



Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Engenharia Elétrica e Informática

Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

TÉSSIO ROGÉRIO NÓBREGA BORJA DE MELO

**PROJETO E SIMULAÇÃO DE UMA ARMADILHA DE ÍONS
PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA**

Campina Grande, Paraíba
Maio de 2014

TÉSSIO ROGÉRIO NÓBREGA BORJA DE MELO

PROJETO E SIMULAÇÃO DE UMA ARMADILHA DE ÍONS
PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

*Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Campina Grande
como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do grau de Bacharel em Ciências no
Domínio da Engenharia Elétrica.*

Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador:

Professor Francisco Marcos de Assis, Dr.

Campina Grande, Paraíba
Maio de 2014

TÉSSIO ROGÉRIO NÓBREGA BORJA DE MELO

PROJETO E SIMULAÇÃO DE UMA ARMADILHA DE ÍONS PARA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado.

Aprovado em 12 / 05 / 2014.

Professor Francisco de Assis Ferreira Tejo, Dr.
Universidade Federal de Campina Grande
Avaliador, UFCG

Professor Francisco Marcos de Assis, Dr.
Universidade Federal de Campina Grande
Orientador, UFCG

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, coragem e perseverança para enfrentar o difícil caminho até aqui.

Aos meus pais Romero Tadeu e Maria do Rosário, por nunca medirem esforços para que eu tivesse uma boa formação intelectual e moral. Por às vezes fazerem até mais do que estava ao alcance, e principalmente, pelos momentos em que eles fizeram não a minha vontade, mas o que era melhor para mim.

Aos meus irmãos Téssia, Talyta e Romerinho, e a toda minha família, por sempre me apoiarem e cuidarem de mim.

À minha namorada Ana Cláudia, pelo amor, carinho, constante apoio e compreensão. Sem ela, talvez eu não tivesse conseguido chegar até aqui.

Ao professor Francisco Marcos pela excelente orientação, estímulo e paciência.

Ao professor Francisco Tejo pela contribuição imprescindível para a realização deste trabalho.

Aos amigos Pablo, Paulinho e Tico, pelas boas conversas na hora do almoço.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho discutimos a implementação de processadores quânticos usando armadilhas de íons. Apresentamos os princípios básicos da computação quântica, destacando a diferença entre bits clássicos e *qubits*, bem como as operações realizadas sobre estes pelas portas lógicas quânticas. Discutimos as principais características das armadilhas de íons, dando ênfase às armadilhas lineares. Mostramos como as portas quânticas podem ser implementadas usando o sistema de íons confinados eletromagneticamente. Apresentamos os resultados da simulação numérica de uma armadilha de íons linear do tipo Paul, realizada com o software COMSOL Multiphysics[®], tendo como resultado o confinamento de um íon de $^{40}\text{Ca}^+$, cujo movimento apresentou as características esperadas, estando de acordo com o que é previsto teoricamente.

Palavras-chave: Armadilha de íons, computação quântica, *qubits*, portas lógicas quânticas.

ABSTRACT

In this work we discuss the implementation of quantum processors using ion traps. We present the basic principles of quantum computing, emphasizing the difference between classical bits and qubits, and the operations performed on these by quantum logic gates. We discuss the main features of ion traps, emphasizing linear traps. We show how quantum gates can be implemented using the system of ions confined electromagnetically. We present the results of numerical simulation of a linear ion trap type Paul performed with COMSOL Multiphysics ® software, resulting in the confinement of an $^{40}\text{Ca}^+$ ion, whose movement has presented the expected characteristics, being in agreement with what is theoretically predicted.

Keywords: Ion traps, quantum computation, qubits, quantum logic gates.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Portas lógicas quânticas de um <i>qubit</i>	12
Figura 2: Esfera de Bloch. Adaptado de (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.15).....	13
Figura 3: Porta cNOT.....	14
Figura 4: Representação do potencial Φ em torno da origem. O poço de potencial “gira”, possibilitando o confinamento da partícula.	19
Figura 5: Diferentes geometrias para armadilhas de íons. (a) confinamento puramente dinâmico nas três dimensões. (b) Armadilha linear tipo Paul. Confinamento dinâmico no plano x - y , e confinamento estático no eixo z . Adaptado de (LEIBFRIED, et al, 2003).....	20
Figura 6: Controle dos estados quânticos por meio de lasers. Adaptado de (CIRAC, ZOLLER, 1995).	24
Figura 7: Transições entre os estados fundamental e excitado. ω_0 é a frequência de ressonância dos estados atômicos internos, enquanto que ω_z é a frequência de excitação do modo de oscilação coletiva do centro de massa da cadeia de íons. Sintonizando o laser nessas frequências, são estimuladas as transições entre os diferentes níveis de energia.	24
Figura 8: Modo de oscilação do centro de massa da cadeia de íons.	26
Figura 9: Arranjo geométrico dos eletrodos na armadilha de íons tipo Paul.	29
Figura 10: Superfícies limitantes da região de cálculo.	30
Figura 11: Malha gerada para a implementação do método dos elementos finitos.	31
Figura 12: Alimentação dos eletrodos com tensão DC.	32
Figura 13: Alimentação dos eletrodos com tensão AC.	33
Figura 14: Potencial estático ao longo da direção longitudinal.	33
Figura 15: Potenciais ao longo dos eixos x e y em vários instante de tempo. As curvas em verde representam o potencial ao longo do eixo x , e as curvas em azul, ao longo do eixo y	34
Figura 16: Trajetória do íon confinado durante um tempo de $20\mu s$. As diferentes cores representam diversos valores de velocidade. A trajetória se assemelha a uma curva de Lissajous e reflete o movimento secular da partícula.	35
Figura 17: Trajetória do íon confinado usando uma resolução temporal melhor. É possível identificar a presença do micromovimento, caracterizado pela oscilação em torno da trajetória média.	36
Figura 18: Movimento do íon no plano x - y	37

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Fundamentos de Computação Quântica	4
2.1	Postulados da Mecânica Quântica	5
2.2	Bits e <i>Qubits</i>	8
2.2.1	<i>Qubits</i> Individuais	8
2.2.2	<i>Qubits</i> Múltiplos.....	9
2.3	Portas Lógicas Quânticas.....	10
3	Fundamentos de Armadilhas de Íons.....	16
3.1	Confinamento Dinâmico de Partículas Carregadas	17
3.2	Implementação de <i>Qubits</i> e Portas Quânticas Usando Íons Confinados	23
4	Simulação da Armadilha Linear do Tipo Paul.....	29
5	Considerações Finais	38
	Apêndice A – Espaço de Hilbert e Notação de Dirac	40
	Apêndice B – Estados Entrelaçados	42
	Apêndice C – Transformações de Calibre.....	43
	Bibliografia.....	47

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da ciência da computação ao longo do século XX provocou profundas transformações em várias áreas da atividade humana. O advento e popularização do computador pessoal, fez com que ele se tornasse um acessório comum ao dia a dia das pessoas, modificando a maneira como elas se comportam e se relacionam. Essa popularização proporcionou também um acesso mais rápido e fácil à informação, a qual passou a ser tratada como uma mercadoria muito valorizada. Pode-se dizer que vivemos na era da informação.

Os fundamentos da teoria da computação moderna são creditados ao matemático inglês Alan Turing, graças a um notável artigo publicado em 1936. Turing desenvolveu a noção abstrata do que hoje chamamos de computador programável, estabelecendo um modelo de computação conhecido como máquina de Turing. Não muito tempo após a publicação deste artigo fundamental, foram desenvolvidos os primeiros computadores construídos com componentes eletrônicos. Posteriormente, John von Neumann descreveu, em um modelo teórico simples, como seria possível montar de forma prática todos os componentes necessários para a construção de uma máquina de Turing universal.

Uma revolução na produção do *hardware* computacional ocorreu a partir de 1947, quando John Bardeen, Walter Brattain e Will Shockley desenvolveram o primeiro transistor. Desde então, os computadores têm crescido em capacidade de processamento num ritmo surpreendente, tal como sintetizado por Gordon Moore em 1965. A assim chamada lei de Moore afirma que o número de transistores que podem ser gravados em um chip eletrônico dobra a cada 18 meses, levando a uma duplicação da capacidade das memórias e do poder computacional dos processadores (LE BELLAC, 2006, p.2). Entretanto, há um limite fundamental para a miniaturização dos dispositivos eletrônicos, o que implica que a lei de Moore não deverá ter validade ilimitada. Por extrapolação desta lei, em um futuro não muito distante (uma ou duas décadas), as dimensões características dos circuitos em chips atingirão algo em torno de 10 nanômetros. Em escalas de comprimento menores que esta, as propriedades individuais de átomos e elétrons se tornam predominantes e os efeitos quânticos passam a interferir no funcionamento dos componentes. Estes efeitos terão que ser levados em conta no caso

de se querer continuar a diminuir o tamanho dos componentes. Entretanto, diversos estudos teóricos recentes mostram que os efeitos quânticos podem ser aproveitados para promover novos paradigmas de computação, qualitativamente diferentes dos atuais e, em alguns casos, muito mais poderosos que estes (BOUWMEESTER, et al, 2000).

A concepção de componentes eletrônicos como o transistor foi realizada aplicando resultados da mecânica quântica, de modo que os computadores digitais atuais – que chamamos de computadores clássicos¹ – sempre funcionaram segundo os princípios da mecânica quântica. Entretanto, não chamamos este tipo de máquina de computador quântico, porque eles não utilizam os princípios desta teoria diretamente para a realização do processamento da informação. Além disso, o comportamento quântico exibido pelos transistores é um comportamento coletivo, sendo sempre envolvida uma grande quantidade de elétrons – da ordem de 10^4 a 10^5 . A grande novidade, desenvolvida nas décadas de 70 e 80, é o advento da manipulação e observação de objetos quânticos individuais. É na possibilidade de manipulação desses sistemas extremamente pequenos e delicados que residem os alicerces do que chamamos computação quântica (LE BELLAC, 2006, p.2).

A idéia original da utilização de um computador quântico foi proposta por Richard Feynman em 1982, o qual conjecturou o uso de um sistema quântico para simular eficientemente uma classe de sistemas físicos, os quais não podem ser simulados eficientemente com computadores clássicos. Desde esta idéia inicial, foram descobertas várias possíveis aplicações para computadores quânticos, a mais famosa delas sendo o algoritmo que resolve o problema da decomposição de grandes números inteiros em seus fatores primos, conhecido como algoritmo de Shor (SHOR, 1994). O advento deste algoritmo teve um impacto quase imediato na comunidade científica, por demonstrar diretamente que computadores quânticos poderiam resolver problemas extremamente complexos, que não têm solução eficiente em computadores clássicos. De fato, o algoritmo de Shor fez aumentar o interesse nesta nova área de pesquisa, impulsionando de forma decisiva o seu desenvolvimento, além de abrir as portas para uma nova ciência de algoritmos (LE BELLAC, 2006, p.3). Relacionada com a pesquisa em computação quântica estão outras aplicações, tais como: teletransporte quântico, criptografia quântica, comunicação em canais quânticos e código quântico superdenso (CHUANG, NIELSEN, 2000).

¹ No contexto deste trabalho, “clássico” é um termo que tem significado antagônico ao termo “quântico”. Isto se deve a razões históricas.

A computação quântica abre perspectivas fantásticas, porém há dificuldades em realizá-la. Um grande esforço tem sido feito para a construção de um sistema físico que seja capaz de realizar a implementação de um processador quântico. A principal dificuldade encontrada é vencer os efeitos da chamada descoerência, a qual provoca a perda de informação durante o seu processamento. Dentre as várias propostas de implementação física, uma das principais é o confinamento de partículas usando armadilha de íons.

O objetivo do presente trabalho é mostrar como as armadilhas de íons podem ser aplicadas em computação quântica, e realizar uma simulação numérica demonstrando o seu funcionamento. Estruturamos este trabalho da seguinte maneira: no capítulo 2 tratamos dos fundamentos da computação quântica, definindo matematicamente os bits no contexto quântico e as portas lógicas quânticas; no capítulo 3 discutimos os princípios de funcionamento de armadilhas de íons e como podem ser implementadas as portas lógicas quânticas utilizando este sistema; no capítulo 4 apresentamos os resultados da simulação numérica da armadilha de íons tipo Paul e o capítulo 5 é reservado para as nossas considerações finais. Foram ainda inseridos três apêndices, escritos para enfatizar aspectos importantes de certos conceitos, sem desviar o foco principal ao longo do texto.

2 FUNDAMENTOS DE COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A ciência da computação é uma área de conhecimento bastante abstrata que, notadamente, possui fortes relações com a lógica e a matemática, muito mais do que com a física. Contudo, como um computador é um sistema físico, o processo computacional, seja ele efetuado por qualquer tipo de *hardware*, é um processo que deve em última instância, obedecer às leis da física. Em sendo a mecânica quântica uma teoria fundamental, é lícito pensarmos em uma máquina que realize o processamento de informação utilizando as características essenciais desta teoria como forma de recurso computacional. Esta idéia foi formalizada por Deutsch (DEUTSCH, 1985) em um artigo que lançou as bases para essa área de pesquisa relativamente nova, que chamamos de computação e informação quântica, e que atualmente reúne conhecimentos de física, matemática, ciência da computação e teoria da informação.

Um bit clássico de informação pode tomar os valores 0 ou 1, os quais são estados mutuamente exclusivos. Um bit quântico, ou *qubit*, pode não somente assumir os valores 0 e 1, mas também, em certo sentido, todos os infinitos valores intermediários. Esta é uma consequência de uma propriedade fundamental de sistemas quânticos: é possível construir combinações lineares de um estado no qual o *qubit* tem o valor 0, e de um outro estado que apresenta o valor 1. Esta propriedade, para a qual não se encontra análogo clássico, é chamada superposição de estados (LE BELLAC, 2006, p.2).

Outra importante propriedade quântica – ainda mais intrigante que a primeira – é o chamado entrelaçamento (ou emaranhamento). Em nível quântico, pode acontecer de dois objetos distintos formarem uma única entidade, mesmo que eles sejam separados por uma distância arbitrariamente grande (LE BELLAC, 2006, p.2). Qualquer tentativa de descrever essa entidade como uma combinação de dois objetos independentes é condenada a falhar – a menos que se admita a possibilidade da propagação de sinais com velocidades superiores à da luz, o que violaria o princípio da causalidade. A despeito das possíveis interpretações filosóficas dessas duas propriedades, elas são extensivamente aplicadas em computação e informação quântica (BOUWMEESTER, et al, 2000, p.7).

Quando combinadas, estas propriedades abrem a possibilidade de novos conceitos em termos de computação, como por exemplo, o paralelismo quântico, o qual possibilitou a concepção de algoritmos que utilizam a lógica quântica, os quais, por sua própria natureza, não podem ser executados em computadores clássicos. Exemplos deles são o algoritmo de Shor – decomposição de números inteiros em seus fatores primos – e o algoritmo de Grover – algoritmo de busca eficiente.

No que segue, apresentamos os princípios fundamentais da mecânica quântica, enunciando seus postulados; apresentamos as propriedades de um e múltiplos *qubits* e discutimos operações sobre eles, as quais são realizadas por meio das portas lógicas quânticas.

2.1 POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

A teoria quântica foi desenvolvida nas primeiras décadas do século passado, ao longo de um trabalhoso processo que envolveu a contribuição de diversos cientistas importantes da época e levou a grandes debates e mesmo desavenças acerca da interpretação de suas idéias básicas. Na forma como a conhecemos hoje, ela pode ser formulada com base em postulados que expressam de forma sintética os seus princípios fundamentais à luz do conhecimento empírico adquirido. Pode-se dizer que os postulados fornecem uma conexão entre o mundo físico e o formalismo matemático da mecânica quântica. Segundo Chuang (CHUANG, NIELSEN, 2000), eles podem ser enunciados da seguinte maneira:

Postulado 1: Associado a qualquer sistema físico isolado está um espaço vetorial complexo dotado de produto interno (espaço de Hilbert), denominado espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito por seu vetor de estado, o qual é um vetor unitário neste espaço complexo.

Postulado 2: A evolução temporal do estado $|\psi\rangle$ de um sistema quântico fechado é descrita pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (2.1)$$

em que \hbar é a constante de Planck e \hat{H} é o operador hamiltoniano do sistema.

Postulado 3: Medições em sistemas quânticos são descritas por um conjunto $\{M_m\}$ de operadores de medição, os quais atuam no espaço de estados associado ao sistema que está sendo medido. O índice m refere-se aos resultados possíveis do experimento. Se o sistema se encontra no estado $|\psi\rangle$ antes da medição, a probabilidade de que ocorra o resultado m é dada por,

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (2.2)$$

e o estado do sistema imediatamente após a medição é

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.3)$$

Os operadores de medição satisfazem a relação de completude,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \quad (2.4)$$

em que I é o operador identidade.

Postulado 4: O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estado dos sistemas que o compõem. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a n , e o sistema número i é preparado no estado $|\psi_i\rangle$, então o estado do sistema composto é $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$, em que o símbolo \otimes denota produto tensorial.

Podemos fazer alguns comentários a respeito dos postulados, a fim de proporcionar uma perspectiva global sobre a teoria e tornar mais claro o caráter e o comportamento geral dos sistemas quânticos.

O primeiro postulado define o “palco” onde os fenômenos quânticos são estudados, especificando a forma como o estado de um sistema isolado deve ser descrito matematicamente, por meio de um vetor em um espaço vetorial complexo. O postulado 2 nos diz que a dinâmica de sistemas quânticos fechados é descrita pela equação de Schrödinger, a qual depende do operador hamiltoniano que caracteriza o sistema. Este postulado não prescreve como obter o hamiltoniano específico de um dado sistema, afirma apenas que, uma vez conhecido este operador, pode-se em princípio determinar a evolução temporal do vetor de estado. Para a obtenção do hamiltoniano é necessária a formulação de hipóteses adicionais, e mesmo de teorias específicas sobre o sistema em questão. Este postulado implica ainda que a evolução temporal de $|\psi\rangle$ entre dois instantes de tempo é realizada por transformações unitárias, refletindo o fato de a norma de $|\psi\rangle$ permanecer fixa e igual a um (LE BELLAC, 2006, p.37). A equação de Schrödinger pode ser resolvida formalmente, e o estado $|\psi(t)\rangle$ em qualquer instante de tempo será dado por

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt'\right] |\psi(t_0)\rangle. \quad (2.5)$$

O operador unitário $U(t; t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt'\right]$ leva o estado $|\psi(t_0)\rangle$ no tempo t_0 , ao estado $|\psi(t)\rangle$ no tempo t . É, por esta razão, chamado de operador evolução.

O terceiro postulado estabelece o comportamento de um sistema quântico quando da realização da medição de uma de suas grandezas observáveis. É por meio deste postulado que sabemos de que maneira é possível extrair informações de tais sistemas. De acordo com ele, estamos limitados a ter apenas informações estatísticas a respeito das grandezas observáveis, não sendo possível acessar diretamente o vetor de estado. Por fim, o quarto postulado nos diz como os espaços de estados de diferentes sistemas podem ser combinados para que se tenha uma descrição matemática do sistema composto.

Estas são as regras fundamentais que os sistemas quânticos obedecem, e a partir delas podem ser deduzidas certas conseqüências, algumas delas extremamente não intuitivas, como superposição e entrelaçamento. Apesar de anti-intuitiva, é esta complexidade adicional – ausente no mundo clássico – que permite que sistemas

quânticos possam ser usados para realizar um tipo de computação diferenciada em relação à computação clássica (DAVIDE, 2011).

2.2 BITS E QUBITS

O bit é um dos conceitos fundamentais das teorias da computação e informação clássicas. As teorias da computação e informação quânticas são construídas com base no seu análogo quântico, o *qubit*. Nesta seção, apresentamos as propriedades de um e vários *qubits*, procurando destacar as suas diferenças em relação aos bits clássicos.

2.2.1 QUBITS INDIVIDUAIS

Qubits são tratados como sendo objetos matemáticos abstratos com certas características específicas. Embora eles necessitem das propriedades de algum sistema físico para serem implementados (como a polarização de um fóton, ou estados de spins atômicos), é bastante útil tratá-los dessa forma abstrata, porque assim pode-se construir uma teoria geral da computação e informação quântica que não depende de um sistema específico para sua realização (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.13).

Analogamente aos estados que um bit clássico pode apresentar – 0 ou 1 – um *qubit* também pode apresentar dois estados, que denotamos por $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Uma primeira grande diferença entre bits e *qubits* é o fato de um *qubit* poder ser encontrado em um estado que não seja nem $|0\rangle$ nem $|1\rangle$. É possível formar estados superpostos por meio de combinações lineares da forma,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.6)$$

em que α e β são números complexos, frequentemente chamados de amplitudes. Ou seja, em geral, o estado de um *qubit* é um vetor em um espaço vetorial complexo de dimensão 2. Os estados especiais $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formam uma base ortonormal para este espaço e são conhecidos como estados da base computacional.

Uma segunda diferença fundamental está relacionada com a medição de bits e *qubits*. É sempre possível examinar um bit para determinar se ele está no estado 0 ou 1 – isto é o que fazem os computadores, por exemplo, para recuperar o conteúdo de sua

memória. Em contrapartida, não é possível examinar um *qubit* para determinar o seu estado quântico, ou seja, os valores de α e β na equação (2.6). Em vez disso, a mecânica quântica permite adquirir apenas informações probabilísticas sobre o estado do sistema. Quando medimos um *qubit* obtemos como resultado da medição o valor 0, com probabilidade $|\alpha|^2$, ou o valor 1, com probabilidade $|\beta|^2$. Naturalmente, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, uma vez que a soma das probabilidades deve ser unitária. Logo após a medição, o estado do sistema será $|0\rangle$, se o valor obtido tiver sido 0, ou o estado $|1\rangle$, se o valor obtido tiver sido 1. Desta forma, não temos condições de afirmar nada sobre α e β , em se medindo apenas um *qubit*.

Paradoxalmente, há um número infinito de estados possíveis de serem ocupados por um *qubit*, de modo que, em princípio, poder-se-ia armazenar uma quantidade de informação infinita em um único *qubit* por meio das amplitudes α e β . No entanto, esta conclusão se revela por ser enganosa, devido ao comportamento intrínseco de sistemas quânticos quando observados, em conformidade com o postulado 3. A partir de uma única medição, obtém-se apenas um bit de informação sobre o estado do *qubit*, devido ao fato de o resultado da medição ser sempre ou 0 ou 1. Além disso, a medição altera o seu estado, fazendo “colapsar” o seu estado de superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$, para o estado específico consistente com o resultado da medição ($|0\rangle$ ou $|1\rangle$). Somente no caso da medição de infinitos *qubits* identicamente preparados no mesmo estado $|\psi\rangle$, poder-se-ia determinar os coeficientes α e β (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.15).

2.2.2 QUBITS MÚLTIPLOS

Seria razoável esperar que um sistema de dois *qubits* não trouxesse nenhuma grande novidade em relação a um sistema de um único *qubit*. Entretanto, a estrutura de dois *qubits* é extraordinariamente rica, porque ela introduz correlações quânticas entre eles, as quais não podem ser reproduzidas usando argumentos clássicos da teoria de probabilidades (LE BELLAC, 2006, p.49). Em um sistema de dois bits clássicos, verifica-se que há quatro estados possíveis: 00, 01, 10 e 11. Todavia, para que possamos descrever adequadamente o que se passa com um sistema de dois *qubits* é necessário levar em conta o postulado 4. O espaço de estados do sistema composto será o produto tensorial dos espaços dos dois *qubits* simples que o constituem, de modo que a base computacional, antes constituída apenas pelos vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$, passará agora a ser constituída por quatro vetores, denotados por $|0\rangle \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle$ e

$|1\rangle \otimes |1\rangle$. Desta forma, o estado mais geral $|\psi\rangle$ no espaço do sistema composto é uma combinação linear desses novos vetores de base,

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle, \quad (2.7)$$

em que adotamos a notação mais compacta para o produto tensorial, $|a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |ab\rangle \equiv |a\rangle|b\rangle$. Quando as amplitudes α_{ij} atendem a certas condições (vide apêndice B), o estado $|\psi\rangle$ dado acima será um estado entrelaçado dos *qubits* originais, e estes, portanto, não poderão mais ser descritos como objetos independentes.

De forma mais geral, podemos considerar um sistema de N *qubits*, onde um vetor qualquer da base computacional terá a forma $|x_1 x_2 \dots x_N\rangle$, com $x_i = 0,1$. A base será constituída pelos vetores correspondentes a todas as combinações dos x_i . No caso de um sistema de três *qubits*, por exemplo, teremos oito combinações possíveis para os x_i , e um estado genérico nesse espaço seria dado por,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & \alpha_{000}|000\rangle + \alpha_{001}|001\rangle + \alpha_{010}|010\rangle + \alpha_{011}|011\rangle + \alpha_{100}|100\rangle + \alpha_{101}|101\rangle \\ & + \alpha_{110}|110\rangle + \alpha_{111}|111\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pode-se perceber então que o estado quântico de um sistema de N *qubits* será especificado por 2^N amplitudes, o que implica um importante resultado: a quantidade de informação contida em um estado emaranhado de N *qubits* cresce exponencialmente com N , e não linearmente, como no caso de bits clássicos – para $N = 500$, o número de amplitudes que especificam o estado entrelaçado do sistema é maior do que o número estimado de átomos no universo! Tentar armazenar todos esses números complexos seria impossível em qualquer computador clássico concebível. Entretanto, um computador quântico poderia lidar naturalmente com essa quantidade de informação (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.17).

2.3 PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS

Portas lógicas podem ser entendidas como sendo operadores que atuam sobre bits, realizando um mapeamento entre os seus estados de entrada e saída. No caso de um único bit clássico, há apenas uma operação não trivial que pode ser realizada, que é a

inversão do estado do bit de entrada: $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$. A porta que realiza esta ação é chamada de porta NOT. Uma porta NOT quântica análoga a esta é definida de modo que o estado $|0\rangle$ é levado no estado $|1\rangle$, e vice-versa. Entretanto, isto não é suficiente para especificar completamente a sua ação, pois não está claro como a porta opera sobre estados superpostos de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Neste caso, ela fará com que o estado

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

seja levado no estado

$$|\psi'\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle, \quad (2.9)$$

ou seja, as amplitudes α e β são invertidas.

Diferentemente do caso dos bits clássicos, existe uma infinidade de operações não-triviais possíveis sobre *qubits* individuais. Se denotarmos o vetor de estado como uma matriz coluna,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

podemos representar a ação das portas quânticas por meio de matrizes 2×2 . É necessário, entretanto, que a norma do vetor de estado seja preservada e isto implica que essas matrizes devem ser unitárias, ou seja, se U representa a matriz de uma porta lógica quântica, ela deve satisfazer a relação $U^\dagger U = I$, em que U^\dagger é a matriz adjunta de U (obtida pela transposição e, em seguida, conjugação complexa dos elementos de U). De fato, esta é a única restrição que a mecânica quântica impõe sobre operações em *qubits*, de modo que qualquer operação unitária especifica uma porta quântica válida (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.18).

Suponha que definamos uma matriz X para representar a porta NOT quântica. Escrita em forma matricial, a ação desta porta deve ser tal que,

$$X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Verifica-se facilmente que a matriz X que satisfaz esta relação é

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Observa-se também que X é unitária, $X^\dagger X = I$. Esta matriz, juntamente com

$$Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

são as chamadas matrizes de Pauli – as quais são também denotadas por σ_x , σ_y e σ_z , respectivamente. Além delas, outra importante operação sobre *qubits* é aquela realizada pela porta de Hadamard H ,

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

a qual transforma o estado zero $|0\rangle$ em $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, e o $|1\rangle$ em $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, realizando portanto uma “mistura” dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Estas portas são representadas em circuitos quânticos utilizando a simbologia mostrada na figura 1.

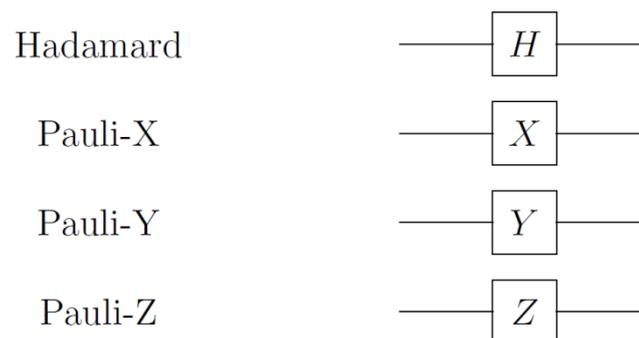


Figura 1: Portas lógicas quânticas de um *qubit*.

Num espaço de dimensão 2 – correspondente a um único *qubit* – o efeito da aplicação de operações unitárias pode ser visualizado como sendo rotações de um vetor de norma um na chamada esfera de Bloch. Por esse motivo, operações unitárias sobre

qubits são frequentemente chamadas de rotações de *qubits* (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.15).

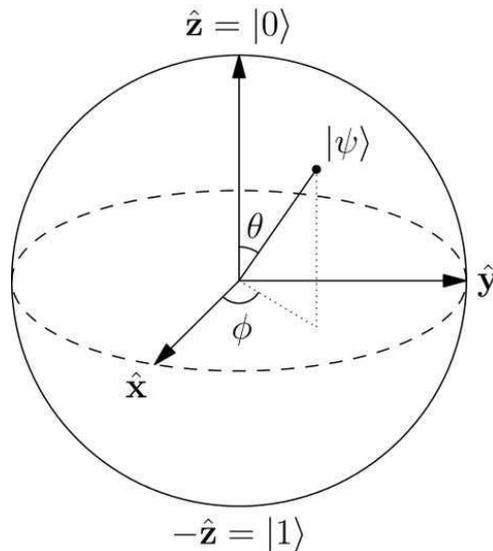


Figura 2: Esfera de Bloch. Adaptado de (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.15).

As matrizes de Pauli dão origem aos operadores de rotação em torno dos eixos x, y e z pela aplicação da função exponencial:

$$R_x(\theta) = e^{i\theta\sigma_x/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -i \operatorname{sen} \theta/2 \\ -i \operatorname{sen} \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$R_y(\theta) = e^{i\theta\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\operatorname{sen} \theta/2 \\ \operatorname{sen} \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$R_z(\theta) = e^{i\theta\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Qualquer porta quântica de um *qubit* pode ser escrita como sendo uma composição destes operadores de rotação.

Existem várias portas lógicas clássicas de múltiplos bits, a exemplo das portas AND, OR, XOR, NAND e NOR. Entretanto, um importante resultado teórico afirma que qualquer função nos bits pode ser computada a partir da composição de portas NAND apenas, a qual é assim conhecida como porta lógica universal (CHUANG, NIELSEN, 2000, p.20). No caso quântico, uma porta de múltiplos *qubits* de importância

fundamental é a chamada porta *controlled*-NOT, ou simplesmente cNOT. Esta porta tem dois *qubits* de entrada e implementa uma operação controlada de inversão do chamado *qubit* alvo, em consonância com o estado do chamado *qubit* de controle. A representação do circuito para a cNOT é mostrada na figura 2, onde a linha superior representa o *qubit* de controle, e a inferior representa o *qubit* alvo.

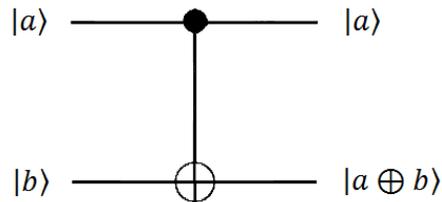


Figura 3: Porta cNOT.

A ação da porta pode ser descrita como segue. Se o *qubit* de controle é $|0\rangle$, então o *qubit* alvo é deixado inalterado. Se o *qubit* de controle é $|1\rangle$, o *qubit* alvo é invertido. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\
 |01\rangle &\rightarrow |01\rangle \\
 |10\rangle &\rightarrow |11\rangle \\
 |11\rangle &\rightarrow |10\rangle
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

em que estamos usando a convenção de que o primeiro dígito corresponde ao *qubit* de controle, e o segundo ao *qubit* alvo. Pode-se descrever compactamente a ação da porta cNOT como $|a, b\rangle \rightarrow |a, b \oplus b\rangle$, onde \oplus representa adição módulo 2. Outra maneira de descrever a ação da cNOT é por meio da sua representação matricial,

$$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \tag{2.19}$$

Assim como no caso de *qubits* individuais, a exigência de que a probabilidade seja conservada é expressa no fato de que U_{CN} é uma matriz unitária.

Naturalmente, existem muitas outras portas de múltiplos *qubits* além da cNOT. No entanto, uma operação arbitrária em qualquer número de *qubits* pode ser gerada por um conjunto finito de portas, de acordo com o seguinte resultado: qualquer operação unitária pode ser aproximada, com precisão arbitrária, usando a porta cNOT e as portas de rotações de *qubits* individuais. Diz-se então que estas portas formam um conjunto universal de portas quânticas. Este importante resultado é o análogo quântico da universalidade da porta NAND (SILVA, 2002).

3 FUNDAMENTOS DE ARMADILHAS DE ÍONS

A busca pela implementação física de computadores quânticos tem sido um tema de intensa pesquisa atualmente, tendo sido propostos, nas últimas duas décadas, diversos tipos de aparatos experimentais para a sua realização. Pode-se dizer que o estágio de desenvolvimento da tecnologia ainda está nos seus primeiros passos, tendo-se ainda que percorrer um longo caminho para a obtenção de um computador quântico que tenha algum uso prático. Entretanto, os avanços alcançados nos últimos anos são promissores e permitem esperar com otimismo os desenvolvimentos futuros deste campo de pesquisa. Dentre os principais sistemas propostos, podemos destacar: ressonância nuclear magnética com moléculas; fótons em meios ópticos não lineares; cavidades ressonantes em microondas; eletrodinâmica quântica de cavidades; circuitos supercondutores com junções Josephson; átomos de condensados de Bose-Einstein confinados em redes ópticas, dentre outros (LE BELLAC, 2006, p.108; CHUANG, NIELSEN, 2000, p.277).

Em 2000, David P. DiVincenzo listou cinco critérios que um sistema deveria satisfazer a fim de implementar um computador quântico (DIVICENZO, 2000). Segundo ele, um tal sistema deve:

- Ser escalável, isto é, capaz de ser estendido a um número suficiente de *qubits*, sendo estes bem caracterizados;
- Ser capaz de inicializar os *qubits* no estado $|0\rangle$ de forma simples e com fidelidade;
- Ter *qubits* suportados por estados físicos de tempos de vida longos o suficiente para que o estado permaneça coerente durante a realização das operações;
- Ser capaz da realização de um conjunto universal de portas quânticas;
- Possuir um método eficiente de medição de *qubits* específicos ao final do processo computacional.

De todas as propostas existentes atualmente, uma das que mais chamam a atenção, atendendo à maioria dos requisitos listados acima, é o sistema que utiliza

armadilhas de íons. As suas principais características são: método de leitura da informação via técnicas de fluorescência cuja eficiência é quase unitária (LE BELLAC, 2006, p.122; BOUWMEESTER, et al, 2000, p.127); escrita da informação realizada por meio de lasers, usando técnicas bem desenvolvidas e utilizadas há bastante tempo em espectroscopia de alta precisão e estabelecimento de padrões de frequência e relógios atômicos (BOUWMEESTER, et al, 2000, p.127; BERKELAND, et al, 1998); manutenção do aprisionamento dos átomos por grandes períodos de tempo (dias ou até semanas) (SILVA, 2002).

Entretanto, como na maioria das outras tentativas de implementação, a maior dificuldade é a limitação imposta pela chamada descoerência, provocada devido à interação do sistema com o ambiente que o envolve. Esta interação faz com que os *qubits* percam as características de superposição coerente, corrompendo a informação nele contida. A dificuldade reside no fato de que para ser de uso prático, um computador quântico deve ser capaz de armazenar e processar milhares de *qubits* (STEANE, 2007), enquanto que o atual estado da arte é da ordem de apenas dez (MONZ, et al, 2011), devido ao efeito da descoerência piorar com o aumento do número de *qubits*. Ainda assim, o sistema da armadilha de íons possui tempos de descoerência grandes comparados à maioria das outras implementações e apresenta melhores possibilidades de escalabilidade que as outras propostas, sendo por isso um dos sistemas mais promissores disponíveis.

No que segue, discutiremos os princípios de funcionamento de armadilhas de íons, mais especificamente, as armadilhas lineares do tipo Paul. Em seguida, mostramos como este sistema se presta à implementação de um processador quântico, mostrando como as portas lógicas podem ser realizadas.

3.1 CONFINAMENTO DINÂMICO DE PARTÍCULAS CARREGADAS

O objetivo de uma armadilha de íons, como o nome sugere, é o confinamento tridimensional de partículas carregadas em uma pequena região do espaço, para que seja possível manipulá-las de maneira controlada. Dentre os vários tipos de potencial possíveis para aprisionar um íon, é normalmente desejado que ele seja semelhante ao potencial de um oscilador harmônico, pois desta forma, a descrição analítica do

movimento das partículas se torna mais simples. Em geral, busca-se que a força seja aproximadamente restauradora,

$$\mathbf{F} \sim -\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição. Como,

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (3.2)$$

onde U é a energia potencial, segue que U deve ter a forma (WERTH, et al, 2005, p.12),

$$U(x, y, z, t) = A(t)(ax^2 + by^2 + cz^2), \quad (3.3)$$

onde a, b e c são constantes e $A(t)$ é uma função que pode depender do tempo. Verifica-se que não é possível alcançar o confinamento usando apenas um campo eletrostático, conforme demonstrado por Earnshaw na forma de um teorema que leva o seu nome (GRIFFITHS, 1999, p.115). Busca-se então engendrar uma combinação de campos estáticos e variantes no tempo, de modo a gerar “barreiras de potencial” em todas as direções, às quais a partícula não seja capaz de transpor. Vamos considerar potenciais Φ que possam ser decompostos em uma parte estática superposta a uma parte dinâmica, a qual varia senoidalmente no tempo,

$$\Phi(x, y, z, t) = U_{dc}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + U_{rf} \cos(\omega_{rf} t) (\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2), \quad (3.4)$$

onde $U = q\Phi$, U_{dc} e U_{rf} são as amplitudes das tensões DC e AC aplicadas aos eletrodos da armadilha, ω_{rf} é a frequência do campo AC e $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ são coeficientes associados ao arranjo geométrico da armadilha. O potencial (3.4) apresenta um ponto de sela na origem, fazendo com que o equilíbrio do íon seja estável em duas das direções, mas necessariamente instável na terceira. Esta instabilidade é compensada fazendo com que o poço de potencial “gire” rapidamente, de modo que a partícula sempre se encontre sujeita a um mínimo efetivo em todas as direções.

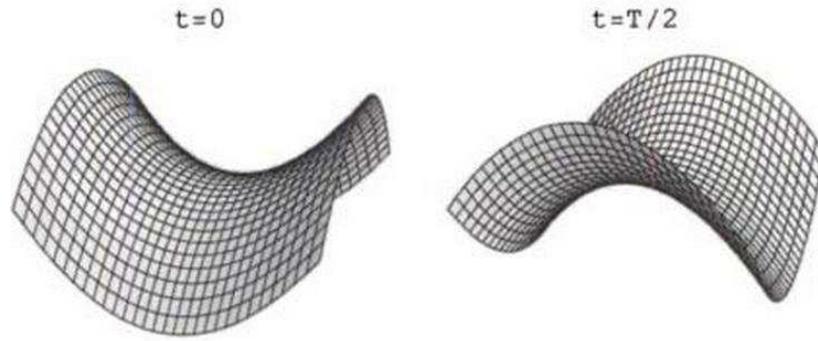


Figura 4: Representação do potencial Φ em torno da origem. O poço de potencial “gira”, possibilitando o confinamento da partícula.

No calibre de Coulomb, o potencial $\Phi(x, y, z, t)$ satisfaz a equação de Laplace (vide apêndice C),

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, t) = 0, \quad (3.5)$$

o que implica nas seguintes condições sobre os coeficientes,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 0. \quad (3.7)$$

A escolha destes coeficientes é uma opção de projeto e implica diferentes geometrias da armadilha de íons. Uma escolha comumente utilizada é

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad (3.8)$$

$$\alpha' + \beta' = -\gamma' \quad (3.9)$$

a qual leva a um confinamento puramente dinâmico nas três dimensões, sendo realizado com um arranjo de eletrodos como mostrado na figura 5(a). Outra escolha possível, a qual é o objeto do nosso estudo, é a seguinte

$$-\alpha - \beta = \gamma > 0 \quad (3.10)$$

$$\alpha' = \beta', \gamma' = 0, \quad (3.11)$$

levando a um confinamento dinâmico no plano x - y , e a um confinamento estático ao longo do eixo- z . Esta é uma armadilha linear do tipo Paul (PAUL, 1990), cuja configuração é mostrada na figura 5(b). Este tipo de armadilha é mais adequado para computação quântica, devido à sua geometria facilitar a captação da fluorescência iônica e ainda permitir o alinhamento de vários íons ao longo de um eixo.

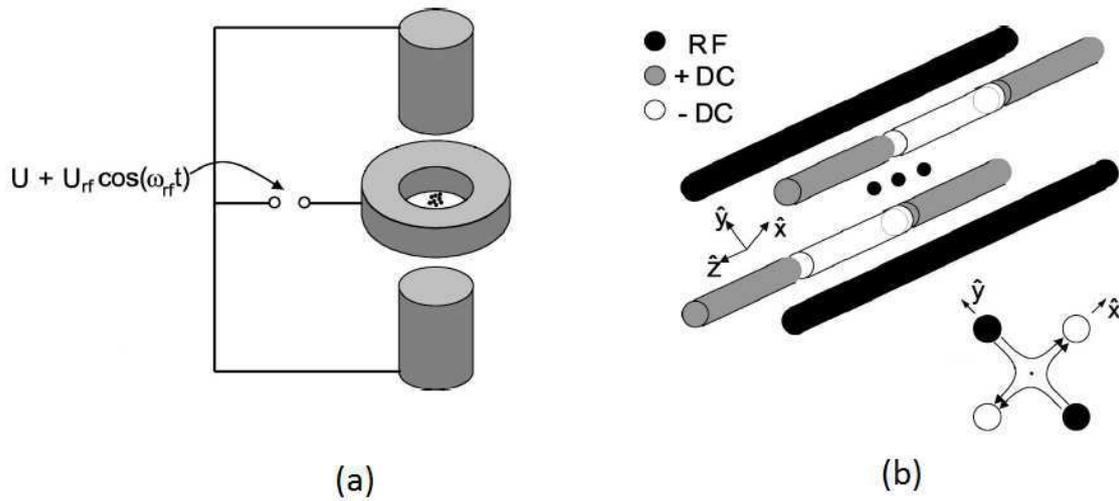


Figura 5: Diferentes geometrias para armadilhas de íons. (a) confinamento puramente dinâmico nas três dimensões. (b) Armadilha linear tipo Paul. Confinamento dinâmico no plano x - y , e confinamento estático no eixo z . Adaptado de (LEIBFRIED, et al, 2003).

A força que uma partícula de carga $q = Ze$ está submetida quando imersa em um campo eletromagnético, é a força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = Ze(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.12)$$

onde e é a carga elétrica elementar, \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétrico e magnético e \mathbf{v} é a velocidade da partícula. Sob condições normais, entretanto, a força magnética é muito menor em magnitude que a força elétrica, se tornando comparável a esta somente quando a velocidade da partícula se aproxima da velocidade da luz (GRIFFITHS, 1999, p.233). Deste modo podemos considerar, com muito boa aproximação, somente o efeito da força elétrica,

$$\mathbf{F} = -Ze\nabla\Phi. \quad (3.13)$$

O movimento na direção x (as outras direções são tratadas analogamente) é descrito pela equação,

$$\ddot{x} = -\frac{Ze}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{Ze}{m} [U\alpha + U_{rf} \cos(\omega_{rf} t) \alpha'] x. \quad (3.14)$$

Esta equação de movimento clássica de uma partícula carregada sob a ação de um potencial da forma (3.4) foi primeiro estudada por Paul, Osberghaus e Fischer em 1958. Ela pode ser escrita na forma padrão da uma equação diferencial de Mathieu,

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + [a_x - 2q_x \cos(2\xi)]x = 0 \quad (3.15)$$

pelas substituições

$$\xi = \frac{\omega_{rf} t}{2}, \quad a_x = \frac{4ZeU_{dc}\alpha}{m\omega_{rf}^2}, \quad q_x = \frac{2ZeU_{rf}\alpha'}{m\omega_{rf}^2}. \quad (3.16)$$

A equação de Mathieu pertence à classe geral de equações diferenciais com coeficientes periódicos. A forma geral das soluções estáveis decorre do teorema de Floquet (LEIBFRIED, et al, 2003),

$$x(\xi) = A e^{i\beta_x \xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{i2n\xi} + B e^{-i\beta_x \xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} e^{-i2n\xi} \quad (3.17)$$

em que o expoente característico β_x e os coeficientes C_{2n} são funções de a_x e q_x apenas e não dependem das condições iniciais. A e B são constantes arbitrárias que podem ser utilizadas para satisfazer condições de contorno ou normalizar uma solução particular. Substituindo a equação (3.17) na equação (3.15), obtém-se uma relação recursiva,

$$C_{2n} - D_{2n} C_{2n} + C_{2n-2} = 0, \quad (3.18)$$

$$D_{2n} = [a_x - (2n + \beta_x)^2]/q_x, \quad (3.19)$$

que conecta os coeficientes e β_x a a_x e q_x .

Pode-se obter uma solução aproximada de ordem mais baixa para a trajetória dos íons, $x(t)$, no caso de $|a_x|, q_x^2 \ll 1$, assumindo $C_{\pm 4} \simeq 0$. Então, junto com a condição inicial $B = A$, a equação (3.19) dá,

$$\beta_x \approx \sqrt{a_x + q_x^2/2}, \quad (3.20)$$

o que implica,

$$x(t) \approx 2AC_0 \cos\left(\beta_x \frac{\omega_{rf}}{2} t\right) \left[1 - \frac{q_x}{2} \cos(\omega_{rf} t)\right]. \quad (3.21)$$

Equações similares são obtidas para as outras componentes.

A trajetória descrita pela equação acima consiste de oscilações harmônicas na frequência $\omega_x = \beta_x \omega_{rf}/2 \ll \omega_{rf}$, que é o chamado movimento secular, cuja amplitude é modulada por pequenas oscilações na frequência da fonte ω_{rf} , chamado de micromovimento. Se o micromovimento é pequeno o suficiente, o movimento secular pode ser aproximado como sendo o de um oscilador harmônico de frequência ω_x ao longo do eixo x (o mesmo vale no eixo y). O movimento na direção z – para o caso específico da armadilha de Paul – se reduz a,

$$z(t) \approx 2AC_0 \cos\left(\beta_z \frac{\omega_{rf}}{2} t\right), \quad (3.22)$$

pois $\gamma' = 0$ implica $q_z = 0$, $\beta_z = \sqrt{a_z}$. Podemos ainda escrever (3.22) como

$$z(t) \approx 2AC_0 \cos \omega_z t, \quad (3.23)$$

em que $\omega_z = \sqrt{ZeU_{dc}\alpha/m}$. Ou seja, ao longo do eixo z , não há a presença do micromovimento.

É importante ter o conhecimento do comportamento da trajetória clássica dos íons na armadilha, pois o estado de oscilação das partículas confinadas é usado como recurso para a realização do processamento da informação quântica. Conforme mostraremos em maiores detalhes a seguir, é necessário que o movimento dos íons seja

praticamente todo ao longo da direção longitudinal da armadilha, e o micromovimento, o menor possível. Desta forma, a armadilha deve ser projetada de modo que o confinamento dinâmico no plano x - y seja muito mais acentuado que o confinamento estático na direção z . Isto é conseguido aplicando uma tensão U_{rf} muito maior que U_{dc} . Valores típicos U_{rf} são de $100V$ a $800V$, enquanto que U_{dc} de $10V$ a $50V$.

3.2 IMPLEMENTAÇÃO DE *QUBITS* E PORTAS QUÂNTICAS USANDO ÍONS CONFINADOS

Computação quântica é baseada na transformação de estados quânticos, os quais evoluem conforme determinado pelo operador hamiltoniano do sistema. Para a realização de um computador quântico é necessário o controle preciso deste hamiltoniano, de modo que se possa efetivar transformações unitárias arbitrárias sobre os estados de um *qubit*. Como mencionado no capítulo 2, qualquer transformação unitária pode ser composta por rotações em *qubits* individuais e portas cNOT, e por isso a realização desses dois tipos de portas lógicas são objetivos naturais para um sistema que busque realizar um processador quântico. Nesta seção, buscamos mostrar como os *qubits* podem ser implementados usando íons aprisionados na armadilha linear descrita na seção anterior, bem como o modo com que as portas lógicas podem ser realizadas, mostrando assim, o potencial de utilização deste sistema para a construção de um computador quântico.

Para que se possa realizar a implementação de *qubits*, é necessário um sistema quântico de dois níveis, correspondentes aos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. No caso de um íon, são usados os estados de sua estrutura atômica: o estado fundamental $|g\rangle \equiv |0\rangle$, e um estado excitado de um longo tempo de vida (da ordem de $1s$) $|e\rangle \equiv |1\rangle$, o qual pode ser um estado hiperfino de *spin*, ou um estado eletrônico metaestável. Estes são os chamados estados atômicos internos. Um sistema como este é com boa aproximação um sistema quântico de dois níveis, desde que as transições para outros estados indesejáveis sejam improváveis. Vários tipos de íons se adéquam a esta condição, a exemplo de: ${}^9Be^+$, ${}^{40}Ca^+$, ${}^{138}Ba^+$, ${}^{25}Mg^+$ e ${}^{199}Mg^+$ (BOUWMEESTER, *et al*, 2000, p.149).

Os *qubits* individuais são manipulados por pulsos de laser, apontados para cada um dos íons separadamente, como mostrado na figura 6. As transições entre estado fundamental $|g\rangle$ e o excitado $|e\rangle$ são estimuladas ajustando convenientemente a duração e frequência dos pulsos do laser.

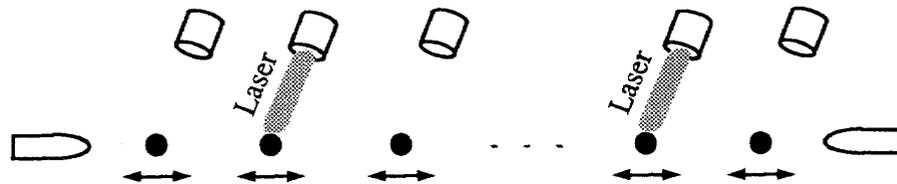


Figura 6: Controle dos estados quânticos por meio de lasers. Adaptado de (CIRAC, ZOLLER, 1995).

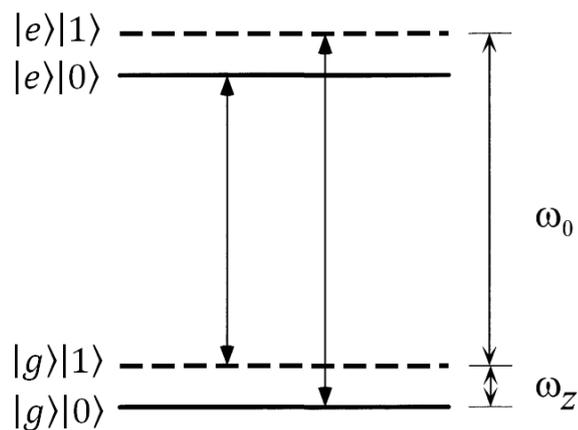


Figura 7: Transições entre os estados fundamental e excitado. ω_0 é a frequência de ressonância dos estados atômicos internos, enquanto que ω_z é a frequência de excitação do modo de oscilação coletiva do centro de massa da cadeia de íons. Sintonizando o laser nessas frequências, são estimuladas as transições entre os diferentes níveis de energia.

O sistema de íons confinados eletromagneticamente é, sob as condições descritas na seção anterior, um conjunto de partículas em movimento oscilatório coletivo ao longo da direção longitudinal da armadilha. Esta oscilação corresponde aos chamados graus de liberdade externos do sistema. Os íons são resfriados até o seu estado fundamental por meio de uma técnica conhecida como *Doppler cooling* (CHUANG, NIELSEN, 2000, p. 312). O entrelaçamento entre íons distintos é conseguido por meio do acoplamento dos graus de liberdade internos aos graus de liberdade externos de oscilação, possibilitando a troca de informação entre dois ou mais íons.

A descrição da cadeia de íons pode ser feita como um oscilador sujeito ao potencial harmônico $V(z) = M\omega_z^2 z^2/2$. Neste caso, o hamiltoniano pode ser escrito como,

$$\hat{H}_{osc} = \frac{p_z^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2, \quad (3.24)$$

onde p_z é o momento linear na direção longitudinal. Introduzindo os operadores de criação e aniquilação a^\dagger e a ,

$$a = \sqrt{\frac{M\omega_z}{2\hbar}} \left(z + \frac{ip_z}{M\omega_z} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{M\omega_z}{2\hbar}} \left(z - \frac{ip_z}{M\omega_z} \right), \quad (3.25)$$

pode-se reescrever \hat{H}_{osc} como,

$$\hat{H}_{osc} = \hbar\omega_z \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.26)$$

Os valores de energia que o sistema pode assumir são os autovalores do operador \hat{H}_{osc} . Eles são da forma $\hbar\omega_z \left(m + \frac{1}{2} \right)$, $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\hat{H}_{osc} |m\rangle = \hbar\omega_z \left(m + \frac{1}{2} \right) |m\rangle. \quad (3.27)$$

em que $|m\rangle$ são os autovetores de \hat{H}_{osc} . A ação dos operadores a e a^\dagger sobre um autovetor $|m\rangle$ é tal que,

$$a|m\rangle = \sqrt{m} |m-1\rangle, \quad a^\dagger|m\rangle = \sqrt{m+1} |m+1\rangle. \quad (3.28)$$

Em particular,

$$a|1\rangle = |0\rangle, \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle. \quad (3.29)$$

O operador a^\dagger leva o estado fundamental do oscilador $|0\rangle$ ao primeiro estado excitado $|1\rangle$, criando um quantum de oscilação, denominado fônon. Já a ação do operador a sobre o estado $|1\rangle$, é aniquilar este fônon, levando o sistema de volta para o estado fundamental. No estado excitado $|1\rangle$, os íons se movem em conjunto, oscilando em torno da posição de equilíbrio coletivamente. Este é o chamado modo de oscilação do centro de massa. Outros modos podem ser excitados, correspondentes aos estados $|2\rangle$, $|3\rangle$, etc. Porém, é importante que somente o estado $|1\rangle$ seja excitado.

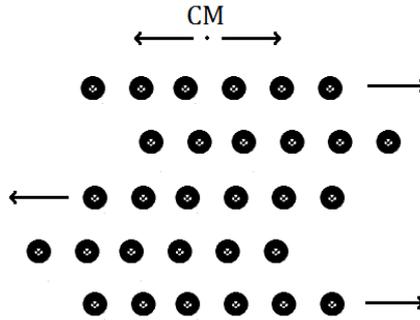


Figura 8: Modo de oscilação do centro de massa da cadeia de íons.

Os estados internos do i -ésimo íon da cadeia e as interações com o campo eletromagnético produzido pelo laser são descritos pelo hamiltoniano (BOUWMEESTER, et al, 2000, p.128),

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_{int} + \hat{H}_{las}^i \\ &= -\frac{\hbar}{2}(\omega_L^i - \omega_0^i)\sigma_z^i + \frac{\hbar}{2}\Omega_i(\sigma_+^i + \sigma_-^i)\text{sen}(k_L z_i + \phi_i),\end{aligned}\quad (3.30)$$

em que ω_L^i é a frequência do laser, ω_0^i é a frequência de transição entre dois níveis de energia do íon, Ω_i é a frequência de Rabi, k_L é o vetor de onda do laser, ϕ_i é uma constante de fase e $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$. Dentro do limite de Lamb-Dicke, $\eta \ll 1$, e considerando baixas intensidades do laser, \hat{H}_{las}^i se torna

$$\begin{aligned}\hat{H}_{las}^i &\approx \hat{H}_a^i + \hat{H}_b^i \\ &= -\frac{\hbar\Omega_i^a}{2}(\sigma_+^i + \sigma_-^i) + \frac{\hbar\Omega_i^a}{2}\frac{\eta}{\sqrt{N}}(a\sigma_+^i + a^\dagger\sigma_-^i),\end{aligned}\quad (3.31)$$

em que η é o chamado parâmetro de Lamb-Dicke. Nesse regime, é possível implementar as portas lógicas, tal como descrito por Cirac e Zoller (CIRAC, ZOLLER, 1995). Aplicando um pulso do laser sintonizado na frequência de transição $\omega_L^i = \omega_0^i$, o sistema será regido pelo hamiltoniano \hat{H}_a^i , produzindo o seguinte operador evolução,

$$U^i(\phi) = \exp\left[-ik\frac{\pi}{2}(\sigma_+^i e^{-i\phi} + \sigma_-^i e^{i\phi})\right]. \quad (3.32)$$

A ação deste operador sobre os estados $|g\rangle_i$ e $|e\rangle_i$, é dada por

$$|g\rangle_i \rightarrow \cos(k_L\pi/2) |g\rangle_i - ie^{i\phi} \sin(k_L\pi/2) |e\rangle_i \quad (3.33)$$

$$|e\rangle_i \rightarrow \cos(k_L\pi/2) |e\rangle_i - ie^{i\phi} \sin(k_L\pi/2) |g\rangle_i \quad (3.34)$$

As equações (3.33) e (3.34) representam rotações sobre os estados $|g\rangle_i$ e $|e\rangle_i$ por um ângulo qualquer. Desta forma, uma porta quântica de um *qubit* arbitrária pode ser realizada.

Portas de dois ou mais *qubits* são mais difíceis de implementar, porque elas requerem a alteração do movimento de vibração da cadeia de íons. O segundo termo em (3.31) rege o acoplamento dos graus de liberdade internos dos íons, com o movimento oscilatório da cadeia iônica. Consideremos primeiro a frequência do laser sintonizada de maneira tal que excite somente o modo do centro de massa e um estado interno de um dos íons. Aplicando o pulso do laser por um tempo $t = k\pi/(\Omega_i^a \eta_{cm}/\sqrt{N})$ – um chamado pulso $k\pi$ – os estados irão evoluir segundo o operador,

$$U^i(\phi) = \exp\left[-ik\frac{\pi}{2}(\sigma_+^i a e^{-i\phi} + \sigma_-^i a^\dagger e^{i\phi})\right]. \quad (3.35)$$

De maneira que,

$$|g\rangle_i|1\rangle \rightarrow \cos(k_L\pi/2) |g\rangle_i|1\rangle - ie^{i\phi} \sin(k_L\pi/2) |e'\rangle_i|0\rangle \quad (3.36)$$

$$|e'\rangle_i|0\rangle \rightarrow \cos(k_L\pi/2) |e'\rangle_i|0\rangle - ie^{i\phi} \sin(k_L\pi/2) |g\rangle_i|1\rangle \quad (3.37)$$

$$|g\rangle_i|0\rangle \rightarrow |g\rangle_i|0\rangle \quad (3.38)$$

em que $|0\rangle$ e $|1\rangle$ denotam o estado fundamental e o modo de oscilação do centro de massa, e $|e'\rangle$ é um estado eletrônico auxiliar, excitado seletivamente. Uma porta lógica de dois *qubits* pode ser implementada como segue: (i) usando um pulso π focado no primeiro íon, trocamos o estado interno do primeiro íon para o modo de vibração do centro de massa; (ii) introduzimos uma troca de sinal condicional por meio de um pulso 2π no segundo íon usando o nível auxiliar $|e'\rangle_i$; e (iii) a aplicação de um pulso π irá trocar novamente o estado quântico do modo de vibração do centro de massa para o estado interno do primeiro íon. A evolução completa é dada por:

$$\begin{array}{lll}
(i) & (ii) & (iii) \\
|g\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle & \rightarrow |g\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle & \rightarrow |g\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle \rightarrow |g\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle \\
|g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle & \rightarrow |g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle & \rightarrow |g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \rightarrow |g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle \\
|e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle & \rightarrow -i|g\rangle_1|g\rangle_2|1\rangle & \rightarrow i|g\rangle_1|g\rangle_2|1\rangle \rightarrow |e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle \\
|e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle & \rightarrow -i|g\rangle_1|e\rangle_2|1\rangle & \rightarrow -i|g\rangle_1|e\rangle_2|1\rangle \rightarrow -|e\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle
\end{array}$$

Desta forma, o efeito líquido da interação será a troca de sinal somente quando ambos os íons estão no estado (interno) excitado. As operações descritas acima são equivalentes a uma porta cNOT (CIRAC, ZOLLER, 1995). Note que antes e depois da ação da porta, o modo de vibração do centro de massa permanece no estado fundamental $|0\rangle$, ou seja, ele serve apenas para mediar a troca de informações entre os *qubits*, e não para armazenar informação nele próprio. Neste sentido, diz-se que a cadeia iônica funciona como sendo um barramento quântico de dados (LE BELLAC, 2006). Finalmente, fazendo uso dessas operações, pode-se realizar portas lógicas empregando um número n arbitrário de *qubits* (BOUWMEESTER, *et al*, 2000, p.130).

4 SIMULAÇÃO DA ARMADILHA LINEAR DO TIPO PAUL

Neste capítulo descrevemos as etapas e os resultados da simulação numérica de uma armadilha de íons linear do tipo Paul, realizada utilizando o software COMSOL Multiphysics[®] versão 4.3a, o qual é baseado no método dos elementos finitos. Procuramos realizar o confinamento de um único íon de carga positiva, por meio da geração de um potencial elétrico de forma aproximada ao dado na equação (3.4). O íon escolhido foi o $^{40}\text{Ca}^+$, devido a este ser comumente usado em experimentos com armadilhas de íons relacionados à computação quântica.

O sistema simulado consiste de quatro eletrodos dispostos a uma igual distância do eixo longitudinal da armadilha, alimentados com tensões DC superpostas a tensões AC em frequências RF. Utilizamos o arranjo geométrico dos eletrodos mostrado na figura 9.

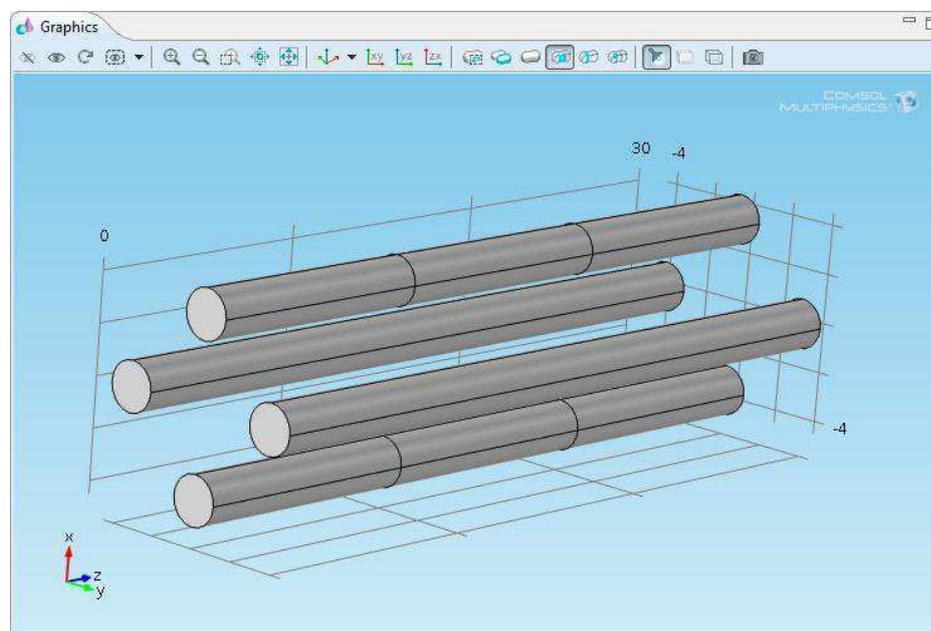


Figura 9: Arranjo geométrico dos eletrodos na armadilha de íons tipo Paul.

Os parâmetros geométricos utilizados foram os seguintes:

- Raio dos eletrodos: 1 mm;
- Comprimento dos eletrodos: 30 mm;
- Distância dos eletrodos ao eixo longitudinal: 2,5 mm.

Para a realização da simulação delimitamos uma região do espaço, sobre a qual o cálculo das grandezas pôde ser efetuado. Isto é necessário na realização de uma simulação numérica pois, obviamente, não é possível calcular as grandezas físicas, em um computador digital com memória finita, se estas se estendem sobre todo o espaço. A escolha do tamanho dessa região deve ser um compromisso entre a precisão do cálculo dos campos e o esforço computacional exigido. Por um lado, é bom que a região seja pequena, pois assim requer-se menor esforço computacional. Por outro lado, no caso específico do campo eletromagnético, isto pode levar a uma distorção na forma das linhas de campo, produzindo um resultado que não condiz com a realidade. Levando isto em consideração, juntamente com a simetria apresentada pelo sistema, escolhemos um volume em forma de caixa cilíndrica, conforme mostrado na figura 10. Nela, as superfícies limitantes do volume de cálculo estão destacadas em cor diferenciada. São mostrados apenas os limites posteriores da superfície, para que se possa visualizar os eletrodos da armadilha. Entretanto, as fronteiras constituem uma caixa cilíndrica completamente fechada.

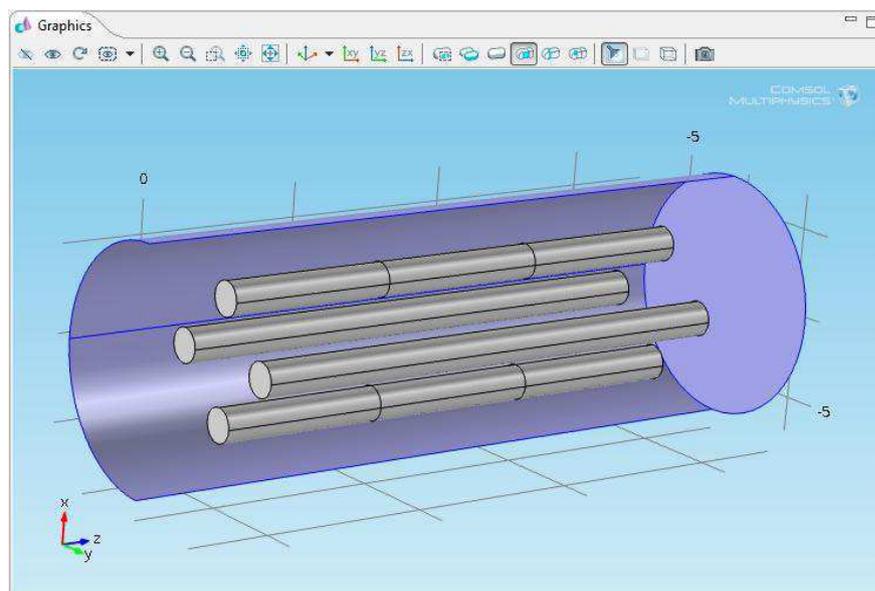


Figura 10: Superfícies limitantes da região de cálculo.

As condições de contorno utilizadas sobre a superfície limitante da região de cálculo foram as condições *default* do programa, que são as seguintes,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.2)$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal à superfície, \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico e \mathbf{J} é a densidade de corrente. Estas equações representam a ausência de cargas sobre a superfície cilíndrica, e ausência de fluxo de carga elétrica para o interior do volume através desta superfície (COMSOL Multiphysics User's Guide, 2012).

Sobre a região de cálculo geramos uma malha constituída de tetraedros de tamanhos variados. Subdividimos portanto a região em pequenas porções, possibilitando a implementação do método dos elementos finitos, utilizado internamente pelo COMSOL. Construimos a malha de tal maneira que as regiões de maior interesse possuíssem um número maior de tetraedros, aumentando assim a precisão dos resultados.

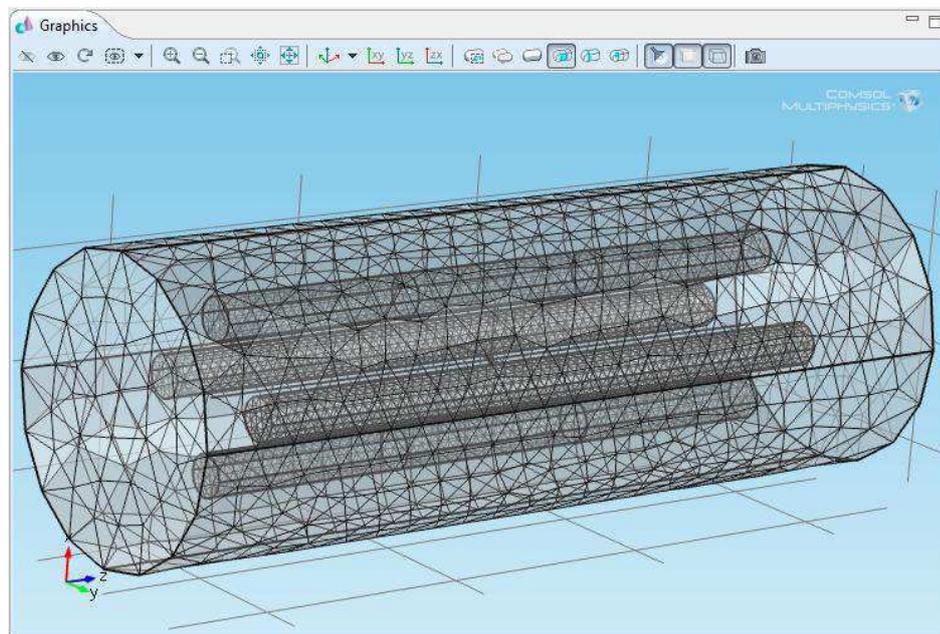


Figura 11: Malha gerada para a implementação do método dos elementos finitos.

O cômputo das grandezas fez-se em três etapas distintas: cálculo do campo eletrostático; cálculo do campo elétrico variante no tempo e o cálculo da trajetória da

partícula sob a ação destes campos. Os resultados das duas primeiras etapas serviram como *input* para a terceira, na qual é calculada a força resultante sobre o íon e resolvida a equação de movimento, resultando na trajetória da partícula. É importante ressaltar que usamos a aproximação de desprezar o efeito da força magnética, pois a sua inclusão levaria a um maior esforço computacional, sem produzir no entanto uma modificação significativa sobre a trajetória da partícula.

Para gerar um potencial da forma (3.4), alimentamos os eletrodos da armadilha da seguinte maneira: dois dos eletrodos foram divididos em três segmentos, os dois das extremidades sendo alimentados com uma tensão DC de 20 V, e o segmento central com uma tensão de -20 V.

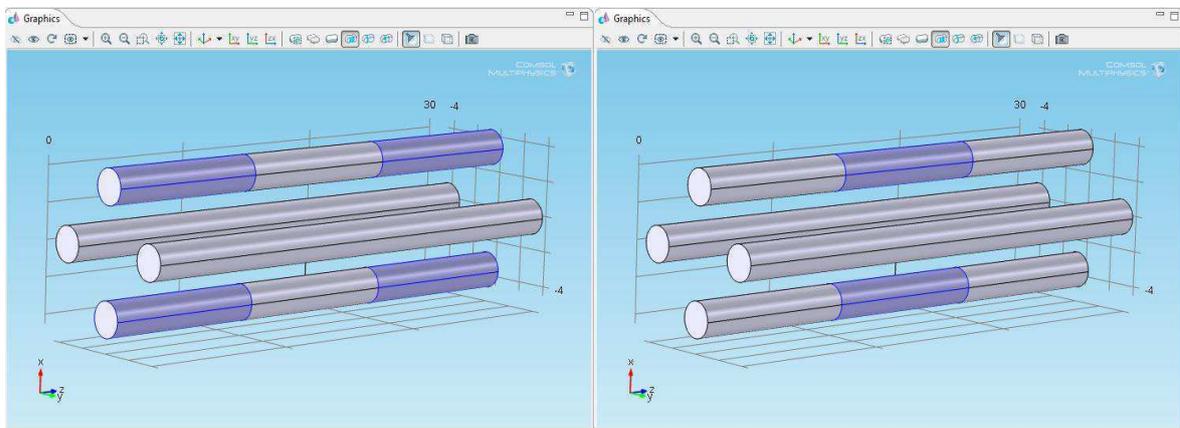


Figura 12: Alimentação dos eletrodos com tensão DC.

Superposto a esta tensão DC, alimentamos todos os três segmentos com uma tensão AC de frequência 5 MHz, e amplitude de 300 V. Os outros dois eletrodos foram alimentados com uma tensão AC de mesma frequência e amplitude invertida, ou seja, -300 V. Escolhemos amplitude das tensões AC maior que a amplitude das tensões DC para que o confinamento na direção radial fosse mais pronunciado do que na direção longitudinal.

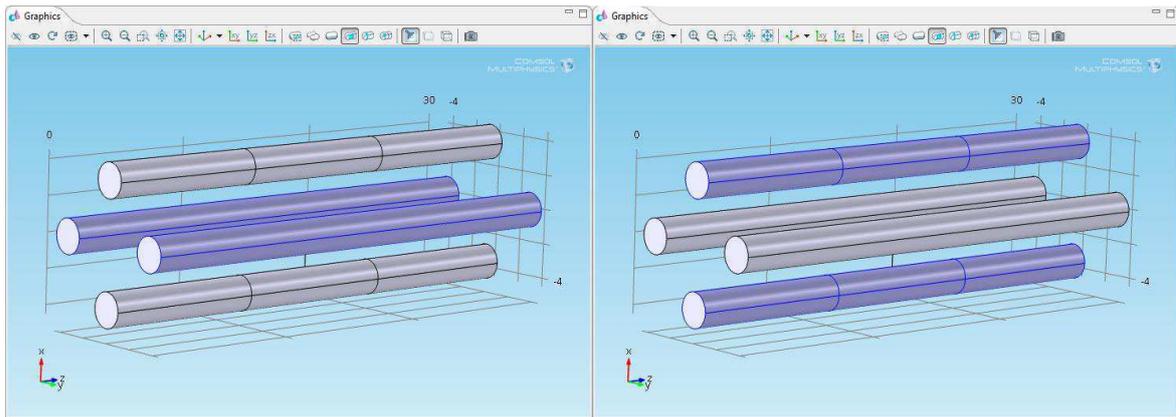


Figura 13: Alimentação dos eletrodos com tensão AC.

O potencial obtido ao longo do eixo longitudinal está mostrado na figura 14. Verificamos que ele tem a forma de um “poço” e em pequenas energias se assemelha a uma parábola, aproximando-se portanto ao potencial de um oscilador harmônico, conforme requerido. Observamos que a profundidade do poço é de aproximadamente 19 eV, de modo que uma partícula de energia cinética menor que 19 eV ficará confinada ao longo desta direção.

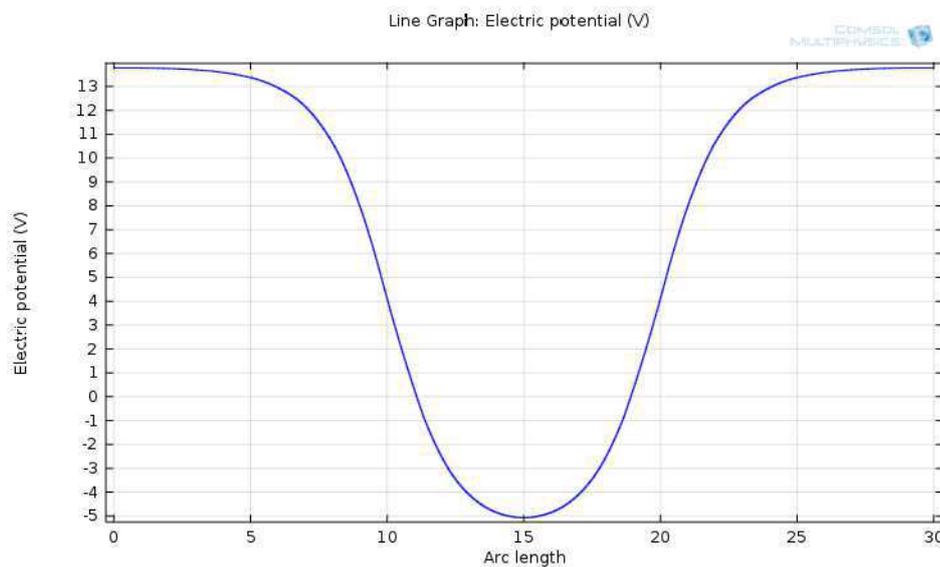


Figura 14: Potencial estático ao longo da direção longitudinal.

Os potenciais ao longo dos eixos x e y são mostrados a seguir. Nas figuras, são mostradas as configurações, em seqüência, dos potenciais em diferentes instantes de tempo, durante um ciclo de oscilação da tensão AC aplicada. As curvas em verde

representam o potencial ao longo do eixo x , e as curvas em azul, ao longo do eixo y .

Novamente, notamos que eles se assemelham a um potencial harmônico.

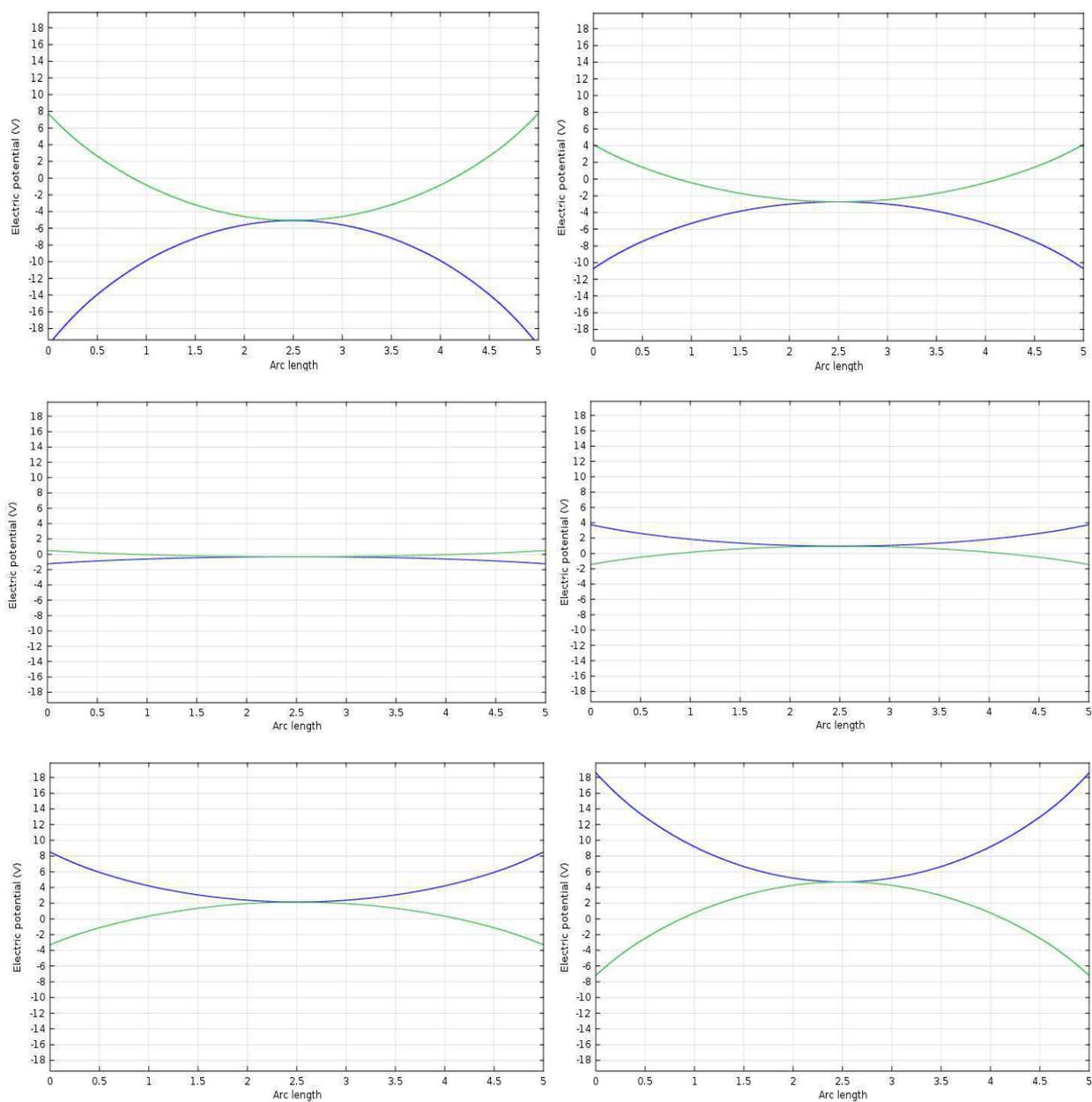


Figura 15: Potenciais ao longo dos eixos x e y em vários instante de tempo. As curvas em verde representam o potencial ao longo do eixo x , e as curvas em azul, ao longo do eixo y .

No cálculo da trajetória do íon usamos uma massa de $m = 66,90487 \times 10^{-27} \text{ kg}$, correspondente ao $^{40}\text{Ca}^+$, e consideramos a partícula sendo injetada no centro da armadilha com velocidade inicial de 500 m/s .

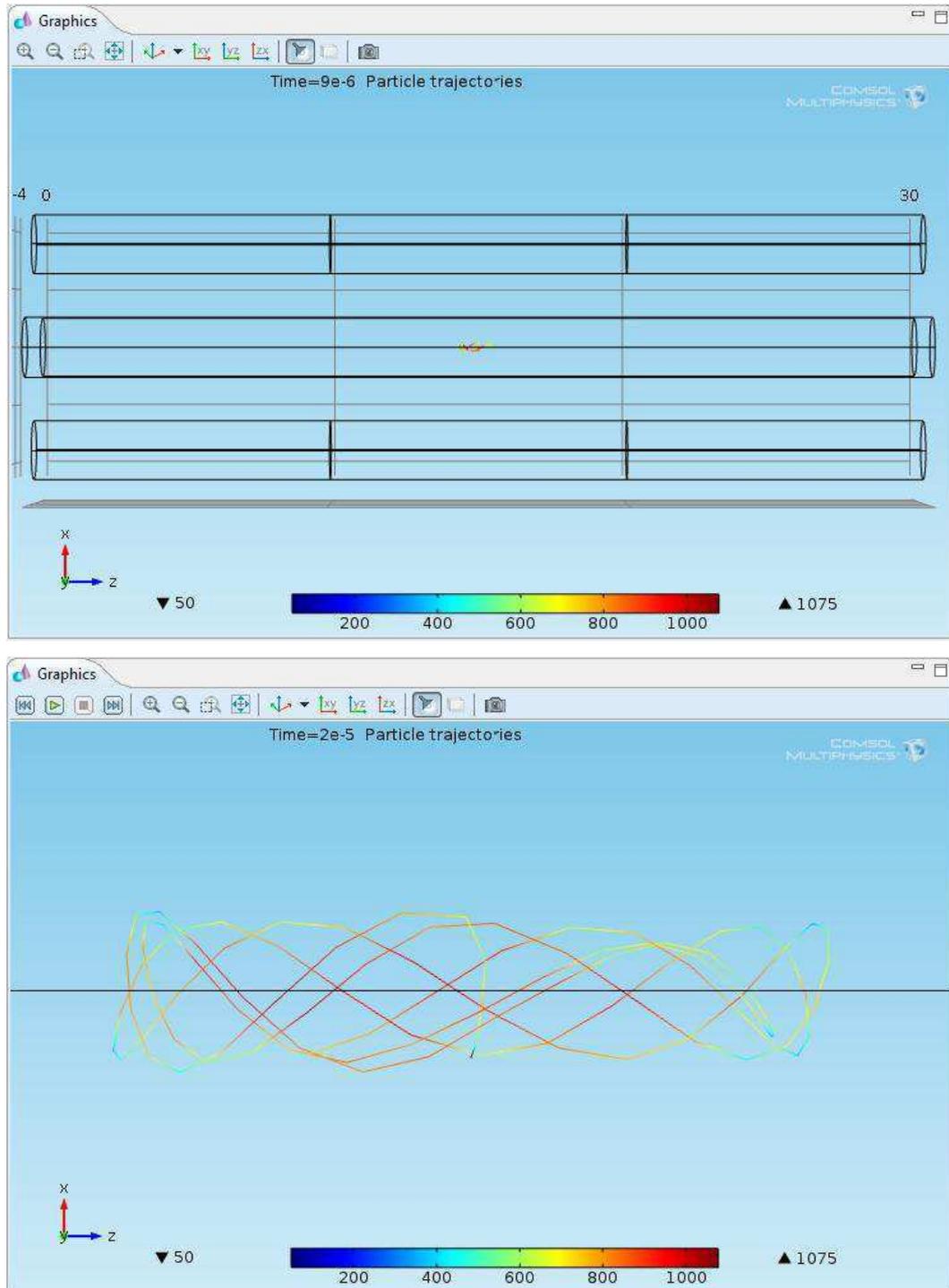


Figura 16: Trajetória do íon confinado durante um tempo de $20 \mu\text{s}$. As diferentes cores representam diversos valores de velocidade. A trajetória se assemelha a uma curva de Lissajous e reflete o movimento secular da partícula.

Vemos que a partícula fica limitada a uma pequena região do espaço, oscilando com uma amplitude praticamente constante em todas as direções, sendo a amplitude ao longo do eixo z maior que nos outros eixos. A amplitude de oscilação é grande comparada ao que é requerido para computação quântica, pois neste caso é suposto que a partícula esteja no seu estado fundamental. Ressaltamos, entretanto, que o objetivo da simulação foi testar a funcionalidade da armadilha, demonstrando confinamento da partícula, o que foi conseguido com sucesso.

A trajetória mostrada acima ilustra essencialmente o movimento secular – o qual se assemelha a uma curva de Lissajous – não sendo possível identificar o micromovimento. Isto é devido ao fato de o tamanho do passo temporal utilizado ser muito grande, frente à escala de tempo do micromovimento. Em outras palavras, a quantidade de instantes de tempo nos quais a posição da partícula foi calculada, foi pequena em número, de modo que é mais provável que se obtenha um maior número de posições correspondentes à trajetória média (movimento secular) do que correspondentes às oscilações em torno da média, que é o que caracteriza o micromovimento.

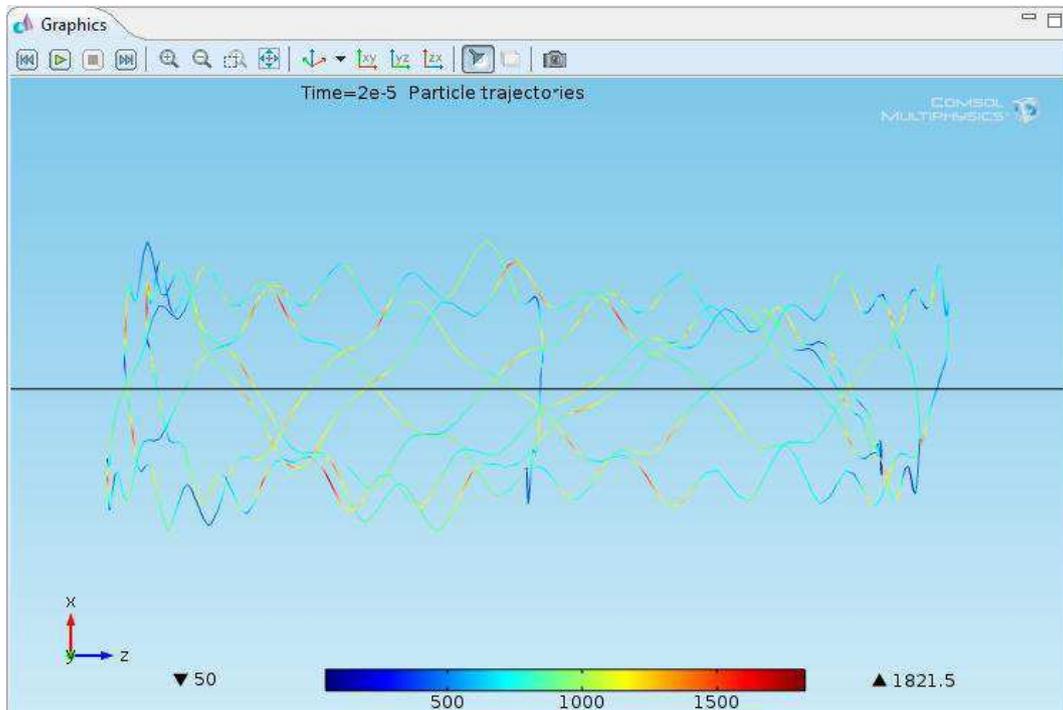


Figura 17: Trajetória do íon confinado usando uma resolução temporal melhor. É possível identificar a presença do micromovimento, caracterizado pela oscilação em torno da trajetória média.

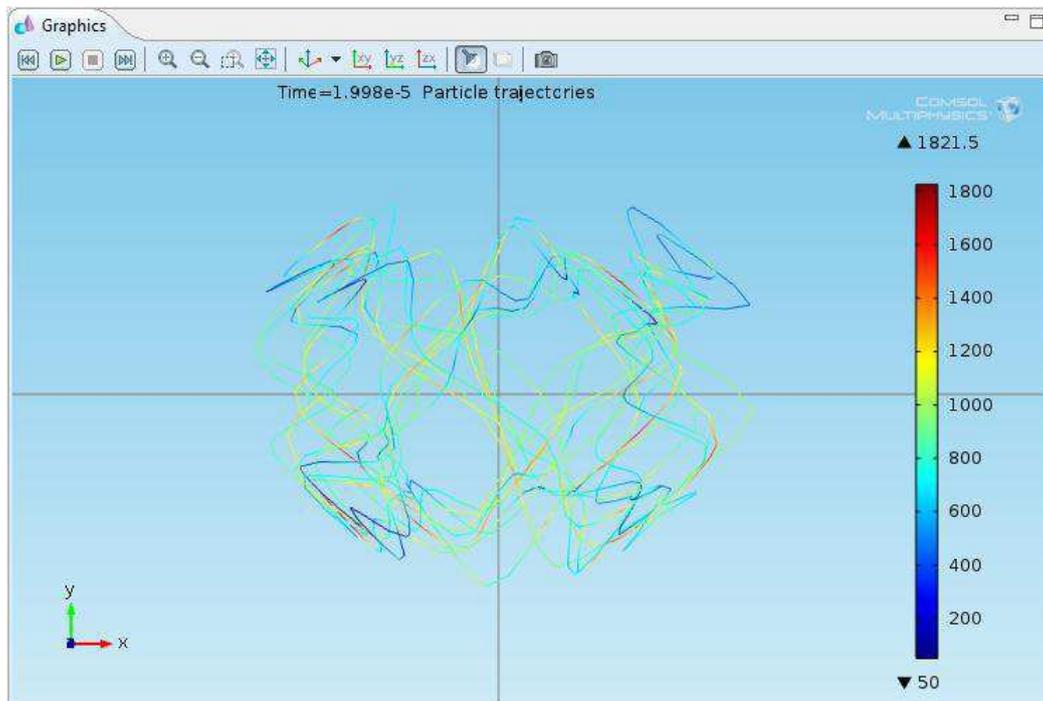


Figura 18: Movimento do íon no plano x - y .

A trajetória mostrada na figura 16 foi calculada em intervalos de tempo de $0,2 \mu\text{s}$, ao longo de um tempo total de $20 \mu\text{s}$. Já nas figuras 17 e 18, a trajetória foi calculada usando uma resolução temporal de $0,06 \mu\text{s}$, durante o mesmo intervalo de tempo total de $20 \mu\text{s}$. Com o refinamento da resolução temporal o micromovimento fica evidente, caracterizado pela oscilação de alta frequência, superposto ao movimento secular. Na figura 18 é mostrada a oscilação do íon na direção radial, na qual também fica clara a presença do micromovimento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscamos mostrar a aplicação de armadilhas de íons em computação quântica, destacando o porque de esta ser uma das alternativas mais promissoras para vencer as dificuldades existentes na implementação física de um processador quântico. Discutimos as condições sob as quais o sistema de íons confinados se presta à implementação das portas lógicas quânticas, necessárias ao processamento da informação.

Com a simulação numérica realizada pudemos observar as principais características previstas teoricamente no que concerne ao movimento clássico da partícula confinada, quais sejam: o movimento secular e, sobreposto a este, o chamado micromovimento. A amplitude de oscilação ao longo do eixo longitudinal foi maior que na direção radial e os potenciais gerados pela configuração dos eletrodos se mostraram aproximadamente quadráticos nas três direções, conforme o esperado.

Os resultados obtidos com a simulação numérica foram satisfatórios, pois demonstraram o confinamento da partícula pela ação do campo eletromagnético. Entretanto, pode-se dizer que a simulação do aprisionamento de um único íon é demasiado simples para que tenha alguma aplicação útil em computação quântica. De fato, são requeridos vários íons comportando-se de maneira bastante específica para que o sistema possa ter alguma aplicabilidade. Não obstante, entendemos que este trabalho pode servir como ponto de partida para a realização de trabalhos posteriores, possibilitando estudos mais aprofundados sobre o tema, a partir dos quais seria possível oferecer contribuições mais significativas. Dentre as possibilidades de extensão para o nosso trabalho, destacamos as seguintes:

- Realizar simulações considerando o efeito da força magnética (a qual foi desprezada neste trabalho) e comparar com a simulação na ausência da mesma, avaliando até que ponto é interessante a sua inclusão.
- Realizar a simulação para o confinamento de dois íons, levando em conta sua interação mútua, podendo-se posteriormente estender a um número maior de partículas.

- Buscar propor novas geometrias para a armadilha, as quais poderiam adequar-se melhor a propósitos específicos, como a diminuição da amplitude do micromovimento, ou ainda, a adaptação para uso em circuitos integrados.
- Realizar simulações considerando os efeitos quânticos sobre a dinâmica dos íons confinados, podendo-se visar à simulação das portas lógicas.

Dentre as dificuldades encontradas na realização deste trabalho, podemos citar primeiramente a escassez de informações na literatura que acessamos, a respeito do porque de o potencial (3.4) ter que obedecer à equação de Laplace. Esta equação é sabidamente válida na eletrostática, porém, a primeira vista, não parece poder ser aplicada para potenciais dependentes do tempo, como é o nosso caso. A solução que propomos foi a utilização do calibre de Coulomb, conforme descrito em detalhes no apêndice C. Outra informação dificilmente disponível na literatura específica de armadilhas de íons e computação quântica é o porque de ser válido desprezar o efeito da força magnética, a qual buscamos justificar com argumentos encontrados em textos de eletromagnetismo (GRIFFITHS, 1999, p. 233).

A literatura também não é clara no que diz respeito à forma de alimentação dos eletrodos na armadilha de Paul. Na grande parte dos trabalhos, a exemplo de (SINGER, et al, 2010; LEIBFRIED, et al, 2003; CHUANG, NIELSEN, 2000), o leitor é levado a crer que apenas dois eletrodos são alimentados com tensão AC, os outros dois sendo alimentados com tensão DC *exclusivamente*. Em realizando a simulação com esta configuração, não tivemos êxito em confinar a partícula. Apenas após a introdução da tensão AC superposta à DC, conseguimos o resultado esperado. Posteriormente, encontramos um trabalho (BERKELAND, et al, 1998) que indica a superposição das tensões AC e DC de modo semelhante ao que fizemos. Não sabemos afirmar se é possível alcançar o confinamento usando a primeira configuração de eletrodos, o que abre mais uma possibilidade de investigação futura.

APÊNDICE A – ESPAÇO DE HILBERT E NOTAÇÃO DE DIRAC

Seja \mathcal{H} um espaço de dimensão finita N sobre o corpo dos números complexos e sejam u, v e w vetores em \mathcal{H} . O produto escalar sobre \mathcal{H} é uma função que associa a qualquer par de vetores u e v um escalar complexo (u, v) de maneira tal que sejam satisfeitas,

$$(u, \lambda v + \mu v) = \lambda(u, v) + \mu(u, v) \quad (A.1)$$

$$(u, v) = (v, u)^* \quad (A.2)$$

$$(u, u) \geq 0 \quad (A.3)$$

Um espaço dotado do produto escalar descrito acima (não estamos considerando o caso mais geral de dimensão infinita), é uma generalização do conceito de espaço euclidiano. Tal espaço é chamado espaço de Hilbert, em homenagem ao matemático David Hilbert, quem primeiro os estudou. A introdução deste tipo de espaço na mecânica quântica, devida a John Von Neumann, permite elaborar um formalismo da mecânica quântica de caráter mais rigoroso e preciso.

Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal de \mathcal{H} , $n = 1, 2, \dots, N$. Nesta base, os vetores u, v e w têm as componentes

$$u_n = (e_n, u), \quad v_n = (e_n, v), \quad w_n = (e_n, w) \quad (A.4)$$

Consideremos um operador linear $A(v, w)$ definido por sua representação matricial na base $\{e_n\}$:

$$A_{nm}(v, w) = v_n w_m^* \quad (A.5)$$

A ação desse operador no vetor u , $u \rightarrow u' = Au$, é dada em termos das componentes por

$$u' = \sum_m A_{nm}(v, w) u_m = \sum_m v_n w_m^* u_m = \sum_m v_n (w_m^* u_m) = v_n(w, u), \quad (A.6)$$

Ou em forma vetorial,

$$u' = A(v, w)u = v(w, u). \quad (A.7)$$

Na notação de Dirac, vetores são escritos como $|v\rangle$ e produtos escalares como $\langle w|v\rangle$:

$$v \rightarrow |v\rangle, \quad (w, v) \rightarrow \langle w|v\rangle. \quad (A.8)$$

Se o vetor $|v\rangle$, chamado de *ket*, é escrito na forma de uma matriz coluna com relação a uma certa base,

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad (A.9)$$

o vetor $\langle v|$, chamado de *bra*, será dado pelo transposto conjugado de $|v\rangle$,

$$\langle v| = (v_1^* \quad v_2^* \quad \cdots \quad v_N^*). \quad (A.10)$$

O produto escalar $\langle w|v\rangle$ é assim chamado um *bracket*. O vetor $\langle v|$ pertence a um espaço diferente do de $|v\rangle$, chamado espaço dual de \mathcal{H} , denotado por \mathcal{H}' .

A ação do operador $A(v, w)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} |u'\rangle &= |A(v, w)u\rangle = |v\rangle\langle w|u\rangle \\ &= (|v\rangle\langle w|)|u\rangle, \end{aligned} \quad (A.11)$$

Então, com a notação de Dirac, podemos denotar operadores lineares como,

$$A(v, w) = |v\rangle\langle w|. \quad (A.12)$$

APÊNDICE B – ESTADOS ENTRELAÇADOS

Consideremos um sistema de dois *qubits*. O primeiro *qubit* A pertence a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_A o qual tem a base ortonormal $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$, e o segundo *qubit* B pertence a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_B o qual tem a base ortonormal $\{|0_B\rangle, |1_B\rangle\}$. O espaço do sistema composto é o produto tensorial dos espaços \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , ou seja, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Representamos um estado físico no qual o primeiro *qubit* está no estado $|0_A\rangle$ e o segundo está no estado $|0_B\rangle$ por um vetor escrito como $|X_{00}\rangle = |0_A \otimes 0_B\rangle$. Levando em conta todos os possíveis valores dos *qubits*, teremos, *a priori*, quatro possibilidades:

$$\begin{aligned} |X_{00}\rangle &= |0_A \otimes 0_B\rangle, & |X_{01}\rangle &= |0_A \otimes 1_B\rangle, \\ |X_{10}\rangle &= |1_A \otimes 0_B\rangle, & |X_{11}\rangle &= |1_A \otimes 1_B\rangle. \end{aligned} \quad (B.1)$$

Algumas vezes, por comodidade, pode-se usar também as seguintes notações equivalentes: $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$, $|\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$, $|\varphi_A \varphi_B\rangle$ ou ainda $|\varphi_A\rangle|\varphi_B\rangle$. Consideremos que o *qubit* A está em um estado normalizado,

$$|\varphi_A\rangle = \lambda_A|0_A\rangle + \mu_A|1_A\rangle, \quad |\lambda_A|^2 + |\mu_A|^2 = 1, \quad (B.2)$$

assim como o *qubit* B ,

$$|\varphi_B\rangle = \lambda_B|0_B\rangle + \mu_B|1_B\rangle, \quad |\lambda_B|^2 + |\mu_B|^2 = 1. \quad (B.3)$$

Denotaremos esse estado como $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$:

$$|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle = \lambda_A\lambda_B|0_A \otimes 0_B\rangle + \lambda_A\mu_B|0_A \otimes 1_B\rangle + \mu_A\lambda_B|1_A \otimes 0_B\rangle + \mu_A\mu_B|1_A \otimes 1_B\rangle$$

$$= \lambda_A \lambda_B |X_{00}\rangle + \lambda_A \mu_B |X_{01}\rangle + \mu_A \lambda_B |X_{10}\rangle + \mu_A \mu_B |X_{11}\rangle. \quad (B.4)$$

Note que o vetor $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$ é também normalizado. A idéia essencial a ser compreendida é que o estado mais geral de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ não é da forma de um produto tensorial $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$ dada na equação (B.4); estados da forma $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$ constituem somente um pequeno subconjunto (nem mesmo um subespaço) dos vetores de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O estado mais geral em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é uma combinação linear do tipo,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \alpha_{00}|0_A \otimes 0_B\rangle + \alpha_{01}|0_A \otimes 1_B\rangle + \alpha_{10}|1_A \otimes 0_B\rangle + \alpha_{11}|1_A \otimes 1_B\rangle \\ &= \alpha_{00}|X_{00}\rangle + \alpha_{01}|X_{01}\rangle + \alpha_{10}|X_{10}\rangle + \alpha_{11}|X_{11}\rangle, \end{aligned} \quad (B.5)$$

e para $|\Psi\rangle$ ser da forma $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$ uma condição necessária (e suficiente) é que

$$\alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10}, \quad (B.6)$$

a qual não tem razão para ser válida *a priori*.

Um estado de um sistema de dois *qubits* que não tem a forma de um produto tensorial $|\varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$ dado em (B.4) é chamado um estado entrelaçado (ou emaranhado). A propriedade fundamental de tal estado é a seguinte: se $|\Psi\rangle$ é um estado entrelaçado, então o *qubit* A não pode estar em um estado quântico definido $|\varphi_A\rangle$, assim como o *qubit* B .

APÊNDICE C – TRANSFORMAÇÕES DE CALIBRE

As equações de Maxwell homogêneas permitem escrever os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} em termos de funções potenciais. Da equação

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (C.1)$$

podemos escrever \mathbf{B} em termos do rotacional de um potencial vetor \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (C.2)$$

Substituindo esta equação na lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (C.3)$$

temos,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (C.4)$$

A quantidade cujo rotacional é nulo, pode ser escrita como o gradiente de uma função escalar,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi,$$

ou seja,

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (C.5)$$

O fato de \mathbf{B} ser dado como sendo o rotacional do potencial vetor \mathbf{A} , faz com que seja possível adicionar a \mathbf{A} o gradiente de um função escalar arbitrária Λ , sem provocar qualquer alteração em \mathbf{B} , devido ao fato de o rotacional de um gradiente ser identicamente nulo,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}.$$

Para que o campo elétrico permaneça também inalterado, o potencial escalar deve ser simultaneamente transformado da seguinte forma,

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}.$$

As transformações,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (C.6)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (C.7)$$

são chamadas transformações de calibre e a invariância dos campos frente a essas transformações é chamada de invariância de calibre (ou invariância de *gauge*). Esta invariância é uma simetria fundamental do eletromagnetismo.

Com base nas equações (C.6) e (C.7) sempre podemos escolher uma transformação de calibre de tal modo que a divergência do potencial vetor seja nula,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (C.8)$$

o que caracteriza o chamado calibre de Coulomb. Para mostrar isto, suponha que a divergência de \mathbf{A} seja não nula. Aplicando uma transformação de calibre (C.6), temos que a divergência de \mathbf{A}' será dada por,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Lambda. \quad (C.9)$$

Dada a arbitrariedade de Λ , basta o escolhermos de tal modo que

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (C.10)$$

Obtendo assim,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0.$$

A escolha do calibre de Coulomb faz com que o potencial escalar Φ satisfaça a equação de Laplace, mesmo que ele dependa explicitamente do tempo. Partindo da lei de Gauss, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (C.11)$$

Em uma região onde não haja cargas,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (C.12)$$

Substituindo a equação (C.5) em (C.12),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \\ -\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= 0. \end{aligned} \quad (C.13)$$

No calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Logo Φ satisfaz a equação de Laplace,

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (C.14)$$

BIBLIOGRAFIA

BERKELAND, et al, **Journal of Applied Physics**, Minimization of ion micromotion in a Paul trap, vol.83, 1998.

BOUWMEESTER, et al, **The Physics of Quantum Information, Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation**, Springer, 2000.

CHUANG, I. L.; NIELSEN, N. A., **Quantum Computation and Quantum Information**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

CIRAC, J.I.; ZOLLER, P. **Physical Review Letters**. Quantum Computations with Cold trapped Ions, 74, 1995.

COMSOL Multiphysics User's Guide, versão 4.3a, 2012.

DAVIDE, G. **Compact RF Amplifier for Scalable Ion-Traps**, Tese (Mestrado em Física) - Faculdade de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, Università degli Studi di Trento, 2011.

DEUTSCH, D. **Proceedings of the Royal Society London**, Quantum theory, the Church-Turing machine principle and the universal quantum computer, 1985.

DEUTSCH, D, **Proceedings of the Royal Society London**, Quantum computational networks. A 439, 553-558, 1989.

DIVICENZO, D. P. **Fortschritte Physics Journal**, The physical implementation of quantum computation, 48, 771, 2000.

GRIFFITHS, D.J. **Introduction to Electrodynamics**, Prentice Hall, New Jersey, 1999.

JACKSON, J. D. **Eletrodinâmica Clássica**. 2 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 2003.

LE BELLAC, M., **A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

LEIBFRIED, D, et al, **Reviews of Modern Physics**, Quantum Dynamics of Single Trapped Ions, Vol. 75, 2003.

MONZ, P. et al, **Physical Review Letters**, 14-qubit entanglement: Creation and coherence, 106, 2011.

PAUL, W. **Reviews of Modern Physics**, Electromagnetic Traps for Charged and Neutral Particles, Vol. 62, Nº 3, Julho 1990.

SHOR, P.W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring, 1994.

SILVA, P. L. S. **Processamento de Informação Quântica Usando um Sistema de Íons Aprisionados e Cavidades**, Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física “Gleb Wataghin”, UNICAMP, Campinas, 2002.

SINGER, et al, **Colloquium: Trapped ions as quantum bits – essential numerical tools**, arXiv:0912.0196v3, 2010.

STEANE, A. M. **Quantum Information and Computation**, How to build a 300 bit, 1 giga-operation quantum computer, volume 7, pages 171-183, 2007.

WERTH, et al, **Charged Particle Traps**, Springer, Nova York, 2005.