



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# ISOMETRIAS

Renato Oliveira Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB  
Junho/2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586i

Silva, Renato Oliveira.

Isometrias / Renato Oliveira Silva. – Campina Grande, 2016.  
104 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.  
"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".  
Referências.

1. Isometrias do Plano. 2. GeoGebra. 3. Conjunto dos Números Reais. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título.

CDU 514.112(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **ISOMETRIAS**

**por**

**Renato Oliveira Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

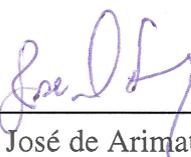
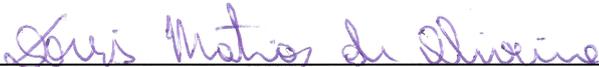
# ISOMETRIAS

por

**Renato Oliveira Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:


Prof. Dr. José de Arimateia Fernandes - UFCG

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Junho/2016**

# Dedicatória

À Maria Ioneris, minha esposa.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por mais essa importante conquista em minha vida.

À Maria Ioneris, minha querida esposa, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos. Sua enorme paciência e apoio foram fundamentais para a realização deste projeto. Muito obrigado meu Amor!

À toda minha família, principalmente aos meus pais Arnaldo e Rosa Maria, por me dar total apoio e incentivo a prosseguir nos estudos.

Aos amigos que iniciaram comigo essa jornada no PROFMAT, especialmente, Rubem, Raquel, Pedro Abel, Josenildo, Marcos Vier e ao mestre George.

À todos os funcionários da UAMAT, especialmente à Andrezza, e aos professores vinculados ao PROFMAT, José Iraponil, Alessandro, Vandik, Alciônio, Jeferson, Diogo Santana, Rosana e Aparecido. Eles sempre estiveram presentes e contribuíram significativamente para a minha formação.

Agradeço aos professores José de Arimatéia e Davis Matias por aceitarem o convite de compor a Banca Examinadora de minha defesa. Suas valiosas sugestões e correções enriqueceram ainda mais o nosso trabalho.

Não poderia deixar de agradecer ao meu orientador, Luiz Antônio, por todos os valiosos ensinamentos e extrema paciência que tivera comigo ao longo de todo esse projeto. Muito obrigado Professor Luiz!

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

# Resumo

É notória a importância das isometrias, tanto para o desenvolvimento da Matemática quanto para o estudo de outras áreas do conhecimento. As transformações geométricas, principalmente as rotações e reflexões, de um modo geral, podem ser utilizadas, por exemplo, nas Artes Plásticas para produzir determinados efeitos artísticos. Em nosso trabalho procuramos explorar as isometrias do plano, sob o ponto de vista teórico, onde apresentamos suas propriedades e classificação, e sob o ponto de vista prático, expondo uma série de atividades e problemas de Geometria Plana, a serem solucionados empregando-se as propriedades dessas transformações, bem como utilizando-se como recurso o software GeoGebra. Além disso, buscamos evidenciar a importância das isometrias tanto na apresentação de superfícies isométricas ao plano quanto na caracterização do Conjunto dos Números Reais como um espaço métrico, que completa o Conjunto dos Números Racionais.

**Palavras-Chaves:** Isometrias do Plano. GeoGebra. Conjunto dos Números Reais.

# Abstract

It is notorious the importance of isometries, both for the development of mathematics and to the study of other areas of knowledge. The geometric transformation, especially rotations and reflections, in general, may be used, for example, in the arts to produce certain artistic effects. In our work we seek to explore the isometries of the plan, from the theoretical point of view, where we present their properties and classification, and from a practical point of view, exposing a series of activities and plane geometry problems to be solved if using them properties of these transformations, as well as using as resource GeoGebra software. In addition, we seek to highlight the importance of isometries in both the presentation surfaces isometric to the plane as the characterization of the Real Numbers set as a metric space, which completes the set of Rational Numbers.

**Keywords:** Isometries Plan. GeoGebra. Set of Real Numbers.

# Lista de Figuras

2.1	Projeção ortogonal sobre uma reta. . . . .	8
2.2	Desigualdade triangular. . . . .	9
2.3	Isometria no plano. . . . .	10
2.4	Imagem de uma reta por uma isometria. . . . .	11
2.5	Os segmentos $xy$ e $zw$ são equipolentes. . . . .	13
2.6	Translação. . . . .	14
2.7	O $\Delta xyz$ é transformado por $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ no $\Delta x'y'z'$ . . . . .	15
2.8	O problema da ponte. . . . .	16
2.9	Localização da ponte que interliga as cidades $z$ e $w$ . . . . .	16
2.10	As cordas inscritas em $\mathcal{C}$ têm comprimento $\delta$ e são paralelas à reta $r$ . . . . .	17
2.11	Simetria $\mathcal{S}_p$ . . . . .	17
2.12	Representação dos casos $x \in py$ e $p \in xy$ . . . . .	18
2.13	Os triângulos $xpy$ e $x_ppy_p$ são congruentes (caso LAL). . . . .	18
2.14	Imagem da reta $r$ pela simetria $\mathcal{S}_p$ . . . . .	19
2.15	O ponto $x$ é a imagem de $y = \mathcal{S}_p(x)$ pela simetria $\mathcal{S}_p$ . . . . .	19
2.16	A Reflexão $\mathcal{R}_r$ . . . . .	20
2.17	Os pontos $x$ e $y$ pertencem ao mesmo semiplano. . . . .	20
2.18	Os pontos $x$ e $y$ pertencem à semiplanos distintos. . . . .	21
2.19	Inversão de orientação pela reflexão $\mathcal{R}_r$ . . . . .	21
2.20	Localização do ponto $p$ que minimiza o trajeto entre $x$ e $y$ . . . . .	22
2.21	Reflexão da luz sobre um espelho plano $r$ . . . . .	22
2.22	O $\Delta pxy$ tem o menor perímetro. . . . .	23
2.23	Ângulo orientado. . . . .	23
2.24	A rotação $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$ . . . . .	24
2.25	Bissetriz dos ângulos $z\hat{o}x_{(o,\alpha)}$ e $w\hat{o}x$ para $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . . . . .	25
2.26	Bissetriz dos ângulos $z\hat{o}x_{(o,\alpha)}$ e $w\hat{o}x$ para $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ . . . . .	25
2.27	Rotação de uma reta $r$ em torno do ponto $o$ . . . . .	27
2.28	O centro da rotação $\mathcal{R} = \mathcal{R}ot_{(o_2,\alpha_2)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_1,\alpha_1)}$ . . . . .	27
2.29	As retas $r$ e $s$ contém os vértices $y$ e $z$ do $\Delta xyz$ . . . . .	28
2.30	Os vértices $y$ e $z$ foram obtidos por meio das rotações $\mathcal{R}ot_{(x,60^\circ)}$ e $\mathcal{R}ot_{(x,-60^\circ)}$ . . . . .	28
2.31	A reflexão com deslizamento $\mathcal{R}_{(\vec{v},r)}$ . . . . .	28

2.32	O $\Delta xyz$ é transformado no $\Delta x''y''z''$ pela reflexão com deslizamento $\mathcal{R}_{(\vec{v},r)}$ .	29
2.33	A reta $r$ é a mediatriz de $p\phi(p)$ .	30
2.34	Localização do vértice $w = \phi(z)$ .	31
2.35	Os pontos $x$ e $w = \phi(z)$ pertencem a um mesmo semiplano.	32
2.36	Os pontos $x$ e $w = \phi(z)$ pertencem à semiplanos distintos.	32
2.37	Localização do ponto $\phi(w)$ .	33
2.38	Localização dos pontos $w$ e $\mathcal{S}_m(w)$ .	34
3.1	Circle Limit IV.	36
3.2	Problema da trajetória entre $x$ e $y$ .	38
3.3	Construção de polígonos regulares por rotação.	38
3.4	Estrela de 12 pontas.	39
3.5	Ladrilhando o plano.	40
3.6	Ladrilhamento do plano e reflexão.	41
4.1	O traço de uma curva diferenciável parametrizada.	43
4.2	Hélice.	43
4.3	Circunferência.	44
4.4	Curva regular e reta tangente.	44
4.5	Representação do traço de $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$ e do vetor tangente $\alpha'(t)$ .	45
4.6	Superfície.	48
4.7	A esfera de centro $o = (0, 0, 0)$ e raio $a$ .	49
4.8	Cilindro $x^2 + y^2 = 1$ .	50
4.9	Cilindros elíptico e parabólico.	54
4.10	Cone circular de uma folha.	56
5.1	Decomposição de um espaço métrico.	70
5.2	Isometria.	84
5.3	Completamento de um espaço métrico.	90
A.1	A isometria $\phi = \mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_r$ .	97
A.2	Explorando a composição de duas reflexões em relação à retas paralelas.	98
A.3	Ângulo orientado entre retas.	99
A.4	Composição de duas reflexões em relação à retas concorrentes.	99
A.5	Composição de duas rotações de ângulo $180^\circ$ .	100
A.6	Explorando a composição de duas rotações de ângulo $180^\circ$ .	101
A.7	O vértice $x$ do $\Delta xyz$ .	101
A.8	Trajetória do raio visual entre $x$ e $y$ .	102
A.9	Estrela de 15 pontas.	103

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
1.1	Objetivos	6
1.1.1	Objetivo Geral	6
1.1.2	Objetivos Específicos	6
1.2	Organização	6
<b>2</b>	<b>Isometrias no Plano</b>	<b>8</b>
2.1	Transformações no Plano	8
2.1.1	Isometria	9
2.2	As Isometrias do Plano	13
2.2.1	Translação	13
2.2.2	Simetria em torno de um Ponto	17
2.2.3	Reflexão em Torno de Uma Reta	19
2.2.4	Rotação	23
2.2.5	Reflexão com Deslizamento	28
2.3	Classificação das Isometrias	29
<b>3</b>	<b>Trabalhando Isometrias em Sala de Aula</b>	<b>36</b>
3.1	Atividades	37
3.1.1	Problemas Teóricos e de Construção	37
3.1.2	Construção de polígonos regulares por rotação	38
3.1.3	Estrela de $m$ pontas	38
3.1.4	Ladrilhamento do Plano	39
<b>4</b>	<b>Algumas Superfícies Isométricas ao Plano</b>	<b>42</b>
4.1	Alguns Conceitos de Geometria Diferencial	42
4.1.1	Curvas Parametrizadas	42
4.1.2	Superfícies Parametrizadas	47
4.1.3	Superfícies Isométricas e Distância Intrínseca	50
4.2	Superfícies Isométricas ao Plano	53
4.2.1	Plano e Cilindro	54

4.2.2	Plano e Cone Circular . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Caracterização da Reta Real por Isometrias</b>	<b>59</b>
5.1	Espaço Métrico . . . . .	59
5.1.1	O Espaço Métrico $\mathbb{Q}$ . . . . .	65
5.2	Algumas Noções Topológicas . . . . .	67
5.2.1	Bolas e Esferas . . . . .	67
5.2.2	Conjuntos Limitados . . . . .	69
5.2.3	Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados . . . . .	70
5.3	Sequências . . . . .	73
5.3.1	Sequências . . . . .	73
5.3.2	Sequências de Cauchy . . . . .	76
5.4	Espaços Métricos Completos . . . . .	78
5.4.1	O Espaço Métrico das Classes de Equivalência de Sequências de Cauchy . . . . .	80
5.4.2	Isometria . . . . .	84
5.4.3	Completamento de Espaços Métricos . . . . .	88
5.4.4	A Reta Real $\mathbb{R}$ . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>93</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Sugestões e Comentários sobre as Atividades</b>	<b>97</b>
A.1	Problemas Teóricos e práticos . . . . .	97
A.2	Construção de polígonos regulares por rotação . . . . .	102
A.3	Estrela de $m$ pontas . . . . .	102

# Capítulo 1

## Introdução

Nos dias atuais, é impossível não perceber a importância da Matemática em relação aos vários campos da atividade humana. As aplicações da Matemática para o desenvolvimento da sociedade vem aumentando constantemente. Daí, a necessidade de se ter uma base matemática consistente, já na Educação Básica.

Assim, os temas matemáticos devem ser abordados em sala de aula, de modo que os alunos obtenham um aprendizado mais significativo. No entanto, o que se vê atualmente é um crescente descontentamento em relação à Matemática por parte desses alunos, que não veem importância alguma em se estudar conceitos matemáticos sem utilidade prática. A forma como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos e também por muitos professores contribui para este cenário que estamos vivenciando no ensino de Matemática. É o que vem ocorrendo no caso das transformações geométricas. Infelizmente, a maioria dos autores de livros didáticos, tanto do Ensino Fundamental quanto do ensino Médio, parecem não dar tanta importância à esse tema, pois o mesmo, quando é exposto, se dá forma breve, em geral, sem ligação alguma com o cotidiano dos alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998, p.51), o estudo das transformações geométricas é de grande importância e deve propiciar o desenvolvimento de muitas habilidades por parte dos alunos, como por exemplo, a percepção espacial e a relação de congruência entre figuras.

Além disso, o estudo mais aprofundado dessas transformações possibilita sua aplicação na resolução de diversos problemas, tanto práticos como teóricos, não somente da Matemática, mas também de outras áreas do conhecimento, que deve ser um dos objetivos do ensino de Matemática, conforme estabelecem os PCN<sup>1</sup> (2000, p.42).

Destacamos ainda que o ensino de Matemática, principalmente na Educação Básica, vem se tornando cada vez mais desafiador. É cada vez mais frequente a utilização de recursos computacionais, como os softwares de geometria dinâmica, para não somente tornar as aulas mais atrativas, mas sobretudo para que os alunos consigam compreender os conceitos

---

<sup>1</sup>Veja [20].

e sintam-se motivados a investigar e aprofundar seus conhecimentos. Sem dúvida alguma, esses recursos podem contribuir para o estudo das transformações geométricas.

A noção de isometria, um tipo de transformação geométrica, é de grande importância, tanto do ponto de vista teórico como prático. Além de permitir uma melhor compreensão de alguns objetos matemáticos, as isometrias propiciam uma aproximação da Matemática com outras áreas do conhecimento, favorecendo a interdisciplinaridade.

Em nossa pesquisa, pretendemos desenvolver o tema *isometrias*, levando-se em consideração sua aplicação em problemas práticos e teóricos, promovendo, com auxílio do software GeoGebra, algumas atividades em que os alunos sejam levados a trabalhar tanto a parte lúdica quanto teórica.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Fazer um estudo das isometrias sob o ponto de vista teórico, apresentando as isometrias do plano e algumas superfícies isométricas ao plano, além de mostrar sua importância em relação ao Conjunto dos Números Reais, e prático, aplicando as isometrias na resolução de problemas de Geometria Plana e apresentando algumas atividades para serem realizadas com auxílio do software Geogebra.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Caracterizar e classificar as isometrias do plano.
- Utilizar as isometrias no plano para solucionar problemas de Geometria Plana.
- Desenvolver algumas atividades práticas e teóricas relacionadas às isometrias do plano.
- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta para auxiliar no ensino de isometria.
- Motivar a abordagem do tema no Ensino Básico.
- Apresentar algumas superfícies isométricas ao plano.
- Compreender a noção de isometria entre espaços métricos, bem como apresentar uma caracterização da reta real por meio de isometrias.

## **1.2 Organização**

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: é o capítulo atual, que contém esta Introdução.
- Capítulo 2: é nesse capítulo que apresentamos as isometrias do plano, suas principais propriedades e classificação.
- Capítulo 3: apresentamos algumas atividades teóricas e práticas, fazendo uma abordagem voltada para o Ensino Básico.
- Capítulo 4: contém a teoria sobre curvas e superfícies, utilizadas na apresentação de duas superfícies isométricas ao plano.
- Capítulo 5: nesse capítulo, apresentamos a teoria sobre espaços métricos, que possibilite uma caracterização da reta real por meio de isometrias.
- Capítulo 6: contém nossas considerações finais sobre a pesquisa desenvolvida.
- Referências Bibliográficas.
- Apêndice A: contém alguns comentários sobre as atividades propostas no Capítulo 3 e também algumas soluções ou sugestões de respostas para os problemas propostos.

# Capítulo 2

## Isometrias no Plano

No presente capítulo estudaremos algumas transformações geométricas no plano, mais especificamente, as isometrias. O estudo das isometrias é de grande importância na Matemática. Na Educação Básica, a noção de isometria começa a ser explorada a partir dos últimos anos do Ensino Fundamental. Neste capítulo, apresentaremos todas as isometrias do plano e suas principais propriedades.

### 2.1 Transformações no Plano

Quando lidamos com isometrias no plano estamos tratando de um tipo especial de transformação no plano, como veremos a seguir.

**Definição 2.1** *Seja  $\Pi$  um plano. Uma transformação  $T$  em  $\Pi$  é uma aplicação  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  que faz corresponder a cada ponto  $x \in \Pi$  um ponto  $y = T(x) \in \Pi$ . O ponto  $T(x)$  chama-se a imagem de  $x$  por  $T$ .*

**Exemplo 1 (Projeção ortogonal sobre uma reta)** *Sejam  $\Pi$  um plano e  $r \subset \Pi$  uma reta. A projeção ortogonal sobre  $r$  é a aplicação  $Proj_r : \Pi \rightarrow \Pi$  que faz corresponder a cada ponto  $x \in \Pi$  o ponto  $y = Proj_r(x)$ , interseção da reta  $r$  com a reta perpendicular à  $r$  e que passa por  $x$ .*

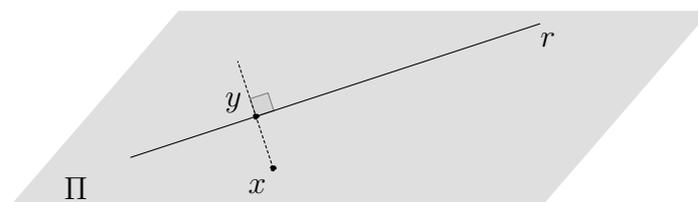


Figura 2.1: Projeção ortogonal sobre uma reta.

*Note que, de fato, essa aplicação está bem definida, pois qualquer que seja o ponto  $x \in \Pi$  existe sempre uma única reta contida em  $\Pi$  que contém  $x$  e é perpendicular à  $r$ . ▲*

**Definição 2.2** Dados um plano  $\Pi$  e uma figura  $\mathcal{F} \subset \Pi$ , a imagem de  $\mathcal{F}$  por uma transformação  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  é o conjunto

$$T(\mathcal{F}) = \{T(x); x \in \mathcal{F}\}.$$

### 2.1.1 Isometria

De agora em diante, consideremos  $\Pi$  um plano do espaço euclidiano, em que foi fixada uma unidade de comprimento. Isto nos permite apresentar a seguinte definição <sup>1</sup>.

**Definição 2.3 (Função distância)** Uma função distância em  $\Pi$  é uma função

$$\begin{aligned} d : \Pi \times \Pi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

- (D<sub>1</sub>)  $d(x, y) \geq 0$ ;
- (D<sub>2</sub>)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- (D<sub>3</sub>)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (D<sub>4</sub>)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ;

para quaisquer que sejam  $x, y, z \in \Pi$ .

O número real  $d(x, y)$  chama-se a distância entre os pontos  $x$  e  $y$  ou ainda, o comprimento do segmento  $xy$ . O axioma (D<sub>4</sub>) é conhecido como *desigualdade triangular*. A Figura 2.2 fornece uma interpretação geométrica para este axioma nos três casos possíveis:  $z \notin \overleftrightarrow{xy}$ ,  $z \in xy$  e  $z \in \overleftrightarrow{xy}$ , com  $z \notin xy$ .

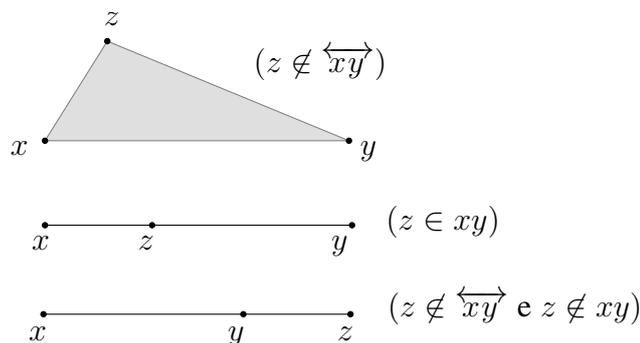


Figura 2.2: Desigualdade triangular.

No  $\Delta xyz$ , caso em que  $z \notin xy$ , vale a desigualdade estrita, isto é,

$$d(x, y) < d(x, z) + d(z, y).$$

<sup>1</sup>Veja a referência [3].

O mesmo ocorre se  $x, y$  e  $z$  são colineares, com  $z \notin xy$ . Por outro lado, temos

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \iff z \in xy.$$

Escreveremos o par  $(\Pi, d)$ , se estamos considerando em  $\Pi$  a função distância  $d$ . No Capítulo 5 veremos que a distância entre pontos de um conjunto pode ser calculada de diversas formas.

**Definição 2.4 (Isometria)** *Sejam  $d$  e  $\tilde{d}$  funções distância no plano  $\Pi$ . Uma isometria em  $\Pi$  é uma aplicação  $\phi : (\Pi, d) \rightarrow (\Pi, \tilde{d})$  tal que*

$$d(x, y) = \tilde{d}(\phi(x), \phi(y)),$$

para quaisquer que sejam os pontos  $x, y \in \Pi$ .

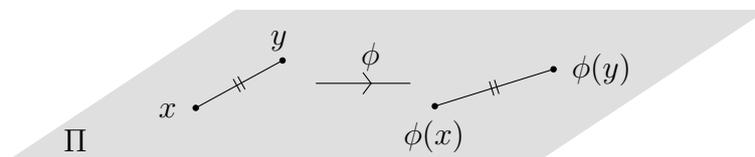


Figura 2.3: Isometria no plano.

Em outras palavras, a definição acima nos diz que uma isometria é uma transformação que preserva distâncias. Note que  $d$  e  $\tilde{d}$  denotam distâncias em  $\Pi$ . Para nossos propósitos, é suficiente considerar  $\tilde{d} = d$ . Assim, a partir agora escreveremos simplesmente  $\Pi$  em vez de  $(\Pi, d)$ .

Um exemplo claro de isometria no plano  $\Pi$  é a *transformação identidade*  $\mathcal{I}d : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por  $\mathcal{I}d(x) = x$ , para todo  $x \in \Pi$ . Com efeito,

$$d(x, y) = d(\mathcal{I}d(x), \mathcal{I}d(y)), \forall x, y \in \Pi.$$

As proposições seguintes apresentam as principais propriedades das isometrias no plano.

**Proposição 2.1** *Se  $\phi$  é uma isometria em  $\Pi$ , então  $\phi$  é injetiva.*

**Demonstração.** De fato,

$$\forall x, y \in \Pi, \phi(x) = \phi(y) \implies d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)) = 0 \implies x = y.$$

Portanto,  $\phi$  é injetiva. ■

Como toda isometria é injetiva, geometricamente isso quer dizer que ela transforma pontos distintos em pontos distintos.

**Proposição 2.2** *Sejam  $\phi$  uma isometria em  $\Pi$  e  $y_1 = \phi(x_1), y_2 = \phi(x_2)$ , onde  $x_1, x_2 \in \Pi$ . Se  $x \in x_1x_2$ , então  $y = \phi(x) \in y_1y_2$ .*

**Demonstração.** Com efeito, temos

$$\begin{aligned} x \in x_1x_2 &\iff d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2) \\ &\iff d(\phi(x_1), \phi(x)) + d(\phi(x), \phi(x_2)) = d(\phi(x_1), \phi(x_2)) \\ &\iff d(y_1, y) + d(y, y_2) = d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Portanto,  $y \in y_1y_2$ . ■

A Proposição 2.2 diz que toda isometria transforma pontos colineares em pontos colineares e, além disso, mantém a ordenação entre esses pontos. Portanto, qualquer ponto do segmento  $x_1x_2$  é transformado, pela isometria  $\phi$ , num ponto do segmento  $y_1y_2$ .

Na proposição seguinte, mostramos que toda isometria transforma retas em retas.

**Proposição 2.3** *Seja  $\phi$  uma isometria em  $\Pi$ . Se  $r \subset \Pi$  é uma reta, então  $s = \phi(r)$  é uma reta.*

**Demonstração.** Dados  $x_1 \neq x_2$  em  $r$ , considere a reta  $s$  que passa pelos pontos  $y_1 = \phi(x_1)$  e  $y_2 = \phi(x_2)$ . Seja  $x \in r$ . Temos três casos a considerar:  $x \in x_1x_2$ ,  $x_1 \in xx_2$  e  $x_2 \in x_1x$ . Se  $x \in x_1x_2$ , pela Proposição 2.2 segue que  $y = \phi(x) \in y_1y_2$  e, portanto,  $y \in s$ , ou seja,  $\phi(r) \subset s$ . Os demais casos são análogos.

Por outro lado, considere um ponto qualquer  $y \in s$ . Novamente temos três casos a analisar, a saber os casos  $y \in y_1y_2$ ,  $y_1 \in yy_2$  ou  $y_2 \in y_1y$ . Suponha que  $y \in y_1y_2$  e considere  $x \in r \cap x_1x_2$  tal que  $d(x, x_2) = d(y, y_2)$ . Pela Proposição 2.2, segue que  $\phi(x) \in y_1y_2$ . Sendo  $\phi$  uma isometria, temos

$$d(\phi(x), y_2) = d(\phi(x), \phi(x_2)) = d(y, y_2)$$

e, portanto,  $y = \phi(x)$ . Donde,  $y \in \phi(r)$ , isto é,  $s \subset \phi(r)$ . Portanto,  $s = \phi(r)$ . ■

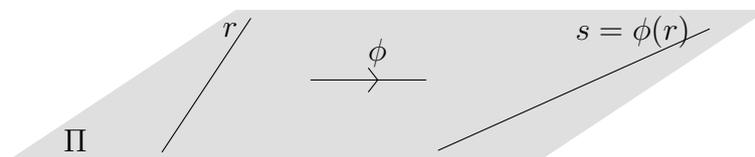


Figura 2.4: Imagem de uma reta por uma isometria.

Outra propriedade interessante das isometrias é que elas preservam a relação de paralelismo entre retas, isto é, uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas. Da mesma forma, toda isometria também preserva a relação de perpendicularismo entre retas, como veremos logo mais.

**Proposição 2.4** *Seja  $\phi$  uma isometria em  $\Pi$ . Se  $r_1 \subset \Pi$  e  $r_2 \subset \Pi$  são retas paralelas, então  $s_1 = \phi(r_1)$  e  $s_2 = \phi(r_2)$  são retas paralelas.*

**Demonstração.** Da Proposição 2.3 temos que  $s_1$  e  $s_2$  são retas. Mostremos que tais retas são paralelas. Com efeito, se existisse algum ponto  $y \in s_1 \cap s_2$ , teríamos  $y = \phi(x_1) = \phi(x_2)$ , com  $x_1 \in r_1$  e  $x_2 \in r_2$ . Pela injetividade de  $\phi$  isso acarretaria  $x_1 = x_2$ , o que é uma contradição uma vez que as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas, por hipótese. Portanto,  $s_1 \parallel s_2$ . ■

Assim, as isometrias preservam a relação de paralelismo entre retas. Da mesma forma, toda isometria preserva ângulos quaisquer no plano.

Para o que segue recomendamos uma breve consulta sobre os casos de congruência de triângulos. Veja [13].

**Proposição 2.5** *Toda isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  preserva ângulos.*

**Demonstração.** Dado  $y\hat{x}z$ , um ângulo em  $\Pi$ , considere  $x' = \phi(x)$ ,  $y' = \phi(y)$  e  $z' = \phi(z)$ . Sendo  $\phi$  uma isometria, temos  $d(x, y) = d(x', y')$ ,  $d(x, z) = d(x', z')$  e  $d(y, z) = d(y', z')$ . Logo, pelo caso *LLL* os triângulos  $xyz$  e  $x'y'z'$  são congruentes e, portanto, os ângulos  $y\hat{x}z$  e  $y'\hat{x}'z'$  são congruentes. ■

Como toda isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  preserva distâncias e ângulos, logo a imagem de um triângulo  $xyz$ , por  $\phi$ , contido em  $\Pi$  é um triângulo  $x'y'z'$ , congruente à  $xyz$ . Em particular, toda isometria transforma triângulo retângulo em triângulo retângulo.

De forma geral, uma figura  $F \subset \Pi$  e sua imagem  $\phi(F)$  por uma isometria  $\phi$ , em  $\Pi$ , são congruentes<sup>2</sup>.

**Observação 2.1** *Toda isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares. Com efeito, sejam  $r_1, r_2 \subset \Pi$  retas perpendiculares. Como  $\phi$  transforma retas em retas, segue da Proposição 2.5 que  $s_1 = \phi(r_1)$  e  $s_2 = \phi(r_2)$  são retas perpendiculares.*

**Proposição 2.6** *Toda isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  é bijetiva e sua inversa  $\phi^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Como toda isometria é injetiva, é suficiente provar que  $\phi$  é sobrejetiva. Dado um ponto  $y \in \Pi$ , considere uma reta  $r_1 \subset \Pi$ , com  $y \notin r_1$ . Sendo  $s_1 = \phi(r_1)$  uma reta contida em  $\Pi$  devemos ter  $y \in s_1$  ou  $y \notin s_1$ . No primeiro caso temos  $y = \phi(x)$ , para algum  $x \in r_1$ . Por outro lado, se  $y \notin s_1$  existe uma única reta  $s_2$  perpendicular à  $s_1$  e que passa por  $y$ . Seja  $\{q\} = s_1 \cap s_2$ . Daí, como  $q \in s_1$ , existe  $p \in r_1$  tal que  $q = \phi(p)$ . Além disso, por  $p$  passa uma única reta  $r_2 \perp r_1$ . Assim,  $\phi(r_2)$  é uma reta que contém  $\phi(p)$  e é perpendicular à  $s_1$ . Logo,  $s_2 = \phi(r_2)$  e, conseqüentemente,  $y \in \phi(r_2)$ . Deste modo, existe  $x \in r_2$  tal que

<sup>2</sup>Veja referência [1].

$y = \phi(x)$  e, portanto,  $\phi$  é sobrejetiva. Isto conclui a primeira parte da demonstração. Agora, observe que

$$d(x, y) = d(\phi(\phi^{-1}(x)), \phi(\phi^{-1}(y))) = d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)),$$

quaisquer que sejam  $x, y \in \Pi$ . Portanto,  $\phi^{-1}$  é uma isometria. ■

**Proposição 2.7** *Se  $\phi, \varphi : \Pi \rightarrow \Pi$  são isometrias, então a composta  $\phi \circ \varphi : \Pi \rightarrow \Pi$  é uma isometria.*

**Demonstração.** De fato, note que

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(\phi(\varphi(x)), \phi(\varphi(y))),$$

ou seja,  $\phi \circ \varphi$  é uma isometria. ■

Conhecidas as principais propriedades das isometrias no plano, passemos ao estudo de cada uma dessas transformações.

## 2.2 As Isometrias do Plano

### 2.2.1 Translação

Antes de definirmos translação recordemos que dados os pontos  $x, y, z$  e  $w$  em  $\Pi$ , os segmentos orientados  $xy$  e  $zw$  são ditos *equipolentes*, e denotamos  $xy \equiv zw$ , se possuem a mesma direção (são paralelos ou colineares), têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento. A relação de equipolência entre segmentos orientados é uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva. O vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{zw}$  é definido por

$$\vec{v} = \overrightarrow{zw} = \{xy; xy \equiv zw\}.$$

Dados  $x, y, z, w \in \Pi$  temos

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zw} \iff xy \equiv zw.$$

Um fato importante a se destacar é que se  $xy$  e  $zw$  são equipolente e não colineares, então o polígono  $xywz$  é um paralelogramo e, conseqüentemente, as diagonais  $xw$  e  $yz$  se intersectam nos respectivos pontos médios.

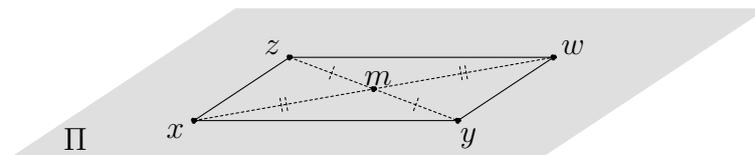


Figura 2.5: Os segmentos  $xy$  e  $zw$  são equipolentes.

Por outro lado, se as diagonais  $xw$  e  $yz$  de um quadrilátero  $xywz$  intersectam-se nos respectivos pontos médios, então  $xywz$  é um paralelogramo. Assim, dois segmentos não colineares  $xy$  e  $zw$  são equipolentes se, e somente se, o ponto médio de  $xw$  coincide com o ponto médio de  $yz$ . Para obter mais informações sobre segmentos equipolentes, recomendamos a referência [3].

Seja  $\vec{v}$  um vetor contido em  $\Pi$ . Para cada  $x \in \Pi$ , existe um único ponto  $y \in \Pi$  tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$ . Denotaremos  $y = x + \vec{v}$  para dizer que  $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$ .

**Definição 2.5 (Translação)** *Seja  $\vec{v}$  um vetor do plano  $\Pi$ . A translação, por  $\vec{v}$ , é a transformação geométrica  $\mathcal{T}_{\vec{v}} : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por*

$$\mathcal{T}_{\vec{v}}(x) = x + \vec{v}.$$

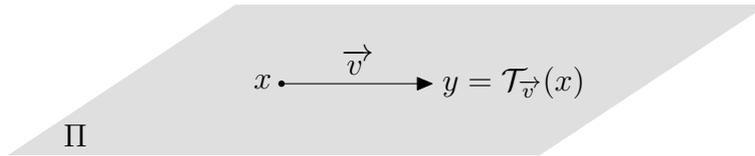


Figura 2.6: Translação.

Note que se  $\mathcal{T}_{\vec{v}}(x) = y$ , então  $x + \vec{v} = y$ , ou ainda,  $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$ . Neste caso, dizemos que o ponto  $y = \mathcal{T}_{\vec{v}}(x)$  foi obtido transladando-se o ponto  $x$  pelo vetor  $\vec{v}$  ou ainda, que o ponto  $x$  foi transportado pelo vetor  $\vec{v}$  para o ponto  $y$ .

Sendo  $\mathcal{F} \subset \Pi$  uma figura, pelas Definições 2.2 e 2.5 temos

$$\mathcal{T}_{\vec{v}}(\mathcal{F}) = \{x + \vec{v}; x \in \mathcal{F}\}.$$

Em particular, se  $r$  é uma reta contida em  $\Pi$ , temos

$$\mathcal{T}_{\vec{v}}(r) = \{x + \vec{v}; x \in r\}.$$

Observe que

$$\mathcal{T}_{\vec{0}}(x) = x + \vec{0} = x = \mathcal{Id}(x).$$

Assim, podemos considerar a identidade  $\mathcal{Id}$  como uma translação, a saber a translação determinada pelo vetor nulo.

**Proposição 2.8** *A translação  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Dados  $x, y \in \Pi$ , considere  $x_1 = \mathcal{T}_{\vec{v}}(x)$  e  $y_1 = \mathcal{T}_{\vec{v}}(y)$ . Logo, pela Definição 2.5 temos  $x_1 = x + \vec{v}$  e  $y_1 = y + \vec{v}$ , de onde segue-se que

$$\vec{v} = \overrightarrow{xx_1} = \overrightarrow{yy_1} \iff xx_1 \equiv yy_1 \iff xy \equiv x_1y_1.$$

Portanto,

$$d(x, y) = d(x_1, y_1) = d(\mathcal{T}_{\vec{v}}(x), \mathcal{T}_{\vec{v}}(y)),$$

ou seja,  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  é uma isometria. ■

Evidentemente, sendo  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  uma isometria, então a imagem de uma figura  $\mathcal{F} \subset \Pi$  por  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  é uma figura congruente a  $\mathcal{F}$ .

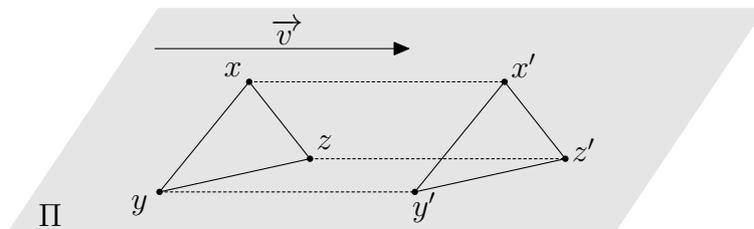


Figura 2.7: O  $\Delta xyz$  é transformado por  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  no  $\Delta x'y'z'$ .

**Exemplo 2** Seja  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Considere a translação  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  e  $r \subset \Pi$  uma reta do plano. Como  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  é uma isometria, então  $s = \mathcal{T}_{\vec{v}}(r)$  é uma reta. Sejam  $x$  e  $y$  pontos distintos de  $r$ . Se  $\vec{v} \parallel r$ , então os pontos  $x' = \mathcal{T}_{\vec{v}}(x)$  e  $y' = \mathcal{T}_{\vec{v}}(y)$  pertencem à reta  $r$  e, portanto,  $r = \mathcal{T}_{\vec{v}}(r)$ . Por outro lado, se  $\vec{v}$  não é paralelo à reta  $r$ , então  $x' = \mathcal{T}_{\vec{v}}(x)$  e  $y' = \mathcal{T}_{\vec{v}}(y)$  não pertencem à  $r$ . Afirmamos que a reta  $s = \mathcal{T}_{\vec{v}}(r)$ , que passa pelos pontos  $x'$  e  $y'$ , é paralela à  $r$ . Com efeito, se existisse  $x_0 \in r \cap s$ , teríamos

$$\mathcal{T}_{\vec{v}}(x_0) = x_0 \implies \vec{v} = \vec{0}$$

e, conseqüentemente,  $\mathcal{T}_{\vec{v}} = \mathcal{I}d$  o que é uma contradição, pois  $x', y' \notin r$ . Portanto, a imagem de uma reta por uma translação  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  pode ser a própria reta ou uma reta paralela a ela. ▲

**Proposição 2.9** Sejam  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  e  $\mathcal{T}_{\vec{w}}$  as translações pelos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , respectivamente. Então:

- i)  $\mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{T}_{\vec{w}} = \mathcal{T}_{\vec{v}+\vec{w}}$ ;
- ii)  $\mathcal{T}_{\vec{v}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\vec{v}}$ .

**Demonstração.** (i) De fato, dado  $x \in \Pi$  temos

$$(\mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{T}_{\vec{w}})(x) = \mathcal{T}_{\vec{v}}(\mathcal{T}_{\vec{w}}(x)) = \mathcal{T}_{\vec{w}}(x) + \vec{v} = (x + \vec{w}) + \vec{v} = x + (\vec{v} + \vec{w}) = \mathcal{T}_{\vec{v}+\vec{w}}(x).$$

(ii) Pelo item (i), segue que

$$\mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{T}_{-\vec{v}} = \mathcal{T}_{\vec{v}+(-\vec{v})} = \mathcal{T}_{\vec{0}} = \mathcal{I}d.$$

Portanto,  $\mathcal{T}_{\vec{v}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\vec{v}}$ . ■

As translações são empregadas na resolução de diversos problemas, principalmente os problemas de construção com régua e compasso. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3** Duas cidades  $z$  e  $w$  estão separadas por um rio cujas margens são retas paralelas, digamos  $r$  e  $s$ . Em que pontos  $x \in r$  e  $y \in s$  devemos construir uma ponte  $xy$  sobre o rio e perpendicular às margens, de modo a minimizar o percurso entre as duas cidades?

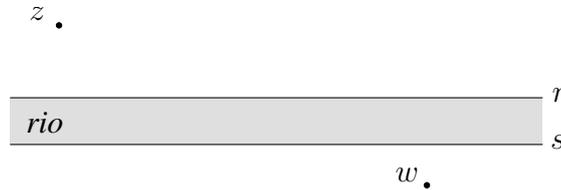


Figura 2.8: O problema da ponte.

Inicialmente, observe que as distâncias  $d_1 = d(z, x)$  e  $d_2 = d(w, y)$  devem ser iguais. Com efeito, sendo  $d(r, s)$  constante, pois as margens do rio são paralelas, o menor percurso entre  $z$  e  $w$  será obtido quando as distâncias  $d_1$  e  $d_2$  assumirem, cada uma, seu menor valor. Fazendo  $\tilde{d} = \frac{d_1 + d_2}{2}$  vemos que  $d_1 + d_2$  assume seu valor mínimo quando  $\tilde{d}$  é mínimo, o que ocorre precisamente quando  $d_1 = d_2$ , em consequência da Desigualdade das Médias<sup>3</sup>. Portanto, os pontos  $x$  e  $y$  devem estar a uma mesma distância de  $z$  e  $w$ , respectivamente. Vejamos agora como determinar tais pontos. Supondo conhecido o comprimento da ponte  $xy$ , considere  $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$  e a translação  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ . Tomando  $z_1 = \mathcal{T}_{\vec{v}}(z)$  temos

$$\overrightarrow{zz_1} = \overrightarrow{xy} \iff zx \equiv z_1y.$$

Daí, como  $d(z, x) = d(w, y)$ , segue que  $d(z_1, y) = d(w, y)$ . Assim,  $y \in s \cap r'$ , onde  $r'$  é a mediatriz de  $z_1w$ .

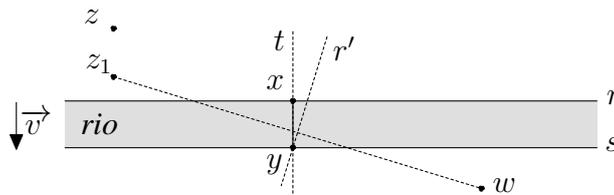


Figura 2.9: Localização da ponte que interliga as cidades  $z$  e  $w$ .

O ponto  $x$  é a interseção da reta  $t$ , perpendicular à  $r$  passando por  $y$ , com a reta  $r$ . ▲

**Exemplo 4** Dados, no plano  $\Pi$ , uma circunferência  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(o, \varepsilon)$ , uma reta  $r$  e uma distância  $0 < \delta \leq 2\varepsilon$  vamos inscrever em  $\mathcal{C}$  uma corda de comprimento  $\delta$  e paralela à  $r$ . Para tanto, sejam  $z, w \in r$  tais que  $d(z, w) = \delta$ . Considere então  $\vec{v} = \overrightarrow{zw}$ . Ora,  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{T}_{\vec{v}}(\mathcal{C})$  é uma circunferência de centro  $o_1$  e raio  $\varepsilon$ . Se  $d(o, o_1) = d(z, w) < 2\varepsilon$ , então  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$  têm dois pontos em comum  $y$  e  $y'$ .

<sup>3</sup>Veja referência [11].

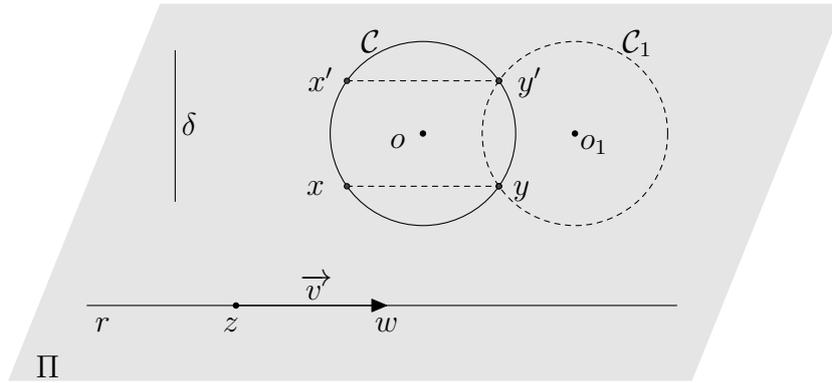


Figura 2.10: As cordas inscritas em  $\mathcal{C}$  têm comprimento  $\delta$  e são paralelas à reta  $r$ .

Considerando  $x = \mathcal{T}_{\vec{v}}^{-1}(y)$  e  $x' = \mathcal{T}_{\vec{v}}^{-1}(y')$ , obtemos duas cordas de  $\mathcal{C}$ ,  $xy$  e  $x'y'$ , que satisfazem as condições do problema. Se  $d(o, o_1) = 2\varepsilon$ , então  $2\varepsilon = \delta$  e existe um único ponto,  $y$ , comum às circunferências  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}_1$ . ▲

## 2.2.2 Simetria em torno de um Ponto

Para cada ponto  $p$  do plano  $\Pi$ , indicaremos por  $x_p$  o simétrico de  $x$  em relação à  $p$ , isto é,  $x_p$  é o ponto do plano tal que  $p$  é o ponto médio de  $xx_p$ .

**Definição 2.6 (Simetria  $\mathcal{S}_p$ )** Seja  $p \in \Pi$ . A simetria em torno de  $p$  é a transformação  $\mathcal{S}_p : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por

$$\mathcal{S}_p(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = p; \\ x_p, & \text{se } x \neq p. \end{cases}$$

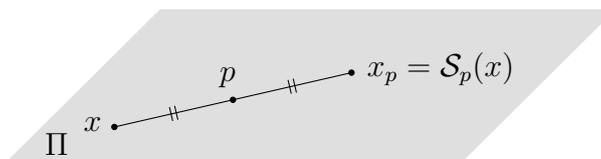


Figura 2.11: Simetria  $\mathcal{S}_p$ .

Assim como a translação  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ , a simetria  $\mathcal{S}_p$  é também uma isometria, conforme a proposição seguinte.

**Proposição 2.10** A simetria  $\mathcal{S}_p$  é uma isometria.

**Demonstração.** Sejam  $x, y \in \Pi$ . Se  $x = y$ , temos  $\mathcal{S}_p(x) = \mathcal{S}_p(y)$  e daí

$$d(\mathcal{S}_p(x), \mathcal{S}_p(y)) = d(x, y) = 0.$$

Supondo  $x \neq y$ , temos dois casos a considerar: ou os pontos  $x, y$  e  $p$  são colineares ou eles são não colineares. Sejam  $x, y$  e  $p$  colineares.

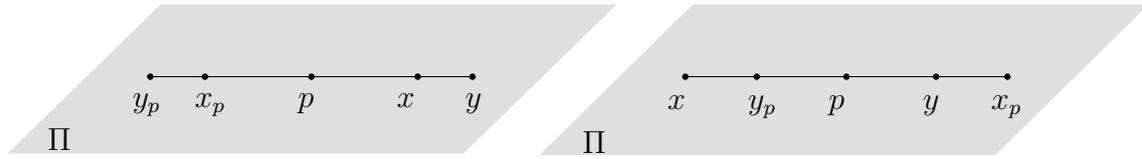


Figura 2.12: Representação dos casos  $x \in py$  e  $p \in xy$ .

Suponha sem perda de generalidade que  $x \in py$ . Neste caso, observe que  $x_p \in y_p p$  e daí,

$$d(x_p, y_p) = d(p, y_p) - d(p, x_p) = d(p, y) - d(p, x) = d(x, y).$$

Donde,  $d(\mathcal{S}_p(x), \mathcal{S}_p(y)) = d(x, y)$ . Observe que se  $x = p$  o resultado é imediato, pois

$$d(\mathcal{S}_p(x), \mathcal{S}_p(y)) = d(p, y_p) = d(p, y) = d(x, y).$$

Consideremos agora o caso em que  $x, y$  e  $p$  são não colineares. Neste caso, devemos ter  $x, y$  e  $p$  distintos. Sendo  $p$  o ponto médio dos segmentos  $xx_p$  e  $yy_p$ , segue que  $d(x, p) = d(x_p, p)$  e  $d(y, p) = d(y_p, p)$ . Além disso, como os segmentos  $xx_p$  e  $yy_p$  concorrem em  $p$ , segue que os ângulos  $x\hat{p}y$  e  $x_p\hat{p}y_p$  são congruentes por serem opostos pelo vértice.

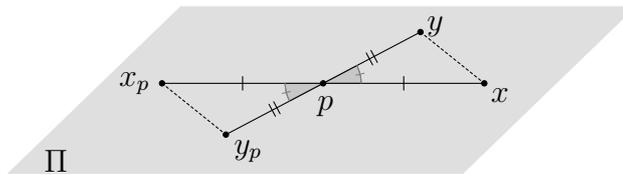


Figura 2.13: Os triângulos  $xpy$  e  $x_ppy_p$  são congruentes (caso LAL).

Logo, pelo caso *LAL* concluímos que os triângulos  $xpy$  e  $x_ppy_p$  são congruentes, de onde obtemos que

$$d(\mathcal{S}_p(x), \mathcal{S}_p(y)) = d(x_p, y_p) = d(x, y).$$

Portanto,  $\mathcal{S}_p$  é uma isometria. ■

A simetria  $\mathcal{S}_p$  tem a propriedade de ser igual à sua transformação inversa. Para ver isso, basta notar que dado  $x \in \Pi$  temos

$$(\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p)(x) = \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_p(x)) = \mathcal{S}_p(x_p) = x = \mathcal{I}d(x)$$

e, portanto,  $\mathcal{S}_p^{-1} = \mathcal{S}_p$ .

**Exemplo 5** A imagem de uma reta  $r \subset \Pi$  pela simetria  $\mathcal{S}_p$  é uma reta  $s = \mathcal{S}_p(r)$  paralela à  $r$ . De fato, como  $\mathcal{S}_p$  é uma isometria, então  $s = \mathcal{S}_p(r)$  é uma reta. Dados  $x, y \in r$ , suas imagens por  $\mathcal{S}_p$  são os pontos  $x_p, y_p \in s$ , de sorte que os triângulos  $xpy$  e  $x_ppy_p$  são congruentes, conforme vimos na Proposição 2.10.

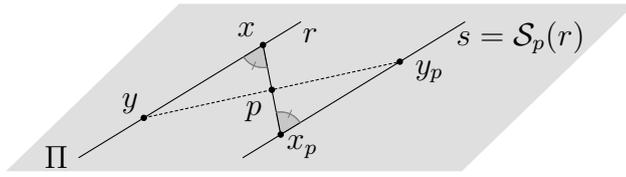


Figura 2.14: Imagem da reta  $r$  pela simetria  $\mathcal{S}_p$ .

Daí, concluímos que os ângulos alternos internos  $\widehat{pxy}$  e  $\widehat{px_p y_p}$  são congruentes e, conseqüentemente, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. Portanto, a imagem de uma reta  $r$  pela simetria  $\mathcal{S}_p$  é uma reta  $s = \mathcal{S}_p(r) \parallel r$ . ▲

O próximo exemplo apresenta uma aplicação de simetria na resolução de problemas de construção com régua e compasso.

**Exemplo 6** *Sejam  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes no plano  $\Pi$  e  $p \in \Pi$ . Como determinar os pontos  $x$  e  $y$  sobre  $r$  e  $s$ , respectivamente, de forma que  $p$  seja o ponto médio de  $xy$ ? Note que  $y = \mathcal{S}_p(x) \in s$ , ou ainda,  $x_p \in s$ . Além disso, sabemos que a reta  $r' = \mathcal{S}_p(r)$  é paralela à reta  $r$  e  $y \in r'$ . Logo,  $y \in r' \cap s$ . Como  $r'$  não é paralela à  $s$ , segue que  $\{y\} = r' \cap s$ .*

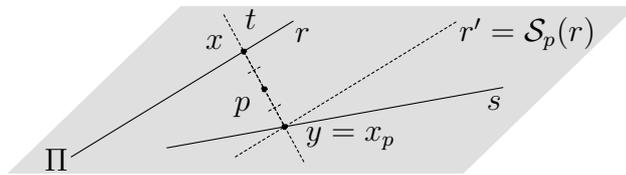


Figura 2.15: O ponto  $x$  é a imagem de  $y = \mathcal{S}_p(x)$  pela simetria  $\mathcal{S}_p$ .

Para obter o ponto  $x$ , basta notar que

$$\mathcal{S}_p(y) = \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_p(x)) = x.$$

Assim,  $x \in r \cap t$ , onde  $t$  é a reta definida pelos pontos  $p$  e  $y$ . Como  $y \notin r$ , as retas  $r$  e  $t$  são necessariamente concorrentes e  $\{x\} = r \cap t$ . ▲

### 2.2.3 Reflexão em Torno de Uma Reta

A reflexão em torno de uma reta constitui um dos exemplos mais importantes de isometria. Começemos nossa discussão observando que para cada  $x \notin r$  existe uma única reta  $s \subset \Pi$  que passa por  $x$  e é perpendicular à  $r$ . Logo, existe um único  $y \in s$  tal que  $d(y, r) = d(x, r)$ , ou seja, de modo que  $r$  seja a mediatriz de  $xy$ . Isto motiva a seguinte definição.

**Definição 2.7** Dados uma reta  $r \subset \Pi$  e um ponto  $x \notin r$ , dizemos que o ponto  $y$  é simétrico de  $x$  em relação à  $r$ , e denotamos  $y = \mathcal{S}_r(x)$ , se  $r$  é a reta mediatriz do segmento  $xy$ .

**Definição 2.8 (Reflexão em torno de uma reta)** Seja  $r \subset \Pi$  uma reta. A reflexão em torno de  $r$  é a transformação  $\mathcal{R}_r : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por

$$\mathcal{R}_r(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in r; \\ \mathcal{S}_r(x), & \text{se } x \notin r. \end{cases}$$

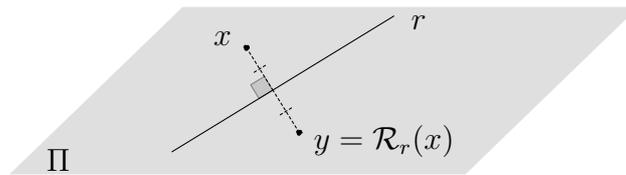


Figura 2.16: A Reflexão  $\mathcal{R}_r$ .

Da mesma forma que a simetria  $\mathcal{S}_p$ , a reflexão  $\mathcal{R}_r$  tem a propriedade de ser igual à sua inversa. Com efeito, seja  $x \in \Pi$ . Se  $x \in r$ , temos  $\mathcal{R}_r(x) = x$ . Por outro lado, se  $x \notin r$ , então existe um único segmento  $xy \subset \Pi$  cuja mediatriz é a reta  $r$ . Assim,  $\mathcal{R}_r(x) = y$  e  $\mathcal{R}_r(y) = x$ . Portanto,

$$(\mathcal{R}_r \circ \mathcal{R}_r)(x) = \mathcal{R}_r(\mathcal{R}_r(x)) = \mathcal{R}_r(y) = x = \mathcal{I}d(x).$$

Logo,  $\mathcal{R}_r^{-1} = \mathcal{R}_r$ .

A proposição seguinte assegura que toda reflexão em torno de uma reta é uma isometria.

**Proposição 2.11** A reflexão  $\mathcal{R}_r$  é uma isometria.

**Demonstração.** Dados  $x, y \in \Pi$ , sejam  $x_1 = \mathcal{R}_r(x)$  e  $y_1 = \mathcal{R}_r(y)$ . Nos casos em que  $x \in r$  ou  $y \in r$  e aqueles em que os pontos  $x, x_1, y$  e  $y_1$  são colineares, o resultado segue diretamente da definição. Excluindo essas possibilidades, temos dois casos a analisar: ou os pontos  $x$  e  $y$  pertencem a um mesmo semiplano determinado por  $r$  ou esses pontos pertencem à semiplanos distintos determinados por  $r$ . Suponhamos que  $x$  e  $y$  pertencem a um mesmo semiplano determinado por  $r$ .

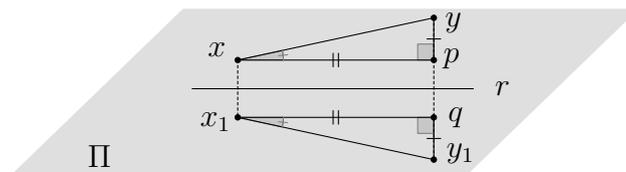


Figura 2.17: Os pontos  $x$  e  $y$  pertencem ao mesmo semiplano.

Sejam  $p$  e  $q$  pontos da reta  $s$ , determinada pelos pontos  $y$  e  $y_1$ , tais que  $xp \parallel r$  e  $x_1q \parallel r$ .

Deste modo,  $d(p, r) = d(q, r)$  e daí,  $d(y, p) = d(y_1, q)$ . Como  $d(x, p) = d(x_1, q)$  e, além disso, os ângulos  $x\hat{p}y$  e  $x_1\hat{q}y_1$  são congruentes, segue pelo caso *LAL* que os triângulos  $xpy$  e  $x_1qy_1$  são congruentes e, portanto,  $d(x, y) = d(x_1, y_1)$ , ou seja,

$$d(x, y) = d(\mathcal{R}_r(x), \mathcal{R}_r(y)).$$

Consideremos o caso em que  $x$  e  $y$  pertencem a semiplanos distintos determinados por  $r$ .

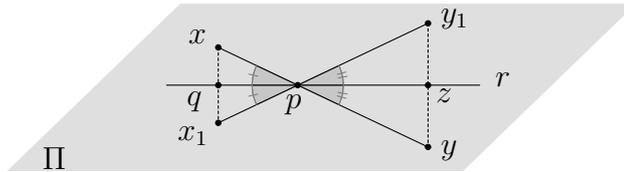


Figura 2.18: Os pontos  $x$  e  $y$  pertencem à semiplanos distintos.

Sejam  $\{p\} = r \cap xy$ ,  $\{q\} = r \cap xx_1$  e  $\{z\} = r \cap yy_1$ . Sendo  $r$  a mediatriz dos segmentos  $xx_1$  e  $yy_1$  segue que  $d(x, p) = d(x_1, p)$  e  $d(y, p) = d(y_1, p)$ . Logo, os triângulos  $xpx_1$  e  $ypy_1$  são isósceles de bases  $xx_1$  e  $yy_1$ , respectivamente. Assim,  $r$  coincide com a bissetriz dos ângulos  $x\hat{p}x_1$  e  $y\hat{p}y_1$  e, conseqüentemente,  $m(x\hat{p}q) = m(x_1\hat{p}q)$  e  $m(y\hat{p}z) = m(y_1\hat{p}z)$ . Note que os ângulos  $x\hat{p}q$  e  $y\hat{p}z$  são opostos pelo vértice e, daí,  $m(x\hat{p}q) = m(y\hat{p}z)$ . Dessa forma vemos que os ângulos  $x\hat{p}x_1$  e  $y\hat{p}y_1$  são congruentes. Como  $y\hat{p}y_1$  é o suplemento de  $x\hat{p}y_1$ , segue que  $x\hat{p}x_1$  também é suplemento de  $x\hat{p}y_1$  e, portanto,  $x_1, p$  e  $y_1$  são pontos colineares. Com isso, temos

$$d(x, y) = d(x, p) + d(p, y) = d(x_1, p) + d(p, y_1) = d(x_1, y_1),$$

ou seja,

$$d(x, y) = d(\mathcal{R}_r(x), \mathcal{R}_r(y)).$$

Portanto,  $\mathcal{R}_r$  é uma isometria. ■

Uma outra propriedade interessante das reflexões é a inversão de orientação no plano, ilustrada na Figura 2.19. Veja que o  $\Delta xyz$  foi transformado no  $\Delta x'z'y'$  por meio de uma reflexão  $\mathcal{R}_r$ . Para obter mais informações a respeito dessa propriedade das reflexões, indicamos a referência [10].

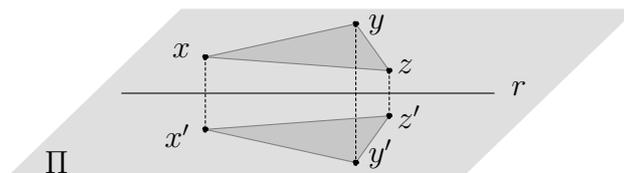


Figura 2.19: Inversão de orientação pela reflexão  $\mathcal{R}_r$ .

**Exemplo 7** Dados dois pontos  $x$  e  $y$ , pertencentes a um mesmo semiplano determinado por uma reta  $r \subset \Pi$ , vamos determinar o ponto  $p \in r$  de forma que a distância

$$d(p, x) + d(p, y)$$

seja a menor possível. Para tanto, considere  $x' = \mathcal{R}_r(x)$ . Afirmamos que  $\{P\} = r \cap x'y$ . De fato, se  $q$  é um ponto de  $r$  distinto de  $p$ , então os pontos  $x', y$  e  $q$  são não colineares.

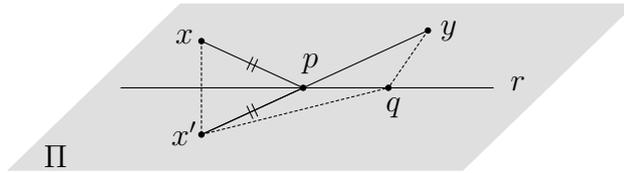


Figura 2.20: Localização do ponto  $p$  que minimiza o trajeto entre  $x$  e  $y$ .

Aplicando a desigualdade triangular no  $\Delta x'qy$  vem

$$d(x', q) + d(q, y) > d(x', y) = d(x', p) + d(y, p). \quad (2.1)$$

Sendo  $x' = \mathcal{R}_r(x)$ , então a reta  $r$  é a mediatriz de  $xx'$ . Assim, para  $p, q \in r$  valem

$$d(x', p) = d(x, p) \text{ e } d(x', q) = d(x, q) \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2), segue que

$$d(x, q) + d(y, q) > d(x, p) + d(y, p),$$

qualquer que seja  $q \in r$ , com  $q \neq p$ . Portanto,  $p$  é o ponto de interseção do segmento  $x'y$  com a reta  $r$ . ▲

O Exemplo 7 apresenta uma situação prática que consiste em um dos princípios básicos da Óptica Geométrica conhecido como 2ª Lei da Reflexão da Luz<sup>4</sup>.

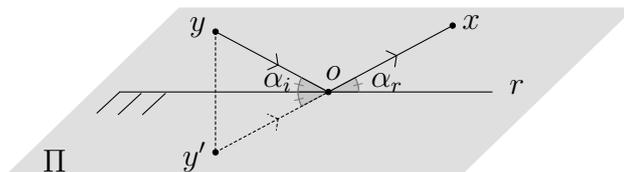


Figura 2.21: Reflexão da luz sobre um espelho plano  $r$ .

De acordo com esse princípio, se um raio de luz proveniente de uma fonte  $y$  incide sobre um ponto  $o$  de um espelho plano  $r$  e é refletida sobre um ponto  $x$ , então os ângulos de incidência  $\alpha_i$  e de reflexão  $\alpha_r$  têm a mesma medida. Em outras palavras, se um observador encontra-se no ponto  $x$  e deseja visualizar o ponto  $y$  através do espelho, então ele deverá olhar necessariamente para o ponto  $o$ .

<sup>4</sup>Para obter mais informações sobre as Leis da Reflexão sugerimos a referência [15].

**Exemplo 8** Sejam  $x, y \in \Pi$ , pontos distintos, e  $h$  um comprimento dado. Então no conjunto  $\Gamma$  formado por todos os triângulos de altura  $h$  e base  $xy$ , o triângulo isósceles é o que possui o menor perímetro. De fato, considere a reta  $r \subset \Pi$  paralela ao segmento  $xy$  e tal que  $d(x, r) = h$ . Como o comprimento da base é constante para todos os triângulos em  $\Gamma$ , o problema consiste em determinar um ponto  $p \in r$  tal que  $\Delta pxy \in \Gamma$  e a distância

$$d(x, p) + d(y, p)$$

seja mínima. Do Exemplo 7 segue que  $\{p\} = r \cap x'y$ , em que  $x' = \mathcal{R}_r(x)$ . Veja a Figura 2.22.

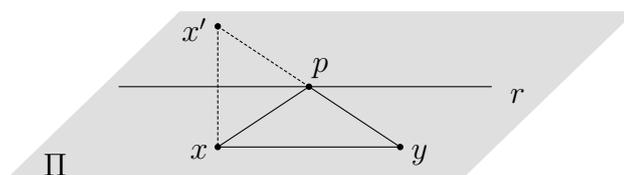


Figura 2.22: O  $\Delta pxy$  tem o menor perímetro.

Agora mostraremos que, de fato, o triângulo  $pxy$  assim obtido é isósceles. Com efeito, pela definição de  $\mathcal{R}_r$  concluímos que o  $\Delta px'x$  é isósceles de base  $xx'$  e daí,  $m(\widehat{px'x}) = m(\widehat{pxx'})$ . Como os ângulos  $x\widehat{y}p$  e  $y\widehat{x}p$  são os respectivos complementos dos ângulos  $p\widehat{x'x}$  e  $p\widehat{xx'}$ , segue que  $m(x\widehat{y}p) = m(y\widehat{x}p)$  e, portanto, o triângulo  $pxy$  é isósceles. ▲

## 2.2.4 Rotação

Antes de definirmos rotação, necessitamos da noção de ângulo orientado. Considere um ângulo  $x\widehat{y}$  no plano  $\Pi$ , em que se escolheu as semirretas  $ox$  como origem e  $oy$  como extremidade. Neste caso, o ângulo  $x\widehat{y}$  é dito orientado de  $\vec{ox}$  para  $\vec{oy}$ , e será denotado por  $\angle(\vec{ox}, \vec{oy})$ . Na Figura 2.23 temos a representação do ângulo  $\angle(\vec{ox}, \vec{oy})$ , cuja orientação coincide com o sentido anti-horário.

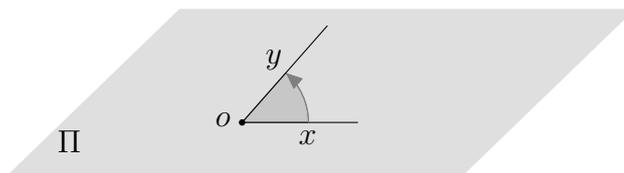


Figura 2.23: Ângulo orientado.

Utilizando a notação acima, temos

$$\angle(\vec{ox}, \vec{oy}) \neq \angle(\vec{oy}, \vec{ox})$$

uma vez que os ângulos  $\angle(\vec{ox}, \vec{oy})$  e  $\angle(\vec{oy}, \vec{ox})$  estão orientados de  $\vec{ox}$  para  $\vec{oy}$  e de  $\vec{oy}$  para  $\vec{ox}$ , respectivamente. Observe ainda que os ângulos  $\angle(\vec{ox}, \vec{oy})$  e  $\angle(\vec{oy}, \vec{ox})$  são replementares, isto é, a soma de suas medidas é igual a  $360^\circ$ .

Normalmente, considera-se positiva a medida de um ângulo orientado no sentido anti-horário. Se a orientação do ângulo coincide com o sentido horário, sua medida é negativa. Esta convenção será adotada no presente texto.

Dados  $\alpha = \angle(\vec{oz}, \vec{ow})$  e  $x \in \Pi$ , indicaremos por  $x_{(o,\alpha)}$  o ponto pertencente ao plano  $\Pi$  tal que

$$d(x, o) = d(x_{(o,\alpha)}, o) \text{ e } \alpha = \angle(\vec{ox}, \vec{ox_{(o,\alpha)}}).$$

**Definição 2.9 (Rotação)** *Sejam  $o \in \Pi$  e  $\alpha = \angle(\vec{oz}, \vec{ow})$ . A rotação de centro  $o$  e ângulo  $\alpha$  é a transformação  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)} : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por*

$$\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}(x) = \begin{cases} o, & \text{se } x = o; \\ x_{(o,\alpha)}, & \text{se } x \neq o. \end{cases}$$

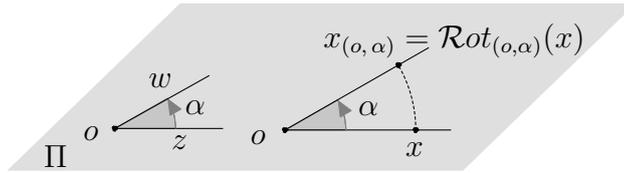


Figura 2.24: A rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$ .

Observe que a rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,180^\circ)}$  coincide com a simetria  $\mathcal{S}_o$ . Com efeito,

$$o_{(o,180^\circ)} = o = \mathcal{S}_o(o).$$

Por outro lado, se  $x \neq o$ , então os pontos  $x, o$  e  $x_{(o,180^\circ)}$  são colineares e, como

$$d(x, o) = d(x_{(o,180^\circ)}, o),$$

$o$  é o ponto médio do segmento  $xx_{(o,180^\circ)}$ . Logo,  $x_{(o,180^\circ)} = \mathcal{S}_o(x)$  e, portanto,

$$\mathcal{R}ot_{(o,180^\circ)} = \mathcal{S}_o.$$

Assim, a simetria em torno de um ponto pode ser vista como um caso particular de uma rotação. Observe ainda que

$$\mathcal{R}ot_{(o,0^\circ)} = \mathcal{R}ot_{(o,0^\circ)} = \mathcal{I}d.$$

É importante destacar que o sentido de rotação de  $x$  para  $x_{(o,\alpha)}$  é o mesmo que de  $z$  para  $w$ , visto que

$$\alpha = \angle(\vec{oz}, \vec{ow}) = \angle(\vec{ox}, \vec{ox_{(o,\alpha)}}).$$

Em outras palavras, isto significa dizer que as bissetrizes dos ângulos  $\widehat{zox_{(o,\alpha)}}$  e  $\widehat{w\hat{o}x}$  coincidem. Demonstraremos esse resultado a seguir.

**Proposição 2.12** *Sejam  $o \in \Pi$  e  $\alpha = \angle(\vec{o\hat{z}}, \vec{o\hat{w}})$ . Para todo  $x \in \Pi$ , os ângulos  $z\hat{o}x_{(o,\alpha)}$  e  $w\hat{o}x$  têm a mesma bissetriz.*

**Demonstração.** Para  $\alpha = 0^\circ$  ou  $\alpha = 180^\circ$  o resultado é imediato. Vamos admitir, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  esteja orientado no sentido anti-horário. Inicialmente, consideremos  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Sejam  $r$ , a bissetriz de  $w\hat{o}x$ ,  $p$ , um ponto qualquer de  $r$ , e  $x' = x_{(o,\alpha)}$ . Se  $x \notin z\hat{o}z$ , então

$$m(z\hat{o}p) = m(z\hat{o}w) + m(w\hat{o}p) = m(p\hat{o}x) + m(x\hat{o}x') = m(p\hat{o}x').$$

Por outro lado, se  $x \in z\hat{o}w$ , temos

$$m(z\hat{o}p) = m(z\hat{o}w) - m(p\hat{o}w) = m(x\hat{o}x') - m(x\hat{o}p) = m(p\hat{o}x').$$

Donde,  $r$  é a bissetriz de  $z\hat{o}x$ .

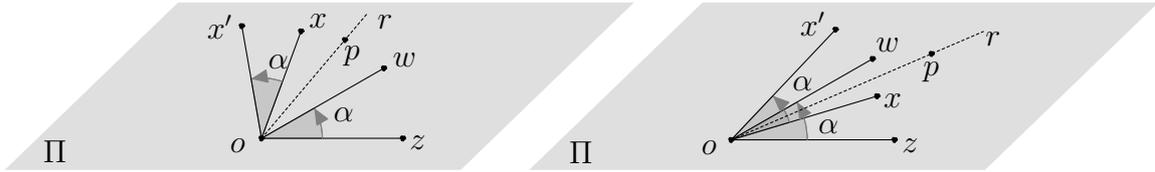


Figura 2.25: Bissetriz dos ângulos  $z\hat{o}x_{(o,\alpha)}$  e  $w\hat{o}x$  para  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

Agora, suponha  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ . Neste caso, considerando  $x \in z\hat{o}w$  temos

$$m(z\hat{o}p) = m(z\hat{o}w) - m(p\hat{o}w) = m(x\hat{o}x') - m(x\hat{o}p) = m(p\hat{o}x')$$

e, para  $x \notin z\hat{o}w$  temos

$$m(z\hat{o}p) = m(z\hat{o}w) - m(p\hat{o}w) = m(x\hat{o}x') - m(x\hat{o}p) = m(p\hat{o}x').$$

Donde,  $r$  é a bissetriz de  $z\hat{o}x'$ .



Figura 2.26: Bissetriz dos ângulos  $z\hat{o}x_{(o,\alpha)}$  e  $w\hat{o}x$  para  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ .

No caso em que  $\alpha = 360^\circ$  o resultado também é imediato. Portanto, em qualquer caso, as bissetrizes de  $z\hat{o}x'$  e  $w\hat{o}x$  coincidem. ■

Da Proposição 2.12 temos o seguinte corolário.

**Corolário 2.13** *Sejam  $o \in \Pi$  e  $\alpha = \angle(\vec{o\hat{z}}, \vec{o\hat{w}})$ . Para todo  $x \in \Pi$ , os ângulos  $z\hat{o}x$  e  $w\hat{o}x_{(o,\alpha)}$  são congruentes.*

**Demonstração.** De fato, pela Proposição 2.12 os ângulos  $z\hat{o}x_{(o,\alpha)}$  e  $w\hat{o}x$  têm a mesma bissetriz  $r$ . Sejam  $p \in r$  e  $x' = x_{(o,\alpha)}$ . Se  $\alpha = 0^\circ$  ou  $\alpha = 180^\circ$  o resultado é imediato. Suponha  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Neste caso, se  $x \in z\hat{o}w$  temos

$$m(z\hat{o}x) = m(z\hat{o}p) - m(x\hat{o}p) = m(p\hat{o}x') - m(p\hat{o}w) = m(w\hat{o}x')$$

e se  $x \notin z\hat{o}w$ , então

$$m(z\hat{o}x) = m(z\hat{o}p) + m(p\hat{o}x) = m(p\hat{o}x') + m(w\hat{o}p) = m(w\hat{o}x').$$

Consideremos então  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ . Para  $x \in z\hat{o}w$  temos

$$m(z\hat{o}x) = m(z\hat{o}p) - m(x\hat{o}p) = m(p\hat{o}x') - m(p\hat{o}w) = m(w\hat{o}x').$$

Da mesma forma, para  $x \notin z\hat{o}w$  temos

$$m(z\hat{o}x) = m(z\hat{o}p) + m(p\hat{o}x) = m(p\hat{o}x') + m(w\hat{o}p) = m(w\hat{o}x').$$

Portanto, em qualquer caso, os ângulos  $z\hat{o}x$  e  $w\hat{o}x_{(o,\alpha)}$  são congruentes. ■

Com o Corolário 2.13 estamos em condições de provar que toda rotação em torno de um ponto é uma isometria.

**Proposição 2.14** *Sejam  $o \in \Pi$  e  $\alpha = \angle(\vec{o\hat{z}}, \vec{o\hat{w}})$ . Então a rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Dados  $x, y \in \Pi$ , sejam  $x' = x_{(o,\alpha)}$  e  $y' = y_{(o,\alpha)}$ . Pelo Corolário 2.13 temos  $m(x\hat{o}y) = m(x'\hat{o}y')$ . Além disso, da definição de  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$  temos

$$d(x, o) = d(x', o) \text{ e } d(y, o) = d(y', o).$$

Logo, pelo caso *LAL*, os triângulos  $oxy$  e  $ox'y'$  são congruentes, de onde concluímos que  $d(x, y) = d(x', y')$ , ou seja,

$$d(x, y) = d(\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}(x), \mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}(y)).$$

Portanto, a rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$  é uma isometria. ■

Como toda rotação em torno de um ponto é uma isometria, então rotacionando uma figura plana  $\mathcal{F}$  em torno de um ponto, obtém-se uma figura  $\mathcal{F}'$  congruente à  $\mathcal{F}$ . Em particular, a imagem de um segmento  $xy$  por uma rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$  é um segmento  $x_1y_1$  congruente à  $xy$  e tal que  $\alpha = \angle(\vec{\overline{xy}}, \vec{\overline{x_1y_1}})$ . Esta é uma propriedade que caracteriza todas as rotações<sup>5</sup>.

Dados no plano  $\Pi$  um ponto  $o$  e uma reta  $r$  que não passa por  $o$ , considere o ponto  $p = Proj_r(o)$ , isto é,  $p$  é a projecção ortogonal de  $o$  sobre  $r$ .

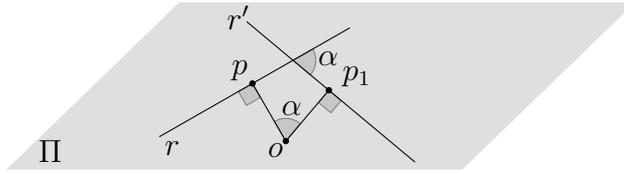


Figura 2.27: Rotação de uma reta  $r$  em torno do ponto  $o$ .

Para obter a rotação de um ângulo  $\alpha$  da reta  $r$  em torno de  $o$ , basta traçar a reta  $r'$ , perpendicular à  $op_1$ , onde  $p_1$  é obtido rotacionando-se  $p$  em torno de  $o$ , isto é,  $p_1 = \mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}(p)$ . A Figura 2.27 ilustra essa situação, para  $\alpha$  orientado no sentido horário.

A inversa da rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$  é a rotação  $\mathcal{R}ot_{(o,-\alpha)}$ , ou seja,

$$\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)} \circ \mathcal{R}ot_{(o,-\alpha)} = \mathcal{I}d$$

Com efeito, para cada  $x \in \Pi$  temos

$$(\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)} \circ \mathcal{R}ot_{(o,-\alpha)})(x) = \mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}(x_{(o,-\alpha)}) = x = \mathcal{I}d(x).$$

Daí, segue que  $\mathcal{R}ot_{(o,-\alpha)} = \mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}^{-1}$ .

**Exemplo 9** Dadas duas rotações  $\mathcal{R}ot_{(o_1,\alpha_1)}$  e  $\mathcal{R}ot_{(o_2,\alpha_2)}$ , com  $o_1 \neq o_2$ , vamos determinar o centro  $o'$  da rotação

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}ot_{(o_2,\alpha_2)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_1,\alpha_1)}.$$

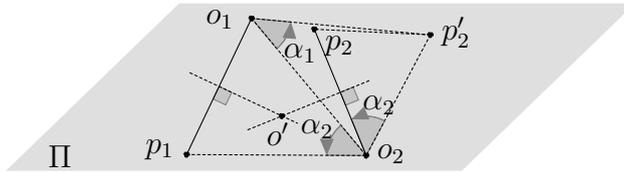


Figura 2.28: O centro da rotação  $\mathcal{R} = \mathcal{R}ot_{(o_2,\alpha_2)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_1,\alpha_1)}$ .

Para tanto, sejam  $p_1 = \mathcal{R}(o_1)$  e  $p_2 = \mathcal{R}(o_2)$ . Como  $o'$  é o centro de  $\mathcal{R}$  segue da definição de rotação que  $o'$  é equidistante de  $o_1$  e  $p_1$ . Da mesma forma,  $o'$  é equidistante de  $o_2$  e  $p_2$ . Isto mostra que  $o'$  pertence simultaneamente às retas mediatrizes dos segmentos  $o_1p_1$  e  $o_2p_2$ , ou seja,  $o'$  é o ponto de interseção dessas retas. ▲

O Exemplo 9 apresenta mais um problema de construção, o qual foi solucionado com auxílio das rotações. Vejamos mais um exemplo.

**Exemplo 10** Dados um ponto  $x$  e duas retas  $r$  e  $s$  em  $\Pi$ , vamos determinar dois pontos  $y \in r$  e  $z \in s$  tais que o  $\Delta xyz$  seja equilátero.

<sup>5</sup>Veja referência [1].

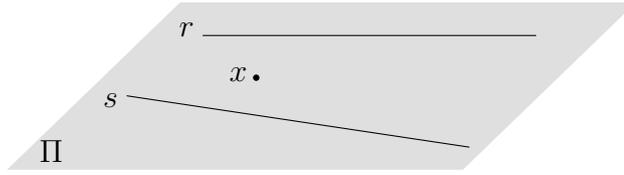


Figura 2.29: As retas  $r$  e  $s$  contêm os vértices  $y$  e  $z$  do  $\Delta xyz$ .

Como os ângulos internos do  $\Delta xyz$  medem  $60^\circ$ , basta considerar uma das seguintes rotações:  $\mathcal{R}ot_{(x,60^\circ)}$  ou  $\mathcal{R}ot_{(x,-60^\circ)}$ . No caso representado acima, a imagem de  $s$  pela rotação  $\mathcal{R}ot_{(x,60^\circ)}$  é uma reta  $r'$  que contém o ponto  $z' = \mathcal{R}ot_{(x,60^\circ)}(z)$ . Como o ângulo  $\angle(\overrightarrow{xz}, \overrightarrow{xy})$  mede  $60^\circ$ , segue da definição de rotação que  $y = z'$ . Assim,  $y \in r$  e  $y \in r'$ , ou seja,  $\{y\} = r \cap r'$ . Para obter o vértice  $z$ , basta notar que  $z = \mathcal{R}ot_{(x,-60^\circ)}(y)$ .

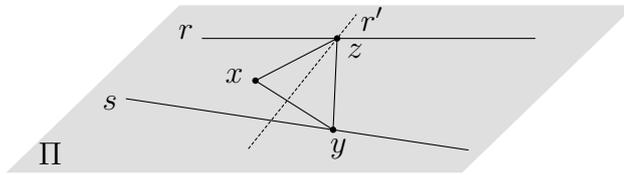


Figura 2.30: Os vértices  $y$  e  $z$  foram obtidos por meio das rotações  $\mathcal{R}ot_{(x,60^\circ)}$  e  $\mathcal{R}ot_{(x,-60^\circ)}$ . ▲

### 2.2.5 Reflexão com Deslizamento

Até agora conhecemos três tipos de isometrias no plano a saber, translação, reflexão e rotação. Lembre-se que a simetria, embora seja uma isometria, trata-se de um caso particular de rotação. Além desses, há ainda um outro tipo de isometria, como veremos a seguir.

**Definição 2.10 (Reflexão com Deslizamento)** Sejam  $\vec{v}$  um vetor não nulo e  $r \parallel \vec{v}$  uma reta contidos no plano  $\Pi$ . A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor  $\vec{v}$  e pela reta  $r$ , é a composta  $\mathcal{R}_{(\vec{v},r)} = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{R}_r : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por

$$\mathcal{R}_{(\vec{v},r)}(x) = \mathcal{T}_{\vec{v}}(\mathcal{R}_r(x)).$$

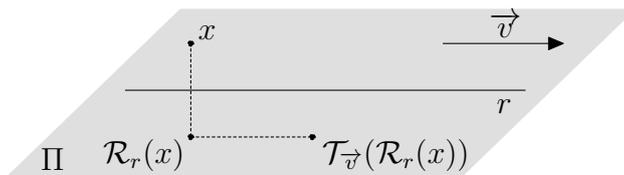


Figura 2.31: A reflexão com deslizamento  $\mathcal{R}_{(\vec{v},r)}$ .

Note que  $\mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}$  é uma isometria, pois a composta de isometrias é uma isometria. Observe também que

$$\mathcal{R}_r \circ \mathcal{T}_{\vec{v}} = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{R}_r = \mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}.$$

Com efeito, para todo  $x \in \Pi$  temos

$$\mathcal{R}_r(\mathcal{T}_{\vec{v}}(x)) = \mathcal{R}_r(x + \vec{v}) = \mathcal{S}_r(x + \vec{v}) = \mathcal{S}_r(x) + \vec{v},$$

uma vez que  $\vec{v} \parallel r$ . Por outro lado,

$$\mathcal{T}_{\vec{v}}(\mathcal{R}_r(x)) = \mathcal{T}_{\vec{v}}(\mathcal{S}_r(x)) = \mathcal{S}_r(x) + \vec{v}$$

e, portanto, temos a igualdade desejada.

A Figura 2.32 representa a imagem de um triângulo por uma reflexão com deslizamento.

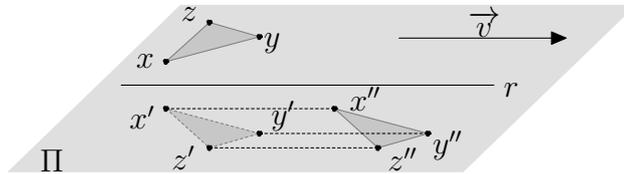


Figura 2.32: O  $\Delta xyz$  é transformado no  $\Delta x''y''z''$  pela reflexão com deslizamento  $\mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}$ .

## 2.3 Classificação das Isometrias

A partir de agora, nosso objetivo é mostrar que qualquer isometria do plano se resume a um dos quatro tipos que foram estudados anteriormente, ou seja, translação, reflexão em torno de uma reta, rotação ou uma reflexão com deslizamento. Para tanto, necessitamos de alguns resultados auxiliares.

**Proposição 2.15** *Seja  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria, que possui três pontos fixos não colineares. Então*

$$\phi = \mathcal{I}d.$$

**Demonstração.** Sejam  $x, y$  e  $z$  os pontos fixos de  $\phi$ , isto é,  $\phi(x) = x, \phi(y) = y$  e  $\phi(z) = z$ . Suponhamos que  $\phi$  não seja a identidade. Neste caso, existe  $p \in \Pi$  tal que  $\phi(p) \neq p$ . Note que

$$d(x, p) = d(\phi(x), \phi(p)) = d(x, \phi(p)),$$

isto é,  $x$  pertence à reta mediatriz do segmento  $p\phi(p)$ . De forma análoga, concluímos que  $y$  e  $z$  também pertencem à mediatriz de  $p\phi(p)$ . Logo,  $x, y$  e  $z$  são colineares, o que é uma contradição. Portanto,  $\phi(p) = p$  para todo  $p \in \Pi$ , ou seja,  $\phi = \mathcal{I}d$ . ■

Pode acontecer de duas isometrias coincidirem em três pontos não colineares. Neste caso, tais isometrias são idênticas.

**Proposição 2.16** Dadas duas isometrias  $\phi_1, \phi_2 : \Pi \rightarrow \Pi$ , suponha que existam três pontos  $x, y, z \in \Pi$  tais que  $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ ,  $\phi_1(y) = \phi_2(y)$  e  $\phi_1(z) = \phi_2(z)$ . Nessas condições, tem-se  $\phi_1 = \phi_2$ .

**Demonstração.** Defina a isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  tal que  $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$ . Assim, temos

$$\phi(x) = \phi_1^{-1}(\phi_2(x)) = \phi_1^{-1}(\phi_1(x)) = x$$

e, analogamente,  $\phi(y) = y$  e  $\phi(z) = z$ . Logo, da Proposição 2.15 segue que  $\phi = \mathcal{I}d$ . Daí,

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2 = \mathcal{I}d \iff \phi_1 = \phi_1 \circ \mathcal{I}d = \phi_1 \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi_2) = (\phi_1 \circ \phi_1^{-1}) \circ \phi_2 = \mathcal{I}d \circ \phi_2 = \phi_2.$$

Portanto,  $\phi_1 = \phi_2$ . ■

Observe que, se  $\phi_2 = \mathcal{I}d$ , chegamos ao resultado da Proposição 2.15.

Veremos agora que se a isometria admite dois pontos fixos e distintos, ela não é, necessariamente, igual a identidade.

**Proposição 2.17** Seja  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria que possui dois pontos fixos  $x$  e  $y$ , distintos. Então, ou  $\phi$  é a identidade ou é uma reflexão em torno da reta que passa por  $x$  e  $y$ .

**Demonstração.** Sejam  $p \in \Pi$  e  $r \subset \Pi$  a reta determinado pelos pontos  $x$  e  $y$ . Inicialmente observe que  $\phi(p) = p$  para todo  $p \in r$ , pois, caso contrário,  $r$  seria a mediatriz do segmento  $p\phi(p)$ , com  $p \in r$  e  $\phi(p) \notin r$ , uma contradição. Se  $\phi(p) = p$ , para algum  $p \notin r$ , então pela Proposição 2.15 concluímos que  $\phi = \mathcal{I}d$ . Consideremos em  $\Pi$  um ponto  $p \notin r$  tal que  $\phi(p) \neq p$ . Note que

$$d(x, p) = d(\phi(x), \phi(p)) = d(x, \phi(p)),$$

isto é,  $x$  pertence à reta mediatriz de  $p\phi(p)$  e, da mesma forma,  $y$  pertence à essa mesma reta. Como  $x \neq y$  são pontos de  $r$ , segue que  $r$  é a mediatriz de  $p\phi(p)$ .

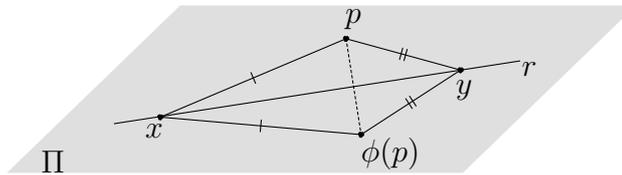


Figura 2.33: A reta  $r$  é a mediatriz de  $p\phi(p)$ .

Assim,  $\phi(p) = \mathcal{R}_r(p)$ . Além disso,  $\phi(x) = \mathcal{R}_r(x)$  e  $\phi(y) = \mathcal{R}_r(y)$ , de sorte que  $x, y$  e  $p$  são não colineares. Logo, pela Proposição 2.16, temos  $\phi = \mathcal{R}_r$ . Portanto, ou  $\phi$  é a identidade ou  $\phi$  é a reflexão em torno de  $r$ . ■

**Proposição 2.18** *Sejam  $\phi_1, \phi_2 : \Pi \rightarrow \Pi$  isometrias e  $x, y \in \Pi$ , dois pontos distintos, tais que  $\phi_1(x) = \phi_2(x)$  e  $\phi_1(y) = \phi_2(y)$ . Então, ou  $\phi_1 = \phi_2$  ou  $\phi_1 = \phi_2 \circ \mathcal{R}_r$ , em que  $r$  é a reta determinada por  $x$  e  $y$ .*

**Demonstração.** Note que a isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  definida por  $\phi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$  é tal que  $\phi(x) = x$  e  $\phi(y) = y$ , com  $x \neq y$ . Logo, pela Proposição 2.17 segue que  $\phi = \mathcal{I}d$  ou  $\phi = \mathcal{R}_r$ , onde  $r$  é a reta que passa pelos pontos  $x$  e  $y$ . Da primeira igualdade decorre que  $\phi_1 = \phi_2$ . Por fim, a segunda igualdade acarreta que

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2 = \mathcal{R}_r \iff \phi_2 = \mathcal{R}_r \circ \phi_1.$$

Portanto, ou  $\phi = \mathcal{I}d$  ou  $\phi = \mathcal{R}_r$ , em que  $r$  é a reta determinada por  $x$  e  $y$ . ■

A partir de agora, vamos investigar se alguma isometria do plano não corresponde a um dos quatro casos estudados anteriormente. Em outras palavras, temos interesse em responder a seguinte pergunta: será que existe alguma isometria do plano que não corresponda a uma translação, reflexão em torno de uma reta, rotação ou reflexão com deslizamento? A busca por essa resposta nos conduzirá à classificação das isometrias do plano.

Começemos apresentando os três importantes resultados seguintes.

**Lema 1** *Sejam  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria diferente da identidade e  $x \in \Pi$  um ponto tal que  $\phi(x) \neq x$ . Se os pontos  $y = \phi(x)$  e  $z = \phi(y)$  são distintos e não colineares, então ou  $\phi$  é uma rotação ou é uma reflexão com deslizamento.*

**Demonstração.** Sendo  $y = \phi(x)$  e  $z = \phi(y)$ , então a imagem do  $\Delta xyz$  por  $\phi$  é um triângulo de vértices  $y, z$  e  $w = \phi(z)$ , congruente ao triângulo  $xyz$ . Além disso, como

$$d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)) = d(y, z) \quad \text{e} \quad d(y, z) = d(\phi(y), \phi(z)) = d(z, w),$$

os triângulos  $xyz$  e  $yzw$  são isósceles de bases  $xz$  e  $yw$ , respectivamente. Observe ainda que há apenas duas posições possíveis para  $x$  e  $w$ : ou  $x$  e  $w$  pertencem a um mesmo semiplano determinado pela reta  $r$ , que passa por  $y$  e  $z$ , ou cada um desses pontos pertence a semiplanos distintos, determinados por essa mesma reta. A Figura 2.34 ilustra essas duas possibilidades.

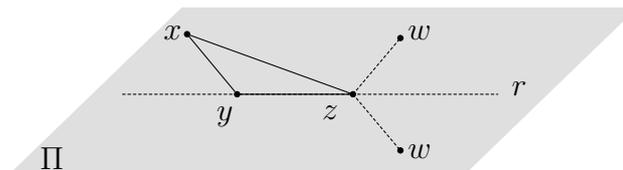


Figura 2.34: Localização do vértice  $w = \phi(z)$ .

Consideremos  $x$  e  $w$  no mesmo semiplano. Nesse caso, o quadrilátero  $xyzw$  é um polígono convexo e tal que os ângulos internos  $\widehat{y\hat{x}z}$  e  $\widehat{y\hat{w}z}$  são congruentes. Daí, o quadrilátero  $xyzw$

pode ser inscrito<sup>6</sup> numa circunferência de centro  $o$  e raio  $ox$ , sendo  $o$  o ponto de interseção das mediatrizes dos lados desse quadrilátero.

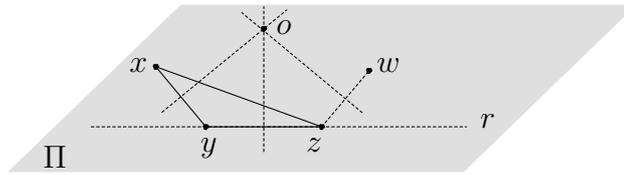


Figura 2.35: Os pontos  $x$  e  $w = \phi(z)$  pertencem a um mesmo semiplano.

Veja que  $o = \phi(o)$ , pois

$$d(o, x) = d(o, y) = d(o, z) \implies d(\phi(o), y) = d(\phi(o), z) = d(\phi(o), w),$$

isto é,  $\phi(o)$  pertence a interseção das mediatrizes dos lados  $yz$  e  $zw$ . Como

$$d(x, y) = d(y, z) = d(z, w),$$

considerando  $\varphi = \mathcal{R}ot_{(o, \alpha)}$ , com  $\alpha = x\hat{o}y$ , obtemos  $\varphi(x) = y = \phi(x)$ ,  $\varphi(y) = z = \phi(y)$  e  $\varphi(z) = w = \phi(z)$ , uma vez que os triângulos  $xoy$ ,  $yoz$  e  $zow$  são isósceles de bases  $xy$ ,  $yz$  e  $zw$ , respectivamente. Assim, pela Proposição 2.16 concluímos que  $\phi = \varphi$  e, portanto,  $\phi$  é uma rotação. Consideremos então o segundo caso, isto é,  $x$  e  $w$  pertencem à semiplanos distintos determinados por  $r$ .

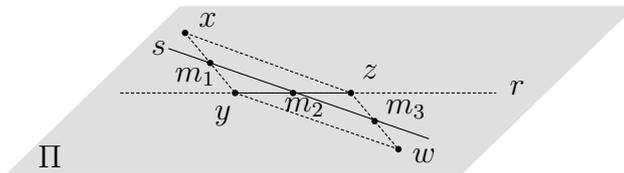


Figura 2.36: Os pontos  $x$  e  $w = \phi(z)$  pertencem à semiplanos distintos.

Note que

$$d(x, z) = d(\phi(x), \phi(z)) = d(y, w).$$

Logo, o quadrilátero  $xywz$  é um paralelogramo, já que seus lados opostos têm mesmo comprimento, sendo  $xy$  e  $zw$  lados opostos e  $yz$  uma diagonal. Neste caso, aplicando o *Teorema da Base Média*<sup>7</sup> nos triângulos  $yxz$  e  $zyw$  concluímos que os pontos médios  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , dos lados  $xy$ ,  $yz$  e  $zw$ , respectivamente, são colineares. Sejam  $s$ , a reta que passa por  $m_1$  e  $m_2$ , e  $\vec{v} = \overrightarrow{m_1 m_2}$ . Agora veja que a reflexão com deslizamento  $\varphi = \mathcal{R}_{(s, \vec{v})}$  é tal que  $\varphi(x) = y = \phi(x)$ ,  $\varphi(y) = z = \phi(y)$  e  $\varphi(z) = w = \phi(z)$ . Logo, pela Proposição 2.16, segue que  $\phi = \varphi$  e, portanto,  $\phi$  é uma reflexão com deslizamento. ■

<sup>6</sup>Aqui estamos utilizando uma caracterização dos quadriláteros inscritíveis dada em [13].

<sup>7</sup>Consulte [13].

**Lema 2** *Sejam  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria diferente da identidade e  $x \in \Pi$  um ponto tal que  $\phi(x) \neq X$ . Se os pontos  $x, y = \phi(x)$  e  $z = \phi(y)$  são distintos e colineares, então ou  $\phi$  é uma translação ou é uma reflexão com deslizamento.*

**Demonstração.** Seja  $r$  a reta que passa por  $x, y$  e  $z$ . Como  $d(x, y) = d(y, z)$ , temos que  $y$  é o ponto médio de  $xz$ , pois não podemos ter  $z = x$ . Note que  $\phi(r) = r$ , já que  $\phi(r)$  é a reta que passa por  $y = \phi(x)$  e  $z = \phi(y)$ . Considerando  $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$  e a restrição  $\varphi = \mathcal{R}_{\vec{v}}|_r$  temos  $\varphi(x) = y = \phi(x)$ ,  $\varphi(y) = z = \phi(y)$ . Defina  $\omega = \varphi^{-1} \circ \phi$  e note que

$$\omega(x) = \varphi^{-1}(\phi(x)) = \varphi^{-1}(y) = x$$

e, da mesma forma,  $\omega(y) = y$ . Assim,  $\omega = \mathcal{I}d$ , pois caso contrário, se  $\omega(p) \neq p$  para algum  $p \in r$ , então

$$d(x, p) = d(\omega(x), \omega(p)) = d(x, \omega(p)),$$

isto é,  $x$  é o ponto médio do segmento  $p\omega(p)$ . Analogamente, concluímos que  $y$  também é o ponto médio de  $p\omega(p)$  e, conseqüentemente,  $x = y$ , o que é uma contradição, já que, por hipótese, esses pontos são distintos. De  $\omega = \mathcal{I}d$  obtemos  $\phi = \varphi$ , ou seja,  $\phi$  é uma translação. Agora, consideremos  $w \notin r$ . Neste caso, a imagem do  $\Delta xyw$  por  $\phi$  é um triângulo de vértices  $y = \phi(x)$ ,  $z = \phi(y)$  e  $w_1 = \phi(w)$ , congruente ao  $\Delta xyw$ . Há, portanto, duas posições possíveis para o vértice  $w_1$ : ou  $w_1$  e  $w$  pertencem a um mesmo semiplano ou pertencem a semiplanos distintos, determinados por  $r$ .

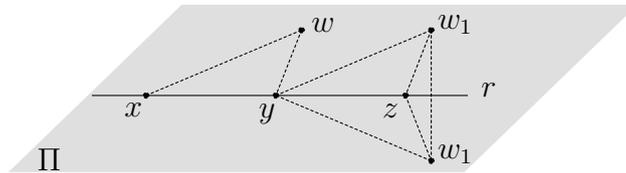


Figura 2.37: Localização do ponto  $\phi(w)$ .

Se  $w$  e  $w_1$  estão no mesmo semiplano, então  $xyw_1w$  é um paralelogramo, uma vez que  $d(x, w) = d(y, w_1)$  e, como os ângulos  $w\hat{x}y$  e  $w_1\hat{y}z$  são congruentes, os segmentos  $xw$  e  $yw_1$  são paralelos e, portanto,  $d(x, y) = d(w, w_1)$ . Neste caso, considere  $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$  e a translação  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ , de sorte que  $\mathcal{T}_{\vec{v}}(x) = y = \phi(x)$ ,  $\mathcal{T}_{\vec{v}}(y) = z = \phi(y)$  e  $\mathcal{T}_{\vec{v}}(w) = w_1 = \phi(w)$ . Logo, pela Proposição 2.16 segue que  $\phi = \mathcal{T}_{\vec{v}}$  e, portanto,  $\phi$  é uma translação. Por outro lado, se  $w$  e  $w_1$  não estão no mesmo semiplano, então os triângulos  $xyw_2$ , com  $w_2 = \mathcal{R}_r(w)$ , e  $yzw_1$  são congruentes e, pelo que acabamos de provar, temos  $w_1 = \mathcal{T}_{\vec{v}}(w_2)$ , isto é,  $w_1 = \mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}(w)$ . Daí, como  $\mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}(x) = y = \phi(x)$  e  $\mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}(y) = z = \phi(y)$ , segue pela Proposição 2.16 que  $\phi = \mathcal{R}_{(\vec{v}, r)}$ , ou seja,  $\phi$  é uma reflexão com deslizamento. Portanto, ou  $\phi$  é uma translação ou é uma reflexão com deslizamento. ■

**Lema 3** *Sejam  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria diferente da identidade e  $x \in \Pi$  um ponto tal que  $\phi(x) \neq x$ . Se  $y = \phi(x)$  e  $x = \phi(y)$ , então ou  $\phi$  é uma reflexão em torno de uma reta ou é uma rotação.*

**Demonstração.** Note que a imagem do segmento  $xy$  por  $\phi$  é o segmento  $\phi(x)\phi(y)$ , isto é,  $\phi(xy) = xy$ . Além disso, se  $m \in xy$  é tal que  $\phi(m) = m$ , então  $m$  é o ponto médio de  $xy$ , pois

$$\phi(m) = m \implies d(x, m) = d(\phi(x), \phi(m)) = d(y, m).$$

Além disso, se  $p \notin XY$  é tal que  $d(x, p) = d(y, p)$ , então

$$d(x, p) = d(\phi(x), \phi(p)) = d(y, \phi(p))$$

e, analogamente,  $d(y, p) = d(x, \phi(p))$ . Assim, se  $r$  é a mediatriz de  $xy$ , então  $\phi(r) = r$ . Considere um ponto  $w \in r$ , distinto de  $m$ . Como

$$d(m, w) = d(\phi(m), \phi(w)) = d(m, \phi(w)),$$

então ou  $w = \phi(w)$  ou  $\phi(w) = \mathcal{S}_m(w)$ .

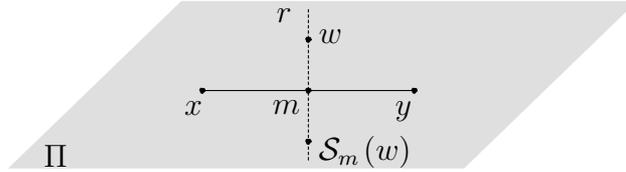


Figura 2.38: Localização dos pontos  $w$  e  $\mathcal{S}_m(w)$ .

Suponha que  $\phi(w) = w$ . Nesse caso, temos  $\mathcal{R}_r(w) = w = \phi(w)$ ,  $\mathcal{R}_r(x) = y = \phi(x)$  e  $\mathcal{R}_r(y) = x = \phi(y)$ , de onde segue pela Proposição 2.16, que  $\phi = \mathcal{R}_r$ , isto é,  $\phi$  é uma reflexão em torno de uma reta. Por fim, seja  $\phi(w) = \mathcal{S}_m(w)$ . Neste caso, observando que  $\mathcal{S}_m(x) = y = \phi(x)$  e  $\mathcal{S}_m(y) = x = \phi(y)$  concluímos, pela Proposição 2.16, que  $\phi = \mathcal{S}_m$ , ou seja,  $\phi$  é uma rotação, uma vez que  $\mathcal{S}_m = \mathcal{R}ot_{(m, 180^\circ)}$ . Portanto, ou  $\phi$  é uma reflexão em torno de uma reta ou é uma rotação. ■

O teorema que apresentaremos agora estabelece uma classificação para todas as isometrias do plano. Ele é, na verdade, uma consequência dos três lemas apresentados anteriormente e constitui um importante resultado desse capítulo.

**Teorema 2.19** *Dada uma isometria  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi$  podemos classificá-la em apenas quatro tipos, além da identidade, a saber: translação, reflexão, rotação e reflexão com deslizamento.*

**Demonstração.** Como  $\phi \neq \mathcal{I}d$ , existe  $x \in \Pi$  tal que  $\phi(x) \neq x$ . Sejam  $y = \phi(x)$  e  $z = \phi(y)$ . Se  $x, y$  e  $z$  são distintos e não colineares, então o Lema 1 assegura que  $\phi$  é uma rotação ou

uma reflexão com deslizamento. Supondo  $x, y$  e  $z$  distintos e colíneos, usando o Lema 2 concluímos que  $\phi$  é uma translação ou um reflexo com deslizamento. Por fim, se  $z = x$ , isto é,  $\phi(y) = x$ , então do Lema 3 segue que  $\phi$  é uma reflexão em torno de uma reta ou é uma rotação. Portanto, além da identidade, só existem quatro tipos de isometrias no plano  $\Pi$ : translação, reflexão em torno de uma reta, rotação e reflexo com deslizamento. ■

Assim, conforme o Teorema 2.19, as isometrias estudadas neste capítulo correspondem, portanto, à todas as isometrias do plano.

Uma vez conhecidas todas as isometrias do plano, bem como suas principais propriedades, apresentaremos, no Capítulo 3, algumas atividades envolvendo essas transformações geométricas.

## Capítulo 3

# Trabalhando Isometrias em Sala de Aula

Neste capítulo, apresentaremos algumas atividades sobre isometrias que podem ser utilizadas em sala de aula, principalmente no Ensino Médio, onde os alunos devem ter uma certa familiaridade com demonstrações. Nosso objetivo, a priori, é mostrar a importância das isometrias na resolução de problemas da Geometria Plana, bem como na criação de figuras geométricas com efeitos artísticos e padrões interessantes que instiguem a curiosidade dos alunos.

Em se tratando de efeitos artísticos, os trabalhos de M.C.Escher (1898-1972) merecem destaque. Em suas obras, ele utilizava isometrias para produzir efeitos bastante interessantes. Veja [14]. A Figura 3.1 apresenta um dos trabalhos de Escher.

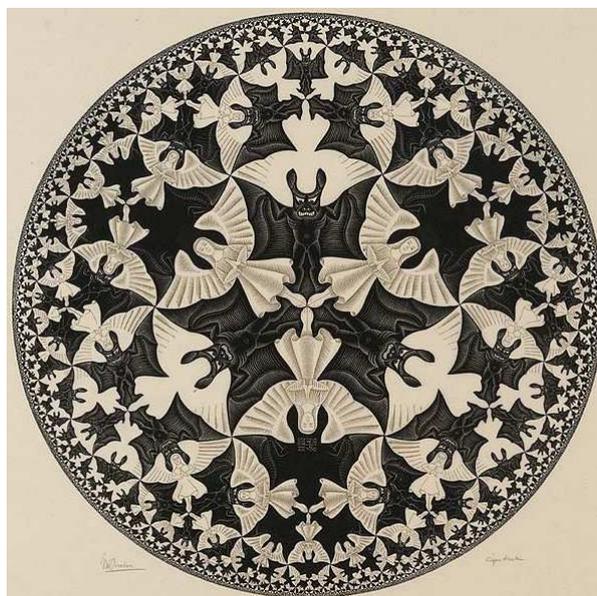


Figura 3.1: Circle Limit IV.

Fonte:[21].

Para a realização de algumas das atividades será necessário utilizar um software de geometria dinâmica. Aqui optamos por usar o GeoGebra, pois acreditamos ser um software

bastante conhecido pela maioria dos professores e dos alunos, sem contar sua notória lista de ferramentas e funções que permitem uma maior interatividade com o usuário.

Além disso, o software pode auxiliar na resolução dos problemas teóricos e de construção, em que os alunos são desafiados a unir teoria e prática para enxergar possíveis soluções. Todos os problemas apresentados encontram-se em [14] e [18]. Em [1], também podemos encontrar muitos problemas envolvendo as isometrias do plano.

## 3.1 Atividades

Nas atividades que seguem, procuramos explorar a teoria apresentada no Capítulo 2.

### 3.1.1 Problemas Teóricos e de Construção

Nesta atividade, listamos alguns problemas de Geometria Plana. Aqui o GeoGebra pode ser utilizado, mas devemos salientar que ele permite apenas a verificação de alguns casos e, portanto, não justifica e não substitui a argumentação lógica exigida nas demonstrações. No Apêndice A, apresentamos algumas soluções e sugestões para estes problemas.

**Problema 1:** Se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, mostre que a composta das reflexões  $\mathcal{R}_r$  e  $\mathcal{R}_s$  é uma translação.

**Problema 2:** Se  $r$  e  $s$  são retas concorrentes, mostre que a composta das reflexões  $\mathcal{R}_r$  e  $\mathcal{R}_s$  é uma rotação.

**Problema 3:** Considere duas rotações  $\mathcal{R}ot_{(o_1,180^\circ)}$  e  $\mathcal{R}ot_{(o_2,180^\circ)}$ .

a) Mostre que a composta  $\mathcal{R}ot_{(o_2,180^\circ)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_1,180^\circ)}$  é uma translação.

b) Que relação existe entre  $\mathcal{R}ot_{(o_1,180^\circ)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_2,180^\circ)}$  e  $\mathcal{R}ot_{(o_2,180^\circ)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_1,180^\circ)}$ ?

**Problema 4** Dadas duas rotações  $\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)}$  e  $\mathcal{R}ot_{(o,\beta)}$ , verifique que

$$\mathcal{R}ot_{(o,\alpha)} \circ \mathcal{R}ot_{(o,\beta)} = \mathcal{R}ot_{(o,\alpha+\beta)}.$$

**Problema 5:** São dados os pontos  $y$  e  $z$  e as retas  $r$  e  $s$  não paralelas. Determine o triângulo  $xyz$  de forma que os pontos médios de  $xy$  e  $xz$  pertençam a  $r$  e  $s$ , respectivamente.

**Problema 6:** As retas paralelas  $r$  e  $s$  representam dois espelhos planos, voltados um para o outro. Construa a trajetória do raio visual que, emitido do ponto  $x$ , atinge o ponto  $y$ , sendo  $x$  e  $y$  pontos dados, após refletir-se duas vezes em  $r$  e uma vez em  $s$ .

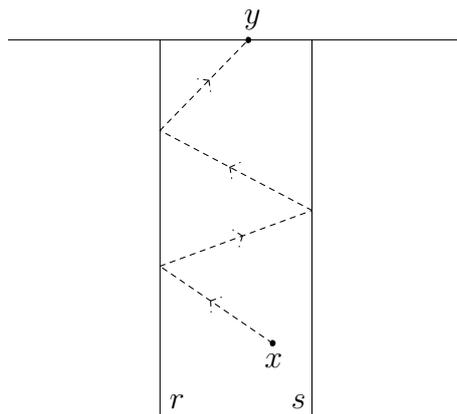


Figura 3.2: Problema da trajetória entre  $x$  e  $y$ .

### 3.1.2 Construção de polígonos regulares por rotação

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  um número ímpar,  $n \geq 3$ , e  $\theta$  um ângulo definido por

$$\theta = \frac{360^\circ}{n}.$$

Denote por  $x_0$  um ponto qualquer de uma circunferência de raio  $r > 0$  e centro  $o$ . Agora considere a rotação  $\mathcal{R}_{(o,\theta)}$ , com  $\theta$  orientado no sentido anti-horário, e os pontos

$$x_{k+1} = \mathcal{Rot}_{(o,\theta)}(x_k), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

com  $x_n = x_0$ . Una por um segmento os pontos  $x_{k+1}$  e  $x_k$ , obtendo assim, um polígono regular de  $n$  lados.

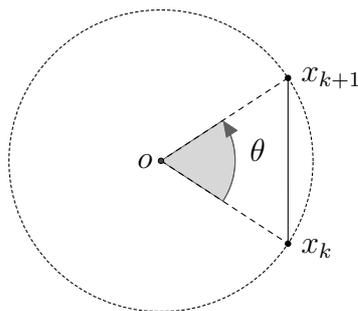


Figura 3.3: Construção de polígonos regulares por rotação.

### 3.1.3 Estrela de $m$ pontas

Sejam  $m \in \mathbb{N}$ , com  $m \geq 5$ , e  $\theta$  um ângulo orientado no sentido anti-horário definido por

$$\theta = \frac{360^\circ}{m}.$$

Numa circunferência de centro  $o$  e raio  $r > 0$  marque os pontos  $x_k$  tais que

$$x_{k+1} = \mathcal{R}ot_{(o,\theta)}(x_k), k \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Escolha um valor  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , com  $\text{mdc}\{m, i\} = 1$  e una por um segmento o ponto  $x_k$  ao ponto  $x_{(k+i) \bmod m}$ , com  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , obtendo assim a estrela de  $m$  pontas.

No Geogebra, os efeitos obtidos nas construções são bem interessantes. Veja na Figura 3.4 uma estrela de 12 pontas.

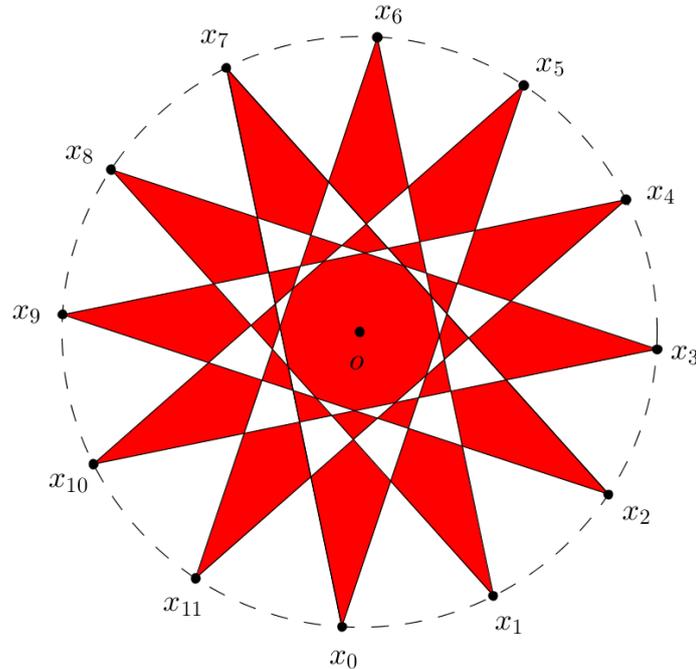


Figura 3.4: Estrela de 12 pontas.

### 3.1.4 Ladrilhamento do Plano

Seja  $x_1y_1z_1w_1$  um quadrilátero inscrito numa circunferência  $\Gamma = \Gamma(o, r)$ . Considere  $m_1$ , o ponto médio de  $x_1y_2$ , e obtenha o quadrilátero

$$x_2y_2z_2w_2 = \mathcal{S}_{m_1}(x_1y_1z_1w_1),$$

isto é,  $x_2y_2z_2w_2$  é a imagem de  $x_1y_1z_1w_1$  pela simetria  $\mathcal{S}_{m_1}$ . Agora considere  $m_2$ , o ponto médio de  $x_2w_2$ , e obtenha o quadrilátero

$$x_3y_3z_3w_3 = \mathcal{S}_{m_2}(x_2y_2z_2w_2).$$

Finalmente, sendo  $m_3$  o ponto médio de  $w_3z_3$ , obtenha o quadrilátero

$$x_4y_4z_4w_4 = \mathcal{S}_{m_3}(x_3y_3z_3w_3).$$

Para obter a imagem de cada polígono pela simetria, utilize a ferramenta “reflexão em relação a um ponto” do GeoGebra. Continuando esse processo, indefinidamente, conseguiremos ladrilhar o plano, isto é, preencher o plano sem deixar nenhuma região vazia. Veja a Figura 3.6.

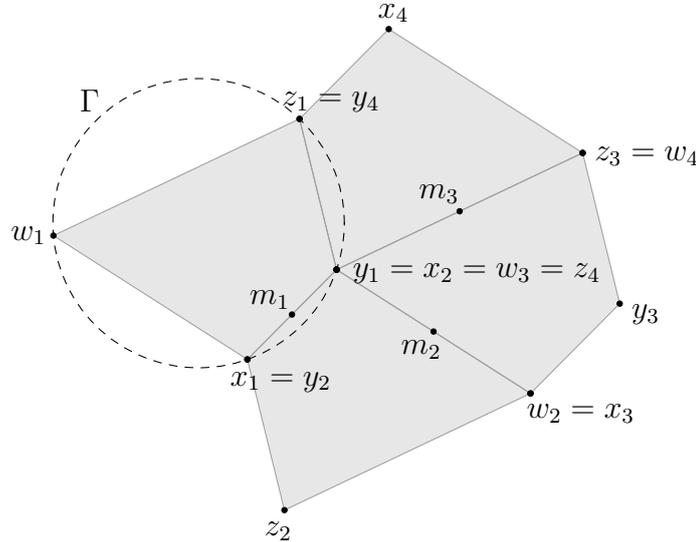


Figura 3.5: Ladrilhando o plano.

Para ver que realmente é possível cobrir o plano dessa forma, comece observando o que ocorre com a soma das medidas dos ângulos  $x_1\hat{y}_1z_1$ ,  $y_1\hat{x}_2w_2$ ,  $x_3\hat{w}_3z_3$  e  $w_4\hat{z}_4y_4$ . Movimente os vértices do polígono  $x_1y_1z_1w_1$  sobre  $\Gamma$  e observe novamente o que ocorre com a soma

$$m(x_1\hat{y}_1z_1) + m(y_1\hat{x}_2w_2) + m(x_3\hat{w}_3z_3) + m(w_4\hat{z}_4y_4). \quad (3.1)$$

Utilize as propriedades da simetria em torno de um ponto para justificar matematicamente o valor obtido na soma em (5.1).

Vejamos como explorar a reflexão em torno de uma reta nesta atividade. Para tanto, refaça a construção anterior substituindo a simetria em torno de cada um dos pontos médios pelas respectivas reflexões  $\mathcal{R}_{r_1}$ ,  $\mathcal{R}_{r_2}$  e  $\mathcal{R}_{r_3}$ , com  $r_1 = \overleftrightarrow{x_1y_1}$ ,  $r_2 = \overleftrightarrow{y_2z_2}$  e  $r_3 = \overleftrightarrow{y_3x_3}$ , obtendo os quadriláteros

$$x_2y_2z_2w_2 = \mathcal{R}_{r_1}(x_1y_1z_1w_1), x_3y_3z_3w_3 = \mathcal{R}_{r_2}(x_2y_2z_2w_2) \text{ e } x_4y_4z_4w_4 = \mathcal{R}_{r_3}(x_3y_3z_3w_3).$$

Para obter essas reflexões no GeoGebra, utilize a ferramenta “reflexão em relação a uma reta”.

Agora, movimente os vértices do polígono  $x_1y_1z_1w_1$  sobre  $\Gamma$  e analise o que ocorre com a soma

$$m(x_1\hat{y}_1z_1) + m(x_2\hat{y}_2z_2) + m(z_3\hat{y}_3x_3) + m(x_4\hat{y}_4z_4). \quad (3.2)$$

Observe que, em geral, isto não gera um ladrilho e dê uma justificativa matemática para este fato, utilizando as propriedades da reflexão em torno de uma reta. Em seguida, explore essa construção para concluir que ela gera um ladrilhamento para um tipo especial de quadrilátero.

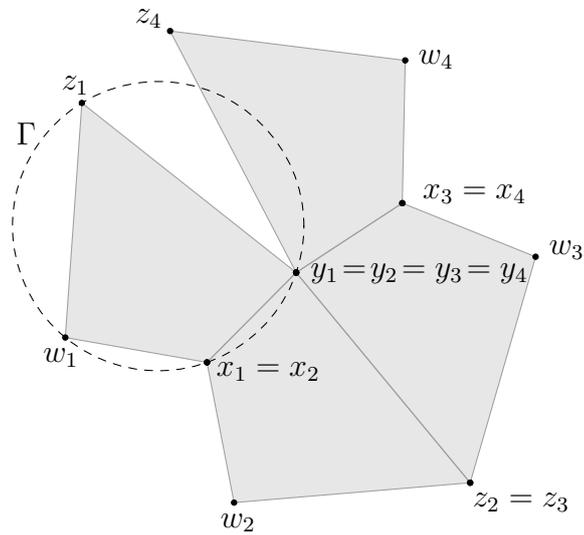


Figura 3.6: Ladrilhamento do plano e reflexão.

# Capítulo 4

## Algumas Superfícies Isométricas ao Plano

Neste capítulo, apresentaremos algumas superfícies do espaço  $\mathbb{R}^3$  que são isométricas ao plano, no sentido que ficará claro mais adiante. Para tanto, necessitamos revisar/estabelecer alguns resultados e conceitos de Geometria Diferencial. Apresentaremos apenas os resultados necessários a compreensão do conteúdo apresentado. O leitor interessado em aprofundar os estudos pode consultar as referências [2] ou [16].

### 4.1 Alguns Conceitos de Geometria Diferencial

Nesta seção apresentaremos os resultados sobre curvas e superfícies que serão utilizadas no decorrer do presente capítulo. Eles serão importantes para a compreensão dos conteúdos e do tema tratado. Faremos a exposição autodirigida, tentando apresentar um texto auto-suficiente, estabelecendo as conexões com as isometrias e o porquê da escolha deste capítulo.

#### 4.1.1 Curvas Parametrizadas

**Definição 4.1 (Curva diferenciável parametrizada)** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Uma aplicação*

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

*chama-se uma curva diferenciável parametrizada se  $\alpha$  é diferenciável, de classe  $C^\infty$ , isto é, quando as funções reais  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ , denominadas funções coordenadas de  $\alpha$ , possuem derivadas de todas as ordens em cada ponto  $t_0 \in I$ .*

Na Definição 4.1, a variável  $t$  é o *parâmetro* da curva  $\alpha$ . A imagem de  $\alpha$  é o conjunto

$$\alpha(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3; t \in I\},$$

denominado o *traço* de  $\alpha$ .

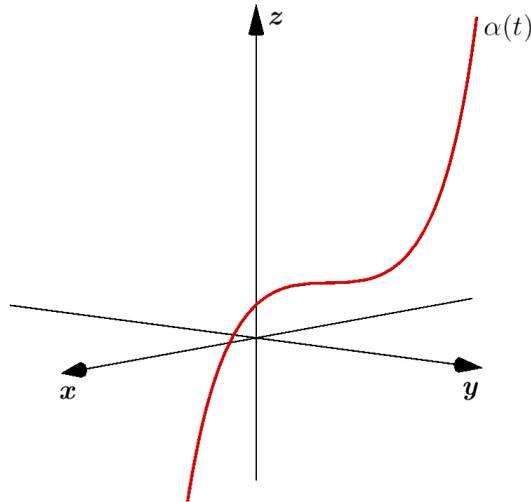


Figura 4.1: O traço de uma curva diferenciável parametrizada.

**Exemplo 11** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\alpha(t) = (\cos(2t), \sin(2t), t/2)$$

é uma curva diferenciável parametrizada. Com efeito, as funções coordenadas de  $\alpha$  são  $x(t) = \cos(2t)$ ,  $y(t) = \sin(2t)$  e  $z(t) = \frac{t}{2}$ , que possuem derivadas de todas as ordens.

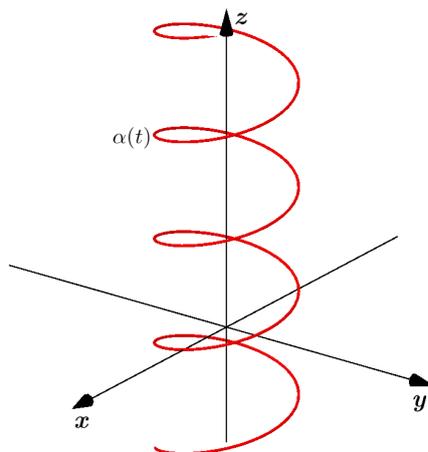


Figura 4.2: Hélice.

Nesse caso, o traço de  $\alpha$  é uma curva denominada hélice. ▲

**Exemplo 12** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\alpha(t) = (\text{sen}(t), \cos(t), 0)$$

é uma curva diferenciável parametrizada. Com efeito, as funções coordenadas de  $\alpha$  são  $x(t) = \text{sen}(t)$ ,  $y(t) = \cos(t)$  e  $z(t) = 0$  que possuem derivadas de todas as ordens.

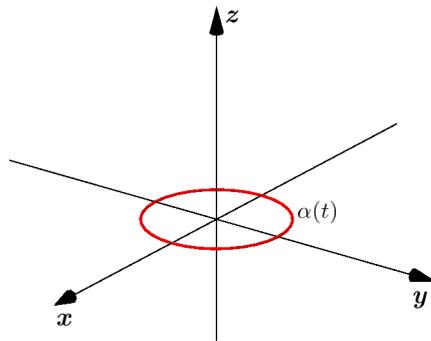


Figura 4.3: Circunferência.

Neste caso, o traço de  $\alpha$  é uma circunferência de centro  $o = (0, 0, 0)$  e raio  $r = 1$ , contida no plano  $\Pi_{xy} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ . ▲

**Definição 4.2 (Curva regular)** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular quando

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \vec{0}, \forall t \in I.$$

Observe que se  $\alpha$  é regular, então as derivadas das funções coordenadas  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  e  $z'(t)$  não se anulam, simultaneamente. Neste caso, o vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  fornece a direção da reta tangente à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

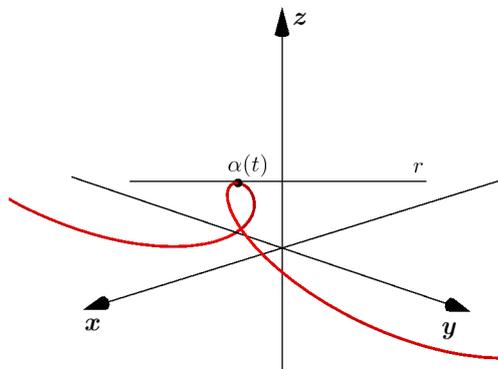


Figura 4.4: Curva regular e reta tangente.

**Exemplo 13** A curva  $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$$

é regular. De fato, temos  $\alpha'(t) = (\cos(t), -\sin(t), 0)$ . Como  $\cos(t) = 0$  se, e somente se,  $t = \pi/2$  ou  $t = 3\pi/2$  e  $\sin(t) = 0$  se, e somente se,  $t = \pi$ , segue que  $x'(t)$  e  $y'(t)$  não se anulam, simultaneamente. Portanto,

$$\alpha'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in (0, 2\pi),$$

ou seja,  $\alpha$  é regular. Note que o traço de  $\alpha$  é uma circunferência de centro  $x_0 = (0, 0, 1)$  e raio  $\varepsilon = 1$ , contida no plano  $\{(x, y, 1); x, y \in \mathbb{R}\}$ .

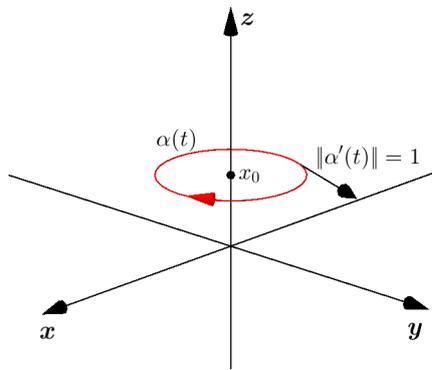


Figura 4.5: Representação do traço de  $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$  e do vetor tangente  $\alpha'(t)$ .

Note que o vetor tangente  $\alpha'(t)$  tem comprimento constante e igual a 1. A seta em vermelho, representada na Figura 4.5, indica a orientação da curva. ▲

**Definição 4.3** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , uma curva parametrizada regular, e  $[t_0, t_1] \subset I$ . O comprimento de arco da curva  $\alpha$  entre  $t_0$  e  $t_1$  é definido por

$$l_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt.$$

onde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ .

**Exemplo 14** Se  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ , então o comprimento de  $\alpha$  entre  $t_0 = 0$  e  $t_1 = \pi/2$  é

$$l_0^{\pi/2}(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 0^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1} dt = \int_0^{\pi/2} dt = t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

▲

Note que para cada  $t \in I$  podemos associar o comprimento de arco da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0 \in I$ . Isto nos leva à seguinte definição.

**Definição 4.4 (Função comprimento de arco)** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular. Fixado  $t_0 \in I$ , a aplicação diferenciável*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du, \quad t \in I$$

*é chamada função comprimento de arco a partir de  $t_0$ .*

Da Definição 4.4 concluímos que  $s(t) = t$  é a função comprimento de arco da curva  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$  a partir de  $t_0 = 0$ . De fato, neste caso, temos

$$\|\alpha'(t)\| = \|\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 0}\| = 1 \implies s(t) = \int_0^t du = t.$$

Isto significa que  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco, no sentido que estabeleceremos a seguir.

**Definição 4.5** *Diz-se que uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco quando*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0,$$

*com  $t_0, t_1 \in I$  arbitrários.*

**Proposição 4.1** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se*

$$\|\alpha'(t)\| = 1, \quad \forall t \in I.$$

**Demonstração.** Fixado  $t_0 \in I$  e supondo  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco temos, para todo  $t \in I$ , que

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \right] = \frac{d}{dt} [t - t_0] \implies \|\alpha'(t)\| = 1, \quad \forall t \in I.$$

Por outro lado, se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , então

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} dt = t \Big|_{t_0}^{t_1} = t_1 - t_0,$$

quaisquer que sejam  $t_0, t_1 \in I$ . Donde, o resultado. ■

Considere  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. Logo,  $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ , para todo  $t \in I$ , e a função comprimento de arco

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$$

é tal que  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ . Assim, a função  $s$  é estritamente crescente e, em particular, injetiva. Portanto,  $s$  é sobrejetiva sobre sua imagem. Sendo assim, existe uma função inversa  $s^{-1} : s(I) \rightarrow I$  e de mesma classe de diferenciabilidade de  $s$  (veja [12]). Para  $\tilde{t} = s(t)$  temos

$$(\alpha \circ s^{-1})(\tilde{t}) = \alpha(s^{-1}(\tilde{t})) = \alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

Com isso, temos

$$\alpha'(t) = [(\alpha \circ s^{-1})(\tilde{t})]' = (\alpha \circ s^{-1})'(\tilde{t})\tilde{t}' = (\alpha \circ s^{-1})'(\tilde{t})s'(t) = (\alpha \circ s^{-1})'(\tilde{t})\|\alpha'(t)\|.$$

Portanto,

$$\|(\alpha \circ s^{-1})'(\tilde{t})\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = 1,$$

ou seja,  $\alpha \circ s^{-1}$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, diz-se que  $\alpha \circ s^{-1}$  é uma *reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco*.

## 4.1.2 Superfícies Parametrizadas

Apresentaremos agora alguns conceitos e resultados sobre superfícies.

**Definição 4.6 (Superfície parametrizada)** *Uma superfície parametrizada regular (ou uma superfície) é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathcal{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \end{aligned}$$

onde  $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$  são denominadas *funções coordenadas de  $\mathcal{X}$*  e  $U$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^2$ , tal que

- (i)  $\mathcal{X}$  é diferenciável;
- (ii) a diferencial de  $\mathcal{X}$  em  $q$ ,  $d\mathcal{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$d\mathcal{X}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u}(q) \quad \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v}(q) \right)$$

nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , é injetiva, para todo  $q = (u, v) \in U$ .

A imagem de  $U$  pela aplicação  $\mathcal{X}$ , indicada por  $\mathcal{X}(U)$ , é denominada o *traço* de  $\mathcal{X}$ . As variáveis  $u$  e  $v$  são denominados os parâmetros  $\mathcal{X}$ . É comum identificar uma superfície pelo seu traço. No sentido da Definição 4.6, dizer que  $\mathcal{X}$  é diferenciável significa que suas funções coordenadas  $x, y$  e  $z$  possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens no conjunto  $U$ .

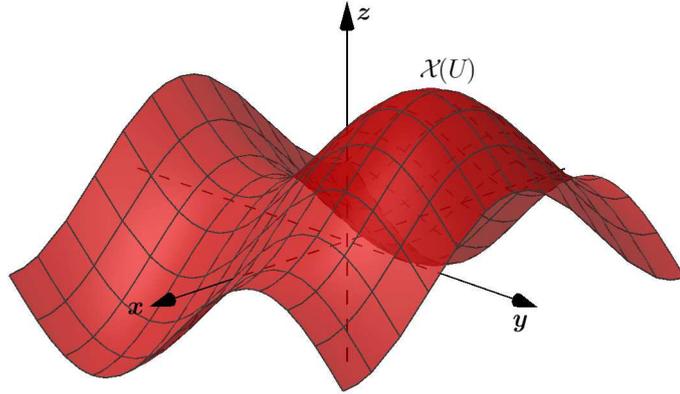


Figura 4.6: Superfície.

A condição (ii) na Definição 4.6 equivale a dizer que os vetores

$$\mathcal{X}_u(q) = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u}(q) \text{ e } \mathcal{X}_v(q) = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v}(q)$$

sejam linearmente independentes para cada ponto  $q = (u, v) \in U$  (veja [16]) e, portanto, determinam um plano chamado *plano tangente a  $\mathcal{X}$  em  $q$* , o qual é representado pela notação  $T_q\mathcal{X}$ .

### A Primeira Forma Fundamental

Apresentaremos agora a primeira forma fundamental, a qual nos permite tratar problemas sobre medidas em superfícies.

**Definição 4.7 (Primeira forma fundamental)** *Sejam  $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $q \in U$ . A primeira forma fundamental de  $\mathcal{X}$  em  $q$  é a função  $I_q : T_q\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$I_q(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^3$ .

Já sabemos que para cada  $q = (u, v) \in U$  os vetores  $\mathcal{X}_u(q)$  e  $\mathcal{X}_v(q)$  são LI e, assim, determinam uma base  $\beta = \{\mathcal{X}_u(q), \mathcal{X}_v(q)\}$  do plano  $T_q\mathcal{X}$ . Neste caso, dado  $w \in T_q\mathcal{X}$ , existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$w = a\mathcal{X}_u(q) + b\mathcal{X}_v(q).$$

Portanto, usando as propriedades de produto interno temos

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \langle w, w \rangle = \langle a\mathcal{X}_u(q) + b\mathcal{X}_v(q), a\mathcal{X}_u(q) + b\mathcal{X}_v(q) \rangle \\ &= a^2\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle(q) + 2ab\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle(q) + b^2\langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle(q) \\ &= a^2E(u, v) + 2abF(u, v) + b^2G(u, v), \end{aligned}$$

em que

$$E(u, v) = \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle(q), F(u, v) = \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle(q) \text{ e } G(u, v) = \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle(q)$$

são chamados os *coeficientes da primeira forma fundamental*.

**Exemplo 15** Considere a superfície  $\mathcal{X} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $I = (0, \pi)$ , dada por

$$\mathcal{X}(u, v) = (a \operatorname{sen}(v) \cos(u), a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), a \cos(v)),$$

com  $a > 0$  constante, cujo traço é uma esfera de centro na origem e raio  $a$ . Note que

$$\mathcal{X}_u(u, v) = (-a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), a \operatorname{sen}(v) \cos(u), 0)$$

e

$$\mathcal{X}_v(u, v) = (a \cos(v) \cos(u), a \cos(v) \operatorname{sen}(u), -a \operatorname{sen}(v)),$$

para todo  $q = (u, v) \in \mathbb{R} \times I$ . Com isso, temos

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [-a \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u)]^2 + [a \operatorname{sen}(v) \cos(u)]^2 \\ &= a^2 (\operatorname{sen}^2(v) [\operatorname{sen}^2(u) + \cos^2(u)]) \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2(v); \end{aligned}$$

$$F(u, v) = -a^2 \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u) \cos(v) \cos(u) + a^2 \operatorname{sen}(v) \cos(u) \cos(v) \operatorname{sen}(u) = 0;$$

$$\begin{aligned} G(u, v) &= [a \cos(v) \cos(u)]^2 + [a \cos(v) \operatorname{sen}(u)]^2 + [-a \operatorname{sen}(v)]^2 \\ &= a^2 [\cos^2(v) (\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u)) + \operatorname{sen}^2(v)] \\ &= a^2 [\cos^2(v) + \operatorname{sen}^2(v)] \\ &= a^2, \end{aligned}$$

que são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{X}$  em  $q$ . A Figura 4.7 representa o traço de  $\mathcal{X}$ .

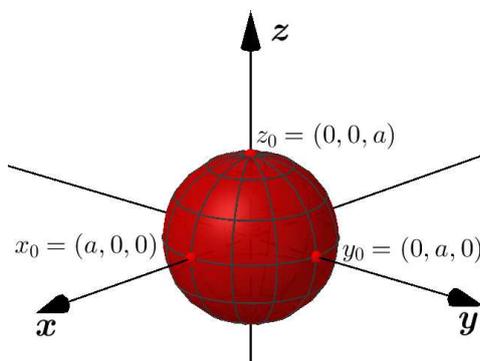


Figura 4.7: A esfera de centro  $o = (0, 0, 0)$  e raio  $a$ .



**Exemplo 16** Considere a superfície  $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathcal{X}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

cujos traço é o cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Neste caso, temos

$$\mathcal{X}_u(u, v) = (-\sin(u), \cos(u), 0) \text{ e } \mathcal{X}_v(u, v) = (0, 0, 1)$$

para todo  $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Assim,

$$E(u, v) = \langle (-\sin(u), \cos(u), 0), (-\sin(u), \cos(u), 0) \rangle = \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1;$$

$$F(u, v) = \langle (-\sin(u), \cos(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0;$$

$$G(u, v) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{X}$  em  $q$ . Na Figura 4.8 temos a representação do traço de  $\mathcal{X}$ .

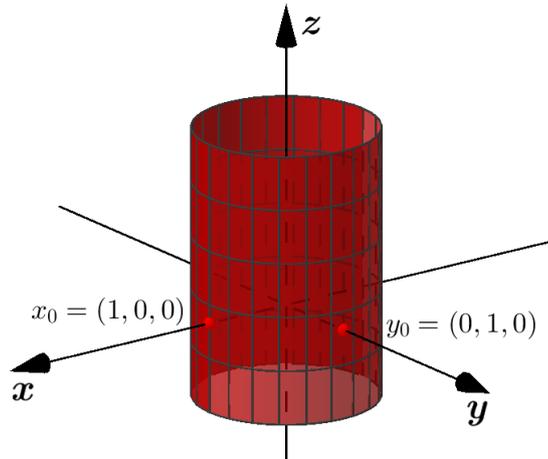


Figura 4.8: Cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

▲

### 4.1.3 Superfícies Isométricas e Distância Intrínseca

Nos Exemplos 15 e 16 vimos que os coeficientes da primeira forma fundamental são distintos para cada uma das superfícies dadas. No entanto, existem superfícies onde esses coeficientes coincidem e são justamente algumas dessas superfícies que pretendemos estudar.

**Definição 4.8** Uma superfície parametrizada regular  $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita simples quando a aplicação  $\mathcal{X}$  é injetiva.

Vejam os um exemplo.

**Exemplo 17** A superfície parametrizada regular  $\mathcal{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathcal{X}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

é simples. Com efeito, se  $\mathcal{X}(u_1, v_1) = \mathcal{X}(u_2, v_2)$ , então  $v_1 = v_2$  e

$$\begin{cases} \cos(u_1) = \cos(u_2) \\ \sin(u_1) = \sin(u_2) \end{cases} \implies \sin(u_1) \cos(u_2) = \sin(u_2) \cos(u_1) \implies \sin(u_1 - u_2) = 0.$$

Observe que  $-2\pi < u_1 - u_2 < 2\pi$ . Logo, da última equação acima concluímos que  $u_1 - u_2 = \pm\pi$  ou  $u_1 - u_2 = 0$ . Supondo  $u_1 - u_2 = \pm\pi$  temos  $u_1 = u_2 \pm \pi$  e, com isso, pela igualdade  $\cos(u_1) = \cos(u_2)$  chegamos a  $\cos(u_2) = 0$ . Donde  $u_2 = \pi/2$  ou  $u_2 = 3\pi/2$ . Se  $u_2 = \pi/2$ , então  $u_1 = 3\pi/2$ . Por outro lado, se  $u_2 = 3\pi/2$ , então  $u_1 = \pi/2$  ou  $u_1 = 5\pi/2$ . Perceba que em todos esses casos, os valores obtidos para  $u_1$  e  $u_2$ , correspondentes, não satisfazem simultaneamente as equações  $\cos(u_1) = \cos(u_2)$  e  $\sin(u_1) = \sin(u_2)$ . Portanto, a única possibilidade é  $u_1 - u_2 = 0$ , isto é,  $u_1 = u_2$ . Assim,

$$\mathcal{X}(u_1, v_1) = \mathcal{X}(u_2, v_2) \implies u_1 = u_2 \text{ e } v_1 = v_2 \implies (u_1, v_1) = (u_2, v_2),$$

ou seja,  $\mathcal{X}$  é injetiva. Portanto,  $\mathcal{X}$  é simples. Já a superfície  $\mathcal{X}_1 : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$\mathcal{X}_1(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

não é simples. De fato, basta notar que

$$\mathcal{X}_1(0, v) = \mathcal{X}_1(2\pi, v), \forall v \in \mathbb{R},$$

ou seja,  $\mathcal{X}_1$  não é injetiva. Note que o traço de  $\mathcal{X}_1$  é um cilindro, enquanto que o traço de  $\mathcal{X}$  é esse mesmo cilindro (traço de  $\mathcal{X}_1$ ) menos a reta  $r = \{(1, 0, z) \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{R}\}$ .  $\blacktriangle$

**Definição 4.9 (Superfícies isométricas)** Sejam  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  superfícies simples. Diz-se que  $\mathcal{X}$  e  $\tilde{\mathcal{X}}$  são superfícies isométricas se os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{X}$  e  $\tilde{\mathcal{X}}$  coincidem, isto é,

$$E(u, v) = \tilde{E}(u, v), F(u, v) = \tilde{F}(u, v) \text{ e } G(u, v) = \tilde{G}(u, v),$$

para todo  $q = (u, v) \in U$ .

Na Definição 4.9, observe que as superfícies  $\mathcal{X}$  e  $\tilde{\mathcal{X}}$  são injetivas e estão definidas no mesmo domínio  $U$ . Logo, considerando  $S = \mathcal{X}(U)$  e  $\tilde{S} = \tilde{\mathcal{X}}(U)$ , temos que as aplicações  $\mathcal{X} : U \rightarrow S$  e  $\tilde{\mathcal{X}} : U \rightarrow \tilde{S}$  possuem inversas  $\mathcal{X}^{-1} : S \rightarrow U$  e  $\tilde{\mathcal{X}}^{-1} : \tilde{S} \rightarrow U$ . Sendo assim, a aplicação  $\phi : S \rightarrow \tilde{S}$  tal que  $\phi = \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{X}^{-1}$  é bijetiva e sua inversa é a aplicação  $\phi^{-1} : \tilde{S} \rightarrow S$  tal que  $\phi^{-1} = \mathcal{X} \circ \tilde{\mathcal{X}}^{-1}$ . Portanto, dadas duas superfícies isométricas, existe uma bijeção entre seus traços.

**Definição 4.10 (Distância intrínseca)** Sejam  $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície simples e  $S = \mathcal{X}(U)$ . A distância intrínseca é a função  $d_{int} : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d_{int}(p, q) = \inf L(\alpha_p^q),$$

onde  $L(\alpha_p^q)$  é o conjunto formado pelos comprimentos de todas as curvas regulares,  $\alpha$ , com traços em  $S$ , que ligam o ponto  $p$  ao ponto  $q$ .

**Exemplo 18** Sejam  $p$  e  $q$ , pontos de uma superfície plana. Afirmamos que

$$d_{int}(p, q) = \|\vec{pq}\|,$$

isto é, a  $d_{int}(p, q)$  é igual ao comprimento do segmento de reta  $pq$ . De fato, sendo a superfície plana, a curva de menor comprimento que contém os pontos  $p$  e  $q$  é o segmento  $pq$ , contido na reta  $r$  que passa por  $q = (q_1, q_2, q_3)$  e tem a direção do vetor  $\vec{pq} = (a, b, c)$ . Veja que

$$\alpha(t) = (q_1 - ta, q_2 - tb, q_3 - tc), t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização para  $r$ . Como  $\alpha(0) = q$ ,  $\alpha(1) = p$  e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2} = \|\vec{pq}\|,$$

obtemos

$$d_{int}(p, q) = l_0^1(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 \|\vec{pq}\| dt = \|\vec{pq}\|(1 - 0) = \|\vec{pq}\|.$$

▲

Dadas duas superfícies isométricas  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a aplicação

$$\phi = \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{X}^{-1} : \mathcal{X}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}(U)$$

preserva distância intrínseca nos traços  $\mathcal{X}(U)$  e  $\tilde{\mathcal{X}}(U)$  (veja [16]), ou seja, se  $p, q \in \mathcal{X}(U)$ , então

$$d_{int}(p, q) = \tilde{d}_{int}(\phi(p), \phi(q)).$$

Isto significa, conforme veremos no Capítulo 5, que a aplicação  $\phi$  é uma isometria entre  $\mathcal{X}(U)$  e  $\tilde{\mathcal{X}}(U)$ , o que faz jus à expressão superfícies isométricas e justifica a abordagem desse capítulo.

Mostraremos agora que  $\phi$  preserva o comprimento de curvas em superfícies isométricas.

**Proposição 4.2** Se  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  são superfícies isométricas, então a aplicação

$$\phi = \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{X}^{-1} : \mathcal{X}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}(U)$$

é tal que

$$l_{t_0}^{t_1}(\alpha) = l_{t_0}^{t_1}(\phi(\alpha)).$$

**Demonstração.** Seja  $\alpha$  uma curva regular de  $\mathcal{X}$ , ou seja,  $\alpha(t) = \mathcal{X}(u(t), v(t))$ . Observe que

$$\alpha'(t) = u'(t)\mathcal{X}_u(u, v) + v'(t)\mathcal{X}_v(u, v).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle &= u'(t)^2 \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle(u, v) + 2u'(t)v'(t) \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle(u, v) + v'(t)^2 \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle(u, v) \\ &= u'(t)^2 E(u, v) + 2u'(t)v'(t)F(u, v) + v'(t)^2 G(u, v). \end{aligned}$$

Logo,

$$l_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u'(t)^2 E(u, v) + 2u'(t)v'(t)F(u, v) + v'(t)^2 G(u, v)} dt.$$

Agora, considere  $\tilde{\alpha}(t) = \phi(\alpha(t))$ . Como  $\tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{X}^{-1}$ , temos

$$\tilde{\alpha}(t) = \left( \tilde{\mathcal{X}} \circ \mathcal{X}^{-1} \right) (\mathcal{X}(u(t), v(t))) = \tilde{\mathcal{X}}(u(t), v(t)).$$

Logo,  $\tilde{\alpha}'(t) = u'(t)\tilde{\mathcal{X}}_u(u, v) + v'(t)\tilde{\mathcal{X}}_v(u, v)$  e daí,

$$\langle \tilde{\alpha}'(t), \tilde{\alpha}'(t) \rangle = u'(t)^2 \tilde{E}(u, v) + 2u'(t)v'(t)\tilde{F}(u, v) + v'(t)^2 \tilde{G}(u, v).$$

Assim, o comprimento de  $\tilde{\alpha}$  entre  $t_0$  e  $t_1$  é dado por

$$l_{t_0}^{t_1}(\tilde{\alpha}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u'(t)^2 \tilde{E}(u, v) + 2u'(t)v'(t)\tilde{F}(u, v) + v'(t)^2 \tilde{G}(u, v)} dt.$$

Sendo  $\mathcal{X}$  e  $\tilde{\mathcal{X}}$  superfícies isométricas, temos

$$E(u, v) = \tilde{E}(u, v), F(u, v) = \tilde{F}(u, v), G(u, v) = \tilde{G}(u, v), \forall (u, v) \in U$$

e, conseqüentemente,

$$l_{t_0}^{t_1}(\alpha) = l_{t_0}^{t_1}(\tilde{\alpha}) = l_{t_0}^{t_1}(\phi(\alpha)).$$

Portanto, a aplicação  $\phi$  preserva o comprimento de curvas em superfícies isométricas. ■

## 4.2 Superfícies Isométricas ao Plano

Apresentaremos a seguir duas superfícies isométricas ao plano, a saber, as superfícies cilíndrica e cônica. Mais precisamente, mostraremos que essas superfícies são isométricas a uma região plana. Em outras palavras, isto significa que podemos transformar uma determinada região plana na superfície isométrica correspondente, e vice-versa, sem precisar “esticar” ou “encolher” qualquer uma dessas superfícies (veja [17]).

### 4.2.1 Plano e Cilindro

**Definição 4.11 (Cilindro)** *Sejam  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  um plano,  $\gamma \subset \Pi$  uma curva regular e  $r$  uma reta não contida em  $\Pi$  tal que  $r \cap \Pi \neq \emptyset$ . A superfície  $S$  gerada pela reunião de todas as retas paralelas a  $r$  e que passam pelos pontos de  $\gamma$ , é chamada cilindro. Cada uma das retas do cilindro é denominada geratriz e a curva  $\gamma$  é chamada diretriz.*

Aqui consideraremos os casos em que  $r \perp \Pi$ . Mais precisamente, estamos interessados apenas nos casos em que a diretriz  $\gamma$  está contida em um dos planos coordenados  $\Pi_{xy} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $\Pi_{xz} = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$  ou  $\Pi_{yz} = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$ . Neste caso, as retas geratrizes são perpendiculares à esses planos. Além disso, exigiremos que a superfície cilíndrica não apresente autointerseção, o que ocorre quando a diretriz  $\gamma$  é injetiva.

Em alguns casos, os cilindros recebem denominações especiais. Se a diretriz é uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, o cilindro é dito circular, elíptico, hiperbólico ou parabólico, respectivamente. Na Figura 4.9 temos um cilindro elíptico e um cilindro parabólico.

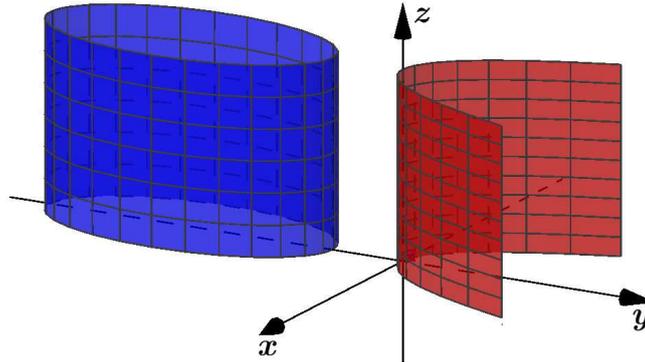


Figura 4.9: Cilindros elíptico e parabólico.

Mostraremos agora que o cilindro é isométrico ao plano (ou mais precisamente, a uma região plana).

**Teorema 4.3** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular, plana e injetiva. Então, o cilindro  $\mathcal{C} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de diretriz  $\gamma$  é isométrico à região plana  $\mathcal{R} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$\mathcal{R}(u, v) = (u, v, 0).$$

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, suponha que  $\gamma(u) \subset \Pi_{xy}$ . Neste caso, as geratrizes de  $\mathcal{C}$  são paralelas ao eixo  $z$ . Seja

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0), t \in I$$

uma parametrização para  $\gamma$ . Uma parametrização para o cilindro é dada por

$$\mathcal{C}(u, v) = (x(u), y(u), v),$$

com  $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ . Note que

$$\mathcal{C}_u(u, v) = (x'(u), y'(u), 0) \text{ e } \mathcal{C}_v(u, v) = (0, 0, 1), \forall (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{C}$  no ponto  $q = (u, v) \in I \times \mathbb{R}$  são dados por

$$E_{\mathcal{C}}(u, v) = \langle (x'(u), y'(u), 0), (x'(u), y'(u), 0) \rangle = x'(u)^2 + y'(u)^2;$$

$$F_{\mathcal{C}}(u, v) = \langle (x'(u), y'(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0;$$

$$G_{\mathcal{C}}(u, v) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1.$$

Por outro lado, como

$$\mathcal{R}_u(u, v) = (1, 0, 0) \text{ e } \mathcal{R}_v(u, v) = (0, 1, 0),$$

os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{R}$  em  $q$  são

$$E_{\mathcal{R}}(u, v) = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1;$$

$$F_{\mathcal{R}}(u, v) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0;$$

$$G_{\mathcal{R}}(u, v) = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1.$$

Se  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\|\gamma'(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1, \forall t \in I$$

e, portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{R}$  coincidem em cada ponto  $q = (u, v)$ , ou seja,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{R}$  são superfícies isométricas. Por outro lado, se  $\gamma$  não está parametrizada pelo comprimento de arco, então considerando  $t = s^{-1}(u)$ , com

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\theta)\| d\theta,$$

obtemos

$$\gamma(u) = (x(s^{-1}(u)), y(s^{-1}(u)), 0),$$

que é uma reparametrização pelo comprimento de arco para  $\gamma$ , isto é,  $\|\gamma'(u)\| = 1$ . Neste caso, uma parametrização para o cilindro será dada por

$$\mathcal{C}(u, v) = (x(s^{-1}(u)), y(s^{-1}(u)), v),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}}(u, v) &= \left\langle \left( [x(s^{-1}(u))]', [y(s^{-1}(u))]', 0 \right), \left( [x(s^{-1}(u))]', [y(s^{-1}(u))]', 0 \right) \right\rangle \\ &= \|\gamma'(u)\|^2 = 1; \\ F_{\mathcal{C}}(u, v) &= \left\langle \left( [x(s^{-1}(u))]', [y(s^{-1}(u))]', 0 \right), (0, 0, 1) \right\rangle = 0; \\ G_{\mathcal{C}}(u, v) &= \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1, \end{aligned}$$

para todo  $q = (u, v) \in I \times \mathbb{R}$ . Em todo caso, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{R}$  são iguais. Portanto,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{R}$  são superfícies isométricas e a aplicação

$$\phi = \mathcal{C} \circ \mathcal{R}^{-1} : \mathcal{R}(I \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}),$$

dada por

$$\phi(u, v, 0) = \mathcal{C} \circ \mathcal{R}^{-1}(u, v, 0) = \mathcal{C}(u, v),$$

é uma isometria entre a região  $\mathcal{R}$  e o cilindro  $\mathcal{C}$ . ■

De acordo com o Teorema 4.3, podemos estabelecer uma isometria entre uma região plana e o cilindro. Note que tanto a região como o cilindro devem ser superfícies simples.

#### 4.2.2 Plano e Cone Circular

**Definição 4.12 (Cone)** *Sejam  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  um plano,  $\gamma \subset \Pi$  uma curva regular e  $o$  um ponto não pertencente ao plano  $\Pi$ . A superfície  $S$  gerada pela reunião de todas as retas que passam por  $o$  e por um ponto  $\gamma$ , é chamada cone. Cada uma das retas do cone é denominada geratriz, a curva  $\gamma$  é chamada diretriz e o ponto  $o$  é o vértice do cone.*

Quando  $\gamma$  é uma circunferência e a reta que passa pelo vértice  $o$  e pelo centro de  $\gamma$  é perpendicular ao plano  $\Pi$ , o cone é dito circular.

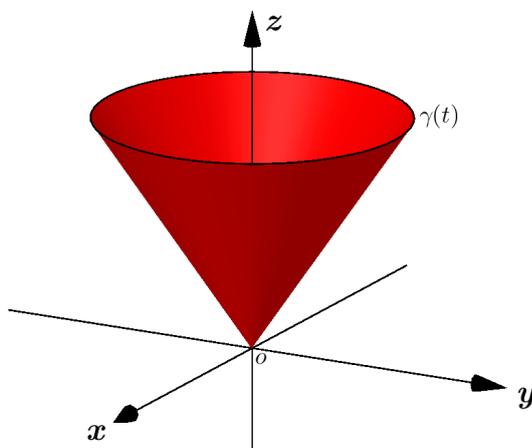


Figura 4.10: Cone circular de uma folha.

Aqui consideraremos apenas os cones circulares em que o plano  $\Pi$ , que contém a diretriz  $\gamma$ , é paralelo a um dos planos coordenados, que podemos admitir sem perda de generalidade se tratar do plano  $\Pi_{xy}$ , e o vértice coincide com a origem  $o = (0, 0, 0)$ .

Mais precisamente, mostraremos que um cone de uma folha menos uma geratriz é isométrico a um setor circular excluindo-se o seu bordo. Essa exclusão é, evidentemente, necessária, uma vez que tanto o setor circular como o cone devem ser superfícies simples.

**Teorema 4.4** *Sejam  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma circunferência parametrizada por*

$$\gamma(t) = (a \operatorname{sen}(t), a \operatorname{cos}(t), h),$$

onde  $h > 0$ , e  $\mathcal{C} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $U = (0, +\infty) \times (0, \tilde{\theta})$ , é a região plana dada por

$$\mathcal{R}(\rho, \theta) = (\rho \operatorname{sen}(\theta), \rho \operatorname{cos}(\theta), 0).$$

Então, o cone de uma folha, com diretriz  $\gamma$  e vértice  $o = (0, 0, 0)$ , menos uma de suas geratrizes é isométrico a  $\mathcal{R}$ .

**Demonstração.** Uma parametrização para o cone<sup>1</sup>  $\mathcal{C}$  é dada por

$$\mathcal{C}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left( a \operatorname{cos} \left( \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \theta \right), a \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \theta \right), h \right).$$

ou ainda,

$$\mathcal{C}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{g} \left( a \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right), a \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right), h \right),$$

em que  $g = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\rho(\rho, \theta) &= \frac{1}{g} \left( a \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right), a \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right), h \right); \\ \mathcal{C}_\theta(\rho, \theta) &= \frac{\rho}{g} \left( -g \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right), g \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right), 0 \right), \end{aligned}$$

para todo  $q = (\rho, \theta)$ . Com isso, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{C}$  em  $q = (\rho, \theta)$  são dados por

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{C}}(\rho, \theta) &= \frac{1}{a^2 + h^2} \left[ a^2 \left( \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right)^2 + \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right)^2 \right) + h^2 \right] = \frac{1}{g^2} (a^2 + h^2) = 1; \\ F_{\mathcal{C}}(\rho, \theta) &= \frac{\rho}{g^2} \left[ -ag \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right) \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right) + ag \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right) \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right) \right] = 0; \\ G_{\mathcal{C}}(\rho, \theta) &= \frac{\rho^2}{g^2} g^2 \left( \operatorname{sen} \left( \frac{g}{a} \theta \right)^2 + \operatorname{cos} \left( \frac{g}{a} \theta \right)^2 \right) = \rho^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\mathcal{R}_\rho(\rho, \theta) = (\operatorname{sen}(\theta), \operatorname{cos}(\theta), 0) \text{ e } \mathcal{R}_\theta(\rho, \theta) = (\rho \operatorname{cos}(\theta), -\rho \operatorname{sen}(\theta), 0),$$

---

<sup>1</sup>Veja [17]

para todo  $(r, \theta) \in U$ , segue que os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{R}$  em  $(\rho, \theta) \in U$  são dados por

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{R}}(\rho, \theta) &= \text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1; \\ F_{\mathcal{R}}(\rho, \theta) &= \rho \text{sen}(\theta) \text{cos}(\theta) - \rho \text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) = 0; \\ F_{\mathcal{R}}(\rho, \theta) &= \rho^2 [\text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)] = \rho^2. \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{R}$  são iguais e, consequentemente, essas superfícies são isométricas e a aplicação

$$\phi = \mathcal{C} \circ \mathcal{R}^{-1} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{R}(U)$$

é dada por

$$\phi(\rho \text{sen}(\theta), \rho \text{cos}(\theta), 0) = (\mathcal{C} \circ \mathcal{R}^{-1})(\rho \text{sen}(\theta), \rho \text{cos}(\theta), 0) = \mathcal{C}(\rho, \theta).$$

■

Segundo os Teoremas 4.3 e 4.4, podemos estabelecer uma isometria entre uma região do plano e um cilindro menos uma geratriz ou entre uma região do plano (interior de um setor circular) e um cone de uma folha excluindo-se uma de suas geratrizes. Em termos práticos, fazendo-se algumas adaptações nos domínios dessas superfícies, pode-se construir alguns modelos concretos com cilindros e cones. Aos interessados em desenvolver essas atividades, indicamos a referência [17].

## Capítulo 5

# Caracterização da Reta Real por Isometrias

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre a teoria dos espaços métricos, que nos permitam dar ao conjunto dos números reais uma caracterização por meio de isometrias. Vale destacar que alguns dos resultados serão aceitos sem demonstração. Aos leitores mais curiosos que desejem aprofundar seus conhecimentos no estudo dos espaços métricos sugerimos as referências [6] ou [7].

Iniciaremos nossa discussão admitindo que o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ , é um corpo ordenado completo, no sentido de que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ , possui supremo em  $\mathbb{R}$ . Para mais detalhes veja [8].

### 5.1 Espaço Métrico

A noção de espaço métrico é uma das mais importantes da Matemática. Dado um conjunto, estamos interessados em calcular distâncias entre elementos quaisquer desse conjunto.

**Definição 5.1 (Métrica)** *Uma métrica num conjunto  $\mathcal{X}$  é uma função*

$$\begin{aligned}d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\(x, y) &\longmapsto d(x, y)\end{aligned}$$

*que satisfaz aos seguintes axiomas:*

- $(M_1)$   $d(x, y) \geq 0$ ;
- $(M_2)$   $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- $(M_3)$   $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $(M_4)$   $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,

*para quaisquer que sejam  $x, y, z \in \mathcal{X}$ .*

Os axiomas acima são conhecidos como *axiomas de métrica*. Perceba que além de ser não negativa ( $M_1$ ), a função  $d$  deve ser simétrica ( $M_3$ ) e satisfazer a *desigualdade triangular* ( $M_4$ ). Na Definição 5.1, o número real  $d(x, y)$  chama-se a *distância* de  $x$  a  $y$ .

Um **espaço métrico** é um par  $(\mathcal{X}, d)$  onde  $d$  é uma métrica no conjunto  $\mathcal{X}$ . Em alguns casos, representaremos por  $\mathcal{X}$  o espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$ , ficando subentendida a métrica que estamos considerando em  $\mathcal{X}$ . Os elementos de um espaço métrico, independente de sua natureza, são chamados pontos.

Sejam  $(\mathcal{X}, d)$  um espaço métrico e  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ . A restrição

$$\tilde{d} = d|_{\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}}$$

chama-se a **métrica induzida** em  $\mathcal{Y}$  por  $d$ . Neste caso, o par  $(\mathcal{Y}, \tilde{d})$  é denominado um subespaço de  $(\mathcal{X}, d)$ . Observe que todo subespaço é ainda um espaço métrico.

Na definição de métrica, podemos substituir alguns dos axiomas por outros, obtendo ainda definições equivalentes àquela dada em (5.1), de acordo com as proposições seguintes.

**Proposição 5.1** *Se  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que satisfaz os axiomas  $(M_2)$ ,  $(M_3)$  e  $(M_4)$  da Definição 5.1, então  $d$  é uma métrica em  $\mathcal{X}$ .*

**Demonstração.** De fato, precisamos apenas mostrar que  $d$  é não negativa. Note que

$$0 \stackrel{(M_2)}{=} d(x, x) \stackrel{(M_4)}{\leq} d(x, y) + d(y, x) \stackrel{(M_3)}{=} 2d(x, y).$$

Logo,  $d(x, y) \geq 0$ , para quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{X}$ . ■

**Proposição 5.2** *Se  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que satisfaz o axioma  $(M_2)$  da Definição 5.1 e tal que*

$$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y),$$

*então  $d$  é uma métrica em  $\mathcal{X}$ .*

**Demonstração.** De fato, pela desigualdade temos

$$d(x, y) \leq d(y, x) + d(y, y) \stackrel{(M_2)}{=} d(y, x) \leq d(x, y) + d(x, x) \stackrel{(M_2)}{=} d(x, y).$$

Logo,  $d(x, y) \leq d(y, x) \leq d(x, y)$  e, daí,  $d(x, y) = d(y, x)$ . Além disso,

$$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) \leq [d(x, z) + d(x, x)] + d(z, y) \stackrel{(M_2)}{=} d(x, z) + d(z, y).$$

Dessa forma,  $d$  satisfaz a desigualdade triangular. A não negatividade de  $d$  segue da proposição anterior. ■

**Exemplo 19 A métrica discreta.** Seja  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Mostremos que  $d$  define uma métrica em  $\mathcal{X}$ . Da definição de  $d$ , temos  $d(x, y) = 0$  se, e somente,  $x = y$ . Além disso, para  $x = y$  temos

$$0 = d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y).$$

Logo,  $d$  satisfaz o axioma  $(M_2)$ . Supondo  $x \neq y$  temos  $d(x, y) = 1$ . Neste caso, se  $z = x$  ou  $z = y$ , então  $d(z, x) = 1$  ou  $d(z, y) = 1$ , não simultaneamente. Logo,  $d(z, x) + d(z, y) = 1$  e daí,

$$1 = d(x, y) = d(z, x) + d(z, y).$$

Por outro lado, se  $z \neq x$  e  $z \neq y$ , então

$$d(z, x) + d(z, y) = 2 > 1 = d(x, y).$$

Em todo caso,  $d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$ , quaisquer que sejam  $x, y, z \in \mathcal{X}$ . Da Proposição 5.2, segue que  $d$  é uma métrica em  $\mathcal{X}$ . A métrica  $d$ , assim obtida, é denominada **métrica discreta** ou **métrica “zero-um”**. ▲

Uma importante propriedade de métrica é dada na proposição seguinte.

**Proposição 5.3** *Seja  $d$  uma métrica em  $\mathcal{X}$ . Então*

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w), \tag{5.1}$$

*quaisquer que sejam  $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ .*

**Demonstração.** Dados  $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ , note que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y) \implies d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w).$$

Daí, segue que

$$d(z, w) - d(x, y) \leq d(z, x) + d(w, y) \implies -(d(x, z) + d(y, w)) \leq d(x, y) - d(z, w).$$

Com isso,

$$-(d(x, z) + d(y, w)) \leq d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w).$$

Portanto,  $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$ . ■

Seja  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  o *produto cartesiano* de dois espaços métricos  $(\mathcal{X}, d_1)$  e  $(\mathcal{Y}, d_2)$ . Dados  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , definamos as funções

$$d, d', d'' : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}, \quad (5.2)$$

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2), \quad (5.3)$$

$$d''(x, y) = \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}. \quad (5.4)$$

Veremos em seguida que as funções  $d, d'$  e  $d''$  definem métricas em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  e, portanto, o conjunto  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , munido de uma dessas métricas é um espaço métrico.

**Proposição 5.4** *A função  $d'$  definida em (5.3) é uma métrica no conjunto  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .*

**Demonstração.** Como  $d_1$  e  $d_2$  são métricas, temos  $d_1(x_1, y_1) \geq 0$  e  $d_2(x_2, y_2) \geq 0$  e, consequentemente,

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \geq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d'(x, y) = 0 &\iff d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = 0 \iff d_1(x_1, y_1) = 0, d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\iff x_1 = y_1, x_2 = y_2 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

Observe ainda, que

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2) = d'(y, x).$$

Por fim, a desigualdade triangular. Seja  $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . Temos que

$$\begin{aligned} d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) &\leq [d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1)] + [d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2)] \\ &= [d_1(x_1, z_1) + d_2(x_2, z_2)] + [d_1(z_1, y_1) + d_2(z_2, y_2)] \\ &\leq d'(x, z) + d'(z, y). \end{aligned}$$

Portanto,  $d'$  é uma métrica em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

**Proposição 5.5** *A função  $d''$  definida em (5.4) é uma métrica em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .*

**Demonstração.** Como  $d_1(x_1, y_1) \geq 0$  e  $d_2(x_2, y_2) \geq 0$ , temos

$$d''(x, y) = \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \geq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d''(x, y) = 0 &\iff \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} = 0 \iff d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\iff x_1 = y_1, x_2 = y_2 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$d''(x, y) = \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} = \max \{d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2)\} = d''(y, x).$$

Para verificar que  $d''$  satisfaz a desigualdade triangular, note que

$$\begin{aligned} d'' &= \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ &\leq \max \{d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1), d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2)\} \\ &\leq \max \{d_1(x_1, z_1), d_2(x_2, z_2)\} + \max \{d_1(z_1, y_1), d_2(z_2, y_2)\} \\ &= d''(x, z) + d''(z, y). \end{aligned}$$

Portanto,  $d''$  é uma métrica em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . ■

Para provar que a função  $d$ , dada por (5.2), define uma métrica, utilizaremos o seguinte resultado.

**Lema 4** *Sejam  $a, b, c, y \in \mathbb{R}$ . Então*

$$ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.5)$$

**Demonstração.** Inicialmente, observe que

$$2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Daí, considerando  $\alpha = bx$  e  $\beta = ay$ , obtemos

$$2(bx)(ay) \leq (bx)^2 + (ay)^2 = b^2x^2 + a^2y^2.$$

Com isto,

$$(ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \leq a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Logo,

$$ax + by \leq |ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Donde, o resultado. ■

**Proposição 5.6** A função  $d$ , definida em (5.2), é uma métrica em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

**Demonstração.** Os axiomas  $(M_1)$  e  $(M_3)$  são de verificação imediata. Note que

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} = 0 \iff d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 = 0 \\ &\iff d_1(x_1, y_1) = 0, d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\iff x_1 = y_1, x_2 = y_2 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

Logo,  $d$  satisfaz  $(M_2)$ . Mostremos então que  $d$  satisfaz  $(M_4)$ . Temos

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \\ &\leq [d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2)]^2 \\ &= [d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2] + [d_1(z_1, y_1)^2 + d_2(z_2, y_2)^2] + 2d_1(x_1, z_1)d_1(z_1, y_1) \\ &\quad + 2d_2(x_2, z_2)d_2(z_2, y_2) \\ &\stackrel{(5.5)}{\leq} \left( \sqrt{d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2} \right)^2 + \left( \sqrt{d_1(z_1, y_1)^2 + d_2(z_2, y_2)^2} \right)^2 + \\ &\quad + 2\sqrt{d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2} \sqrt{d_1(z_1, y_1)^2 + d_2(z_2, y_2)^2} \\ &= \left( \sqrt{d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2} + \sqrt{d_1(z_1, y_1)^2 + d_2(z_2, y_2)^2} \right)^2 \\ &= (d(x, z) + d(z, y))^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Portanto,  $d$  é uma métrica em  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . ■

De forma geral, considere  $(\mathcal{X}_1, d_1), (\mathcal{X}_2, d_2), \dots, (\mathcal{X}_n, d_n)$  espaços métricos. O produto cartesiano

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_n$$

torna-se um espaço métrico, dotando-o com uma das métricas

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2}, \\ d'(x, y) &= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \dots + d_n(x_n, y_n), \\ d''(x, y) &= \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\}, \end{aligned}$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . A prova de que as funções  $d, d'$  e  $d''$  satisfazem os axiomas de métrica pode ser vista em [23].

As três métricas acima estão relacionadas<sup>1</sup> por meio da desigualdade

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

---

<sup>1</sup>Veja [6] ou [23].

### 5.1.1 O Espaço Métrico $\mathbb{Q}$

O Conjunto dos Números Racionais é, por definição, o conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}.$$

Mostraremos que a função  $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d(x, y) = |x - y| \quad (5.6)$$

é uma métrica em  $\mathbb{Q}$ . Sejam  $x = \frac{m}{n}$  e  $y = \frac{p}{q}$  elementos de  $\mathbb{Q}$ . Note que

$$d(x, y) = 0 \iff \left| \frac{m}{n} - \frac{p}{q} \right| = 0 \iff \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = 0 \iff \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff x = y.$$

Logo,  $d$  satisfaz  $(M_2)$ . Além disso, para  $z = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  temos que

$$d(x, y) = \left| \frac{m}{n} - \frac{p}{q} \right| = \left| -\left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n}\right) + \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| \leq \left| \frac{r}{s} - \frac{m}{n} \right| + \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| = d(z, x) + d(z, y).$$

Segue pela proposição (5.2) que  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{Q}$ . Assim,  $(\mathbb{Q}, d)$  é um espaço métrico, denominado a *reta racional*. Nos referiremos à métrica dada em (5.6) como a métrica usual de  $\mathbb{Q}$ .

**Exemplo 20** Defina  $\tilde{d} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{d}(x, y) = |x - y|$ . Isto faz de  $(\mathbb{Z}, \tilde{d})$  um espaço métrico. Com efeito,  $\tilde{d}$  é a métrica induzida pela métrica usual de  $\mathbb{Q}$  no conjunto  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Donde,  $(\mathbb{Z}, \tilde{d})$  é um subespaço de  $\mathbb{Q}$ . ▲

**Exemplo 21** A função  $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

é uma métrica em  $\mathbb{Q}$ . De fato, os axiomas  $(M_1)$ ,  $(M_2)$  e  $(M_3)$  são de verificação imediata. Mostremos que  $d$  satisfaz  $(M_4)$ . Para tanto, note que

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= |x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq \sqrt{|x - z|}^2 + 2\sqrt{|x - z|}\sqrt{|z - y|} + \sqrt{|z - y|}^2 \\ &= \left[ \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} \right]^2 \\ &= [d(x, z) + d(z, y)]^2. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Portanto,  $d$  define uma métrica em  $\mathbb{Q}$ .

Por outro lado, a função dada por  $f(x, y) = (x - y)^2$  não define uma métrica em  $\mathbb{Q}$ . Com efeito,

$$f(1, 0) + f(0, -1) = 2 < 4 = f(1, -1).$$

Logo,  $f$  não satisfaz  $(M_4)$ . ▲

O exemplo anterior pode ser visto como um caso particular do seguinte resultado.

**Proposição 5.7** *Sejam  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  uma função crescente tal que*

(i)  $\varphi(0) = 0$ ;

(ii)  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in [0, +\infty)$ .

*Se  $d$  é uma métrica em  $\mathcal{X}$ , então  $d_1 = \varphi \circ d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica em  $\mathcal{X}$ .*

**Demonstração.** Note que

$$d_1(x, y) = \varphi(d(x, y)) \geq 0,$$

pois  $d(x, y) \geq 0$  e  $\varphi$  é crescente. Logo,  $d_1$  satisfaz  $(M_1)$ . Além disso,

$$d_1(x, y) = 0 \iff \varphi(d(x, y)) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

isto é,  $d_1$  satisfaz  $(M_2)$ . Sendo  $d$  simétrica, segue que

$$d_1(x, y) = \varphi(d(x, y)) = \varphi(d(y, x)) = d_1(y, x).$$

Donde,  $d_1$  satisfaz  $(M_3)$ . Por fim, usando a desigualdade triangular de  $d$  e o fato de  $\varphi$  ser crescente, obtemos

$$d_1(x, y) = \varphi(d(x, y)) \leq \varphi(d(x, z) + d(z, y)) \leq \varphi(d(x, z)) + \varphi(d(z, y)) = d_1(x, z) + d_1(z, y),$$

para quaisquer que sejam  $x, y, z \in \mathcal{X}$ . Assim,  $d_1$  satisfaz  $(M_4)$  e, portanto, é uma métrica em  $\mathcal{X}$ . ■

**Corolário 5.8** *Seja  $d$  uma métrica em  $\mathcal{X}$ . As funções  $d_1, d_2, d_3 : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que*

(i)  $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ ;

(ii)  $d_2(x, y) = \ln(d(x, y) + 1)$ ;

(iii)  $d_3(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$

*são métricas em  $\mathcal{X}$ .*

**Demonstração.** Com efeito, basta considerar

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

tais que  $\varphi_1(t) = \sqrt{t}$ ,  $\varphi_2(t) = \ln(t + 1)$  e  $\varphi_3(t) = \frac{t}{t + 1}$  e aplicar a Proposição 5.7. ■

Do Corolário 5.8, segue que

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1} \quad \text{e} \quad d_1(x, y) = \ln(|x - y| + 1)$$

são métricas em  $\mathbb{Q}$ .

**Exemplo 22** Seja  $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ . A função  $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  são pontos quaisquer de  $\mathcal{A}$ , constitui uma métrica em  $\mathcal{A}$ . Com efeito, sendo

$$f_1(x_1, y_1) = |x_1 - y_1| \text{ e } f_2(x_2, y_2) = |x_2 - y_2|$$

ambas as métricas usuais de  $\mathbb{Q}$ , segue que

$$f(x, y) = f_1(x_1, y_1) + f_2(x_2, y_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

é uma métrica em  $\mathcal{A}$ , isto é, no produto cartesiano  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ . Observe ainda que as funções  $g, h : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$g(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \text{ e } h(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

também são métricas em  $\mathcal{A}$ . ▲

## 5.2 Algumas Noções Topológicas

### 5.2.1 Bolas e Esferas

Bolas e esferas constituem importantes subconjuntos de espaços métricos. Em particular, o conceito de bola aberta será de grande utilidade, como veremos mais adiante.

Para o que segue, consideremos  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$  um espaço métrico.

**Definição 5.2 (Bola e esfera)** *Sejam  $a \in \mathcal{X}$  e  $\varepsilon > 0$  um número real. Definimos:*

(i) a **bola aberta** de centro  $a$  e raio  $\varepsilon$  é o conjunto  $B(a; \varepsilon)$  como sendo o conjunto

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in \mathcal{X}; d(x, a) < \varepsilon\};$$

(ii) a **bola fechada** de centro  $a$  e raio  $\varepsilon$  é o conjunto  $B[a; \varepsilon]$  como sendo o conjunto

$$B[a; \varepsilon] = \{x \in \mathcal{X}; d(x, a) \leq \varepsilon\};$$

(iii) a **esfera** de centro  $a$  e raio  $\varepsilon$  é o conjunto  $S(a; \varepsilon)$  como sendo o conjunto

$$S(a; \varepsilon) = \{x \in \mathcal{X}; d(x, a) = \varepsilon\}.$$

Das definições acima, temos

$$B[a; \varepsilon] = B(a; \varepsilon) \cup S(a; \varepsilon)$$

ou ainda,

$$S(a; \varepsilon) = B[a; \varepsilon] - B(a; \varepsilon).$$

**Exemplo 23** Seja  $\mathcal{X}$  um espaço métrico com a métrica discreta. Neste caso, se  $\varepsilon > 1$ , então

$$d(a; x) \leq 1 < \varepsilon, \forall x, a \in \mathcal{X}.$$

Logo,  $B(a; \varepsilon) = B[a; \varepsilon] = \mathcal{X}$  e  $S(a; \varepsilon) = \emptyset$ . Se  $\varepsilon < 1$ , temos

$$d(x, a) \leq \varepsilon < 1 \implies d(x, a) = 0 \implies x = a.$$

Daí,  $B(a; \varepsilon) = B[a; \varepsilon] = \{a\}$  e  $S = \emptyset$ , uma vez que  $0 < \varepsilon < 1$ . Por fim, se  $\varepsilon = 1$ , então

$$d(a, x) \leq 1 = \varepsilon, \forall x, a \in \mathcal{X}.$$

Além disso,

$$d(a, x) = 1 \iff x \neq a.$$

Portanto,  $B(a; \varepsilon) = \{a\}$ ,  $B[a; \varepsilon] = \mathcal{X}$  e  $S(a; \varepsilon) = \mathcal{X} - \{a\}$ . ▲

Seja  $\mathcal{X}$  um espaço métrico. Um ponto  $a \in \mathcal{X}$  chama-se um *ponto isolado* de  $\mathcal{X}$ , quando

$$B(a; \varepsilon) = \{a\},$$

para algum  $\varepsilon > 0$ . Isto significa que  $a$  é uma bola aberta em  $\mathcal{X}$ . Quando todos os pontos de  $\mathcal{X}$  são isolados, o espaço  $\mathcal{X}$  é dito *discreto*.

**Exemplo 24** Consideremos o espaço métrico  $\mathbb{Z}$  com a métrica induzida pela métrica usual de  $\mathbb{Q}$ , isto é,  $d(x, y) = |x - y|$ . Afirmamos que  $\mathbb{Z}$  é discreto. Com efeito, dado  $a \in \mathbb{Z}$ , considere  $r = 1$ . Temos

$$d(a, x) < 1 \iff |x - a| < 1 \iff x = a.$$

Donde,  $B(a; \varepsilon) = \{a\}$ , isto é,  $a$  é ponto isolado de  $\mathbb{Z}$ .

Agora, considere o subespaço de  $\mathbb{Q}$

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$

com a métrica induzida. Sejam  $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{n+1} \in \mathcal{F}$ . Note que

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Logo, considerando  $0 < \varepsilon < \frac{1}{n(n+1)}$ , obtemos que

$$d\left(x, \frac{1}{n}\right) < r \implies d\left(x, \frac{1}{n}\right) = 0 \implies x = \frac{1}{n}.$$

Assim,  $B\left(\frac{1}{n}; \varepsilon\right) = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ , isto é,  $\frac{1}{n}$  é ponto isolado de  $\mathcal{F}$ .

Portanto,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathcal{F}$  são espaços métricos discretos. ▲

## 5.2.2 Conjuntos Limitados

Um subconjunto  $\mathcal{X}$  de um espaço métrico  $(\mathcal{Y}, d)$  é dito *limitado* em  $\mathcal{Y}$ , quando existe  $\alpha > 0$  tal que

$$d(x, y) \leq \alpha,$$

para quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{X}$ .

Note que todo conjunto finito é limitado. Com efeito, se  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , então o conjunto  $M = \{d(x, y); x, y \in \mathcal{X}\}$  também é finito, de sorte que  $M$  possui um elemento máximo  $d(x_0, y_0)$ . Deste modo, tomando  $\alpha = d(x_0, y_0) + 1 > 0$ , obtemos  $d(x, y) < \alpha$ , para  $x$  e  $y$  arbitrários em  $\mathcal{X}$ . Agora, considere  $\mathcal{X} = \emptyset$ . Se  $\mathcal{X}$  não fosse limitado, existiriam  $x, y \in \emptyset$  tais que  $d(x, y) > \alpha$ , para todo  $\alpha > 0$ , um absurdo. Portanto, todo conjunto finito é limitado.

**Proposição 5.9** *Um subconjunto  $\mathcal{X}$  de um espaço métrico  $(\mathcal{Y}, d)$  é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola aberta de  $\mathcal{Y}$ .*

**Demonstração.** Suponha  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  limitado. Se  $\mathcal{X} = \emptyset$ , então  $\mathcal{X}$  está contido em qualquer bola aberta de  $\mathcal{Y}$ . Seja  $\mathcal{X} \neq \emptyset$ . Neste caso, fixado  $a \in \mathcal{X}$ , existe  $\alpha > 0$  tal que

$$d(x, a) \leq \alpha, \forall x \in \mathcal{X} \implies x \in B[a, \alpha].$$

Daí, como  $B[a; \alpha] \subset B(a; 2\alpha)$ , segue que  $\mathcal{X} \subset B(a; 2\alpha)$ . Reciprocamente, se  $\mathcal{X}$  está contido em alguma bola aberta de  $\mathcal{Y}$ , então existem  $b \in \mathcal{Y}$  e  $\beta > 0$  tais que  $\mathcal{X} \subset B(b; \beta/2)$ . Logo, dados  $x, y \in \mathcal{X}$  temos  $x, y \in B(b; \beta/2)$  e daí

$$d(x, y) \leq d(x, b) + d(y, b) < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta.$$

■

**Exemplo 25** *Para cada  $p \in \mathbb{N}$  fixado, o subconjunto*

$$\mathcal{X}_p = \left\{ \frac{p}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$$

*do espaço métrico  $\mathbb{Q}$  é limitado. De fato, note que*

$$1 \leq n \leq p \implies \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \implies 1 \leq \frac{p}{n} \leq p.$$

*Por outro lado,*

$$n > p \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{p} \implies \frac{p}{n} < 1.$$

*Logo,*

$$0 < \frac{p}{n} \leq p, \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{p}{n} \in B(0; 2p), \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Assim,  $\mathcal{X}_p \subset B(0; 2p)$  e, portanto,  $\mathcal{X}_p$  é limitado.*

▲

**Exemplo 26** Se  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  são dois subconjuntos limitados de um espaço métrico  $\mathcal{Y}$ , então  $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$  é limitado. De fato, se  $\mathcal{X}_1 = \emptyset$  ou  $\mathcal{X}_2 = \emptyset$  o resultado é imediato. Consideremos  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  não vazios. Fixados os pontos  $a \in \mathcal{X}_1$  e  $b \in \mathcal{X}_2$  existe  $\alpha > 0$  tal que  $d(x, a) \leq \alpha$  e  $d(y, b) \leq \alpha$ , quaisquer que sejam  $x \in \mathcal{X}_1$  e  $y \in \mathcal{X}_2$ . Logo, tomando  $\beta = 2\alpha + d(a, b)$  temos

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(y, b) \leq 2\alpha + d(a, b) = \beta,$$

com  $x \in \mathcal{X}_1$  e  $y \in \mathcal{X}_2$  arbitrários. Evidentemente, a desigualdade acima é satisfeita se  $x, y \in \mathcal{X}_1$  ou  $x, y \in \mathcal{X}_2$ . Assim,  $d(x, y) \leq \beta$  quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$  e, portanto,  $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$  é limitado. ▲

### 5.2.3 Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados

Seja  $(\mathcal{Y}, d)$  um espaço métrico e  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ . Um ponto  $a \in \mathcal{X}$  chama-se um *ponto interior* a  $\mathcal{X}$  quando existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$d(x, a) < \varepsilon \implies x \in \mathcal{X},$$

ou seja, quando  $B(a; \varepsilon) \subset \mathcal{X}$ , para algum  $\varepsilon > 0$ .

O conjunto dos pontos interiores a  $\mathcal{X}$  é denominado o *interior* de  $\mathcal{X}$  em  $\mathcal{Y}$ . Representamos o interior de  $\mathcal{X}$  por  $Int \mathcal{X}$ .

Um conjunto  $\mathcal{V}$  é dito uma *vizinhaça* do ponto  $a$ , quando  $a \in Int \mathcal{V}$ .

A fronteira de  $\mathcal{X}$  em  $\mathcal{Y}$ , denotada  $\partial \mathcal{X}$ , é o conjunto formado pelos ponto  $b \in \mathcal{Y}$  tais que

$$B(b; \varepsilon) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset \text{ e } B(b; \varepsilon) \cap (\mathcal{Y} - \mathcal{X}) \neq \emptyset,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Isto significa que toda bola aberta de centro em  $b$  contém pontos de  $\mathcal{X}$  e de  $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$ .

Observe que todo subconjunto  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  determina a decomposição do espaço como reunião de três subconjuntos dois a dois disjuntos, como indica a Figura 5.1. A saber, a decomposição

$$\mathcal{Y} = (Int \mathcal{X}) \cup (\partial \mathcal{X}) \cup (\mathcal{Y} - \mathcal{X}).$$

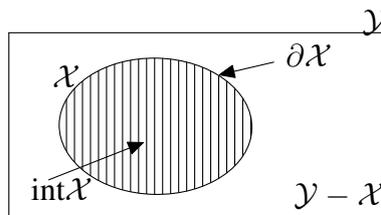


Figura 5.1: Decomposição de um espaço métrico.

**Definição 5.3 (Conjunto aberto)** Seja  $(\mathcal{Y}, d)$  um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  é aberto em  $\mathcal{Y}$ , quando

$$\mathcal{X} = \text{Int } \mathcal{X},$$

ou seja, quando todos os seus pontos são interiores.

**Definição 5.4 (Conjunto fechado)** Um subconjunto  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  diz-se fechado no espaço métrico  $(\mathcal{Y}, d)$ , quando o seu complementar  $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$  é aberto.

**Exemplo 27** Toda bola aberta  $B(a; \varepsilon)$  num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  é um conjunto aberto. De fato, seja  $x \in B(a; \varepsilon)$ . Considere o número

$$\delta = \varepsilon - d(x, a) > 0.$$

Seja  $y \in B(x, \delta)$ . Logo,  $d(x, y) < \delta$  e, com isso,

$$d(y, a) \leq d(x, a) + d(x, y) < d(x, a) + \delta = \varepsilon.$$

Donde,  $y \in B(a; \varepsilon)$ . Dessa forma, vemos que  $B(x, \delta) \subset B(a, \varepsilon)$ , para cada  $x \in B(a; \varepsilon)$ . Portanto,  $B(a; \varepsilon) = \text{Int } B(a; \varepsilon)$ , isto é, o conjunto  $B(a; \varepsilon)$  é aberto em  $\mathcal{X}$ . ▲

**Exemplo 28** Toda bola fechada  $B[a; \varepsilon]$  num espaço métrico  $\mathcal{X}$  é um conjunto fechado. De fato, seja

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} - B[a; \varepsilon] = \{x \in \mathcal{X}; d(x, a) > \varepsilon\}.$$

Considere

$$\delta = d(x, a) - \varepsilon.$$

Se  $y \in B(x, \delta)$ , então  $d(x, y) < \delta$  e, com isso,

$$d(y, a) + d(x, y) \geq d(x, a) \implies d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) > d(x, a) - \delta = \varepsilon.$$

Donde,  $y \in \mathcal{Y}$ . Logo,  $B(x; \delta) \subset \mathcal{Y}$  e daí,  $\mathcal{Y} = \text{Int } \mathcal{Y}$ . Portanto,  $\mathcal{Y}$  é aberto e, consequentemente,  $B[a; \varepsilon]$  é um conjunto fechado. ▲

**Definição 5.5 (Ponto aderente)** Seja  $\mathcal{Y}$  um espaço métrico. Um ponto  $a$  é dito aderente a um subconjunto  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ , quando

$$B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0.$$

O conjunto de todos os pontos aderentes a  $\mathcal{X}$  é denominado *fecho* ou *aderência* de  $\mathcal{X}$  e é representado por  $\overline{\mathcal{X}}$ . Note que  $\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}}$ , isto é, todo ponto de  $\mathcal{X}$  é aderente a  $\mathcal{X}$ . Com efeito, sendo  $a \in \mathcal{X}$  e  $a \in B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , temos  $a \in B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X}$ . Por outro lado, nem todo ponto aderente a  $\mathcal{X}$  é um ponto de  $\mathcal{X}$ . Discutiremos este caso mais tarde.

**Proposição 5.10** *Seja  $\mathcal{Y}$  um espaço métrico. Para todo  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  tem-se  $\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \overline{\mathcal{X}}$ .*

**Demonstração.** Como  $\overline{\mathcal{X}} \subset \overline{\overline{\mathcal{X}}}$ , devemos mostrar que  $\overline{\overline{\mathcal{X}}} \subset \overline{\mathcal{X}}$ . Com efeito, se  $a \in \overline{\overline{\mathcal{X}}}$ , então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in B(a; \varepsilon) \cap \overline{\mathcal{X}}.$$

Seja  $\delta = \varepsilon - d(a, b) > 0$ . Como  $b \in \overline{\mathcal{X}}$ , existe  $c \in B(b; \delta) \cap \mathcal{X}$  de sorte que

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < d(a, b) + \delta = \varepsilon \implies c \in B(a; \varepsilon),$$

ou seja,  $B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ . Logo,  $a \in \overline{\mathcal{X}}$ , isto é,  $\overline{\overline{\mathcal{X}}} \subset \overline{\mathcal{X}}$ . Portanto,  $\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \overline{\mathcal{X}}$ . ■

O próximo resultado apresenta uma relação entre os conceitos de conjunto fechado e aderência.

**Proposição 5.11** *Sejam  $\mathcal{Y}$  um espaço métrico e  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ . Então,  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}$  se, e somente se,  $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$  é aberto. Em particular,  $\overline{\mathcal{X}}$  é um conjunto fechado em  $\mathcal{Y}$ .*

**Demonstração.** Seja  $a \in \mathcal{Y} - \mathcal{X}$ . Por hipótese,  $a \notin \overline{\mathcal{X}}$ . Logo, como  $a$  não é aderente a  $\mathcal{X}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X} = \emptyset \implies B(a; \varepsilon) \subset \mathcal{Y} - \mathcal{X}.$$

Donde,  $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$  é aberto. Reciprocamente, se  $a \in \overline{\mathcal{X}}$ , então

$$\forall \delta > 0, B(a; \delta) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset \implies B(a; \delta) \not\subset \mathcal{Y} - \mathcal{X}.$$

Daí, como  $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$  é aberto, segue que  $a \notin \mathcal{Y} - \mathcal{X}$ . Logo,  $a \in \mathcal{X}$  e, conseqüentemente,  $\overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ . Disto, segue que  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}$ . Em particular, como  $\overline{\mathcal{X}} = \overline{\overline{\mathcal{X}}}$ , então  $\mathcal{Y} - \overline{\mathcal{X}}$  é aberto e, portanto,  $\overline{\mathcal{X}}$  é fechado em  $\mathcal{Y}$ . ■

**Definição 5.6 (Conjunto denso)** *Um subconjunto  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  chama-se denso no espaço métrico  $\mathcal{Y}$  quando  $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{Y}$ . Em outras palavras, dizer que  $\mathcal{X}$  é denso em  $\mathcal{Y}$  significa que toda bola aberta em  $\mathcal{Y}$  contém algum ponto de  $\mathcal{X}$ .*

**Exemplo 29** *O conjunto  $\mathbb{Z}$  é fechado no espaço métrico  $\mathbb{Q}$ . De fato, se  $a \in \overline{\mathbb{Z}}$ , em particular, devemos ter  $B(a; 1) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ . Neste caso,*

$$d(x, a) < 1 \implies d(x, a) = 0 \implies x = a \in \mathbb{Z}.$$

Logo,  $\overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$  e, conseqüentemente,  $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$ . Portanto,  $\mathbb{Z}$  é fechado em  $\mathbb{Q}$ . ▲

**Definição 5.7 (Ponto de acumulação)** *Sejam  $\mathcal{Y}$  um espaço métrico e  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ . Um ponto  $a \in \mathcal{Y}$  chama-se um ponto de acumulação de  $\mathcal{X}$  quando*

$$B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X} - \{a\} \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0.$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de  $\mathcal{X}$  é representado por  $\mathcal{X}'$ . Observe que todo ponto de acumulação de  $\mathcal{X}$  é um ponto de  $\overline{\mathcal{X}}$ , mas a recíproca não é verdadeira. Basta notar que  $\mathbb{Z}' = \emptyset$ . Com efeito, dado  $a \in \mathbb{Z}$ , temos  $B(a, 1) \cap \mathbb{Z} - \{a\} = \emptyset$ , mas  $a \in \overline{\mathbb{Z}}$ .

## 5.3 Sequências

Nesta seção faremos um breve estudo sobre sequências em espaços métricos e apresentaremos algumas de suas principais propriedades, principalmente àquelas relacionadas à convergência. Temos interesse especial pelas chamadas sequências de Cauchy, que desempenham papel fundamental no estudo de espaços métricos completos.

### 5.3.1 Sequências

**Definição 5.8 (Sequência)** *Uma sequência num conjunto  $\mathcal{X}$  é uma aplicação  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{X}$ , que associa a cada  $n \in \mathbb{N}$  o ponto  $x_n \in \mathcal{X}$ , chamado o  $n$ -ésimo termo da sequência.*

Usamos as notações  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_n)$ , ou ainda,  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  para representar a sequência  $x$ . Já o conjunto de seus termos é representado por  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ,  $x(\mathbb{N})$ , ou ainda,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ .

Sejam  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots\} \subset \mathbb{N}$ , um subconjunto infinito, e  $(x_n)$  uma sequência. A restrição  $x|_{\mathbb{N}'}$  chama-se uma subsequência de  $(x_n)$ . Representamos por  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ , ou ainda,  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ , uma subsequência de  $(x_n)$ .

**Exemplo 30** *Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $\mathbb{Z}$  tal que  $x_n = (-1)^n$ . Neste caso, temos*

$$(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots) \text{ e } x(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}.$$

*Considere  $\mathbb{N}' = \{2, 2^2, \dots, 2^k, \dots\} \subset \mathbb{N}$  e note que*

$$n \in \mathbb{N}' \implies x_n = (-1)^{2^k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Assim,  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$  é uma subsequência de  $(x_n)$ .* ▲

**Definição 5.9 (Sequência limitada)** *Uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  é dita limitada quando existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha,$$

*quaisquer que sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ .*

De acordo com a Definição 5.9,  $(x_n)$  é limitada quando  $x(\mathbb{N})$  é limitado, isto é,  $x(\mathbb{N})$  está contido numa bola aberta em  $\mathcal{X}$ . Segue-se pelo Exemplo 25 que a sequência  $(x_n)$  no espaço métrico  $\mathbb{Q}$ , dada por  $x_n = \frac{1}{n}$ , é limitada. Já a sequência  $(y_n)$  tal que  $y_n = n$  não é limitada. Com efeito,  $y(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$  é ilimitado no espaço métrico  $\mathbb{Q}$ .

**Definição 5.10 (Limite de seqüência)** *Seja  $(x_n)$  uma seqüência em  $\mathcal{X}$ . Um ponto  $a \in \mathcal{X}$  é dito o limite de  $(x_n)$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, existe  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que*

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) < \varepsilon.$$

*Neste caso, dizemos que  $(x_n)$  converge para  $a$  e escrevemos  $\lim x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , ou ainda,  $x_n \rightarrow a$ .*

Da definição acima, segue que se  $x_n \rightarrow a \in \mathcal{X}$ , então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in B(a; \varepsilon)$ , para todo  $n > n_0$ . Logo,

$$n > n_0 \implies x_n \in B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ou seja,  $B(a; \varepsilon) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ . Portanto,  $a \in \overline{\mathcal{X}}$ . Em outras palavras, para que  $a \in \mathcal{X}$  seja limite de uma seqüência de pontos de  $\mathcal{X}$  é necessário que  $a$  seja um ponto aderente a  $\mathcal{X}$ .

Dizemos que uma seqüência  $(x_n)$  num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  é *convergente* quando existe  $\lim x_n = a \in \mathcal{X}$ . Caso contrário,  $(x_n)$  é dita *divergente*.

**Proposição 5.12** *Seja  $(\mathcal{X}, d)$  um espaço métrico. Se  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são seqüências convergentes em  $\mathcal{X}$  tais que  $x_n \rightarrow a$  e  $y_n \rightarrow b$ , então*

$$\lim d(x_n, y_n) = d(a, b). \quad (5.7)$$

**Demonstração.** Note inicialmente que  $(d(x_n, y_n))$  é uma seqüência de números reais. Como  $x_n \rightarrow a$  e  $y_n \rightarrow b$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$\begin{aligned} n > n_1 &\implies d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}; \\ n > n_2 &\implies d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, considerando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  e usando a Proposição 5.3 obtemos

$$n > n_0 \implies |d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim d(x_n, y_n) = d(a, b)$ . ■

**Proposição 5.13** *Seja  $(x_n)$  uma seqüência num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  tal que  $x_n \rightarrow a$ . Então  $(x_n)$  é limitada.*

**Demonstração.** De fato, dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies x_n \in B(a; 1)$$

Com isso, temos que

$$x(\mathbb{N}) \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1).$$

Daí, como  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$  e  $B(a; 1)$  são ambos limitados, segue que  $x(\mathbb{N})$  é limitado, pois é subconjunto de um conjunto limitado. Portanto,  $(x_n)$  é limitada. ■

Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos, conforme a proposição seguinte.

**Proposição 5.14 (Unicidade do limite)** *O limite de uma sequência, quando existe, é único.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$ . Suponha que  $x_n \rightarrow a$  e  $x_n \rightarrow b$ , com  $a \neq b$ . Dado  $0 < \varepsilon < \frac{d(a, b)}{2}$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que

$$n > n_1 \implies d(x_n, a) < \varepsilon;$$

$$n > n_2 \implies d(x_n, b) < \varepsilon.$$

Logo, considerando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  obtemos que

$$n > n_0 \implies d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < 2\varepsilon < d(a, b),$$

um absurdo. Portanto,  $a = b$ . ■

Dada uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $\mathcal{X}$ , uma condição suficiente para que ela seja divergente é a existência de duas subsequências convergindo para limites distintos. Por outro lado, se  $(x_n)$  converge para  $a$ , então qualquer subsequência de  $(x_n)$  também converge para  $a$ . Isso é garantido pelo próximo resultado.

**Proposição 5.15** *Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$ , com  $x_n \rightarrow a$ . Então, toda subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  converge para  $a$ .*

**Demonstração.** Seja  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ . Como  $\lim x_n = a$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Sendo  $\mathbb{N}'$  infinito, existe  $n_{k_0} \in \mathbb{N}'$  tal que  $n_{k_0} > n_0$ . Logo,

$$k > k_0 \implies n_k > n_{k_0} \implies d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Donde,  $\lim x_{n_k} = a$ . ■

**Exemplo 31** *Considere, no espaço métrico  $\mathbb{Q}$ , a sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n = \cos(n\pi)$ . Note que  $x_{2n} = \cos(2n\pi) \rightarrow 1$  e  $x_{2n+1} = \cos((2n+1)\pi) \rightarrow -1$  determinam duas subsequências de  $(x_n)$ , que convergem para limites distintos. Pela Proposição 5.15, segue que  $(x_n)$  é divergente. ▲*

Usando seqüências podemos caracterizar o fecho de um conjunto, bem como o conceito de conjunto fechado.

**Teorema 5.16** *Seja  $\mathcal{X}$  um subconjunto de um espaço métrico  $(\mathcal{Y}, d)$ . Então,*

(i)  *$a \in \overline{\mathcal{X}}$  se, e somente se, existe uma seqüência  $x_n \in \mathcal{X}$  tal que  $x_n \rightarrow a$ .*

(ii)  *$\mathcal{X}$  é fechado se, e somente se,*

$$x_n \in \mathcal{X}, x_n \rightarrow a \implies a \in \mathcal{X}.$$

**Demonstração.** (i) Seja  $a \in \overline{\mathcal{X}}$ . Se  $a \in \mathcal{X}$ , basta considerar a seqüência constante  $(a, a, \dots)$ . Suponha  $a \notin \mathcal{X}$ . Neste caso,  $a \in \mathcal{X}'$ . Consequentemente, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos escolher um ponto

$$x_n \in B\left(a; \frac{1}{n}\right),$$

e, dessa forma, obter uma seqüência  $(x_n)$  de pontos de  $\mathcal{X}$  tal que

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \lim x_n = a.$$

Reciprocamente, para se ter  $\lim x_n = a$ , é necessário que  $a \in \overline{\mathcal{X}}$ .

(ii) Como  $\mathcal{X}$  é fechado se, e somente se,  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}$ , o resultado segue imediatamente do item (i). ■

### 5.3.2 Sequências de Cauchy

**Definição 5.11 (Seqüência de Cauchy)** *Uma seqüência  $(x_n)$  num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  é dita uma seqüência de Cauchy (ou seqüência fundamental) se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Observe que numa seqüência de Cauchy os termos aproximam-se uns dos outros, à medida que  $n$  aumenta. Em particular, se os termos de uma seqüência aproximam-se cada vez mais de um ponto fixo, eles tornam-se próximos uns dos outros, para  $n$  suficientemente grande. Este fato é estabelecido pela proposição a seguir.

**Proposição 5.17** *Seja  $(x_n)$  uma seqüência num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$ . Se  $(x_n)$  é convergente, então  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy.*

**Demonstração.** Seja  $\lim x_n = a$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} n > n_0 &\implies d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}; \\ m > n_0 &\implies d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donde,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. ■

A recíproca da Proposição 5.17 não é verdadeira, ou seja, nem toda sequência de Cauchy num espaço métrico  $\mathcal{X}$  é convergente. Os espaços em que qualquer sequência de Cauchy converge são ditos completos e serão discutidos mais tarde.

**Exemplo 32** Seja  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{Q}; 0 < x \leq 1\}$  o subespaço de  $\mathbb{Q}$ , com a métrica induzida pela métrica usual. Considere no espaço métrico  $\mathbb{Q}$  a sequência definida por

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Temos que  $\lim x_n = 0 \notin X$ . Logo,  $(x_n)$  é convergente no espaço métrico  $\mathbb{Q}$  e pela Proposição 5.17 segue que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{Q}$ . Daí, como  $x_n \in \mathcal{X}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{X}$ . Portanto, no espaço métrico  $\mathcal{X}$ , a sequência  $(x_n)$  é de Cauchy, mas não converge. ▲

**Proposição 5.18** Toda sequência de Cauchy  $(x_n)$  num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  é limitada.

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) < 1.$$

Logo,  $X_1 = \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$  é limitado, de sorte que  $X_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$  também é limitado. Daí, como

$$x(\mathbb{N}) = X_1 \cup X_2,$$

segue que  $x(\mathbb{N})$  é limitado. Portanto,  $(x_n)$  é limitada. ■

Pela Proposição 5.18, segue que toda sequência ilimitada, de um espaço métrico, não pode ser de Cauchy. Em particular, a sequência definida por  $x_n = n$  do espaço métrico  $\mathbb{Q}$  não é de Cauchy, pois  $(x_n)$  não é limitada.

**Proposição 5.19** Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy num espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$  e  $(x_{n_k})$  uma subsequência de  $(x_n)$  que converge para um ponto  $a \in \mathcal{X}$ . Então  $(x_n)$  é convergente e  $\lim x_n = a$ .

**Demonstração.** Como  $\lim x_{n_k} = a$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_k > k_1 \implies d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, sendo  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy, existe  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > k_2 \implies d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, considerando  $n_0 = \max\{k_1, k_2\}$  temos que

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim x_n = a$ . ■

A propriedade apresentada na Proposição 5.19 não é válida para uma sequência qualquer. De fato, a sequência do espaço métrico  $\mathbb{Q}$  dada por  $x_n = (-1)^n$ , que é divergente, possui uma subsequência  $(x_{2n})$  que converge para 1.

## 5.4 Espaços Métricos Completos

Os espaços métricos completos são de grande importância na Matemática. Esses espaços abrangem certos teoremas que permitem a resolução de problemas sobre determinadas condições.

**Definição 5.12 (Espaço métrico completo)** *Um espaço métrico  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$  chama-se completo quando toda sequência de Cauchy em  $\mathcal{X}$  é convergente.*

Conforme a Definição 5.12, para sabermos se um dado espaço  $(\mathcal{X}, d)$  é completo, devemos mostrar que existe  $\lim x_n \in \mathcal{X}$ , qualquer que seja a sequência de Cauchy,  $(x_n)$ , em  $\mathcal{X}$ . Os dois próximos exemplos a seguir ilustram esse processo.

**Exemplo 33** *O subespaço  $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q}$  com a métrica induzida pela usual é um espaço métrico completo. De fato, seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{Z}^+$ . Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) < 1 \implies d(x_m, x_n) = 0 \implies x_m = x_n.$$

*Ora, isto significa que a partir de um certo termo, a saber  $x_{n_0+1}$ , a sequência é constante e, portanto,  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{Z}^+$ .* ▲

**Exemplo 34** *Defina  $\tilde{d} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\tilde{d}(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

*e note que  $\tilde{d}$  é uma métrica em  $\mathbb{Z}^+$ . De fato, pela definição de  $\tilde{d}$  o axioma  $(M_1)$  é satisfeito. Além disso,*

$$\tilde{d}(m, n) = 0 \iff \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = 0 \iff \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \iff m = n,$$

ou seja,  $\tilde{d}$  satisfaz  $(M_2)$ . Observe ainda que  $\tilde{d}$  satisfaz  $(M_3)$ , pois

$$\tilde{d}(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \tilde{d}(n, m).$$

Por fim, se  $p \in \mathbb{Z}^+$ , então

$$\tilde{d}(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \left| \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) + \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right| + \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right| = \tilde{d}(m, p) + \tilde{d}(p, n).$$

Logo,  $\tilde{d}$  satisfaz  $(M_4)$ . Isto mostra que  $\tilde{d}$  define uma métrica em  $\mathbb{Z}^+$ .

Mostremos que o espaço  $(\mathbb{Z}^+, \tilde{d})$  não é completo. Seja  $(x_n)$  uma seqüência em  $\mathbb{Z}^+$ , dada por  $x_n = n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Com isto,

$$m, n > n_0 \implies \tilde{d}(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim,  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy no espaço métrico  $\mathbb{Z}^+$ . Afirmamos que  $(x_n)$  é divergente. Com efeito, se fosse  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{Z}^+$ , então, para  $0 < \varepsilon < \frac{1}{a(a+1)}$ , existiria  $n_0 \in \mathbb{N}$ , de modo que  $x_n \in B(a; \varepsilon)$ , para todo  $n > n_0$ . No entanto,

$$\tilde{d}(x_n, a) < \varepsilon < \frac{1}{a(a+1)} \implies \tilde{d}(x_n, a) = 0 \implies x_n = a, \forall n > n_0,$$

uma contradição, pois  $(x_n)$  é crescente. Portanto,  $(x_n)$  é divergente e, conseqüentemente,  $\mathbb{Z}^+$  não é completo. ▲

**Exemplo 35** A função  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d(x, y) = |x - y|$$

é uma métrica em  $\mathbb{R}$ . Os axiomas de métrica seguem imediatamente das propriedades de valor absoluto de números reais. Assim, o par  $(\mathbb{R}, d)$  é um espaço métrico, o qual é denominado a reta real.

A reta real é um espaço métrico completo, ou seja, toda seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  converge para algum ponto de  $\mathbb{R}$ . A demonstração desse resultado pode ser vista em [6]. Por outro lado, a reta racional  $\mathbb{Q}$  não é um espaço métrico completo (veja [6] ou [5]), isto é, existem seqüências de Cauchy em  $\mathbb{Q}$  que não convergem para um ponto de  $\mathbb{Q}$ . ▲

A noção de completude de um espaço métrico  $\mathcal{X}$  depende da métrica utilizada. Assim,  $(\mathcal{X}, d)$  pode ser completo e  $(\mathcal{X}, \tilde{d})$ , onde  $d \neq \tilde{d}$ , pode não ser completo.

**Teorema 5.20 (Subespaço completo)** *Seja  $(\mathcal{Y}, d)$  um espaço métrico completo. Um subespaço  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  é completo se, e somente se,  $\mathcal{X}$  é fechado.*

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{X}$  completo e  $a \in \overline{\mathcal{X}}$ . Logo, existe uma sequência  $(x_n)$  em  $\mathcal{X}$  tal que  $\lim x_n = a$ . Como  $(x_n)$  é convergente em  $\mathcal{Y}$ , segue que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{X}$ . Além disso, como  $\mathcal{X}$  é completo, existe  $b \in \mathcal{X}$  tal que  $\lim x_n = b$ . Daí, pela unicidade do limite, segue que  $a = b \in \mathcal{X}$ , isto é,  $\overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ . Portanto,  $\mathcal{X}$  é fechado. Reciprocamente, seja  $\mathcal{X}$  fechado, isto é,  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}$ . Dada uma sequência de Cauchy  $(y_n)$  em  $\mathcal{X}$ , existe  $\lim y_n = c \in \mathcal{Y}$ , pois  $\mathcal{Y}$  é completo. Logo,  $c \in \overline{\mathcal{X}}$  e, conseqüentemente,  $c \in \mathcal{X}$ . Portanto,  $\mathcal{X}$  é completo. ■

**Corolário 5.21** *Se  $(\mathcal{Y}, d)$  é um espaço métrico completo e  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ , então o subespaço  $(\overline{\mathcal{X}}, \tilde{d})$  de  $\mathcal{Y}$ , onde  $\tilde{d}$  é a métrica induzida por  $d$ , é completo.*

**Demonstração.** Como  $\overline{\mathcal{X}}$  é fechado, o resultado segue do teorema anterior. ■

Uma importante aplicação do Teorema 5.20 será vista na demonstração do Teorema do Completamento, que constitui o resultado mais importante do presente capítulo.

### 5.4.1 O Espaço Métrico das Classes de Equivalência de Sequências de Cauchy

A seguir apresentaremos alguns resultados de Álgebra pertinentes ao nosso trabalho. Em particular, estamos interessados no estudo das chamadas classes de equivalência de sequências de Cauchy, às quais constituem um espaço métrico de grande importância. Um estudo mais detalhado sobre essas classes é apresentado em [22].

Dado um espaço métrico  $(\mathcal{X}, d)$ , definamos o conjunto

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}, d) = \{(x_n); (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy em } \mathcal{X}\}.$$

Como  $\mathcal{X} \neq \emptyset$ , existe  $x_0 \in \mathcal{X}$ . Logo, a sequência constante  $(x_0, x_0, \dots)$ , que é uma sequência de Cauchy, pertence a  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ . Assim, independente do espaço considerado, temos sempre  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d) \neq \emptyset$ .

**Definição 5.13** *Dizemos que duas sequências  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$  são equivalentes, e escrevemos  $(x_n) \equiv (y_n)$ , quando*

$$\lim d(x_n, y_n) = 0. \tag{5.8}$$

A relação binária  $(\equiv)$  em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d) \times \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$  é reflexiva, simétrica e transitiva. De fato, observe que  $(x_n) \equiv (x_n)$ , pois

$$d(x_n, x_n) = 0 \implies \lim d(x_n, x_n) = 0.$$

Além disso, se  $(x_n) \equiv (y_n)$ , então

$$\lim d(y_n, x_n) = \lim d(x_n, y_n) = 0,$$

ou seja,  $(y_n) \equiv (x_n)$ . Finalmente, supondo  $(x_n) \equiv (y_n)$  e  $(y_n) \equiv (z_n)$ , temos

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \implies 0 \leq \lim d(x_n, z_n) \leq \lim(d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) = 0.$$

Logo,  $\lim d(x_n, z_n) = 0$  e, portanto,  $(x_n) \equiv (z_n)$ . Assim,  $(\equiv)$  é uma relação de equivalência.

**Exemplo 36** As sequências  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)$ , onde  $d$  é a métrica usual de  $\mathbb{Q}$ , tais que  $x_n = \frac{n+1}{n}$  e  $y_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , são equivalentes. Com efeito,

$$d(x_n, y_n) = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \implies \lim d(x_n, y_n) = 0.$$

Logo,  $(x_n) \equiv (y_n)$ .

A conclusão a que chegamos no exemplo anterior é uma consequência imediata da Proposição 5.12. De fato, como  $\lim x_n = \lim y_n = 1$ , temos

$$\lim d(x_n, y_n) = d(1, 1) = 0.$$

De forma mais geral, vale o seguinte resultado.

**Proposição 5.22** Sejam  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}(X, d)$  sequências convergentes. Então

$$(x_n) \equiv (y_n) \iff \lim(x_n) = \lim(y_n).$$

**Demonstração.** Suponha inicialmente que  $\lim x_n = \lim y_n = a$ . Neste caso, pela Proposição 5.12 resulta

$$\lim d(x_n, y_n) = d(a, a) = 0 \implies (x_n) \equiv (y_n).$$

Por outro lado, se  $\lim x_n = a$ ,  $\lim y_n = b$  e  $(x_n) \equiv (y_n)$ , então

$$d(a, b) = \lim d(x_n, y_n) = 0 \implies a = b.$$

Logo,  $\lim x_n = \lim y_n$ . Portanto,  $(x_n) \equiv (y_n) \iff \lim(x_n) = \lim(y_n)$ . ■

O resultado da proposição anterior só é garantido se as sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  forem convergentes. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 37** Conforme vimos no Exemplo 32, no subespaço  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{Q}; 0 < x \leq 1\}$ , com a métrica induzida pela métrica usual de  $\mathbb{Q}$ , a sequência  $(x_n)$ , com  $x_n = \frac{1}{n}$ , é de Cauchy, mas não é convergente. Observe que o mesmo acontece com a sequência  $(y_n)$ , com  $y_n = \frac{2}{n+1}$ . Contudo,

$$d(x_n, y_n) = \left| \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right| = \frac{2}{n(n+1)} \implies \lim d(x_n, y_n) = 0,$$

ou seja,  $(x_n) \equiv (y_n)$ , sem que existam  $\lim x_n$  e  $\lim y_n$ . ▲

**Definição 5.14** Para cada sequência  $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ , o conjunto

$$\overline{(x_n)} = \{(x'_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d); (x'_n) \equiv (x_n)\}$$

é chamado a classe de equivalência de  $(x_n)$  segundo a relação  $(\equiv)$ .

**Observação 5.1** Para simplificar a notação utilizada, a partir de agora indicaremos por  $x, y, \dots$  os elementos  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ . Deste modo, pela Definição 5.14, temos

$$\bar{x} = \{x' \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d); x' \equiv x\}.$$

A proposição seguinte apresenta duas importantes propriedades das classes de equivalência de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ .

**Proposição 5.23** A família  $(\bar{x})_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)}$  possui as seguintes propriedades:

$$(i) \mathcal{C}(\mathcal{X}, d) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)} \bar{x}.$$

(ii) Se  $x, y \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ , então apenas uma das condições ocorre:  $\bar{x} = \bar{y}$  ou  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ .

**Demonstração.** Provemos (i). Como  $x \equiv x$ , para todo  $x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ , note que

$$x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d) \implies x \in \bar{x} \implies x \in \bigcup_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)} \bar{x} \implies \mathcal{C}(\mathcal{X}, d) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)} \bar{x}.$$

Por outro lado, se  $y \in \bigcup_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)} \bar{x}$ , então  $y \in \bar{x}$ , para algum  $x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ . Daí, como  $\bar{x} \subset \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ ,

segue que  $y \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$  e, portanto,  $\bigcup_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)} \bar{x} \subset \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ . Assim,

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}, d) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)} \bar{x}.$$

Provemos (ii). Dados  $x, y \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ , temos  $x \equiv y$  ou  $x \not\equiv y$  (isto é,  $x$  não é equivalente a  $y$ ). No primeiro caso, temos que  $x, y \in \bar{x} \cap \bar{y}$ . Daí, segue que

$$\forall x' \in \bar{x} \implies x' \equiv y \implies x' \in \bar{y} \implies \bar{x} \subset \bar{y}$$

e, analogamente,  $\bar{y} \subset \bar{x}$ . Portanto, se  $x \equiv y$ , então  $\bar{x} = \bar{y}$ . Por fim, consideremos  $x \not\equiv y$ . Neste caso,  $x \notin \bar{y}$ , caso contrário, existiria  $y' \in \bar{y}$  tal que  $x \equiv y'$  e, conseqüentemente,  $x \equiv y$ , uma contradição. Daí, segue que  $x' \notin \bar{y}$ , qualquer que seja  $x' \in \bar{x}$ . Portanto, se  $x \not\equiv y$ , então  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ . ■

**Definição 5.15 (Conjunto quociente)** O conjunto

$$\{\bar{x}; x \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)\},$$

representado por  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  e formado pelas classes de equivalência dos elementos de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$  segundo a relação  $(\equiv)$ , é denominado o conjunto quociente de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$  pela relação  $(\equiv)$ .

Conforme vimos anteriormente, cada elemento  $\bar{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  é, na verdade, um conjunto de seqüências de Cauchy  $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ . Cada classe  $\bar{x}$  pode ter mais de um elemento e cada uma delas é indicada por um representante, escolhido arbitrariamente. Escreveremos  $(x_n) \sim \bar{x}, (y_n) \sim \bar{y}, \dots$  para designar que  $(x_n), (y_n), \dots$  são os respectivos representantes de  $\bar{x}, \bar{y}, \dots \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ .

**Exemplo 38** Considere  $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)$  tais que  $x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{n-1}{n^2}, (y_n) = (1, 1, \dots)$  e  $y'_n = \frac{n+1}{n}$ . Note que  $x_n \rightarrow 0, x'_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 1$  e  $y'_n \rightarrow 1$ . Logo, as seqüências  $(x_n)$  e  $(x'_n)$  pertencem a uma mesma classe,  $\bar{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)$ , bem como  $(y_n)$  e  $(y'_n)$  pertencem a outra classe  $\bar{y} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)$ , distinta de  $\bar{x}$ . Neste caso, podemos escolher  $(x_n) \sim \bar{x}$  e  $(y'_n) \sim \bar{y}$ . ▲

Apresentaremos agora, o teorema que estabelece o conjunto  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  com a estrutura de um espaço métrico.

**Teorema 5.24** A função  $\bar{d} : (\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)) \times (\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim d(x_n, y_n), \quad (5.9)$$

onde  $(x_n) \sim \bar{x}$  e  $(y_n) \sim \bar{y}$ , define uma métrica em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ . Ou seja,  $(\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv), \bar{d})$  é um espaço métrico.

**Demonstração.** Primeiramente, mostremos que  $\bar{d}$  está bem definida, isto é, o limite em (5.9) existe e independe dos representantes das classes  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . De fato, como  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são seqüências de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \varepsilon.$$

Logo, pela Proposição 5.3

$$m, n > n_0 \implies |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| < \varepsilon.$$

Dessa forma, vemos que  $(d(x_n, y_n))$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Pela completudeza de  $\mathbb{R}$ , segue que  $(d(x_n, y_n))$  é convergente. Assim, o limite em (5.9) sempre existe.

Sejam  $(x_n) \equiv (x'_n)$  e  $(y_n) \equiv (y'_n)$ . Pela Proposição 5.3, temos

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n).$$

Daí, como  $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$  e  $d(y_n, y'_n) \rightarrow 0$ , obtemos

$$\lim |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| = 0 \implies \lim d(x_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n).$$

Portanto, a função  $\bar{d}$  está bem definida.

Mostremos que  $\bar{d}$  satisfaz os axiomas de métrica. Suponha que  $(x_n) \sim \bar{x}$ ,  $(y_n) \sim \bar{y}$  e  $(z_n) \sim \bar{z}$ , em que  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ . Temos que  $\bar{d}$  satisfaz  $(M_1)$ , pois

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim d(x_n, y_n) \geq 0,$$

uma vez que a métrica  $d$  é uma função não negativa. Como

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, x_n) = \bar{d}(\bar{y}, \bar{x}),$$

segue que  $\bar{d}$  satisfaz  $(M_3)$ . Temos ainda

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \lim d(x_n, y_n) = 0 \iff (x_n) \equiv (y_n) \iff \bar{x} = \bar{y}.$$

Logo,  $\bar{d}$  satisfaz  $(M_2)$ . Finalmente, pela desigualdade triangular da métrica  $d$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) &= \lim d(x_n, y_n) \leq \lim [d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)] \\ &= \lim d(x_n, z_n) + \lim d(z_n, y_n) \\ &= \bar{d}(\bar{x}, \bar{z}) + \bar{d}(\bar{z}, \bar{y}), \end{aligned}$$

ou seja,  $\bar{d}$  satisfaz  $(M_4)$ . Portanto,  $\bar{d}$  é uma métrica em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  e o par  $(\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv), \bar{d})$  é um espaço métrico. ■

Nos referiremos a este espaço apenas por  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ , ficando subentendido que a métrica considerada é aquela dada em (5.9). Mais tarde, veremos a importância desse teorema no que diz respeito ao completamento de um espaço métrico.

## 5.4.2 Isometria

Veremos agora a importante noção de *isometria* entre espaços métricos.

**Definição 5.16 (Isometria)** *Sejam  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$  e  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  espaços métricos. Uma isometria é uma aplicação  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tal que*

$$d(x, y) = \tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)),$$

quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{X}$ .

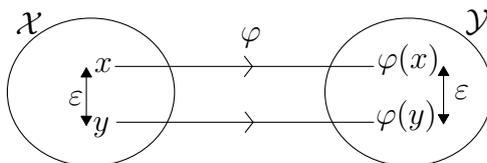


Figura 5.2: Isometria.

De acordo com a Definição 5.16, uma isometria é uma aplicação que preserva distâncias. A Figura 5.2 representa esta propriedade das isometrias. O valor  $\varepsilon$  corresponde à distância de  $x$  a  $y$ , no espaço  $\mathcal{X}$ , e de  $\varphi(x)$  a  $\varphi(y)$ , no espaço  $\mathcal{Y}$ .

Note que toda isometria é injetiva. Com efeito, se  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é uma isometria, então

$$\varphi(x) = \varphi(y) \implies d(x, y) = \tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = 0 \implies x = y,$$

com  $x, y \in \mathcal{X}$ . Assim, toda isometria sobrejetiva é bijetiva.

Quando existe uma isometria  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  bijetiva, os espaços  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  são ditos **isométricos**.

**Exemplo 39** A aplicação identidade  $id : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{X}, d)$  é uma isometria. De fato, como  $id(x) = x$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ , segue que

$$d(x, y) = d(id(x), id(y)), \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Em particular, como  $id$  é bijetiva, todo espaço métrico é isométrico a ele mesmo. ▲

**Exemplo 40** Dados  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$  e  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}, \tilde{d})$ , espaços métricos, e  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , uma isometria, existe um subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{Y}$  isométrico a  $\mathcal{X}$ . Com efeito, sendo  $\varphi$  injetiva, basta considerar  $\mathcal{W} = \varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$ , com a métrica induzida por  $\tilde{d}$ . ▲

As proposições a seguir, apresentam alguns resultados importantes sobre isometrias.

**Proposição 5.25** Sejam  $\varphi_1 : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  e  $\varphi_2 : (\mathcal{Y}, \tilde{d}) \rightarrow (\mathcal{Z}, \tilde{\tilde{d}})$  isometrias. A composta  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ , onde

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1,$$

é uma isometria.

**Demonstração.** De fato, note que

$$d(x, y) = \tilde{d}(\varphi_1(x), \varphi_1(y)) = \tilde{\tilde{d}}(\varphi_2(\varphi_1(x)), \varphi_2(\varphi_1(y))) = \tilde{\tilde{d}}(\varphi(x), \varphi(y)),$$

quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{X}$ . Portanto,  $\varphi$  é uma isometria. ■

A inversa de uma isometria, quando existe, é também uma isometria. Este resultado encontra-se na proposição abaixo.

**Proposição 5.26** Se  $\varphi : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  é uma isometria bijetiva, então  $\varphi^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  é uma isometria.

**Demonstração.** Note que  $\varphi(\varphi^{-1}(y)) = y$ , para todo  $y \in \mathcal{Y}$ . Daí, sendo  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  uma isometria, segue que

$$\tilde{d}(y_1, y_2) = \tilde{d}(\varphi(\varphi^{-1}(y_1)), \varphi(\varphi^{-1}(y_2))) = d(\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2)),$$

para quaisquer que sejam  $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ . Portanto,  $\varphi^{-1}$  é uma isometria. ■

**Proposição 5.27** *Sejam  $\varphi : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  uma isometria e  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{X}$ . Então,  $(\varphi(x_n))$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{Y}$ .*

**Demonstração.** Sendo  $\varphi$  uma isometria, temos que  $\tilde{d}(\varphi(x_m), \varphi(x_n)) = d(x_m, x_n)$  para cada  $x_m, x_n \in \mathcal{X}$ . Daí, como  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_0 \implies \tilde{d}(\varphi(x_m), \varphi(x_n)) = d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

ou seja,  $(\varphi(x_n))$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{Y}$ . ■

**Definição 5.17 (Aplicação contínua)** *Dizemos que uma aplicação  $f : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  é contínua no ponto  $a \in \mathcal{X}$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que*

$$d(x, a) < \delta \implies \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Quando  $f$  é contínua em todos os pontos  $a \in \mathcal{X}$ , diz-se que  $f$  é contínua em  $\mathcal{X}$ . Note que a aplicação identidade  $id : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{X}, d)$  é contínua, pois, dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = \varepsilon$ , temos que

$$d(x, a) < \delta \implies d(id(x), id(a)) = d(x, a) < \delta = \varepsilon.$$

**Exemplo 41** *Seja  $(x_n)$  uma seqüência num espaço métrico  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$ , com  $x_n \rightarrow a \in \mathcal{X}$ . Se  $f : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  é contínua em  $a$ , então  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Com efeito, a continuidade de  $f$  no ponto  $a \in \mathcal{X}$  significa que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$d(x, a) < \delta \implies \tilde{d}(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Por outro lado, para cada  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) < \delta \implies \tilde{d}(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Donde,  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Reciprocamente, se  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ , para toda seqüência  $(x_n)$  em  $\mathcal{X}$  tal que  $x_n \rightarrow a \in \mathcal{X}$ , então  $f$  é contínua em  $a$ . De fato, se  $f$  não fosse contínua em  $a$ , então dado  $\varepsilon > 0$  existiria, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , um ponto  $x'_n \in \mathcal{X}$  de modo que

$$d(x'_n, a) < \delta_n = \frac{1}{n} \implies \tilde{d}(f(x'_n), f(a)) \geq \varepsilon,$$

obtendo assim, uma seqüência  $(x'_n)$  em  $\mathcal{X}$  tal que  $x'_n \rightarrow a$ , mas  $\lim f(x'_n) \neq f(a)$ , uma contradição. ▲

Observe que no Exemplo 41 temos uma caracterização das aplicações contínuas por meio de seqüências. De fato, provamos que uma aplicação  $f : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  é contínua em  $a \in \mathcal{X}$  se, e somente se,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ , para toda seqüência  $(x_n)$  em  $\mathcal{X}$ , com  $x_n \rightarrow a$ .

**Exemplo 42 (Contração fraca)** Uma aplicação  $f : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  chama-se uma *contração fraca* quando

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) \leq d(x, y),$$

quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{X}$ . Mostremos que toda contração fraca é contínua. Com efeito, seja  $a \in \mathcal{X}$ . Para todo  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, considerando  $\delta = \varepsilon$ , temos

$$d(x, y) < \delta \implies \tilde{d}(f(x), f(y)) \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

Donde,  $f$  é contínua em  $a$ . ▲

**Exemplo 43** Sejam  $p_i : \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}_i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , as projeções do produto cartesiano dos espaços métricos  $(\mathcal{X}_1, d_1), \dots, (\mathcal{X}_n, d_n)$  em um de seus fatores. A  $i$ -ésima projeção é definida por

$$p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Seja  $d$  a métrica dada em (5.3). Dados  $x, y \in \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ , temos

$$d_i(p_i(x), p_i(y)) = d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y).$$

Assim,  $p_i$  é uma contração fraca e, portanto, uma aplicação contínua.

**Proposição 5.28** Toda isometria  $\varphi : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{Y}, \tilde{d})$  é contínua em  $a \in \mathcal{X}$ .

**Demonstração.** Com efeito, sendo  $\varphi$  uma isometria, dado  $a \in \mathcal{X}$ , temos

$$d(x, a) = \tilde{d}(\varphi(x), \varphi(a)), \forall x \in \mathcal{X}.$$

Assim,  $\varphi$  é uma contração fraca e, portanto, contínua em  $a$ . ■

Em particular, pelo Exemplo 41, temos que

$$\lim x_n = a \implies \lim \varphi(x_n) = \varphi(a).$$

Apresentaremos agora o teorema que garante a existência de um subespaço de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  denso em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  e isométrico a  $(\mathcal{X}, d)$ .

**Teorema 5.29** Seja  $(\mathcal{X}, d)$  um espaço métrico. Existe um subespaço  $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  isométrico a  $\mathcal{X}$  e denso em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ .

**Demonstração.** Associemos à cada ponto  $x \in \mathcal{X}$  a classe  $\bar{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ , de modo que  $(x_n) = (x, x, \dots) \sim \bar{x}$ . Isto define uma aplicação  $\varphi : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv), \bar{d})$  tal que

$$\varphi(x) = \bar{x}.$$

Sejam  $(x_n) = (x, x, \dots) \sim \bar{x}$  e  $(y_n) = (y, y, \dots) \sim \bar{y}$ . Como  $(x_n) \rightarrow x$  e  $(y_n) \rightarrow y$ , temos que

$$d(x, y) = \lim d(x_n, y_n) = \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{d}(\varphi(x), \varphi(y)), \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

Logo,  $\varphi$  é uma isometria e, portanto, o conjunto  $\mathcal{W} = \varphi(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ , com a métrica induzida por  $\bar{d}$ , é um subespaço de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  isométrico a  $\mathcal{X}$ .

Mostremos que  $\mathcal{W}$  é denso em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ . Sejam  $\bar{z} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  e  $(z_n) \sim \bar{z}$ . Como  $(z_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ , com  $k_0 > n_0$  tal que

$$n > k_0 > n_0 \implies d(z_n, z_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, considerando  $(z'_n) = (z_{k_0}, z_{k_0}, \dots) \sim \bar{z}_{k_0}$ , obtemos

$$\bar{d}(\bar{z}, \bar{z}_{k_0}) = \lim d(z_n, z_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

de sorte que  $\bar{z}_{k_0} = \varphi(z_{k_0}) \in \mathcal{W}$ . Assim, para todo  $\bar{z} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ , temos

$$B(\bar{z}, \varepsilon) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0.$$

Portanto,  $\mathcal{W}$  é denso em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ . ■

Observe que o resultado acima assegura apenas a existência do subespaço  $\mathcal{W}$ . Mostraremos ainda que  $\mathcal{W}$  é único, a menos de isometrias.

### 5.4.3 Completamento de Espaços Métricos

Já sabemos, por meio de alguns exemplos, que existem espaços métricos que são completos e outros que não são completos. O estudo de espaços métricos completos é de grande importância. Nesse sentido, vamos analisar o seguinte problema: dado um espaço métrico, não completo, é possível, de alguma forma torná-lo completo? Veremos que, realmente, isto é possível.

**Definição 5.18 (Completamento)** *Um completamento de um espaço métrico  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$  é um par  $(\Omega, \varphi)$ , onde  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \Omega$  é uma isometria,  $(\Omega, \tilde{d})$  é um espaço métrico completo e  $\varphi(\mathcal{X})$  é isométrico a  $\mathcal{X}$  e denso em  $\Omega$ .*

O teorema seguinte garante a existência e a unicidade do completamento de um espaço métrico e encontra-se exposto em [5].

**Teorema 5.30 (Completamento)** *Seja  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, d)$  um espaço métrico. Existe um espaço métrico completo  $\Omega$  que contém um subespaço  $\mathcal{W}$  denso em  $\Omega$  e isométrico a  $\mathcal{X}$ . Além disso, o espaço  $\Omega$  é único, a menos de isometrias, isto é, se  $\Omega'$  é outro espaço métrico completo contendo um subespaço  $\mathcal{W}'$  denso em  $\Omega'$  e isométrico a  $\mathcal{X}$ , então  $\Omega'$  e  $\Omega$  são isométricos.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 5.24 temos que

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$$

é um espaço métrico. Além disso, o Teorema 5.29 assegura a existência de uma isometria

$$\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv),$$

sendo  $\mathcal{W} = \varphi(\mathcal{X})$  um subespaço de  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  isométrico a  $\mathcal{X}$  e denso em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ . Assim, se  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  for completo, então

$$\Omega = \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$$

é um completamento de  $(\mathcal{X}, d)$ .

Provemos que  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  é completo. Seja  $(\bar{x}_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > n_1 \implies \bar{d}(\bar{x}_m, \bar{x}_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sendo  $\mathcal{W}$  denso em  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ , então para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\bar{w}_n \in \mathcal{W}$  tal que

$$\bar{d}(\bar{x}_n, \bar{w}_n) < \frac{1}{n}, \quad (5.10)$$

e, conseqüentemente,

$$m, n > n_1 \implies \bar{d}(\bar{w}_m, \bar{w}_n) \leq \bar{d}(\bar{w}_m, \bar{x}_m) + \bar{d}(\bar{x}_m, \bar{x}_n) + \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{w}_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n}.$$

Daí, como existe um natural  $n_0 > n_1$  tal que  $1/n_0 < \varepsilon/3$ , obtemos que

$$m, n > n_0 \implies \bar{d}(\bar{w}_m, \bar{w}_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Logo,  $(\bar{w}_m)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{W}$ . Sendo  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$  uma isometria bijetiva, definindo, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $w_m = \varphi^{-1}(\bar{w}_m)$ , obtemos uma sequência  $(w_m) \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)$ . Assim, existe  $\bar{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ , de modo que  $(w_m) \sim \bar{x}$ . Afirmamos que

$$\lim \bar{x}_n = \bar{x}.$$

De fato, de (5.10) temos

$$\bar{d}(\bar{x}_n, \bar{x}) \leq \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{w}_n) + \bar{d}(\bar{w}_n, \bar{x}) < \frac{1}{n} + \bar{d}(\bar{w}_n, \bar{x}).$$

Com isso, observando que  $(w'_n) = (w_n, w_n \dots) \sim \bar{w}_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\bar{d}(\bar{x}_n, \bar{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(w_n, w_m),$$

e, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(w_n, w_m) \right] = 0,$$

segue que  $\lim \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{x}) = 0$ , ou seja, dado  $\delta > 0$ , existe  $n'_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n'_0 \implies \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{x}) < \delta \implies \lim \bar{x}_n = \bar{x}.$$

Portanto,  $\mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$  é completo e, daí, podemos tomar  $\Omega = \mathcal{C}(\mathcal{X}, d)/(\equiv)$ .

Mostremos que  $\Omega$  é único, a menos de isometrias. Suponha que exista um outro espaço métrico completo  $\Omega' = (\Omega', d')$  e que o mesmo contenha um subespaço  $\mathcal{W}'$  denso em  $\Omega'$  e isométrico a  $\mathcal{X}$ . Como  $\Omega' = \overline{\mathcal{W}'}$ , dados  $x', y' \in \Omega'$  existem seqüências  $(x'_n)$  e  $(y'_n)$  em  $\mathcal{W}'$ , de modo que  $\lim x'_n = x'$  e  $\lim y'_n = y'$ . Logo, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies |d'(x'_n, y'_n) - d'(x', y')| \leq d'(x'_n, x') + d'(y'_n, y') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$d'(x', y') = \lim d'(x'_n, y'_n).$$

Analogamente, dados  $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$ , temos

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{y}_n),$$

onde  $(\bar{x}_n)$  e  $(\bar{y}_n)$  são seqüências em  $\mathcal{W}$  tais que  $\lim \bar{x}_n = \bar{x}$  e  $\lim \bar{y}_n = \bar{y}$ . Como  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{W}'$  são isométricos a  $\mathcal{X}$ , existem duas isometrias bijetivas  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$  e  $\varphi' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}'$ . Logo,  $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$  é uma isometria bijetiva e, portanto,  $\mathcal{W}$  é isométrico a  $\mathcal{W}'$ .

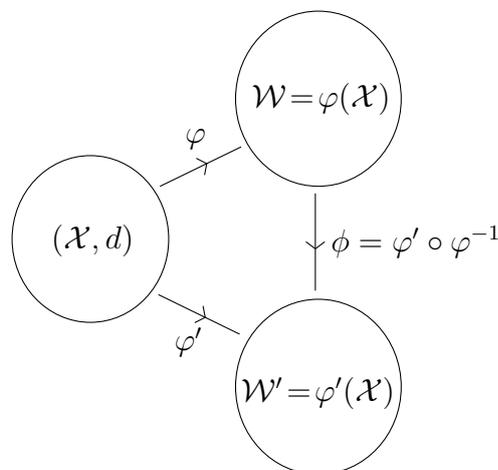


Figura 5.3: Completamento de um espaço métrico.

Agora, definamos uma função  $\omega : \Omega \rightarrow \Omega'$  tal que

$$\omega(\bar{x}) = \lim \phi(\bar{x}_n),$$

onde  $(\bar{x}_n)$  é uma sequência em  $\mathcal{W}$ , com  $\lim \bar{x}_n = \bar{x}$ . Veja que  $\omega$  está bem definida. De fato, sejam  $(\bar{x}_n)$  e  $(\bar{y}_n)$  sequências em  $\Omega$  tais que  $\lim \bar{x}_n = \bar{x}$  e  $\lim \bar{y}_n = \bar{y}$ . Como  $\phi$  é uma isometria de  $\mathcal{W}$  em  $\mathcal{W}'$ , temos

$$\begin{aligned} d'(\omega(\bar{x}), \omega(\bar{y})) &= d'(\lim \phi(\bar{x}_n), \lim \phi(\bar{y}_n)) = \lim d'(\phi(\bar{x}_n), \phi(\bar{y}_n)) \\ &= \lim \bar{d}(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \\ &= \bar{d}(\lim \bar{x}_n, \lim \bar{y}_n) \\ &= \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\bar{x} = \bar{y} \implies d'(\omega(\bar{x}), \omega(\bar{y})) = 0 \implies \omega(\bar{x}) = \omega(\bar{y}).$$

Logo,  $\omega$  está bem definida e, além disso, é uma isometria.

Seja  $w' \in \Omega'$ . Existe uma sequência  $(w'_n)$  em  $\mathcal{W}'$  tal que  $\lim w'_n = w'$  e, como  $\phi$  é bijetiva, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe um único  $\bar{w}_n \in W$  tal que  $\bar{w}_n = \phi^{-1}(w'_n)$ . Ora, como  $(w'_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{W}'$  e  $\phi^{-1} : \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}$  é uma isometria, segue que  $(\bar{w}_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{W} \subset \Omega$ . Sendo  $\Omega$  completo, existe  $\bar{w} \in \Omega$  tal que

$$\bar{w} = \lim \bar{w}_n = \lim \phi^{-1}(w'_n).$$

Daí, pela continuidade de  $\omega$ , temos que

$$\omega(\bar{w}) = \omega(\lim \phi^{-1}(w'_n)) = \lim \omega(\phi^{-1}(w'_n)) = \lim [\lim \phi(\phi^{-1}(w'_n))] = \lim w' = w'.$$

Assim, dado  $w' \in \Omega'$  existe  $\bar{w} \in \Omega$  tal que  $\omega(\bar{w}) = w'$ , isto é,  $\omega$  é sobrejetiva e, consequentemente, uma bijeção. Portanto,  $\Omega$  e  $\Omega'$  são isométricos. ■

#### 5.4.4 A Reta Real $\mathbb{R}$

Como sabemos, Exemplo 35, a reta racional  $\mathbb{Q}$  não é um espaço métrico completo. Pelo Teorema 5.30, o espaço  $\mathbb{Q}$  possui um completamento, a saber o par  $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)/(\equiv), \varphi)$ , em que  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)/(\equiv)$  é uma isometria.

Por outro lado, o espaço métrico dos números reais  $(\mathbb{R}, d)$  ou a reta real, com a métrica  $d(x, y) = |x - y|$ , é definido como sendo o completamento do espaço métrico  $(\mathbb{Q}, d)$ . Assim,

podemos identificar<sup>2</sup>  $\mathbb{R}$  como sendo o conjunto  $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, d)/(\equiv)$ , isto é, o conjunto quociente das classes de equivalência das seqüências de Cauchy de números racionais.

Mais ainda, pelo Teorema 5.30, qualquer completamento de  $(\mathbb{Q}, d)$  deve ser isométrico ao espaço  $(\mathbb{R}, d)$ . Isto significa que as propriedades referentes à distância não se alteram, em relação àquelas apresentadas no espaço  $\mathbb{R}$ . Em outras palavras, isto significa dizer que  $\mathbb{R}$  é o único completamento de  $\mathbb{Q}$ , a menos de isometrias.

---

<sup>2</sup>Em [22] é feita a construção dos números reais utilizando-se classes de equivalência de seqüências de Cauchy.

# Capítulo 6

## Conclusões

No desenvolvimento do nosso trabalho, fizemos um estudo das isometrias mostrando sua importância, principalmente, na Matemática. O tema aqui discorrido é muito abrangente e aparece naturalmente em algumas das áreas da Matemática, desempenhando um papel fundamental em cada uma delas, como por exemplo, na Geometria Diferencial. Procuramos fazer uma abordagem baseada na utilização de isometrias para tratar problemas de natureza teórica e prática, tanto em nível básico como em nível mais avançado. Além disso, procuramos explorar alguns recursos do GeoGebra através de algumas atividades em que se trabalhe tanto a parte lúdica como a parte conceitual do tema apresentado.

Devemos ressaltar que o conceito de isometria, bem como o conhecimento de suas propriedades, são fundamentais e devem ser exploradas à partir da Educação Básica. Destacamos ainda, que o uso das propriedades de isometrias para tratar problemas de Geometria Plana constitui uma atividade bastante rica e interessante. Nesse sentido, propomos uma lista de atividades em que as isometrias devem ser utilizadas de forma objetiva, para solucionar problemas práticos, de construção e teóricos, muitos dos quais, modelam situações reais.

Propor situações-problemas que instiguem a curiosidade dos alunos, e, posteriormente, os leve a buscar soluções, levantar hipótese, perceber propriedades, é algo que enriquece o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, ainda mais, se forem utilizados de forma adequada os recursos presentes no Geogebra. As ferramentas desse software devem ser exploradas, de modo a contribuir para uma melhor compreensão à respeito das isometrias do plano. Sua utilização nas construções de polígonos regulares e da estrela de  $m$  pontas, assim como no ladrilhamento do plano, são essenciais tanto do ponto de vista prático como teórico. Em relação à determinação da composta de isometrias do plano, o software permite analisar uma grande quantidade de casos em pouco tempo, o que permite conjecturar resultados. No entanto, devemos ter em mente que isto não substitui uma demonstração formal dos fatos observados nas atividades. Para tanto, devem ser empregadas apenas as definições e propriedades de cada uma das isometrias.

Utilizar as isometrias para dá uma caracterização da Reta Real como sendo o único espaço métrico que completa o conjunto dos números racionais, a menos de isometrias, é

uma atividade fascinante e mostra o quanto este tema é vasto e importante na Matemática.

Sem dúvida alguma, a elaboração deste trabalho nos fez adquirir uma visão mais profunda e completa acerca das isometrias, contribuindo, e muito, para a nossa formação acadêmica e docente. Esperamos que o mesmo sirva de apoio ou fonte de inspiração para o desenvolvimento de outros trabalhos dessa natureza ou ainda, que desperte a curiosidade e o interesse dos leitores pelo tema *isometrias*.

## Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura. *Curso de geometria*. 4ª ed. Gradiva, 2012.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- [3] GÓMEZ, Jorge Joaquín Delgado.; FRENSEL, Kátia Rosenvald.; CRISSAFF, Lhaylla dos Santos. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [4] KOSHY, Thomas. *Elementary number theory with applications*. 2ª ed. USA: ELSEVIER, 2007.
- [5] KREYSZIG, Erwin. *Introductory funtional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Espaços métricos*. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [8] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. 12ª ed. Vol.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [9] LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no plano*. 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [11] LIMA, Elon Lages. et al. *A matemática do ensino médio*. 6ª ed. Vol.2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [12] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [13] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana*. 2ª ed. Vol.2. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [14] REZENDE, Eliane Quelho Frota.; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.
- [15] SANT'ANNA, Blaidi. et al. *Conexões com a física*. 2ª ed. Vol.2. São Paulo: Moderna, 2013.

- [16] TENENBLAT, Keti. *Introdução à geometria diferencial*. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Edgard Bluscher, 2008.
- [17] VASCONCELOS, Elinalva Vergasta de. et al. *Superfícies isométricas ao plano: construções de modelos concretos com cilindros e cones*. Salvador: EDUFBA, 2010.
- [18] WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. 6<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [19] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1998. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em 22/05/2016.
- [20] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em 22/05/2016.
- [21] ESCHER, M.C.. *Circle Limit IV*. Disponível em <<http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iv/>>. Acesso em 22/05/2016.
- [22] LOPES, Paula Cristina Reis. *Construções dos números reais*. Funchal: Universidade da Madeira, 2006. Disponível em <<http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/179/1/MestradoCristinaLopes.pdf>>. Acesso em 22/05/2016.
- [23] MARCON, Divane. *Espaços métricos*. Florianópolis: UFSC, 2000. Disponível em <[https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96813/Divane\\_Marcon.PDF?-sequence=1](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96813/Divane_Marcon.PDF?-sequence=1)>. Acesso em 22/05/2015.

# Apêndice A

## Sugestões e Comentários sobre as Atividades

Neste apêndice apresentaremos algumas sugestões de soluções para as atividades apresentadas no Capítulo 3.

### A.1 Problemas Teóricos e práticos

#### Problema 1

Uma solução possível é a que segue. Sejam  $\phi = \mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_r$  e  $s' = \mathcal{R}_r(s)$ . Considere dois pontos  $p \in s'$  e  $q \in s$  tais que  $pq \perp s$ . Note que se  $\vec{v} = \vec{pq}$ , então

$$\phi(x) = \mathcal{R}_s(\mathcal{R}_r(x)) = \mathcal{R}_s(x) = \mathcal{T}_{\vec{v}}(x), \forall x \in r.$$

Além disso, para todo  $y \in s'$  temos

$$\phi(y) = \mathcal{R}_s(\mathcal{R}_r(y)) = \mathcal{R}_r(y) = \mathcal{T}_{\vec{v}}(y).$$

Portanto,  $\phi = \mathcal{T}_{\vec{v}}$ . Veja a Figura A.1.

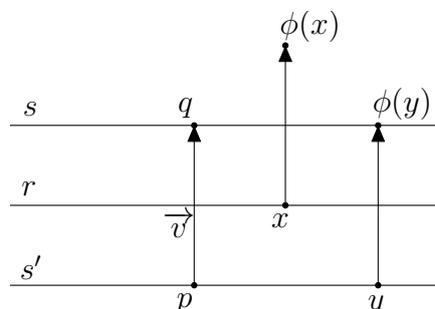


Figura A.1: A isometria  $\phi = \mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_r$ .

Vejamos como explorar essa atividade no GeoGebra. No ambiente do GeoGebra siga os seguintes passos:

- trace duas retas paralelas  $r$  e  $s$ ;
- obtenha a reta  $s'$ , reflexão da reta  $s$  em relação à reta  $r$ ;
- trace o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{pq}$ , com  $p \in s'$ ,  $q \in s$  e  $pq \perp s$ ;
- escolha três pontos  $x, y$  e  $z$  e obtenha suas reflexões,  $x', y'$  e  $z'$ , em relação à reta  $r$ ;
- reflita os pontos  $x', y'$  e  $z'$ , em relação à reta  $s$ , obtendo os pontos  $x'', y''$  e  $z''$ ;
- aplique nos pontos  $x, y$  e  $z$  a translação pelo vetor  $\vec{v}$ ;
- conclua que a composta da reflexão em relação à  $r$  com a reflexão em relação à  $s$  (nesta ordem) é a translação pelo vetor  $\vec{v}$ , ou seja

$$\mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_r = \mathcal{T}_{\vec{v}}.$$

A Figura A.2 foi obtida seguindo-se os passos indicados anteriormente. Aqui destacamos mais uma vez a importância do software, pois o mesmo permite a exploração do problema por meio de um grande número de casos.

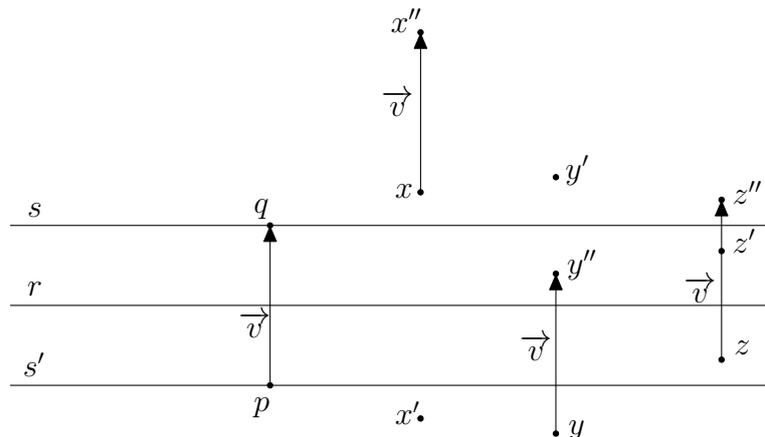


Figura A.2: Explorando a composição de duas reflexões em relação à retas paralelas.

## Problema 2

Para solucionar este problema, convém fazer a seguinte definição.

**Definição A.1 (Ângulo orientado entre retas concorrentes)** *Sejam  $r$  e  $s$  retas concorrentes em um ponto  $O \in \Pi$ . O ângulo orientado da reta  $r$  para a reta  $s$  é o ângulo não obtuso*

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq}),$$

com  $p \in r$  e  $q \in s$ .

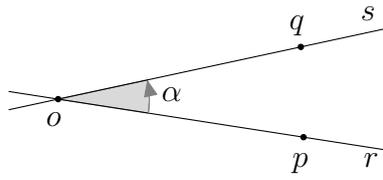


Figura A.3: Ângulo orientado entre retas.

Com esta definição em mente, uma possível solução para o problema é dada a seguir. Sejam  $\phi = \mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_r$ ,  $s' = \mathcal{R}_r(s)$  e  $\{o\} = r \cap s$ . Agora considere  $\beta = 2\alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo de  $r$  para  $s$ , e note que

$$\phi(x) = \mathcal{R}_s(\mathcal{R}_r(x)) = \mathcal{R}_s(x) = \mathcal{Rot}_{(o,\beta)}(x), \forall x \in r.$$

Além disso, para todo  $y \in s'$  temos

$$\phi(x) = \mathcal{R}_s(\mathcal{R}_r(x)) = \mathcal{R}_r(x) = \mathcal{Rot}_{(o,\beta)}(x).$$

Portanto,  $\phi = \mathcal{Rot}_{(o,\beta)}$ . Veja a Figura A.4 a seguir.

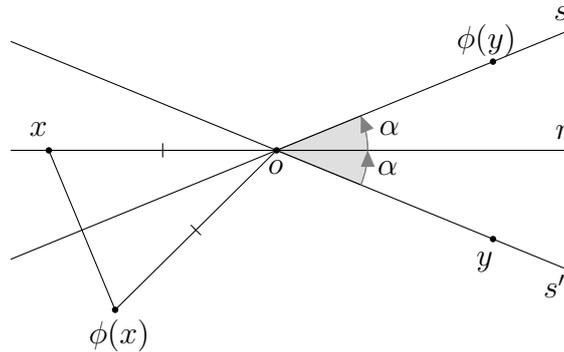


Figura A.4: Composição de duas reflexões em relação à retas concorrentes.

### Problema 3(a)

Inicialmente, lembremos que  $\mathcal{Rot}_{(o,180^\circ)} = \mathcal{S}_o$ . Considere

$$\phi = \mathcal{Rot}_{(o_2,180^\circ)} \circ \mathcal{Rot}_{(o_1,180^\circ)} = \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1}.$$

Se  $o_1 = o_2$ , então

$$\phi = \mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_{o_1}^{-1} = \text{Id} = \mathcal{T}_{\vec{0}}.$$

Suponha  $o_1 \neq o_2$  e seja  $r$  a reta que passa por  $o_1$  e  $o_2$ . Considerando  $\vec{v} = 2\overrightarrow{o_1o_2}$  temos

$$\phi(x) = \mathcal{T}_{\vec{v}}(x), \forall x \in r.$$

Por outro lado, se  $y \notin r$ , então os triângulos  $pqy_p$  e  $y\phi(y)y_A$  são semelhantes. Por fim, basta observar que

$$\overrightarrow{y\phi(y)} = 2\overrightarrow{p\bar{q}} = \vec{v} \implies \phi(y) = y + \vec{v} = \mathcal{T}_{\vec{v}}(y).$$

Portanto,  $\phi = \mathcal{T}_{\vec{v}}$ .

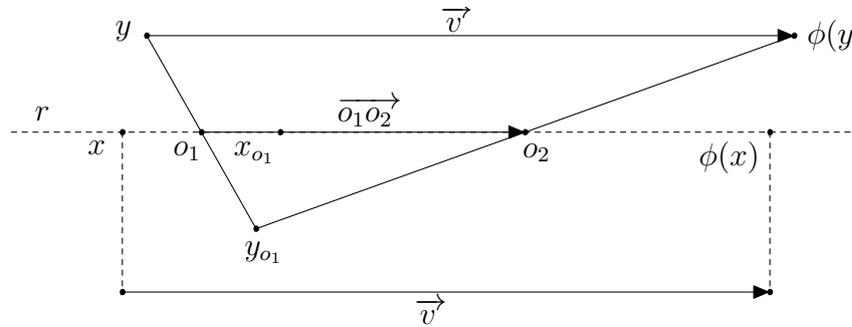


Figura A.5: Composição de duas rotações de ângulo  $180^\circ$ .

Para explorar esse problema no GeoGebra siga os seguintes passos:

- trace uma reta  $r$  e escolha dois de seus pontos  $o_1$  e  $o_2$ , centros das rotações;
- escolha um ponto  $x \in r$  e obtenha o ponto  $x'$ , rotação de  $180^\circ$  de  $x$  em torno de  $o_1$ ;
- no ponto  $x'$ , aplique a rotação de  $180^\circ$  em torno de  $o_2$ , obtendo  $x''$ ;
- trace os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{o_1o_2}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{xx''}$  e observe a relação entre eles;
- escolha um ponto  $y \notin r$  e obtenha o ponto  $y'$ , rotação de  $180^\circ$  de  $y$  em torno de  $o_1$ ;
- no ponto  $y'$ , aplique a rotação de  $180^\circ$  em torno de  $o_2$ , obtendo  $y''$ ;
- trace o vetor  $\vec{w} = \overrightarrow{YY''}$  e observe sua relação com o vetor  $\vec{u}$ ;
- movimente o ponto  $x$  sobre  $r$  e observe o que ocorre com os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ;
- movimente os pontos  $A$  e  $B$  e observe a relação entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e entre  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ ;
- conclua que a composta da rotação de  $180^\circ$  em torno de  $o_2$  com a rotação de  $180^\circ$  em torno de  $o_1$  (nesta ordem) é a translação pelo vetor  $\overrightarrow{o_1o_2}$ , ou seja

$$\mathcal{Rot}_{(o_2, 180^\circ)} \circ \mathcal{Rot}_{(o_1, 180^\circ)} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{o_1o_2}}.$$

Podemos proceder de modo análogo para investigar a composição

$$\mathcal{Rot}_{(o_1, 180^\circ)} \circ \mathcal{Rot}_{(o_2, 180^\circ)}.$$

A Figura A.6 foi obtida seguindo-se os passos acima.

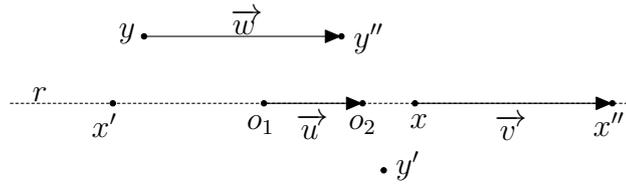


Figura A.6: Explorando a composição de duas rotações de ângulo  $180^\circ$ .

**Problema 3(b)**

Sendo  $\mathcal{T}_{\vec{v}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\vec{v}}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{o_1 o_2} = -\overrightarrow{o_2 o_1}$ , concluímos pelo item (a) que

$$\mathcal{R}ot_{(o_1, 180^\circ)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_2, 180^\circ)} = (\mathcal{R}ot_{(o_2, 180^\circ)} \circ \mathcal{R}ot_{(o_1, 180^\circ)})^{-1}.$$

**Problema 4**

De fato, dado  $x \in \Pi$  temos

$$\mathcal{R}ot_{(o, \alpha)}(\mathcal{R}ot_{(o, \beta)}(x)) = \mathcal{R}ot_{(o, \alpha)}(x_{(o, \beta)}) = x_{(o, \alpha + \beta)} = \mathcal{R}ot_{(o, \alpha + \beta)}(x)$$

Portanto,

$$\mathcal{R}ot_{(o, \alpha)} \circ \mathcal{R}ot_{(o, \beta)} = \mathcal{R}ot_{(o, \alpha + \beta)}.$$

**Problema 5**

Seja  $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{yz}$ . Considere  $r' = \mathcal{T}_{\vec{v}}(r)$  e  $s' = \mathcal{T}_{-\vec{v}}(s)$  e os pontos  $y_1 \in s' \cap r$  e  $z_1 \in r' \cap s$ . O ponto  $x$  é tal que  $\{x\} = \overleftarrow{y y_1} \cap \overleftarrow{z z_1}$ . Veja a Figura A.7.

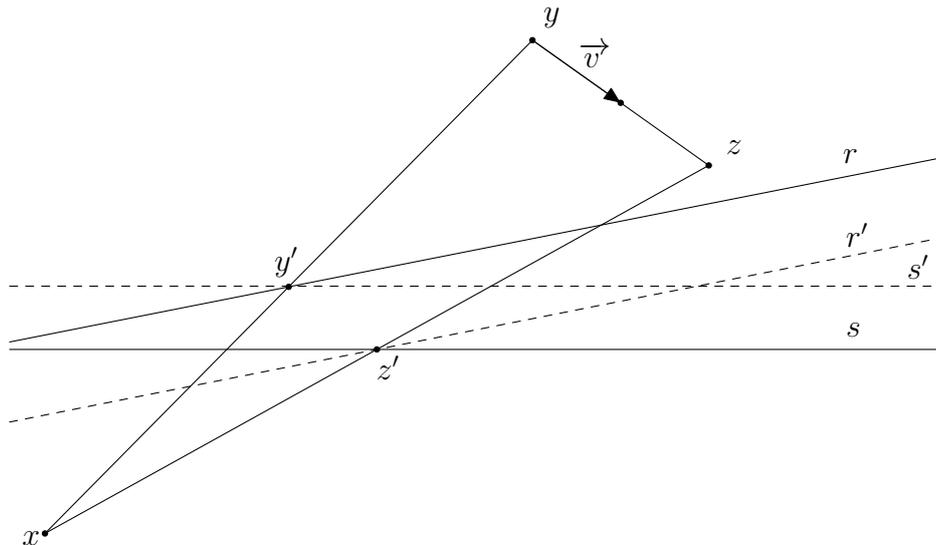


Figura A.7: O vértice  $x$  do  $\Delta xyz$ .

### Problema 6

Basta aplicar reflexão em relação à cada uma das retas para obter o menor percurso entre  $x$  e  $y$ , tal como no Exemplo 7. Primeiramente, obtenha  $x'$ , reflexão de  $x$  em relação à  $r$ . O segmento  $x'y$  intersecta  $s$  no ponto  $x_3$ . Reflita  $x'$  em relação à  $r$ , obtendo  $x''$ . O ponto  $x_2$  é a interseção do segmento  $x''x_3$  com a reta  $r$ . Por fim, reflita  $x_3$  sobre  $r$ , obtendo  $x'_3$ . O ponto  $x_4$  é a interseção do segmento  $x'_3y$  com  $r$ . A trajetória do raio visual é a linha poligonal  $xx_1x_2x_3x_4y$ .

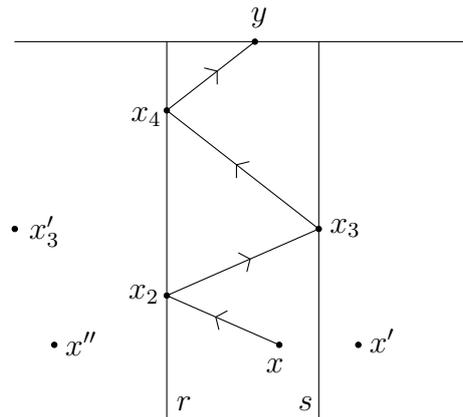


Figura A.8: Trajetória do raio visual entre  $x$  e  $y$ .

## A.2 Construção de polígonos regulares por rotação

No GeoGebra, para obter os pontos  $x_k$ , com  $1 \leq k \leq n - 1$ , utilize a ferramenta “rotação em torno de um ponto” e mantenha o sentido de rotação.

## A.3 Estrela de $m$ pontas

Esta atividade requer algumas informações sobre a noção de congruência modular. Começemos recordando que dados  $x, m \in \mathbb{Z}$ , com  $m \geq 1$ , o resto da divisão euclidiana de  $x$  por  $m$  é o único inteiro  $b \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$  tal que

$$x = am + b,$$

para algum  $a \in \mathbb{Z}$ .

Sejam  $x, y, m \in \mathbb{Z}$ , com  $m \geq 1$ , a notação  $x \equiv y \pmod{m}$  indica que  $x - y$  é divisível por  $m$ . Por exemplo,  $13 \equiv 1 \pmod{3}$ , pois  $13 - 1 = 12$  e 12 é divisível por 3. Para indicar apenas o resto da divisão de  $x$  por  $m$ , usamos a notação  $x \pmod{m}$ . Deste modo,

$$(k + i) \pmod{m}$$

indica o resto da divisão de  $k + i$  por  $m$ .

Vejamos como obter a estrela de 15 pontas. Neste caso, temos  $k \in \{0, 1, \dots, 14\}$ . Escolhendo  $i = 7$ , pois  $\text{mdc}\{15, 7\} = 1$ , temos

$$\begin{aligned} k = 0 &\implies (k + i) \bmod m = 7 \bmod 15 = 7; \\ k = 7 &\implies (k + i) \bmod m = 14 \bmod 15 = 14; \\ k = 14 &\implies (k + i) \bmod m = 21 \bmod 15 = 6; \\ k = 6 &\implies (k + i) \bmod m = 13 \bmod 15 = 13; \\ k = 13 &\implies (k + i) \bmod m = 20 \bmod 15 = 5; \\ &\vdots \\ k = 1 &\implies (k + i) \bmod m = 8 \bmod 15 = 8; \\ k = 8 &\implies (k + i) \bmod m = 15 \bmod 15 = 0. \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos a sequência de pontos

$$x_0 x_7 x_{14} x_6 \dots x_1 x_8 x_0.$$

Utilizando-se a ferramenta “polígono” do GeoGebra, trace o polígono  $x_0 x_7 x_{14} x_6 \dots x_1 x_8 x_0$ , selecionando os pontos na ordem em que aparecem na sequência. A estrela de 15 pontas, assim obtida, pode ser observada na Figura A.9.

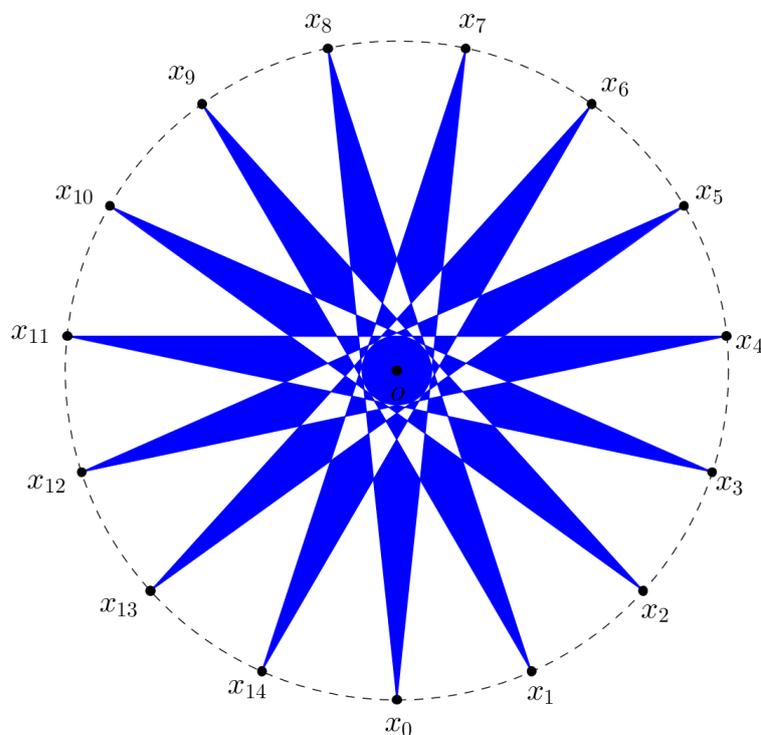


Figura A.9: Estrela de 15 pontas.

Utilize os passos fornecidos na atividade e construa outras estrelas. Para obter uma visualização dinâmica de sua construção, utilize a ferramenta “protocolo de construção” do GeoGebra.