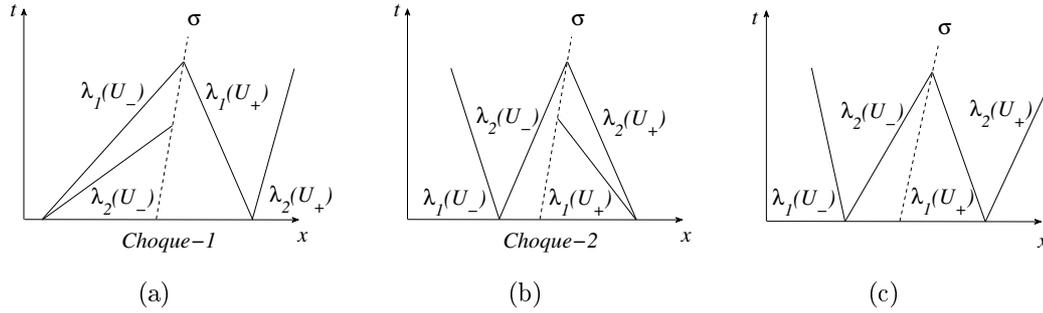


Figura A.2: (a) Choque-1 de Lax. (b) Choque-2 de Lax. (c) Choque de cruzamento.

Outros dois tipos de discontinuidades que aparecem no caso de duas leis de conservação são: choque de cruzamento e choque supercompressivo. O choque de cruzamento, denotado por  $S_X$  e ilustrado na Fig. A.2(c), satisfaz as desigualdades

$$\lambda_1(U_-) < \sigma_0 < \lambda_2(U_-), \quad \lambda_1(U_+) < \sigma_0 < \lambda_2(U_+). \quad (\text{A.15})$$

Já o choque supercompressivo, denotado por  $TC$ , satisfaz as seguintes desigualdades

$$\lambda_1(U_+) < \lambda_2(U_+) < \sigma_0 < \lambda_1(U_-) < \lambda_2(U_-). \quad (\text{A.16})$$

Para sistemas que não são estritamente hiperbólicos (veja Def. A.1) o critério de Lax pode não ser suficiente para garantir a unicidade e nem mesmo a existência de solução. Daí a necessidade de introduzir outras condições de entropia.

## A.4 Choques Viscosos/ Condição de Entropia de Viscosidade.

O sistema (A.1) geralmente resulta da simplificação de sistemas mais complexos, frequentemente de sistemas da forma

$$U_t + (F(U))_x = \epsilon(B(U)U_x)_x, \quad (\text{A.17})$$

com  $\epsilon > 0$  e  $B(U)$  uma matriz positiva definida. Fisicamente, em escoamentos em meios porosos, a matriz  $B(U)$  em geral representa grandezas relacionadas à viscosidades, tensões capilares ou outras. Contudo é habitual chamá-la, indiscriminadamente, de matriz de viscosidade e a constante  $\epsilon$  como o fator multiplicador.

Uma forma de determinar a admissibilidade de uma solução descontínua do problema de Riemann (A.1)-(A.2), se propagando com velocidade  $\sigma_0$ , é verificar se a solução de (A.17)-(A.2) tende para esta solução descontínua quando se faz  $\epsilon$  tender a zero. Mais especificamente, assume-se uma solução do tipo onda viajante do sistema (A.17) com condições iniciais (A.2), ou seja, uma solução que dependa apenas do parâmetro  $\xi = \frac{x - \sigma_0 t}{\epsilon}$  e toma-se o limite quando  $\epsilon$  tende a zero.

Para ser mais preciso, considere uma solução clássica do tipo onda viajante do sistema (A.17) denotada por  $U^\epsilon(x, t) = \mathcal{U}(\xi)$  e satisfazendo as condições de contorno

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(\xi) = U_-, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\xi) = U_+.$$

Substituindo  $\mathcal{U}$  em (A.17) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$B(\mathcal{U}) \frac{d\mathcal{U}}{d\xi} = F(\mathcal{U}) - F(U_-) - \sigma_0(\mathcal{U} - U_-) \equiv H(U_-, \sigma_0, \mathcal{U}). \quad (\text{A.18})$$

Da relação de Rankine Hugoniot, como  $\mathcal{H}(U_-, \sigma_0, U_+) = 0$ , segue que dentre os pontos de equilíbrio do sistema autônomo (A.18), encontram-se os estados  $U_-$  e  $U_+$ . Além disso, todos os pontos de equilíbrio do sistema de EDO's (A.18) estão sobre a curva de Hugoniot pelo estado  $U_-$ , ou pelo estado  $U_+$ .

**Definição A.10 (Condição de Entropia de Viscosidade)** *Uma solução descontínua do problema (A.1)-(A.2) com velocidade de propagação  $\sigma_0$  conectando os estados  $U_-$  e  $U_+$  é admissível, segundo a condição de entropia de viscosidade, se existir uma órbita do sistema de equações diferenciais ordinárias (A.18) de tal forma que*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_-, \quad (\text{A.19})$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_+. \quad (\text{A.20})$$

Note que esta condição de entropia não está relacionada com uma família característica específica e, portanto, a condição de viscosidade é apropriada para sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos, como é o caso do sistema considerado neste trabalho.

**Definição A.11** *No caso de um sistema de duas leis de conservação um choque de cruzamento de velocidade  $\sigma_0$ , como definido em (A.15), admissível segundo a condição de entropia de viscosidade, chama-se choque transicional.*

Além destes choques transicionais satisfazendo (A.15) temos também o caso de choques que tem velocidade  $\sigma_0$  coincidindo com velocidades características. Estes choques são, em geral, casos limites de choques de Lax em que uma, ou mais desigualdades em (A.15) tornam-se uma igualdade. Eles são admissíveis, desde que satisfaçam a condição de entropia de viscosidade.

## A.5 Compatibilidade Geométrica e Curvas de Onda.

As curvas de onda são extensões dos conceitos de curvas de rarefação e de choque locais de sistemas estritamente hiperbólicos genuinamente não lineares para sistemas mais gerais, possuindo singularidades hiperbólicas e campos característicos com pontos de inflexão.

Para facilitar a redação vamos chamar de velocidades de **início** e de **final** de uma onda de rarefação- $i$  conectando  $U_-$  a  $U_+$  às inclinações  $x/t = \lambda^i(U_-)$  e  $x/t = \lambda^i(U_+)$ , respectivamente. Por outro lado, para uma onda de choque com velocidade  $\sigma_0$  tanto a velocidade de início quanto a de final são dadas pela inclinação da reta de descontinuidades  $x/t = \sigma_0$ .

**Definição A.12** *Uma sequência de ondas no espaço físico- $xt$  conectando o estado  $U_-$  ao estado  $U_+$  é dita satisfazer a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades se a velocidade final de cada onda é menor que a velocidade inicial da onda seguinte, quando percorrida no sentido de  $U_-$  para  $U_+$ .*

**Definição A.13** *Definimos um grupo de ondas como uma sequência de ondas elementares conectando os estados  $U_-$  e  $U_+$ , sem estados constantes separando as tais ondas.*

Por exemplo, no caso de uma solução de (A.1)-(A.2) por uma onda composta- $i$  (veja (A.11)) temos um grupo de ondas formado por uma onda de rarefação- $i$  de  $U_-$  para  $T$  e de um choque de  $T$  para  $U_+$ .

Dizemos que um grupo de ondas está associado à  $i$ -ésima família característica se todas as suas ondas são relativas à  $i$ -ésima família característica. No caso de haver uma onda transicional, o grupo de ondas é dito transicional.

**Definição A.14** *Uma curva de onda- $i$  **direta** por um estado  $U_0$ , denotada por  $W_+^i(U_0)$ , é o conjunto de estados  $U \in \Omega$ , que podem ser conectados à direita de  $U_0$  por um grupo de ondas associado à família característica- $i$ .*

**Definição A.15** *Uma curva de onda- $i$  **reversa** por um estado  $U_0$ , denotada por  $W_-^i(U_0)$ , é o conjunto de estados  $U \in \Omega$ , que podem ser conectados à esquerda de  $U_0$  por um grupo de ondas associado à família característica- $i$ .*

**Definição A.16** *Uma curva de onda transicional **direta** por  $U_0$ , denotada por  $W_+^t(U_0)$ , é o conjunto de estados  $U \in \Omega$ , que podem ser conectados à direita de  $U_0$  por um grupo de ondas transicional.*

**Definição A.17** *Uma curva de onda transicional **reversa** por  $U_0$ , denotada por  $W_-^t(U_0)$ , é o conjunto de estados  $U \in \Omega$ , que podem ser conectados à esquerda de  $U_0$  por um grupo de ondas transicional.*

Geometricamente, no espaço de estados  $\Omega$  uma curva de onda por  $U_0$  é formada por estados  $U$  em segmentos de curvas de rarefações; ou estados  $U$  em segmentos da curva de Hugoniot por  $U_0$  correspondentes a choques admissíveis entre  $U$  e  $U_0$ .

É importante observar que uma curva de onda por um ponto inicial  $U_-$  (ou  $U_+$ ), é apenas uma representação no espaço de estados  $\Omega$ , dos possíveis estados que podem ser conectados à direita de  $U_-$  (ou à esquerda de  $U_+$ ), por um grupo de ondas. Isto não significa que todos os estados sobre tal curva entre  $U_-$  e  $U_+$  aparecem na solução no espaço- $xt$  ao se considerar os dados  $U_-$  e  $U_+$  no problema de Riemann. Por exemplo, quando um estado  $U_+$  estiver num segmento de choque de uma curva de onda, apenas os estados  $U_-$  e  $U_+$  aparecem na solução (veja (A.10)). Caso  $U_+$  esteja num segmento de rarefação partindo de  $U_-$ , então todos os estados da curva de onda entre  $U_-$  e  $U_+$  aparecem na solução (veja (A.5)).

**Definição A.18** *Uma solução do problema de Riemann para o sistema (A.1)-(A.2) é uma sequência de grupo de ondas admissíveis conectando o estado  $U_-$  à  $U_+$ , separados por estados constantes e satisfazendo a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades das ondas.*

Assim de acordo com a Def. A.18, ao se fixar os dados à esquerda  $U_-$  e à direita  $U_+$  em (A.2), resolver o problema de Riemann correspondente, significa encontrar intersecções de curvas de onda no espaço de estados, de tal forma que cada estado

intersecção defina um estado intermediário constante na sequência de ondas no espaço físico- $xt$  com velocidades compatíveis e tais que as descontinuidades presentes na sequência satisfaçam uma condição de entropia fixada *a priori*.

## A.6 Conjuntos Relevantes.

Na construção das curvas de onda é importante conhecer os estados onde a velocidade característica associada ou a velocidade de choque atinge pontos críticos. Isto porque estas velocidade devem ser monótonas ao longo de cada segmento de curva de Hugoniot ou de rarefação que compoem a curva de onda. Por exemplo, no caso de uma curva de onda- $i$  direta, um segmento de rarefação- $i$  termina ao atingir um ponto do conjunto de inflexão associado à  $i$ -ésima família característica, onde a velocidade característica- $i$  atinge um máximo; um segmento de choque- $i$  termina quando a velocidade do choque- $i$  é mínima, ou máxima ou a descontinuidade deixa de ser admissível segundo a condição de entropia pré-fixada.

Assim, ao longo das curvas de Hugoniot, estados onde a velocidade de choque atinge pontos de máximo ou de mínimo são muitas vezes responsáveis por mudanças na estrutura das curvas de onda. Estes estados são caracterizados pelo famoso teorema de **Bethe-Wendroff** (WENDROFF, 1972), que relaciona pontos críticos de velocidade de choque com pontos onde há coincidência da velocidade de choque com uma velocidade característica, enunciado a seguir.

**Teorema A.19 (Bethe-Wendroff)** *Sejam  $U_- \in \Omega$ ,  $U^* \in \Omega$  e  $l_i(U^*)$  o vetor característico à esquerda de  $A(U^*)$  associado a  $\lambda_i(U^*)$ . Suponha que  $U^*$  esteja na curva de Hugoniot por  $U_-$  parametrizada por  $\xi$ , isto é, que exista  $\xi^* \in \mathbb{R}$  tal que  $U_* = U(\xi^*)$  e  $\mathcal{H}(U_-, \sigma(\xi^*), U(\xi^*)) = 0$ . Suponha também que  $l_i(U(\xi^*)) \cdot (U(\xi^*) - U_-) \neq 0$ . Então  $\sigma(U_-; U(\xi^*)) = \lambda_i(U(\xi^*))$  se, e somente se,  $\frac{d\sigma}{d\xi}(\xi^*) = 0$ . Neste caso  $e^i(U(\xi^*)) = \frac{dU}{d\xi}(\xi^*)$ .*

Os pontos nos quais o Teorema de Bethe-Wendroff não se aplica estão associados aos chamados conjuntos de bifurcação secundária do sistema (A.1), definidos a seguir.

**Definição A.20** *O conjunto de bifurcação secundária, associado à  $i$ -ésima família*

característica, é definido por

$$B_i = \{U_- \in \Omega : \exists(\sigma^*, U^*) \in \mathbb{R} \times \Omega, U^* \neq U_-, \mathcal{H}(U_-, \sigma^*, U^*) = 0, \\ \lambda_i(U^*) = \sigma^* \text{ e } l_i(U^*) \cdot (U^* - U_-) = 0\}.$$

Outro conjunto relevante para a construção das curvas de onda e da solução do problema de Riemann são os chamados conjuntos de extensão de outros conjuntos de  $\Omega$ . Inicialmente começamos pela extensão de um ponto de  $\Omega$ .

**Definição A.21** *Um ponto  $U \in \Omega$  é dito uma extensão- $i$  de um ponto  $U_0 \in \Omega$ , característica em  $U_0$ , se  $U \in \mathcal{H}(U_0)$  e  $\sigma(U_0; U) = \lambda_i(U_0)$ .*

Da mesma forma que a extensão pode ser característica no ponto  $U_0$ , ela também pode ser característica na própria extensão. Assim temos a definição a seguir.

**Definição A.22** *Um ponto  $U \in \Omega$  é dito uma extensão- $i$  de um ponto  $U_0 \in \Omega$ , característica em  $U$ , se  $U \in \mathcal{H}(U_0)$  e  $\sigma(U_0; U) = \lambda_i(U)$ .*

Assim como temos extensões de pontos também temos extensões de conjuntos, como vemos nas definições a seguir.

**Definição A.23** *Fixado um conjunto  $\mathcal{X} \subset \Omega$ , dizemos que um conjunto  $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$  é uma extensão- $i$  de  $\mathcal{X}$ , característica em  $\mathcal{X}$  se*

$$\forall X \in \mathcal{X}, \exists Y \in \mathcal{Y}, \text{ t. q. } Y \in \mathcal{H}(X) \text{ e } \sigma(X; Y) = \lambda_i(X).$$

**Definição A.24** *Fixado um conjunto  $\mathcal{X} \subset \Omega$ , dizemos que um conjunto  $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$  é uma extensão- $i$  de  $\mathcal{X}$ , característica na própria extensão  $\mathcal{Y}$  se*

$$\forall X \in \mathcal{X}, \exists Y \in \mathcal{Y}, \text{ t. q. } Y \in \mathcal{H}(X) \text{ e } \sigma(X; Y) = \lambda_i(Y).$$

Chamamos a atenção que em geral a extensão não define necessariamente uma aplicação “um a um” entre o conjunto  $\mathcal{X}$  e o conjunto  $\mathcal{Y}$ . Este resultado vem sendo utilizado desde os anos 90, como em (ISAACSON, 1992) e (SOUZA, 1992).

O próximo, e último, resultado que apresentamos é muito importante na construção de uma solução do problema de Riemann por determinar pontos ao longo de uma curva de onda onde a condição de compatibilidade geométrica entre as velocidades das ondas deixa de ser satisfeita ou pontos onde os choques deixam de ser admissíveis segundo a condição de entropia de viscosidade (ISAACSON, 1992) e (SOUZA, 1992).

**Teorema A.25 (Regra do Choque Triplo)** *Seja  $U_-$  um estado qualquer de  $\Omega$  tal que a curva de Hugoniot por  $U_-$  possua dois pontos  $U_1$  e  $U_2$  com  $\sigma(U_-; U_1) = \sigma(U_-; U_2) = \sigma_0$ . Então  $U_2$  pertence à curva de Hugoniot por  $U_1$  e  $\sigma(U_1; U_2) = \sigma_0$ .*

# Bibliografia

- [1] AZEVEDO, A. V.; SOUZA, A. J.; FURTADO, F.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. *The Solution by the Wave Curve Method of Three-Phase Flow in Virgin Reservoirs*, Transport in Porous Media, v. 83, p. 99-125, 2010.
- [2] AZEVEDO, A. V.; SOUZA, A. J.; FURTADO, F.; MARCHESIN, D. *Three-Phase Flow in a Porous Medium*, em preparação, 2013.
- [3] BARROS, L. M. *O problema de Riemann para um modelo matemático de escoamento trifásico com dados de injeção do tipo água-gás e dados de produção do tipo gás-óleo*. Dissertação de Mestrado, PPGMat/UFCG e PRH-25, 2010.
- [4] FURTADO, F. *Stability of Nonlinear Waves for Conservation Laws*. Tese de Doutorado, Courant Institute-NYU, 1989.
- [5] GUEDES, M. J. F. *Estrutura de ondas para um modelo de escoamento trifásico com viscosidades das fases assimétricas*. Dissertação de Mestrado, PPGMat/UFCG e PRH-25, 2009.
- [6] ISAACSON, E. L.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. *Transitional Waves por Conservation Laws*. Journal on Mathematical Analysis, 1990.
- [7] ISAACSON, E. L.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B.; TEMPLE, B. *Multiphase Flow Models with Singular Riemann Problems*. Comput. Appl. Math, v.11, no2, pp. 147-166, 1992.
- [8] LAX, P. D. *Hyperbolic Systems os Conservation Laws II*. Comm. Pure Appl. Math, 10, pp. 537-556, 1957.

- [9] SERRE, D. *Systems of Conservation Laws*, Vols. 1 e 2, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [10] SMOLLER, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [11] SOUZA, A. J. *Sistemas Singulares de três Leis de Conservação em Escoamento Multifásico*. Tese de Doutorado, PUC-RIO, 1989.
- [12] SOUZA, A. J. *Stability of Singular Fundamental Solutions under Perturbations for Flow in Porous Media*. *Comput. Appl. Math*, v.11, n<sup>o</sup>2, pp. 73-115, 1992.
- [13] WENDROFF, B. *The Riemann Problem for Materials with Non Convex Equations of State II: General Flow*. *J. Math. Anal Appl.*, 38, p.640 - 658, 1972.