



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE TECNOLOGIAS E RECURSOS NATURAIS  
UNIDADE ACADÊMICA DE ENGENHARIA CIVIL  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**VICTOR HUGO GENOVÊZ GONÇALVES**

**INFLUÊNCIA DA FISSURAÇÃO E PROTENSÃO NAS PROPRIEDADES  
DINÂMICAS EM VIGAS DE CONCRETO**

**CAMPINA GRANDE – PB**

**2019**

Victor Hugo Genovêz Gonçalves

INFLUÊNCIA DA FISSURAÇÃO E PROTENSÃO NAS PROPRIEDADES DINÂMICAS  
EM VIGAS DE CONCRETO

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como pré-requisito para  
graduação do curso de Engenharia Civil,  
da Universidade Federal de Campina  
Grande – UFCG,

Orientadora: Prof. Dra. Marília Marcy  
Cabral de Araújo

Campina Grande – PB, 13 de dezembro de 2019

Banca Examinadora

---

Prof. Dra. Marília Marcy Cabral de Araújo

Orientadora

---

Prof. Dra. Aline Figueirêdo Nóbrega de Azerêdo

Examinador Interno

---

Prof. Francisco de Assis da Costa Neto

Examinador Externo

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter me guiado e me abençoado ao longo desta jornada tão árdua, por me ensinar que devo entregar tudo a Ele.

Aos meus pais por me proporcionarem tantas oportunidades e não medirem esforços para verem seus filhos bem. Por sempre me incentivarem a ir atrás dos meus sonhos e acreditarem que sou mais forte e capaz do que eu acho que sou.

A Prof. Marília Marcy pelas orientações e pelos ensinamentos passados ao longo da elaboração do trabalho.

A todos os amigos feitos na caminhada acadêmica pela motivação e apoio, em especial a Matheus Neves Barbosa e Gilson Gabriel Teixeira por ajudarem diretamente na elaboração desse trabalho.

A todos na obra do Residencial Lagos, pelo auxílio e ensinamentos responsáveis pelo meu aperfeiçoamento como profissional. Ao eng. João Batista Soares pela compreensão da necessidade da minha ausência para o término desse trabalho

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para essa pesquisa.

**“As oportunidades multiplicam-se à medida que são agarradas.” (Sun Tzu)**

## RESUMO

No decorrer de sua vida útil, é comum que as estruturas sofram desgastes, podendo causar fissurações que variam as propriedades dinâmicas da mesma. Sabendo que as frequências e modos de vibração de uma estrutura são modificados em função da rigidez e, sendo a protensão um fator que influencia em tais propriedades, este trabalho propõe uma avaliação quantitativa das mudanças nas frequências naturais de uma viga, após ser submetida a fissuras e inserindo armadura ativa. Para isso, neste trabalho utilizou-se o software SAP2000 para identificação das propriedades dinâmicas da estrutura. Observou-se a grande diminuição nas frequências naturais da viga após inserir as fissuras e a efetividade da protensão na recuperação de estruturas.

**Palavras-chave:** Análise dinâmica, SAP2000, concreto protendido, fissuração.

## **ABSTRACT**

*Throughout their useful life, it is common for structures to wear out, which can cause cracking that varies its dynamic properties. Knowing that the frequencies and vibration modes of a structure are modified as a function of stiffness and, since prestressing is a factor that influences such properties, this work proposes a quantitative evaluation of changes in the natural frequencies of a beam, after being cracked and inserting active armor. Therefore, in this work used SAP2000 software to identify the dynamic properties of the structure. There was a large decrease in the beam's natural frequencies and protection effectiveness in the restoration of structures.*

**Keywords:** *Dynamic analysis, SAP2000, prestressed concrete, cracking.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: fluxograma das classificações do concreto protendido.....	15
Figura 2: sequência construtiva da pré-tração.....	16
Figura 3: sequência construtiva da pós-tração com aderência posterior.....	17
Figura 4: exemplo de protensão externa.....	18
Figura 5: movimento de vibração livre (1 GDL) sem amortecimento.....	23
Figura 6: variação no comportamento do sistema sob diferentes tipos de amortecimento....	25
Figura 7: análise teórica das vibrações de um sistema.....	27
Figura 8: análise experimental das vibrações de um sistema.....	28
Figura 9: fluxograma das etapas da Metodologia.....	29
Figura 11: Escolha do template.....	30
Figura 12: Definir o tipo da seção transversal da viga.....	30
Figura 13: definir as propriedades da viga.....	31
Figura 14: Propriedades do concreto armado e do aço CA-50.....	33
Figura 15: Seção com coordenadas aleatórias.....	33
Figura 16: Seção de concreto,.....	34
Figura 17: Seção armada.....	34
Figura 18: Seção da armadura ativa.....	36
Figura 19: Propriedades do objeto.....	36
Figura 20: Janela principal do detalhamento do cabo.....	37
Figura 21: Determinando o desenho base do cabo.....	38
Figura 22: Pontos utilizados para definir o trajeto do cabo.....	39
Figura 23: Janela principal com o cabo já detalhado.....	39
Figura 24: Força de protensão e perdas utilizadas.....	40
Figura 25: Gerando malha de 10 cm.....	41
Figura 26: 1°, 2° e 3° modo de vibração, respectivamente, para a viga com fissuras e sem protensão.....	42
Figura 27: 1°, 2° e 3° modo de vibração, respectivamente, para a viga protendida e com fissuras.....	43
Figura 28: 1°, 2° e 3° modo de vibração, respectivamente, para a viga protendida e sem fissuras.....	44

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura, em função das classes de agressividade ambiental, .....	18
Quadro 2: Frequências obtidas (em Hz) para diferentes modos de vibração. ....	42
Quadro 3: Frequências obtidas no SAP2000, para a viga com fissuras e sem protensão. ....	42
Quadro 4: Frequências obtidas no SAP2000, para a viga protendida e com fissuras. ....	43
Quadro 5: Frequências obtidas no SAP2000, para a viga protendida e sem fissuras .....	44
Quadro 6: comparação da frequência natural da viga sem fissuras com a viga fissurada. ....	45
Quadro 7: comparação da frequência natural da viga com fissuras com a viga fissurada e protendida.....	46
Quadro 8: comparação da frequência natural da viga com fissuras e protensão com a viga sem fissuras e protendida. ....	46

## LISTA DE SÍMBOLOS

$c$  – Amortecimento do sistema

$C_n$  – Coeficiente dependente da condição de contorno e modo de vibração

$E_{CS}$  – Módulo de elasticidade secante do concreto

$E_{cs}$  – Modulo de deformação secante do concreto

$E_{ci}$  – Módulo de elasticidade inicial do concreto

$E$  – Modulo de elasticidade

$F(t)$  – Vetor das forças externas de excitação

$f_{crit}$  – Frequência crítica

$f_{ck}$  – Resistencia do concreto

$f(t)$  – Força externa de excitação

$f_{ptk}$  – Resistência característica a tração de armadura ativa

$f_{pyk}$  – Resistência característica ao escoamento de armadura ativa

$f_{ct}$  – Resistência à tração do concreto

$I_c$  – Momento de inercia da seção bruta de concreto

$I$  – Momento de inercia

$I_{II}$  - Momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II

$k$  – Constante elástica da mola

$K$  – Matriz das constantes elásticas da mola ou rigidez

$L$  – Comprimento da viga

$M_R$  – Momento de fissuração

$M$  – Matriz da massa do sistema

$M_{sd}$  – Momento solicitante de projeto resultante da combinação normal dos esforços

$M_{cf}$  – Momento solicitante de projeto resultante da combinação frequente de serviço

$M_a$  – Momento fletor na seção crítica do vão considerado

$m$  – Massa do sistema

$v_0$  – Velocidade inicial

$\ddot{X}(t)$  – Vetor das acelerações da massa  $m$

$\dot{X}(t)$  – Vetor velocidade da massa  $m$

$X(t)$  – Vetor dos deslocamentos horizontais da massa  $m$

$\ddot{x}(t)$  – Aceleração da massa  $m$

$\dot{x}(t)$  – Velocidade da massa  $m$

$x(t)$  – Deslocamento horizontal da massa  $m$

$x_0$  – Deslocamento inicial

$y_t$  – Distância do centro de gravidade de seção à fibra mais tracionada

$\omega_n$  – Frequência natural do sistema

$\omega_d$  – Frequência natural amortecida

$\xi$  – Fator de amortecimento

$\phi$  - Modo de vibração

$\sigma_{pi}$  – Tensão de proteção

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
1.1	Generalidades	12
1.2	Objetivo geral	13
1.3	Objetivo específico	13
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>13</b>
2.1	Concreto protendido	13
2.2	Fissuração	19
2.2.1	Estádios do concreto armado	19
2.2.2	Rigidez em seção fissurada	20
2.3	Propriedades dinâmicas	21
2.3.1	Generalidades	21
2.3.2	Equações de movimento para sistemas com 1 grau de liberdade	22
2.3.3	Equações de movimento para sistemas com múltiplos graus de liberdade	25
2.2.4	Análise modal	26
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>28</b>
3.1	Generalidades	28
3.2	Modelagem no SAP2000	29
3.2.1	Seção transversal	30
3.2.2	Protensão	35
3.2.3	Realizando a análise	40
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>41</b>
4.1	Resultados obtidos	41
4.2	Análise dos resultados	45
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>48</b>

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Generalidades

No decorrer de sua vida útil, é comum que as estruturas sofram desgastes, podendo ocasionar fissurações que, através da perda de rigidez, ocasionam variações nas propriedades dinâmicas iniciais da mesma. Essa perda de rigidez afeta cada frequência e modo de vibração de forma diferente, dependendo de suas características e intensidade.

A ABNT NBR 6118:2014 no item 23.3, intitulado estado-limite de vibrações excessivas, recomenda afastar o máximo possível à frequência própria da estrutura ( $f$ ) da frequência crítica ( $f_{crit}$ ), que depende da destinação da respectiva edificação, com a condição  $f > 1,2 f_{crit}$ , satisfeita. Quando não for possível deve ser feita uma análise dinâmica mais acurada, baseado em Normas Internacionais, enquanto não existir norma brasileira específica.

Nóbrega (2004) enumera alguns fatores que contribuem para uma maior relevância da análise dinâmica para os projetos de estruturas civis:

- a) A necessidade de economia dos recursos energéticos;
- b) A prática de novos partidos arquitetônicos;
- c) O desenvolvimento tecnológico dos materiais de construção;
- d) A adoção de técnicas e sistemas construtivos inovadores em tempo e forma de execução;
- e) O envelhecimento e a degradação das edificações já construídas;
- f) A mudança na intensidade e na forma de atuação de alguns carregamentos e o uso de recursos computacionais e técnicas numéricas que possibilitem análises mais complexas e refinadas;
- g) A verificação mais precisa do comportamento e da segurança da estrutura.

O concreto protendido é um ótimo método construtivo para se obter estruturas mais esbeltas, viabilizando vigas com maior comprimento longitudinal e menor seção transversal. Além disso, ele proporciona maior rigidez impedindo ou diminuindo a fissuração. Assim a frequência natural fica em seu valor máximo, afastando-se da possibilidade das vibrações exercidas ocasionarem danos maiores através da ressonância.

A inserção da armadura ativa proporciona diversas mudanças nas características do concreto em relação à fissuração e as propriedades geométricas e físicas, através da eliminação ou diminuição da seção tracionada e redução nas dimensões, mas segundo Clough e Penzien (1993), a protensão não influencia no comportamento dinâmico da estrutura. Isto é justificado pelo fato de os cabos estarem intimamente ligados ao concreto, acompanhando assim todas as deformações e, conseqüentemente, não gerando excentricidades adicionais em relação ao centro geométrico da peça. Essa consideração se aplica a ambos os tipos de protensão: aderente e não aderente.

Neste trabalho buscou-se estudar e quantificar as alterações na frequência natural, causadas ao adicionar fissuração e/ou protensão a uma viga de concreto armado. O estudo será realizado com auxílio do programa computacional SAP2000, que utiliza o método dos elementos finitos para análises, no qual será possível construir modelos de vigas sob as configurações necessárias.

## **1.2 Objetivo geral**

Avaliar a influência da fissuração e protensão nas frequências naturais de uma viga de concreto.

## **1.3 Objetivos específicos**

- Cálculo da diminuição da rigidez causado pela fissuração;
- Quantificar as diferenças nas frequências naturais causada pela fissuração e protensão

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 Concreto protendido**

O concreto resiste bem à compressão, mas não à tração. Devido a essa baixa resistência, fissuras de flexão aparecem para níveis de carregamentos baixos. Como forma de maximizar a utilização da resistência à compressão e minimizar ou até eliminar as fissuras geradas pelo carregamento, aplica-se um conjunto de esforços autoequilibrados na estrutura, surgindo aí o termo protensão. (Ishitani e França, 2002).

Segundo Cholfe e Bonilha (2013) o elemento mais importante do concreto protendido é a força de protensão, que é resultado do pré-alongamento da armadura ativa. A protensão representa um sistema construtivo no qual, por meio de um processo mecânico, o aço é tensionado dentro de limites, com o máximo aproveitamento da resistência do material, observando a segurança operacional do processo.

A ABNT NBR 6118/2014 no item 9.6.1.2.1 recomenda os valores-limites por ocasião da operação de protensão. Para a armadura pré-tracionada, a tensão ( $\sigma_{pi}$ ) de protensão na saída do aparelho deve respeitar os limites  $0,77 f_{ptk}$  e  $0,90 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação normal (RN), e  $0,77 f_{ptk}$  e  $0,85 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação baixa (RB).

Para a armadura pós-tracionada, a tensão ( $\sigma_{pi}$ ) de protensão na saída do aparelho deve respeitar os limites  $0,74 f_{ptk}$  e  $0,87 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação normal (RN), e  $0,74 f_{ptk}$  e  $0,82 f_{pyk}$  para aços da classe de relaxação baixa (RB). Para as cordoalhas engraxadas com aços da classe de relaxação baixa, os valores-limite da tensão de protensão são  $0,80 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$ .

Ishitani e França (2002) citam algumas vantagens e desvantagens do concreto protendido. As vantagens são:

- O emprego de aços de alta resistência que normalmente não são utilizados em concreto armado devido à deformação que seria necessária (criando fissuração exagerada) para explorar sua resistência.
- Se necessário, consegue-se eliminar as tensões de tração e, portanto, a abertura de fissuras no concreto, tornando-se eficiente no controle da fissuração quando estas forem permitidas.
- A diminuição significativa do peso da estrutura, que é possível pela utilização de aço e concreto de maior resistência, reduzindo a área da seção transversal.
- Ao fissurar a peça perde rigidez à flexão, eliminando, ou reduzindo, essa fissuração ocorre uma redução da flecha da estrutura.
- A protensão permite criar sistemas construtivos diversos: balanço sucessivo, pré-moldados, etc.

Já os problemas com a armadura ativa e as desvantagens do concreto protendido:

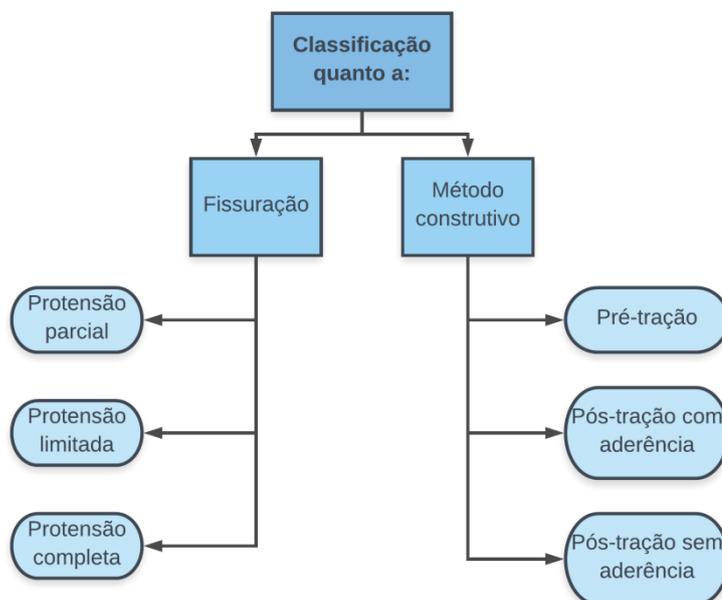
- As armaduras protendidas apresentam outro tipo de corrosão (denominada corrosão sobtensão) além da corrosão eletrolítica comum, propiciando ruptura frágil. Por este motivo a armadura protendida deve ser muito bem protegida.

- A protensão aplicada nos cabos esta associada a diversas perdas de esforços, podendo ser dividida em dois grupos: as perdas imediatas e progressivas. As perdas imediatas, que ocorrem durante a operação de estiramento e ancoragem dos cabos podem ser: perdas por atrito, perdas nas ancoragens e perdas por encurtamento elástico do concreto. As perdas progressivas, que se verificam ao longo dos anos, são: perdas por retração e fluência do concreto e as perdas por relaxação do aço.

- Altas forças nas ancoragens.
- Rigoroso controle de execução.
- Cuidados especiais em estruturas hiperestáticas.

O concreto protendido pode ser classificado em relação ao seu método construtivo ou quanto às exigências relativas à fissuração e à protensão das armaduras, como mostra a Figura 1. Quanto ao método construtivo ele se divide em: pré-tração, pós-tração com aderência posterior, pós-tração sem aderência posterior.

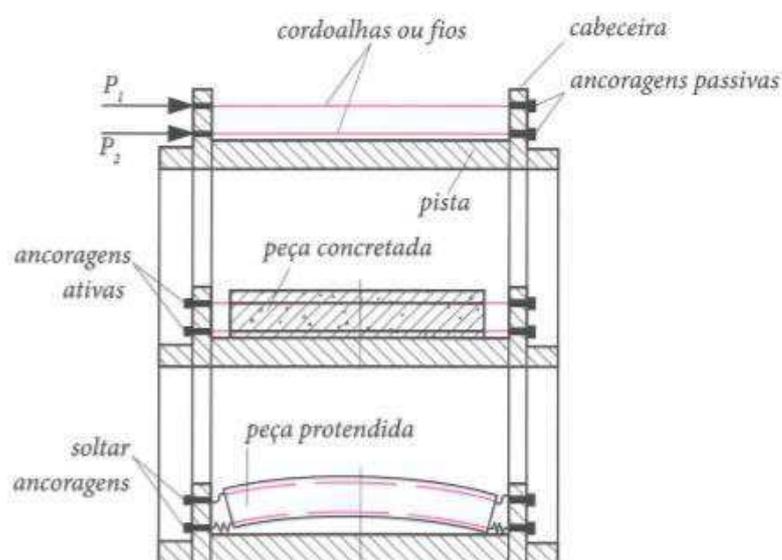
Figura 1: fluxograma das classificações do concreto protendido



Fonte: Elaborado pelo autor

A ABNT NBR 6118/2014 no item 3.1.7 define como pré-tração quando o pré-alongamento da armadura ativa é feito utilizando-se apoios independentes do elemento estrutural, antes do lançamento do concreto, sendo a ligação da armadura de protensão com os referidos apoios é desfeita após o endurecimento do concreto. É utilizado para a execução de pré-moldados (Figura 2).

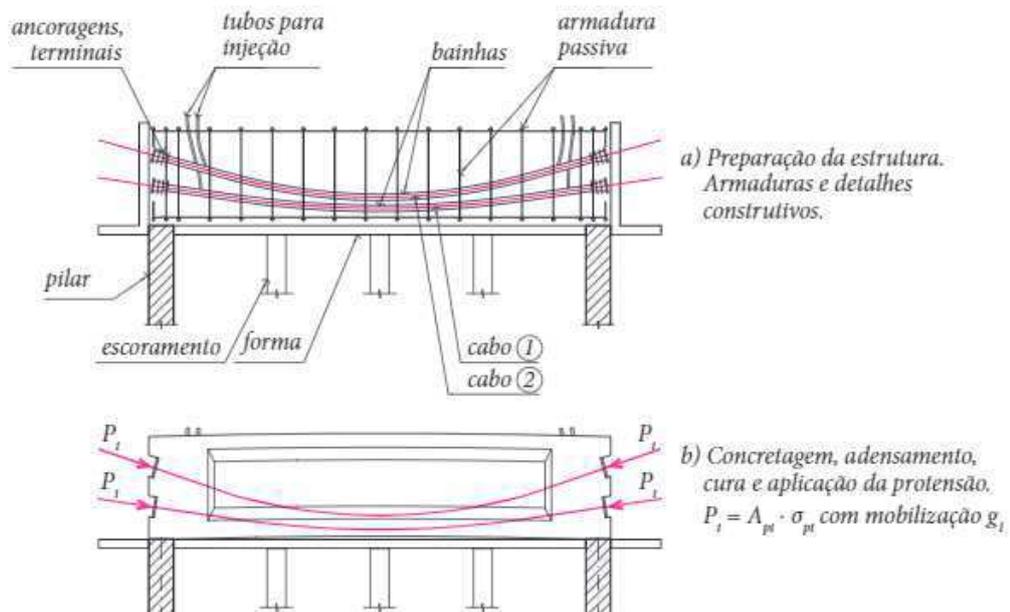
Figura 2: sequência construtiva da pré-tração,



Fonte: Cholfe e Bonilha (2013).

A ABNT NBR 6118/2014 no item 3.1.8 define a pós-tração com aderência posterior como quando o concreto protendido é feito pré-alongando a armadura ativa após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural, criando posteriormente aderência com o concreto, de modo permanente, através da injeção das bainhas. Tem aplicação generalizada em estruturas de médio e grande porte e são tradicionalmente moldadas e protendidas no local da construção (Figura 3).

Figura 3: seqüência construtiva da pós-tração com aderência posterior

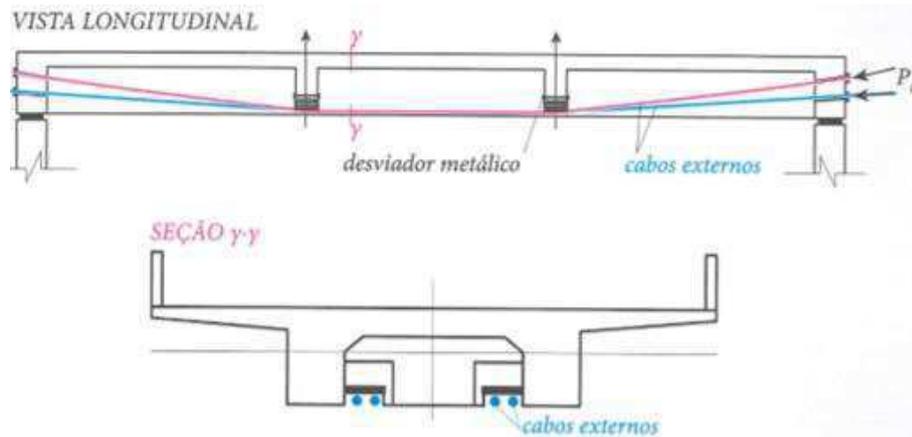


Fonte: Cholfe e Bonilha (2013).

A ABNT NBR 6118/2014 no item 3.1.9 define a pós-tração sem aderência posterior quando o pré-alongamento da armadura ativa é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural, mas não sendo criada aderência com o concreto, ficando a armadura ligada ao concreto apenas em pontos localizados. Essa armadura pode ser interna ou externa (Figura 4).

Com o desenvolvimento da cordoalha engraxada esse tipo de protensão ganhou importância e atualmente está presente na maioria dos projetos de lajes planas ou nervuradas dos edifícios comerciais e residenciais.

Figura 4: exemplo de protensão externa.



Fonte: Cholfe e Bonilha (2013).

Quanto às exigências relativas à fissuração e à protensão das armaduras, o aparecimento ou não de fissuras nas seções de concreto pode ser relacionado a um Estado Limite de Serviço, que deve ser atendido levando-se em conta o tipo de protensão escolhido e a classe de agressividade ambiental (CAA) na qual a estrutura será exposta.

As exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura estão resumidas no quadro 1.

Quadro 1: Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura, em função das classes de agressividade ambiental,

Tipo de concreto estrutural	Classe de agressividade ambiental (CAA) e tipo de protensão	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto simples	CAA I a CAA IV	Não há	–
Concreto armado	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente
	CAA II e CAA III	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm	
	CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração com CAA I ou Pós-tração com CAA I e II	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	Combinação frequente
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração com CAA II ou Pós-tração com CAA III e IV	Verificar as duas condições abaixo	
		ELS-F	Combinação frequente
		ELS-D <sup>a</sup>	Combinação quase permanente
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração com CAA III e IV	Verificar as duas condições abaixo	
		ELS-F	Combinação rara
		ELS-D <sup>a</sup>	Combinação frequente
<sup>a</sup> A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p = 50$ mm (Figura 3.1). NOTAS 1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2. 2 Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens. 3 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.			

Fonte: tabela 13.4 da NBR 6118/2014.

## 2.2 Fissuração

### 2.2.1 Estádios do concreto armado

As fissuras são decorrentes da resposta estrutural quando o elemento está sujeito a esforços solicitantes ao longo do tempo. No caso de vigas de concreto armado, que são submetidas a esforços de flexão, as fissuras estruturais ocorrem quando o carregamento induz tensões de tração superiores à resistência a tração do concreto (SUSSEKIND, 1983).

O comportamento do elemento é diferenciado em diferentes estágios antes de chegar à ruptura. As etapas são definidas como Estádio I, Estádio II e Estádio III (CARVALHO e FIGUEIREDO, 2014). O Estádio I ocorre quando o carregamento aplicado na peça produz tensões de tração inferiores à resistência à tração do concreto. Por isso, a viga ainda não apresenta fissuras. O dimensionamento de

projetos nesse estágio é inviável devido à baixa resistência à tração do concreto em relação à sua resistência à compressão.

À medida que o carregamento aumenta a resistência do concreto à tração é superada e surgem as primeiras fissuras na peça, iniciando o Estádio II. A divisão entre estes estádios ocorre quando o momento fletor atuante se iguala ao momento de fissuração ( $M_R$ ), como calculado pela Equação 1, segundo a ABNT NBR 6118:2014.

$$M_R = \alpha \frac{f_{ct} I_c}{y_t} \quad (1)$$

Onde,

$\alpha = 1,2$  para seções T ou duplo T;  $1,3$  para seções I ou T invertido;  $1,5$  para seções retangulares;

$y_t$  é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

$I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

$f_{ct}$  é a resistência à tração direta do concreto. Para determinação do momento de fissuração deve ser usado o  $f_{ctk,inf}$  no estado-limite de formação de fissuras.

Se o carregamento continuar aumentando, o concreto da região comprimida se plastifica, caracterizando o Estádio III. Devido à relação tensão-deformação não linear, a peça se apresenta bastante fissurada e o diagrama de tensões possui forma parabólico-retangular, sendo chamado de diagrama parábola- retângulo.

### 2.2.2 Rigidez em seção fissurada

O cálculo de deslocamentos em estruturas de concreto armado não é algo trivial. Isso se deve ao fato dos elementos de concreto armado serem heterogêneos compostos por concreto e aço, com módulos de elasticidade distintos acarretando em diferença de rigidez à flexão. Além disso, existe a grande possibilidade de ocorrência de diferentes comportamentos numa mesma estrutura submetida a cargas de pequena intensidade (regime de serviço), ou seja, regiões onde o concreto tracionado possui fissuras (Estádio II) e regiões onde está íntegro (Estádio I), não apresentando fissuras perceptíveis. A existência de fissuras provoca

diminuição da inércia, onde teoricamente apenas o aço resiste às tensões de tração (Pituba e Delalibera, 2014).

O modelo de avaliação de deslocamentos em estruturas de concreto armado presente na NBR 6118:2014 considera o comportamento dos elementos estruturais calculando uma inércia equivalente baseado numa ponderação das inércias nos Estádios I ( $I_I$ ) e II ( $I_{II}$ ). Essa inércia equivalente é calculada por meio da Equação (2). Tal procedimento é válido desde que o momento atuante na seção crítica,  $M_a$ , seja maior que o momento fletor que provoca a primeira fissura,  $M_R$ .

$$(EI)_{eq} = E_{CS} \left\{ \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 I_C + \left[ 1 - \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \quad (2)$$

Onde,

$I_C$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

$I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;

$M_a$  é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, para a combinação de ações considerada na avaliação;

$E_{CS}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto.

## **2.3 Propriedades dinâmicas**

### **2.3.1 Generalidades**

Existem duas principais diferenças entre a abordagem de um problema estrutural dinâmico e de carregamento estático:

- Como tanto o carregamento quanto a resposta da estrutura variam no tempo o problema dinâmico não possui uma solução única, e sim uma sucessão de soluções no período de interesse.

- Quando o carregamento é aplicado dinamicamente, os deslocamentos resultantes da estrutura dependem das forças inerciais que se opõem as acelerações que as produzem, e não apenas do carregamento em si.

Se essas forças de inércia apresentam-se pequenas a análise da resposta estrutural para qualquer instante pode ser realizada pela abordagem estática, mesmo se o carregamento e suas respostas variarem com o tempo; porém se essas forças representarem uma porção significativa do carregamento total o caráter dinâmico deve ser considerado.

A resposta estrutural a qualquer carregamento dinâmico é expresso geralmente em termos dos deslocamentos da estrutura. Uma análise determinística conduz aos deslocamentos ao longo do tempo a partir de um carregamento também variável no tempo, já uma análise não determinística provê apenas informação estatística sobre deslocamentos resultantes de carregamentos definidos estatisticamente, como é o caso do estudo de terremotos.

Em geral, a resposta de um sistema vibratório depende das condições iniciais, bem como das excitações externas. A maioria dos sistemas vibratórios encontrados na prática são muito complexos, e é impossível considerar todos os detalhes para uma análise matemática. Assim, a análise de um sistema vibratório normalmente envolve modelagem matemática, obtenção de equações governantes, solução das equações e interpretação dos resultados (RAO, 2008).

### 2.3.2 Equações de movimento para sistemas com 1 grau de liberdade (1 GDL)

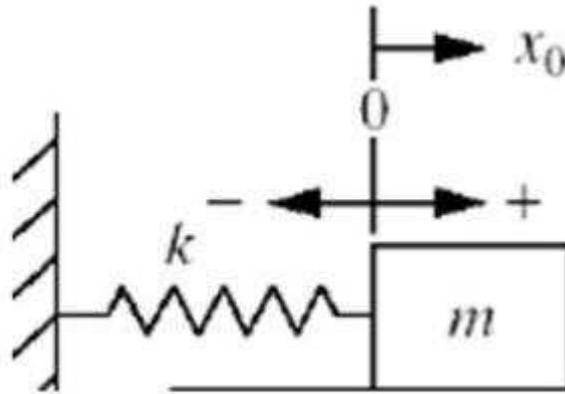
A equação de movimento para 1 grau de liberdade (Figura 5) é definida como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (3)$$

Sendo:

- $m$  a massa do sistema;
- $\ddot{x}(t)$  a aceleração da massa  $m$ ;
- $c$  o amortecimento do sistema;
- $\dot{x}(t)$  a velocidade da massa  $m$ ;
- $k$  a constante elástica da mola ou rigidez;
- $x(t)$  o deslocamento horizontal da massa  $m$ , em relação ao ponto de equilíbrio;
- $f(t)$  uma força externa de excitação.

Figura 5: movimento de vibração livre (1 GDL) sem amortecimento.



Fonte: Rao (2008).

Quando não há aplicação de forças externas ( $f(t)=0$ ), um deslocamento ( $x_0$ ) ou velocidade ( $v_0$ ) iniciais fornecem a energia necessária ocorre o movimento de vibração livre. A equação (4) o descreve para sistemas sem amortecimento ( $c=0$ ) e com 1 grau de liberdade.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4)$$

Definindo  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , como a frequência natural do sistema com 1GDL, temos:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (6)$$

Assumindo que o deslocamento é harmônico e dado por  $x(t) = Ae^{\lambda t}$ , obtém-se:

$$\lambda^2 + \omega_n^2 = 0 \quad (7)$$

$$\lambda = \pm i\omega_n \quad (8)$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \quad (9)$$

Onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes de integração. Considerando as condições iniciais com deslocamento ( $x_0$ ) e velocidade ( $v_0$ ), a solução no tempo para o sistema é:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) \quad (10)$$

Para um sistema com amortecimento a equação (4) é substituída por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (11)$$

As raízes da equação são:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n \quad (12)$$

Onde:

- $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$  é o fator de amortecimento.

Para o sistema sub amortecido ( $0 < \xi < 1$ ), como em estruturas usuais, a solução é dada por:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) \quad (13)$$

Sendo  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}\omega_n$  a frequência natural amortecida.

Para o sistema superamortecido ( $\xi > 1$ ), como em automóveis, e sendo  $\beta = \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ , a solução é dada por:

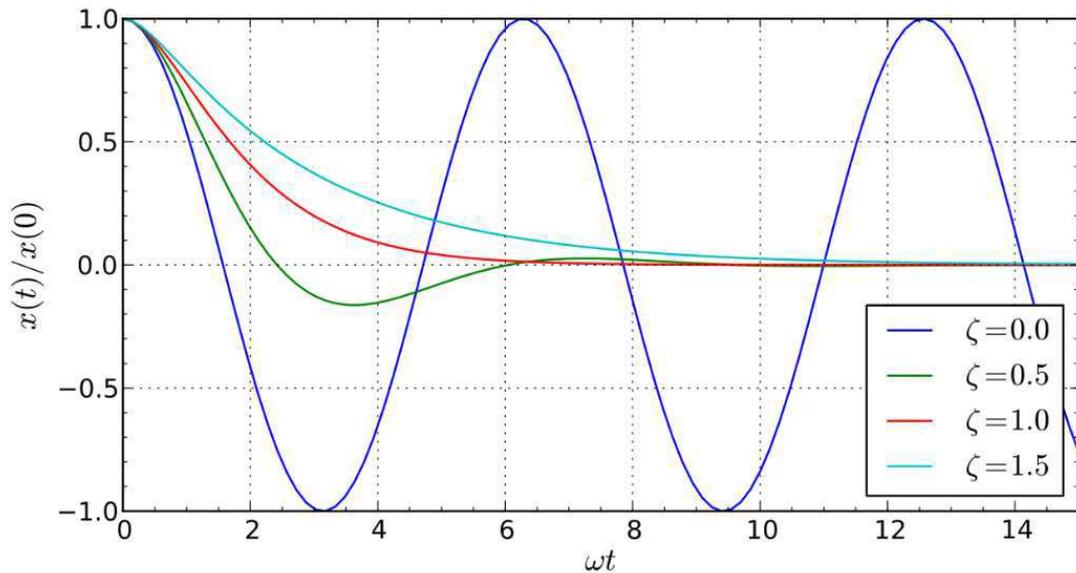
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (Ae^{-\beta t} + Be^{\beta t}) \quad (14)$$

Para o sistema criticamente amortecido ( $\xi = 1$ ) (figura 6), que representa a menor magnitude de amortecimento para a qual nenhuma oscilação ocorre, a solução é dada por:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A + Bt) \quad (15)$$

Em todos os casos, A e B são coeficientes obtidos quando são consideradas as condições iniciais.

Figura 6: variação no comportamento do sistema sob diferentes tipos de amortecimento.



Fonte: Cossolino e Pereira (2010).

### 2.3.3 Equações de movimento para sistemas com múltiplos graus de liberdade

A equação de movimento para N graus de liberdade é definida como:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (16)$$

Sendo:

- **M** a matriz da massa do sistema, com ordem  $n \times n$ ;
- $\ddot{X}(t)$  o vetor das aceleração da massa m, com ordem  $n \times 1$ ;
- **C** a matriz de amortecimento do sistema, com ordem  $n \times n$ ;
- $\dot{X}(t)$  o vetor velocidade da massa m, com ordem  $n \times 1$ ;
- **K** a matriz das constantes elástica da mola ou rigidez, com ordem  $n \times n$ ;
- **X(t)** o vetor dos deslocamentos horizontais da massa m, em relação ao ponto de equilíbrio, com ordem  $n \times 1$ ;
- **F(t)** o vetor das forças externas de excitação, com ordem  $n \times 1$ .

Para um sistema em vibração livre e sem amortecimento, do mesmo modo que para 1 GDL, a equação é simplificada para:

$$M\ddot{X}(t) + KX(t) = 0 \quad (17)$$

Cuja solução é do tipo:

$$X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (28)$$

$$\ddot{X}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t \quad (19)$$

Substituindo (18) e (19) na equação (17), obtém-se:

$$(K - \omega^2 M)X = 0 \quad (20)$$

Para satisfazer a equação (20), com uma solução não nula, existem  $n$  autovalores ( $\omega_1^2, \omega_2^2 \dots \omega_n^2$ ) dados por:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (21)$$

Para todos os autovalores existe um autovetor associado que correspondem aos modos de vibração ( $\phi$ ), que descrevem os deslocamentos da estrutura.

#### 2.3.4 Análise modal

A análise modal é o processo constituído de técnicas teóricas e experimentais que possibilitam a construção de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico do sistema em estudo, a fim de determinar os seus parâmetros modais: as frequências naturais, os modos de vibração e os fatores de amortecimento modal (NÓBREGA, 2004).

Segundo PAZ (1992), as frequências naturais e os respectivos modos de vibração de uma viga, podem ser definidos por:

$$\omega_n = C_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (22)$$

Onde,

$C_n$  é o coeficiente dependente da condição de contorno e modo de vibração;

$I$  é o momento de inércia;

$E$  é o módulo de elasticidade;

$m$  é a massa;

$L$  é o comprimento da viga.

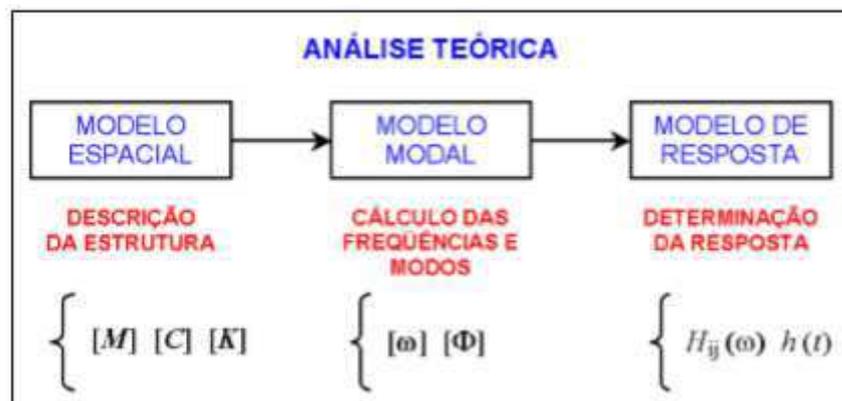
As frequências naturais retratam a taxa de oscilação livre da estrutura, após cessada a força que originou o seu movimento. Um sistema possui inúmeras frequências naturais, porém a mais relevante é a primeira, chamada por

fundamental, que apresenta o menor valor e é normalmente a que pode acarretar problemas para as estruturas civis.

Os modos de vibração são a forma como a estrutura vibra, relacionada a cada uma de suas frequências naturais, ou seja, para cada frequência natural existe um modo de vibração específico e sofre grande influência da fissuração.

De forma geral, pode-se analisar as vibrações de um sistema estrutural seguindo dois caminhos distintos: a via teórica ou a via experimental, ilustradas resumidamente nas Figuras 7 e 8.

Figura 7: análise teórica das vibrações de um sistema

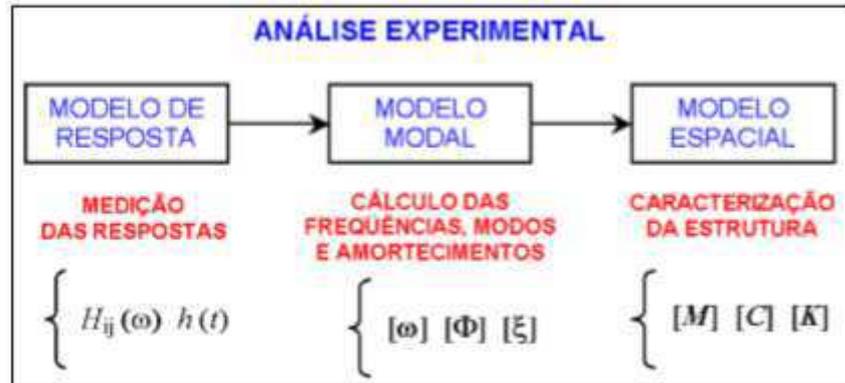


Fonte: Nóbrega (2004).

Na análise teórica se inicia definindo o modelo espacial, ou seja, as propriedades geométricas e físicas do sistema, geralmente em matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Na próxima fase determina-se o modelo modal, que é fazer uma análise modal teórica do modelo espacial, determinando as propriedades modais do sistema: os fatores de amortecimento, as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração.

Finaliza-se com o modelo de resposta, onde se analisa a resposta do sistema a influência de uma excitação. Ele consiste, portanto, de um conjunto de funções de resposta em frequência (FRFs) ou de funções de resposta ao impulso (FRIs) e das respostas da estrutura ao longo do tempo  $h(t)$ . A análise é feita sob uma excitação normalizada e a partir dela obtêm-se a solução de qualquer caso particular. (NÓBREGA, 2004).

Figura 8: análise experimental das vibrações de um sistema



Fonte: Nóbrega (2004).

Na análise experimental é feito o caminho inverso, determinando inicialmente, através de medições, as FRFs, FRIs e variações  $h(t)$ . Na sequência deduz-se as propriedades modais do sistema (fatores de amortecimento, frequências naturais e modos de vibração). Finalizando com as propriedades espaciais (massa, rigidez e amortecimento) da estrutura.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Generalidades

Para o estudo das estruturas foi utilizado o software SAP2000 v.20.2.0, que é uma ferramenta com diversos tipos de análises baseadas no método dos elementos finitos.

Para a realização desta análise modal, foram divididos os procedimentos em etapas. Na primeira foi escolhida a viga a ser utilizada e calculada sua fissuração com e sem a protensão, os cálculos detalhados estão nos apêndices A e B.

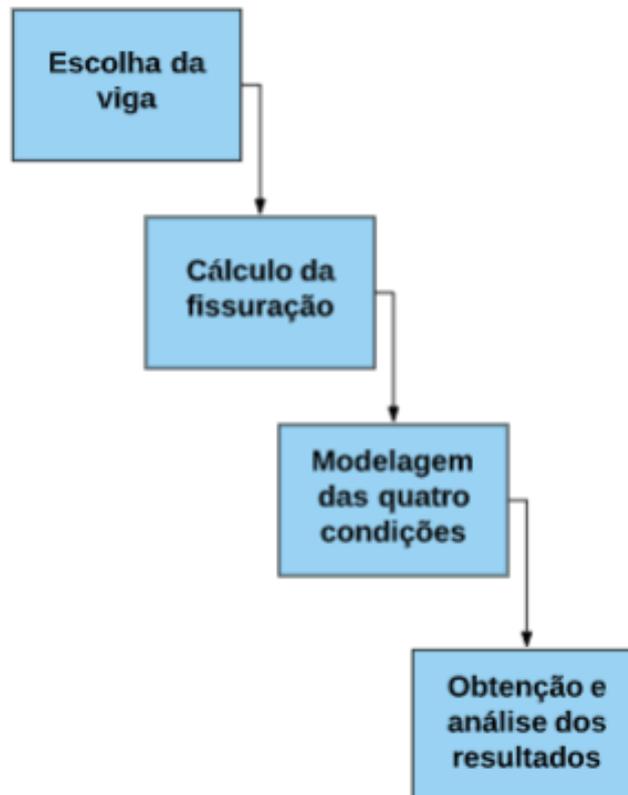
Em seguida foi feita a modelagem da estrutura analisando-as na condição de contorno apoio-apoio, com quatro condições diferentes:

- Sem protensão e sem fissuras;
- Sem protensão e com fissuras;
- Com protensão e com fissuras;
- Com protensão e sem fissuras.

Uma vez determinados todos os parâmetros da estrutura definiu-se tamanho da malha em 10 centímetro, este último foi escolhido para se obter um maior refinamento e assim resultados mais precisos.

Passou-se então para análise modal, na qual foram obtidas as propriedades dinâmicas dos quatros modelos de viga já mencionados. Por ultimo é feita as análises dos resultados obtidos por meio da etapa anterior. Todos os processos estão resumidos na Figura 9.

Figura 9: fluxograma das etapas da Metodologia



Fonte: Elaborado pelo autor

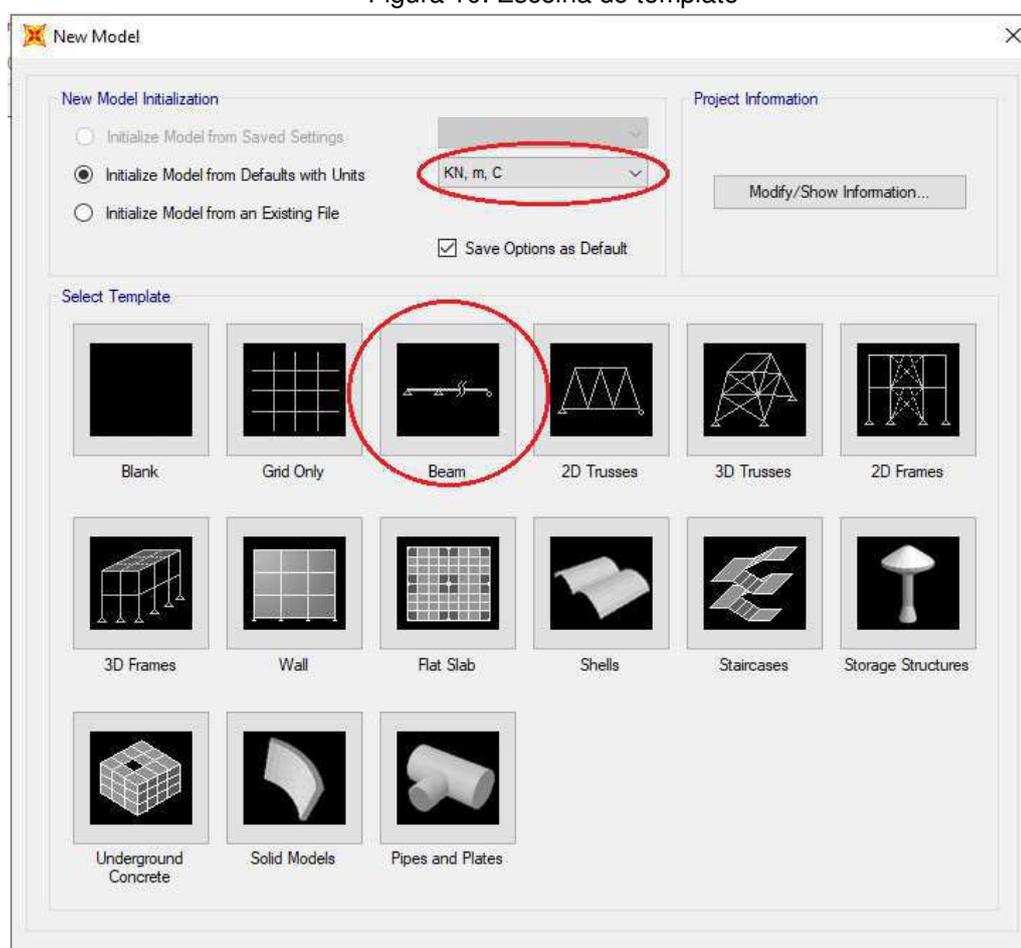
### **3.2 MODELAGEM NO SAP2000**

Para a modelagem foi escolhida uma viga dimensionada na disciplina estruturas de concreto protendido. A viga está presente em uma ponte, possui uma seção transversal I, 24,3 metros de comprimento, dois cabos de protensão com oito cordoalhas de 15,2 milímetros cada. Com relação às informações técnicas dos cabos, foi utilizado o catálogo da Rudloff industrial LTDA.

### 3.2.1 Seção transversal

O primeiro passo ao abrir o SAP2000 é criar um novo modelo (Figura 11), escolhendo as unidades que se deseja trabalhar e o template mais adequado, no caso foi escolhido o modelo beam, pois o objetivo é modelar uma viga em diferentes apoios. Depois se define o número de vãos, o comprimento deles e a seção transversal.

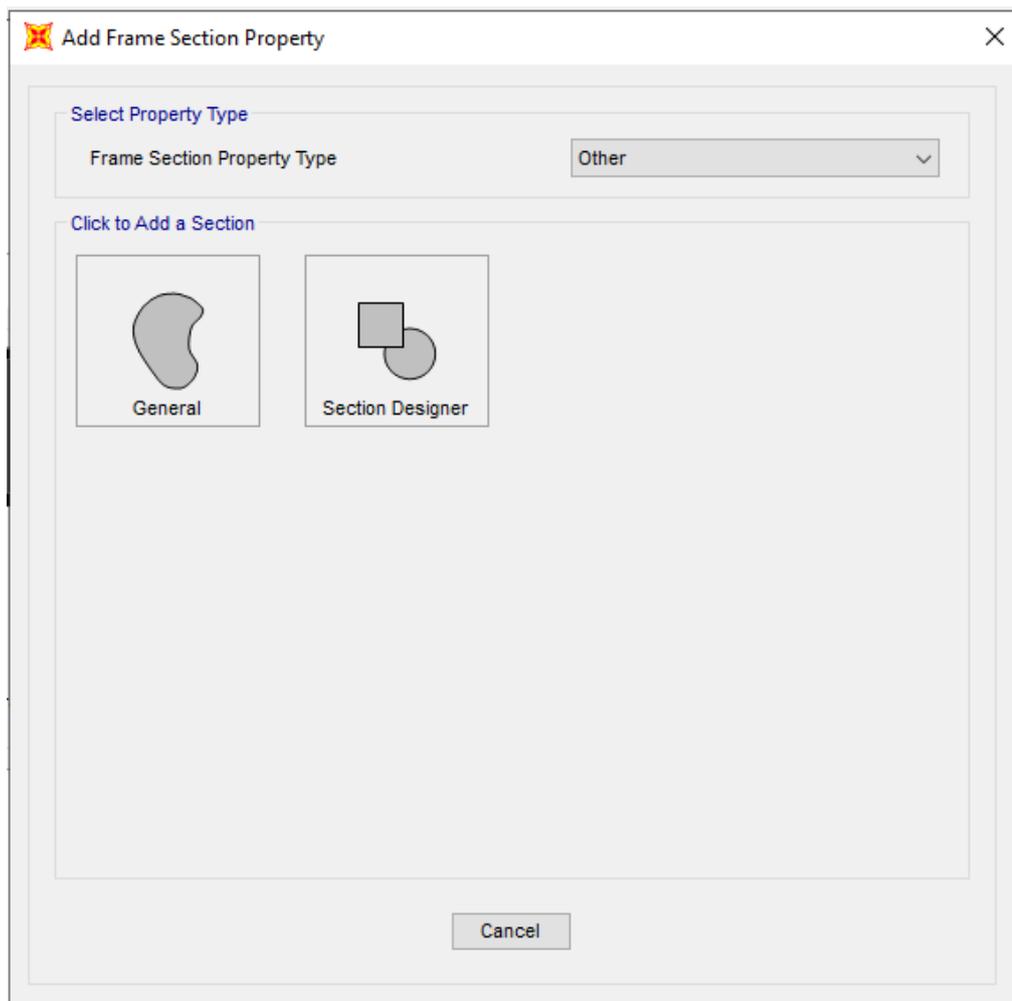
Figura 10: Escolha do template



Fonte: Elaborado pelo autor

Para definir a seção de uma viga  $I$  de concreto armado segue-se a sequência: + > *add new property* > *other* > *section designer*. Embora na opção *concrete* tenha a seção em  $I$  (*precast i*) nela não é possível adicionar armadura passiva, então se optou por modelar do zero (figura 12).

Figura 11: Definir o tipo da seção transversal da viga.

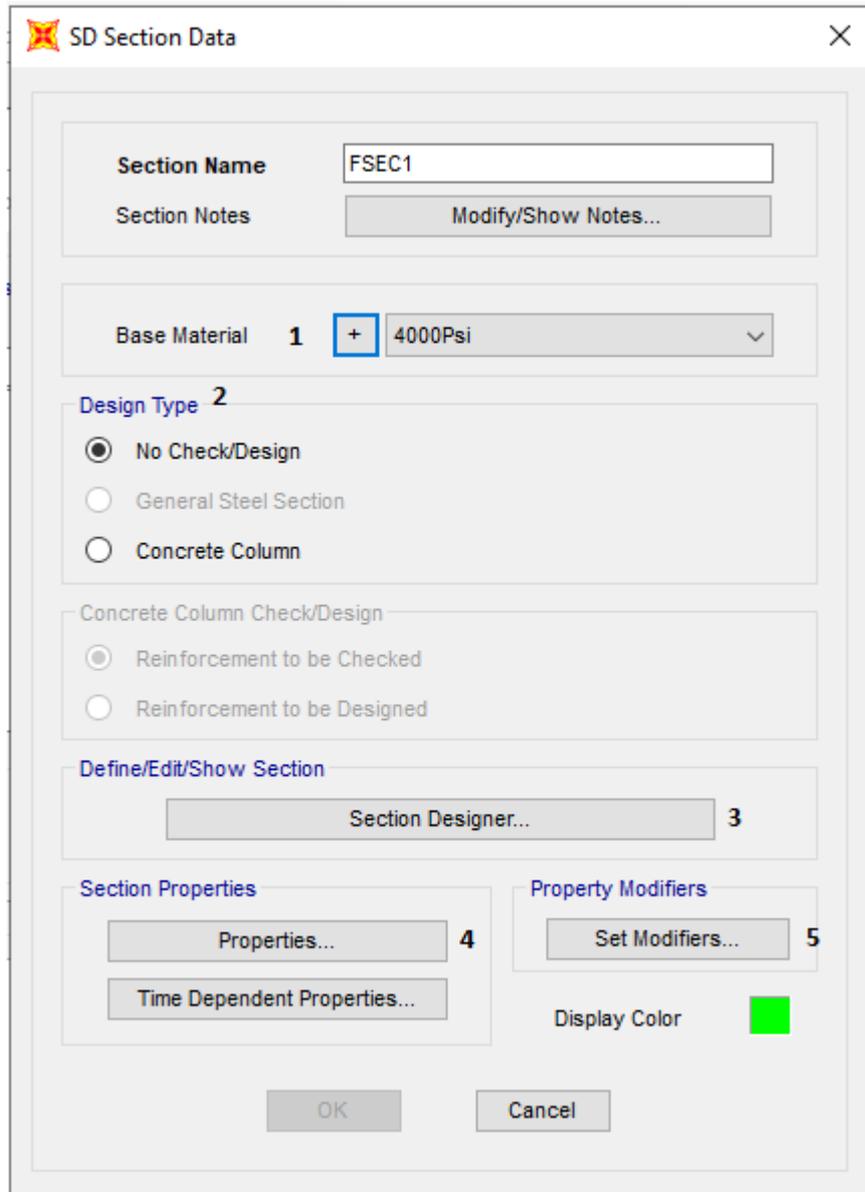


Fonte: Elaborado pelo autor

A próxima janela (figura 13) possui cinco itens de interesse.

1. *Base material*: onde irá ser determinado as propriedades dos materiais (no caso o concreto armado, armadura passiva e ativa);
2. *Design type*: o tipo do design, como não se deseja dimensionar a viga foi marcado a opção “no check”;
3. *Section designer*: definir as dimensões da viga;
4. *Section properties*: visualizar as propriedades geométricas da vida definida (inércia, por exemplo);
5. *Set modifiers*: adicionar algum fator que modifique as propriedades geométricas da viga, posteriormente será utilizado para simular a fissuração.

Figura 12: definir as propriedades da viga



Fonte: Elaborado pelo autor

Inicialmente foram definidas as propriedades do concreto armado com  $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ , e do aço CA-50 (Figura 14). Para o aço foi escolhido o módulo de elasticidade igual a 210 GPa, valor recomendado pela ABNT NBR 6118/2014. Para o concreto armado foi escolhido o valor de 25 kN/m<sup>3</sup> de peso específico e calculado o módulo de elasticidade secante (para os demais valores foi adotado a sugestão do software) através da equação:

$$E_{cs} = \alpha_i * E_{ci} \quad (23)$$

Onde,

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 * \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (24)$$

$$E_{ci} = 5600 * \sqrt{f_{ck}} \quad (25)$$

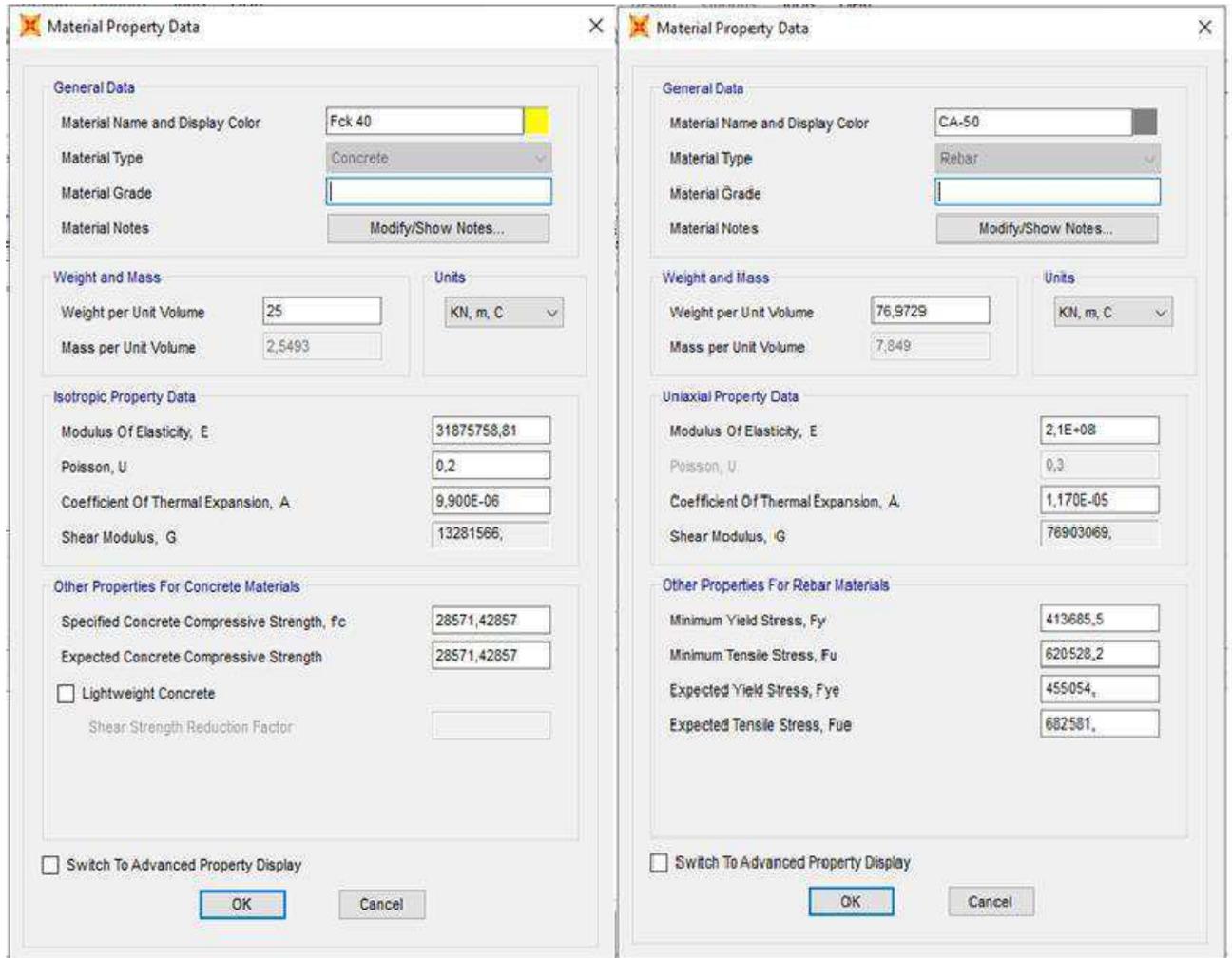
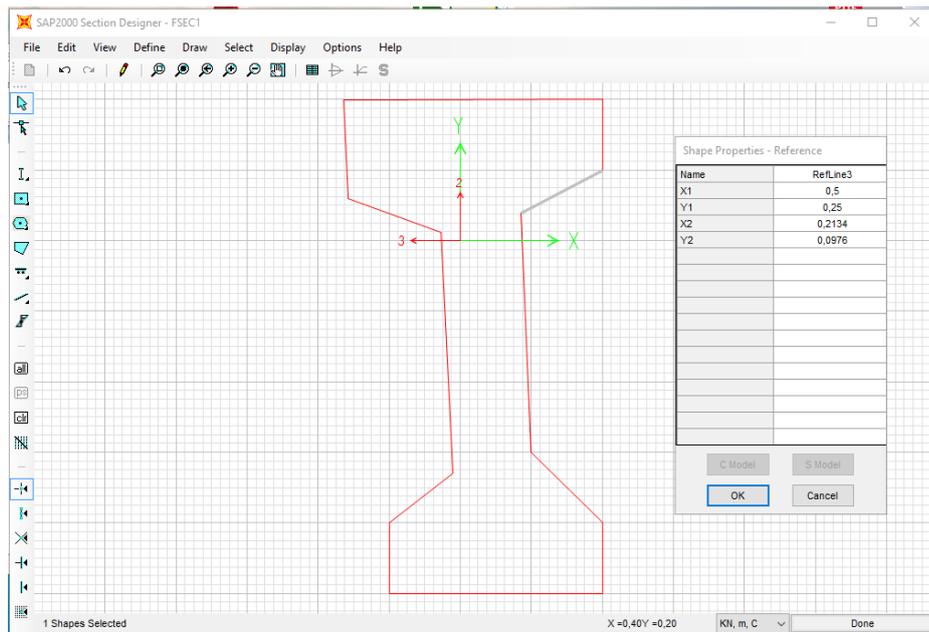


Figura 13: Propriedades do concreto armado e do aço CA-50 Fonte: Elaborado pelo autor

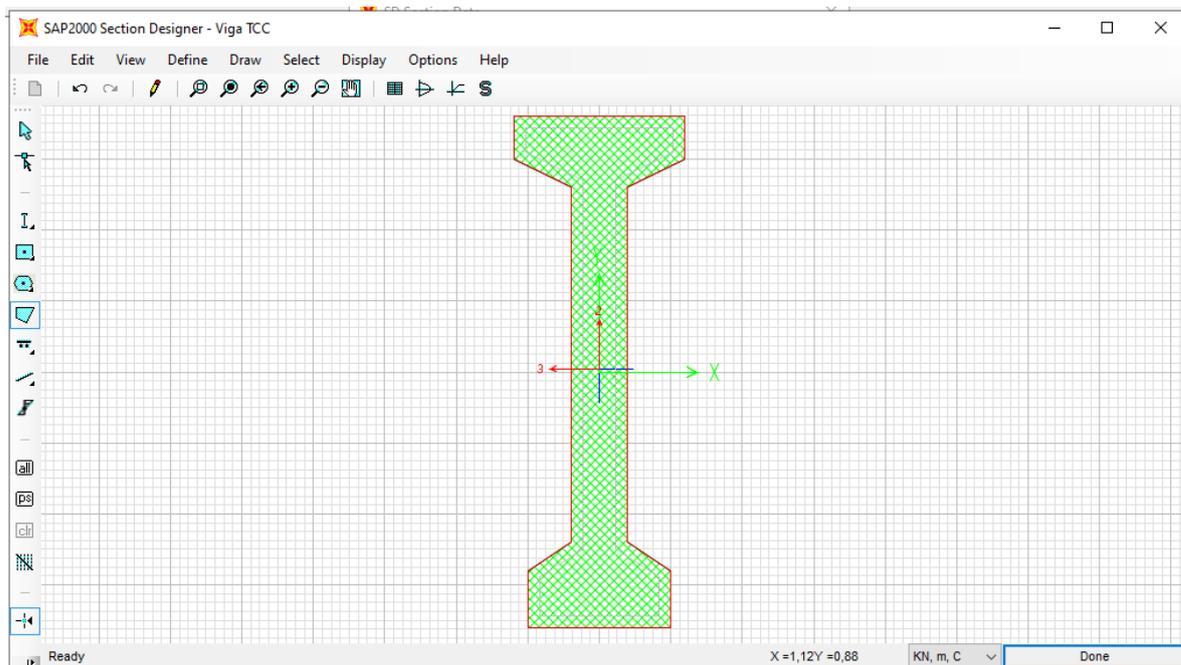
Para criar uma seção genérica na *section designer* utiliza-se o comando *draw reference lines* (Figura 15) para desenhar uma figura aleatória ,porém semelhante à desejada, e clicando com o botão direito do mouse nas linhas ajusta-se as coordenadas para formar o contorno real. Depois com o comando *draw polygonal shape* utiliza-se as linhas de referência para criar a seção de concreto (Figura 16).

Figura 14: Seção com coordenadas aleatórias.



Fonte: Elaborado pelo autor.

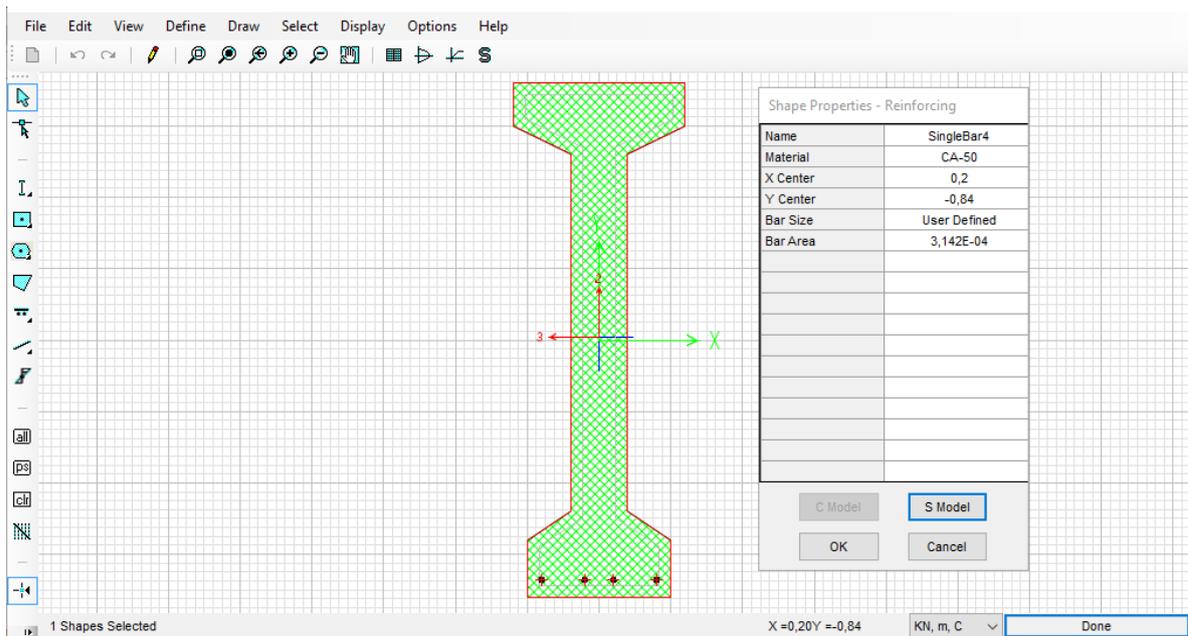
Figura 15: Seção de concreto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A armadura passiva é adicionada no comando *draw reinforcing shape*, colocou-se quatro *singleBar* em locais aleatórios e clicando com o botão direito do mouse editou-se as coordenadas, o material (selecionando o CA-50 anteriormente definido) e a bitola (Figura 17).

Figura 16: Seção armada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2.2 Cabos de protensão

O primeiro passo para a definição da armadura ativa é determinar o material empregado em *define > materials > add new material* e em *material type* selecionar a opção  *tendon* . O módulo de elasticidade utilizado foi 202 GPa e a massa específica de 7852 kg/m<sup>3</sup> ambos sugeridos pelo catálogo Rudloff utilizado no dimensionamento.

A seguir é definida a seção em *define > section properties > tendon sections > add new section*. O modelo foi definido como elemento, selecionou-se o material previamente delineado e colocou-se a área do cabo (formado por 8 cordoalhas com 15,2 mm de diâmetro) que é de 14,51667 cm<sup>2</sup> (Figura 18).

Figura 17: Seção da armadura ativa.

**Tendon Section Data**

**Tendon Section Name** Seção do cabo protendido  
Section Notes Modify/Show...

**Tendon Modeling Options For Analysis Model**

Model Tendon as Loads  
 Model Tendon as Elements

**Tendon Parameters**

Prestress Type Prestress  
Material Property + TENDON TCC

**Tendon Properties**

Specify Tendon Diameter 0,043  
 Specify Tendon Area 1,451667E-03  
Torsional Constant 3,354E-07  
Moment of Inertia 1,677E-07  
Shear Area 1,307E-03

**Units** KN, m, C  
Display Color ■

OK Cancel

Fonte: Elaborado pelo autor.

O próximo passo é determinar o traçado do cabo em *draw > draw frame/ cable/ tendon*, na janela aberta (Figura 19) muda-se o *line object type* para *tendon* e a *section* para a seção anteriormente criada. Então se clica no ponto inicial e final da viga, definindo o comprimento total do cabo.

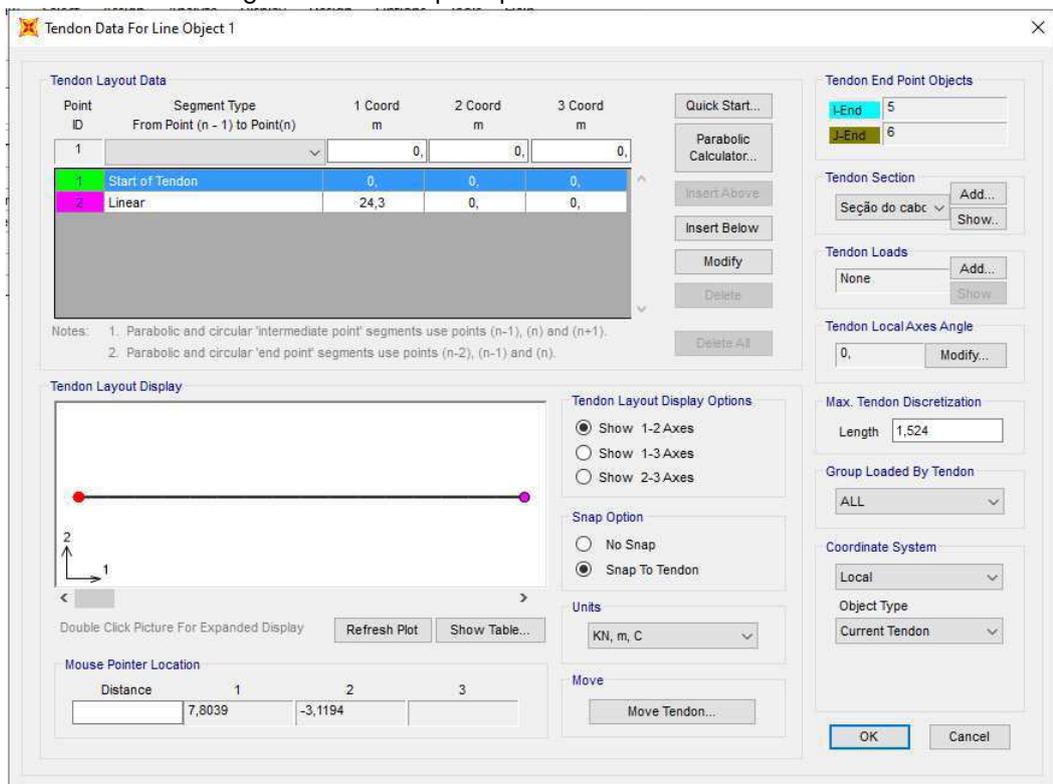
Figura 18: Propriedades do objeto.

Line Object Type	Tendon
Section	Seção do cabo protendido
XY Plane Offset Normal	0,
Drawing Control Type	None <space bar>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a definição do trecho será aberto uma nova janela (Figura 20), *Tendon Data For Line Object 1*, onde será determinado o traçado exato do cabo, a força de protensão e suas perdas. Através do comando *quick start* é escolhido o tipo do traçado e o número de vãos (Figura 21).

Figura 19: Janela principal do detalhamento do cabo



Fonte: Elaborado pelo autor

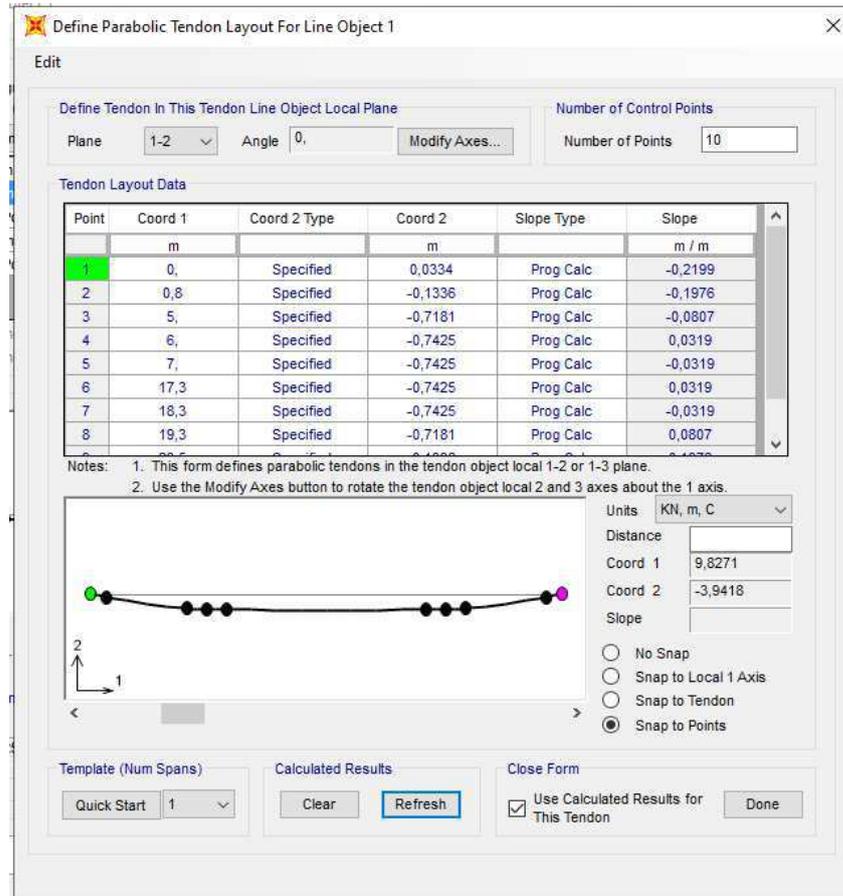
Figura 20: Determinando o desenho base do cabo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

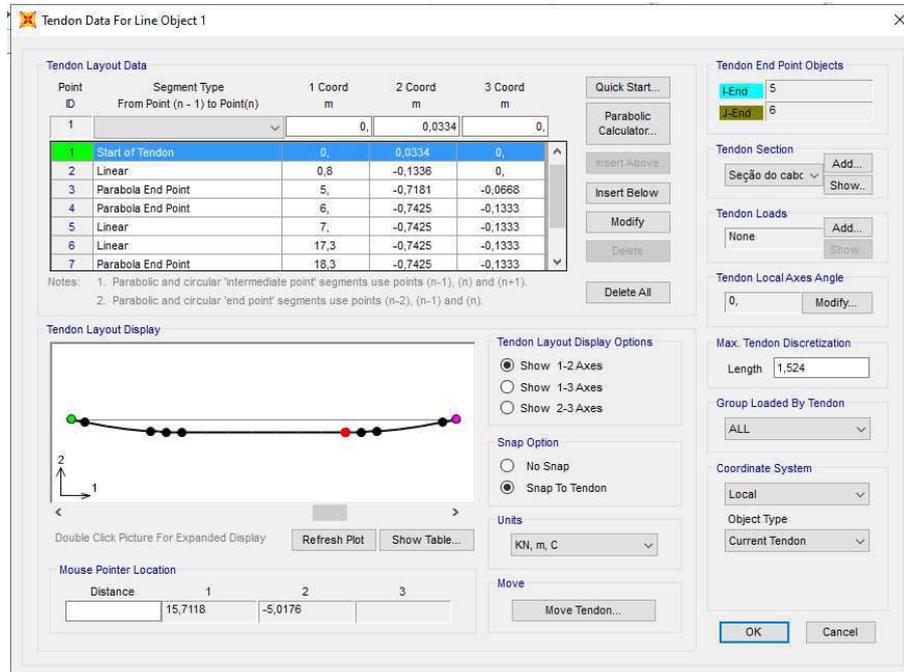
Após as definições em *quick start*, o programa abre o *parabolic calculator*. Nessa janela (Figura 22) é possível escolher quantos pontos serão detalhados no traçado do cabo, atribuindo valores para as coordenadas e inclinações. De volta a janela principal (Figura 23) é editado o tipo de segmento para linear no trecho inicial (primeiros 0,8 metro), central (de 6,0 a 17,3 metros) e final (últimos 0,8 metro). O deslocamento horizontal no cabo é descrito na coluna 3 *Coord*.

Figura 21: Pontos utilizados para definir o trajeto do cabo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22: Janela principal com o cabo já detalhado



Fonte: Elaborado pelo autor.

O último passo é em *tendon loads (add)* na janela aberta (Figura 24) adicionou-se a força de protensão, as perdas de cargas imediatas e progressivas; todos dados obtidos no dimensionamento. Para o segundo cabo repetiu-se os processos a partir do desenho do mesmo.

Figura 23: Força de protensão e perdas utilizadas.

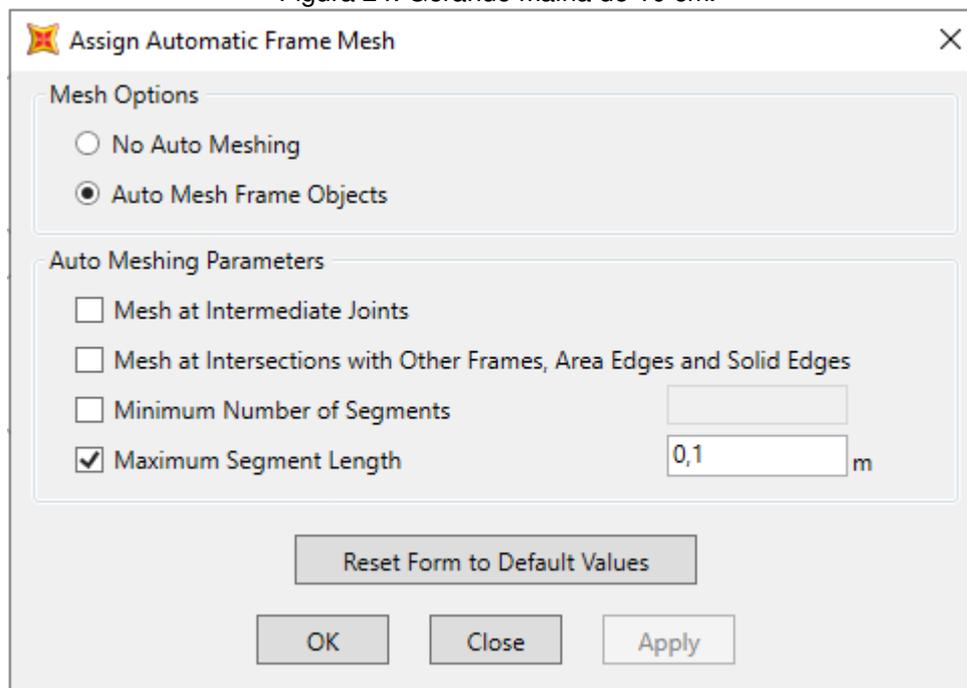
Parameter	Value
Load Pattern Name	DEAD
Units	KN, m, C
Jack From This Location	Both Ends Simultaneously
Load Type	Force
Tendon Load (Force)	1569 (KN)
Curvature Coefficient (Unitless)	0,1
Wobble Coefficient (1/m)	1,0E-03
Anchorage Set Slip (m)	4,589E-03
Elastic Shortening Stress (KN/m <sup>2</sup> )	16384,31
Creep Stress (KN/m <sup>2</sup> )	81089,67
Shrinkage Stress (KN/m <sup>2</sup> )	71556,91
Steel Relaxation Stress (KN/m <sup>2</sup> )	92293,21

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2.3 Realizando a análise

Para obter os resultados foi gerada uma malha de 10 centímetros (Figura 25) através do comando *assign > frame > automatic frame mesh*, e em *analyze > set analysis options* foi determinado uma análise bidimensional.

Figura 24: Gerando malha de 10 cm.



Fonte: Elaborado pelo autor

Para os casos de viga fissurada fez-se a modificação em *define > sections properties > frame sections* tendo a seção já modelada selecionada clicou-se em *add copy of property > set modifiers* e no campo *Moment of inertia about 3 axis* colocou-se o valor 0,1206717 (referente a parcela restante da inércia inicial). O apêndice A demonstra o passo-a-passo para a obtenção da inércia equivalente da viga, após as fissuras. O apêndice B ilustra o cálculo da fissuração caso a viga fosse construída já protendida.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Resultados obtidos

Para validar os resultados do software foi feito uma comparação dos valores obtidos nele, para a viga sem protensão e sem fissuração, com os obtidos analiticamente através da equação (24). Pelo quadro 2 se percebe que os resultados do SAP2000 distanciam-se dos reais ao aumentar o modo de vibração, no entanto,

como as diferenças estão abaixo de 10% elas são aceitáveis. Os modos de vibração estão apresentados na Figura 26.

Quadro 2: Frequências obtidas (em Hz) para diferentes modos de vibração.

MODO	ANALÍTICO	SAP2000	DIFERENÇA
1°	5,768	5,703	1,126%
2°	23,071	22,091	4,251%
3°	51,911	47,260	8,960%

Fonte: Elaborado pelo autor.

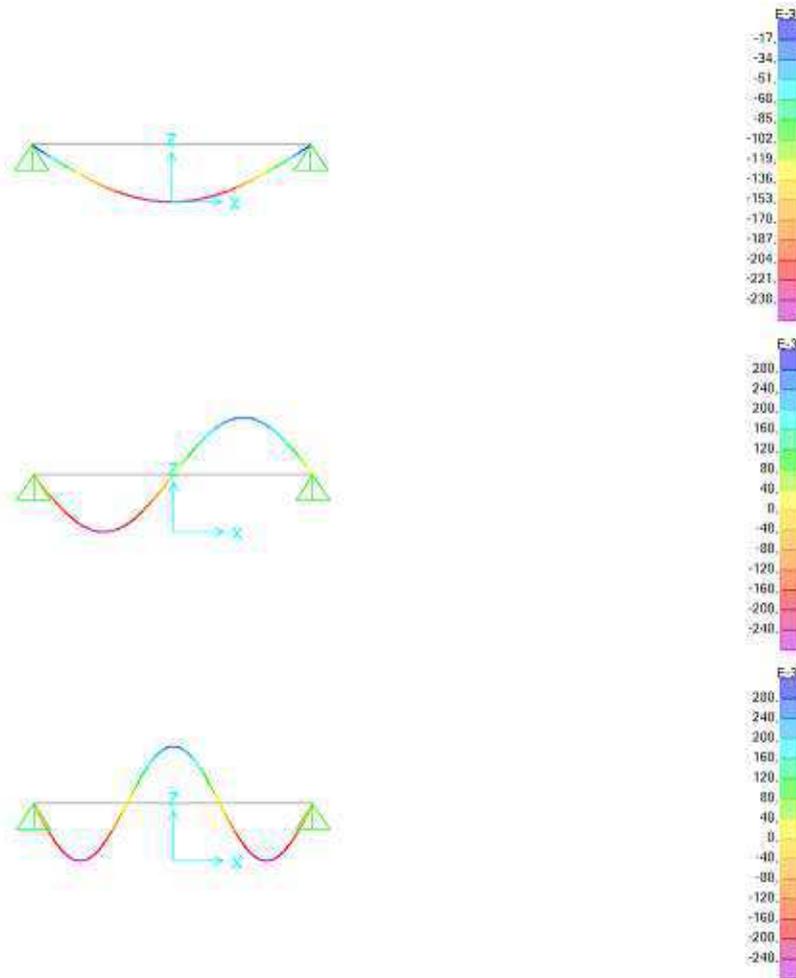
No caso da viga fissurada e sem protensão obteve-se os seguintes resultados (quadro 3):

Quadro 3: Frequências obtidas no SAP2000, para a viga com fissuras e sem protensão.

MODO	FREQUÊNCIA (HZ)
1°	2,001
2°	7,971
3°	17,812

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 25: 1°, 2° e 3° modo de vibração, respectivamente, para a viga com fissuras e sem protensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

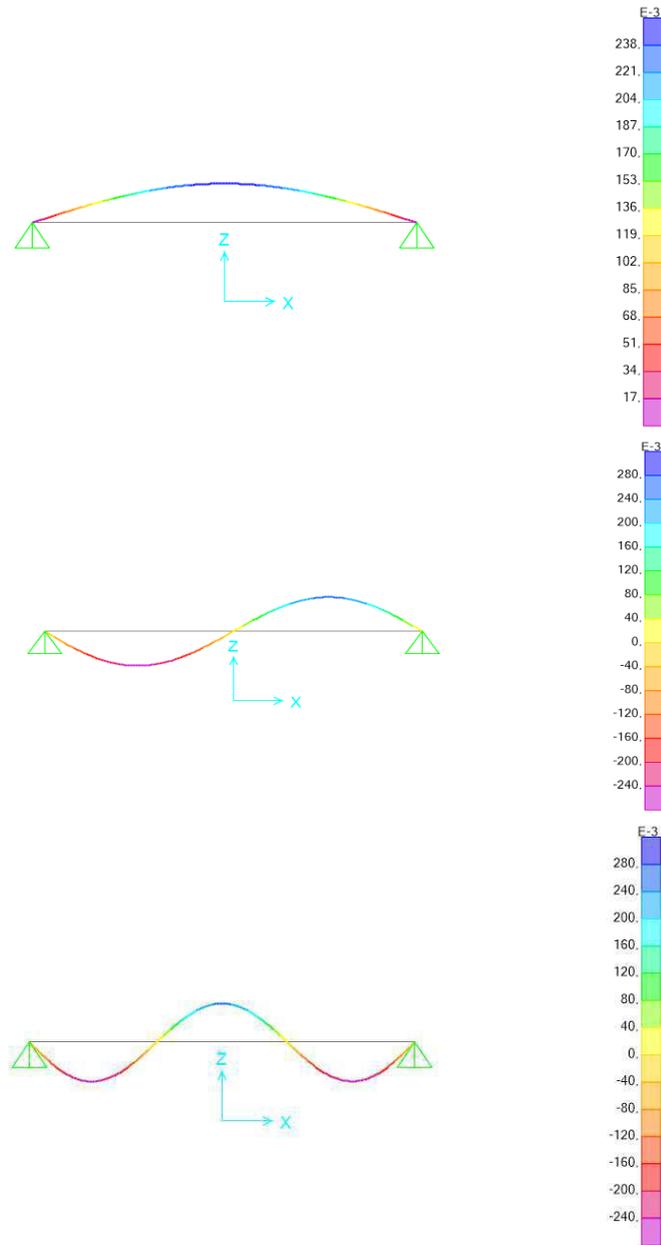
Para a viga fissurada e com protensão obteve-se os seguintes resultados (Quadro 4 e Figura 27):

Quadro 4: Frequências obtidas no SAP2000, para a viga protendida e com fissuras.

MODO	FREQUÊNCIA (HZ)
1°	2,369
2°	9,296
3°	20,538

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 26: 1°, 2° e 3° modo de vibração, respectivamente, para a viga protendida e com fissuras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

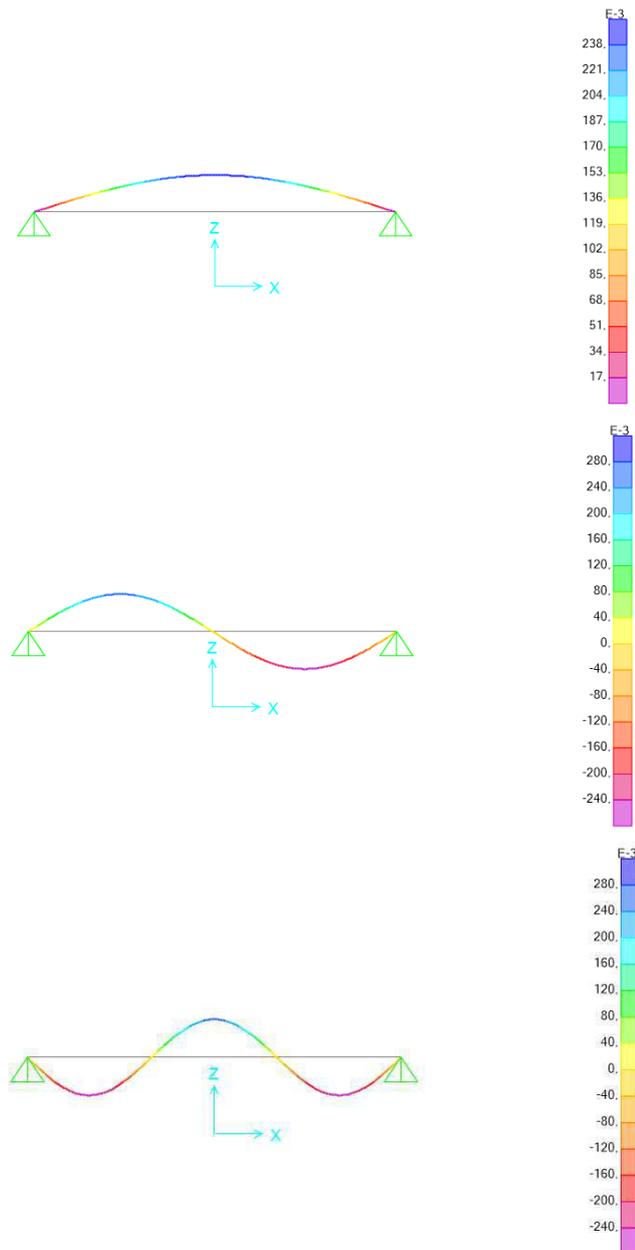
Por ultimo as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração obtidos na viga sem fissuração e com protensão estão apresentados no Quadro 5 e Figura 29, respectivamente:

Quadro 5: Frequências obtidas no SAP2000, para a viga protendida e sem fissuras

MODO	FREQUÊNCIA (HZ)
1°	5,844
2°	22,552
3°	48,118

. Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 27: 1°, 2° e 3° modo de vibração, respectivamente, para a viga protendida e sem fissuras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.2 Análise dos resultados

Comparando os valores do SAP2000 para a viga sem protensão e sem fissuras com o da viga sem protensão e com fissuras percebe-se a diminuição de cerca de 64% na frequência natural da mesma nos três modos de vibração (Quadro 6). Como esperado, a fissuração reduziu drasticamente a frequência da viga, assim o controle dessa perda de rigidez é extremamente importante para diminuir as chances de danos maiores e/ou de ocorrer ressonância na estrutura.

Quadro 6: comparação da frequência natural da viga sem fissuras com a viga fissurada.

MODO	SEM FISSURAS E SEM PROTENSÃO	COM FISSURAS E SEM PROTENSÃO	DIFERENÇA
1°	5,703	2,001	64,914%
2°	22,091	7,971	63,918%
3°	47,260	17,812	62,309%

. Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao adicionar a protensão na viga já fissurada ocorre uma recuperação de 18,4% da frequência natural no 1° modo de vibração, isso ocorre pelo aumento de rigidez da estrutura através da inserção dos cabos de aço que possuem grande módulo de elasticidade, conforme se observa no Quadro 7.

Quadro 7: comparação da frequência natural da viga com fissuras com a viga fissurada e protendida.

MODO	COM FISSURAS E SEM PROTENSÃO	COM FISSURAS E COM PROTENSÃO	DIFERENÇA
1°	2,001	2,369	18,396%
2°	7,971	9,296	16,632%
3°	17,812	20,538	15,302%

Fonte: Elaborado pelo autor.

O último caso é adicionar a protensão ainda em projeto, prevendo a fissuração. Nesse cenário obtém-se a maior frequência natural fundamental (primeira frequência da estrutura), já que a armadura ativa impede a ocorrência de fissuras e aumenta a rigidez da viga.

Percebe-se que quando a estrutura possui um baixo valor de frequência natural e a ressonância vira um perigo real, a protensão preventiva é um método extremamente eficaz de combatê-la.

Quadro 8: comparação da frequência natural da viga com fissuras e protensão com a viga sem fissuras e protendida.

MODO	COM FISSURAS E COM PROTENSÃO	SEM FISSURAS E COM PROTENSÃO	DIFERENÇA
1°	2,369	5,844	146,67%
2°	9,296	22,552	142,590%
3°	20,538	48,118	134,288%

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5. CONCLUSÃO

A fissuração altera as frequências naturais de vibração das estruturas consideravelmente, o que resulta na necessidade de uma avaliação quantitativa desse efeito. Afinal, se essa variação for muito elevada, a estrutura fica sujeita aos efeitos da ressonância.

Com a inserção da armadura ativa na viga, verifica-se um aumento nas frequências naturais de vibração. A maior alteração ocorre quando a protensão é realizada na construção da estrutura, pois assim ela se torna resistente às fissuras inatas ao concreto. Para a inserção da armadura ativa após a fissuração também houve acréscimo, em razão do aumento da rigidez da peça.

O SAP2000 possui uma modelagem completa e detalhada em relação à viga e protensão, permitindo análises que seriam complexas de se realizar analiticamente. Porém, para estruturas com valores mais elevados de frequência natural o resultado obtido se afasta muito do real, não sendo satisfatório.

## 6. REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Rio de Janeiro, 2014.

ALMEIDA, S.F. (2005). **Análise experimental da rigidez de elementos de concreto submetidos à danificação progressiva até a ruptura**. Dissertação (Mestrando) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

CHOLFE, L.; BONILHA, L. A. S. (2013). **Concreto protendido: teoria e prática**. 1ª ed. Pini.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, L. (1993). **Dynamics of structures**. 2ª ed. McGraw-Hill.

GENOVESE, M. (2005). **Avaliação Estrutural: Influência do Ruído nos Métodos de Detecção de Danos Baseados na Análise das Propriedades Dinâmicas**, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.

HANAI, J. B. (2005). **Fundamentos do concreto protendido**. E-book de apoio para o curso de engenharia civil, departamento de engenharia de estruturas - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ISHITANI H.; FRANÇA R. L. S. (2002). **Concreto protendido fundamentos iniciais**. Escola politécnica, departamento de engenharia de estruturas e fundações – Universidade de São Paulo.

MARCY, M. (2013). **Identificação e Quantificação de Danos em Pórticos Espaciais Via Método do Erro Residual e Redes Neurais Artificiais**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-001A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF.

MOUTINHO, C. M. R. **Controle de vibrações em estruturas de Engenharia Civil**. 2007. 394 f. Dissertação (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia – Universidade do Porto. 2007.

NÓBREGA, P.G.B (2004). **Análise dinâmica de concreto: estudo experimental e numérico das condições de contorno de estruturas pré-moldadas**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

PAZ, M. **Structural Dynamics, theory and computation, third edition**. Editorial Reverté S.A., 1992.

PITUBA, J. J. C.; DELALIBERA, R. G. **Avaliação de deflexões em estruturas de concreto armado utilizando mecânica do dano**. Artigo publicado na IBRACON, Instituto Brasileiro do Concreto, Volume 7, número 1 (Fevereiro de 2014).

SILVA, P. M. **Análise da perda de rigidez em vigas de concreto armado devido à fissuração por esforços de flexão utilizando ensaio de ultrassom.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas.** 4. Ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2008.

## APÊNDICE A - CÁLCULO DA FISSURAÇÃO DA VIGA ARMADA

Equação 01:

$$M_R = \alpha \frac{f_{ct} I_c}{y_t}$$

$$\alpha = 1,2 \text{ Para viga I : } f_{ct} = 0,21 * f_{ck}^{2/3} : f_{ck} = 40 \text{MPa} : I_c = 0,193633 \text{ m}^4$$

$$y_t = 0,9113 \text{ m}$$

$$M_R = 1,2 \frac{2,456 * 0,193633}{0,9113} = 678,454 \text{ kN.m}$$

Posição da linha neutra ( $x_{II}$ ):

$$a = \frac{b_w}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1$$

$$b = h_f * (b_f - b_w) + (\alpha_e - 1) * A'_S + \alpha_e * A_S =$$

$$0,25 * (0,6 - 0,2) + 0 + 6,588 * 0,001257 = 0,1083$$

$$c = d' * (\alpha_e - 1) * A'_S - d * \alpha_e * A_S - \frac{h_f^2}{2} * (b_f - b_w)$$

$$= 0 - 1,74 * 6,588 * 0,001257 - \frac{0,15^2}{2} * (0,6 - 0,2) = -0,02257$$

$$x_{II} = \frac{-b \pm (b^2 - 4 * a * c)^{0,5}}{2 * a} = 0,2084 \text{ m}$$

Momento de Inércia no estágio II caso a linha neutra tenha caído dentro da mesa ( $x_{II} < h_f$ ):

$$I_{II} = \frac{b_f x_{II}^3}{3} + \alpha_e * A_S * (x_{II} - d)^2 + (\alpha_e - 1) * A'_S * (x_{II} - d')^2$$

$$= 0,0212306 \text{ m}^4$$

Onde:

$b_w$  largura da alma da seção;

$b_f$  largura da mesa;

$h_f$  altura da mesa;

$A'_S$  área da armadura superior;

$d'$  altura útil da armadura superior;

$A_S$  área da armadura inferior;

$d$  altura útil da armadura inferior.

Equação 02:

$$(EI)_{eq} = E_{CS} \left\{ \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \Rightarrow (I)_{eq} = \left\{ \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_R}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\}$$

$$\left\{ \left( \frac{678,454}{2932,33} \right)^3 0,19363 + \left[ 1 - \left( \frac{678,454}{2932,33} \right)^3 \right] 0,0212306 \right\} = 0,023366 \text{ m}^4$$

Parcela da inércia a ser considerada na modelagem:

$$\frac{I_{eq}}{I_c} = \frac{0,023366}{0,19363} = 0,1206$$

## APÊNDICE B: CÁLCULO DA FISSURAÇÃO NA VIGA PROTENDIDA

$$N_{P\infty} = A_P * \Delta\varepsilon_{Pi} * E_P = 22,944 * 5 * 202000 = 2,3173 \text{ MN}$$

$$\sigma_{c,m\acute{a}x,CF} = -\frac{N_{P\infty}}{A_C} - e_P * \frac{N_{P\infty}}{W_{c,inf}} + \frac{M_{CF}}{W_{c,inf}} =$$
$$-\frac{2,3173}{0,515} - 2,3173 * \frac{0,68681}{0,1826} + \frac{2,93233}{0,1826} = 2,84 \text{ MPa}$$

$$f_{ctk,t} = 0,3f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 3,51 \text{ MPa}$$

Como  $\sigma_{c,m\acute{a}x,CF} < f_{ctk,t}$ , o concreto não fissura.

Onde,

$N_{P\infty}$  força de protensão;

$A_P$  área da armadura ativa;

$\Delta\varepsilon_{Pi}$  tensão do pré alongamento do concreto;

$E_P$  módulo de elasticidade da armadura ativa;

$A_C$  área do concreto;

$W_{c,inf}$  módulo de resistência inferior do concreto;

$M_{CF}$  momento de combinação frequente de serviço;

$\sigma_{c,m\acute{a}x,CF}$  tensão máxima do concreto, sob combinação frequente de serviço.