



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **A EVOLUÇÃO NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS**

**Luís Carlos da Costa**

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. José de Arimateia Fernandes

Campina Grande - PB  
Junho/2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

C837e Costa, Luís Carlos da.  
A evolução na resolução das equações algébricas / Luís Carlos da Costa. – Campina Grande, 2016.  
48 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. José de Arimateia".  
Referências.

1. Equações Algébricas. 2. Fórmulas por Radicais. 3. Equações - Resolução. I. Arimateia, José de. II. Título.

CDU 512.5



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **A EVOLUÇÃO NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS**

**por**

**Luís Carlos da Costa †**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

†Bolsista CAPES

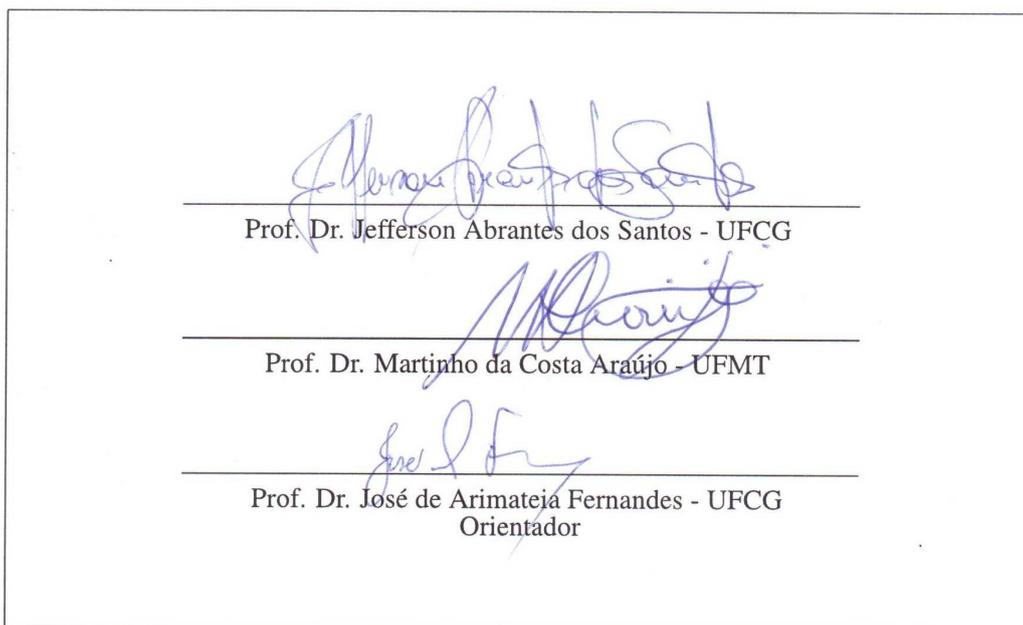
# A EVOLUÇÃO NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

por

**Luís Carlos da Costa**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Junho/2016**

# Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai (in memoriam), José da Costa Barros, que sempre foi o grande incentivador na minha vida e principalmente durante este curso, apoiando-me nos momentos de dificuldade. A Deus, pois ele me concedeu a honra de concluir este curso.

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador Dr. José de Arimateia Fernandes, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

A minha família, pelo amor sincero, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

Tentamos, através deste trabalho, apresentar, em linguagem tão simples quanto possível, o desenvolvimento de alguns métodos clássicos de resolução das equações Lineares, Quadráticas, Cúbicas e Quárticas. Apresentamos, também, uma retrospectiva histórica relacionada a cada um desses métodos fazendo com que o leitor se situe no tempo e no espaço e se sinta mais atraído pela leitura. Em todos os casos foram exibidos exemplos numéricos ilustrativos desses métodos. Também foi sugerida uma Sequência Didática para o ensino das Equações Quadráticas. Encerro esse trabalho com a biografia de dois jovens prodígios da Matemática: Niels Abel e Évariste Galois.

**Palavras Chaves:** Equações Algébricas. Fórmulas por Radicais.

# Abstract

We try through from work, present in language as simple as possible, the development of some classical methods of solving Linear equations, Quadratic, Cubic and Quartic. Here, too, a historical retrospective related to each of these methods causing the reader is situated in time and space and feel more drawn to reading. In all cases they have been shown numerical examples illustrative of these methods. It was also suggested a Didactic Sequence for teaching Quadratic Equations. I conclude this work with the biography of two young prodigies of mathematics: Niels Abel and Evariste Galois.

**Keywords:** Algebraic equations. Radicals of formulas.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Objetivos . . . . .	3
1.2	Organização . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Equações Lineares</b>	<b>5</b>
2.1	Origens Históricas do Método da Falsa Posição . . . . .	5
2.2	A Regra da Falsa Posição . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Equações Quadráticas</b>	<b>9</b>
3.1	A História de Bhaskara . . . . .	9
3.2	A Fórmula de Bhaskara . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Equações Cúbicas</b>	<b>12</b>
4.1	O Segredo de Tartaglia . . . . .	12
4.2	O Método de Cardano-Tartaglia . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Equações Quárticas</b>	<b>19</b>
5.1	Ferrari, o Discípulo que Superou o Mestre . . . . .	19
5.2	A Solução de Ferrari para a Quártica . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Equações de Grau 5</b>	<b>25</b>
6.1	Galois e Abel . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Sequência Didática para o Ensino das Equações Quadráticas</b>	<b>27</b>
7.1	Sugestão de Sequência Didática . . . . .	27
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>33</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Primeiro Apêndice</b>	<b>36</b>
<b>B</b>	<b>Segundo Apêndice</b>	<b>39</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Resolver equações sempre foi a motivação principal para o desenvolvimento da Álgebra. Desde os primórdios da civilização, o ser humano sentiu a necessidade de dar forma aos seus pensamentos e, no que concerne ao pensamento matemático, as primeiras ideias trataram de representar quantidades através de símbolos, evoluindo para os sistemas de numeração e posteriormente para a escrita de sentenças matemáticas mais elaboradas. As equações surgem como um desdobramento natural da maneira matemática de pensar, baseando-se na ideia fundamental de igualdade. Resolver uma equação se traduz em descobrir um valor que venha a tornar iguais duas expressões a princípio diferentes.

As primeiras equações elaboradas e resolvidas pelos humanos tinham, naturalmente, uma forma muito simples, mas já traziam implícita a ideia de incógnita, a quantidade inicialmente desconhecida que equilibra o “tamanho” de dois conjuntos. Com o desenvolvimento paulatino da Matemática, as equações evoluíram em complexidade e na forma como são representadas. Hoje em dia elas estão envolvidas com praticamente tudo que compõe a sociedade moderna. Há uma vasta gama de categorias de equações, cujas incógnitas podem não ser meramente números, mas também funções. Equações poderosas o bastante para abarcar quase todos os problemas que possam ser traduzidos em linguagem matemática.

A proposta deste trabalho é a de oferecer aos estudantes de nível básico um entendimento elementar sobre as chamadas equações polinomiais e suas soluções, que constituíram um capítulo importante da História da Matemática. Como veremos, as equações de grau menor ou igual a 4 são o limite do que é possível resolver utilizando-se técnicas algébricas elementares (soma, subtração, Multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) e, por isso mesmo, provocaram uma revolução na Álgebra, sendo o divisor de águas entre a Álgebra clássica e a moderna.

A fim de tornar a leitura um pouco mais interessante e situar o aluno no tempo e no espaço incluí um breve relato do desenvolvimento histórico em que estas descobertas aconteceram.

Para Groenwald et. al. (2005),

A História da Matemática é considerada um tema importante na formação do aluno. Ela proporciona ao estudante a noção exata dessa ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais, contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas. A História da Matemática tem este grande valor, de poder contextualizar o saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político.

Com o intuito de fortalecer o conteúdo abordado neste trabalho e melhorar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de equações quadráticas no ensino fundamental, apresentaremos uma sugestão de Sequencia Didática para o ensino desse conteúdo a ser aplicada em sala de aula.

Para Machado, A.R.; Cristovão, V.L.L. (2006),

Sequência didática é um termo em educação para definir um procedimento encadeado de passos, ou etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizado. As sequências didáticas são planejadas e desenvolvidas para a realização de determinados objetivos educacionais, com início e fim conhecidos tanto pelos professores, quanto pelos alunos.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho é contribuir para uma prática pedagógica que possibilite aos alunos perceberem, através da historia da matemática, a importância da resolução das equações polinomiais desde a antiguidade até os dias atuais. Já os objetivos específicos visam:

- Resolver equações polinomiais utilizando os métodos algébricos apresentados;
- Motivar o estudo do conteúdo de equações algébricas;
- Criar condições para que se possa comparar os métodos antigos de resolução de equações com os atuais, em que as fórmulas já estão disponíveis ou programadas no computador;
- Contribuir para tornar o ensino da Matemática mais atrativo, interessante e estimulante, algo imprescindível para a formação do aluno nos dias atuais.
- Promover uma reflexão sobre a importância da História da Matemática no currículo escolar;

## 1.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte forma: Esta introdução que fornece uma visão ampla do que está sendo proposto; o Capítulo 2 com as origens do Método da Falsa Posição e o seu desenvolvimento; o Capítulo 3 que trata da história do matemático Bhaskara e a fórmula resolutive das equações quadráticas que não foi ele quem descobriu mas imortalizou seu nome a Fórmula de Bhaskara; o Capítulo 4 conta a fascinante história da descoberta da resolução da equação cúbica e a sua famosa fórmula resolutive conhecida como o Método de Cardano-Tartaglia; o Capítulo 5 apresenta Ferrari, o mais brilhante discípulo de Cardano e a fórmula resolutive das equações quárticas; o Capítulo 6 discorre sobre as equações de grau 5 ou mais; o Capítulo 7 apresenta uma sugestão de uma Sequência Didática para o ensino das Equações Quadráticas e o Capítulo 8 apresenta as considerações finais seguidas das Referências Bibliográficas e dos apêndices. O Apêndice A apresenta a biografia de Évariste Galois e Niels Henrik Abel, já o Apêndice B apresenta a história do surgimento dos Números Complexos.

# Capítulo 2

## Equações Lineares

### 2.1 Origens Históricas do Método da Falsa Posição

O método da falsa posição, ou regra da falsa suposição ou, ainda, do falso pressuposto, é uma forma muito antiga de resolver problemas que atualmente podemos interpretar como relacionados a equações e sistemas de equações lineares que consiste em um procedimento de tentativas e erros. Um ponto que por muito tempo caracterizou um certo eurocentrismo na História da Matemática foi o de creditar a criação do método da falsa posição a Leonardo de Pisa, por volta do século XIII. Entretanto, os estudos da História Antiga, realizados ainda no século XIX, demonstraram o desacerto de tal perspectiva, fazendo remontar as origens de um tal método a fontes bem mais antigas e não europeias. É muito difícil traçar a origem exata do método da falsa posição. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito quanto na China, o referido método era há muito conhecido, ainda que com denominações diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade. Seu surgimento se dá como uma tentativa de resolver problemas práticos ligados ao comércio, à cobrança de impostos, ao armazenamento de animais e à agrimensura. Um dos documentos mais antigos que faz referência ao método da falsa posição é o papiro Rhind, compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. Esse texto, entretanto, é um relato de conhecimentos bem mais antigos e não da exata autoria de Ahmes. Fica, portanto, difícil precisar os verdadeiros autores das ideias ali expostas, assim como a época dos seus surgimentos.

### 2.2 A Regra da Falsa Posição

Considere a equação  $ax = b$ . Uma maneira de resolvê-la até recentemente, usando somente aritmética, antes dos procedimentos algébricos se tornarem praticamente universais para resolver problemas desse tipo, era a seguinte: Escolha um valor arbitrário  $x_0$  e calcule então o valor de  $ax_0$ , que chamaremos de  $b_0$ . Na prática,  $x_0$  é escolhido a fim de facilitar as

contas. Assim, por exemplo, se  $a$  é uma fração com denominador 53, é conveniente escolher  $x_0 = 53$ . Isso eliminará os denominadores, tornando os cálculos mais simples.

Considere a igualdade

$$ax_0 = b_0.$$

por quanto devo multiplicar os dois membros da igualdade acima para termos, do lado direito,  $b$ ? Claramente por  $b/b_0$ . Fazendo isso, temos:

$$ax_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_0},$$

ou seja,

$$a \times \left( x_0 \times \frac{b}{b_0} \right) = b_0 \times \frac{b}{b_0} = b.$$

Assim,

$$x = x_0 \times \left( \frac{b}{b_0} \right)$$

é solução de  $ax = b$ .

O processo descrito acima é conhecido como regra da falsa posição, e foi muito usado, ao longo da História, em várias civilizações, até recentemente.

**Exemplo 1.** Considere, agora, o seguinte problema do papiro de Ahmes (Problema 24). Uma quantidade, com  $1/7$  dela adicionado, torna-se: 19.

Em primeiro lugar, resolvamos o problema como nós o faríamos hoje.

O problema se transforma em resolver a equação

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \iff \frac{8}{7}x = 19 \iff x = \frac{19 \times 7}{8} \iff x = \frac{133}{8}.$$

Uma outra solução seria usar a regra de falsa posição, procedendo como segue:

Se a quantidade procurada fosse igual a 7, teríamos que ela mais  $1/7$  dela seria igual a 8. Como a resposta deve ser 19, multiplicaremos os dois membros da igualdade

$$7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$$

por  $19/8$ , obtendo

$$\left( 7 \times \frac{19}{8} \right) + \frac{1}{7} \times \left( 7 \times \frac{19}{8} \right) = 8 \times \frac{19}{8} = 19.$$

Assim,  $7 \times 19/8 = 133/8$  é a raiz procurada.

Chegaremos ao mesmo resultado procedendo como segue, usando notação algébrica para tornar os passos do processo de falsa posição mais transparentes.

Faça  $x_0 = 7$ . Temos, então:

$$x_0 + \frac{1}{7}x_0 = 8.$$

Multipliquemos os dois lados dessa igualdade por  $19/8$ :

$$\frac{19}{8}x_0 + \frac{19}{8} \frac{1}{7}x_0 = \frac{19}{8}8 = \frac{19}{8}x_0 + \frac{1}{7} \frac{19}{8}x_0 = 19.$$

Como  $x_0 = 7$ , e colocando  $19/8$  em evidência, vemos facilmente que

$$\frac{19}{8}x_0 \tag{2.1}$$

é realmente a solução do problema. Guarde este resultado a fim de compará-lo com o que obtivermos resolvendo o mesmo problema como no papiro Ahmes. Salientamos que o procedimento imediatamente acima, que utiliza notação algébrica, é estranho à regra de falsa posição. É somente uma explicação, em linguagem algébrica moderna, de porque ela funciona.

No que segue, dado um número natural  $n$ , a notação  $\dot{n}$  serve para representar a fração  $1/n$ . Assim,  $\dot{5}$  representa  $1/5$ , e  $\dot{10}$  representa  $1/10$ . Uma expressão do tipo  $a\dot{n}$  representa  $a + (1/n)$ .

Agora veremos o algoritmo empregado pelos egípcios para efetuar a multiplicação de dois números, por exemplo 5 vezes 7. Os egípcios procediam por duplicações sucessivas do multiplicando, 7.

$$\begin{array}{r} \backslash 1 \quad 7 \\ 2 \quad 14 \quad 7 + 28 = 35 \\ \backslash 4 \quad 28 \end{array}$$

Após fazer isso, marcavam com um símbolo os números da coluna da esquerda que somados dão 5, e somavam os números correspondentes na coluna da direita. No nosso caso, a resposta é 35.

Vejam agora como os egípcios efetuavam divisões. Eles transformavam o problema de dividir  $a$  por  $b$  em achar um número  $x$  tal que  $b$  vezes  $x = a$ . Assim, dividir  $a$  por  $b$  significava, para eles, por quanto devo multiplicar  $b$  para obter  $a$ . Divida 19 por 8, ou seja, por quanto se deve multiplicar 8 a fim de obter 19.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ \backslash 2 \quad 16 \quad 2\dot{4}8 = 2+1/4+1/8 \\ \dot{2} \quad 4 \\ \backslash 4 \quad 2 \\ \backslash \dot{8} \quad 1 \end{array}$$

A solução apresentada pelo escriba Ahmes para o problema: “Uma quantidade, com  $1/7$  dela adicionado, torna-se 19,” foi disposta em três blocos, com 2, 5 e 3 linhas, respectivamente. Analisemos cada um deles.

$$\begin{array}{r} \backslash 1 \quad 7 \\ \backslash \dot{7} \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ \backslash 2 \quad 16 \\ \dot{2} \quad 4 \\ \backslash \dot{4} \quad 2 \\ \backslash \dot{8} \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \backslash 1 \quad 2\dot{4}\dot{8} \\ \backslash 2 \quad 4\dot{2}\dot{4} \\ \backslash 4 \quad 9\dot{2} \end{array}$$

O primeiro bloco simplesmente faz  $x_0 = 7$ , e calcula  $x_0 + (1/7)x_0 = 8$ . Percebe-se aqui a conveniência dessa escolha para  $x_0$ .

$$\begin{array}{r} \backslash 1 \quad 7 \\ \backslash \dot{7} \quad 1 \end{array}$$

O segundo bloco divide 19 por 8, chegando ao resultado  $2\dot{4}\dot{8}$ . Esse resultado é igual exatamente a  $19/8$ .

$$\begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ \backslash 2 \quad 16 \\ \dot{2} \quad 4 \\ \backslash \dot{4} \quad 2 \\ \backslash \dot{8} \quad 1 \end{array}$$

O terceiro bloco multiplica  $2\dot{4}\dot{8}$  por 7

$$\begin{array}{r} \backslash 1 \quad 2\dot{4}\dot{8} \\ \backslash 2 \quad 4\dot{2}\dot{4} \\ \backslash 4 \quad 9\dot{2} \end{array}$$

Obtendo como resultado para essa operação

$$2\dot{4}\dot{8}4\dot{2}\dot{4}9\dot{2} = 15 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 16\dot{2}\dot{8} = \frac{133}{8} \quad (2.2)$$

que é o resultado procurado.

Por vezes é afirmado que os egípcios resolviam problemas com a regra de falsa posição. Essa afirmação pode dar a impressão de que ela era o método que os egípcios usavam sistematicamente para resolver problemas como o discutido acima. Isso não é verdade. Por vezes eles usavam a regra, por vezes utilizavam outros métodos.

# Capítulo 3

## Equações Quadráticas

### 3.1 A História de Bhaskara

Bhaskara nasceu em 1114 na cidade de Vijayapura na Índia, naquela época havia muitas famílias de excelentes matemáticos e os ensinamentos eram passados de pai para filho. O pai de Bhaskara era astrônomo e, como era de se esperar, ensinou-lhe Matemática e Astronomia. Bhaskara foi um dos mais importantes matemáticos do século XII, foi graças a ele que tivemos avanços em álgebra, no estudo de equações e na compreensão do sistema numérico, avanços esses que os matemáticos europeus levariam séculos ainda para atingir. Suas coleções mais conhecidas são: *Lilavati* que trata de aritmética; *Bijaganita* que discorre sobre álgebra e contém vários problemas sobre equações lineares e quadráticas com soluções feitas em prosa, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas entre outros tópicos; *Siddhantasiromani*, dividido em duas partes: uma sobre matemática astronômica e outra sobre a esfera.

Em suas obras podemos perceber que Bhaskara trabalhou com equações de segundo grau e formulou uma expressão que envolvia raízes quadradas:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \quad (3.1)$$

Ele sabia que a equação de segundo grau tem duas raízes, entretanto não é verdade que tivesse encontrado a conhecida fórmula da resolução de equação do 2º grau.

Seja  $ax^2 + bx + c = 0$  com  $a \neq 0$ , então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.2)$$

Conforme ele mesmo relatou no século 12, a mencionada fórmula fora encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara e publicada em uma obra que não chegou até os nossos dias.

Na realidade até o fim do século XVI não se utilizava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau a partir dos seus coeficientes. A representação feita

por letras, indicando os coeficientes, começou a ser desenvolvida a partir de François Viète (1540-1603). Problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam quase quatro mil anos antes, em textos escritos pelos babilônios, nas tábuas cuneiformes. Nesses textos o que se tinha era uma receita, escrita em prosa, sem uso de símbolos matemáticos, que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos, quase sempre ligados a relações geométricas.

## 3.2 A Fórmula de Bhaskara

A fórmula geral para a solução das equações quadráticas é amplamente conhecida mas merece aqui alguns comentários. Em primeiro lugar, seu encontro fundamentou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação do 2º para o 1º grau, através da extração de raízes quadradas. Este foi o engenhoso instrumento que os hindus utilizaram com sucesso para chegar à Fórmula de Bhaskara.

Seja a equação geral do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$  com  $a \neq 0$ .

Portanto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Como Extrair a raiz quadrada de  $x^2 + (b/a)x$ , se este binômio não é um quadrado perfeito? O ovo de Colombo foi somar aos dois lados da igualdade alguma coisa que tornasse o lado esquerdo um quadrado perfeito, exatamente o mesmo raciocínio seguido pelos Babilônios 3.000 anos antes. Ora, a quantidade a ser somada é  $b^2/4a^2$  pois  $x^2 + (b/a)x + b^2/4a^2$  é um quadrado perfeito. Assim, tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

o que é permitido pela já conhecida noção comum de Euclides.

Como  $x^2 + (b/a)x + b^2/4a^2$  é o quadrado perfeito de  $[x + (b/2a)]^2$ , tem-se:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Agora estamos prontos para extrair raízes quadradas, mas ainda há uma pequena armadilha em que não podemos cair e da qual não se deram conta os Babilônios: números positivos ou negativos elevados ao quadrado são sempre positivos. Portanto, extrações de raízes quadradas geram sempre duas alternativas, uma com sinal + e outra com sinal -.

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.3)$$

E aqui está a famosa Fórmula de Bhaskara, que não foi deduzida por ele mas que imortalizou seu nome. É importantíssimo chamar a atenção do leitor para o fato de que a simbologia que acabamos de empregar nesta dedução não existia à época de Bhaskara e que a utilizada por ele não seria compreendida por um leitor moderno. A ideia de reduzir o grau de uma equação para facilitar o encontro de suas raízes nem sempre pode ser aplicada, mas há casos em que se demonstra muito útil. Os babilônios foram os primeiros a descobrir este fato, redescoberto mais tarde pelos hindus.

Como já foi relatado, nesta época, os problemas que exigiam o que chamamos hoje de equação eram enunciados usando somente palavras e de modo poético. Eis um exemplo de verso:

**Exemplo 2.** De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?

No exemplo das abelhas, fazendo o enxame igual a  $2x^2$ , a raiz da metade é  $x$  e os oito nonos do todo dão  $(16/9)x^2$ , que aumentados do casal de abelhas e da raiz, devem ser iguais a  $2x^2$ , ou seja,

$$x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2.$$

Bhaskara obtém daí a equação  $2x^2 - 9x = 18$  que deve ser resolvida pelo método descrito acima. Ele explica então, por meio exclusivamente de palavras, o procedimento que podemos traduzir da seguinte maneira: multiplicando os dois membros por 8 e somando 81 temos  $16x^2 - 72x + 81 = 225$ , na qual os dois membros são quadrados. Tomando as raízes e igualando-as obtemos  $4x - 9 = 15$ , de que tiramos que o valor de  $x$  é igual a 6. Logo, o número de abelhas é 72.

# Capítulo 4

## Equações Cúbicas

### 4.1 O Segredo de Tartaglia

É fascinante toda a história da resolução das equações cúbica e quártica. Provavelmente, a descoberta, feita por italianos, da solução algébrica dessas equações foi o feito matemático mais extraordinário do século XVI. Em resumo, eis como os fatos parecem ter acontecido.

Em 1515 o método que resolvia as equações cúbicas da forma  $x^3 + px + q = 0$  foi descoberto por Scipione del Ferro (1465 - 1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, que antes de morrer o revelou aos discípulos Antônio Maria Fior e Annibale Della Nave. Por volta de 1535, Nicolo Fontana (1500 - 1557), conhecido pelo apelido de Tartaglia (gago, em italiano), anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica  $x^3 + px^2 + q = 0$ . Naquela época era frequente o lançamento de desafios entre os sábios. Fior desafiou Tartaglia para uma disputa matemática envolvendo a resolução de equações cúbicas, faltando poucos dias para a disputa Tartaglia conseguiu resolver também a equação da forma  $x^3 + px + q = 0$ . Como Tartaglia sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. A vitória de Tartaglia, muito divulgada, foi do conhecimento do médico e professor Girolano Cardano (1501 - 1576), que auto-definia-se como inescrupuloso. Logo, Cardano, conseguiu atrair Tartaglia para lhe ensinar a regra de resolução recém encontrada sob o juramento de jamais publicá-la. Veja as palavras proferidas por Cardano no seu juramento.

Juro a você, pelas Sagradas Escrituras de Deus, e como verdadeiro homem honrado, não apenas jamais publicar suas descobertas se você me ensiná-las, como também prometo, e empenho minha fé como verdadeiro cristão, anotá-las em código, de forma que, após a minha morte, ninguém será capaz de entendê-las (TOSCANO,2012, p. 171).

Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e jura-

mentos e, em 1545, fez publicar na *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, o maior compêndio algébrico da época, mais conhecida por *Ars Magna*, a fórmula revelada por Tartaglia. Embora tenha feito rasgados elogios a Tartaglia na sua publicação, conforme mostra a Figura 4.1, acrescentou que, independentemente e 30 anos antes, Scipione del Ferro chegara aos mesmos resultados.

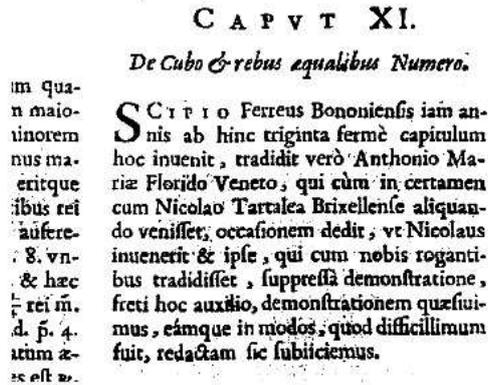


Figura 4.1: Trecho de *Ars Magna* (CARDANO, 1545).

A reação de Tartaglia foi pronta e explosiva: publicou, um ano depois, em seu livro *Quesitos et inventioni diverse* (Figura 4.2), que pode ser traduzido como Questões e invenções diversas, sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um sagrado juramento, de não publicar antes dele a sua descoberta. Este fato provocou forte reação de Ferrari, discípulo de Cardano.

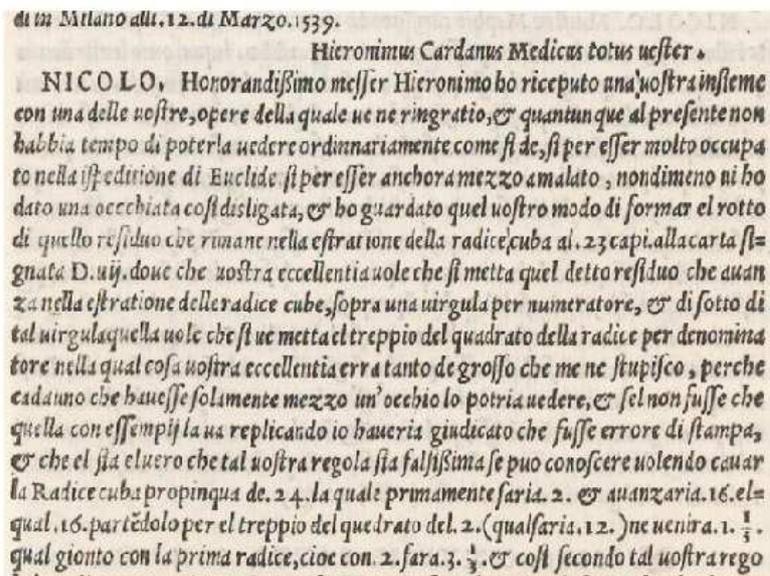


Figura 4.2: Trecho de *Quesitos et inventioni diverse* (TARTAGLIA, 1546).

## 4.2 O Método de Cardano-Tartaglia

Agora vamos ao segredo. Todas as grandes descobertas, invariavelmente, partem de uma ideia fundamental. No caso de Tartaglia foi supor que a solução procurada era composta de 2 parcelas. Assim, suponha que  $x = A + B$  é a solução da equação  $x^3 + px + q = 0$ .

Ora, os dois lados da equação sendo iguais, seus cubos também o serão e, portanto,

$$x^3 = (A + B)^3$$

$$x^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

Substituindo  $x = (A + B)$  na equação anterior, temos:

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

$$x^3 - 3ABx - (A^3 + B^3) = 0$$

Mas, ao mesmo tempo

$$x^3 + px + q = 0$$

Portanto

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad A^3 + B^3 = -q$$

Assim,  $A^3$  e  $B^3$  são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto e este é um problema clássico que se resolve com equações do segundo grau.

Como  $A^3$  e  $B^3$  são as raízes da equação quadrática

$$z^2 - (A^3 + B^3)z + A^3B^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Logo, pela fórmula de Bhaskara temos que

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad B^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Como  $x = (A + B)$ , então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (4.1)$$

Esta é a chamada fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele mas sim por Tartaglia.

Observe que o método de Cardano-Tartaglia resolve as equações do tipo  $x^3 + px + q = 0$ . Porém, a equação geral  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  pode ser transformada facilmente em  $x^3 + px + q = 0$ , fazendo  $x = y + m$  e calculando  $m$  de modo a anular o termo de 2º grau.

De fato, seja a equação geral do 3º grau  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$ .

Se  $x = y + m$ , então:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0,$$

$$a(y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3) + b(y^2 + 2my + m^2) + c(y+m) + d = 0,$$

$$ay^3 + 3amy^2 + 3am^2y + am^3 + by^2 + 2bmy + bm^2 + cy + cm + d = 0,$$

Reagrupando adequadamente os termos semelhantes, obtemos a equação

$$ay^3 + (b + 3am)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Tomaremos  $m$  de forma que  $b + 3am = 0$ , ou seja,  $m = -b/3a$ . Substituindo este valor na equação acima, obtemos a equação

$$ay^3 + \left[ b + 3a \left( \frac{-b}{3a} \right) \right] y^2 + \left[ 3a \left( \frac{-b}{3a} \right)^2 + 2b \left( \frac{-b}{3a} \right) + c \right] y + \left[ \left( \frac{-b}{3a} \right)^3 a + b \left( \frac{-b}{3a} \right)^2 + c \left( \frac{-b}{3a} \right) + d \right] = 0$$

Para  $m = -b/3a$ , transformamos a cúbica  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  na equação

$$ay^3 + \left( -\frac{b^2}{3a} + c \right) y + \left( \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) = 0.$$

Finalmente, multiplicando toda a equação por  $1/a$ , segue que

$$y^3 + \underbrace{\left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} \right) \right]}_p y + \underbrace{\left[ \frac{2}{27} \left( \frac{b}{a} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{c}{a} \right) + \left( \frac{d}{a} \right) \right]}_q = 0$$

que está na forma reduzida  $y^3 + py + q = 0$ .

A nova equação do 3º grau em  $y$  será do tipo  $y^3 + py + q = 0$  e, se soubermos resolvê-la, acharemos  $x$  que é  $y + m$ . Portanto, quando encontrou a solução das equações do tipo  $x^3 + px + q = 0$ , Tartaglia encontrou um método para resolver a equação geral  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  do 3º grau e não apenas um caso particular do tipo  $y^3 + py + q = 0$ , o que aumenta seu mérito.

**Exemplo 3.** Resolva a equação  $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$  usando o método de Cardano-Tartaglia.

Comparando-a com a forma geral  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  e usando as fórmulas obtidas para  $m$ ,  $p$  e  $q$  segue que

$$m = -\frac{b}{3a} \Rightarrow m = 1, \quad p = -\frac{1}{3} \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} \right) \Rightarrow p = -6,$$

$$q = \frac{2}{27} \left( \frac{b}{a} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{c}{a} \right) + \left( \frac{d}{a} \right) \Rightarrow q = -9$$

Logo, a equação cúbica reduzida  $y^3 + py + q = 0$  pode ser escrita como  $y^3 - 6y - 9 = 0$ . Aqui temos,  $p = -6$  e  $q = -9$ . Logo, a solução pela fórmula de Cardano-Tartaglia é:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$y = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$y = 3$$

Como  $x = y + m$ , substituindo  $y = 3$  e  $m = 1$ , obtemos  $x = 4$ .

Por simples verificação, constata-se que 4, realmente, é solução da equação

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$$

e a fórmula de Cardano-Tartaglia, como esperado, funcionou.

Inicialmente, imaginou-se que as equações do 3º grau estavam vencidas pela fórmula de Cardano-Tartaglia, analogamente ao que a fórmula de Bhaskara fizera com as equações quadráticas. Mas a ilusão durou pouco tempo. Logo surgiram dúvidas, perguntas e problemas suscitados pelo método de Cardano-Tartaglia que demandariam cerca de 200 anos e esforços dos melhores cérebros dos séculos XVII, XVIII e XIX até que fossem esclarecidas.

Retrocedendo à época de sua descoberta, podemos dizer que o caso em que as cúbicas da forma  $x^3 + px + q = 0$  possuem

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

foi o embrião dos posteriores estudos que conduziram ao desenvolvimento dos Números Complexos. Portanto, seria natural que, tanto Cardano quanto Tartaglia não soubessem lidar com esta situação, o que pode ser evidenciado a partir de correspondências trocadas por eles, e que vale a pena aqui reproduzir. Em carta datada de 4 de agosto de 1539, Cardano assim escreveu para Tartaglia:

Escrevo para dizer-lhe que estou bem e que lhe escrevi muitas outras cartas, às quais, porém, o senhor não se dignou responder [...] ainda mais que lhe pedi a solução de diversos quesitos que ficaram sem resposta, e um deles é o quesito de cubo igual a coisas e número  $[x^3 = px + q]$ . É verdade que eu entendi a regra, mas quando o cubo da terceira parte das coisas  $[(p/3)^3]$  excede o quadrado da metade do número  $[(q/2)^2]$ , então não posso colocar depois deles a equação, como aparece. Portanto, me agradaria muito se o senhor resolvesse essa equação: um cubo igual a quinze coisas mais quatro  $[x^3 = 15x + 4]$ . Realmente, o senhor me faria um favor enorme (TOSCANO, 2012, p. 172).

Não querendo admitir seu desconhecimento sobre a questão, Tartaglia respondeu para Cardano da seguinte forma:

Senhor Hierônimo [Gerolamo], recebi a sua carta, na qual me escreve que entendeu o capítulo de cubo igual a coisas e número  $[x^3 = px + q]$ , mas quando o cubo da terceira parte das coisas  $[(p/3)^3]$  excede o quadrado da metade do número  $[(q/2)^2]$  não pode continuar a equação, e que, por essa razão, me pede que lhe mande resolvido esse capítulo de um cubo igual a quinze coisas mais quatro  $[x^3 = 15x + 4]$ . E, portando, respondo-lhe e digo que não pegou o caminho correto para resolver esse capítulo; ao contrário, pegou um caminho totalmente errado (TOSCANO, 2012, p. 173 e 174).

A dúvida de Cardano refere-se a equação  $x^3 = 15x + 4$ , quando resolvida pela fórmula de Cardano-Tartaglia, produzia como resposta:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Mas ele sabia, como é fácil de verificar, que o número quatro é solução da equação. Então, de alguma maneira, a igualdade:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

tinha de ser verdadeira! Cardano ficou perplexo e confuso. Porém, como foi dito anteriormente o problema só foi resolvido muito tempo depois com a criação dos Números complexos.

Diferentemente do que se pensa não foram as soluções de equações quadráticas, com discriminante negativo, que levou ao surgimento dos números complexos e sim a tentativa de se resolver equações cúbicas desse tipo, envolvendo a raiz quadrada de um número negativo. Então como resolver tal questão? A resposta foi dada por Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530. Conforme seu próprio relato em 1572 no livro

*L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi supor que os números  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  deveriam ser da forma  $a + b\sqrt{-1}$  e  $c + d\sqrt{-1}$ , respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} &= a + b\sqrt{-1} \\ 2 + \sqrt{-121} &= (a + b\sqrt{-1})^3 \\ 2 + \sqrt{-121} &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\ 2 + 11\sqrt{-1} &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 2 \\ 3a^2b - b^3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} &= c + d\sqrt{-1} \\ 2 - \sqrt{-121} &= (c + d\sqrt{-1})^3 \\ 2 - \sqrt{-121} &= c^3 + 3c^2d\sqrt{-1} - 3cd^2 - d^3\sqrt{-1} \\ 2 - 11\sqrt{-1} &= (c^3 - 3cd^2) + (3c^2d - d^3)\sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} c^3 - 3cd^2 = 2 \\ 3c^2d - d^3 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Portanto uma raiz da equação é  $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$ .

# Capítulo 5

## Equações Quárticas

### 5.1 Ferrari, o Discípulo que Superou o Mestre

Ludovico Ferrari (1522-1560) nasceu em Bologna. Foi o mais famoso dos discípulos de Cardano. De origem muito humilde foi trabalhar como servo na casa de Cardano quando tinha 15 anos. Sua inteligência foi logo reconhecida e logo ocupou o cargo de secretário. Seu gênio incontrolável gerava constantes atritos com Cardano, mas apesar disso, eram amigos e colaboradores. A partir dos 18 anos, Ferrari passou a ensinar por conta própria em Milão e sob a proteção do Cardeal de Mantôva, alcançou posições que lhe proporcionavam boa renda. Em 1540, Ferrari substituiu seu mestre, Cardano, num encontro com Tartaglia com o objetivo de defender Cardano das acusações feitas por Tartaglia. Nessa mesma época, um certo Zuanne de Tonini da Coi propôs, a Cardano, que resolvesse o seguinte desafio: Dividir 10 em 3 partes que formem uma proporção continua, sendo o produto das duas primeiras iguais a 6, cuja solução recaía numa equação quártica. Veja.

$$\text{Sejam } x, y \text{ e } z \text{ os números procurados tais que } \begin{cases} I : x + y + z = 0 \\ II : xz = y^2 \Rightarrow z = y^2/x \Rightarrow z = 36/x^3 \\ III : xy = 6 \Rightarrow y = 6/x \end{cases}$$

Substituindo os valores de  $y$  e  $z$  em I, obtemos

$$x + \frac{6}{x} + \frac{36}{x^3} = 10$$
$$\frac{x^4 + 6x^2 + 36}{x^3} = \frac{10x^3}{x^3}$$
$$x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 36 = 0$$

Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou a questão a Ferrari, que surpreendentemente superou seu mestre e encontrou um método geral para a solução das equações do 4º grau. Cardano teve o prazer de publicar também essa solução em sua *Ars Magna*. Aos 38 anos tornou-se professor de matemática na Universidade de Bologna e em seguida veio a falecer, provavelmente envenenado pela própria irmã.

## 5.2 A Solução de Ferrari para a Quártica

Inicialmente demonstraremos como transformar a equação quártica escrita na forma geral  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  na forma reduzida  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  e em seguida apresentaremos a solução desta última, descoberta por Ferrari. Consideremos a equação polinomial geral do 4º grau, também conhecida como quártica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0;$$

em que  $a, b, c, d, e$  são constantes reais e  $a \neq 0$ . Como foi feito para a determinação de uma solução da equação cúbica, faremos uma mudança de variável, tomemos  $x = y + m$ , com  $m$  a ser determinado de forma conveniente. Assim,

$$a(y+m)^4 + b(y+m)^3 + c(y+m)^2 + d(y+m) + e = 0,$$

$$a(y^4 + 4my^3 + 4m^2y^2 + 4m^3y + m^4) + b(y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3) + c(y^2 + 2my + m^2) + d(y+m) + e = 0,$$

$$ay^4 + 4amy^3 + 4am^2y^2 + 4am^3y + am^4 + by^3 + 3bmy^2 + 3bm^2y + bm^3 + cy^2 + 2cmy + cm^2 + dy + dm + e = 0,$$

Reagrupando adequadamente os termos semelhantes, obtemos a equação

$$ay^4 + (4am + b)y^3 + (6am^2 + 3bm + c)y^2 + (4am^3 + 3bm^2 + 2cm + d)y + (am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e) = 0.$$

Tomaremos  $m$  de forma que  $4am + b = 0$ , ou seja,  $m = -b/4a$ . Substituindo este valor na equação acima, obtemos a equação

$$ay^4 + \left[ 4a \left( \frac{-b}{4a} \right) + b \right] y^3 + \left[ 6a \left( \frac{-b}{4a} \right)^2 + 3b \left( \frac{-b}{4a} \right) + c \right] y^2 +$$

$$\left[ 4a \left( \frac{-b}{4a} \right)^3 + 3b \left( \frac{-b}{4a} \right)^2 + 2c \left( \frac{-b}{4a} \right) + d \right] y + \left[ a \left( \frac{-b}{4a} \right)^4 + b \left( \frac{-b}{4a} \right)^3 + c \left( \frac{-b}{4a} \right)^2 + d \left( \frac{-b}{4a} \right) + e \right] = 0.$$

$$ay^4 + \left( -\frac{3b^2}{8a} + c \right) y^2 + \left( \frac{b^3}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d \right) y + \left( -\frac{3b^4}{256a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{bd}{4a} + e \right) = 0.$$

Multiplicando toda a equação por  $1/a$ , segue que

$$y^4 + \underbrace{\left[ -\frac{3}{8} \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a} \right) \right]}_p y^2 + \underbrace{\left[ \frac{1}{8} \left( \frac{b}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{c}{a} \right) + \left( \frac{d}{a} \right) \right]}_q y +$$

$$\underbrace{\left[ -\frac{3}{256} \left( \frac{b}{a} \right)^4 + \frac{1}{16} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{c}{a} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{b}{a} \right) \left( \frac{d}{a} \right) + \left( \frac{e}{a} \right) \right]}_r = 0,$$

que está na forma reduzida  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ .

A ideia de Ferrari foi a de reagrupar adequadamente os termos em ambos os lados da quártica reduzida, de modo a obter trinômios quadrados perfeitos em cada um dos lados. Se isso fosse possível, bastaria extrair as raízes quadradas de ambos os membros e, com isso, recair-se-ia num par de equações quadráticas. Esse elegante argumento de fato funcionou, como mostraremos abaixo.

Da expressão  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  segue que  $y^4 + py^2 + r = -qy$  e somando  $\alpha y^2 + \beta$  a ambos os membros (onde  $\alpha$  e  $\beta$  serão determinados a posteriori) encontramos que

$$y^4 + (p + \alpha)y^2 + (r + \beta) = \alpha y^2 - qy + \beta$$

A fim de que esses trinômios sejam quadrados perfeitos, é necessário e suficiente que os respectivos discriminantes sejam iguais a zero, ou seja

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 \quad \text{e} \quad q^2 - 4\alpha\beta = 0.$$

De  $q^2 - 4\alpha\beta = 0$  segue que  $\beta = q^2/4\alpha$ .

Substituindo  $\beta$  por  $q^2/4\alpha$ , na equação

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0,$$

obtemos

$$(p + \alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0,$$

$$p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - q^2/\alpha = 0,$$

Reagrupando em função de  $\alpha$ , temos

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0.$$

Esta última equação é uma cúbica na incógnita  $\alpha$ . Como já sabemos resolver as cúbricas, podemos achar  $\alpha$ . Encontrando  $\alpha$ , poderíamos calcular  $\beta$ , mas isso não é necessário. Pode parecer estranho não precisar conhecer o valor de  $\beta$ , mas isso fica claro quando escrevemos os trinômios na sua forma fatorada:

$$y^4 + (p + \alpha)y^2 + (r + \beta) = \alpha y^2 - qy + \beta,$$

sabendo que

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 \Rightarrow r + \beta = \left(\frac{p + \alpha}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha}$$

substituindo obtemos

$$y^4 + (p + \alpha)y^2 + \left(\frac{p + \alpha}{2}\right)^2 = \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha},$$

fatorando os dois membros da equação obtemos

$$\left(y^2 + \frac{p + \alpha}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}y - \frac{q}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2,$$

$$\left[y^2 + \frac{p + \alpha}{2}\right]^2 = \left[\sqrt{\alpha}\left(y - \frac{q}{2\alpha}\right)\right]^2.$$

Notemos que  $\beta$  não aparece nas formas fatoradas dos trinômios. Extraindo as raízes quadradas de ambos os membros, segue que

$$y^2 + \frac{p + \alpha}{2} = \pm\sqrt{\alpha}\left(y - \frac{q}{2\alpha}\right).$$

Assim temos um par de equações quadráticas:

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p + \alpha}{2} + \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p + \alpha}{2} - \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0.$$

Cada uma das equações quadráticas acima fornece duas raízes da quártica reduzida. Assim, ao resolver as duas equações quadráticas obtemos as 4 raízes da quártica reduzida. Para calcular as raízes da quártica original, basta lembrar que  $x = y - b/4a$ .

O método empregado por Ferrari nos mostra que existe um caminho estritamente algébrico que leva às raízes da quártica. No entanto, como ele depende da solução de uma cúbica, pode ser que a cúbica em questão não seja passível de solução algébrica, e desse modo, também não teríamos como resolver algebricamente a quártica associada.

**Exemplo 4.** Resolva a equação  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$  usando o método de Ferrari.

Comparando-a com a forma geral  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  e usando as fórmulas obtidas para  $m$ ,  $p$ ,  $q$  e  $r$  segue que

$$m = -\frac{b}{4a} \Rightarrow m = \frac{1}{2}, \quad p = -\frac{3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow p = -\frac{9}{2},$$

$$q = \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right) \Rightarrow q = 4,$$

$$r = -\frac{3}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \left(\frac{e}{a}\right) \Rightarrow r = -\frac{15}{16}$$

Logo, a equação quártica reduzida  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  pode ser escrita como

$$y^4 - \frac{9}{2}y^2 + 4y - \frac{15}{16} = 0,$$

cujas equação cúbica relacionada  $\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$  é

$$\alpha^3 - 9\alpha^2 + 24\alpha - 16 = 0.$$

Comparando-a com a forma geral  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  e usando as fórmulas obtidas para  $m$ ,  $p$  e  $q$  segue que

$$m = -\frac{b}{3a} \Rightarrow m = 3, \quad p = -\frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow p = -3,$$

$$q = \frac{2}{27} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right) \Rightarrow q = -2$$

Logo, a equação cúbica reduzida  $\alpha_0^3 + p\alpha_0 + q = 0$  pode ser escrita como

$$\alpha_0^3 - 3\alpha_0 + 2 = 0,$$

cuja solução pela fórmula de Cardano-Tartaglia é:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ \alpha_0 &= \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3}} \\ \alpha_0 &= \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{9}{9}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{9}{9}}} \\ \alpha_0 &= \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{36-36}{36}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{36-36}{36}}} \\ \alpha_0 &= \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{0}{36}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{0}{36}}} \\ \alpha_0 &= -\sqrt[3]{-\frac{2}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2}} \\ \alpha_0 &= -1 - 1 \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = -2.$$

Como,  $\alpha = \alpha_0 + m$  temos que

$$\alpha = -2 + 3,$$

$$\alpha = 1,$$

Logo, as equações quadráticas associadas

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p + \alpha}{2} + \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p + \alpha}{2} - \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0$$

podem ser escritas nas formas

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = 0, \text{ cujas raízes são } y_1 = \frac{1}{2} \text{ e } y_2 = \frac{1}{2}$$

ou

$$y^2 + y - \frac{15}{4} = 0, \text{ cujas raízes são } y_3 = \frac{3}{2} \text{ e } y_4 = -\frac{5}{2}.$$

Assim, como  $x = y + m$ , temos que:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_4 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Por simples verificação, constata-se que 1, 2 e  $-2$ , realmente, são soluções da equação  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$  e o método de Ferrari, como esperado, funcionou.

Não resta dúvida de que se trata de um método bastante trabalhoso e é bom lembrar que a resolução da quártica depende da resolução da cúbica. Assim, para a época, quando a equação cúbica que encontramos relacionada a equação quártica apresentava

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

o método de Ferrari não funcionava pelo mesmo problema que Cardano já havia descrito, raízes quadrada de números negativos.

# Capítulo 6

## Equações de Grau 5

### 6.1 Galois e Abel

No capítulo 3 deste trabalho foi dito que a narrativa histórica da resolução da cúbica e da quártica foi fascinante. No entanto, é preciso dizer que, o verdadeiro clímax da história das equações algébricas se deu com o enfrentamento da próxima da fila: a quántica. Aqui daremos apenas um breve vislumbre dessa empolgante narrativa, pois uma descrição mais completa exigiria muito espaço, além de um razoável domínio da matemática envolvida. Isto não apenas levaria tempo, como também fugiria ao escopo deste trabalho.

Naturalmente, os matemáticos estavam ávidos por conquistar mais esta terra desconhecida, mas o fato é que, durante os 250 anos que se seguiram após a solução da quártica por Ferrari, ninguém foi capaz de encontrar uma fórmula resolutiva para a quántica. Essa busca sem precedentes na História da Matemática reuniu as mentes mais brilhantes do milênio: nomes como Descartes, Euler, Gauss, Lagrange, Bézout, Tschirnhaus, Harriot, Ruffini e Cauchy tomaram partido na caça à resolução da quántica, que exigiu o máximo do talento e da capacidade imaginativa de cada um deles. O desenlace, surpreendente, foi protagonizado pelas mentes geniais de dois jovens prodígios da Matemática: Niels Abel (1802 - 1829) e Évariste Galois (1811 - 1832). Explicando de maneira sucinta e figurada, o que sucedeu ao se tentar solucionar a equação polinomial do 5º grau foi que a noz em questão não era apenas muito dura. Era, de fato, inquebrável, à prova de qualquer investida que pudesse ser imaginada, em termos puramente algébricos, e isto foi provado com todo o rigor. Dizendo de outra maneira, de tanto buscar uma fórmula para a quántica geral sem obter sucesso, os matemáticos começaram a desconfiar que uma tal fórmula pudesse não existir. Para não correr o risco de consumir todas as energias mentais numa busca fadada ao fracasso, os matemáticos voltaram seus esforços para buscar uma prova de que a quántica geral não era passível de ser resolvida algebricamente. Mesmo essa nova perspectiva revelou-se extremamente penosa, mas por fim gerou o fruto pretendido.

Abel com ferramentas de Aritmética e Galois criando novas ferramentas que hoje

constituem a teoria de Grupos, cada um a seu modo deu a resposta definitiva para o problema de encontrar uma solução algébrica para a quártica. Eles provaram que não há uma solução geral neste caso. Porém, é possível mostrar que as equações quárticas da forma  $x^5 - px^3 + (p^2/5)x - r = 0$ , já estudadas por DE MOIVRE, tem raízes dadas por uma fórmula que envolve radicais análoga a de Cardano-Tartaglia.

Considere a equação  $x^5 - px^3 - qx - r = 0$ . Calculemos polinômios do binômio:

$$(u + v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$$

pondo em evidência obtemos:

$$(u + v)^5 = 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u + v) + (u^5 + v^5)$$

da igualdade obtida no estudo das cúbicas obtemos que:

$$(u^3 + v^3) = (u + v)^3 - 3uv(u + v)$$

para substituir no desenvolvimento donde obtemos que:

$$(u + v)^5 = 5uv(u + v)^3 - 15u^2v^2(u + v) + 10u^2v^2(u + v) + (u^5 + v^5),$$

isto é,

$$(u + v)^5 = 5uv(u + v)^3 - 5u^2v^2(u + v) + (u^5 + v^5)$$

o que permite obter as igualdades:  $p = 5uv$ ;  $q = 5u^2v^2$  e  $r = u^5 + v^5$ .

Estabelecemos  $p^2 = 25u^2v^2$ , logo temos que  $q = (-p^2/5)$  faz com que a equação seja da forma  $x^5 - px^3 + (p^2/5)x - r = 0$ , se  $x = u + v$  for uma raiz.

Verificar as relações

$$\begin{cases} r = u^5 + v^5 \\ \left(\frac{p}{5}\right)^5 = u^5v^5 \end{cases}$$

nos leva ao caso já estudado na dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia, ou seja, as raízes são:

$$u^5 = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{5}\right)^5} \quad \text{e} \quad v^5 = \frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{5}\right)^5}$$

de onde concluímos que a raiz  $x = u + v$  é dada pela fórmula:

$$x = \sqrt[5]{\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{5}\right)^5}}. \quad (6.1)$$

# Capítulo 7

## Sequência Didática para o Ensino das Equações Quadráticas

### 7.1 Sugestão de Sequência Didática

#### 1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho buscou desenvolver uma sequência didática no ensino da Matemática, para o conteúdo de equações do 2º grau. Conteúdo esse desenvolvido, nas escolas do município de Picuí PB, no 9º ano, do Ensino Fundamental com alunos entre 13 e 15 anos de idade.

As sequências didáticas são planejadas e desenvolvidas para a realização de determinados objetivos educacionais, com início e fim conhecidos tanto pelos professores, quanto pelos alunos. Para compreender o valor pedagógico e as razões que justificam uma sequência didática é fundamental identificar suas fases, as atividades que a constitui e as relações que estabelecem com o objeto de conhecimento, visando atender as verdadeiras necessidades dos alunos. Para que uma sequência didática obtenha sucesso é necessário seguir alguns passos que, obrigatoriamente, devem ser respeitados:

1º passo - Apresentação do projeto: Momento em que o professor apresenta aos alunos a tarefa e os estudos que irão realizar.

2º passo - Produção inicial: Os alunos, já informados sobre o projeto, irão expor o que sabem e pensam sobre o assunto, por meio de produção de texto, conversas, etc. A produção inicial trata-se de uma avaliação prévia e é através dela que o professor conhece as dificuldades dos alunos e obtém meios de estabelecer quais atividades deverão ser empregadas na sequência didática.

3º passo - Os módulos: Atividades (exercícios e pesquisas) planejadas metodicamente, com a finalidade de desenvolver as capacidades do aluno. Os módulos devem ser direcionados às dificuldades encontradas na produção inicial dos alunos e visando a superação des-

sas dificuldades, devem propor atividades diversificadas e adaptadas às particularidades da turma.

4º passo - Produção final: Avaliação do que conseguiram aprender no decorrer da sequência didática (comparação entre produção inicial e produção final).

O processo compreende várias aulas e é composto por Situações Problemas que estão ligados a resolução dessas equações por meio do método de completamento de quadrados, especialmente aquelas que são colocados na História da Matemática como propulsores do estudo da resolução das equações quadráticas. Nosso objetivo é planejar, estruturar e articular as atividades sugeridas, com a finalidade de desenvolver a capacidade do aluno de resolver as equações quadráticas de modo que essa solução não se torne uma simples substituição de valores na fórmula de Bhaskara. As atividades serão direcionadas às dificuldades dos alunos visando à superação dessas dificuldades.

## 2. OBJETIVOS

Espera-se que o professor e os alunos consigam:

- Utilizar metodologias diferenciadas que possibilitem ampliar o raciocínio do aluno na compreensão sobre o que é e como resolver equações do 2º grau, utilizando para isso, alguns problemas da geometria que recaem numa equação do segundo grau obtendo as raízes por diferentes métodos, além de relacionar seu aspecto histórico e respectivas aplicações.
- Manipular equações do segundo grau, obtendo equações equivalentes, de forma a resolvê-las utilizando a fatoração de trinômios quadrados perfeitos. Em seguida, aplica-se esse processo na dedução da fórmula de resolução de equações do 2º grau.
- Traduzir situações que podem ser escritas por meio de equações do segundo grau. Resolver as equações obtendo suas raízes mediante o uso de um dos procedimentos possíveis e discutindo o significado dessas raízes em confronto com as situações propostas.
- Promover investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem, por meio da leitura e análise de narrativas históricas e atuais.
- Construir um roteiro de aprendizagem (narrativa) do percurso trilhado pelo aluno.

## 3. JUSTIFICATIVA

Dentre os conteúdos direcionados ao 9º ano do Ensino Fundamental, destacamos as aplicações de equações do 2º grau nas concepções geométricas. Em geral, ao ensiná-la, a

maioria dos professores, limita-se a demonstrar a conhecida fórmula para soluções, chamadas em muitos livros didáticos de fórmula de Bhaskara. Embora já esteja evidente aos nossos olhos, a maioria de nossos alunos fica surpresa quando lhes contamos que a equação do 2º grau tem uma longa história e que muitos matemáticos importantes, de várias civilizações, se preocuparam em achar suas soluções, contribuindo desta maneira para a história.

#### 4. COMPETÊNCIAS/HABILIDADES

Espera-se que o aluno consiga:

- Compreender a linguagem algébrica na representação de situações e problemas geométricos;
- Expressar situações envolvendo equações de 2º grau na forma algébrica;
- Resolução de equações do 2º grau por diferentes métodos: completamento de quadrado e aplicação da fórmula de Bháskara;
- Utilizar a linguagem algébrica para exprimir área e perímetro de uma figura plana;
- Capacidade de interpretar enunciados;
- Transpor ideias relacionadas à álgebra para a geometria.

#### 5. ESTRATÉGIAS E/OU PROCEDIMENTOS

##### **Atividade 1- Investigando e Aprendendo:**

Conhecer as características presentes em uma equação do 2º grau para identificá-la sempre que necessários. Aula expositiva e investigativa onde os alunos, a partir da definição geral de Equação, possam comparar uma equação do 1º grau com uma do 2º grau, citando as diferenças e semelhanças existentes (tempo: 1 aula em sala).

Iniciar uma breve história sobre o aparecimento das equações do 2º grau no Egito, Mesopotâmia, Grécia, Índia, sem explanar como é feita a resolução. Para isto, apresentar aos alunos o vídeo Esse tal de Bhaskara da Série Matemática na Escola, disponível no site <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1097>. O objetivo deste episódio é proporcionar ao aluno um passeio histórico que abarca diferentes períodos do desenvolvimento da Matemática, ocorridos em diferentes civilizações. Com isso, pretendemos que o aluno perceba que o conteúdo matemático em questão, bem como todos os demais, está inserido em um contexto histórico amplo. O conteúdo apresentado no vídeo foi inspirado no texto “Uma abordagem histórica para a equação de 2º grau”, de Wagner da Cunha Fragoso, publicado na Revista do professor de Matemática (tempo: 2 aulas em sala).

### Atividade 2: Construindo narrativas:

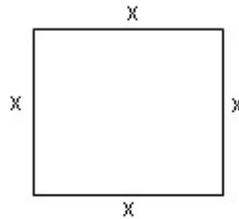
Dividir os alunos em grupos e apresentar um texto sobre a “História da Álgebra/Equação do 2º grau” e instrua-os que após a leitura do texto e do que foi apresentado no vídeo, o grupo realize uma pesquisa na internet de imagens e elaborem um texto coletivo sobre equações do segundo grau na história da matemática (tempo: 2 aulas no laboratório de informática).

### Atividade 3: Completando quadrados:

Completar o quadrado pelo método geométrico e resolver equação do 2º grau completa sem o auxílio da fórmula de Bhaskara. Enfatizar a construção do quadrado, retomando o conhecimento da fatoração do trinômio quadrado perfeito pelos alunos. Chamar a atenção dos alunos que Al-Khowarizmi não conhecia os números negativos, por isso seus métodos determinavam apenas as raízes positivas e o zero. A título de ilustração, consideremos o problema: (tempo: 4 aulas)

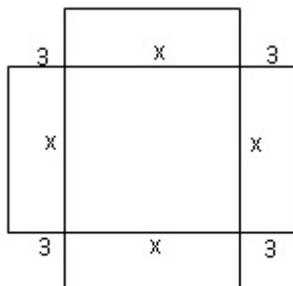
Resolva a equação  $x^2 + 12x - 64 = 0$  completando quadrados.

1º Construa um quadrado de lados  $x$ .



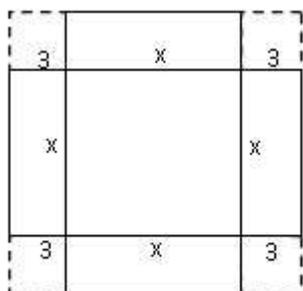
A área do quadrado representa o termo  $x^2$ .

2º Para representar o termo  $12x$  construa quatro retângulos de lados 3 e  $x$ , como mostra a figura.



3º Questione o que deve ser feito para que a figura obtida se transforme em um quadrado.

4º Complete a figura com quatro quadrados de lados com medida 3, como mostra a figura.



5º A área do quadrado maior representa o método de completar quadrados.

$$x^2 + 4 * 3x + 4 * 9 = x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2.$$

Assim, a expressão resultante seria:

$$x^2 + 12x + 36 = 64 + 36 \quad \text{ou} \quad x^2 + 12x + 36 = 100$$

Explique que o motivo de se adicionar 36 do lado direito da igualdade deve-se ao fato de que tudo o que se faz de um lado deve ser feito do outro para manter a igualdade satisfeita, “equilibrada”. Dessa forma o aluno compreende o motivo de o processo ser denominado por completar quadrados e visualiza a figura que precisou ser completada para se obter um quadrado. Assim,

$$(x + 6)^2 = 100 \Rightarrow x + 6 = \pm 10 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -16$$

#### **Atividade 4: A Fórmula de Bhaskara:**

Distribuir para os alunos o texto “De onde veio esta fórmula” e discutir com os alunos fórmula hindu e a dedução da fórmula de Bháskara. Após análise do texto, propor a resolução de exercícios de aplicação da fórmula (tempo: 4 aulas).

#### **Atividade 5: Olhando o Delta:**

Analisar as raízes da equação e a importância do discriminante (tempo: 1 aula).

#### **Atividade 6: Equações do 2º Grau na Resolução de Problemas:**

Apresentar uma coleção de exercícios exemplares que explorem diferentes contextos de aplicações sobre o tema. É importante ressaltar aos alunos que nem sempre é necessário o uso de fórmula para resolver um problema, mas quando acharem conveniente, poderão usá-la livremente. Uma sugestão é utilizar os problemas do livro didático do Aluno (tempo: 4 aulas).

## 6. RECURSOS MATERIAIS E TECNOLÓGICOS NECESSÁRIOS:

- materiais didáticos (lápiz, régua, sulfite, etc.);
- projetor e vídeos;
- laboratório de informática;
- textos impressos;
- livro didático e Caderno do Aluno volume 2.

## 7. AVALIAÇÃO

Avaliação contínua oriunda da observação do comportamento do aluno como um todo; participação durante as aulas, comprometimento com a execução e entrega das atividades propostas (a serem realizadas em sala aula ou fora dela) bem como seus resultados satisfatórios considerando suas limitações. As avaliações devem verificar se o aluno está apto a:

- Equacionar um problema a partir da leitura e interpretação do seu enunciado;
- Identificar se a equação possui ou não solução, assim como resolvê-la aplicando o método que achar mais conveniente;
- Criar (e resolver) seus próprios problemas envolvendo equação do 2º grau;
- O aluno deverá ser capaz de narrar a sua aprendizagem, para tanto deverá contextualizar o seu percurso na sua aprendizagem com a matemática: “O que aprendi”. Esta atividade poderá ser feita em forma de história em quadrinhos em cartaz ou usando um recurso tecnológico.

# Capítulo 8

## Conclusões

As equações polinomiais, hoje em dia, já não recebem a mesma atenção que antes, e sua importância, embora não seja pequena, não se compara à das atuais equações diferenciais, por exemplo. Ainda assim, elas continuam presentes no nosso cotidiano, em variados graus. Em particular, é no ambiente escolar que muitos problemas elementares, quando formulados em linguagem matemática, redundam em equações polinomiais a uma variável, daí a importância de se estudar essas equações e de saber como resolvê-las.

Ao apresentar o contexto histórico da resolução das equações polinomiais, evidenciamos o caráter humano da Matemática, mostrando que ela é construída por pessoas normais, e que, ao contrário do que muitos pensam, não é uma ciência fria e distante da experiência humana. Além disso, a emocionante narrativa da busca pelas soluções dessas equações, com as histórias incríveis de pessoas como Tartaglia e Cardano, serve como motivação para o estudo introdutório dos números complexos. Embora tenhamos abordado apenas superficialmente o relato da resolução da quártica, que traz em seu bojo as extraordinárias e comoventes crônicas de gênios como Abel e Galois, acreditamos que nosso enfoque tenha sido suficiente para despertar a curiosidade do leitor interessado, de certa forma convidando-o a um aprofundamento no tema, o que lhe dará um vislumbre das razões que levaram à invenção de uma teoria tão abstrata como a Teoria de Galois, a qual foi o produto final da busca pela resolução das equações polinomiais.

Por fim, expusemos em linguagem simples a maneira de resolver as equações do 3º e 4º graus, e com isso acreditamos ter ajudado a preencher uma lacuna no ensino deste tópico na atualidade. Dizemos isso por experiência própria pois, nos tempos de estudante secundarista, sentíamos extrema dificuldade em encontrar algum material que tratasse da resolução dessas equações, e foi uma satisfação elaborar este trabalho que poderá se prestar ao papel de mais uma fonte de pesquisa acerca do assunto.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide-2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, (1996).
- [2] EVES, howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas-SP, ed. UNICAMP, (2004).
- [3] GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo-SP: Editora Livraria da Física, (2007).
- [4] GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira, SAUER, Lisandra de Oliveira, FRANK Rosvita Fuelber. **A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico**. Disponível em: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental II. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>> Acesso em: 18 Fev. (2016).
- [5] HEFEZ e M. L. T. Villela. **Polinômios e Equações Algébricas**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
- [6] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual Editora, 2005.
- [7] JUNIOR, F. M. **Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro Grau**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, (2013).
- [8] MACHADO, A.R.; CRISTOVÃO, V.L.L. **A construção de modelos didáticos de gêneros: aportes e questionamentos para o ensino de gêneros**. Revista Linguagem em (Dis)curso, volume 6, número 3. set/dez., (2006).
- [9] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Pró-Letramento : Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2008. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docmantask=doc\\_download](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docmantask=doc_download)>. Acesso em: 19 de março de 2016.

- [10] Normas da ABNT – NBR 6023: **Elaboração de referências**,(2000). Disponível em <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>>. Acesso em 15 abril 2016.
- [11] Normas da ABNT – NBR 14724: **Informação e documentação – Trabalhos acadêmicos – Apresentação**, 3<sup>a</sup> edição, (2011). Disponível em <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR14724.pdf>>. Acesso em 15 abril 2016.
- [12] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **t Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;
- [13] PHELIPPE, T. A. **Equações Algébricas no Ensino Médio: História, Resolução Numérica e Tecnologia Educacional**. Curitiba: Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, (2015).
- [14] TOSCANO, F. **A Fórmula Secreta**. 1. ed. Campinas - SP: Editora Unicamp, (2012).

# Apêndice A

## Primeiro Apêndice

Neste Apêndice apresentaremos um pouco da história de dois dos mais brilhantes matemáticos da História da Matemática responsáveis pelas descobertas realizadas no estudo das equações quinticas.

### 1. ÉVARISTE GALOIS (1811 - 1832)

Nasceu próximo a Paris, em uma aldeia de Bourg-la-Reine, seu pai Nicolas Gabriel Galois foi eleito prefeito dessa aldeia quando Évarist tinha apenas quatro anos de idade. Com 12 anos de idade não tinha muito interesse por Latim, Grego e Álgebra mas a Geometria de Legendre o fascinava.

Quando tinha 16 anos de idade, julgando-se em condições, ele procurou ingressar na Escola Politécnica mas foi recusado por falta de preparo e isto acabou marcando-o como seu primeiro fracasso. Um ano mais tarde escreveu um artigo onde expôs suas descobertas fundamentais entregando-o a Cauchy para que o apresentasse na Academia, só que por ironia do destino Cauchy perdeu o seu trabalho e com isto veio o segundo fracasso marcante em sua vida.

Logo mais perdeu o seu pai devido a intrigas, o que acabou fazendo com que ele se suicidasse. Desiludido Galois entrou em uma escola normal a fim de preparar-se para seguir o ramo do ensino, sempre continuando com suas pesquisas é claro.

Em 1830 escreveu um artigo para o concurso de Matemática da Academia entregando-o para Fourier, que morreu logo depois e o artigo foi perdido. Com tantas frustrações Galois acabou por aderir às causas da revolução de 1830, foi expulso da Escola Normal e mais tarde entrou para a guarda nacional. Galois iniciou suas pesquisas com um trabalho de Lagrange sobre permutações de raízes, o que lhe deu condições necessárias e suficientes para concluir quais equações polinomiais são resolúveis por radicais e, baseado nas provas de Abel, descobriu que as equações algébricas irredutíveis são resolúveis por radicais somente se o grupo de permutações sobre suas raízes também é resolúvel. Sobre isso forneceu um algoritmo para achar essas raízes, assim como outros postulados sempre voltados mais para a

estrutura algébrica do que para casos específicos, dando um tratamento aritmético à Álgebra. Em suas obras está implícito o conceito de “corpo” que mais tarde Dedekind definiria de forma explícita.

Na época Galois entregou a Poisson um artigo contendo sua teoria e este o classificou de “incompreensível” mas hoje o que chamamos de “Matemática Moderna” nada mais é do que as ideias de Galois que estão chegando até nós.

Em 1832, envolvendo-se com uma mulher, em nome de um código de honra, não pode evitar um duelo. Na noite anterior passou as horas rascunhando notas para a posteridade numa carta a seu amigo. Na manhã de 30 de maio encontrou seu adversário recebendo um tiro fatal. Socorrido por um camponês, morreu num hospital para onde foi levado, aos 20 anos de idade.

## 2. NIELS HENRIK ABEL (1802 - 1829)

Manifestou interesse pela matemática desde a infância. Seu professor, Bert Michael Holmboe, escreveu em seu boletim: “Será, se viver, o maior matemático do mundo”.

Reduzido a extrema pobreza, após a morte de seu pai, Abel conseguiu matricular-se, em 1821, na Universidade de Oslo, graças a subscrições de alguns professores. Dois anos depois publicava seus primeiros trabalhos. Em 1825, com o apoio de seus mestres, obteve uma bolsa de estudos, por dois anos, no exterior.

Vivendo em Berlim, conheceu o engenheiro alemão August Leopold Crelle (1780-1855), que se tornou seu amigo e protetor. Crelle, que planejava criar um periódico de alto nível, utilizou os trabalhos de Abel no primeiro número da publicação, a primeira do mundo totalmente devotada à matemática - o hoje famoso *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* (Jornal de Matemática Pura e Aplicada).

Em 1826, Abel visitou outros países da Europa e, em Paris, soube que sofria de tuberculose. Em janeiro de 1829, encontrava-se já à beira da morte. A 6 de abril, com pouco mais de 26 anos, faleceu.

Os estudos de Abel são modelos de rigor. Alguns de seus trabalhos tratam de problemas de convergência de séries e sequências (há, inclusive, um teste de convergência que Abel formula em 1827). As ideias gerais da teoria são enunciadas pelo matemático de modo preciso. Diferenciação e integração de séries foram estudadas por ele, que também resolveu, definitivamente, a questão da convergência uniforme.

Um dos temas a que Abel deu formulação nova foi o das funções elípticas. Partindo das integrais elípticas, estudadas por Legendre, Abel revolucionou o assunto com uma simples observação: “Proponho-me a considerar as funções inversas”. Em vez de tomar como objeto de investigação a integral elíptica, Abel inverteu o problema. Essa inversão abriu novos caminhos na matemática, gerando toda a análise do século 19.

Deve-se a Abel o primeiro estudo sistemático das funções algébricas. Um dos teore-

mas que ele demonstrou é conhecido como Teorema de Abel e generaliza resultados acerca de adição, relativos às integrais elípticas. As integrais que surgem nesse teorema são conhecidas como integrais abelianas e desempenham papel fundamental na teoria das funções algébricas.

Abel também foi um inovador na área de problemas de valor de contorno. O estudo das equações integrais inicia-se, de fato, com a solução que ele dá a certos problemas clássicos, entre os quais o do tautócrono. Abel é o primeiro que reconhece, na solução, a presença de um problema inteiramente novo de análise, abrindo, assim, perspectivas para outras investigações.

Segundo os historiadores da matemática, é difícil dizer o que Abel teria produzido, caso vivesse mais tempo. O que ele pôde realizar durante seus dez anos de produtividade foi algo poucas vezes visto na história da humanidade.

Em 2002, por ocasião do bicentenário do matemático, o governo da Noruega criou o Prêmio Niels Henrik Abel, no valor de 6 milhões de coroas norueguesas, a ser entregue, anualmente, a matemáticos notáveis.

# Apêndice B

## Segundo Apêndice

Neste Apêndice apresentaremos um pouco da história do surgimento dos Números complexos.

Já na Grécia antiga os matemáticos se depararam com problemas em que, na linguagem moderna, se necessitava calcular a raiz quadrada de um número negativo. Por exemplo, em um dos 13 livros da sua obra denominada *Arithmetica*, Diofanto de Alexandria (por volta do século III d.C.) propôs o seguinte problema: achar os lados de um triângulo retângulo de área 7 e perímetro 12. A solução deste problema nos leva a uma equação quadrática cujo discriminante é negativo.

Até a idade média problemas desse tipo eram classificados como sem solução, mesmo na Índia por volta do século IX quando os hindus já resolviam um problema envolvendo equações quadráticas, por meio de completamento de quadrados, e chegavam a um quadrado perfeito que era negativo, o problema era considerado sem solução.

Diferentemente do que se pensa não foram as soluções de equações quadráticas, com discriminante negativo, que levou ao surgimento dos números complexos e sim a tentativa, por volta do século XVI na Itália, de se resolver equações cúbicas. De fato, por essa época surgiu a conhecida fórmula de Cardano-Tartaglia para se obter as soluções de equações cúbicas e ao utilizar essa fórmula para resolver a equação  $x^3 = 15x + 4$ , obtém-se a seguinte solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

envolvendo a raiz quadrada de um número negativo, no entanto tal equação possui 4 como uma solução. Então como resolver tal questão? A resposta foi dada por Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530. Conforme seu próprio relato em 1572 no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua idéia foi supor que os números  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ ,  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  deveriam ser da forma  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$ , respectivamente. Com algumas contas, ele chegou à conclusão que  $a = 2$  e  $b = 1$  e portanto uma raiz é  $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$ .

Com o domínio da Geometria Analítica Descartes estudou, entre outras coisas, as equa-

ções algébricas. Em uma passagem da sua obra *Discurso do Método*, publicada em 1637, Descartes escreveu a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”. Por esse motivo, até hoje o número  $\sqrt{-1}$  é chamado de número imaginário, termo que se consagrou juntamente com a expressão “número complexo”.

Depois de Bombelli, em 1530, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler. Leonhard Euler nasceu em Basileia, Suíça, no ano de 1707.

Dentre as inúmeras contribuições de Euler foi notável o seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que utilizamos até hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler destacamos o  $i$  substituindo  $\sqrt{-1}$ . Euler passou a estudar os números da forma  $z = a + bi$  onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i^2 = -1$ . Esses números são chamados de números complexos.

Mesmo assim, os números complexos seguiram sendo vistos como entes meio misteriosos até a virada do século XVIII, quando o célebre matemático alemão Gauss (1777-1855) descobriu que esses números podiam ser utilizados como modelo aritmético para operar com vetores. Para isso, Gauss representava os números complexos por meio de pares ordenados de pontos do plano cartesiano. Nessa altura, ainda havia uma questão formal pendente: o fato de a expressão  $a + bi$  de um número complexo envolver a soma das duas quantidades  $a$  e  $bi$ , de naturezas diferentes. Afinal o que vem a ser a soma e a multiplicação de um número real com um número imaginário? O irlandês William Hamilton (1805-1865) respondeu a questão.

Foi em uma comunicação à Academia Irlandesa, em 1833, que Hamilton tornou pública a sua construção dos números complexos. Nessa construção, os números complexos eram definidos como o conjunto dos pares ordenados  $(a,b)$  de números reais munido das seguintes operações de adição e multiplicação:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É importante lembrar a igualdade entre pares ordenados:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Assim identificamos o par ordenado da forma  $(x, 0)$  pelo número real  $x$ , para todo  $x$ . Com a definição anterior, temos:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Se chamarmos o par ordenado  $(0, 1)$  de unidade imaginária e o representarmos por  $i$ , temos  $i \cdot i = -1$ , ou seja,  $i^2 = -1$ . Desse modo,  $i$  é uma raiz quadrada de  $-1$ .

Finalmente chamamos de conjunto dos números complexos, representado por  $IC$ , o seguinte conjunto

$$IC = \{z = (x, y); x \in IR, y \in IR\}.$$

Observe que:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i$$

Esta é a chamada forma algébrica do número complexo  $z$ , onde  $x = Re(z)$  é a parte real de  $z$  e  $y = Im(z)$  é a parte imaginária de  $z$ .

Quando  $Im(z) = 0$ ,  $z$  é um número real e quando  $Re(z) = 0$  e  $Im(z) \neq 0$ ,  $z$  é um número imaginário puro.