



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Thais Soares de Andrade Lima

Introdução ao Modelo Cosmológico ϕ -CDM com dinâmica taquiônica

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2021

Thais Soares de Andrade Lima

Introdução ao Modelo Cosmológico ϕ -CDM com dinâmica taquiônica

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Francisco de Assis de Brito

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2021

L732i Lima, Thais Soares de Andrade.
Introdução ao modelo cosmológico ϕ -CDM com dinâmica
taquiônica / Thais Soares de Andrade Lima. – Campina Grande,
2020.
52 f.: il. : color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
Referências.

1. ϕ -CDM. 2. Campo de Táquions. 3. Cosmologia. I. Brito,
Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 524.8(043)

THAIS SOARES DE ANDRADE LIMA

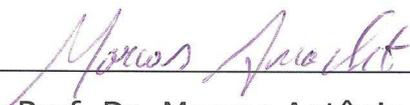
**INTRODUÇÃO AO MODELO COSMOLÓGICO ϕ -CDM COM
DINÂMICA TAQUIÔNICA**

Dissertação aprovada em 31/01/2020

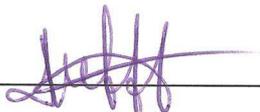
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Presidente)



Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Membro interno)



Prof^a. Dr^a. Morgana Lígia de Farias Freire
Departamento de Física – UEPB
(Membro externo)

A Deus, pela dádiva da vida e por me permitir realizar tantos sonhos.

Agradecimentos

- Ao Professor Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, paciência e competência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- Ao prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva que me incentivou a fazer o mestrado e contribuiu para que eu pudesse vir realizá-lo.
- Aos meus amigos Rafaela, Girlandia, Joesley, Carol, Felipe, Romário, Isabelle, Raissa, Ronaldo e Júlio que junto comigo compartilharam momentos de aprendizados, angústias (provas), conquistas e sempre se disponibilizaram para ajudar em dúvidas que surgiram durante o trabalho.
- A minha mãe, irmão e aos familiares pelo apoio e incentivo durante esse percurso.
- Aos colegas de pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- A CAPES pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*“Para quem não crê, nenhuma explicação é possível.
Para quem crê, nenhuma explicação é necessária.”
(Padre Donizetti)*

Resumo

Abordamos o modelo cosmológico ϕ -CDM, no qual consideramos o campo escalar como sendo taquiônico e aplicamos o formalismo de primeira ordem para obtenção das equações que descrevem a dinâmica do Universo. Nesse modelo o campo de táquions exerce o papel da energia escura, atuando como fonte da expansão acelerada do Universo. Além disso, discutiremos sobre Relatividade Geral e Cosmologia que formam o pilar para desenvolver e entender a teoria deste modelo. Por fim, comentamos sobre as vantagens matemáticas e cosmológicas de utilizar os campos escalares taquiônicos na elaboração dos modelos cosmológicos.

Palavras-chave: ϕ -CDM. Campo de táquions. Cosmologia.

Abstract

We approach the ϕ -CDM cosmological model, in which we consider the scalar field to be tachyon and apply the first order formalism to obtain the equations that describe the dynamics of the Universe. In this model, the tachyon field plays the role of dark energy, acting as a source of the accelerated expansion of the Universe. In addition, we discuss General Relativity and Cosmology that form the pillar to develop and understand the theory of this model. Finally, we comment on the mathematical and cosmological advantages of using the tachyon scalars fields in the elaboration of cosmological models.

Keywords: ϕ -CDM. Tachyons field. Cosmology.

Sumário

	INTRODUÇÃO	17
1	FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL	19
1.1	Aspectos Básicos	19
1.2	Equações de Campo de Einstein	20
1.3	Métrica FLRW	22
1.4	Tensor energia-momento	26
1.5	Equação de Friedmann	27
2	COSMOLOGIA	29
2.1	Universo Homogêneo e Isotrópico	29
2.2	Modelo Cosmológico Padrão	29
2.3	Equações Básicas	29
2.4	Parâmetros observacionais	30
2.4.1	Parâmetro de densidade	30
2.4.2	Parâmetro de desaceleração	31
2.5	Componentes do Universo	32
2.6	Inflação Cósmica	32
2.7	Modelo de quintessência	33
3	MODELO COSMOLÓGICO ϕ-CDM	35
3.1	Visão Geral sobre campos escalares aplicados a Cosmologia	35
3.2	O modelo ϕ -CDM	38
3.3	Aplicação da dinâmica taquiônica	39
3.4	Formalismo de primeira ordem	40
3.5	Algumas análises	41
3.6	Papel dos campos taquiônicos na Cosmologia	43
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICES	49
	APÊNDICE A – PROPRIEDADES RELACIONADAS AS EQUAÇÕES DO CAPÍTULO 1	51

A.1	Varição da métrica	51
A.2	Varição da ação S_M	52

Introdução

Um dos grandes paradigmas para cosmologia é entender porque o Universo encontra-se em uma fase de expansão acelerada [1]. Uma das suposições é que existe uma componente do Universo que seria responsável por esse fenômeno, a chamada energia escura. Vários estudos têm propostos modelos cosmológicos que descrevam a evolução do Universo e sua fase atual.

Hoje, o modelo que mais se adequa as observações cosmológicas é o que considera a energia escura como sendo uma constante. Esse modelo se chama Λ -CDM (Lambda Cold Dark Matter), ele descreve muito bem as características do Universo desde o período após a inflação. Contudo, possui algumas inconsistências e limitações, por exemplo, o problema da planura, coincidência cósmica e horizonte que incentivam a criação de diversos modelos alternativos [2].

Um dos modelos alternativos que vem sendo muito discutido na literatura é o ϕ -CDM [3], que utiliza campos escalares como opção para analisar a expansão cósmica acelerada. Desta maneira, essas propostas são criadas na tentativa de solucionar os problemas cosmológicos do modelo padrão e fazer previsões sobre o futuro do Universo.

Existem várias propostas de campos escalares de matéria que podem descrever a dinâmica do Universo, uma delas é, considerar o campo taquiônico. Os táquions são partículas teóricas que supostamente possuem velocidade maior que a da luz, porém, em teoria de campos taquiônicos as mesmas se condensam e adquirem velocidades inferiores a da luz e podem ser empregadas no estudo de modelos cosmológicos, onde o campo escalar dessas partículas pode assumir o papel da energia escura.

Nesse contexto, compreender os formalismos matemáticos, conceitos e obtenções das equações fundamentais se torna relevante, para que possamos aplicá-los em tópicos mais avançados nesta área. Por isso, o objetivo aqui é fazer um estudo, buscando introduzir esta teoria e mencionar algumas consequências cosmológicas do modelo de campo escalar ϕ -CDM com dinâmica taquiônica, usando o formalismo de primeira ordem. Dessa maneira, essa dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, abordamos os fundamentos da relatividade geral, onde comentamos sobre seus aspectos básicos e tensores. Resolvemos as equações de Einstein, estudamos a métrica de FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) que é tida como uma solução exata das equações de campo de Einstein capaz de descrever um universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico e encontramos as equações de Friedmann que se asseguram no princípio cosmológico.

No capítulo 2, apresentamos conceitos essenciais sobre a cosmologia, no qual enunci-amos o pressuposto básico da cosmologia moderna, o princípio cosmológico. Evidenciamos o Modelo cosmológico padrão, citamos o postulado de Weyl e obtivemos o tensor energia momento para um fluido perfeito. Ainda neste capítulo, por meio da equação de aceleração encontrada através da métrica *FLRW* encontramos a equação de estado. Mediante as equações de Friedmann calculamos o parâmetro de densidade e desaceleração e descrevemos brevemente as componentes do universo, a inflação cósmica e o modelo de quintessência.

No capítulo 3, tratamos de maneira geral a aplicação de campos escalares na cosmologia, em que definimos o que é um campo escalar e os relacionamos com os estudos cosmológicos. Com o propósito de entender como campos escalares podem solucionar problemas cosmológicos, apresentamos o modelo ϕ -CDM, que é um modelo alternativo ao modelo cosmológico padrão, em que utilizamos o campo escalar que pode ser considerado um forte concorrente ao papel de energia escura. Para resolver as equações básicas deste modelo precisamos diminuir a ordem dessas equações, por isso, adotamos o formalismo de primeira ordem. Fizemos algumas análises e comentários sobre os resultados obtidos, bem como, expomos a importância e vantagens de usar campos taquiônicos nos estudos da cosmologia.

E, no capítulo 4, apresentamos nossas considerações finais.

1 Fundamentos da Relatividade Geral

Neste capítulo, iremos apresentar algumas notações, conceitos, definições e equações essenciais da Relatividade Geral que são utilizadas na elaboração de teorias de modelos cosmológicos.

1.1 Aspectos Básicos

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) é uma teoria da gravitação relativística, proposta por Albert Einstein em 1915. Essa teoria é uma generalização da Teoria de Gravitação Newtoniana¹ e é firmada sobre os seguintes princípios [4]:

- Princípio de Mach;
- Princípio da Equivalência;
- Princípio da Covariância;
- Princípio de acoplamento mínimo gravitacional;
- Princípio da Correspondência.

Estes princípios dizem que matéria dita a geometria do espaço tempo, que o campo gravitacional está acoplado a tudo que existe, localmente não conseguimos identificar um corpo em inércia de um corpo com aceleração constante, todos os observadores são equivalentes e portanto obedecem as mesmas leis físicas, significando que as equações devem ser escritas de forma tensorial. Além do que, a Relatividade Geral no limite clássico deve recair na Teoria da Gravitação de Newton.

O cálculo tensorial lida com transformações gerais de coordenadas entre dois diferentes sistemas de coordenadas [5]. Os tensores são quantidades geométricas que podem descrever escalares, vetores e matrizes, sendo que cada um destes casos possui uma ordem, que denominamos de tensor de ordem n .

Estes tensores são independentes do sistema de coordenadas e obedecem a regras de transformações. Por exemplo, considerando dois conjuntos diferentes de coordenadas de n dimensões, temos

$$x^\mu = x^\mu(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (1.1)$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x'^1, x'^2, \dots, x'^n). \quad (1.2)$$

¹ Einstein partiu do pressuposto que a Teoria Newtoniana estivesse incompleta, pois era válida apenas no regime de campos gravitacionais fracos.

Então, podemos definir os tensores covariante e contravariante, respectivamente, como:

$$X'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} X_\nu, \quad (1.3)$$

e

$$X'^\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\nu} X^\nu. \quad (1.4)$$

Consideramos a notação de Einstein, na qual as quantidades tensoriais cujos índices são repetidos está implícito uma soma. Outra propriedade importante é, que um tensor pode possuir tanto índices covariantes quanto contravariantes, que chamamos de tensor misto.

Agora vamos definir alguns tensores que são utilizados para obtenção das equações de campo de Einstein.

- Tensor de curvatura (Tensor de Riemann):

$$R^\mu_{\alpha\mu\beta} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\alpha}; \quad (1.5)$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}; \quad (1.6)$$

- Tensor métrico covariante, tal que, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, sendo $g_{\mu\nu}$ dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

onde o tensor métrico contravariante é definido como, $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^\mu_\nu$. Sendo que, δ^μ_ν é o delta de Kronecker ($\delta^\mu_\nu = 1$, se $\mu = \nu$; $\delta^\mu_\nu = 0$, se $\mu \neq \nu$) [6].

Esses são alguns exemplos de tensores da Relatividade Geral, outros são apresentados no decorrer da dissertação.

1.2 Equações de Campo de Einstein

As equações de Einstein descrevem como matéria e geometria estão relacionadas. Elas contêm uma parte somente com termos geométricos e outra com termos de matéria, que são responsáveis pela curvatura do espaço-tempo.

Podemos adquirir conhecimentos básicos sobre manipulações dos tensores e suas propriedades através da obtenção das Equações de Einstein. Assim, iniciamos pela aplicação do princípio da mínima ação [7], temos que

$$\delta S = 0. \quad (1.8)$$

Considerando a ação da forma:

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M, \quad (1.9)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert que possui os termos relacionados a geometria e S_M é a ação de matéria que inclui os termos de matéria, bem como, pode conter o campo escalar.

As formas das ações são dadas por,

$$S_{EH} = - \int \sqrt{-g} R d^n x, \quad (1.10)$$

e

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^n x. \quad (1.11)$$

Onde R é o escalar de Ricci, \mathcal{L} a densidade lagrangiana, $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante do tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ e sendo que os índices gregos determinam as coordenadas temporais e espaciais.

Quando aplicamos o princípio variacional na ação completa achamos, que δS é:

$$\delta S = \int \frac{1}{16\pi G} [\delta \sqrt{-g} (16\pi G \mathcal{L}_M - R) + \sqrt{-g} (16\pi G \delta \mathcal{L}_M - \delta R)] d^n x = 0. \quad (1.12)$$

Variando com respeito ao tensor métrico contravariante, encontramos, δS como

$$\delta S = \int \frac{1}{16\pi G} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (16\pi G \mathcal{L}_M - R) + \left(16\pi G \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - R_{\mu\nu} \right) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^n x = 0. \quad (1.13)$$

Aqui aplicamos algumas propriedades que estão exposta no apêndice A. Assim, achamos² que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right); \quad (1.14)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}; \quad (1.15)$$

e

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

² Essa equação também pode ser escrita como: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$, onde Λ é um parâmetro denominado de Constante Cosmológica, que pode ser assumido como sendo a energia escura.

que são as equações de Einstein, onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que pode ser obtido através por:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M - 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.17)$$

Para se resolver as equações de Einstein, devemos encontrar uma métrica que seja solução das mesmas.

1.3 Métrica FLRW

A métrica de Friedmann- Lemaître- Robertson- Walker (FLRW) é uma solução exata das equações de campo de Einstein da Relatividade Geral, que descreve um Universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico e assume que o componente espacial da métrica pode ser dependente do tempo. Portanto, a métrica mais geral que cumpre estas condições é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\nu = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right]. \quad (1.18)$$

Sendo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ o elemento de ângulo sólido e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, logo:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2\right], \quad (1.19)$$

onde, convencionalmente $c = 1$, t é o tempo cósmico, $a(t)$ é o fator de escala que está relacionado com a taxa de expansão do universo, r , θ e ϕ são as coordenadas comóveis e k é a constante de curvatura do espaço que pode assumir os seguintes valores:

$$\begin{cases} k = 1, & (\text{Universo fechado}) \\ k = 0, & (\text{Universo plano}) \\ k = -1, & (\text{Universo aberto}). \end{cases} \quad (1.20)$$

Com base na Equação (1.18), o tensor métrico covariante e contravariante podem ser escritos de forma matricial como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

e, ou

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Usando o tensor métrico da Equação (1.21) podemos calcular os símbolos de Christoffel [8]:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta}). \quad (1.23)$$

Com base no cálculo dos termos individuais do tensor métrico, temos que:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, & g^{00} &= 1, \\ g_{11} &= -\frac{a^2}{1-kr^2}, & g^{11} &= -\frac{1-kr^2}{a^2}, \\ g_{22} &= -a^2r^2, & g^{22} &= -\frac{1}{a^2r^2}, \\ g_{33} &= -a^2r^2\text{sen}^2\theta, & g^{33} &= -\frac{1}{a^2r^2\text{sen}^2\theta}, \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais do tensor métrico que são diferentes de zero, encontramos,

$$\partial_0 g_{11} = -\frac{2a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad (1.24)$$

$$\partial_0 g_{22} = -2a\dot{a}r^2, \quad (1.25)$$

$$\partial_0 g_{33} = -2a\dot{a}r^2\text{sen}^2\theta, \quad (1.26)$$

$$\partial_1 g_{22} = -2a^2r, \quad (1.27)$$

$$\partial_1 g_{33} = -2a^2r\text{sen}^2\theta, \quad (1.28)$$

$$\partial_2 g_{33} = -2a^2r^2\text{sen}\theta\cos\theta, \quad (1.29)$$

onde, usamos a notação $\frac{\partial(g_{\mu\nu})}{\partial x^{\alpha}} \equiv \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}$, tal que, $x^{\alpha} = (x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi)$ que foi introduzida em [8].

Com as derivadas parciais obtidas, podemos proceder o cálculo dos símbolos de Christoffel da Equação (1.23) para a métrica FLRW. Assim, obtemos para os símbolos de Christoffel os valores abaixo:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad (1.30)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad (1.31)$$

$$\Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad (1.32)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2\text{sen}^2\theta, \quad (1.33)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \quad (1.34)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r\text{sen}^2\theta(1-kr^2), \quad (1.35)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\cos\theta, \quad (1.36)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.37)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (1.38)$$

e

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg\theta; \quad (1.39)$$

lembrando que,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= 0, \\ \Gamma_{i0}^0 &= \Gamma_{0i}^0 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\Gamma_{00}^i = 0.$$

Vale ressaltar que, usamos a seguinte notação:

$$\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}. \quad (1.40)$$

Dado os símbolos de Christoffel, podemos calcular o tensor de Ricci [6]:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\mu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma}. \quad (1.41)$$

Existem quatro componentes do tensor de Ricci que tem de ser avaliados:

- 1) A componente do tempo, R_{00} .

A componente do tempo é obtida a partir da consideração ($\alpha = \beta = 0$),

$$R_{00} = \partial_{\mu}\Gamma_{00}^{\mu} - \partial_0\Gamma_{\mu 0}^{\mu} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\mu}\Gamma_{00}^{\gamma} - \Gamma_{0\gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu 0}^{\gamma}. \quad (1.42)$$

Assim, a componente de tempo para o tensor de Ricci é:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}. \quad (1.43)$$

- 2) A componente radial, R_{11} .

Neste caso, consideraremos $\alpha = \beta = 1$, e a componente radial é

$$R_{11} = \partial_{\mu}\Gamma_{11}^{\mu} - \partial_1\Gamma_{\mu 1}^{\mu} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\mu}\Gamma_{11}^{\gamma} - \Gamma_{1\gamma}^{\mu}\Gamma_{\mu 1}^{\gamma}, \quad (1.44)$$

que pode ser escrita como:

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (1.45)$$

- 3) A componente θ , R_{22} .

Para isso, admitimos que $\alpha = \beta = 2$ e R_{22} é dado por:

$$R_{22} = \partial_\mu \Gamma_{22}^\mu - \partial_2 \Gamma_{\mu 2}^\mu + \Gamma_{\mu\gamma}^\mu \Gamma_{22}^\gamma - \Gamma_{2\gamma}^\mu \Gamma_{\mu 2}^\gamma. \quad (1.46)$$

Logo,

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (1.47)$$

4) A componente ϕ , R_{33} .

Admitimos $\alpha = \beta = 3$ e R_{33} é dado por:

$$R_{33} = \partial_\mu \Gamma_{33}^\mu - \partial_3 \Gamma_{\mu 3}^\mu + \Gamma_{\mu\gamma}^\mu \Gamma_{33}^\gamma - \Gamma_{3\gamma}^\mu \Gamma_{\mu 3}^\gamma; \quad (1.48)$$

Ou seja:

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2\theta. \quad (1.49)$$

Através destes resultados e da contração do tensor de Ricci, podemos calcular o escalar de curvatura (ou escalar de Ricci) [9] como sendo:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu, \quad (1.50)$$

logo,

$$R_0^0 = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1.51)$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2}. \quad (1.52)$$

Assim, o escalar de curvatura é dado por

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (1.53)$$

Com base nos resultados obtidos calculamos o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.54)$$

que fazendo uma contração se torna:

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R, \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} G_0^0 &= 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \\ G_j^i &= \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} \right) \delta_j^i, \end{aligned} \quad (1.56)$$

onde, os índices i e j são referentes as coordenadas espaciais.

1.4 Tensor energia-momento

Partimos do postulado de Weyl em que o Universo pode ser descrito por um fluido perfeito, isto é, o tensor energia momento possui apenas componentes (ρ e p são funções exclusivamente temporais) na sua linha diagonal, de forma geral. Assim, o tensor energia momento para o fluido perfeito é dado por [10]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (1.57)$$

ou

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} - p\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.58)$$

Sendo ρ a densidade de energia, p a pressão e $u = \frac{dx^{\mu}}{dr}$ a 4-velocidade do fluido [9][11], sendo suas componentes dadas por:

$$T_{00} = (\rho + p)u_0 u_0 - pg_{00}, \quad (1.59)$$

$$T_{00} = (\rho + p)g_{00}u^0 u_0 - pg_{00},$$

$$T_{00} = \rho, \quad (1.60)$$

$$T_{0i} = (\rho + p)u_0 u_i - pg_{0i}, \quad (1.61)$$

$$T_{0i} = (\rho + p)g_{0k}u^0 u_i - pg_{0i},$$

$$T_{0i} = 0, \quad (1.62)$$

$$T_{ii} = (\rho + p)u_i u_i - pg_{ii}, \quad (1.63)$$

$$T_{ii} = (\rho + p)g_{ik}u^k u_i - pg_{ii}$$

e

$$T_{ii} = -pg_{ii}; \quad (1.64)$$

onde $u^i u_i = 1$ e $u_i u_i = 0$. De acordo com a métrica da Equação (1.21), o tensor energia momento assume a seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.65)$$

onde $T_{00} = \rho$, $T_{11} = -pg_{11}$, $T_{22} = -pg_{22}$ e $T_{33} = -pg_{33}$.

1.5 Equação de Friedmann

Como a densidade ρ e a pressão p são funções exclusivamente do tempo, podemos escrever o tensor energia momento como:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Utilizando a equação de Einstein na sua forma diagonal, temos que:

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi GT_{\nu}^{\mu} + \Lambda\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (1.67)$$

substituindo as Equações (1.56) e (1.66) na Equação (1.67), obtemos que

$$G_0^0 = 8\pi GT_0^0 + \Lambda\delta_0^0, \quad (1.68)$$

$$3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G\rho + \Lambda \quad (1.69)$$

e

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.70)$$

A Equação (1.70) é conhecida como a primeira equação de Friedmann.

Analogamente, temos:

$$G_j^i = 8\pi GT_j^i + \Lambda\delta_j^i, \quad (1.71)$$

ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.72)$$

A Equação (1.72) é conhecida como a segunda equação de Friedmann ou equação da aceleração.

2 Cosmologia

Neste capítulo, apresentamos conceitos essenciais sobre a cosmologia moderna. Onde discorreremos que a Cosmologia é a Ciência que estuda a estrutura do Universo em largas escalas, visando descrever e explicar as observações astronômicas. [12].

2.1 Universo Homogêneo e Isotrópico

O pressuposto básico da cosmologia moderna é o Princípio cosmológico, segundo o qual o universo em grandes escalas ($> 100Mpc$) possui duas propriedades [13]:

- Homogeneidade: significa que existe uma distribuição uniforme de matéria, em outras palavras, o universo parece o mesmo em qualquer ponto;
- Isotropia: relata a ausência de direções privilegiadas, isto é, a aparência do universo é a mesma em qualquer direção.

Vale ressaltar que, para pequenas escalas o princípio cosmológico não é válido.

2.2 Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico padrão também conhecido como modelo Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM), representa o modelo de concordância da Teoria do “Big Bang”, essa Teoria descreve os primeiros momentos do universo, há cerca de 14 bilhões de anos, presumindo que toda evolução do Universo se dá a partir de um estado extremamente quente e denso [13]. Este modelo está baseado em três pilares: o princípio cosmológico, a Teoria da Relatividade Geral e a eventualidade que o Universo pode ser descrito por um fluido perfeito [14].

2.3 Equações Básicas

Da Equação da aceleração (1.72) com a derivada temporal da primeira equação de Friedmann, é possível obter o que chamamos de equação do fluido ou equação da continuidade, ou seja:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.1)$$

Com isso, assumimos que cada componente possui uma equação de estado que relaciona sua pressão e densidade de energia, dada por:

$$p_i = \omega_i \rho_i \longrightarrow \omega = \frac{p_i}{\rho_i}, \quad (2.2)$$

se ω é uma constante, podemos encontrar a evolução do ρ e a para o universo plano ($k = 0$). Com as Equações (1.70), (2.1) e (2.2), temos:

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{a}{\rho_i}\rho_i(1 + \omega_i) = 0, \quad (2.3)$$

reescrevendo a equação acima e integrando, teremos:

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} = -3(1 + \omega_i) \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (2.4)$$

$$\int \frac{d\rho_i}{\rho_i} = -3(1 + \omega_i) \int \frac{da}{a}, \quad (2.5)$$

de onde encontramos a solução:

$$\rho_i = \rho_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (2.6)$$

Onde termo $\rho_{i,0}$ é uma constante que possui um valor para cada componente em questão, portando, sendo o valor atual de densidade de cada uma delas. Substituindo a solução encontrada na primeira equação de Friedmann e integrando, teremos:

$$\int a^{\frac{1}{2}(1+\omega)} da = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \int dt, \quad (2.7)$$

$$a(t) = \left(\frac{8\pi G}{3}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{2}{3}(1+\omega)}. \quad (2.8)$$

2.4 Parâmetros observacionais

2.4.1 Parâmetro de densidade

Através da equação de Friedmann podemos terminar o parâmetro de densidade:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i - \frac{k}{a^2}, \quad (2.9)$$

desta forma, a densidade pode ser escrita em termos de radiação, matéria e energia escura, que são três fontes responsáveis pela evolução do Universo.

$$\rho_r = \frac{\rho_{r,0}}{a^4}, \quad (2.10)$$

$$\rho_m = \frac{\rho_{m,0}}{a^3}, \quad (2.11)$$

e

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.12)$$

Com base na primeira equação de Friedmann, a densidade total de matéria que é necessária para que o nosso Universo seja exatamente plano ($k = 0$) é denominada densidade crítica ρ_c dada por:

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2. \quad (2.13)$$

Essa é a densidade necessária para frear a expansão do Universo, logo o parâmetro de Hubble é $H = H_0$. Assim, é conveniente intitularmos de parâmetro de densidade, como a razão entre sua densidade ρ_i e ρ_c , onde o índice i representa determinada componente.

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho, \quad (2.14)$$

e podemos, ainda, escrever o parâmetro de densidade total da seguinte forma:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \quad (2.15)$$

ou

$$\Omega = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_c} + \frac{\rho_{r,0}}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad (2.16)$$

onde,

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{8H^2} \rho_{m,0}, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{r,0}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (2.17)$$

Usando as Equações (2.13) e (2.14), podemos reescrever a Equação (2.9), como:

$$H^2 = H_0^2 \left(\sum_{i=1} \Omega_i - \frac{k}{a^2 H_0^2} \right), \quad (2.18)$$

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_i + \Omega_k], \quad (2.19)$$

sendo,

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (2.20)$$

Concluimos que a geometria do espaço está relacionada à distribuição de densidade total:

$$\begin{cases} 0 < \Omega_t < 1; k < 0, & \text{(Universo aberto)} \\ \Omega_t = 1; k = 0, & \text{(Universo plano)} \\ \Omega_t > 1; k > 0, & \text{(Universo fechado)}. \end{cases} \quad (2.21)$$

2.4.2 Parâmetro de desaceleração

O parâmetro de desaceleração auxilia na compreensão do processo de expansão do Universo, assim podemos determiná-lo expandindo o fator de escala $a(t)$ em série de Taylor:

$$a(t) = a(t_0) + \left(\frac{da}{dt} \right)_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dt^2} \right)_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.22)$$

Se expandimos em torno do tempo t_0 e consideramos apenas o três primeiros termos e dividindo por $a(t_0)$ temos que:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t - t_0)^2. \quad (2.23)$$

Onde:

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} \quad (2.24)$$

e

$$q_0 = - \left(\frac{\ddot{a}a}{a^2} \right)_{t=t_0} = - \left(\frac{\ddot{a}}{aH^2} \right)_{t=t_0}. \quad (2.25)$$

Vale ressaltar que, o sinal negativo da Equação (2.24) se dá devido o Universo composto por matéria e radiação, mostrarem um crescimento desacelerado do fator de escala $a(t)$ [1]. Porém através de observações atuais identificou-se que o universo está expandindo de forma acelerada (aceleração do universo é positiva), convenientemente, o parâmetro de desaceleração q_0 permanece negativo.[14]

2.5 Componentes do Universo

De acordo com os dados do *WMAP* para o modelo cosmológico padrão a distribuição dos componentes que formam o Universo é dada da seguinte forma: 4,6% de matéria bariônica, 24% de matéria escura e 71,6% de energia escura [15]. De modo que tais componentes podem ser descritas, resumidamente, como:

- Matéria bariônica: se refere a todo material composto por prótons, nêutrons e elétrons no universo.
- Matéria escura: pode ser detectada gravitacionalmente, contudo, por não emitir nem absorver a luz não pode ser vista.
- Energia escura: acredita-se que a energia escura seja a responsável pela expansão do universo acelerada.
- Radiação: atualmente, é considerada desprezível na distribuição total de densidade.

2.6 Inflação Cósmica

Com o intuito de resolver alguns problemas fundamentais do Modelo Padrão do Big Bang (tais como, o problema da planura, do horizonte e dos monopólos magnéticos [16]) Alan Guth propôs a chamada inflação cósmica. Ora, consiste em explicar a rápida expansão (exponencial) ocorrida nos primeiros instantes do universo [17].

2.7 Modelo de quintessência

Muitos campos escalares estão presentes na física de partículas, incluindo Teoria das Cordas e Supergravidade [6], visando isto, existe um outro modelo de grande importância para cosmologia, chamado modelo de quintessência, que consiste em tratar a energia escura Λ como um campo escalar ϕ . No próximo capítulo, introduzimos o uso de um campo escalar para uma dinâmica taquiônica.

3 Modelo Cosmológico ϕ -CDM

Neste capítulo, descrevemos o modelo ϕ -CDM que em contrapartida ao modelo Λ -CDM (que tem a constante cosmológica como o mecanismo causador da expansão acelerada do Universo), utiliza um campo escalar ϕ com dinâmica taquiónica que satisfaz a expansão cósmica do Universo.

3.1 Visão Geral sobre campos escalares aplicados a Cosmologia

Um campo escalar é uma função dependente do tempo e espaço, tal que, $\phi = \phi(x^\mu, t)$ [12]. Em cada ponto do espaço essa função possui uma magnitude, ou seja, um escalar que muda a cada instante de tempo [18].

Um dos maiores desafios da Cosmologia é explicar por que o Universo está em expansão acelerada e qual é o causador deste fenômeno. Isto tem impulsionado diversos estudos teóricos e observacionais [6].

Os campos escalares podem ser usados para descrever modelos cosmológicos, muitos dos quais, os consideram como sendo fortes candidatos a energia escura. A partir daí, são criadas teorias que tentam esclarecer a causa da expansão acelerada do Universo, nomeadas como modelos alternativos.

O campo escalar é introduzido na Cosmologia por meio da ação,

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (3.1)$$

onde g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e \mathcal{L}_ϕ é a densidade lagrangiana do campo escalar.

As equações de campo da relatividade usadas no contexto cosmológico são obtidas através do princípio da mínima ação dado por,

$$\delta S = 0, \quad (3.2)$$

onde S é a ação funcional que contém os termos ligados a geometria do espaço-tempo, ao conteúdo de matéria e o campo escalar.

A ação S é escrita como,

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M + S_\phi, \quad (3.3)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert composta pelos termos geométricos e S_M é a ação dos campos de matéria, dadas por,

$$S_{EH} = - \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.4)$$

e

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M. \quad (3.5)$$

Sendo R o escalar de Ricci e \mathcal{L}_M a densidade lagrangiana de matéria.

Substituindo as ações das Equações (3.4), (3.5) e (3.1) na ação total da Equação (3.3) temos que [3]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_\phi \right], \quad (3.6)$$

aplicando o princípio da mínima ação da Equação (3.2) encontramos que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

e

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = 8\pi G T^\mu_\nu. \quad (3.7)$$

Estas são as equações de campo de Einstein que descrevem a dinâmica do espaço-tempo.

O tensor energia-momento na sua forma diagonal é: $T^\mu_\nu = (\rho, -p, -p, -p)$ e neste caso, a densidade de energia e pressão são, respectivamente, por:

$$\rho = \rho_b + \rho_c + \rho_r + \rho_\phi \quad (3.8)$$

e

$$p = p_b + p_c + p_r + p_\phi. \quad (3.9)$$

Os sub-índices b, c, r, ϕ correspondem aos bárions, matéria escura, radiação e campo escalar, respectivamente.

A densidade e pressão para o campo escalar são encontrados a partir de,

$$T^\mu_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi + \delta^\mu_\nu \mathcal{L}_\phi. \quad (3.10)$$

Quando admitimos que campo escalar obedece a dinâmica padrão, sua lagrangiana é escrita como:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

e

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3.11)$$

Onde $V(\phi)$ é o potencial associado ao campo escalar. Então,

$$T^\mu_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \quad \implies \begin{cases} \rho_\phi = T^0_0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ p_\phi = -T^1_1 = -T^2_2 = -T^3_3 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \end{cases} \quad (3.12)$$

Substituindo a Equação (3.8) na Equação (1.70) sem a constante cosmológica, obtemos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_b + \rho_c + \rho_r + \rho_\phi) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.13)$$

Com base na equação da aceleração de Einstein (1.72), temos:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\phi, \quad (3.14)$$

$$p = p_m + p_r + p_\phi, \quad (3.15)$$

onde, $\rho_m = \rho_b + \rho_c$ e $p_m = p_b + p_c$.

Sabendo que,

$$\rho_m = \frac{\rho_{m,0}}{a^3}, \quad (3.16)$$

$$\rho_r = \frac{\rho_{r,0}}{a^4}, \quad (3.17)$$

$$p_m = 0, \quad (3.18)$$

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r = \frac{1}{3}\frac{\rho_{r,0}}{a^4}, \quad (3.19)$$

$$p_\phi = w_\phi\rho_\phi, \quad (3.20)$$

a Equação (1.72) torna-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{\rho_{m,0}}{a^3} + \frac{\rho_{r,0}}{a^4} + \rho_\phi + 3 \left(\frac{1}{3}\rho_r + w_\phi\rho_\phi \right) \right], \quad (3.21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{\rho_{m,0}}{a^3} + 2\frac{\rho_{r,0}}{a^4} + \rho_\phi(1 + 3w_\phi) \right], \quad (3.22)$$

que são as equações de Friedmann.

Usando a Equação (3.12) na equação de estado do campo escalar, temos:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi},$$

ou

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.23)$$

Podendo assumir algum valor no intervalo¹ $[-1, 1]$. Com isto, percebemos que uma característica importante dos modelos de campo escalar é a escolha de um potencial que melhor descreva a fase acelerada do Universo, a partir do qual é possível obter modelos viáveis de energia escura [3][19].

¹ Que inclui o valor observacional de $\omega_\phi \approx -1$.

3.2 O modelo ϕ -CDM

A fase atual do Universo é dominada pela energia escura [20], assim, pode ser descrita por um campo escalar de acordo com a ação,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_\phi \right], \quad (3.24)$$

onde desconsideramos todas as outras formas de energia, ficando apenas com a relacionada ao campo escalar.

Assim, as equações de Friedmann são,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi - \frac{k}{a^2} \quad (3.25)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi). \quad (3.26)$$

Substituindo a Equação (3.12) na Equação (3.25), usando a notação $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e considerando $k = 0$, temos que:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (3.27)$$

Derivando $\frac{\dot{a}}{a}$ com relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{a}}{a} \right] = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (3.28)$$

Agora usando, novamente, a notação $H = \frac{\dot{a}}{a}$, encontramos que \dot{H} é:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2. \quad (3.29)$$

Usando as Equações (3.27) e (3.26) na expressão acima achamos:

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi) - \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right), \quad (3.30)$$

substituindo na Equação (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + 3 \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \right) \right] - \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right), \\ \dot{H} &= -\frac{8\pi G}{3}(\dot{\phi}^2 - V) - \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right), \\ \dot{H} &= -\frac{8\pi G}{3}\dot{\phi}^2 - \frac{4\pi G}{3}\dot{\phi}^2, \\ \dot{H} &= -4\pi G\dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

As Equações (3.27) e (3.31) são as equações de Friedmann em função do potencial escalar.

Pela conservação do tensor energia-momento $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$, encontramos a equação de movimento da componente do Universo conduzida pela evolução do campo escalar,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.32)$$

Uma característica importante a ser frisada é que de acordo com o princípio cosmológico, o Universo é homogêneo e isotrópico, dessa maneira, o campo escalar torna-se dependente apenas do tempo, ou seja, $\phi = \phi(t)$.

3.3 Aplicação da dinâmica taquiônica

Os campos de matéria de táquions advém da Teoria das Cordas e mostrou-se como uma ferramenta teórica muito importante para o contexto da Relatividade Geral e Cosmologia [21]. Eles são analisados em propostas de modelos cosmológicos como sendo possíveis candidatos responsáveis pela fase surpreendentemente acelerada nos instantes iniciais do Universo, como também, pelo fenômeno observado atualmente, a expansão acelerada do Universo.

Para a ação e principais equações, assumindo que a componente do Universo é descrita por um campo taquiônico homogêneo $\phi = \phi_T(t)$, temos que a densidade lagrangiana é definida como [20]:

$$\mathcal{L}_T = -V(\phi)\sqrt{1 - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}. \quad (3.33)$$

Onde $V(\phi)$ é o potencial do campo de táquion. Substituindo a lagrangiana acima na ação da Equação (3.24), obtemos:

$$S_T = \int d^4x - \sqrt{g} \left[-\frac{R}{16\pi G} - V(\phi)\sqrt{1 - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi} \right]. \quad (3.34)$$

Fazendo as variações necessárias, obtemos o tensor energia-momento escrito como,

$$T_\nu^\mu = \frac{V(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \delta_\nu^\mu(1 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi)}{\sqrt{1 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi}}, \quad (3.35)$$

assim, a densidade de energia e pressão são dadas por [20],

$$\rho_T = T_0^0 = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \quad (3.36)$$

e

$$p_T = -T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = -V(\phi)\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}. \quad (3.37)$$

O parâmetro da equação de estado se torna [22],

$$\omega_T = \frac{p_T}{\rho_T}, \quad \implies \quad \omega_T = \dot{\phi}^2 - 1. \quad (3.38)$$

Pela lei de conservação do tensor energia-momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) obtemos a equação de movimento do campo de táquions,

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2) \left(3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \frac{1}{V(\phi)} \right) = 0. \quad (3.39)$$

Usando a densidade de energia na Equação (3.36) e pressão na Equação (3.37) nas Equações (3.25) e (3.26) de Friedmann, depois combinando essas duas últimas equações, encontramos² [20]:

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \quad (3.40)$$

e

$$\dot{H} = -\frac{V(\phi)\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (3.41)$$

3.4 Formalismo de primeira ordem

Precisamos resolver o conjunto de equações formadas pelas Equações (3.39), (3.40) e (3.41), contudo, necessitamos reduzir a ordem dessas expressões para simplificar os cálculos e para isto usamos o método do formalismo de primeira ordem.

Esse método tem grande destaque na Física e em especial, na área de Cosmologia na busca de soluções analíticas de modelos cosmológicos.

Até o momento, notamos que as funções principais são dependentes do tempo, por exemplo, o fator de escala $a(t)$, o parâmetro de Hubble $H(t)$ e o campo escalar $\phi_T(t)$. Sendo que, o potencial depende do campo escalar $V_T = V(\phi)$.

O ponto de partida é assumirmos que o parâmetro de Hubble pode ser escrito em função do campo escalar $\phi(t)$ da seguinte forma³ [20],

$$H(t) = W(\phi), \quad (3.42)$$

logo,

$$\dot{H} = \frac{dW}{d\phi} \dot{\phi}. \quad (3.43)$$

² Aqui foi convencionado $4\pi G = 1$ e assumimos $k = 0$.

³ Essa proposta é conveniente, pois o potencial V é uma função do fator de escala $a(t)$.

Substituindo as Equações (3.42) e (3.43) nas Equações (3.40) e (3.41) encontramos que:

$$W^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (3.44)$$

$$\frac{dW}{d\phi} = -\frac{V\dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (3.45)$$

Dividindo a Equação (3.45) pela Equação (3.44) obtemos [20] que:

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{dW}{d\phi} \frac{1}{W^2}, \quad (3.46)$$

que é uma função de primeira ordem para equação de movimento. Ela pode ser determinada um vez que conhecemos $W(\phi)$, que também é uma equação de primeira ordem, assim, ficamos com duas equações de primeira ordem.

Usando a Equação (3.46) na Equação (3.44), obtemos o potencial taquiônico,

$$V(\phi) = \frac{3}{2} \sqrt{W^4 - \frac{4}{9} \frac{dW}{d\phi}}. \quad (3.47)$$

A partir dessas equações é possível encontrarmos o parâmetro desaceleração,

$$q_T = -1 + \frac{2}{3} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \frac{1}{W^4}. \quad (3.48)$$

3.5 Algumas análises

Quando consideramos $W = \text{constante} \neq 0$ temos,

$$q_T = -1, \quad (3.49)$$

$$\dot{\phi} = 0, \quad (3.50)$$

$$V(\phi) = \frac{3}{2} W^2, \quad (3.51)$$

ou seja, $q_T = \omega$ e observamos que o potencial é similar a densidade de energia da constante cosmológica.

Agora, se $\dot{\phi} = C$, onde C é uma constante, segue que:

$$q_T = -1 + \frac{2}{3} C^2. \quad (3.52)$$

Para $C = \sqrt{2/3}$, temos,

$$q_T = 0, \quad \implies \quad \omega_T = -\frac{1}{3}. \quad (3.53)$$

Onde usamos a Equação (3.38) de estado, sendo tal equação parecida com a radiação, no entanto, com sinal negativo.

Portanto, o potencial taquiônico da Equação (3.47) pode ser usado para determinar a solução da Equação (3.39), tendo em vista que, assumimos que as Equações (3.42) e (3.46) como válidas.

Vale ressaltar que, a mudança de sinal na Equação (3.42) não modifica as características do potencial taquiônico, assim, poderíamos escolher,

$$H = -W, \quad \implies \quad \dot{\phi} = \frac{2}{3} \frac{dW}{d\phi} \frac{1}{W^2}. \quad (3.54)$$

Como exemplo, podemos escolher livremente a forma da função $W(\phi)$ [20]. Esse exemplo propõe que $W(\phi)$ é dado por:

$$W(\phi) = \frac{A}{\phi}, \quad (3.55)$$

onde A é uma constante.

Seguindo as mesmas etapas da seção 3.4 encontramos o potencial, V como:

$$V = \frac{3}{2} A \sqrt{A^2 - \frac{4}{9} \frac{1}{\phi^2}}, \quad (3.56)$$

onde $A > 2/3$.

Pela Equação (3.46) encontramos que:

$$\dot{\phi} = \frac{2}{3} \frac{1}{A}, \quad (3.57)$$

que é a equação de movimento do campo de táquions, integrando achamos, que:

$$\phi(t) = \frac{2}{3A} t. \quad (3.58)$$

Agora, usando a Equação (3.58) na Equação (3.42) temos que:

$$H(t) = \frac{3A^2}{2} \frac{1}{t}. \quad (3.59)$$

Onde a sua evolução pode ser visualizada através do gráfico do Parâmetro de Hubble em função do tempo $H(t)$, em que adotamos $A = 1$ da Figura 1.

O gráfico do Parâmetro de Hubble em função do tempo para o modelo determinado por $W(\phi) = A/\phi$ apresenta um parâmetro desaceleração constante, neste caso: $q_T = 1 - \frac{2}{3A^2}$, mostrando que o Universo estaria com uma aceleração constante [3].

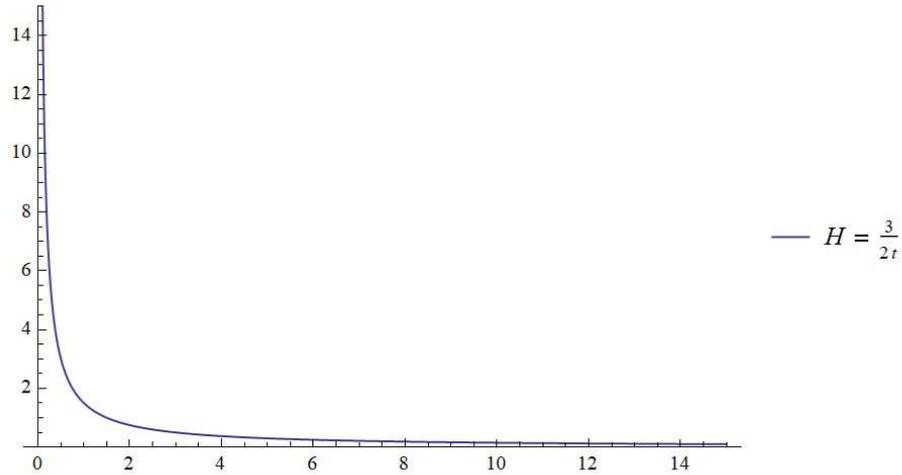


Figura 1 – Gráfico do Parâmetro de Hubble para (3.59), um exemplo usando Campo de táquions com $W(\phi) = A^2/\phi$. Podemos ver sua evolução no tempo. Consideramos $A = 1$.

3.6 Papel dos campos taquiônicos na Cosmologia

Os modelos taquiônicos possuem uma dinâmica mais rica que a usual que podem fazer com que estudemos características distintas em um mesmo modelo cosmológico proposto. Em vista disso, são muitas das vezes preferidos em diversos estudos de modelos com campos escalares [20] [23].

Trabalhar com campos táquiônicos se torna uma alternativa relevante e mais “simples”, pois sempre pode-se encontrar uma correspondência com campos escalares minimamente acoplados e assim descrever a evolução do Universo.

Conforme o trabalho de Padmanabhan (2002), essa correspondência é vista através da forma do potencial $V(\phi)$, que tanto para campos taquiônicos [24], quanto para campo normal, possuem uma similaridade, ou seja

$$V_T(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{2\dot{H}}{3H^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Potencial para o campo escalar taquiônico}) \quad (3.60)$$

e

$$V(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right). \quad (\text{Potencial para o campo escalar normal}) \quad (3.61)$$

O que acarreta o estudo do campo de táquions como um grande impulsionador da expansão acelerada do Universo. Uma vez que, é possível obtermos uma fase acelerada em termos teóricos e que conta com o apoio observacional [24].

Os efeitos dos campos de táquions podem ser estudados acoplando-os à gravidade de Einstein [25] [26]. Com a imposição de condições iniciais podemos aplicar campos de táquions na teoria da inflação cósmica, como sendo, o campo ínflaton, que atua com o mecanismo de rolagem lenta pelo potencial.

4 Considerações finais

Motivados pelo paradigma da expansão acelerada do Universo, propomos um estudo simples acerca de um modelo alternativo que utiliza campos escalares como opção para analisar tal comportamento cósmico, o modelo cosmológico ϕ -CDM com dinâmica taquiônica. Evidenciando suas vantagens ao invés do uso puramente tradicional do campo escalar.

Para os campos escalares na Cosmologia, em que se considera o modelo cosmológico ϕ -CDM encontramos as equações que narram a evolução do Universo, quando assumimos que o campo escalar é taquiônico. Apresentamos e aplicamos o formalismo de primeira ordem na dinâmica dos campos de matéria dos táquions que simplifica a ordem das equações acopladas, facilitando a abordagem matemática.

Na dinâmica taquiônica um de suas suas vantagens é a existência de uma correspondência entre campo de táquions e campos escalares normais. Além disso, é que se todas as condições razoavelmente gerais forem satisfeitas, é possível entrarmos numa fase de expansão acelerada. Então, o campo de táquions pode ser considerado como um grande candidato a energia escura.

Em virtude dos fatos mencionados, temos com perspectivas estender nosso estudo para aplicação de potenciais onde podemos obter resultados novos e relevantes.

Referências

- 1 COLLODEL, L. G. **Tópicos de Cosmologia**. Apostila destinada ao minicurso de cosmologia, UFPR - PR, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 32.
- 2 FAGUNDES, H. V. **Modelos cosmológicos e a aceleração do Universo**. v. 24, n. 2, p. 247–253. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo - SP. Citado na página 17.
- 3 VIEIRA, L. E. **Campos Escalares Aplicados em Cosmologia**. Dissertação de Mestrado, UFG - Goiânia. 2018. Citado 4 vezes nas páginas 17, 36, 37 e 42.
- 4 D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's relativity**. [S.l.]: Oxford, Clarendon Press, 1992. Citado na página 19.
- 5 SYNGE, J. L. SCHILD, A. **Tensor calculus**. v. 5, Courier Corporation, 1978. Citado na página 19.
- 6 AMENDOLA, S. T. L. **Dark Energy: Theory and Observations**. Cambridge university press. 1ª. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 4 vezes nas páginas 20, 24, 33 e 35.
- 7 SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. [S.l.]: Cambridge university press. 2ª. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 21.
- 8 CARROLL, S. **An Introduction to General Relativity**. Cambridge university press [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 23.
- 9 NEVES, R. M. P. **Cosmologia de brana**. Dissertação de Mestrado, UFCG, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- 10 DELBEM, N. F. **Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos**. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro - SP, 2010. Citado na página 26.
- 11 PEREIRA, S. F. **Modelos cosmológicos escalares-tensoriais**. Dissertação de Mestrado, UnB - DF, 2006. Citado na página 26.
- 12 HORVATH GERMAN LUGONES, M. P. S. S. J. **Cosmologia Física do Micro ao Macro Cosmos e Vice-Versa**. Livraria da física. 2ª. ed. [S.l.: s.n.], 2011. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.
- 13 LIDDLE, A. **An Introduction to Modern Cosmology**. 2ª. ed. Wiley. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 29.
- 14 RIBEIRO, A. M. **Modelos cosmológicos de energia escura: aspectos e vínculos observacionais**. Dissertação de Mestrado, UNIFEI -MG 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 32.
- 15 HINSHAW, G. et al. **Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe(wmap) observations: Cosmological parameter results**. The Astrophysical Journal Supplement Series, IOP Publishing, v. 208, n. 2, Sep 2013. ISSN 1538-4365. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19>>. Citado na página 32.

- 16 SANTOS, J. J. R. dos. **Tópicos em cosmologia com campos escalares**. Tese de doutorado, UFPB - PB, 2011. Citado na página 32.
- 17 PHYSICS, M. D. of. **Alan H. Guth**. Acessado em; 02 de janeiro de 2020. Disponível em: <https://web.mit.edu/physics/people/faculty/guth_alan.html>. Citado na página 32.
- 18 LEON, G.; SILVA, F. O. F. **Generalized scalar field cosmologies**. 2019. Disponível em: <[arXiv:1912.09856](https://arxiv.org/abs/1912.09856)>. Citado na página 35.
- 19 COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. **Dynamics of dark energy**. International Journal of Modern Physics D, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 15, n. 11, p. 1753–1935, Nov 2006. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S021827180600942X>>. Citado na página 37.
- 20 BAZEIA, D. et al. **First-order formalism and dark energy**. Physics Letters B, Elsevier BV, v. 633, n. 4-5, p. 415–419, Feb 2006. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2005.12.031>>. Citado 6 vezes nas páginas 38, 39, 40, 41, 42 e 43.
- 21 VIEIRA, R. S. **Uma introdução à teoria dos táquions**. Revista Brasileira de Ensino de Física., scielo, v. 34, p. 1 – 15, 09 2012. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172012000300006&nrm=iso>. Citado na página 39.
- 22 BAGLA, J. S.; JASSAL, H. K.; PADMANABHAN, T. **Cosmology with tachyon field as dark energy**. Physical Review D, American Physical Society (APS), v. 67, n. 6, 2003. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.67.063504>>. Citado na página 40.
- 23 GORINI, V. et al. **Tachyons, scalar fields, and cosmology**. Physical Review D, American Physical Society (APS), v. 69, n. 12, Jun 2004. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.69.123512>>. Citado na página 43.
- 24 PADMANABHAN, T. **Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter**. Physical Review D, American Physical Society (APS), v. 66, n. 2, Jun 2002. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.66.021301>>. Citado na página 43.
- 25 GIBBONS, G. **Cosmological evolution of the rolling tachyon**. Physics Letters B, Elsevier BV, v. 537, n. 1-2, p. 1–4, Jun 2002. ISSN 0370-2693. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)01881-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(02)01881-6)>. Citado na página 43.
- 26 FROLOV, A.; KOFMAN, L.; STAROBINSKY, A. **Prospects and problems of tachyon matter cosmology**. Physics Letters B, Elsevier BV, v. 545, n. 1-2, p. 8–16, Oct 2002. ISSN 0370-2693. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)02582-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02582-0)>. Citado na página 43.

Apêndices

APÊNDICE A – Propriedades relacionadas as equações do capítulo 1

Variações em relação à $g^{\mu\nu}$,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}; \quad (\text{A.1})$$

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

A.1 Variação da métrica

Utilizando a definição de ortogonalidade da métrica temos,

$$g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\lambda, \quad (\text{A.4})$$

agora, usando o princípio da mínima ação,

$$\begin{aligned} \delta(g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu}) &= 0, \\ \delta g^{\nu\lambda}g_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda}\delta g_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando o resultado acima pela métrica $g_{\lambda\sigma}$, dois fazenda uma contração de índices,

$$\begin{aligned} \delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}\delta g_{\mu\nu} &= 0, \\ \delta_\sigma^\nu\delta g_{\mu\nu} &= -\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}, \\ \delta g_{\mu\sigma} &= -\delta g^{\nu\lambda}g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Escrevendo g em função da expansão em cofatores,

$$g = A^{(\mu)\nu}g_{(\mu)\nu}, \quad (\text{A.7})$$

o cofator é da forma,

$$A^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Com todas essas considerações, é possível calcular a variação de $\sqrt{-g}$ com relação a $g^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g} \delta g, \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g, \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Logo,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.10}$$

essa é a propriedade que gostaríamos de provar.

A.2 Variação da ação S_M

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \tag{A.11}$$

$$\delta S_M = \int (\delta\sqrt{-g} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_M) d^n x, . \tag{A.12}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.13}$$

$$\delta \mathcal{L}_M = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \tag{A.14}$$

$$\delta S_M = \int \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) d^n x, \tag{A.15}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left(g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \right) d^n x. \tag{A.16}$$

Portanto,

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{A.17}$$