



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS

ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DAS PROPRIEDADES
TERMO-FÍSICAS DURANTE O PROCESSO DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PRODUTOS DE FORMA
CILÍNDRICA

AUTOR: Marcos Antonio Amaral Lins

ORIENTADOR: Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva

Campina Grande-PB

Julho/2013



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS**

**ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO DAS PROPRIEDADES
TERMO-FÍSICAS DURANTE O PROCESSO DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PRODUTOS DE FORMA
CILÍNDRICA**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Doutorado de Engenharia de Processos da Universidade Federal de Campina Grande como requisito necessário para obter o título de Doutor em Engenharia de Processos.

AUTOR: Marcos Antonio Amaral Lins

ORIENTADOR: Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva

Campina Grande-PB

Julho/2013

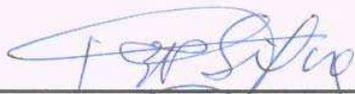
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

- L759e Lins, Marcos Antonio Amaral.
Estudo analítico e numérico das propriedades termo-físicas durante o processo de transferência de calor em produtos de forma cilíndrica / Marcos Antonio Amaral Lins. – Campina Grande, 2013.
262 f. : il. color.
- Tese (Doutorado Engenharia de Processos) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
"Orientação: Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva".
Referências.
1. Difusão de Calor. 2. Solução Analítica e Numérica. 3. Agar Gel.
4. Purê de Tomate. 5. Creme Custard. I. Título.

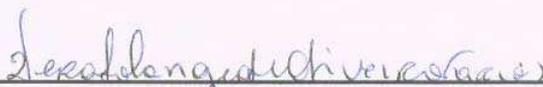
CDU 66.021.4(043)

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **MARCOS ANTONIO AMARAL LINS** APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.

Tese de doutorado **aprovada com distinção** em 05 de julho de 2013



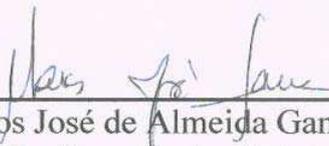
Wilton Pereira da Silva
UFCG – Orientador



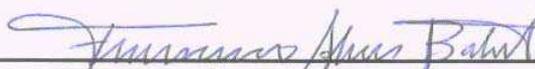
Vera Solange de Oliveira Farias
UFCG – Examinadora Interna



Cleide Maria Diniz Pereira da Silva e Silva
UFCG – Examinadora Externa



Marcos José de Almeida Gama
UFCG – Examinador Externo



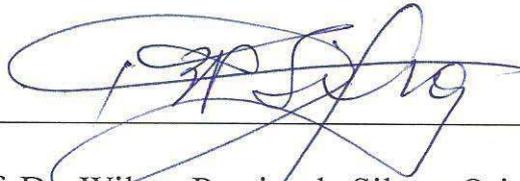
Francisco Alves Batista
UEPB – Examinador Externo



Hofsky Vieira Alexandre
UNIT – Examinadora Externa

Campina Grande, 5 de julho de 2013
PB, Brasil

Este exemplar corresponde à versão final da Tese de Doutorado em Engenharia de Processos, defendida por Marcos Antonio Amaral Lins e aprovada pela banca examinadora em 05 de julho de 2013.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Wilton Pereira da Silva', is written over a horizontal line. The signature is stylized and cursive.

Prof. Dr. Wilton Pereira da Silva - Orientador

UAF/CCT/UFCG

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:

A Helena, amada esposa,

A Larissa, filha querida.

Aos meus pais:

José Lins e Maria Alice.

Aos meus sobrinhos e afilhados

João Alberto e Maria Fernanda.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Dr. Wilton Pereira da Silva pela metodologia usada no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do curso de Doutorado de Engenharia de Processos da Universidade Federal de Campina Grande, aos ínclitos professores Antonio Gilson, Cleide Maria, Francisco Alves, Hofsky Vieira, Marcos Gama, Vera Solange, que participaram das bancas de qualificação ou seminário II e muito contribuíram, com suas sugestões, para a melhoria deste trabalho. Ao professor Aécio Ferreira de Lima por ter se responsabilizado pelas minhas disciplinas e aos demais professores da UAF da UFCG.

Aos amigos Ademar Bandeira pelas sugestões ao texto do trabalho, Bruno Brito e Júlio Zinga pelas dúvidas tiradas na programação FORTRAN.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivo geral	3
1.2 Objetivos específicos.....	3
1.3 Principais contribuições deste trabalho	4
CAPÍTULO 2	5
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1 Pasteurização	6
2.1.1 Aspectos históricos.....	6
2.1.2 Tipos de pasteurização	7
2.2 Pesquisas sobre pasteurização	8
2.3 Outros métodos de preservação de alimentos envolvendo transferência de calor	17
2.3.1 Secagem	17
2.3.2 Cozimento	21
2.3.3 Resfriamento	23
2.4 Fenômenos de transporte	25
2.4.1 Equação de transporte	27
2.5 Equação de difusão.....	28
2.6 Soluções da equação de difusão	31
2.6.1 Métodos analíticos na solução de problemas difusivos	33
2.6.2 Métodos numéricos na solução de problemas difusivos	34
2.6.3 Formulações para o método numérico	35
2.7 Sistemas de coordenadas cilíndricas	37
2.7.1 Equação de difusão em coordenadas cilíndricas	38
CAPÍTULO 3	39

MATERIAL E MÉTODOS.....	39
3.1 Hipóteses para a obtenção da solução analítica da equação de difusão	39
3.2 Solução analítica da equação de difusão para um cilindro infinito	40
3.3 As raízes da função de Bessel e o método da bissecção.....	43
3.4 Solução analítica da equação de difusão para um cilindro finito	45
3.5 Hipóteses para a solução numérica da equação de difusão: geometria cilíndrica	52
3.6 Solução numérica da equação de difusão: geometria cilíndrica.....	53
3.6.1 Discretização para volumes internos.....	56
3.6.2 Volume de controle no contorno leste	58
3.6.3 Volume de controle no contorno nordeste	60
3.6.4 Simetria axial e o volume de controle no contorno oeste	61
3.6.5 Simetria radial	63
3.6.6 Coeficiente de transporte Γ^Φ	64
3.7 Simplificação das soluções analíticas.....	65
3.7.1 Solução analítica unidimensional.....	65
3.7.2 Solução analítica bidimensional.....	66
3.7.3 Temperatura adimensional	67
3.8 Otimizações	69
3.8.1 Caso analítico unidimensional	71
3.8.2 Caso analítico bidimensional	72
3.8.3 Algoritmo de otimização usando solução numérica	72
3.9 Validações	74
3.9.1 Validação do algoritmo proposto para a solução analítica.....	74
3.9.2 Validação do algoritmo proposto para a solução numérica	74
3.10 Dados experimentais.....	75
CAPÍTULO 4	78
RESULTADOS E DISCUSSÃO	78

Parte A - Soluções Analíticas	78
4.1 Validação da solução analítica unidimensional.....	78
4.1.1 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0$	78
4.1.2 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,25R$	83
4.1.3 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,5R$	86
4.1.4 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,75R$	89
4.1.5 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,9R$	92
4.1.6 Discussão sobre a penetração do calor: posições do termopar.....	95
4.2 Aplicação do algoritmo proposto aos dados experimentais do agar gel.....	98
4.2.1 Discussão dos resultados: agar gel	103
4.3 Validação da solução analítica bidimensional.....	104
4.3.1 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0; y = 0$	104
4.3.2 Resultados obtidos para a posição $r = 0; y = 0,005$ m.....	108
4.3.3 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0; y = 0,01$ m.....	111
4.3.4 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0; y = 0,015$ m.....	114
4.3.5 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,25R; y = 0$	117
4.3.6 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,5R; y = 0$	120
4.3.7 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,75R; y = 0$	123
4.3.8 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,5R; y = 0,01$ m	125
4.3.9 Discussão: simulação da penetração de calor para o cilindro finito	128
4.4 A aplicação do algoritmo proposto à experiência de Betta et al. (2009).....	132
4.4.1 Aplicação do algoritmo ao purê de tomate.....	132
4.4.2 Aplicação do algoritmo ao creme custard	138
4.5 Principais resultados obtidos com as ferramentas analíticas desenvolvidas	144
Parte B – Solução Numérica.....	145
4.6 Solução numérica e a interface gráfica do software	146
4.6.1 Menus e caixas de diálogos	146

4.6.2 Arquivos gerados pela simulação numérica.....	150
4.7 Solução numérica para o cilindro finito: testes de coerência	152
4.8 Validação com a solução analítica: parâmetros termo-físicos constantes.....	156
4.8.1 Validação da solução numérica para a posição $r = 0$; $y = 0$	156
4.8.2 Validação da solução numérica para a posição $r = 0$; $y = 0,015$ m.....	158
4.8.3 Validação da solução numérica para a posição $r = 0,015$ m; $y = 0$	159
4.8.4 Validação da solução numérica para a posição $r = 0,01$ m; $y = 0,01$ m.....	160
4.8.5 Discussão sobre a penetração do calor: posições do termopar.....	161
4.9 Software Finite Cylinder First Kind: difusividade térmica constante e variável	162
4.10 Aplicação do software numérico às experiências de Betta et al. (2009).....	162
4.10.1 Aplicação do software numérico ao purê de tomate: difusividade térmica aparente constante	162
4.10.2 Aplicação do software numérico ao purê de tomate: difusividade térmica aparente variável	169
4.10.3 Aplicação do software numérico ao creme custard: difusividade térmica aparente constante.....	174
4.10.4 Aplicação do software numérico ao creme custard: difusividade térmica aparente variável.....	176
4.11 Aplicação do software numérico à experiência de Ukrainczyk (2009).....	180
4.11.1 Aplicação do software numérico: agar gel.....	180
4.12 Comparação entre os resultados analíticos e numéricos	183
CAPÍTULO 5	185
CONCLUSÕES E SUGESTÕES	185
5.1 Conclusões.....	185
5.1.1 Ferramentas analíticas	185
5.1.2 Solução analítica para o cilindro infinito	186
5.1.3 Solução analítica para o cilindro finito	187
5.1.4 Solução numérica: cilindro finito e infinito, difusividade térmica constante	188

5.1.5 Solução numérica: cilindro finito com difusividade térmica aparente variável....	188
5.2 Sugestões para futuros trabalhos de pesquisa.....	189
CAPÍTULO 6	191
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	191
APÊNDICES	208
Código B1 – Código para obter as raízes de uma função pelo método da bissecção.....	227
Código A1 - Código analítico da equação de difusão para o cilindro infinito.....	229
Código A2 – Código analítico da equação de difusão para o cilindro finito.....	236
Código N1 – Código numérico do Finite Cylinder First Kind - principal.	240
Código N1 – Código numérico do Finite Cylinder First Kind - borders.....	246
Código N1 – Código numérico do Finite Cylinder First Kind - functions.....	261

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Formulações de interpolação no tempo.	36
Figura 2.2 - Sistema de coordenadas cartesianas $N(x,y,z)$ e cilíndricas $N(r,\theta,z)$	37
Figura 3.1 - Função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero.	44
Figura 3.2 - Função de Bessel de primeiro tipo e ordem um.	45
Figura 3.3 - Cilindro finito de raio R e comprimento L	46
Figura 3.4 - (a) Cilindro finito e uma fatia simétrica; (b) Fatia simétrica do cilindro definida pelo ângulo $\Delta\theta$; (c) Retângulo onde serão definidos os volumes de controle.	53
Figura 3.5 - (a) Malha bidimensional para a solução numérica da equação de difusão no cilindro; (b) destaque de um volume de controle.	54
Figura 3.6 - Volume de controle para geometria cilíndrica.	54
Figura 3.7 - Tipos de volumes de controle.	55
Figura 3.8 - Volume de controle P e seus vizinhos ao norte (N), ao sul (S), a leste (E) e a oeste (W).	56
Figura 3.9 - Volume de controle no contorno leste.	59
Figura 3.10 - Volume de controle no contorno nordeste.	60
Figura 3.11 - Volume de controle no contorno oeste.	62
Figura 3.12 - Simetria radial: solução para a metade da malha.	63
Figura 3.13 - Coeficiente de transporte: (a) nos pontos nodais e (b) na interface do volume de controle.	64

Figura 4.1 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0$	79
Figura 4.2 – (a) Variação do qui-quadrado com a remoção de até 20 pontos; (b) variação do qui-quadrado com a remoção de 11 até 17 pontos.....	80
Figura 4.3 - (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação analítica com o sensor em $r=0$, sem utilizar o processo de otimização proposto e (b) com a utilização do processo de otimização proposto neste trabalho.....	81
Figura 4.4 – Regressão não-linear com a remoção de 14 pontos em $r=0$	82
Figura 4.5 – Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação numérica, $r=0,25R$	83
Figura 4.6 – (a) Variação do χ^2 removendo-se 21 pontos, (b) variação do χ^2 entre a remoção de 14 e 21 pontos.....	84
Figura 4.7 – (a) Gráfico da temperatura adimensional simulada analiticamente sem utilizar o algoritmo e (b) utilizando-se o algoritmo proposto para $r=0,25R$	85
Figura 4.8 - Regressão não-linear com a remoção de 18 pontos para $r=0,25R$	85
Figura 4.9 – Gráfico da temperatura adimensional simulada numericamente para $r=0,5R$	86
Figura 4.10 - (a) Variação do χ^2 com a remoção de vinte pontos e (b) variação do χ^2 com a remoção de 6 a 13 pontos.....	87
Figura 4.11 – (a) Gráfico da temperatura adimensional simulada analiticamente, sem o uso do algoritmo proposto, e (b) com o uso do algoritmo proposto, para $r=0,5R$	88
Figura 4.12 – Regressão não-linear com remoção de 10 pontos com o termopar em $r=0,5R$	88
Figura 4.13 – Gráfico da temperatura adimensional simulada pelo método numérico para $r=0,75R$	89

Figura 4.14 - (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) com a remoção de 6 a 13 pontos.....	90
Figura 4.15 – (a) Gráfico da temperatura adimensional sem o processo de otimização e (b) com o processo de otimização proposto para $r=0,75R$	91
Figura 4.16 - Regressão não-linear com remoção de 9 pontos com o termopar em $r=0,75R$	91
Figura 4.17 – Gráfico da temperatura adimensional para $r=0,9R$ obtida por simulação numérica.	92
Figura 4.18 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) com a remoção entre 3 e 10 pontos.....	93
Figura 4.19 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica sem otimização e (b) com otimização para $r = 0,90R$	94
Figura 4.20 – Regressão não-linear com a remoção de 6 pontos para $r=0,9R$	94
Figura 4.21 - Erro de acurácia no cálculo da difusividade térmica aparente como função da posição do termopar $\frac{r}{R}$	96
Figura 4.22 – Gráficos das temperaturas adimensionais para várias posições do termopar: a) $r=0$; b) $r=0,25R$; c) $r=0,5R$; d) $r=0,75R$; e) $r=0,9R$	97
Figura 4.23 – Gráfico da temperatura obtida dos dados experimentais do aquecimento do agar gel em $r=0$	98
Figura 4.24 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 22 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 17 até 22 pontos.	100
Figura 4.25 – (a) Simulação analítica da temperatura do agar gel, sem o processo de otimização e (b) com o algoritmo proposto neste trabalho para o termopar em $r=0$	100
Figura 4.26 - Regressão não-linear com a remoção dos 19 primeiros pontos.....	102

Figura 4.27 - Após 160 s do início do processo de aquecimento: (a) Contornos mostrando a distribuição de temperaturas; (b) Gráfico rxT	102
Figura 4.28 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0$	104
Figura 4.29 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 12 e 20 pontos.	106
Figura 4.30 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0; y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto e (b) com a utilização do processo de otimização.	107
Figura 4.31 – Regressão não-linear com a remoção de 16 pontos em $r=0; y=0$	107
Figura 4.32 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura em $r = 0; y = 0,005$ m.	108
Figura 4.33 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 24 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 16 a 24 pontos.	110
Figura 4.34 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o valor da difusividade térmica aparente obtido por regressão não-linear do conjunto inicial e (b) usando o algoritmo proposto em $r=0; y=0,005$ m.	110
Figura 4.35 – Regressão não-linear com a remoção do vigésimo primeiro ponto para $r=0; y=0,005$ m.	111
Figura 4.36 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0,01$ m.	111
Figura 4.37 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 15 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 6 a 12 pontos.	112
Figura 4.38 – (a) Gráfico da temperatura adimensional simulada analiticamente usando a difusividade térmica aparente obtida com a regressão não-linear de todos	

os pontos e (b) usando o algoritmo proposto com o termopar em $r=0$; $y=0,01$ m.	113
Figura 4.39 – Regressão não-linear com a remoção dos nove primeiros pontos para $r=0$; $y=0,01$ m.	113
Figura 4.40 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0$, $y = 0,015$ m.	114
Figura 4.41 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 14 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 7 e 12 pontos.	115
Figura 4.42 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r = 0$; $y = 0,015$ m sem utilizar o processo de otimização proposto e (b) utilizando o algoritmo proposto neste trabalho.	116
Figura 4.43 – Regressão não-linear com a remoção de 9 pontos em $r = 0$; $y = 0,015$ m. ..	116
Figura 4.44 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,25R$; $y = 0$	117
Figura 4.45 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 24 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 17 e 21 pontos.	118
Figura 4.46 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0,25R$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto neste trabalho e (b) utilizando o algoritmo proposto neste trabalho.	119
Figura 4.47 – Regressão não-linear com a remoção de 18 pontos em $r=0,25R$; $y=0$	119
Figura 4.48 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,5R$; $y = 0$	120
Figura 4.49 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 26 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 17 e 24 pontos.	121

Figura 4.50 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0,5R$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto neste trabalho e (b) utilizando o processo de otimização.....	122
Figura 4.51 – Regressão não-linear com a remoção de 19 pontos em $r = 0,5R$ e $y = 0$	122
Figura 4.52 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,75R$; $y = 0$	123
Figura 4.53 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 12 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 3 e 11 pontos.	124
Figura 4.54 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0,75R$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto neste trabalho e (b) utilizando o algoritmo proposto neste trabalho.....	124
Figura 4.55 – Regressão não-linear com a remoção de 6 pontos em $r = 0,75R$; $y = 0$	125
Figura 4.56 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,5R$; $y = 0,01$ m.	125
Figura 4.57 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 15 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 7 e 15 pontos.	126
Figura 4.58 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r = 0,5R$; $y = 0,01$ m, sem utilizar o processo de otimização e (b) utilizando o algoritmo proposto.....	127
Figura 4.59 – Regressão não-linear com a remoção de 11 pontos, $r = 0,5R$; $y = 0,01$ m.....	127
Figura 4.60 – Gráficos das temperaturas adimensionais para as seguintes posições do termopar: (a) do centro para a fronteira ao longo do raio do cilindro; (1) $r=0$; (2) $r=0,25R$; (3) $r=0,5R$ e (4) $r=0,75R$; (b) do centro para a fronteira ao longo do eixo do cilindro; (1') $y=0$; (2') $y=0,005$ m; (3') $y=0,01$ m e (4') $y=0,015$ m.	129

Figura 4.61 – Gráfico do erro percentual quando o termopar é deslocado do centro para a fronteira, ao longo do eixo y adimensional.....	130
Figura 4.62 – Gráfico do erro percentual quando o termopar é deslocado do centro para a fronteira, ao longo do raio r adimensional.....	131
Figura 4.63 – Aquecimento do purê de tomate obtido dos dados experimentais de Betta et al. (2009).....	132
Figura 4.64 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 21 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 16 e 21 pontos.	134
Figura 4.65 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica para o purê de tomate com o sensor em $r=0$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização e (b) utilizando o processo de otimização proposto neste trabalho.	135
Figura 4.66 – Regressão não-linear com a remoção de 19 pontos em $r=0$; $y=0$	135
Figura 4.67 – Figuras de contornos mostrando o perfil da temperatura na região central do cilindro para, (a) 0,1% do tempo total de aquecimento; (b) 5% do tempo total de aquecimento; (c) 25% do tempo total e (d) 50% do tempo de aquecimento.....	136
Figura 4.68 - Distribuição da temperatura no instante $2,65 \times 10^3$ s, em quatro planos que cortam o eixo do cilindro em: (a) $y = 0,25L/2$; b) $y = 0,5L/2$; c) $y = 0,75L/2$ e d) $y = L/2$	137
Figura 4.69 – Gráfico da temperatura de aquecimento do creme custard obtido dos dados experimentais de Betta et al. (2009).....	138
Figura 4.70 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 13 e 20 pontos.	140
Figura 4.71 – (a) Gráfico da temperatura obtida por simulação analítica para o creme custard com o sensor em $r=0$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização e (b) utilizando o processo de otimização proposto.	141
Figura 4.72 – Regressão não-linear com a remoção de 16 pontos em $r=0$; $y=0$	141

Figura 4.73 - Figuras de contornos mostrando o perfil da temperatura na região central do cilindro para, (a) 0,1% do tempo total de aquecimento; (b) 5% do tempo total de aquecimento; (c) 25% do tempo total e (d) 50% do tempo de aquecimento.....	142
Figura 4.74 – Isotermas do creme custard, no instante 712 s concêntricas aos seguintes pontos: a) (0;0,25L/2); b) (0; 0,5L/2) c) (0; 0,75L/2) e d) (0; L/2).	143
Figura 4.75 - Tela principal do <i>software Finite Cylinder First Kind</i> desenvolvido para simular a transferência de calor com condição de contorno do primeiro tipo.....	146
Figura 4.76 - Menu “ <i>Finite Cylinder</i> ”.....	146
Figura 4.77 - Arquivo com dados que serão informados pelo usuário.....	147
Figura 4.78 - Caixa de mensagem informando o tempo gasto na simulação.	148
Figura 4.79 - Menu General.	148
Figura 4.80 - Caixa de diálogo para a aquisição dos dados para o gráfico 2D.....	149
Figura 4.81 - Caixa de diálogo do graph 3D.	149
Figura 4.82 - Itens do menu “Information”.....	150
Figura 4.83 - Menu “Exit” do <i>software Finite Cylinder First Kind</i>	150
Figura 4.84 - Malha representando 5x5 volumes de controle do cilindro finito, com destaque para os volumes de controle nordeste, sudeste e central.	152
Figura 4.85 - Temperaturas dos pontos nodais dos vinte e cinco volumes de controle representados na Figura 4.84, no instante 60 s do início do processo de aquecimento.....	154
Figura 4.86 – Gráfico da temperatura adimensional com o termopar na posição $r=0$; $y=0$ obtida por (a) simulação analítica e (b) simulação numérica.....	157
Figura 4.87 – Gráficos das temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0$; $y=0$, obtidas por simulação analítica e pelo <i>Software Finite Cylinder First Kind</i> , uma sobreposta a outra.	157

Figura 4.88 – Temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0$; $y=0,015$ m obtidos por (a) simulação analítica e pelo (b) <i>Software Finite Cylinder First Kind</i>	158
Figura 4.89 – Temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0$; $y=0,015$ m obtida pelo <i>software</i> que usa a solução analítica e pelo <i>software Finite Cylinder First Kind</i> , uma sobreposta a outra.....	158
Figura 4.90 – Gráficos das temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0,015$ m; $y=0$ obtida por (a) simulação analítica e (b) simulação numérica.	159
Figura 4.91 – Gráficos da temperatura adimensional com o termopar na posição $r=0,015$ m; $y=0$ obtidas por simulação analítica e numérica uma sobreposta a outra.	159
Figura 4.92 – Gráficos das temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0,01$ m; $y=0,01$ m obtida por (a) simulação analítica e pelo (b) <i>Software Finite Cylinder First Kind</i>	160
Figura 4.93 - Temperaturas adimensionais com o termopar na posição, $r=0,01$ m; $y=0,01$ m obtidas por simulação analítica e numérica, uma sobreposta a outra.....	161
Figura 4.94 - Arquivo com os dados sobre o purê de tomate informado pelo usuário.....	163
Figura 4.95 – Informar se procura uma função para a difusividade térmica ou se quer simular uma função já encontrada.	165
Figura 4.96 – Mostra as vinte funções disponíveis no <i>software</i>	165
Figura 4.97 – (a) Malha com 32x24 elementos utilizada nesta pesquisa, (b) Área geratriz do volume de controle destacando o ponto nodal P e seus vizinhos W, E, S e N.....	166
Figura 4.98 – Gráfico da cinética da penetração do calor no purê de tomate supondo constante a difusividade térmica aparente.	167

Figura 4.99 – (a) Erros da temperatura experimental para a difusividade térmica constante do purê de tomate, em destaque o erro médio e (b) o ajuste de uma curva polinomial aos erros experimentais.	168
Figura 4.100 – Gráfico das três melhores funções para a difusividade térmica aparente do purê de tomate dentre as funções testadas.....	170
Figura 4.101 – Gráfico representando a penetração de calor a partir da simulação numérica e os pontos obtidos experimentalmente para a temperatura do purê de tomate no centro do cilindro finito.	171
Figura 4.102 – (a) Gráfico da distribuição de erros considerando a difusividade térmica aparente do purê de tomate como função da temperatura local, (b) Ajuste de uma curva tangente aos erros experimentais.	172
Figura 4.103 – Função difusividade térmica aparente do purê de tomate entre 5,2 e 80 °C e a difusividade térmica média.	173
Figura 4.104 – Contornos das isotermas representando a distribuição das temperaturas do purê de tomate nos instantes: (a) 5,5 min; (b) 11,0 min; (c) 22,0 min; (d) 38,6 min.....	173
Figura 4.105 – Dados para a simulação da penetração de calor para o creme custard.....	174
Figura 4.106 – Gráfico representando a penetração de calor a partir da simulação numérica e os pontos obtidos experimentalmente para o creme custard em $r=0; y=0$	175
Figura 4.107 – (a) Distribuição de erros considerando constante a difusividade térmica do creme custard e (b) ajuste de uma curva cossenoidal aos erros experimentais.....	175
Figura 4.108 – As três melhores funções para a difusividade térmica do creme custard.....	177
Figura 4.109 – Gráfico da penetração de calor no centro do cilindro do creme custard considerando a difusividade térmica variável, obtida por simulação numérica e a partir dos dados experimentais.....	177

Figura 4.110 - (a) Gráfico da distribuição de erros considerando a difusividade térmica do creme custard como função da temperatura local e (b) ajuste de uma curva cossenoidal aos erros da temperatura experimentais.....	178
Figura 4.111 - Função difusividade térmica aparente do creme custard entre 10,82 e 80 °C, e a difusividade térmica média.....	179
Figura 4.112 – Contornos das isotermas representando a distribuição das temperaturas no interior do creme custard: (a) 14,3 min; (b) 28,5 min; (c) 71,26 min; (d) 99,76 min.....	179
Figura 4. 113 - Dados para a simulação da penetração de calor para o agar gel.....	180
Figura 4.114 - Gráfico da penetração do calor unidimensional no agar gel simulado a partir do <i>software Finite Cylinder First Kind</i> com difusividade térmica aparente constante, em $r=0$, e a partir dos dados experimentais.....	181
Figura 4.115 - (a) Erros da temperatura experimental para a difusividade térmica constante do agar gel, em destaque o erro médio e (b) Ajuste de uma curva senoidal aos erros experimentais.....	182
Figura 4.116 – Figuras isotérmicas representando a distribuição das temperaturas no interior do agar gel nos instantes: (a) 1,33 min; (b) 2,67 min; (c) 4 min; (d) 5,33 min.....	183

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Valores da coordenada x , que são raízes da função de Bessel.....	45
Tabela 3.2 - Valores da função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero.....	66
Tabela 4.1 – Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para a temperatura adimensional com sensor de temperatura colocado em $r=0$	79
Tabela 4.2 – Relaciona o número de pontos removidos, com as constantes A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para a posição do termopar em $r=0,25R$	83
Tabela 4.3 - Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para vários conjuntos de pontos com o termopar em $r=0,5R$	86
Tabela 4.4 – Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para vários conjuntos de pontos com o termopar em $r=0,75R$	89
Tabela 4.5 - Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para vários conjuntos de pontos com o termopar em $r=0,9R$	92
Tabela 4.6 - Valores da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar e os respectivos erros de acurácia.....	96
Tabela 4.7 - Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do χ^2 em função da remoção de pontos experimentais do agar gel.....	99
Tabela 4.8 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado, com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0$	105
Tabela 4.9 – Valores de C , de α e do χ^2 obtidos por regressão não-linear com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0,005$ m.	109
Tabela 4.10 – Valores para o parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0,01$ m.....	112

Tabela 4.11 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0,015\text{ m}$	114
Tabela 4.12 – Valores de C , α e χ^2 com o termopar em $r=0,25R; y=0$	117
Tabela 4.13 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R; y=0$	120
Tabela 4.14 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0,75R; y=0$	123
Tabela 4.15 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R; y=0,01\text{ m}$	126
Tabela 4.16 - Valores da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar no eixo do cilindro finito, $r=0$, e os respectivos erros de acurácia....	129
Tabela 4.17 - Valores da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar a partir do centro do cilindro finito, $y=0$, ao longo da direção radial e os respectivos erros de acurácia.....	131
Tabela 4.18 – Valores para o parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado para o aquecimento do purê de tomate com o termopar em $r=0; y=0$	133
Tabela 4.19 – Valores para o parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado para o aquecimento do creme custard com o termopar em $r=0; y=0$	139
Tabela 4.20 – Difusividade térmica aparente, coeficiente de determinação e o qui-quadrado do agar gel, purê de tomate e creme custard obtidos pelo algoritmo proposto neste trabalho.....	145
Tabela 4.21 – Apresenta os valores de a e b das funções da difusividade térmica aparente do purê de tomate, do qui-quadrado e do coeficiente de determinação.....	170
Tabela 4.22 - Apresenta os valores de a e b da função difusividade térmica aparente do creme custard, o qui-quadrado e o coeficiente de determinação.....	176

Tabela 4.23 – Indicadores estatísticos obtidos pela método analítico, numérico com difusividade constante e numérico com difusividade variável.....	184
Tabela A.1 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$	209
Tabela A.2 - Temperaturas adimensionais em vários instantes diferentes geradas por simulação numérica em $r=0,25R$	210
Tabela A.3 - Temperaturas adimensionais desde o instante inicial até 2000 s usando simulação numérica, $r=0,5R$	211
Tabela A.4 - Temperaturas adimensionais em $r=0,75R$, usando simulação numérica.	212
Tabela A.5 – Dados sobre a simulação numérica da penetração do calor para $r=0,9R$	213
Tabela A.6 - Dados da temperatura ($^{\circ}\text{C}$) no centro do cilindro obtidos experimentalmente para o agar gel, Ukrainczyk (2009).	214
Tabela A.7 - Temperaturas do aquecimento do agar gel obtidas experimentalmente, analiticamente e o erro percentual para $r=0$	215
Tabela A.8 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica, para o cilindro finito, com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0$	217
Tabela A.9 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,005$ m.	218
Tabela A.10 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,01$ m.	219
Tabela A.11 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,015$ m.	220
Tabela A.12 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,25R$; $y=0$ m.	221
Tabela A.13 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R$; $y=0$	222

Tabela A.14 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,75R; y=0$	223
Tabela A.15 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R; y=0,01$ m.	224
Tabela A.16 - Tabela de aquecimento do purê de tomate obtida experimentalmente por Betta et al. (2009).	225
Tabela A.17 - Tabela de aquecimento do creme custard obtida experimentalmente por Betta et al. (2009).	226

NOMENCLATURA

Letras Latinas

A - parâmetro obtido por regressão não-linear para o cilindro infinito.	$[s^{-1}]$
A_p, A_w, A_e, A_n, A_s - Coeficientes da equação de difusão discretizada.	$[-]$
A_{n1}, A_{m2} - Coeficiente da solução analítica dependente da posição.	$[-]$
Bi - Número de Biot.	$[-]$
B - Termo independente de Φ na equação de difusão discretizada.	$[-]$
C - parâmetro obtido por regressão não-linear para o cilindro finito.	$[s^{-1}]$
c_p - Calor específico à pressão constante.	$[Jkg^{-1}K^{-1}]$
D - Coeficiente de difusão de massa.	$[m^2s^{-1}]$
E, W, N, S, P - Pontos nodais.	$[-]$
h - Coeficiente de transferência convectiva de calor modificado.	$[ms^{-1}]$
h_H - Coeficiente de transferência convectiva de calor.	$[Wm^{-2}C^{-1}]$
h_m - Coeficiente de transferência de massa	$[ms^{-1}]$
J_0, J_1 - Funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero e um.	$[-]$
k - Condutividade térmica.	$[Wm^{-1}K^{-1}]$
L - Comprimento do cilindro.	$[m]$
N_p - Número de pontos experimentais.	$[-]$
r - Posição radial.	$[m]$
r_p - Posição nodal do volume de controle P .	$[m]$
R - Raio do cilindro	$[m]$

r^2 - Coeficiente de determinação	[-]
r_e - Posição radial da fronteira “e”.	[m]
r_w - Posição radial da fronteira “w”.	[m]
Δr - Largura de um volume de controle.	[m]
S_c - Componente constante do termo fonte linearizado.	[-]
S_p - Componente do termo fonte linear em Φ .	[-]
S^Φ - Termo fonte da equação de transporte.	[-]
t - Tempo transcorrido desde o início do processo.	[s]
t_i - Tempo referente ao i-ésimo ponto experimental.	[s]
T - Temperatura	[°C]
T_i^{exp} - Temperatura obtida experimentalmente, $T^{\text{exp}} = T_{\text{exp}}$.	[°C]
T_i^{sim} - Temperatura obtida por simulação analítica, $T^{\text{sim}} = T_{\text{ana}}$.	[°C]
T^* - Temperatura adimensional.	[-]
Y_0 - Função de Bessel do segundo tipo e ordem zero	[-]
\vec{v} - Grandeza vetorial que representa a velocidade do meio.	[ms ⁻¹]
z - Constante de resistência térmica.	[°C]

Letras Gregas

α - difusividade térmica.	[m ² s ⁻¹]
μ_n - Raízes da equação característica.	[s]
μ_{n1}, μ_{m2} - Raízes da equação característica.	[s]
Φ - Variável dependente no fenômeno de transporte.	[-]
Φ_P^0 - Variável dependente no fenômeno de transporte, no ponto P, no início do intervalo de tempo.	[-]

Φ_i	- Variável dependente de transporte do i-ésimo volume de controle.	[-]
Φ_i^{sim}	- Valor simulado de Φ correspondente ao i-ésimo ponto experimental.	[-]
Φ^{sim}	- Valor simulado de Φ .	[-]
$\Phi_P, \Phi_E, \Phi_W, \Phi_N, \Phi_S$	- Variáveis dependentes em equação discretizada.	[-]
$\Phi_e, \Phi_w, \Phi_n, \Phi_s$	-Variáveis de transporte nos contornos leste, oeste, norte e sul.	[-]
Φ_∞	- Variável de transporte para fluido.	[-]
λ	- Coeficiente de transporte.	[-]
Γ^Φ	- Coeficiente de transporte.	[-]
Γ_e^Φ	- Coeficiente de transporte na interface entre “P” e “E”.	[-]
Γ_w^Φ	- Coeficiente de transporte na interface entre “P” e “W”.	[-]
Γ_n^Φ	- Coeficiente de transporte na interface entre “P” e “N”.	[-]
Γ_s^Φ	- Coeficiente de transporte na interface entre “P” e “S”.	[-]
Γ_E^Φ	- Coeficiente de transporte no ponto nodal E.	[-]
Γ_P^Φ	- Coeficiente de transporte no ponto nodal P.	[-]
Γ_W^Φ	- Coeficiente de transporte no ponto nodal W.	[-]
Γ_N^Φ	- Coeficiente de transporte no ponto nodal N.	[-]
Γ_S^Φ	- Coeficiente de transporte no ponto nodal S.	[-]
ρ	- Densidade (massa específica).	[kgm ⁻³]
$\Delta\theta$	- Variação angular	
$\frac{1}{\sigma_i^2}$	- Peso estatístico do i-ésimo ponto experimental.	[-]
χ^2	- Qui-quadrado.	[-]
∇	- Gradiente.	[-]
$\nabla \cdot$	- Divergente.	[-]
Δ	- Variação.	[-]

Sobrescrito

0 - Tempo anterior.

e - Face leste do volume de controle.

P - Nó do volume de controle em estudo.

q - Expoente da posição radial r.

Subscrito

e, w, n, s - Fronteiras leste, oeste, norte e sul de um volume de controle.

E, W, N, S - Pontos nodais: leste, oeste, norte e sul de um volume de controle.

i - Inicial ou um ponto qualquer.

n - Índice da raiz da equação característica.

n1 - Índice da raiz da equação característica do cilindro infinito.

m2 - Índice da raiz da equação característica da parede infinita.

RESUMO

Para muitos gêneros alimentícios, o processo de transferência de calor é essencial para se chegar à condição de consumo humano. O presente trabalho teve como objetivo estudar o fenômeno da difusão transiente de calor em alimentos pastosos contidos em recipientes cilíndricos. O estudo apresenta soluções para a equação de difusão com condição de contorno do primeiro tipo. Foram desenvolvidas ferramentas analíticas (otimizador acoplado à solução analítica) para a descrição da difusão de calor em produtos pastosos com as formas mencionadas. As ferramentas analíticas foram validadas através de dados obtidos por simulação numérica tanto para o cilindro infinito quanto para o finito. Os erros cometidos com as ferramentas desenvolvidas no cálculo da difusividade térmica aparente para os dados simulados são aceitáveis quando o sensor de temperatura é colocado na região mais interna do cilindro. Os resultados obtidos para a difusividade térmica aparente de agar gel, purê de tomate e creme custard são compatíveis com os resultados encontrados na literatura para esses produtos. O *software Finite Cylinder First Kind* foi desenvolvido, validado e aplicado aos dados do purê de tomate, creme custard e agar gel para várias posições no interior do cilindro finito onde estes gêneros alimentícios se encontravam. Todos os resultados obtidos por otimização e simulação tiveram uma excelente concordância com os resultados experimentais. O método numérico se mostrou mais eficiente do que o analítico, na descrição do processo de difusão de calor nos produtos estudados, devido sua versatilidade de permitir a obtenção da solução da equação de difusão considerando a difusividade térmica variável com a temperatura local.

Palavras-chave: Difusão de calor, solução analítica e numérica, difusividade variável.

ABSTRACT

For many foodstuffs, the process of heat transfer is essential to reach the condition human consumption. The present work aims to study the phenomenon of transient diffusion of heat in pasty foodstuffs contained in cylindrical containers. The study presents solutions for the diffusion equation with boundary condition of the first kind. Analytical tools were developed - optimizer coupled to the analytical solution - to describe the diffusion of heat into products with the forms mentioned. Analytical tools were validated using data obtained by numerical simulation for both the cylinder the infinite and finite. The tools developed minimize errors in calculating the thermal diffusivity for the simulated data are acceptable when the temperature sensor is placed in the innermost region of the cylinder. The results obtained for the thermal diffusivity of agar gel, tomato puree and cream custard are consistent with the results found in the literature for these products. The software finite cylinder first kind was developed, validated and applied to data of tomato puree, cream custard and agar gel for various positions within the finite and infinite cylinder filled with these foodstuffs. All results obtained by simulation and optimization had an excellent agreement with the experimental results. The numerical method is more efficient than the analytical description of the heat diffusion process in the products, due to their versatility that allows obtaining the solution of the diffusion equation considering the thermal diffusivity varies with local temperature.

Keywords: Heat diffusion, analytical and numerical solution, variable diffusivity.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Na indústria de processamento de alimentos, normalmente, há uma fase em que o calor é removido ou transferido para o produto alimentício. Este estágio é fundamental na preservação de vários tipos de alimentos e está presente desde o início do processo de produção como, por exemplo, na secagem de vários produtos agrícolas que começa logo após a colheita. Um dos mecanismos de secagem consiste em usar um fluxo contínuo de ar aquecido sobre o produto. Desta forma, há uma transferência contínua de calor para o produto, enquanto isto, a umidade que se encontra em seu interior migra para a superfície e, em seguida, para fora. Muitos trabalhos sobre secagem de produtos agrícolas estão disponíveis na literatura, (WU et al., 2004; BEZYMA e KUTOVOY, 2005; AMENDOLA e QUEIROZ, 2007; MARIANI et al., 2008).

O resfriamento é outro mecanismo largamente utilizado para conservar produtos agrícolas, como frutas e legumes, com o objetivo de aumentar o tempo de estocagem nas prateleiras. Projetar e produzir refrigeradores eficientes requer o conhecimento dos parâmetros termo-físicos dos produtos a serem refrigerados. Pesquisas sobre a determinação destes parâmetros são comuns na literatura (DINCER, 1995a; DINCER, 1995b; DINCER, 1996; MARKOWSKI et al., 2004; BAÏRI, et al., 2007).

A pasteurização é outro método, muito usado para a conservação de vários produtos alimentícios industrializados e tem como base a transferência de calor (PLAZL, et al. 2006; HUANG, 2007; BETTA et al., 2009). Todos estes meios usados para conservar os alimentos têm um custo financeiro que estão diretamente relacionados aos valores dos parâmetros termo-físicos dos produtos pasteurizados, resfriados ou submetidos a processos de secagem. Logo, para determinar este custo, é necessário conhecer os parâmetros termo-físicos destes produtos.

Em vários trabalhos de pesquisa, a transferência de calor, envolvendo cremes e purês, é descrita apenas por condução, considerando desprezíveis os fluxos convectivos no interior da amostra (BETTA et al., 2009; MARIANI et al., 2009). Nestes casos, para que o processo de transferência de calor seja descrito, é preciso resolver a equação de difusão de calor. Como já mencionado, para estimar quanto calor é transferido para um dado produto ou retirado dele, é necessário se conhecer algumas grandezas termo-físicas destes produtos, como por exemplo, a difusividade térmica aparente, α , e o coeficiente de transferência convectiva de calor, h . Por outro lado, levando em conta que a condução de calor é descrita pela equação de difusão, há basicamente dois métodos para resolvê-la no estado transiente: o método analítico (DINCER, 1995a; DINCER, 1995b; DINCER, 1996; MARKOWSKI et al., 2004; BAĬRI, et al., 2007) e o numérico (CARCIOFI et al., 2002; CARBONERA et al., 2003, SIMPSON e CORTÉS, 2004; PLAZL et al., 2006; HUANG, 2007; BETTA et al., 2009; MARIANI et al., 2009).

O método inverso é um dos métodos usados para determinar os parâmetros termo-físicos durante a condução de calor, explorando os dados experimentais da cinética de aquecimento ou de resfriamento, (SIMPSON e CORTÉS, 2004; MARIANI, et al., 2008; UKRAINCZYK, 2009; SILVA et al., 2010a) o qual, normalmente é usado com algum algoritmo otimizador. Se a variação de temperatura não for grande, os parâmetros termo-físicos podem ser considerados constantes e a equação de difusão pode ser resolvida tanto analítica quanto numericamente (DINCER, 1995a; DINCER, 1995b; DINCER, 1996; CARCIOFI et al., 2002; CARBONERA et al., 2003; MARKOWSKI et al., 2004; PLAZL et al., 2006; SILVA et al., 2010b). Algumas vezes, mesmo quando a variação da temperatura é considerada grande, alguns autores continuam considerando os parâmetros termo-físicos constantes (CARCIOFI, et al., 2002; PLAZL et al., 2006; HUANG, 2007; BETTA et al., 2009). Mas, para grandes variações de temperatura, considerar os parâmetros termo-físicos constantes, pode resultar num ajuste tendencioso da curva de penetração do calor. Neste caso, é mais apropriado considerar a difusividade térmica aparente variável sendo, necessária a solução numérica da equação de difusão.

Neste trabalho de pesquisa, serão analisadas as implicações da imposição da difusividade térmica aparente constante no estudo da transferência de calor durante a pasteurização de alimentos pastosos colocados em recipientes cilíndricos. Com esta

finalidade, será usado o método numérico dos volumes finitos para encontrar a solução da equação de difusão no estado transiente, considerando-se a difusividade térmica aparente variável ou constante com a solução acoplada a um otimizador baseado no método inverso. Várias simulações serão realizadas com o objetivo de encontrar qual modelo matemático para a difusividade térmica aparente é o mais adequado para uma descrição apurada do processo de pasteurização do purê de tomate, do creme custard e do agar gel.

Este trabalho pretende contribuir no estudo de processos de transferência de calor como, por exemplo, no que ocorre na pasteurização de produtos pastosos, de acordo com os objetivos definidos a seguir.

1.1 Objetivo geral

- Desenvolver ferramentas analíticas e numéricas para descrever o fenômeno de transferência de calor por condução, em produtos ou corpos com geometria cilíndrica, e determinar parâmetros termo-físicos para a condição de contorno do primeiro tipo.

1.2 Objetivos específicos

- Apresentar soluções analíticas e numéricas em uma e duas dimensões para o problema da difusão de calor pressupondo-se condição de contorno de primeiro tipo, em corpos com geometria cilíndrica.

- Desenvolver algoritmos de otimização para determinar parâmetros termo-físicos, tanto através de soluções analíticas quanto através de soluções numéricas.

- Desenvolver um *software* computacional, na plataforma Windows, incluindo a interface com o usuário, para determinar parâmetros termo-físicos e simular o processo da difusão de calor em corpos cilíndricos.

- Simular a distribuição de temperatura no interior de produtos e determinar parâmetros termo-físicos inerentes à transferência de calor, utilizando modelos matemáticos desenvolvidos nesta pesquisa.

- Modelar e estudar o efeito do fenômeno da difusão de calor, considerando-se o produto com a forma de um cilindro infinito ou finito.
- Estudar os efeitos das considerações adotadas nos diversos modelos, na descrição da transferência de calor.
- Determinar parâmetros termo-físicos durante o processo de transferência de calor e fazer uma aplicação para a pasteurização do agar gel, creme custard e purê de tomate.

1.3 Principais contribuições deste trabalho

Ao final deste trabalho, pretende-se oferecer as seguintes contribuições à comunidade científica:

- Apresentar um otimizador a ser acoplado à solução analítica uni e bidimensional da equação de difusão, com condição de contorno do primeiro tipo para o cilindro. Desta forma, pode-se determinar a difusividade térmica aparente e a condutividade térmica para descrever a temperatura de pasteurização de produtos pastosos contidos em recipientes metálicos na forma cilíndrica.
- Solução numérica da equação de difusão em produtos de forma cilíndrica, supondo que os parâmetros termo-físicos sejam constantes ou variáveis, para a condição de contorno do primeiro tipo.
- Desenvolver um *software* com interface gráfica que possibilitará simular a difusão do calor em produtos alimentícios acondicionados em recipientes na forma cilíndrica, bem como determinar a difusividade térmica aparente para esta geometria, através do processo de otimização.
- Disponibilizar um modelo para descrever a transferência de calor, o mais próximo da situação física a ser investigada, considerando-se: condição de contorno do primeiro tipo, geometria cilíndrica de dimensões constantes e difusividade térmica aparente constante ou variável.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A segurança alimentar envolve a inativação de micro-organismos patogênicos de produtos industrializados. A Organização Mundial da Saúde estima que, a cada ano, cem milhões de pessoas são vítimas de intoxicação alimentar, e dessas, um milhão resulta em morte (LEWIS e HEPPELL, 2000). Os agentes patogênicos encontrados nos alimentos são um importante problema de saúde pública e sua inativação por meios térmicos foram objeto de várias pesquisas como as de Levinson e Hyatt (1964); Stumbo et al., (1975); Kennedy et al., (2005).

A indústria alimentícia usa várias técnicas para reduzir, prevenir o aparecimento e a sobrevivência de micro-organismos nos alimentos, com o objetivo de garantir a segurança alimentar. O esporo do *Clostridium botulinum*, por exemplo, é o patógeno conhecido mais resistente ao tratamento térmico e produz a mais mortal das toxinas para o homem. Para inativá-lo, usa-se um procedimento térmico, com temperatura de referência de 121,1 °C e com a constante de resistência térmica¹, $z = 10$ °C (SUN, 2012).

Para a indústria alimentícia é muito importante o controle da temperatura durante a elaboração, transporte e comercialização (BAÏRI et al., 2007). A regulação térmica correta é extremamente importante no mecanismo microbiológico o qual intervem diretamente nas características e qualidade produto final (WANG e SUN, 2001; TIJSKENS et al., 2001).

¹ A constante de resistência térmica z é obtida a partir da razão entre a temperatura de referência e o logaritmo decimal da redução microbiana que se deseja obter.

2.1 Pasteurização

A pasteurização é uma das mais antigas técnicas de preservação alimentar, baseada na inativação térmica de micro-organismos e na desnaturação de enzimas que possam oferecer risco potencial a deterioração dos alimentos (BUCKENHSKES et al. 1998).

A definição padrão de pasteurização dada pela *International Dairy Federation* (IDF 1986) é a seguinte: “pasteurização é um tratamento térmico aplicado a um produto alimentício com o objetivo de minimizar os possíveis riscos à saúde decorrentes de micro-organismos patogênicos que estejam associados ao produto, mas que não alterem ou alterem minimamente sua composição química, suas propriedades físicas e organolépticas” (LEWIS e HEPPELL, 2000).

A pasteurização apenas minimiza os riscos da contaminação alimentar. Alguns alimentos têm, associados a eles, micro-organismos com elevada resistência térmica. Ao leite está associado o *Bacillus stearothermophilus*, o *B. subtilis* ou *B. cereus*; para produtos de frutas, o *Byssochlamys ssp*; produtos para crianças à base de proteína de soja, o *Desulphotomaculum nigrificans*; para os legumes, *B. stearothermophilus* e *Cl. Thermosaccharolyticum* (LEWIS e HEPPELL, 2000).

Mesmo com essas limitações, a pasteurização é o processo térmico mais usado para preservar os alimentos e é eficiente na redução dos riscos associados aos agentes patogênicos neles contidos (ARROYO et al., 2009).

Além do tratamento térmico, é necessário que produtos perecíveis sejam armazenados sob determinadas condições físicas. A temperatura desempenha um papel relevante na conservação destes produtos. Para o leite pasteurizado, o ideal é guardá-lo a temperatura abaixo de 4 °C. Para temperaturas acima de 10 °C, sua validade é reduzida, em pelo menos 50% (LEWIS e HEPPELL, 2000).

2.1.1 Aspectos históricos

A percepção de que o leite é um veículo transmissor de micro-organismos patogênicos, como o que causa a tuberculose, levou ao desenvolvimento de um

processo térmico, a baixa temperatura, por um período de tempo mais longo, com o objetivo de inativar o agente causador da tuberculose, o bacilo *Mycobacterium tuberculosis*, também conhecido como bacilo de Koch (WILBEY, 1993).

A pasteurização do leite começou a ser introduzida, como uma medida de saúde pública, a partir da segunda metade do século XIX (JAY, 1992). A França começou um programa de pasteurização do leite para as classes trabalhadoras em 1890. As autoridades de saúde da França, da época, viam na pasteurização do leite a ação política mais importante para reduzir a mortalidade infantil e a morbidade no país (KLAUS, 1993).

Nos Estados Unidos essas medidas começaram a ser tomadas no início do século XX. Em 1908, uma lei municipal de Chicago tornou obrigatório o processo de pasteurização do leite comercializado na cidade. Em 1910, Philadelphia e Milwaukee adotaram o mesmo procedimento, e São Francisco, em 1914 (WOLF, 1998).

2.1.2 Tipos de pasteurização

Os três tipos de pasteurização mais usados são: a pasteurização lenta, LTLT (*low temperature long time*), a pasteurização rápida, HTST (*high temperature-short time*) e a UHT (*ultrahigh-temperature*) (SUN, 2012).

A técnica de pasteurização LTLT consiste em aquecer o leite ou outros gêneros alimentícios até a temperatura de 62 a 65 °C e permanecer nessa temperatura por pelo menos 30 minutos. Em seguida, o produto deverá ser resfriado rapidamente até aproximadamente 10 °C. A variação brusca de temperatura provoca um choque térmico responsável pela inativação de um grande número de bactérias. A outra técnica de pasteurização HTST consiste em aquecer o leite ou outro gênero alimentício até a temperatura de 72 a 74 °C durante um período de tempo muito mais curto, 15 a 30 s. Em seguida, é resfriado rapidamente, como no processo LTLT (KELLY e O'SHEA, 2002). Na UHT, a temperatura do leite atinge 135 °C, por pelo menos 1 s (SUN, 2012).

A partir da pasteurização, é possível se fazer uma análise dos processos físicos envolvidos e determinar as propriedades termo-físicas que desempenham um papel

importante no processo de transferência de calor nos alimentos. As informações sobre as temperaturas em pontos críticos - pontos em torno do centro geométrico – fornecem dados importantes sobre a inativação das bactérias e sobre o processo de deterioração dos alimentos.

A esterilização é outro processo que envolve a transferência de calor e tem como objetivo eliminar quaisquer formas de vida, em qualquer sistema, inclusive nos alimentos. A temperatura de referência para o processo de esterilização é de 121,1 °C. Stumbo (1965) propôs que, para o *Clostridium botulinum*, a redução recomendada fosse de 12D, ou seja, após o tratamento térmico, espera-se que apenas um esporo sobreviva para cada 10¹² esporos existentes.

Encontram-se, na literatura, muitos trabalhos de pesquisa que analisam o processo de transferência de calor na pasteurização dos mais diversos tipos de gêneros alimentícios (COLLET et al., 2005; PLAZL et al., 2006; HUANG, 2007; KIZILTAŞ et al., 2010). Nesses trabalhos, são usados tanto o método analítico quanto o numérico para se obter os valores das grandezas termo-físicas dos produtos estudados.

2.2 Pesquisas sobre pasteurização

Carbonera et al. (2003) analisaram três métodos para determinar a difusividade térmica aparente de massa de tomate comercial com 18% de sólidos: o método de Ball e Olson (1957), o método da otimização associado ao modelo condutivo e o outro baseado na própria definição da difusividade térmica aparente. Os métodos analisados por estes pesquisadores não são comumente usados para determinar a difusividade térmica aparente de alimentos. Os mais usados são os métodos de Sweat (1986), Choi e Okos (1983a) e Choi e Okos (1983b) e a terceira possibilidade é a partir do histórico da temperatura num ponto do interior da amostra durante o aquecimento ou resfriamento. A difusividade térmica aparente é uma importante propriedade termo-física, pois permite determinar a evolução de sistemas que sofrem o processo de aquecimento ou resfriamento.

A conclusão da pesquisa foi de que o método proposto por Sweat (1986) é válido para a determinação da difusividade térmica aparente para alimentos pastosos.

No entanto, nenhuma conclusão sobre a aplicabilidade do método de Ball e Olson (1957) pôde ser obtida, porque as condições experimentais não favoreciam a utilização dessa metodologia.

O aspargo, vegetal originário da Europa, da família Asparagaceae, apresenta uma grande sensibilidade ao calor e sua textura é degradada, quando submetido ao tratamento térmico convencional que usa como fonte de calor água quente ou vapor (McGLYNN et al., 1993). Em virtude deste fato, Lau e Tang (2002) submeteram 1,8 kg de aspargo em conserva a uma pasteurização não convencional usando como fonte de calor um forno de micro-ondas de 915 MHz.

No processo térmico convencional, usando-se o banho térmico, o aspargo não atinge rapidamente a temperatura recomendada pelo *Food and Drug Administration* - FDA, que é de 74 °C durante 15 min (LAU e TANG, 2002). Criou-se, dessa forma, a necessidade de se usar processos alternativos. Lau e Tang (2002) usaram micro-ondas como fonte de calor para obter a pasteurização do aspargo.

Na transferência de calor por radiação, a onda interage diretamente com o corpo, aquecendo-o rapidamente. O objetivo da pesquisa era avaliar a textura do vegetal submetido ao tratamento térmico alternativo à temperatura de 88 °C por um período de tempo menor que 15 min. O impacto dos diferentes processos de pasteurização sobre a textura do aspargo foi analisado e comparado através do teste *C-value* (*cook value*), que quantifica a degradação da textura do corpo que foi submetido ao tratamento térmico. Esse teste é o resultado da integral no tempo² da potência de base dez elevada à função temperatura de aquecimento, $T(t)$, subtraída de uma temperatura de referência, que nesse caso é 100 °C. O resultado deve ser dividido pelo valor de z , que tem como base a média da deterioração de componentes químicos como a tiamina, a vitamina C e o clorofil, que é de 33°C (Ohlsson, 1980). Quanto maior o resultado da integral, maior a degradação da textura do produto.

Na mesma pesquisa, Lau e Tang (2002) analisaram também os dados obtidos com a pasteurização convencional e a alternativa usando-se como fonte de calor aparelhos de micro-ondas de 915 MHz de 1 e 2 kW de potência. Os pesquisadores

² Integral que quantifica o C-value: $C = \int 10^{[T(t)-T_{ref}]/z} dt$.

observaram que o tempo necessário para que o centro da garrafa atingisse a temperatura de 88 °C era de 30 min na pasteurização convencional, 15 min usando-se o forno de micro-ondas de 1 kW e 9 min usando-se o de 2 kW. Os pesquisadores concluíram que houve redução na degradação da textura do aspargo na pasteurização alternativa, quando comparada com a pasteurização convencional. O valor do *C-value* foi de 8,66 min para a pasteurização com vapor d'água, de 3,16 e 2,64 min para a pasteurização com micro-ondas de 1kw e 2kw, respectivamente.

Huang (2007) pesquisou o desenvolvimento de métodos para simulação computacional de transferência de calor durante o processo de pasteurização de salsichas tipo *frankfurters*, quando essas eram imersas em água quente. A pasteurização das salsichas tinha como objetivo inativar a bactéria *Listeria monocytogenes*. Um programa computacional com base no método numérico das diferenças finitas foi desenvolvido para simular a distribuição de temperatura no interior dos pacotes contendo as salsichas. Esse programa foi inicialmente usado para estimar tanto a difusividade térmica aparente quanto o coeficiente de transferência convectiva de calor, ambos considerados, *a priori*, constantes durante o aquecimento e o resfriamento das salsichas.

A conclusão da pesquisa foi de que a metodologia desenvolvida e utilizada para estimar a difusividade térmica aparente das salsichas e o coeficiente de transferência convectivo de calor durante o processo de pasteurização foi validada com sucesso através da comparação dos resultados obtidos com os dados experimentais existentes na literatura. Os resultados da simulação da transferência de calor durante a pasteurização das salsichas, em pacotes de camada única, foram bastante precisos quando comparados com as curvas de temperatura obtidas experimentalmente, indicando que o modelo de simulação desenvolvido foi capaz de descrever, com sucesso, os processos de transferência de calor durante a pasteurização. As salsichas utilizadas tinham a forma aproximada de um cilindro finito, o que sugere que a solução do problema da difusividade térmica poderia também ser obtida pelo método analítico, uma vez que os parâmetros termo-físicos foram considerados constantes.

Denys et al. (2004) estudaram, na pasteurização, a temperatura transiente e os perfis de velocidade de fluidos durante os processos térmicos de transferência convectiva e difusiva de calor na geometria do ovo, quando este é preenchido por uma

suspensão de sódio *carboxi-metil-celulose*, CMC. Hou et al. (1996) haviam proposto a pasteurização do ovo para eliminar as salmonelas responsáveis pela transmissão de doenças a partir da ingestão de ovos crus. Denys et al. (2004) determinaram o coeficiente de transferência convectiva de calor de ovos intactos que foram submetidos a um processo térmico utilizando-se o programa computacional CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Com esse objetivo, a geometria de cada ovo foi discretizada, gerando-se uma malha computacional quase uniforme de aproximadamente 100.000 volumes de controle.

Num problema complexo, em que as propriedades termo-físicas não são constantes e a geometria do corpo em estudo não é simples, a aplicação do método numérico é fundamental para se encontrarem os valores das grandezas estudadas ponto a ponto, ao longo do intervalo de tempo.

Denys et al. (2004) concluíram que a temperatura transiente e os perfis de velocidade durante o processo de convecção natural, em corpos com a forma geométrica do ovo, preenchidos com CMC, podem ser resolvidos usando-se o pacote CFD comercial. Foi observada uma boa concordância entre os perfis de temperatura obtidos por simulação e os experimentais. Entretanto, os resultados não foram concordantes quando se considerava que o processo de transferência de calor no interior do ovo se dava por condução.

Mañas et al. (2003) pesquisaram a influência do meio ácido na resistência ao calor do extrato de bactérias *Salmonella typhimurium* entre as temperaturas de 10 e 37 °C. Eles observaram que a alcalinização do meio ácido, com o pH passando de 6 para 7,7, fez com que a resistência dessas bactérias ao calor, na temperatura de 37 °C, diminuísse pelo fator 3. A importância dessa pesquisa reside no fato de ser a *Salmonella typhimurium* um dos micro-organismos mais frequentemente envolvidos em surtos de intoxicação alimentar. Relações semelhantes foram observadas para a *Salmonella senftenbert* e a *Salmonella enteritidis*, com o coeficiente de correlação entre o observado e o previsto de 0,91 e 0,98, respectivamente.

Markowski et al. (2004), em suas pesquisas, determinaram a difusividade térmica aparente de salsichas do tipo *lyoner* durante o aquecimento e o esfriamento em banho térmico. Essas salsichas, feitas de carne bovina e suína picadas, são muito

populares na Polônia, e o maior perigo é de, no processo de produção, as salsichas serem contaminadas por agentes patogênicos. Markowski et al. (2004) utilizaram dois métodos para calcular a difusividade térmica aparente das referidas salsichas: um dos métodos tinha como base a solução analítica simplificada da equação da condução de calor nos sólidos e, o outro, a solução numérica. Na comparação feita pelos pesquisadores entre os dois métodos e os dados experimentais, verificaram que os resultados obtidos através da solução numérica estavam de acordo com os dados disponíveis na literatura. Já os resultados obtidos através da solução analítica diferiram significativamente dos dados publicados para vários produtos alimentícios.

A partir dos resultados obtidos Markowski et al. (2004), foi possível deduzir que a difusividade térmica aparente não é um parâmetro constante. De acordo com as conclusões obtidas pelos pesquisadores, a difusividade térmica aparente deste tipo de salsicha, nas condições físicas a que foram submetidas, dependia não apenas das propriedades termo-físicas do material, mas também de sua estrutura interna. Outra conclusão interessante a que chegaram é a de que a difusividade térmica aparente das salsichas do tipo lyoner, quando aquecidas, era diferente da difusividade térmica aparente quando elas estavam sendo resfriadas, e dependia também quantidade de gordura e da água contidas nas amostras.

Glavina et al. (2006) usaram três métodos – método da função de transferência, (STEPHANOPOULOS, 1984) método log (HOLDSWORTH, 1997) e o método analítico - para calcular a difusividade térmica aparente de três materiais: cilindros de poliamida e de batata e carne picada embalada em recipiente cilíndrico.

As estimativas, feitas pelos pesquisadores, para as difusividades térmicas aparentes dos produtos pesquisados, usando o método analítico, foram obtidas a partir da solução da equação de difusão, assumindo que os materiais eram isotrópicos e considerando as condutividades térmicas e as condições de contornos constantes, como delineadas por Singh (1992).

O método da função de transferência de um sistema no domínio da transformada de Laplace é definido como a razão entre a variável de saída $y(s)$ e a de entrada $x(s)$ (STEPHANOPOULOS, 1984). A variável de entrada, para o caso em estudo, corresponde a temperatura ambiente e a de saída corresponde a temperatura do centro

geométrico do material pesquisado, ponto crítico da amostra. Em seguida a amostra é colocada em banho térmico. A partir da expressão da temperatura do ponto crítico $T_c(t)$ se obtém a expressão da temperatura adimensional $T^*(t)$. É preciso obter os parâmetros j e f dos gênero alimentício pesquisado, para através da equação de Ball e Olson (1957), estimar a difusividade térmica aparente do produto pesquisado.

O método logarítmico faz uso da equação empírica de Holdsworth (1997) para obter a temperatura adimensional, no centro do cilindro, em função dos parâmetros j e f . O valor de f está relacionado com a difusividade térmica e o de j com o atraso no estabelecimento de uma taxa de aquecimento uniforme. Este método usa apenas alguns pontos da curva de aquecimento para a determinação da difusividade térmica aparente e a determinação de quais pontos serão inclusos envolve um certo grau de subjetividade (GLAVINA et al., 2006).

Glavina et al. (2006) concluíram que a solução encontrada utilizando o método que usa a função de transferência fornece uma boa aproximação com os dados experimentais, e tem uma formulação matemática bem mais simples do que o método analítico. No entanto, os resultados obtidos foram sempre menores do que os resultados encontrados pelos métodos analítico e logarítmico. A vantagem do método que usa a função de transferência sobre o método logarítmico é que ele leva em consideração todos os valores experimentais para estimar a difusividade térmica aparente.

Plazl et al. (2006) desenvolveram um modelo matemático para descrever a distribuição de temperatura tridimensional durante a pasteurização industrial de molhos de tomate contidos em frascos de vidro. O método numérico das diferenças finitas foi usado para resolver a equação de condução de calor em três dimensões, com condição inicial e de contorno variáveis e determinou a difusividade térmica aparente do molho de tomate, na pasteurização industrial.

A pasteurização industrial, pesquisada por Plazl et al. (2006), processava-se em duas etapas de aquecimento e três de resfriamento. Frascos de vidro contendo molho de tomate hermeticamente fechados se deslocavam sobre correias transportadoras, com velocidade constante, em duas regiões de aquecimento e três de resfriamento. A primeira região era conhecida como de pré-aquecimento, com duração de 5 min e temperatura de 70 °C. A segunda região correspondia a de pasteurização propriamente

dita com temperatura de 90 °C e duração de 30 min. As etapas seguintes eram de resfriamento. Na primeira parte do resfriamento, o alimento ficava a uma temperatura de 70 °C durante 12,1 min. Na segunda parte, a uma temperatura de 50 °C por 7,2 min. E na parte final do processo, a uma temperatura de 20 °C por 7,2 min.

A modelagem matemática e a simulação têm se mostrado muito úteis na investigação, previsão e otimização de processos térmicos na industrialização de alimentos. Com base em modelos matemáticos de placas trocadoras de calor, foi desenvolvido um método de otimização para se encontrar a melhor configuração para o processo de pasteurização (GUT e PINTO, 2003).

As previsões dos perfis de temperatura obtidas pelo modelo dinâmico permitiram uma considerável otimização do processo industrial de pasteurização de molhos de tomate enlatados. Plazl et al. (2006) investigaram tanto o aspecto teórico – transferência de calor convectivo, difusividade térmica aparente do recipiente de vidro que continha a pasta de tomate e a condutância entre o recipiente vidro e o alimento - quanto o experimental – otimização das placas trocadoras de calor – necessárias para o processo de pasteurização de molhos de tomate enlatados. Dentre os resultados obtidos, pode-se destacar que o modelo matemático desenvolvido foi testado com sucesso e melhorou a compreensão da pasteurização industrial de alimentos contidos em frascos de vidro. Segundo os autores, o processo térmico com placas trocadoras de calor, com pequenas modificações, pode ser usado no controle industrial da pasteurização de vários outros produtos alimentícios.

Baïri et al. (2007) usaram um método simples para calcular a difusividade térmica aparente de gêneros alimentícios, em uma dimensão, tendo como base a solução analítica da equação de Fourier aplicada à geometria cilíndrica. A propagação do calor através de um cilindro, dependendo da relação entre o raio e o comprimento, pode ser considerada em uma ou em duas dimensões. Para cilindros muito longos, a transferência de calor se dá quase que exclusivamente pela superfície lateral, transformando-se o problema da difusão de calor de duas para apenas uma dimensão.

Na pesquisa desenvolvida por Baïri et al. (2007), o cilindro foi considerado infinito, a propagação do calor em apenas 1D, e foi usado o método da separação das variáveis desenvolvido por Baïri e Laraqi (2003) para obter a temperatura adimensional,

$T^*(r,t)$. A função $T^*(r,t)$ é obtida a partir do produto de uma constante pela função exponencial, cujo expoente, é a difusividade térmica aparente. A constante é obtida a partir da primeira raiz da função de Bessel de primeiro tipo de ordem 0, μ_1 , e de uma associação dos valores das funções de Bessel do primeiro tipo de ordem 0 e 1 (J_0 e J_1) em μ_1 e em $(\frac{r}{R}\mu_1)$. Onde r é a posição no interior do cilindro onde se encontra o termopar e R o raio do cilindro infinito. As medidas da temperatura mostram claramente uma curva exponencial para qualquer posição do termopar. Linearizando a função $T^*(r,t)$, Baïri et al. (2007) determinaram a difusividade térmica aparente do azeite de oliva e da carne vermelha picada, com uma precisão de aproximadamente 4%. O pequeno erro cometido e a simplificação nos cálculos justificam a aplicação do método em problemas da engenharia e em particular para pesquisas em produtos alimentícios. No entanto, o experimento mostrou que os melhores resultados foram obtidos quando o termopar se encontrava próximo ao eixo do cilindro, entre 35 e 73 °C, com a difusividade térmica da água aumentando com a temperatura média.

Ukrainczyk (2009) estimou a difusividade térmica aparente do glicerol, da areia de ottawa e do agar gel, a partir da solução da equação da condução de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas. Para determinar a difusividade térmica aparente, foi usado um método iterativo baseado na soma da função quadrática com o método de Levenberg-Marquardt com o objetivo de minimização da função objetiva S na solução da equação de condução do calor em uma dimensão. O objetivo de Ukrainczyk (2009) era melhorar o método já existente (MARECHAL, 1973; HANSEN et al., 1982; TAVMAN et al., 1997 e BAÏRI et al., 2007).

A rápida variação da temperatura na fronteira do cilindro, quando o sistema era imerso em banho térmico, mostrou que a condição de contorno do primeiro tipo pode ser aplicada nesse caso. As curvas de temperatura, $T(r=0,t)$, obtidas a partir dos dados experimentais e por simulação, estão em perfeita concordância entre si, o que confirma as hipóteses da pesquisa: transferência de calor por condução unidimensional e que o algoritmo de Levenberg-Marquardt pode ser aplicado para o caso estudado. No resfriamento, de forma semelhante ao primeiro banho térmico, a temperatura da parede do tubo de cobre entrou em equilíbrio térmico quase que instantaneamente e houve

novamente concordância entre a curva obtida através dos dados experimentais e a obtida por simulação computacional.

Betta et al. (2009) desenvolveram um método rápido, confiável e de fácil utilização para estimar a difusividade térmica aparente de vários gêneros alimentícios. O método usado para encontrar a solução da equação de difusão foi o da aproximação pelas diferenças finitas. Esse método discretiza o domínio contínuo, e as variáveis dependentes são consideradas apenas em determinados pontos do domínio. As derivadas são aproximadas por diferenças e a equação diferencial parcial adquire uma representação algébrica. Dessa forma, um problema de cálculo transforma-se num problema algébrico.

Betta et al. (2009) estudaram vários métodos que podem ser usados para resolver a equação de difusão, tais como: o método de Richardson (RICHARDSON, 1910); o método de Crank-Nicolson (CRANK e NICOLSON, 1947) e o método combinado (RICHTMYER e MORTON, 1997).

Em sua pesquisa, Betta et al. (2009) desenvolveram um *software* baseado no método dos mínimos quadrados não-lineares (*NLLS*) e das diferenças finitas para obter a solução da equação de Fourier. Com o propósito de diminuir os erros sistemáticos no posicionamento do termopar que capta os dados da temperatura, foi projetada e desenvolvida uma célula para medir com mais precisão esse posicionamento. Os resultados obtidos pelo novo método foram validados tanto experimentalmente quanto pela comparação com os resultados obtidos por outros três métodos disponíveis. Betta et al. (2009) estimaram as propriedades termo-físicas de vários alimentos, dentre eles, produtos industrializados de tomate, patê de azeitona, massas, creme custard, geleia de damasco e, em todos os casos, o método mostrou-se eficaz.

Foram consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras para construir a modelagem matemática: amostra cilíndrica finita, homogênea e isotrópica; propriedades termo-físicas constantes; geração de calor desprezível dentro da amostra; coeficiente de transferência de calor infinito na superfície e ausência dos fluxos convectivos no interior da amostra. Nessas condições, o fluxo de calor ocorre em duas dimensões: radial e axial.

Betta et al. (2009) concluíram também que os métodos numéricos são os mais indicados para resolver a equação de difusão. Na modelagem matemática, os pesquisadores consideraram, como condição de contorno que a temperatura na superfície do cilindro, T_b , era constante durante todo o banho térmico. No início do processo de pasteurização, a temperatura em todo cilindro era, T_i . A determinação do campo de temperatura foi possível, a partir da solução da equação de difusão em coordenadas cilíndricas. Os resultados obtidos por Betta et al. (2009) foram semelhantes aos encontrados por Choi e Okos (1983a) e Choi e Okos (1983b). A análise estatística não mostrou diferenças significativas nos valores obtidos por outros três métodos (BALL, 1923; FALCONE et al., 1999; RINALDI, 2005).

Jovetta et al. (2011) estudaram a cinética da inativação térmica da *Alicyclobacillus acidoterrestris*, usando-se o modelo do alimento líquido. Devido a sua resistência à pasteurização, a *Alicyclobacillus acidoterrestris* é um importante agente para o controle de qualidade de bebidas ácidas, tais como os sucos de frutas cítricas e para o processo de deterioração alimentar. O processo térmico é o método mais usado para assegurar a segurança alimentar, mesmo quando comparado com os recentes avanços de outras técnicas (GHANI et al., 1999; GHANI et al., 2001; FARID e GHANI, 2004).

A inativação da *Alicyclobacillus acidoterrestris* foi determinada a partir do modelo do alimento líquido. Usou-se o método de três frascos com pescoço cujas cinéticas de redução decimal de primeira ordem foram: $D_{85^{\circ}\text{C}}$, $D_{88^{\circ}\text{C}}$, $D_{92^{\circ}\text{C}}$, $D_{95^{\circ}\text{C}}$ com tempos de 105,4 min; 27,5 min; 7 min e 2,3 min para a constante de resistência térmica de $z = 6,1^{\circ}\text{C}$. Estes resultados foram obtidos para o meio neutro, $\text{pH} = 7$.

2.3 Outros métodos de preservação de alimentos envolvendo transferência de calor

2.3.1 Secagem

A tecnologia de secagem tem aprimorado seus métodos para reduzir a utilização de energia e diminuir o custo operacional. Dentre as técnicas disponíveis para o processo de secagem, podem ser citadas a desidratação osmótica, secagem a vácuo, liofilização, secagem por atomização e secagem com micro-ondas. O uso dessas

técnicas assegura a eficiência da secagem e a qualidade do produto final (SAGAR e SURESH, 2010). Produtos alimentícios desidratados são considerados seguros com relação ao perigo de micro-organismos. Existe uma relação entre a atividade crítica da água (a_w) e o crescimento de micro-organismos. A secagem de alimentos é um dos processos mais usado para melhorar a estabilidade dos alimentos, uma vez que diminui a atividade da água nos produtos, reduz a atividade microbológica, com o mínimo de mudanças químicas e físicas durante o armazenamento (MAYOR et al., 2004).

Bactérias patogênicas não se desenvolvem, se a atividade crítica da água estiver abaixo de 0,85, enquanto leveduras e bolores são mais tolerantes a redução da atividade da água, 0,8. Usualmente nenhum micro-organismo cresce com a_w em torno de 0,62 (SABLANI, 2006).

Silva et al. (2010a) obtiveram uma solução numérica para a equação de difusão com condição de contorno convectiva aplicada a sólidos de revolução usando-se coordenadas generalizadas. O problema da transferência de calor e massa em sólidos foi resolvido usando-se o método dos volumes finitos com coordenadas generalizadas e a formulação completamente implícita. A solução numérica foi acoplada a um otimizador baseado no método inverso e o *software* produzido pôde ser usado para simular a cinética de vários fenômenos físicos, tais como: secagem de banana e arroz, resfriamento de pepino com difusividade variável.

A solução numérica proposta por Silva et al. (2010a) para a equação de difusão, com condição de contorno de terceiro tipo, para sólidos de revolução usando-se malhas estruturadas bidimensionais não-ortogonais, produziu resultados compatíveis com os testes de validação.

Mihoubi et al. (2009) estudaram modelos convectivos de secagem aplicados a fatias de cenoura (*Daucus carota L.*), usando como fonte de calor a radiação infravermelha. O fator de encolhimento das fatias foi determinado experimentalmente e as isotermas de dessecção da cenoura, medidas a 30, 40 e 60 °C. Cenouras frescas têm umidade entre 80 e 90% (PRAKASHA et al., 2004). O modelo Guggenheim-Anderson-deBoer (GAB) fornece a umidade de um corpo a partir da atividade da água e foi usado

para descrever as curvas das isotermas de dessecamento para diferentes temperaturas de secagem.

A partir da equação de difusão, foi desenvolvido um modelo que descrevesse a transferência simultânea de calor e umidade, levando em conta a deformação sofrida pelo corpo como consequência do fenômeno de secagem. O modelo GAB é considerado o mais versátil pois pode ser aplicado em materiais com uma ampla variação da atividade da água, ($0,1 < A_w < 0,9$) (MIHOUBI et al., 2002).

As conclusões que Mihoubi et al. (2009) chegaram foi de que, com as isotermas de dessecamento da cenoura estabelecidas em três temperaturas diferentes, os dados experimentais são adequadamente descritos pelo modelo GAB. Apenas no final da cinética de secagem, foi observado um desvio entre a previsão do modelo e os dados experimentais. Foi também observada uma relação linear para descrever a variação experimental do encolhimento da cenoura *versus* seu teor de umidade.

Ruiz-López e García-Alvarado (2007), investigaram o problema da difusão de massa e calor no processo de secagem, considerando o encolhimento das dimensões do corpo e parâmetros termo-físicos variáveis. Diversos pesquisadores usaram métodos numéricos para encontrar a solução da equação de difusão de calor e massa, para várias geometrias: esferóides prolatos (LIMA, 1999; JIA et al., 2001); paralelepípedos (NASCIMENTO, 2002); esferas e elipsóides (GASTÓN et al., 2002; LI et al., 2004), esferóides oblatos (CARMO e LIMA, 2005) e cilindro infinito (SILVA et al., 2008), havendo ainda propostas para solucionar a equação de difusão usando geometrias arbitrárias (SILVA, 2007 e SILVA et al., 2009d).

Sharma et al. (2005) usaram a radiação infravermelha para secar fatias finas de cebola (*Allium cepa*). A pesquisa foi feita em escala laboratorial, usando um secador infravermelho com potência de 300, 400 e 500 W. Jatos de ar com três velocidades - 1, 1,25 e 1,5 m/s - foram aquecidos usando radiação infravermelha até as temperaturas de 35, 40 e 45 °C. Várias combinações de potência da fonte, velocidade e temperatura do fluxo de ar foram usadas no processo de secagem das fatias de cebola. Foi observado que o tempo de secagem era reduzido em torno de 2,25 vezes quando a potência da fonte de calor era aumentada de 300 para 500 W. Outros pesquisadores já haviam

observado o aumento da taxa de secagem de produtos alimentares com o aumento da potência da fonte infravermelha (MASAMURA et al., 1988; KAZUHIKO e CHUNG 1995). Foram observadas, também, várias vantagens no uso da radiação infravermelha na desidratação de alimentos, como: diminuição do tempo de secagem, menor consumo de energia, uniformidade da temperatura, redução do fluxo de ar e alta qualidade do produto final do processo de secagem (DOSTIE et al., 1989; MONGPRENEET et al., 2002).

A Turquia foi responsável, em 2003, por 1,02% da produção mundial de cenouras (FAO, 2003). Entretanto, após a colheita, 17% da produção apodrece, ficando impróprias para o consumo humano. Refrigeração e armazenamento, controlados ao ar livre, são os métodos mais usados para minimizar a deterioração da cenoura após a colheita (NEGI e ROY, 2000).

Togrul (2006), pesquisador de origem turca, estudou as características da secagem da cenoura, na faixa de temperatura entre 50 e 80 °C. Foram usados cinco modelos empíricos de secagem disponíveis na literatura - Newton, Page Modificado, Logaritmo, Aproximação por Difusão e Midilli – para verificar qual deles melhor se adequaria à secagem de cenouras, usando raios infravermelhos no intervalo de temperatura indicado.

Para obter as características da secagem, as cenouras foram fatiadas com a espessura variando entre 1 a 2 mm e, usando como fonte de calor a radiação infravermelha, foram aquecidas a temperaturas entre 50 e 80 °C. Observou-se que a taxa de secagem quase que dobrou quando a temperatura passou de 50 para 80 °C e que o coeficiente de difusão aparente da cenoura aumentou com o aumento da temperatura. Togrul (2006) concluiu que dos cinco modelos pesquisados, o de Midilli foi o que melhor se adequou à secagem das cenouras nas condições mencionadas.

Sagar e Suresh (2010) publicaram um artigo sobre os recentes avanços no processo de secagem e desidratação de frutas e legumes, dando ênfase à importância que estes vegetais têm na reposição de nutrientes como vitaminas, sais minerais e fibras para o homem. O teor de umidade das frutas frescas chega a 80%, por isto são classificadas como mercadorias altamente perecíveis (ORSAT et al., 2006). Consumi-las frescas é a melhor maneira de aproveitar seus nutrientes. Mas, para isto, é necessário

estocá-las a baixas temperaturas. Outra alternativa viável em países tropicais como a Índia e o Brasil, observaram os pesquisadores, é a desidratação das frutas com o objetivo de aumentar o tempo útil nas prateleiras. É bom observar que apenas de 20% das culturas perecíveis do mundo são desidratadas, para aumentar a vida útil nas prateleiras e promover a segurança alimentar (GRABOWSKI et al., 2003).

Silva et al. (2009b) pesquisaram a influência da geometria na simulação numérica da cinética de secagem de bananas à temperatura constante. Esses pesquisadores supuseram que o modelo da difusão fosse aplicável ao processo de secagem com condição de contorno do primeiro tipo e a difusividade fosse função da umidade local. Escolheram o cilindro infinito, o cilindro finito e o elipsóide como as figuras geométricas mais aproximadas para representar a banana. Não foi considerado a variação de volume do fruto, devido ao processo de perda de umidade, pois o objetivo era comparar os resultados da simulação numérica com os dados de outros trabalhos disponíveis na literatura os quais consideravam o volume do corpo constante.

Das formas geométricas testadas nessa pesquisa, a que apresentou os melhores resultados ao se ajustar a curva simulada aos dados experimentais da cinética de secagem foi o elipsóide. Entretanto o tempo necessário para o processo de otimização era cem vezes maior do que quando se usava a forma geométrica do cilindro infinito para representar a banana.

2.3.2 Cozimento

O objetivo do processo de cocção é produzir as desejáveis qualidades gustativas, além de destruir os agentes patogênicos dos alimentos (FELLOWS, 2000).

Carciofi et al. (2002) utilizaram dois métodos para estimar a difusividade térmica efetiva da mortadela. No primeiro, usaram a fórmula empírica de Ball e Olson (1957) para determinar a difusividade térmica efetiva e estudar alguns aspectos da transferência de calor na mortadela durante o processo de cocção. Verificaram que a difusividade térmica efetiva, α , aumentava duas vezes após a desnaturação das proteínas que ocorre a uma temperatura de aproximadamente 70 °C. No segundo método, utilizaram a equação de difusão.

Para simplificar o problema da transferência de calor, a mortadela foi considerada um cilindro finito de raio R , comprimento $2L$ e difusividade térmica efetiva constante, α . A equação de difusão foi resolvida numericamente pelo método das diferenças finitas, com o eixo do cilindro dividido em vinte intervalos e o raio em dez, com incremento temporal de um segundo. Nesse trabalho, a solução da equação de difusão poderia ter sido obtida pelo método analítico, uma vez que, a difusividade térmica efetiva foi considerada constante e a geometria usada para descrever a mortadela, cilindro finito.

Os resultados mostraram que o modelo parabólico é capaz de descrever a transferência de calor na mortadela, que contradiz os resultados obtidos por Mitra et al. (1995), que mostravam que a transferência de calor na mortadela obedecia ao modelo hiperbólico. Nesse trabalho, o valor de α foi considerado constante na simulação, mas os resultados obtidos pela equação de Ball e Olson (1957) mostram que α é duas vezes maior depois da desnaturação das proteínas da carne.

Marcotte et al. (2008) avaliaram as propriedades termo-físicas de várias emulsões de carne e de produtos avícolas entre 20 e 80 °C. Foi observada nessa pesquisa que a difusividade térmica aparente aumentava linearmente com a temperatura entre 20 e 60 °C, mas, permanecia constante entre 60 e 80 °C, com uma única exceção: a mortadela.

Para avaliar a condutividade térmica de várias amostras de emulsões, usou-se o método da sonda. Este método, que foi desenvolvido por Sweat (1974), consiste em aquecer a amostra por meio de um fio. Marcotte et al. (2008) observaram que a condutividade térmica aumentava com a temperatura; que a capacidade térmica era uma função linear da temperatura e que a densidade variava muito pouco. Dessa forma, Marcotte et al. (2008) concluíram que a difusividade térmica aparente das emulsões de carne e aves variavam com a temperatura, uma vez que, a difusividade térmica aparente está relacionada com as três propriedades termo-físicas citadas: densidade, condutividade e capacidade térmica.

Rinaldi et al. (2011) estimaram experimentalmente os coeficientes aparentes de transferência de massa h_m , e calor h , a difusividade térmica aparente α , e o coeficiente de difusão de massa D , a partir do processo de cozimento da Mortadela, em três

diferentes temperaturas de cozimento: 80, 90 e 100 °C. Estas propriedades termo-físicas foram usadas para desenvolver um modelo matemático para simular a transferência simultânea de calor e massa durante o processo de cozimento. De acordo com as conclusões obtidas por Rinaldi et al. (2010) a difusividade térmica aparente da mortadela está linearmente correlacionada com a temperatura cocção. O método desenvolvido foi validado por meio de testes experimentais, com um erro entre 3,5 e 4%.

2.3.3 Resfriamento

Após a colheita, o tempo de armazenamento das frutas para consumo humano, pode ser aumentada através de alguns mecanismos e, um destes, é o resfriamento do produto. O resfriamento tem várias vantagens, pois conserva as propriedades nutritivas, aumenta o tempo de armazenamento, enquanto reduz a taxa de deterioração das frutas (SILVA et al. 2010b).

A tecnologia de refrigeração tem uma enorme importância econômica, tanto para produtos alimentares não industrializados - frutas, legumes, carne, cereais e oleaginosas – como para os alimentos industrializados (CAMPAÑONE et al., 2002).

Silva et al. (2010b) propuseram uma metodologia para o cálculo do coeficiente de transferência convectiva de calor, h_H , para frutas com a forma esférica, especialmente aplicada ao figo, usando simulação numérica e dados experimentais do resfriamento do referido fruto disponíveis na literatura (DINCER, 1995a). Amendola et al. (2009) calcularam o coeficiente convectivo de transferência de calor do figo, mais especificamente da variedade “Roxo de Valinhos”, usando modelagem matemática e simulação numérica, quando estes eram submetidos ao resfriamento rápido. O resfriamento rápido objetiva a retirada do calor do produto após a colheita, antes que seja armazenado, transportado ou comercializado, e pode ocorrer em tempos razoavelmente curtos (MITCHELL, 2002).

Silva et al. (2011b) pesquisaram a influência da representação geométrica na solução numérica da cinética de resfriamento do pepino, considerando o modelo de difusão, por ser o que melhor se adaptava à propagação do calor no pepino. Admitiram, também, que as propriedades termo-físicas e as dimensões do pepino eram constantes

durante o processo de transferência de calor, o que permitiu a solução da equação de difusão por meios analíticos. A condição de contorno do terceiro tipo foi a que melhor representou a interação do sistema com o meio externo.

Três formas geométricas foram estudadas para representar o pepino na solução da equação de difusão: o cilindro infinito, o finito e o elipsóide. A equação da difusão de calor foi resolvida usando o método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita. Das três formas analisadas para a solução da equação de difusão, a que melhor representou os dados experimentais obtidos por Dincer e Dost (1996) foi a solução da equação usando a geometria do elipsóide. Entretanto, o tempo necessário para sua otimização foi sessenta e seis vezes maior do que o tempo necessário para a solução da equação da difusão de calor usando o cilindro infinito.

Silva et al. (2011c) calcularam o coeficiente de transferência convectiva de calor, h_H , do morango, aproximando sua forma geométrica à da esfera. Dois métodos foram usados nos cálculos para se obter a solução da equação de difusão e o valor da referida grandeza: o analítico e o numérico. Dentre as hipóteses consideradas para se obter a solução analítica da equação de difusão, estavam a de homogeneidade e de isotropia do fruto. Em virtude das hipóteses assumidas para a solução do problema, a transferência de calor por difusão foi considerada apenas na direção radial e, devido à forma geométrica, as coordenadas usadas foram as esféricas. A condição de contorno considerada foi a do terceiro tipo. A solução numérica foi obtida através do método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita com a difusão de calor se processando em uma dimensão. Os métodos analítico e numérico apresentaram resultados bastantes concordantes, pois a diferença entre eles foi inferior a 3%.

Jaramillo-Flores e Hernandez-Sanchez (2000) calcularam a difusividade térmica aparente da polpa de graviola (*Annona muricata*) contida em pequenas latas cilíndricas. Dois tipos de experimentos foram realizados: um com polpas de frutas verdes e o outro com polpas de frutas maduras. Na primeira experiência, a polpa era congelada a $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$ e, em seguida, colocada num banho térmico a $29\text{ }^{\circ}\text{C}$ até que a polpa atingisse a temperatura de $24\text{ }^{\circ}\text{C}$. Na segunda, a polpa, à temperatura ambiente, era colocada num banho térmico a $89\text{ }^{\circ}\text{C}$, até que atingisse a temperatura de $87\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Os resultados obtidos na pesquisa desenvolvida por estes pesquisadores mostraram que a difusividade térmica aparente da polpa de graviola descongelada é dezesseis vezes maior do que a da polpa congelada. No entanto, para temperaturas maiores do que 0 °C, os valores obtidos para a difusividade térmica aparente das polpas de maçã, tangerina e mamão papaia estão de acordo com os resultados encontrados na literatura (BHOWMILK e HAYAKAWA, 1979; RIVERO et al., 1979 e HAYES, 1984). Os pesquisadores não encontraram diferenças nos valores da difusividade térmica aparente para as polpas de frutas maduras e verdes em um nível de significância de 5%.

Mariani et al. (2009) pesquisaram, a partir do problema inverso e dos volumes elementares, a dependência da condutividade térmica aparente do purê de cenoura com a temperatura, durante o processo de congelamento. O comportamento da condutividade térmica aparente do purê de cenoura foi pesquisado num intervalo muito grande de temperatura, de -40 até 40 °C. Verificou-se que a sua condutividade térmica decresce assintoticamente para um valor constante com o aumento da temperatura na região próxima a 0 °C.

2.4 Fenômenos de transporte

Os fenômenos de transporte, encontrados na natureza, são basicamente de três tipos: momento linear, massa e energia.

O transporte de momento linear ocorre em várias situações na natureza. O escoamento de um fluido é um exemplo típico do transporte molecular de momento linear. A lei empírica que descreve esse fenômeno é conhecida como a Lei de Newton do movimento aplicada aos fluidos (BIRD et al., 2002; HAUKE, 2008).

Na osmose há transporte de massa por difusão. Quando duas ou mais substâncias são colocadas em contato, começa um processo difusivo que as tornará homogêneas. As espécies químicas inicialmente mais concentradas em determinadas regiões do sistema deslocam-se para as regiões de menor concentração e vice-versa. O fluxo mássico das substâncias homogeneiza a concentração, cessando o fluxo quando as concentrações se tornarem constantes em todo o sistema, apresentando apenas pequenas flutuações locais

devido ao próprio movimento mássico. O fluxo homogeneizador é um processo irreversível, consequência estatística do movimento aleatório das moléculas do fluido, conhecida como movimento browniano. A difusão mássica entre duas ou mais substâncias em que há diferença de concentração é um processo termodinâmico irreversível. A lei que descreve esse fenômeno é a da difusão de massa (INCROPERA e DeWITT, 1992).

Dos três fenômenos de transporte, a transferência de calor é o principal na pasteurização e, em virtude disto, é necessário descrevê-lo com mais detalhes. Há basicamente três formas de transferência de energia na forma de calor: a condução, a convecção e a radiação.

A radiação é a forma como o calor se propaga quando não há matéria entre a fonte e o receptor. O calor é transportado através do vácuo, na forma de ondas eletromagnéticas com velocidade de propagação igual à da luz. No espectro eletromagnético, o calor corresponde às ondas eletromagnéticas cujos comprimentos são maiores do que os comprimentos do espectro visível e são menores do que os comprimentos das micro-ondas, ($7 \times 10^{-7} < \lambda < 10^{-3}$) m. Essa faixa do espectro eletromagnético é conhecida como região do infravermelho (FEYNMAN et al., 1977; TIPLER, 1995).

A convecção é o tipo de transferência de calor predominante nos fluidos. Dois mecanismos acompanham esse processo. Além da transferência de calor devido ao movimento aleatório das moléculas do fluido como consequência do gradiente de temperatura (difusão), há também, a transferência de calor devido ao movimento coletivo das moléculas, movimento interno do próprio fluido, que constitui a corrente de convecção. Um fluido aquecido localmente, em geral, diminui a sua densidade e, como consequência, tende a subir (INCROPERA e DeWITT, 1992; NUSSENZVEIG, 2002). Por convecção é também a forma através da qual o calor é transferido entre a superfície de um sólido e um fluido adjacente, em movimento, e envolve a combinação dos efeitos de condução e do movimento do fluido (ÇENGEL e GHAJAR, 2000).

O calor pode ainda ser transportado entre dois pontos por advecção. Para que o calor seja transportado por advecção é necessário que o fluido como um todo esteja em movimento. A transferência de calor devido ao deslocamento de ar na atmosfera ou

devido ao movimento das águas de um rio são exemplos de transferência de calor por advecção (INCROPERA e DeWITT, 1992).

A propagação do calor por condução ocorre quando não há movimento macroscópico de matéria no meio. A difusão ou condução térmica é o fenômeno da transferência de calor que ocorre como consequência do gradiente de temperatura, mas sem movimento macroscópico de matéria. Os átomos ou moléculas que se encontram numa região de maior temperatura vibram com mais intensidade do que aqueles que estão na região de menor temperatura. Os átomos e as moléculas que estão vibrando com mais intensidade passam parte da energia vibracional para aqueles que estão com menor energia, aumentando a energia vibracional destes últimos. A hipótese de que “o calor consiste num minúsculo movimento de vibração das partículas dos corpos” foi expressa por Newton em 1704 (NUSSENZVEIG, 2002).

O fenômeno macroscópico observável é um fluxo de calor da região de maior temperatura para aquela de menor temperatura, fazendo com que haja uma elevação da temperatura nessa região até que o equilíbrio térmico seja atingido. É bom salientar que o equilíbrio será atingido se o meio não tiver fonte de calor. A característica do fenômeno da transferência de calor por condução térmica, que foi descrito anteriormente, é a ausência de movimento macroscópico de matéria. Dessa forma, no estado sólido, a transferência de calor no interior do corpo se dá apenas por condução.

2.4.1 Equação de transporte

A equação que descreve o fenômeno de transporte, na sua forma local, é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Na sua forma mais geral, pode ser escrita como (BIRD et al., 2002; MALISKA, 2004):

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\lambda \vec{v} \Phi) = \nabla \cdot (\Gamma^{\Phi} \nabla \Phi) + S^{\Phi}. \quad (2.1)$$

O primeiro termo da Equação (2.1) representa a taxa de variação do produto da grandeza de interesse por um coeficiente de transporte λ , dentro de um volume infinitesimal, no instante t .

O segundo termo do primeiro membro representa o fluxo da grandeza de interesse devido à velocidade do meio. É o termo advectivo. Se o meio onde ocorre o fenômeno de transporte estiver em repouso, com relação ao sistema do observador, então $v = 0$, e não haverá advecção.

O primeiro termo do segundo membro representa a difusão da grandeza em estudo. O fluxo da grandeza representada neste termo da equação é devido ao gradiente de um campo escalar, ou seja, é um fluxo devido a um processo difusivo. Se o transporte for de massa, a causa do transporte difusivo é o gradiente de concentração das substâncias envolvidas. Se o transporte for de energia, caso em estudo, o que provoca este transporte difusivo, ou fluxo de calor, é o gradiente da temperatura, ∇T .

O último termo da equação, que fornece a taxa de geração no volume infinitesimal, é conhecido como termo fonte. Dependendo do sistema, pode ter origem química ou física.

2.5 Equação de difusão

A equação de difusão é um caso particular da equação de transporte, Equação (2.1), quando não há o termo advectivo, ou seja, o meio encontra-se em repouso, $v = 0$. O fenômeno da difusão pode ser tanto de massa quanto de energia e pode ocorrer em uma, duas ou três dimensões. No caso da secagem, a variável de interesse é o teor de umidade, $\Phi = M$, e a causa da difusão de água no interior de um produto está relacionada ao gradiente do teor de umidade.

Quando a difusão for de energia, a grandeza de interesse Φ é a temperatura, $\Phi = T$, e a solução da equação diferencial fornece o campo de temperatura. A lei que rege esse fenômeno é conhecida como Lei de Fourier e estabelece que o fluxo de calor através da matéria é sempre perpendicular às curvas isotérmicas e diretamente proporcional ao negativo do gradiente de temperatura.

Na difusão de massa, a lei que rege o fenômeno é conhecida como Lei de Fick. Essa lei estabelece que o fluxo de matéria é proporcional ao negativo do gradiente de concentração da substância que flui. No âmago destes fenômenos está o incessante movimento vibracional das moléculas e átomos para a difusão de calor nos sólidos e o

movimento browniano para a difusão de substâncias nos fluidos. A equação genérica que descreve a difusão é obtida da equação de transporte, Equação (2.1). Retirando dela o termo que representa a transferência devido ao movimento do fluido no meio, termo advectivo, obtém-se a seguinte forma para a equação de difusão (MALISKA, 2004):

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (\Gamma^\Phi \nabla \Phi) + S^\Phi . \quad (2.2)$$

A Equação (2.2) descreve os fenômenos de transporte de difusão de calor ou massa, que estão presentes nos fenômenos de resfriamento, aquecimento, congelamento, secagem e osmose.

Algumas considerações precisam ser feitas para que a Equação (2.2) corresponda, especificamente, à equação de transporte de calor por difusão, também conhecida como equação da condução de calor. O parâmetro λ assume o valor correspondente ao produto da densidade pelo calor específico à pressão constante da grandeza em estudo, ρc_p . O coeficiente Γ^Φ toma a condição de uma importante propriedade da matéria relacionada com a “facilidade de fluidez do calor”, a condutividade térmica k . A variável genérica Φ , torna-se a temperatura T e $S^\Phi = S$, o termo fonte. Então, pode-se escrever que:

$$\lambda = \rho c_p, \quad \Gamma^\Phi = k, \quad \Phi = T . \quad (2.3)$$

A Equação (2.2), com as modificações introduzidas pelas Equações (2.3), toma a forma:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + S . \quad (2.4)$$

Se a densidade e o calor específico à pressão constante do corpo forem considerados constantes, então o operador derivada temporal atua apenas na temperatura do sistema e a Equação (2.4) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{k}{\rho c_p} \nabla T \right) + S. \quad (2.5)$$

No primeiro termo do segundo membro da Equação (2.5), o operador divergente atua sobre o produto de um escalar, $\frac{k}{\rho c_p}$ pelo campo vetorial gradiente de temperatura, ∇T . O escalar é a difusividade térmica do sistema representada por α , que é igual à razão entre a condutividade térmica do meio e a capacidade que o meio tem de armazenar energia térmica por unidade de volume,

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (2.6)$$

Desta forma, a Equação (2.5) será reescrita do seguinte modo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) + S. \quad (2.7)$$

Se, além da densidade e do calor específico à pressão constante do corpo, a condutividade térmica também for considerada constante, então o operador divergente atuará apenas no gradiente de temperatura do sistema. Neste caso, a Equação (2.7) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla \cdot (\nabla T) + S. \quad (2.8)$$

As Equações (2.5), (2.7) e (2.8) são conhecidas como equação de difusão transiente de calor com termo fonte. A variável dependente é a temperatura e as independentes são o tempo e a posição, enquanto que a grandeza transportada é a energia, na forma de calor.

Levando em conta que o divergente do gradiente é o laplaciano da função escalar, pode-se reescrever a Equação (2.8) como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + S. \quad (2.9)$$

Na Equação (2.9) a taxa de variação da temperatura é igual ao laplaciano da temperatura multiplicada pela difusividade térmica adicionada ao termo fonte. A forma mais simples da equação de difusão corresponde ao estado quando a temperatura em cada ponto do sistema não mais varia com o tempo e onde não haja fonte de energia. Esta forma corresponde ao estado estacionário. Neste caso, a Equação (2.9) assume a forma da equação de Laplace,

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.10)$$

2.6 Soluções da equação de difusão

O objetivo principal, quando se estuda o processo da difusão de calor, é a obtenção do campo de temperatura $T(x, y, z, t)$ do meio, como resultado da solução da equação diferencial que descreve o fenômeno da difusão térmica (MARKOWSKI et al., 2004; BAÏRI et al., 2007; WOODFIELD et al., 2007). Na solução da equação de difusão é necessário conhecer algumas condições físicas que são representadas pelas condições de contorno e pelas condições iniciais em que o sistema se encontra.

Em muitas situações práticas estas condições físicas não são fáceis de ser obtidas. Neste caso, é necessário usar hipóteses simplificadoras para tornar o problema mais simples. A solução da equação da difusão de calor é um problema difícil quando o corpo onde se processa a difusão de calor não tem uma forma geométrica simples como um cilindro, uma esfera ou um paralelepípedo. Uma banana não é exatamente um cilindro, nem uma maçã é exatamente uma esfera. No entanto, pode-se fazer hipóteses para aproximar a forma geométrica do corpo em estudo a uma forma mais simples, como a de um cilindro ou a de uma esfera. Em Silva et al. (2011b), a geometria do pepino foi representada por várias geometrias: cilindro infinito, cilindro finito e elipsóide. Kahveci et al. (2003), para estudarem o modelo da difusão líquida no processo de secagem, aproximaram a forma do arroz com casca à de um cilindro finito. Markowski et al. (2004) aproximaram para um cilindro finito a forma da salsicha durante seu aquecimento e resfriamento.

Entretanto, além dessas, outras hipóteses simplificadoras precisam ser consideradas pois, na natureza, vários processos ocorrem simultaneamente. A transferência de massa acarreta uma variação no volume do corpo. A mudança do volume altera a densidade. A alteração da densidade e, conseqüentemente da estrutura interna, modifica a difusividade térmica que está no âmago do processo de transferência de calor. Neste caso, é possível simplificar o problema supondo-se que a transferência de calor ocorre sem variação de volume, para que a difusividade térmica seja considerada constante para aquela variação de temperatura estudada (CARCIOFI et al., 2002; CARBONERA et al., 2003 e MARKOWSKI et al., 2004). Considerar todas as variáveis interferentes, inviabiliza-se a solução analítica da equação da difusão. Neste caso, o pesquisador lança mão de métodos numéricos para solucionar a equação de difusão e encontrar o campo de temperatura do corpo e suas propriedades termo-físicas (PLAZL et al., 2006).

Em muitos trabalhos de pesquisa, onde um problema específico de transferência de calor é abordado, são encontradas as soluções da equação de difusão tanto usando o método analítico quanto o numérico. Quando, na abordagem de um problema específico de difusão, são usadas várias hipóteses simplificadoras, como as de natureza geométricas referidas anteriormente, a equação de difusão se torna mais simples e a solução analítica pode ser obtida (KAHVECI et al., 2003; GLAVINA et al., 2006; BAÏRI et al., 2007). Outros pesquisadores, entretanto, abordam o problema da difusão do calor a partir de hipóteses que os levam a usar um método numérico para encontrar a solução da equação de difusão. (MIHOUBI et al., 2009 e SILVA et al., 2010a), havendo ainda, por exemplo, aqueles que utilizam os dois métodos como Markowski et al. (2004), com o objetivo de avaliar qual dos dois apresenta o melhor resultado.

Encontram-se, na literatura, diversos livros que apresentam as soluções analíticas da equação de difusão, em vários sistemas de coordenadas, para as mais diversas situações físicas. Dentre os livros disponíveis pode-se citar os de Luikov (1968); Crank (1992); Incropera e DeWitt (1992) e Bird et al. (2002).

2.6.1 Métodos analíticos na solução de problemas difusivos

A equação que descreve o processo de difusão é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que pode representar tanto o transporte de massa como o de energia. Estes processos ocorrem, como já foram mencionados anteriormente, ou devido ao gradiente de concentração de uma substância numa mistura (transporte de massa) ou devido ao gradiente de temperatura num meio estacionário (transferência de calor).

Para geometrias simples, tais como paredes infinitas, esferas e cilindros infinitos, a equação de difusão unidimensional, sem o termo fonte, pode ser escrita na forma (SILVA, et al., 2011b),

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r^q} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^q \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right), \quad (2.11)$$

onde Φ é a variável que caracteriza o fenômeno de transporte, por difusão, podendo ser de massa, de calor ou de momento linear. O expoente define o sistema de coordenadas mais conveniente para o problema. Para uma parede infinita usa-se o sistema de coordenadas cartesianas, $q = 0$; para um cilindro infinito, utilizam-se as coordenadas cilíndricas, $q = 1$ e para uma esfera, as coordenadas mais indicadas são as coordenadas esféricas, onde q assume o valor 2.

É possível, então, escrever a equação de difusão transiente em coordenadas cilíndricas, considerando-se o fenômeno de transporte apenas na direção r e sem o termo fonte,

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right). \quad (2.12)$$

O método analítico é amplamente usado em pesquisas, para determinar tanto a difusividade térmica aparente quando outros parâmetros termo-físicos de gêneros alimentícios.

Kahveci et al. (2003) estudaram a secagem de arroz com casca e desenvolveram um modelo teórico para descrever a cinética de secagem a granel de uma pilha de arroz

com casca usando a solução analítica da equação da difusão. É geralmente aceito que a remoção de umidade num grão de arroz é regido pela equação de difusão transiente baseado na lei de Fick (KAHVECI et al., 2003).

Baïri et al. (2007) determinaram a difusividade térmica aparente do azeite de oliva e da carne vermelha picada, acondicionados em recipientes cilíndricos, usando a solução analítica da equação de Fourier, unidimensional, em coordenadas cilíndricas.

Na colheita, os grãos de arroz apresentam um grande teor de umidade e precisam passar por um processo de secagem para serem armazenados. Os pesquisadores concluíram que a temperatura do fluxo de ar era o principal fator no processo de secagem do arroz com casca e a altura da coluna exercia uma influência secundária neste processo. No entanto, à medida que o ar quente flui sobre as camadas de arroz, sua temperatura diminui, reduzindo a taxa de remoção da umidade.

2.6.2 Métodos numéricos na solução de problemas difusivos

Quando se deseja obter soluções cada vez mais próximas da realidade, nos processos difusivos, não se deve fazer hipóteses simplificadoras relacionadas à geometria do objeto estudado. E, como consequência, a solução analítica, em muitos casos, torna-se inviável. Neste caso, a solução da equação de difusão pode ser obtida por métodos numéricos, sendo ampla sua aplicabilidade. Os métodos numéricos podem ser utilizados em quaisquer situações físicas, desde as mais simples, quando as formas geométricas têm alto grau de simetria, como placas planas, esferas, cilindros infinitos e finitos, até as mais complexas formas geométricas, completamente assimétricas, com volume e difusividade térmica aparente, variáveis, meios heterogêneos e anisotrópicos.

Há, basicamente, três métodos numéricos para resolver uma equação diferencial: a) Método das diferenças finitas; b) Método dos elementos finitos e c) Método dos volumes finitos.

O Método das diferenças finitas é um método para solução de equações diferenciais que se baseia na aproximação das derivadas a partir das diferenças finitas, obtidas usando-se a série de Taylor.

O método dos elementos finitos consiste em dividir o domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos.

O método dos volumes finitos consiste em satisfazer a conservação das propriedades físicas – conservação da massa, do momento linear e da energia – no âmbito dos volumes elementares ou volumes finitos.

A seguir, será feito um breve resumo das pesquisas sobre transferência de calor, que utilizaram métodos numéricos, para obter a solução da equação de difusão, com o objetivo de determinar os parâmetros termo-físicos a que se propunham.

Plazl et al. (2006) empregaram o método numérico das diferenças finitas para resolver a equação da condução de calor em três dimensões com condição inicial e de fronteira variáveis durante a pasteurização de enlatados. Huang (2007) usou o método numérico das diferenças finitas, com a formulação totalmente implícita, desenvolvida por Chandra e Singh (1995), para simular a transferência de calor na pasteurização de pacotes de salsichas tipo *frankfurters*. O sistema de equações obtido foi resolvido numericamente pelo método iterativo de Gauss-Seidel (CHANDRA e SINGH, 1995). Lau e Tang (2002) empregaram a integração numérica para determinar o parâmetro *C-value* que foi usado para determinar o impacto que os dois processos de – pasteurização usando-se micro-ondas de 915 MHz e a pasteurização tradicional – produzem na textura do aspargo.

2.6.3 Formulações para o método numérico

Em geral, é possível estabelecer três formulações, ao se usar o método numérico para resolver a equação de difusão, de acordo com o tempo que é definido para representar a grandeza de interesse, ao se expressar as derivadas espaciais. A Figura 2.1 mostra as três possibilidades de interpolação no tempo, que são representadas pela seguinte expressão (Maliska, 2004):

$$\Phi^\theta = \theta\Phi + (1-\theta)\Phi^0. \quad (2.13)$$

Fazendo-se, $\theta = 0$, na Equação (2.13) se tem a formulação explícita, em destaque na Figura 2.1. Nesta formulação, a variável de interesse para expressar as

derivadas espaciais é avaliada no instante inicial (t) do intervalo de tempo (Δt) e, portanto seu valor já é conhecido ($\Phi = \Phi^0$). Desta forma, a discretização resulta em um conjunto de equações que serão resolvidas uma a uma. Assim, a variável de interesse para cada volume de controle pode ser determinada para um novo nível de tempo ($t + \Delta t$), sem a necessidade de que um novo sistema seja resolvido. Esta formulação tem uma limitação com relação à magnitude do intervalo de tempo que deve ser adotado para avançar no tempo, de forma a manter a estabilidade da solução numérica (SILVA, 2009c).

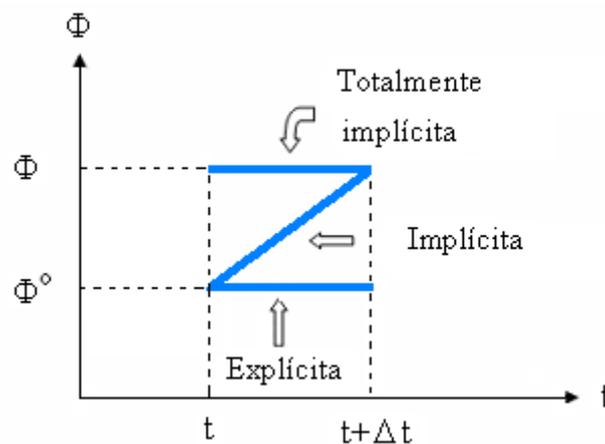


Figura 2.1 - Formulações de interpolação no tempo.

Na formulação totalmente implícita, $\theta = 1$ a variável de interesse é definida, nas derivadas espaciais, no final do intervalo de tempo, no instante ($t + \Delta t$), o que caracteriza o acoplamento das equações. Para cada intervalo de tempo, há um sistema de equações para ser resolvido. A vantagem da formulação totalmente implícita está na sua estabilidade, qualquer que seja o intervalo de tempo estipulado. Desta forma, é possível estabelecer intervalos de tempo cada vez maiores, sem que haja um limite superior. Pela Equação (2.13) observa-se que,

$$\Phi^1 = \Phi \quad (2.14)$$

Na formulação implícita, $0 < \theta < 1$, a variável de interesse Φ que define as derivadas espaciais é uma média ponderada dos valores de Φ no início e no fim do intervalo de tempo. O método mais conhecido na formulação implícita é o de Crank-Nicolson. Esse método consiste em adotar o valor Φ no volume de controle como sendo a média aritmética da variável no início do intervalo de tempo, Φ_p^0 , e no fim Φ_p .

2.7 Sistemas de coordenadas cilíndricas

Nos processos envolvendo transferência de calor ou massa é preciso determinar, em alguns pontos do domínio, grandezas escalares, vetoriais e, em alguns casos, grandezas tensoriais. A localização de um ponto num corpo se dá através de uma tríade num determinado sistema de coordenadas.

O sistema de coordenadas escolhido deve ser o que melhor se ajuste ao problema que se pretende resolver, para que se possa lançar mão das simetrias existentes na geometria do corpo. Infelizmente, o sistema cartesiano, que é o mais simples dos sistemas de coordenadas, em muitas situações práticas não tem estas qualidades. Em virtude disto, as transformadas de coordenadas se tornam uma ferramenta importante na solução de problemas da engenharia. Alguns livros de Física Matemática mostram como passar de um sistema de coordenadas para outro (BUTKOV, 1983; ARFKEN e WEBER, 2005).

Considere um ponto N localizado num corpo de geometria cilíndrica. É possível representá-lo no sistema cartesiano ou no sistema que melhor se adequa à geometria da figura que, neste caso, é o sistema de coordenadas cilíndricas. A partir da Figura 2.2, podem-se visualizar as relações entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas representadas pela tríade (r, θ, z) . As relações entre elas são as seguintes:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (2.15)$$

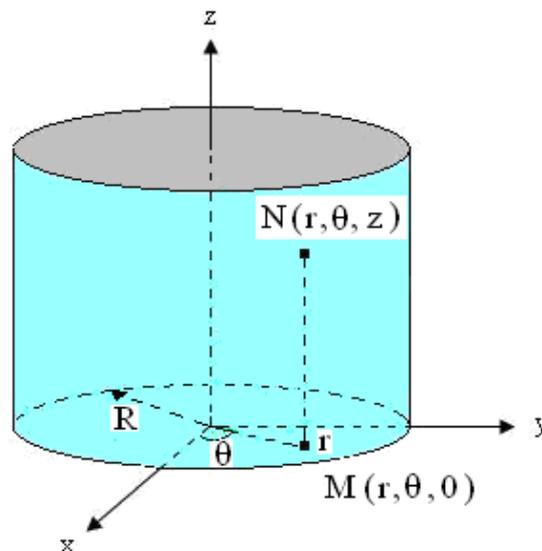


Figura 2.2 - Sistema de coordenadas cartesianas $N(x, y, z)$ e cilíndricas $N(r, \theta, z)$.

2.7.1 Equação de difusão em coordenadas cilíndricas

A equação de difusão em coordenadas cilíndricas, em três dimensões, é dada por:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) + S, \quad (2.16)$$

onde Φ é a grandeza cujo comportamento se deseja obter e pode depender das coordenadas espaciais e da temporal, $\Phi(r, \theta, z, t)$. Os parâmetros λ e Γ^Φ dependem do processo em estudo. A Equação (2.16) representa o processo de difusão tridimensional em coordenadas cilíndricas com termo fonte, representado por S .

CAPÍTULO 3

MATERIAL E MÉTODOS

Neste capítulo, descreve-se os modelos matemáticos necessários para o desenvolvimento das ferramentas que serão utilizadas na otimização e na simulação da transferência de calor, particularmente no processo de pasteurização do purê de tomate, do creme custard e do agar gel, em estado pastoso acondicionados em recipientes cilíndricos. A forma do recipiente define a escolha do sistema de coordenadas usado para descrever o fenômeno da condução de calor: coordenadas cilíndricas.

A condução é a única forma de transferência de calor considerada, pois, no estado pastoso, os efeitos convectivos podem ser desprezados. Nos artigos pesquisados, esse foi o procedimento padrão (BETTA et al., 2009 e UKRAINCZYK 2009).

3.1 Hipóteses para a obtenção da solução analítica da equação de difusão

As hipóteses simplificadoras estabelecidas para a obtenção da solução analítica da equação de difusão de calor, em cilindros infinitos e finitos, foram:

- A massa cilíndrica deve ser considerada homogênea e isotrópica;
- A temperatura do meio permanece constante durante todo o processo de pasteurização;
- As dimensões do recipiente permanecem inalteradas durante o processo difusivo;

- A difusividade térmica efetiva do produto estudado não pode variar durante o processo de transferência de calor;
- A condição de contorno para a solução da equação de difusão é a do primeiro tipo;
- Não há fonte geradora de calor no interior do produto.

3.2 Solução analítica da equação de difusão para um cilindro infinito

Considera-se como cilindro infinito, no processo de transferência de calor, a figura geométrica de forma cilíndrica que troca calor com sua vizinhança em apenas uma dimensão. Por conseguinte, a troca de calor entre o cilindro infinito e o meio que o circunda se dá apenas na direção radial. As trocas de calor que se dão na direção axial, através das bases circulares do cilindro, são desprezíveis. Aplica-se esse modelo quando o raio R do cilindro é muito menor do que seu comprimento L , $L \geq 10R$ (UKRAINCZYK, 2009). Por outro lado se a variação de temperatura não for grande, tanto os parâmetros termo-físicos quanto as dimensões do produto podem ser considerados constantes (MARKOWSKI et al., 2004; GLAVINA et al., 2006; UKRAINCZYK, 2009; MERCALI et al., 2011; SILVA et al., 2011b).

Luikov (1968) apresenta dois métodos para a solução da equação de difusão do calor para um cilindro infinito: o método da separação de variáveis e o método operacional. A solução geral, obtida pelos dois métodos, é uma combinação linear da função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero, $J_0(x)$, com a função de Bessel do segundo tipo e ordem zero, $Y_0(x)$:

$$T(r, t) = MJ_0(\mu_n r) + NY_0(\mu_n r).$$

Entretanto, devido à necessidade de, no eixo do cilindro, a temperatura do corpo em estudo ter um valor finito, descarta-se a parte da solução em que aparece a função de Bessel do segundo tipo e ordem zero, fazendo $N = 0$, pois ela diverge, $Y_0(0) \rightarrow \infty$,

quando $r \rightarrow 0$, não satisfazendo a condição de contorno no eixo do cilindro do problema estudado.

A equação que descreve a difusão de calor por condução, em coordenadas cilíndricas, na direção radial, pode ser obtida a partir da equação de transporte, Equação (2.12), substituindo as grandezas genéricas λ , Φ e Γ^Φ por grandezas termodinâmicas, de acordo com as relações (2.3). Desta forma, obtém-se a equação que representa o fenômeno de transporte de calor na direção radial, sem advecção nem termo fonte:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.1)$$

De acordo com Erdogdu (2008), se os parâmetros termo-físicos puderem ser considerados constantes, o calor específico à pressão constante, c_p , a densidade, ρ , e a condutividade térmica, k , podem ser combinadas para definir um novo parâmetro: a difusividade térmica aparente α . A Equação (3.1) pode, então, assumir a seguinte forma:

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.2)$$

Podendo ser reescrita como,

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.3)$$

O domínio da variável independente, t , são os reais positivos, $t > 0$ e o domínio da variável r representa a distância do eixo do cilindro a um ponto qualquer na direção radial, sendo limitada pelo raio R do cilindro ($0 \leq r \leq R$).

O sistema físico com geometria cilíndrica, para o qual se deseja obter a solução analítica para a equação de difusão, encontra-se, inicialmente, em equilíbrio térmico a uma dada temperatura $T(r,0) = T_0$. Em seguida, o sistema é colocado em banho térmico

à temperatura constante, T_{eq} . A temperatura do banho térmico pode ser maior ou menor do que a temperatura inicial do sistema.

Neste trabalho, considera-se que a temperatura do banho térmico seja maior do que a temperatura inicial do sistema, $T_{eq} > T_0$ e, que a superfície do sistema entre rapidamente em equilíbrio com o banho térmico. Nestas condições, ocorrerá uma transferência de calor da superfície, $r = R$, para o interior do cilindro. O eixo do cilindro será o local onde a curva da temperatura $T(0, t)$ não apresentará inclinação e, neste caso, será um mínimo, $\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$.

Em resumo, procura-se a solução analítica da Equação (3.3) com as seguintes condições:

a) Inicial

$$T(r, 0) = T_0 = \text{constante}; \quad (3.4)$$

b) Contorno externo

$$T(R, t) = T_{eq} = \text{constante}; \quad (3.5)$$

c) Simetria

$$\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (3.6)$$

Luikov (1968) e Crank (1992) apresentam a solução geral para o campo de temperatura $T(r, t)$ para a Equação (3.3), na forma:

$$T(r, t) = T_{eq} - (T_{eq} - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp\left[-\mu_n^2 \left(\frac{\alpha t}{R^2}\right)\right] \quad (3.7)$$

onde,

$$A_n = \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}. \quad (3.8)$$

As raízes μ_n serão obtidas através da equação característica:

$$J_0(\mu_n) = 0. \quad (3.9)$$

3.3 As raízes da função de Bessel e o método da bissecção

Na solução analítica da equação de difusão para o cilindro infinito, as raízes μ_n da Equação (3.9) serão determinadas pelo método da bissecção. Este método determina a raiz de uma equação através de aproximações sucessivas, quando o método analítico se torna muito difícil de ser aplicado. A função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero, de acordo com Arfken e Weber (2005), são obtidas a partir da seguinte série infinita fazendo-se $n = 0$,

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!}. \quad (3.10)$$

A complexidade da função geradora das funções de Bessel inviabiliza a aplicação do método analítico para serem obtidas as raízes da função de Bessel de ordem zero. Em virtude da dificuldade de aplicação do método analítico, as raízes da Equação (3.9) serão obtidas pelo método da bissecção. Este método consiste em: dado um intervalo $[A, B]$, se nele existir somente uma raiz da função, então o produto do valor da função nos extremos do intervalo é um número negativo, $J_0(x_A) * J_0(x_B) < 0$.

Constatada a existência de uma única raiz no intervalo, divide-se o intervalo ao meio, com coordenada x_m , transformando-o em dois, cuja amplitude é a metade do primeiro. A raiz da função deve ser encontrada num dos dois intervalos: ou no primeiro $[A, x_m]$ ou no segundo $[x_m, B]$. O intervalo onde se encontra a raiz da função, mais uma vez, é aquele cujo produto da função nos extremos for menor do que zero. O outro intervalo, onde esta condição não for verificada, será descartado.

Na primeira iteração se reduz a amplitude do intervalo, onde se encontra a raiz, à metade do intervalo inicial. O processo deve ser repetido N vezes. E, após a N -ésima iteração, a amplitude do intervalo encontrado será 2^N vezes menor do que a amplitude do intervalo inicial. Ao final destas iterações, os intervalos estarão tão pequenos, que o módulo da função nos extremos e no ponto médio será praticamente iguais entre si e muito próximo a zero, dentro de certa tolerância, $|J_0(x_A)| \cong |J_0(x_m)| \cong |J_0(x_B)| \cong 0$. Desta forma, determina-se a primeira raiz μ_1 da função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero, que é o valor obtido para x_m . O código B1, em apêndice, mostra como encontrar as raízes de uma equação usando o método da bissecção.

A próxima raiz será determinada deslocando-se o intervalo inicial de um valor próximo ao período da função, que, para grandes raízes, tende para π . O procedimento deverá ser repetido e terá como resultado a segunda raiz, μ_2 , e, sucessivamente serão obtidas as demais raízes da função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero.

O gráfico da Figura 3.1 mostra o comportamento da função de Bessel de primeiro tipo e de ordem zero no intervalo $[0;50]$.

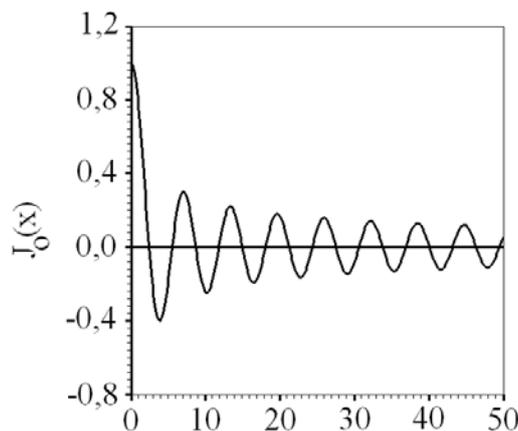


Figura 3.1 - Função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero.

A Figura 3.2 mostra o comportamento da função de Bessel do primeiro tipo e ordem um no mesmo intervalo que foi apresentado pela Figura 3.1.

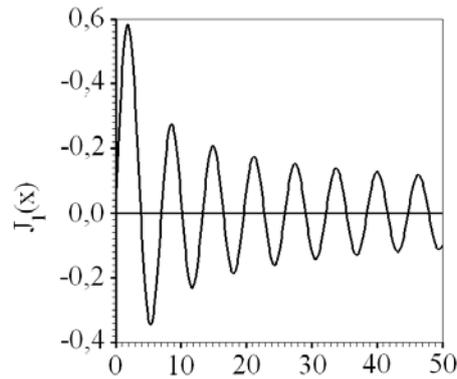


Figura 3.2 - Função de Bessel de primeiro tipo e ordem um.

O número de vezes que o processo se repete pode ser determinado ou pela tolerância ao erro da raiz, ou pelo número das iterações N . Condiciona-se, então, que o processo iterativo deva parar ou quando o erro na obtenção da raiz for menor do que um determinado valor, $|f(x)| < \varepsilon$, ou quando atingir determinado número de iterações N .

Na Tabela 3.1, enumeram-se as sete primeiras raízes da função de Bessel do primeiro tipo, de ordem zero e de ordem um.

Tabela 3.1 - Valores da coordenada x , que são raízes da função de Bessel.

Posição	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$J_0(x)$	2,404826	5,520078	8,653728	11,79153	14,93092	18,07106	21,21164
$J_1(x)$	0	3,830905	7,015674	10,17348	13,32375	16,47058	19,61585

Usando-se o método da bissecção, foi possível determinar duzentas raízes da função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero, que serão usadas para se obter a solução analítica da temperatura tanto no centro do cilindro infinito, $T(0,t)$, quanto em outras posições, $T(r,t)$.

3.4 Solução analítica da equação de difusão para um cilindro finito

O cilindro finito é formado a partir da intersecção de um cilindro infinito com uma parede infinita. As hipóteses simplificadoras estabelecidas anteriormente permitem

uma solução analítica para várias formas geométricas simples, dentre as quais se enquadra o cilindro finito. A seguir, será apresentada a solução analítica da equação da difusão de calor para a geometria do cilindro finito de raio R e comprimento L . Tal geometria está representada na Figura 3.3.

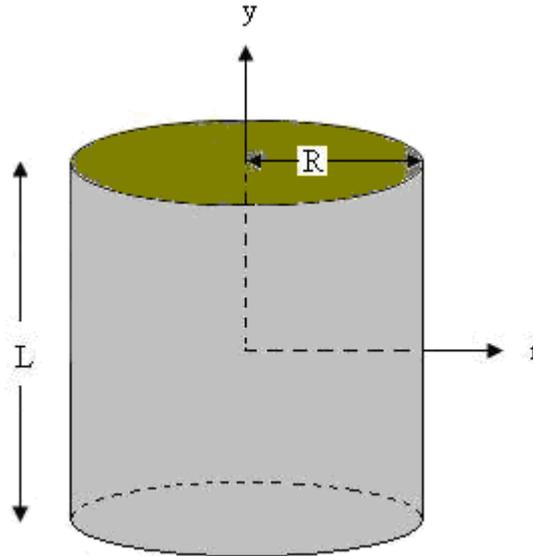


Figura 3.3 - Cilindro finito de raio R e comprimento L .

Para o cilindro finito, não se pode desprezar o processo difusivo na direção axial, pois as áreas circulares, πR^2 , não são desprezíveis quando comparadas com a área lateral do cilindro, $2\pi RL$. Por esta razão, tem-se uma difusão bidimensional de calor: radial e axial. A equação de difusão tridimensional aplicada a um cilindro finito, com o termo fonte, já foi apresentada através da Equação (2.16). Considerando-se agora, que não haja difusão na direção θ , e escrevendo-se a coordenada y em vez da coordenada z , conforme a Figura 3.3, a Equação (2.16) se torna:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma^\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + S. \quad (3.11)$$

Para transformar a equação geral de difusão numa equação da difusão de calor, adota-se o mesmo procedimento utilizado no cilindro infinito. A grandeza Φ é a temperatura, T , a ser determinada; o parâmetro λ é o produto da densidade do sistema pelo calor específico à pressão constante do mesmo, ρc_p , e Γ^Φ é a condutividade térmica, k , do sistema em estudo, como já foi observado pelas Equações (2.3). Desta

forma, transforma-se a equação geral de difusão na equação da condução de calor em duas dimensões,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S. \quad (3.12)$$

Considerando-se as propriedades termo-físicas ρ e c_p constantes e que não haja fonte de calor, a Equação (3.12) pode assumir a seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.13)$$

Caso a difusividade térmica α também possa ser considerada constante, então a Equação (3.13) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.14)$$

O problema que será abordado neste trabalho, transferência de calor através de um corpo cilíndrico imerso num grande recipiente térmico, com a superfície do cilindro atingindo rapidamente em equilíbrio térmico com o meio externo, exige que a condição de contorno seja do primeiro tipo, ou de Dirichlet, onde a grandeza de interesse é conhecida na interface entre o sistema e o meio. Entretanto, primeiro se considera a condição de contorno do terceiro tipo e, a partir da solução apresentada para esta condição mais geral, obtém-se a solução para a condição de contorno do primeiro tipo.

A condição de contorno do terceiro tipo expressa a igualdade entre o fluxo difusivo de calor no interior do corpo e o fluxo convectivo, nas vizinhanças da superfície do corpo. É preciso que, no início, o cilindro com o material a ser pesquisado esteja em equilíbrio térmico, a temperatura T_0 . A partir de um dado instante, o cilindro é colocado num meio onde a temperatura é T_{eq} . Supõe-se que a temperatura do meio seja maior do que a temperatura constante e uniforme do cilindro, $T_{eq} > T_0$.

A equação que descreve o fenômeno da difusão de calor em coordenadas cilíndricas, com parâmetros termo-físicos constantes em duas dimensões, é a Equação (3.14). O campo de temperatura que se pretende obter com a solução da Equação (3.14) tem as seguintes condições:

a) Inicial.

$$T(r, y, 0) = T_0 = \text{constante}, \quad (3.15)$$

b) Contornos externos.

b1) Para a superfície cilíndrica em $r = R$.

$$k \frac{\partial}{\partial r} T(r, y, t) \Big|_{r=R} = h_H \left[T_{eq} - T(r, y, t) \Big|_{r=R} \right], \quad (3.16)$$

onde h_H é o coeficiente de transferência convectiva de calor e k é a condutividade térmica. Dividindo a Equação (3.16) por ρc_p tem-se:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial r} T(r, y, t) \Big|_{r=R} = h \left[T_{eq} - T(r, y, t) \Big|_{r=R} \right], \quad (3.17)$$

onde α é a difusividade térmica aparente e h é o coeficiente de transferência de calor convectivo modificado, $h = \frac{h_H}{\rho c_p}$.

b2) Superfícies circulares em $y = \pm \frac{L}{2}$.

$$k \frac{\partial}{\partial y} T(r, y, t) \Big|_{y=\pm L/2} = h_H \left[T_{eq} - T(r, y, t) \Big|_{y=\pm L/2} \right]. \quad (3.18)$$

Dividindo a Equação (3.18) por ρc_p , pode-se escrever:

$$\alpha \frac{\partial T(r, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm L/2} = h \left[T_{eq} - T(r, y, t) \Big|_{y=\pm L/2} \right], \quad (3.19)$$

c) Simetrias radial e axial.

$$\frac{\partial T(r, y, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial T(r, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.21)$$

Foram especificadas, as condições de contorno do terceiro tipo para um problema da difusão de calor. A solução da Equação (3.14) apresentada por Luikov (1968) para o campo de temperatura $T(r, y, t)$, usando-se o método da separação de variáveis é:

$$T(r, y, t) = T_{eq} - (T_{eq} - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,1} A_{m,2} J_0 \left(\mu_{n,1} \frac{r}{R} \right) \cos \left(\mu_{m,2} \frac{y}{L/2} \right) \times \exp \left[- \left(\frac{\mu_{n,1}^2}{R^2} + \frac{\mu_{m,2}^2}{(L/2)^2} \right) \alpha t \right], \quad (3.22)$$

onde $A_{n,1}$ e $A_{m,2}$ são constantes a serem determinadas pelas seguintes expressões:

$$A_{n,1} = \frac{2Bi_1}{J_0(\mu_{n,1}) [Bi_1^2 + \mu_{n,1}^2]}, \quad (3.23)$$

e

$$A_{m,2} = (-1)^{m+1} \frac{2Bi_2 (Bi_2^2 + \mu_{m,2}^2)^{1/2}}{\mu_{m,2} [Bi_2^2 + Bi_2 + \mu_{m,2}^2]}, \quad (3.24)$$

em que $\mu_{n,1}$ e $\mu_{m,2}$ são as raízes das equações características correspondentes ao cilindro infinito e à parede infinita, respectivamente; Bi_1 é o número de Biot para o cilindro infinito e Bi_2 é o número de Biot para a parede infinita. As raízes $\mu_{n,1}$ são determinadas a partir da equação característica para o cilindro infinito:

$$Bi_1 = \frac{\mu_{n,1} J_1(\mu_{n,1})}{J_0(\mu_{n,1})}. \quad (3.25)$$

Por outro lado, o número de Biot para o cilindro infinito é dado por:

$$Bi_1 = \frac{hR}{\alpha}. \quad (3.26)$$

Para uma parede infinita, a equação característica que possibilita determinar $\mu_{m,2}$ é dada da seguinte forma:

$$Bi_2 \cotan \mu_{m,2} = \mu_{m,2}, \quad (3.27)$$

ou ainda,

$$Bi_2 = \mu_{m,2} \tan \mu_{m,2}, \quad (3.28)$$

em que,

$$Bi_2 = \frac{h(L/2)}{\alpha}. \quad (3.29)$$

Para a condição de contorno do primeiro tipo, a grandeza de interesse é conhecida na superfície do corpo em estudo e tem um valor constante. Em geral, a

interface entre o produto estudado e o meio é um recipiente metálico, bom condutor de calor, o que significa que a superfície do recipiente entra rapidamente em equilíbrio térmico com o meio externo, caracterizando um número de Biot tendendo para o infinito.

A partir da conclusão que o número de Biot é infinito, é possível também inferir, da Equação (3.25) que,

$$J_0(\mu_{n,1}) = 0. \quad (3.30)$$

As conclusões a que se chega, a partir das Equações (3.30) e (3.25), é que o coeficiente $A_{n,1}$ dado pela Equação (3.23) pode ser simplificado para,

$$A_{n,1} = \frac{2}{\mu_{n,1} J_1(\mu_{n,1})}. \quad (3.31)$$

Substituindo o valor de Bi_2 dado pela Equação (3.28) na Equação (3.24), obtém-se:

$$A_{m,2} = (-1)^{m+1} \frac{2}{\left(\frac{\mu_{m,2}}{\text{sen} \mu_{m,2}} + \cos \mu_{m,2} \right)}. \quad (3.32)$$

Como já foi observado, para a condição de contorno do primeiro tipo, o número de Biot tende ao infinito. Então, a partir da Equação (3.28) conclui-se que, $\cos \mu_{m,2} = 0$ e, portanto:

$$\text{sen} \mu_{m,2} = 1. \quad (3.33)$$

A Equação (3.33) é bem mais simples do que a Equação (3.9), e o método da bissecção pode ser dispensado na obtenção dos valores de $\mu_{m,2}$ que tornam a Equação (3.33) verdadeira. Estes valores são: $\mu_{m,2} = (m + \frac{1}{2})\pi$, sendo m um número inteiro. Então, os coeficientes $A_{m,2}$, dados pela Equação (3.32), podem ser escritos numa forma mais simples,

$$A_{m,2} = (-1)^{m+1} \frac{2}{\mu_{m,2}}. \quad (3.34)$$

Obtidos os valores de $A_{n,1}$ e $A_{m,2}$, pode-se escrever o campo de temperatura para a condição de contorno do primeiro tipo,

$$T(r, y, t) = T_{eq} - (T_{eq} - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_{n,1} J_1(\mu_{n,1})} (-1)^{m+1} \frac{2}{\mu_{m,2}} J_0\left(\mu_{n,1} \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_{m,2} \frac{y}{L/2}\right) \exp\left[-\left(\frac{\mu_{n,1}^2}{R^2} + \frac{\mu_{m,2}^2}{(L/2)^2}\right) \alpha t\right]. \quad (3.35)$$

3.5 Hipóteses para a solução numérica da equação de difusão: geometria cilíndrica

O modelo matemático usado na solução numérica da equação de difusão para descrever a condução de calor no interior de gêneros alimentícios em forma cilíndrica, tem com base as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Parâmetros termo-físicos h e Γ^Φ constantes ou variáveis;
- O produto é considerado homogêneo e isotrópico;
- A distribuição de temperatura no produto é inicialmente uniforme e permanece simétrica em relação ao eixo de revolução;
- Durante o processo não há mudança de fase do produto;
- Ausência de fluxos convectivos dentro da amostra. A condução é o único processo de transferência de calor no sistema em estudo;
- A condição de contorno é do primeiro tipo;
- A geração de calor é desprezível durante o processo.

3.6 Solução numérica da equação de difusão: geometria cilíndrica

A equação de difusão para o cilindro foi resolvida através do método numérico dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita. Esta formulação foi escolhida porque a solução obtida é incondicionalmente estável para qualquer intervalo de tempo. O método numérico dos volumes finitos e suas formulações podem ser encontrados em Patankar (1980) e Maliska (2004).

Na Figura 3.4, são apresentados: (a) o cilindro finito; (b) uma fatia simétrica deste cilindro, na qual os volumes de controle serão definidos e (c) o retângulo onde serão definidos os elementos da malha.

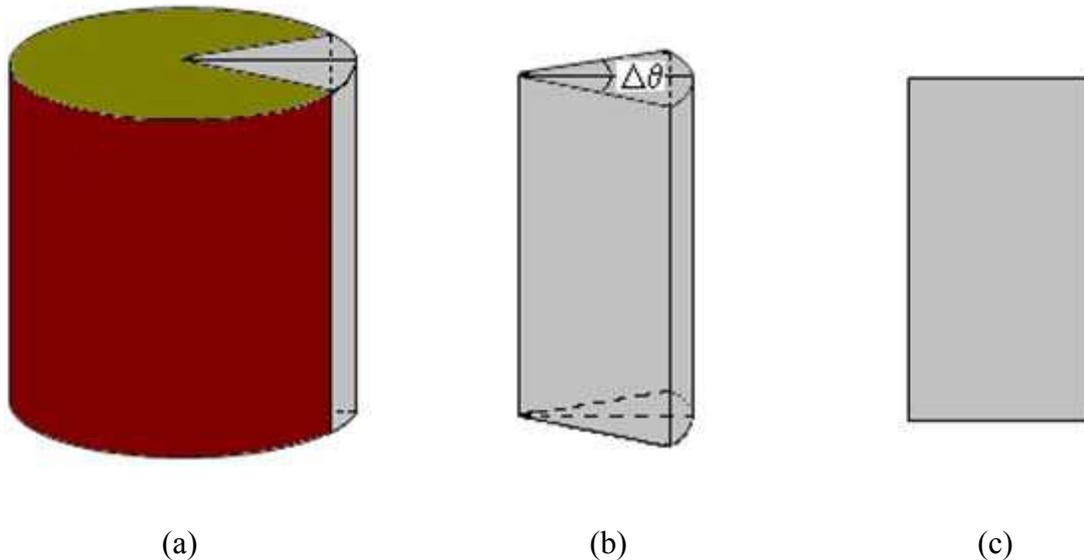


Figura 3.4 - (a) Cilindro finito e uma fatia simétrica; (b) Fatia simétrica do cilindro definida pelo ângulo $\Delta\theta$; (c) Retângulo onde serão definidos os volumes de controle.

Devido à simetria radial, estuda-se apenas a fatia ilustrada na Figura 3.4(b), ao resolver a equação de difusão. Assim, no retângulo da Figura 3.4(c), pode ser criada uma malha bidimensional, conforme é mostrado na Figura 3.5(a). A Figura 3.5(b) destaca um elemento retangular da malha. A partir desta malha bidimensional, pode-se expressar o volume de cada elemento da malha: $r_p \Delta\theta \Delta r \Delta y$, onde r_p define a posição do ponto nodal do elemento da malha com relação ao eixo y do cilindro.

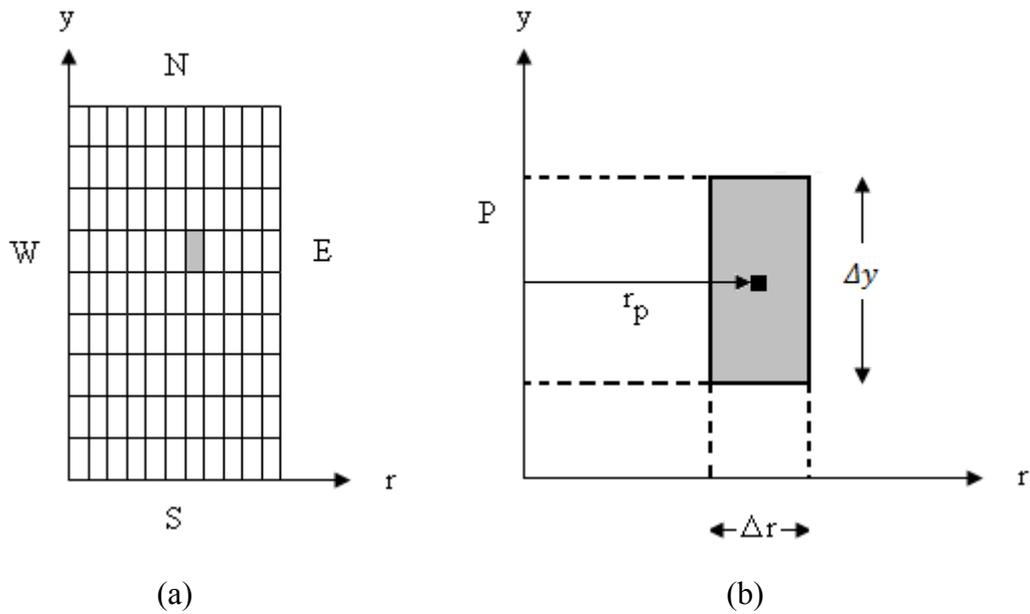


Figura 3.5 - (a) Malha bidimensional para a solução numérica da equação de difusão no cilindro; (b) destaque de um volume de controle.

Do que foi estabelecido, um volume de controle para cada elemento da malha bidimensional tem o aspecto cilíndrico, devido à própria geometria do objeto em estudo. A Figura 3.6 mostra o volume de controle, em coordenada cilíndrica, a uma distância r do eixo do cilindro, com espessura radial Δr , altura Δy e largura interna $r\Delta\theta$.

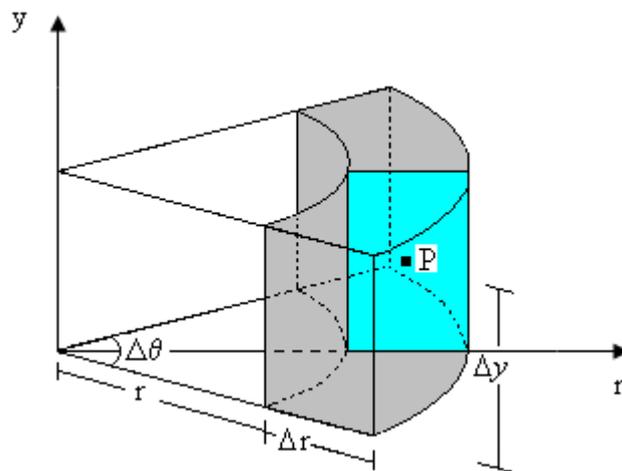


Figura 3.6 - Volume de controle para geometria cilíndrica.

Da Figura 3.6, verifica-se que no domínio bidimensional foi criada uma malha uniforme cujos lados dos elementos retangulares são dados por Δr e Δy . Existe, na malha, nove tipos distintos de volumes de controle, como mostra a Figura 3.7.

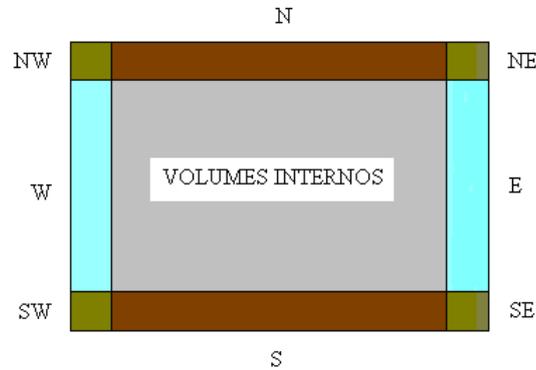


Figura 3.7 - Tipos de volumes de controle.

Tais volumes são: os que não têm limites com o meio externo, chamados de volumes internos. Todos os seus vizinhos são outros volumes de controle. Há os que têm apenas uma fronteira com o meio externo. Nesta condição, há os seguintes volumes de controle: os volumes da fronteira sul, “S”, limitam-se ao sul com o meio externo. O mesmo ocorre para os volumes da fronteira leste, “E”, da norte, “N”, e da oeste, “W”. Há também os volumes que têm duas fronteiras se limitando com o meio externo, que são: os que se limitam a sul e a leste; a norte e a leste; a norte e a oeste e, por fim, a sul e a oeste. Estes volumes de controle serão representados, respectivamente, pelas letras: sudeste, “SE”, nordeste, “NE”, noroeste, “NW”, e sudoeste, “SW”, como mostra a Figura 3.7.

Usando-se o método dos volumes finitos, com uma formulação totalmente implícita, pode-se expressar a integral da Equação (3.11) no espaço ($r_p \Delta \theta \Delta r \Delta y$) e no tempo (Δt). Assim, obtém-se o seguinte resultado para o volume de controle P:

$$\frac{\lambda_p \Phi_P - \lambda_p^0 \Phi_P^0}{\Delta t} r_p \Delta r \Delta y = \left(r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_e - r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_w \right) \Delta y + \left(\Gamma_n^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_n - \Gamma_s^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_s \right) r_p \Delta r +$$

$$\left(S_c + S_p \Phi_P \right) r_p \Delta r \Delta y. \tag{3.36}$$

Na Equação (3.36), o sobrescrito zero significa que o termo deve ser avaliado no tempo anterior (t) ao tempo de interesse, enquanto os termos sem sobrescrito são avaliados no tempo de interesse ($t + \Delta t$). Os subscritos “e”, “w”, “s” e “n” significam, respectivamente, as interfaces leste, oeste, sul e norte de um volume de controle considerado, enquanto que P é o ponto nodal deste volume. Na Equação (3.36), observa-se que o termo fonte foi escrito na forma linearizada.

3.6.1 Discretização para volumes internos

Os volumes internos não fazem fronteira com o meio externo, todos os seus vizinhos pertencem ao sistema em estudo. Na Figura 3.8, foi destacado um volume de controle P e seus quatro vizinhos numa malha bidimensional retangular.

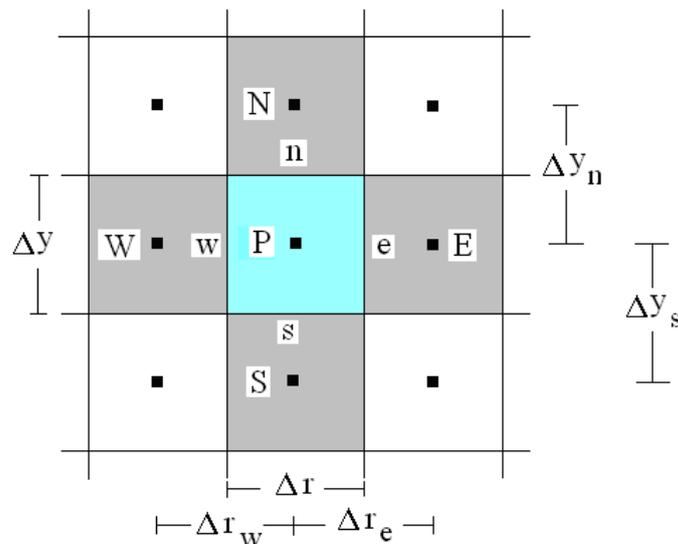


Figura 3.8 - Volume de controle P e seus vizinhos ao norte (N), ao sul (S), a leste (E) e a oeste (W).

Da Figura 3.8, pode-se expressar as derivadas que se encontram na Equação (3.36) nas interfaces entre o volume de controle P e seus vizinhos (Silva, 2009c). Para a interface “e”, determina-se a razão da variação da grandeza de interesse em E e P pela distância entre os dois pontos nodais:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_e \cong \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta r_e}. \quad (3.37)$$

De forma semelhante, obtêm-se as derivadas da grandeza de interesse nas interfaces “w”, “n” e “s”:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_w \cong \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta r_w}, \quad (3.38)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_n \cong \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y_n}, \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_s \cong \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y_s}. \quad (3.40)$$

Substituindo as Equações (3.37) a (3.40) na Equação (3.36) e considerando-se a uniformidade da malha, $\Delta r_w = \Delta r_e = \Delta r$ e $\Delta y_n = \Delta y_s = \Delta y$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P - \lambda_p^0 \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 = & \left[r_e \Gamma_e^\Phi \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta r} \right) - r_w \Gamma_w^\Phi \left(\frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta r} \right) \right] \Delta y \\ + & \left[\Gamma_n^\Phi \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta y} \right) - \Gamma_s^\Phi \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta y} \right) \right] r_p \Delta r + (S_c + S_p \Phi_P) r_p \Delta r \Delta y. \end{aligned} \quad (3.41)$$

O termo $\Gamma_e^\Phi \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta r} \right)$ corresponde a magnitude do fluxo da grandeza de interesse na forma discretizada na fronteira “e”, os demais termos semelhantes, corresponde ao fluxo da grandeza de interesse nas demais fronteiras do volume de controle.

A Equação (3.41) corresponde à discretização da equação de difusão para os volumes internos. A partir desta equação, pode-se escrever a seguinte equação algébrica para um volume de controle interno:

$$A_p \Phi_P = A_e \Phi_E + A_w \Phi_W + A_n \Phi_N + A_s \Phi_S + B, \quad (3.42)$$

Onde:

$$A_p = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y, \quad (3.43)$$

$$A_e = r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r}, \quad (3.44)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r}, \quad (3.45)$$

$$A_n = r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y}, \quad (3.46)$$

$$A_s = r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y}, \quad (3.47)$$

$$B = \lambda_p^0 \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 + S_c r_p \Delta r \Delta y. \quad (3.48)$$

Os coeficientes da Equação (3.42) são representados pelas expressões de (3.43) a (3.48) e correspondem à descrição do fenômeno da transferência de calor entre o volume de controle interno P, mostrado na Figura 3.8, e seus vizinhos a leste, a oeste, a norte e a sul.

3.6.2 Volume de controle no contorno leste

Na fronteira leste, os volumes de controle estão em contato com os vizinhos a norte, a sul e a oeste e com o meio externo (a leste), como pode ser visto na Figura 3.9.

Devido a esta nova condição, o valor da derivada na fronteira leste “e” sofre uma pequena modificação devido a falta de um volume de controle a leste e, consequentemente do valor da grandeza de interesse no ponto nodal, Φ_E .

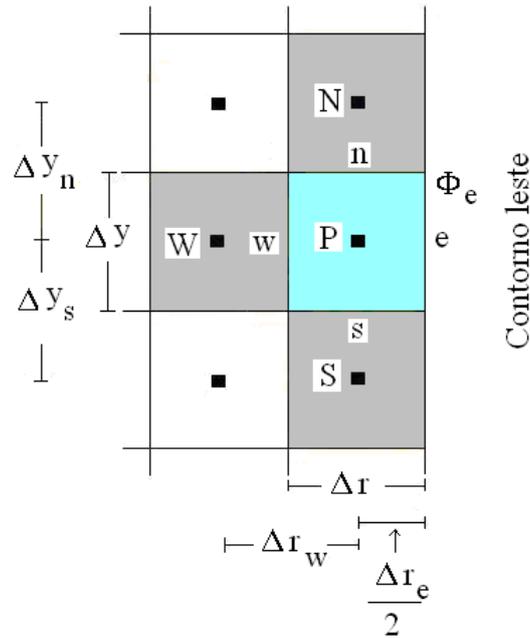


Figura 3.9 - Volume de controle no contorno leste.

Neste caso, toma-se o valor da grandeza de interesse na interface leste, Φ_e , do volume de controle P,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_e \cong \frac{\Phi_e - \Phi_P}{\Delta r_e / 2}, \quad (3.49)$$

sendo a única derivada que sofre modificação quando comparada com as derivadas obtidas para os volumes internos.

Uma equação algébrica semelhante a que foi obtida para o volume interno, Equação (3.42), pode ser determinada para cada um dos oito tipos de volumes de controle restantes. Para o volume de controle P, que está limitado a leste com o meio externo, a Equação (3.50) expressa a transferência de calor entre o volume P e seus vizinhos a oeste, a norte, a sul e com o meio externo a leste:

$$A_p \Phi_P = A_w \Phi_W + A_n \Phi_N + A_s \Phi_S + B, \quad (3.50)$$

onde,

$$A_p = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + 2r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y, \quad (3.51)$$

O volume de controle do contorno nordeste tem duas de suas fronteiras, a norte e a leste, se limitando com o meio externo. Por esta razão, uma modificação semelhante àquela aplicada a derivada da fronteira leste “e”, na seção 3.32, Equação (3.49), é aplicada a fronteira norte “n”,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_n \cong \frac{\Phi_n - \Phi_P}{\Delta y_n / 2}. \quad (3.56)$$

A Equação (3.57) representa a equação de difusão discretizada para o volume de controle que se limita pelo contorno leste e pelo contorno norte com o meio exterior,

$$A_p \Phi_P = A_w \Phi_w + A_s \Phi_s + B, \quad (3.57)$$

onde:

$$A_p = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + 2r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + 2r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y, \quad (3.58)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r}, \quad (3.59)$$

$$A_s = r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y}, \quad (3.60)$$

$$B = \lambda_p^0 \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 + 2r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} \Phi_n + 2r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \Phi_e + S_c r_p \Delta r \Delta y. \quad (3.61)$$

Note que os coeficientes A_w e A_s , das variáveis de interesse na fronteira nordeste com o meio externo, têm as mesmas expressões daqueles obtidos para os volumes internos.

3.6.4 Simetria axial e o volume de controle no contorno oeste

O fluxo da grandeza de interesse no eixo central do cilindro corresponde ao fluxo na fronteira “w” do volume de controle P, da Figura 3.11. O eixo do cilindro é o

local onde a grandeza de interesse ou é máxima ou é mínima, e nestes casos, a derivada espacial em qualquer ponto do eixo é zero,

$$r_w \Gamma_w^\Phi \left(\frac{\Phi_P - \Phi_w}{\Delta r_w / 2} \right) \Delta y = 0.$$

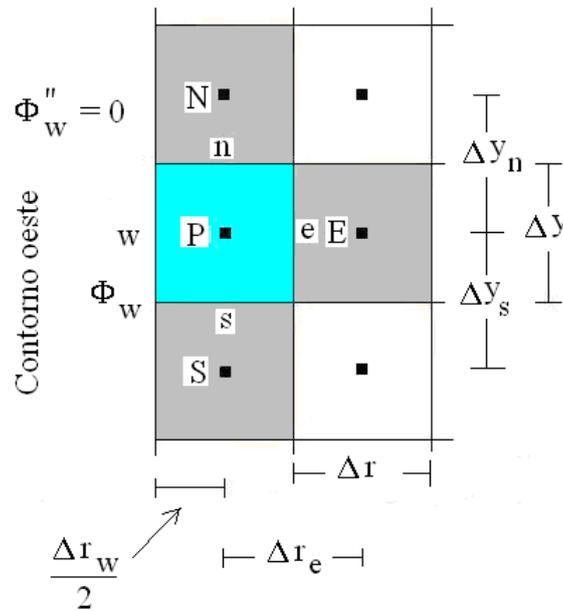


Figura 3.11 - Volume de controle no contorno oeste.

A equação de difusão discretizada para o volume de controle a oeste, como mostrado na Figura 3.11, tem a seguinte expressão:

$$A_p \Phi_P = A_e \Phi_E + A_n \Phi_N + A_s \Phi_S + B, \tag{3.62}$$

onde

$$A_p = \lambda_p \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} + r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + r_p \Gamma_s^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} - S_p r_p \Delta r \Delta y, \tag{3.63}$$

$$A_e = r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r}, \tag{3.64}$$

$$A_n = r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y}, \tag{3.65}$$

$$A_s = r_p \Gamma_s^\phi \frac{\Delta r}{\Delta y}, \tag{3.66}$$

$$B = \lambda_p^0 \frac{r_p \Delta r \Delta y}{\Delta t} \Phi_p^0 + S_c r_p \Delta r \Delta y. \tag{3.67}$$

A condição de contorno onde não há fluxo da grandeza de interesse é útil para explorar as possíveis simplificações causadas pela simetria do problema. Este recurso diminui o tempo computacional exigido para a solução numérica da equação de difusão.

3.6.5 Simetria radial

Além da simetria axial, há também simetria radial, e devido a este fato, é preciso resolver a equação de difusão apenas para uma metade simétrica da malha, conforme é mostrado na Figura 3.12.

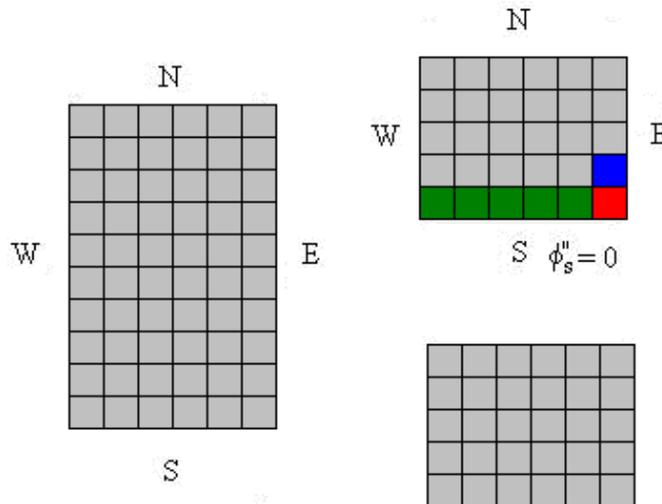


Figura 3.12 - Simetria radial: solução para a metade da malha.

Devido à simetria radial, impõe-se a condição de fluxo zero para o contorno sul da metade superior destacada na Figura 3.12 com a cor verde. O fluxo no volume de controle P, cor vermelha, é diferente de zero devido a fronteira leste,

$$A_p \Phi_p = A_w \Phi_w + A_n \Phi_n + B \tag{3.68}$$

onde,

$$A_p = \lambda_p r_p \Delta r \frac{\Delta y}{\Delta t} + r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} + r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y} + 2r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} - S_p r_p \Delta r \Delta y, \quad (3.69)$$

$$A_n = r_p \Gamma_n^\Phi \frac{\Delta r}{\Delta y}, \quad (3.70)$$

$$A_w = r_w \Gamma_w^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r}, \quad (3.71)$$

$$B = \lambda_p^0 r_p \Delta r \frac{\Delta y}{\Delta t} \Phi_P^0 + 2r_e \Gamma_e^\Phi \frac{\Delta y}{\Delta r} \Phi_e + S_c r_p \Delta r \Delta y. \quad (3.72)$$

Quando todas as equações forem estabelecidas, se obtém um sistema com nove equações algébricas, na variável, Φ , que será resolvido pelo método de Gauss-Seidel.

3.6.6 Coeficiente de transporte Γ^Φ

Se o coeficiente de transporte, Γ^Φ , for variável, a média harmônica deve ser utilizada para fazer uma estimativa de seu valor nas interfaces de cada volume de controle (PATANKAR, 1980).

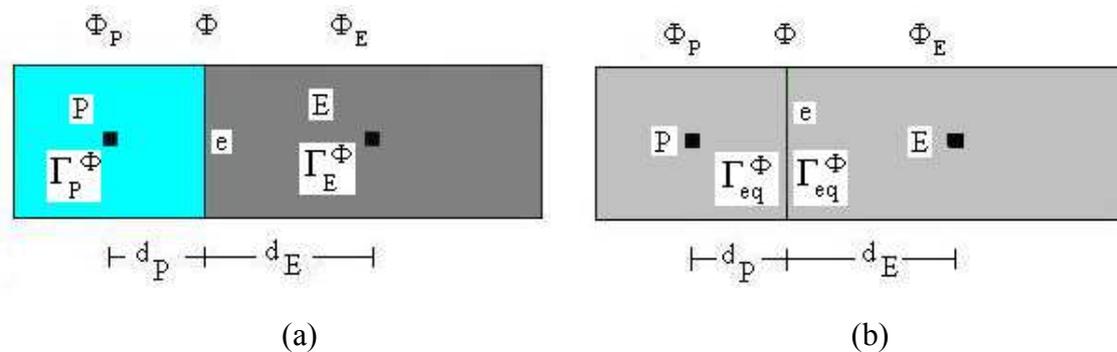


Figura 3.13 - Coeficiente de transporte: (a) nos pontos nodais e (b) na interface do volume de controle.

A magnitude do coeficiente de transporte na interface “e” entre os pontos nodais do volume de controle “P” e de seu vizinho “E” a leste, Γ_e^Φ , de acordo com Silva et al. (2010a), pode ser determinado pela expressão:

$$\Gamma_e^\Phi = \frac{\Gamma_P^\Phi \Gamma_E^\Phi}{f_d \Gamma_E^\Phi + (1 - f_d) \Gamma_P^\Phi}, \quad (3.73)$$

onde,

$$f_d = \frac{d_P}{d_P + d_E}, \quad (3.74)$$

onde d_P e d_E são as distâncias da interface “e” para o ponto nodal “P” e “E”, respectivamente. Em um ponto nodal, Γ^Φ deverá ser calculado por uma função apropriada, a qual relaciona o parâmetro com o valor de Φ . Para uma malha uniforme, $d_P = d_E$, então f_d assume o valor $\frac{1}{2}$. Substituindo-se o valor de f_d na Equação (3.73), a expressão para Γ_e^Φ na interface, a partir de seu valor nos pontos nodais, torna-se mais simples:

$$\Gamma_e^\Phi = \frac{2\Gamma_P^\Phi \Gamma_E^\Phi}{\Gamma_E^\Phi + \Gamma_P^\Phi} \quad (3.75)$$

3.7 Simplificação das soluções analíticas

3.7.1 Solução analítica unidimensional

Nos processos de transferência do calor num sistema cilíndrico considerado infinito, é possível se determinar a difusividade térmica aparente a partir da simplificação da Equação (3.7). De acordo com Markowski et al. (2004), Glavina et al. (2006), Mercali et al. (2011), para números de Fourier maiores do que 0,2 a Equação (3.7) pode ser escrita com apenas o primeiro termo da série:

$$T(r, t) = T_{eq} + (T_0 - T_{eq}) A_1 J_0(\mu_1 r / R) \exp(-\mu_1^2 \frac{\alpha}{R^2} t). \quad (3.76)$$

Na equação (3.76), a raiz μ_1 e o coeficiente A_1 são determinados pelas Equações (3.8) e (3.9) respectivamente. Para um dado raio R e uma posição do termopar r , o termo $J_0(\mu_1 r / R)$ é também conhecido. Então, para uma dada temperatura inicial T_0 , de equilíbrio T_{eq} e um conjunto de dados experimentais (t, T_{exp}) para a posição r , a difusividade térmica aparente pode ser determinada. A Equação (3.76) pode ser escrita como:

$$T(r, t) = T_{eq} + (T_0 - T_{eq}) A_1 J_0(\mu_1 r / R) \exp(-At), \quad (3.77)$$

onde,

$$A = \frac{\mu_1^2}{R^2} \alpha. \quad (3.78)$$

Os valores da função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero, $J_0(\mu_1 r / R)$, para várias posições r , são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Valores da função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero.

Posição	$r = 0$	$r = 0,25R$	$r = 0,5R$	$r = 0,75R$	$r = 0,9R$
$J_0(\mu_1 r / R)$	1	0,9116586	0,6699296	0,3378816	0,1302737

3.7.2 Solução analítica bidimensional

De forma semelhante ao procedimento da secção (3.7.1), quando o cilindro for considerado finito, determina-se a difusividade térmica, considerando-se apenas o primeiro termo da Equação (3.22):

$$T(r, y, t) = T_{eq} + (T_0 - T_{eq}) A_{1,1} A_{1,2} J_0\left(\mu_{1,1} \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_{1,2} \frac{y}{L/2}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{\mu_{1,1}^2}{R^2} + \frac{\mu_{1,2}^2}{(L/2)^2}\right) \alpha t\right] \quad (3.79)$$

Representando-se o coeficiente da variável t pela constante C , a Equação (3.79) será reescrita como:

$$T(r, y, t) = T_{eq} + (T_0 - T_{eq}) A_{1,1} A_{1,2} J_0 \left(\mu_{1,1} \frac{r}{R} \right) \cos \left(\mu_{1,2} \frac{y}{L/2} \right) \times \exp[-Ct], \quad (3.80)$$

onde,

$$C = \left(\frac{\mu_{1,1}^2}{R^2} + \frac{\mu_{1,2}^2}{(L/2)^2} \right) \alpha. \quad (3.81)$$

Na Equação (3.79), o coeficiente $A_{1,1}$ é determinado pela Equação (3.31), fazendo-se $n = 1$; a raiz $\mu_{1,1} = 2,404826$ encontra-se na Tabela 3.1 e foi determinada pela Equação (3.9). O coeficiente $A_{1,2}$ é obtido pela Equação (3.34), fazendo-se $m = 1$, onde $\mu_{1,2}$ é a primeira raiz da função cosseno, $\mu_{1,2} = 1,5707963$, R é o raio do cilindro finito e L é seu comprimento. Determinados os valores para o parâmetro C , por regressão não-linear, obtêm-se os valores das difusividades térmicas para o cilindro finito.

O melhor valor para o parâmetro C será determinado usando-se o algoritmo proposto, como será mostrado na seção de otimizações. Obtido o melhor valor para o parâmetro C , será também obtido o melhor valor para a difusividade térmica aparente α para o cilindro finito, e, conseqüentemente, a função analítica $T(r, y, t)$ que melhor representa o conjunto de pontos experimentais.

3.7.3 Temperatura adimensional

Em muitas situações práticas, é melhor fazer a normalização da variação da temperatura, tornando-a adimensional. A equação da temperatura adimensional, em um processo de aquecimento para o cilindro infinito, é expressa como,

$$T^*(r, t) = 1 - \frac{T(r, t) - T_{eq}}{T_0 - T_{eq}}, \quad (3.82)$$

ou, para o cilindro finito,

$$T^*(r, y, t) = 1 - \frac{T(r, y, t) - T_{eq}}{T_0 - T_{eq}}. \quad (3.83)$$

Para o resfriamento do cilindro infinito, as normalizações apropriadas são:

$$T^*(r, t) = \frac{T(r, t) - T_{eq}}{T_0 - T_{eq}}, \quad (3.84)$$

e para o cilindro finito, será expressa como:

$$T^*(r, y, t) = \frac{T(r, y, t) - T_{eq}}{T_0 - T_{eq}}. \quad (3.85)$$

A equação (3.7) expressa a solução geral para o campo de temperatura de um sistema cilíndrico, com difusão de calor unidimensional. Esta solução pode ser reorganizada, usando-se a Equação (3.82) para expressar a temperatura em um aquecimento, na forma adimensional como:

$$T^*(r, t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp(-At), \quad (3.86)$$

onde o parâmetro A é dado pela Equação (3.78). Para o caso bidimensional, a solução geral é dada pela Equação (3.22) e, na forma da temperatura adimensional corresponde à expressão:

$$T^*(r, y, t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,1} A_{m,2} J_0\left(\mu_{n,1} \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_{m,2} \frac{y}{(L/2)^2}\right) \exp(-Ct), \quad (3.87)$$

com o parâmetro C dado pela Equação (3.81).

A Equação (3.86) é solução geral para a difusão de calor unidimensional. Escrita apenas com o primeiro termo da série, corresponde a:

$$T^*(r, t) = 1 - A_1 J_0\left(\mu_1 \frac{r}{R}\right) \exp(-At). \quad (3.88)$$

Para o caso bidimensional, a solução geral apenas com o primeiro termo, corresponde a:

$$T^*(r, y, t) = 1 - A_{1,1} A_{1,2} J_0\left(\mu_{1,1} \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_{1,2} \frac{y}{(L/2)^2}\right) \exp(-Ct), \quad (3.89)$$

onde $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$ são dadas respectivamente pelas Equações (3.31) e (3.34). As raízes $\mu_{1,1}$ e $\mu_{1,2}$ são obtidas respectivamente pelas Equações (3.30) e (3.33), pressupondo $n = m = 1$.

Neste trabalho, os dados de validação obtidos por simulação numérica, estão na forma adimensional por isto, as funções temperaturas adimensionais estão representadas pelas Equações (3.82), (3.83), (3.86), (3.87), (3.88) e (3.89), e serão usadas com o objetivo de validar os resultados obtidos com o algoritmo proposto na determinação da difusividade térmica.

3.8 Otimizações

Para fins de otimização, será usado o qui-quadrado para minimizar a dispersão entre os dados experimentais da grandeza de interesse Φ_i^{exp} , com os valores da mesma grandeza obtidos por simulação Φ_i^{sim} :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \left(\Phi_i^{\text{exp}} - \Phi_i^{\text{sim}}\right)^2 \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (3.90)$$

onde, Φ_i^{exp} é o valor experimental da variável Φ medido no ponto “i” e Φ_i^{sim} é o valor obtido por simulação da mesma variável Φ no mesmo ponto. N_p é o número de pontos experimentais e $1/\sigma_i^2$ é o peso estatístico do ponto “i”. Se, por exemplo, os pesos estatísticos não forem medidos no experimento, todos deverão ter o mesmo peso, por exemplo, 1. Pela Equação (3.90) observa-se que o qui-quadrado depende de Φ_i^{sim} , que depende do parâmetro Γ^Φ . Se o processo de difusão envolver uma série de Φ , na qual Γ^Φ é considerado variável, o valor de Γ^Φ no ponto nodal é obtido por uma função do tipo,

$$\Gamma^\Phi = f(\Phi, a, b). \quad (3.91)$$

No processo de otimização, será usada uma nova abordagem de minimização denominada OREP (*optimal removal of experimental points*), para minimizar os erros na determinação de parâmetros termo-físicos em processos de difusão, descritos por pontos experimentais, e uma solução analítica representada apenas pelo primeiro termo da série, para a condição de contorno do terceiro tipo. O algoritmo, proposto por Silva et al. (2012), é baseado na determinação da melhor remoção de pontos experimentais antes do ajuste da solução analítica ao conjunto de dados. Entretanto, Silva et al. (2012) concluíram que tanto os erros no cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção, h , quanto os erros no cálculo da difusividade térmica, α , aumentam quando o número de Biot aumenta. Para o número de Biot menor que 2,0 os erros na determinação destes parâmetros são desprezíveis. Mas se o número de Biot for maior do que 7,0, tais erros são significativos e, conseqüentemente, o algoritmo proposto falha. Investiga-se, neste trabalho, se para a condição de contorno do primeiro tipo (número de Biot infinito), uma adaptação do algoritmo produziria bons resultados, já que o algoritmo original falha neste caso. O algoritmo proposto está baseado na obtenção do melhor ajuste, o que significa minimizar o qui-quadrado definido como (BEVINGTON e ROBINSON, 1992; TAYLOR, 1997),

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} (T_i^{\text{exp}} - T_i^{\text{sim}})^2 \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (3.92)$$

onde T_i^{exp} é a i -ésima temperatura experimental ($^{\circ}\text{C}$) medida em um ponto dentro do cilindro, T_i^{sim} é a i -ésima temperatura simulada correspondente ($^{\circ}\text{C}$) obtida a partir da solução analítica, N_p é o número de pontos experimentais e $1/\sigma_i^2$ é o peso estatístico do i -ésimo ponto.

A Equação (3.92) é uma particularização da Equação (3.90), quando a grandeza estudada é a temperatura do sistema. O algoritmo adaptado para a solução analítica da equação de difusão para a condição de contorno do primeiro tipo deve obedecer aos passos propostos a seguir.

3.8.1 Caso analítico unidimensional

- Passo 1 – A partir das Equações (3.9) e (3.8) determinar, respectivamente, as raízes μ_n e os coeficientes A_n (por exemplo, para os primeiros 200 termos da série);
- Passo 2 – Usar regressão não-linear para determinar o valor do expoente A , a partir do conjunto de dados experimentais e da Equação (3.88), que tem apenas um termo, e α a partir da Equação (3.78);
- Passo 3 – Tomar os mesmos tempos que foram usados para os dados experimentais e calcular, através da Equação (3.86), as temperaturas $T^*(r, t)$. Note que $T^*(r, t) \equiv T_i^{\text{sim}}$. No somatório, foram usados os números de termos para os quais se conheciam as raízes da função de Bessel (neste caso, 200). Calcular, a partir da Equação (3.92), o qui-quadrado;
- Passo 4 – Remover um ponto experimental (da região inicial) e, usando regressão não-linear na Equação (3.88), calcula-se o novo valor de A e, em seguida, o valor de α , pela Equação (3.78). Uma vez calculado o novo valor de α , repetir o procedimento do passo 3 envolvendo todo o conjunto de dados;

- Passo 5 – Comparar o último valor de χ^2 com o anterior. Retornar ao passo 4 enquanto o último valor de χ^2 for menor do que o anterior.

3.8.2 Caso analítico bidimensional

- Passo 1 - A partir das Equações (3.30) e (3.33) para determinar, respectivamente, as raízes $\mu_{n,1}$ e $\mu_{m,2}$; as Equações (3.31) e (3.34) para determinar os coeficientes $A_{n,1}$ e $A_{m,2}$ (por exemplo, para os primeiros 200 termos da série);
- Passo 2 – Usar a regressão não-linear, determinar o valor de α a partir do conjunto de dados experimentais e das Equações (3.89) e (3.81);
- Passo 3 – Tomar os mesmos tempos que foram usados para os dados experimentais, calcular através da Equação (3.87), as temperaturas $T^*(r, y, t)$. Note que $T^*(r, y, t) \equiv T_i^{sim}$. No somatório, foram empregados os números de termos para os quais se conheciam as raízes da função de Bessel (neste caso, 200). Calcular, então, a partir da Equação (3.92), o qui-quadrado;
- Passo 4 – Remover um ponto experimental (da região inicial) e, para realizar a regressão não-linear, usa-se a Equação (3.89) para calcular o novo valor de α . Uma vez calculado o novo valor de α se repete o procedimento do passo 3 envolvendo todo o conjunto de dados;
- Passo 5 – Comparar o último valor de χ^2 com o anterior. Retornar ao passo 4 enquanto o último valor de χ^2 for menor do que o anterior.

3.8.3 Algoritmo de otimização usando solução numérica

Os parâmetros a e b podem ser determinados através da minimização da função objetivo, Equação (3.91), a qual é realizada em ciclos envolvendo os seguintes passos:

- Passo 1 - Informar o valor inicial do parâmetro “a” e “b” da Equação (3.91). Resolver a equação de difusão e determinar o qui-quadrado;
- Passo 2 - Apresentar o valor para a correção de “a”;
- Passo 3 - Corrigido o parâmetro “a” e, mantendo-se o parâmetro “b” com um valor constante, resolve-se a equação de difusão e se calcula o qui-quadrado;
- Passo 4 - Comparar o último valor calculado do qui-quadrado com o valor anterior. Se o último for menor, volte para o passo 2; caso contrário, diminua a última correção do valor de “a” e proceda ao passo 5;
- Passo 5 - Informar o valor para a correção de “b”;
- Passo 6 - Corrigir o parâmetro “b” e manter o parâmetro “a” com um valor constante. Resolva a equação de difusão e calcule o qui-quadrado;
- Passo 7 - Comparar o último valor calculado do qui-quadrado com o anterior. Se o último valor for menor, retorne para o passo 5; caso contrário, diminua a última correção do valor de “b” e proceda ao passo 8;
- Passo 8 - Começar um novo ciclo, voltando ao passo 2, até que a convergência estipulada para os parâmetros “a” e “b” seja alcançada.

Em cada ciclo, a correção de cada parâmetro pode ser inicialmente pequena, compatível com a tolerância da convergência imposta ao problema. Para um dado ciclo, que se retorne ao passo 2 ou 5, a nova correção pode ser multiplicada pelo fator 2. Se a correção informada não minimizar a função objetiva, então, no próximo ciclo, a correção pode ser multiplicada pelo fator -1. Com este procedimento, o algoritmo permite aumentar ou diminuir o valor do parâmetro, sempre diminuindo a função objetiva. Note que, mesmo começando-se cada ciclo com um valor corretivo pequeno para o parâmetro, tais correções crescem geometricamente, assegurando-se um processo de otimização rápida. Outro aspecto importante para a duração do processo de otimização é o valor inicial de cada parâmetro a ser determinado. Os valores iniciais dos parâmetros podem ser estimados dos valores obtidos de produtos similares já

disponíveis na literatura ou através de alguma correlação empírica. Por outro lado, se Γ^Φ for suposta constante, os passos 5, 6 e 7 não serão necessários.

3.9 Validações

3.9.1 Validação do algoritmo proposto para a solução analítica

Para validar o algoritmo proposto nesta pesquisa, para o caso unidimensional, foram utilizados vários conjuntos de dados obtidos por simulação numérica (SILVA et al., 2008). Para o caso bidimensional foi usado o *software Finite Cylinder Third Kind* desenvolvido na tese de doutorado por Silva, (2012). Nas simulações usando-se métodos numéricos o cilindro finito tinha as seguintes características: raio $R = 0,02$ m; comprimento $L = 0,04$ m e difusividade térmica, $\alpha_{num} = 1,50 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. A secção circular do cilindro foi dividida em 200 volumes de controle. O tempo total de simulação de 2000 s foi dividido em 1000 passos de tempo com $\Delta t = 2,0$ s. Cada conjunto de dados foi gerado considerando-se apenas um de cada 20 pontos simulados. As temperaturas foram simuladas na forma adimensional, com o sensor colocado em várias posições no interior do cilindro. O mesmo procedimento foi usado para o cilindro infinito de raio $R = 0,02$ m.

3.9.2 Validação do algoritmo proposto para a solução numérica

A validação do algoritmo proposto para a solução numérica será obtida por comparação com o *software* que usa a solução analítica. Com este objetivo, tomou-se um cilindro de raio $R = 0,02$ m, e comprimento, $L = 0,04$ m, preenchido por uma substância pastosa com difusividade térmica aparente $\alpha = 1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. A partir destes dados, simulou-se um aquecimento, com temperaturas adimensionais, para várias posições do termopar, em vários instantes, tanto pelo *software* que resolve analiticamente a equação de difusão, usando 200 termos do somatório, quanto pelo *Software Finite Cylinder First Kind* que resolve a equação de difusão numericamente, com tolerância estipulada em 10^{-8} para o método de Gauss-Seidel.

3.10 Dados experimentais

Os dados experimentais obtidos por Betta et al. (2009) e Ukrainczyk (2009), em suas pesquisas para estimar a difusividade térmica α de várias substâncias, serão usados para avaliar o potencial da OREP modificada desenvolvido nesta pesquisa quando aplicada aos dados experimentais. Desta forma, serão estimadas a difusividade térmica aparente do agar gel, do creme custard e do purê de tomate, bem como os erros cometidos nestes cálculos para serem comparados com os dados disponíveis na literatura. Serão descritos os procedimentos e os meios que foram usados para a obtenção dos dados experimentais, com o objetivo de calcular a difusividade térmica aparente das substâncias estudadas.

Aplica-se o procedimento proposto aos dados experimentais disponíveis em Betta et al. (2009) para determinar as difusividades térmicas aparentes de alimentos pastosos contidos em recipientes metálicos de geometria cilíndrica. Nessa experiência, dois termopares foram inseridos no produto em estudo. Um deles foi colocado no centro geométrico, e o outro, na parte interna da parede do recipiente metálico na interface com o produto, no plano mediano. O container foi mergulhado em um banho pré-aquecido a 80,0 °C, e a cada 10,0 s as temperaturas eram medidas. Dois experimentos desse artigo serão analisados neste trabalho: o primeiro se refere à penetração de calor em purê de tomate (inicialmente a 5,2 °C) colocado em um recipiente metálico com geometria cilíndrica com raio $R = 40,0$ mm e altura $L = 125,0$ mm; o segundo experimento se refere ao aquecimento do creme custard (inicialmente a 10,8 °C) colocado em um recipiente metálico, cilíndrico, com raio $R = 42,5$ mm e altura $L = 105,0$ mm. Em cada um desses dois experimentos, o termopar fixado na parte interna da parede do recipiente rapidamente indicou o valor constante de 80,0 °C, o que significa que a condição de contorno do primeiro tipo é indicada para o estudo que está sendo desenvolvido.

Os dados do aquecimento no centro dos produtos foram obtidos pela digitalização dos gráficos disponíveis em Betta et al. (2009), usando-se o *software xyExtract Graph Digitizer* (SILVA, 2011a). Nesse trabalho, os autores assumiram, por hipótese, a ausência de fluxos convectivos dentro da amostra, ou seja, a transferência de

calor ocorre apenas por condução. Com o propósito de comparar os resultados obtidos por Betta et al. (2009) e os resultados deste trabalho, esta hipótese será também assumida. Uma descrição mais detalhada da pesquisa, tais como o aparato experimental e a calibração pode ser encontrada em Betta et al. (2009).

Neste trabalho, o código fonte foi compilado no Compaq Visual Fortran (CVC) 6.6.0 Professional Edition usando a opção Quick Win Application e a plataforma do Windows Vista. Os erros sistemáticos devido às medidas foram considerados desprezíveis. Por outro lado, foram usados os indicadores estatísticos qui-quadrado (χ^2) e o coeficiente de determinação (r^2) na análise dos dados para a obtenção dos resultados. O *LAB Fit Curve Fitting Software, V 7.2.48* (Silva, 2009a) foi usado para o tratamento estatístico. Tanto a precisão da difusividade térmica aparente quanto a discrepância observada entre dois métodos serão indicadas através do erro percentual,

$$\text{erro percentual} = \frac{\alpha_{ob} - \alpha_{ver}}{\alpha_{ver}} \times 100 \quad (3.93)$$

onde α_{ob} é o valor obtido para a difusividade térmica e α_{ver} é o valor considerado como verdadeiro. A precisão da difusividade térmica foi obtida diretamente a partir da regressão não-linear.

A outra experiência foi desenvolvida por Ukrainczyk (2009) com o objetivo de determinar a difusividade térmica aparente de geleia (agar gel 0,7%), a partir do melhoramento do método experimental transiente já existente.

A configuração experimental utilizada por Ukrainczyk (2009) consistiu em dois banhos térmicos de cilindros de cobre com diferentes dimensões. Entretanto, neste trabalho, apenas o banho térmico do cilindro menor foi considerado. O cilindro tinha diâmetro $2R = 26$ mm, comprimento $L = 250$ mm e espessura $\Delta R = 0,7$ mm. O interior do cilindro foi preenchido com geleia. O tubo foi cuidadosamente preenchido para evitar a formação de bolhas de ar no seu interior. As áreas circulares

perpendiculares ao eixo foram seladas com borracha para evitar qualquer troca de calor nessas regiões.

Em seguida, o cilindro foi imerso verticalmente em banho térmico com temperatura controlada, cuja variação foi da ordem de $\pm 0,03$ °C. Dois termopares foram usados na experiência. Um dos termopares foi colocado no eixo da amostra cilíndrica, na posição $r = (0 \pm 1)$ mm. O segundo foi posicionado na superfície interna do tubo de cobre. Quando a temperatura da amostra se uniformizou, T_1 , imediatamente a amostra foi imersa em um segundo banho à temperatura $T_1 + \Delta T$. As temperaturas no eixo do tubo $T(r = 0, t)$ e na fronteira $T(r = R, t)$ eram funções apenas do tempo. A temperatura inicial de equilíbrio do sistema era de 20,14 °C e a final, de 24,93 °C. Os dados sobre a temperatura do agar gel, no centro do cilindro, encontram-se na Tabela A.6.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O quarto capítulo será dividido em duas partes. Na parte A, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos com as soluções analíticas da equação de difusão de calor para o cilindro infinito e finito, e na parte B, serão apresentados e discutidos as soluções numéricas.

Parte A - Soluções Analíticas

4.1 Validação da solução analítica unidimensional

Para validar o algoritmo de otimização proposto, foram gerados alguns conjuntos de dados, por simulação numérica, com a temperatura dada na forma adimensional e difusividade térmica $\alpha_{num} = 1,50 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, para as seguintes posições do termopar: 1) $r = 0$; 2) $r = 0,25R$; 3) $r = 0,5R$; 4) $r = 0,75R$ e 5) $r = 0,9R$. A validação do programa da solução analítica, código A1 em apêndice, consiste em “descobrir” qual foi a difusividade térmica usada pelo programa numérico para gerar os cinco conjuntos de dados das cinco posições do termopar.

4.1.1 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0$

Simulando-se o termopar no centro do cilindro, $r = 0$, foi gerado o primeiro conjunto de dados apresentado na Tabela A.1, em apêndice a este trabalho.

A partir dos dados da Tabela A.1 foi utilizado o programa *LAB Fit Curve Fitting Software, V 7.2.48* para gerar o gráfico da Figura 4.1.

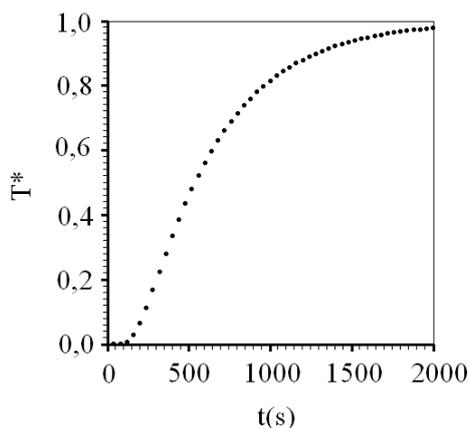


Figura 4.1 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0$.

A Equação (3.88) para $r = 0$ é escrita do seguinte modo:

$$T^*(0, t) = 1 - 1,601975 \exp(-At). \quad (4.1)$$

A realização de uma regressão não-linear aos dados da Tabela A.1 possibilita determinar o parâmetro A . Assim, usando-se a Equação (3.78), determina-se α . Com a Equação (3.92), determina-se o qui-quadrado. Então, obtém-se a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para a temperatura adimensional com sensor de temperatura colocado em $r=0$.

Pontos removidos	A (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
00	$0,2308987738001 \times 10^{-2}$	$1,59703527 \times 10^{-7}$	$2,3992384 \times 10^{-2}$
01	$0,2308987738001 \times 10^{-2}$	$1,59703527 \times 10^{-7}$	$2,3992384 \times 10^{-2}$
02	$0,2287653936619 \times 10^{-2}$	$1,5822788 \times 10^{-7}$	$1,8453881 \times 10^{-2}$
03	$0,2259597179497 \times 10^{-2}$	$1,5628730 \times 10^{-7}$	$1,1179025 \times 10^{-2}$
04	$0,2233745579665 \times 10^{-2}$	$1,5449925 \times 10^{-7}$	$6,0057286 \times 10^{-3}$
05	$0,2213218839080 \times 10^{-2}$	$1,5307951 \times 10^{-7}$	$2,9972689 \times 10^{-3}$
06	$0,2198076029291 \times 10^{-2}$	$1,5203214 \times 10^{-7}$	$1,4280898 \times 10^{-3}$
07	$0,2187329302337 \times 10^{-2}$	$1,5128886 \times 10^{-7}$	$6,6010799 \times 10^{-4}$
08	$0,2179864436667 \times 10^{-2}$	$1,5077251 \times 10^{-7}$	$2,9940801 \times 10^{-4}$
09	$0,2174743447045 \times 10^{-2}$	$1,5041832 \times 10^{-7}$	$1,3517575 \times 10^{-4}$
10	$0,2171256673408 \times 10^{-2}$	$1,5017714 \times 10^{-7}$	$6,2522719 \times 10^{-5}$
11	$0,2167296721895 \times 10^{-2}$	$1,4990326 \times 10^{-7}$	$1,8829789 \times 10^{-5}$
12	$0,2166219497530 \times 10^{-2}$	$1,4982875 \times 10^{-7}$	$1,4127289 \times 10^{-5}$

Tabela 4.1 (continuação).

Pontos removidos	A (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
13	$0,2165493573930 \times 10^{-2}$	$1,4977853 \times 10^{-7}$	$1,2697436 \times 10^{-5}$
14	$0,2165004601488 \times 10^{-2}$	$1,4974472 \times 10^{-7}$	$1,2526099 \times 10^{-5}$
15	$0,2164675307665 \times 10^{-2}$	$1,4972194 \times 10^{-7}$	$1,2769596 \times 10^{-5}$
16	$0,2164453484121 \times 10^{-2}$	$1,4970659 \times 10^{-7}$	$1,3096535 \times 10^{-5}$
17	$0,2164304005660 \times 10^{-2}$	$1,4969626 \times 10^{-7}$	$1,3391191 \times 10^{-5}$
18	$0,2164203217870 \times 10^{-2}$	$1,4968928 \times 10^{-7}$	$1,3623005 \times 10^{-5}$
19	$0,2164135216168 \times 10^{-2}$	$1,4968458 \times 10^{-7}$	$1,3794891 \times 10^{-5}$
20	$0,2164089288671 \times 10^{-2}$	$1,4968141 \times 10^{-7}$	$1,3918529 \times 10^{-5}$

Ao serem removidos os 14 primeiros pontos, observa-se na Tabela 4.1 que o qui-quadrado assume seu menor valor, $\chi^2 = 1,2526099 \times 10^{-5}$. Para esta situação de mínimo, o valor da difusividade térmica aparente $\alpha = 1,4974472 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ é a que melhor representa a cinética de penetração de calor para o termopar em $r = 0$, de acordo com o algoritmo proposto neste trabalho.

O gráfico da Figura 4.2(a) mostra como o χ^2 varia com o número de pontos removidos. A partir da remoção do décimo ponto, a variação de χ^2 fica praticamente imperceptível.

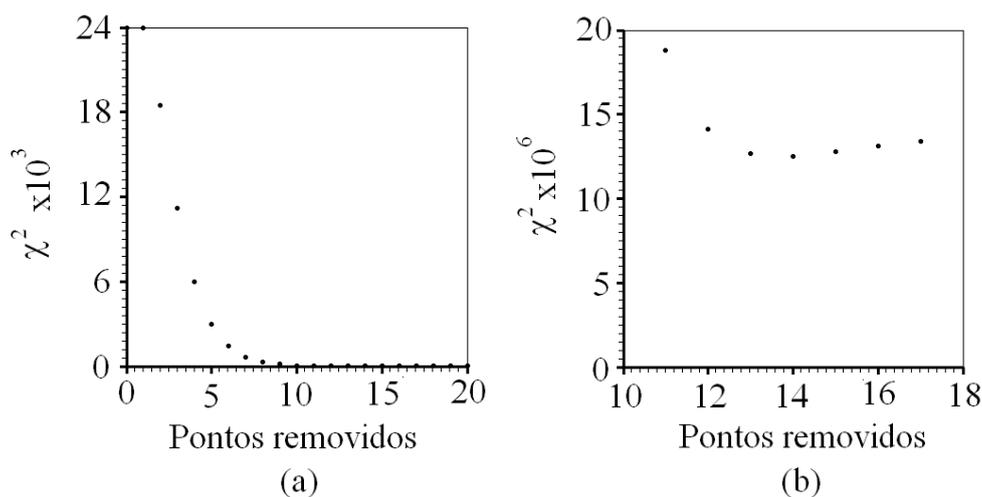


Figura 4.2 – (a) Variação do qui-quadrado com a remoção de até 20 pontos; (b) variação do qui-quadrado com a remoção de 11 até 17 pontos.

Para tornar as pequenas variações do χ^2 perceptíveis, ampliou-se o gráfico da Figura 4.2(a) na região onde o valor do χ^2 torna-se mínimo. O gráfico da Figura 4.2(b) mostra esta ampliação onde se pode observar que o menor valor do χ^2 ocorre com a remoção dos 14 primeiros pontos.

Se não fosse usado o processo de otimização, tomando-se como verdadeira a difusividade térmica aparente obtida a partir do conjunto inicial de pontos, $\alpha = 1,59703527 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o gráfico que se obteria para a cinética de penetração do calor é representado na Figura 4.3(a), com coeficiente de determinação $r^2 = 0,9987907$. O gráfico da Figura 4.3(b) corresponde à cinética de penetração de calor no cilindro infinito para a difusividade térmica aparente $\alpha = 1,4974472 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, obtida através do algoritmo proposto neste trabalho e o coeficiente de determinação, $r^2 = 0,9999989$.

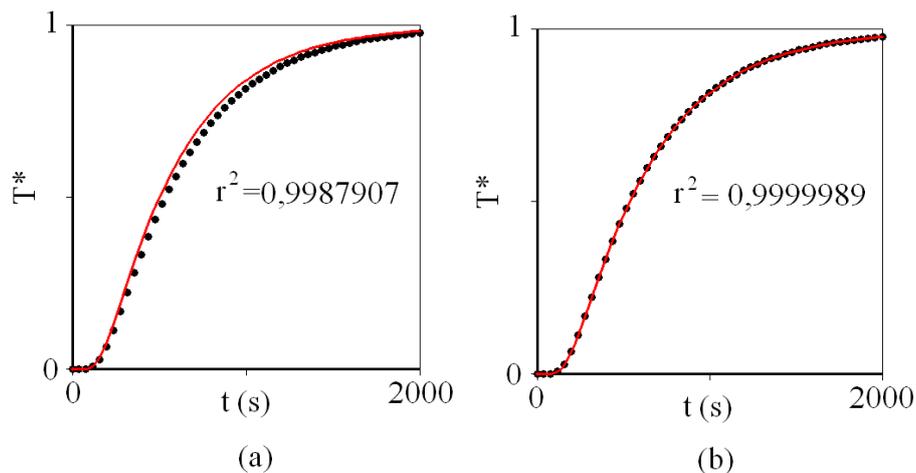


Figura 4.3 - (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação analítica com o sensor em $r=0$, sem utilizar o processo de otimização proposto e (b) com a utilização do processo de otimização proposto neste trabalho.

O gráfico da Figura 4.4 foi obtido a partir da Equação (4.1), com o parâmetro A dado por $A = 0,2165004601488 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

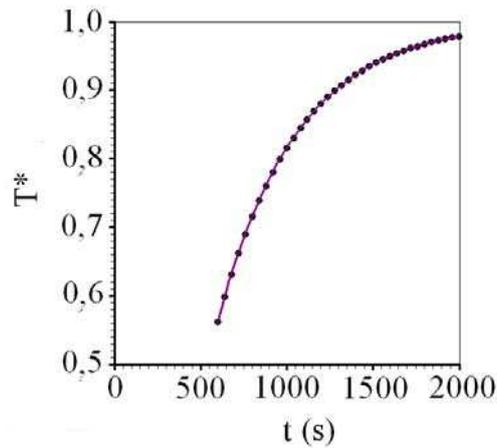


Figura 4.4 – Regressão não-linear com a remoção de 14 pontos em $r=0$.

O erro devido à acurácia da medida, entre o valor da difusividade térmica aparente encontrada, usando-se o algoritmo proposto $\alpha = 1,4974472 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, e o valor da difusividade térmica aparente estipulada por simulação numérica $\alpha_{num} = 1,50 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, considerada verdadeira, foi de -0,17%,

$$erro = \frac{1,4974472 \times 10^{-7} - 1,50 \times 10^{-7}}{1,50 \times 10^{-7}} \times 100 = -0,17\%.$$

Se o algoritmo proposto não fosse usado, tomando o valor da difusividade térmica aparente $\alpha = 1,59703527 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ obtido com a regressão não-linear quando se utiliza o conjunto inicial com 51 pontos, o erro cometido devido à acurácia seria 6,5%, que é um erro 25 vezes maior quando comparado com o erro de -0,17%, cometido quando se usa o algoritmo proposto:

$$erro = \frac{1,59703527 \times 10^{-7} - 1,50 \times 10^{-7}}{1,50 \times 10^{-7}} \times 100 = 6,5\%.$$

Outra informação estatística importante para a análise das medidas realizadas está relacionada com a sua dispersão. Adotando-se o nível de significância de 95,4%, a difusividade térmica aparente é escrita como $\alpha = (1,49745 \pm 0,00033) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com erro de precisão de 0,02%. Considerando-se o conjunto com todos os 51 pontos, a

difusividade térmica aparente a 95,4% de confiança, seria $\alpha = (1,59 \pm 0,95) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com erro de precisão de 59%.

4.1.2 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,25R$

A Tabela A.2, em apêndice a este trabalho, mostra as temperaturas adimensionais e os respectivos instantes. O gráfico da Figura 4.5 foi obtido a partir da Tabela A.2.

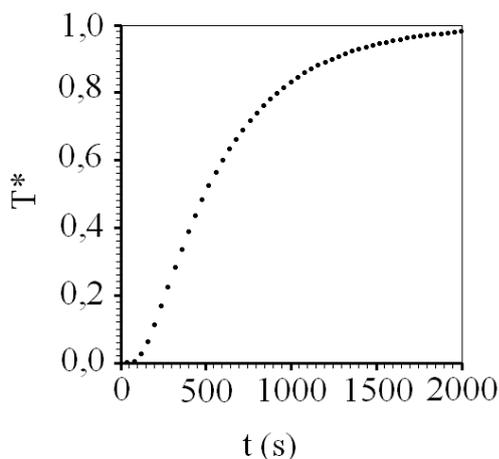


Figura 4.5 – Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação numérica, $r=0,25R$.

Aplicando o algoritmo proposto obtém-se a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Relaciona o número de pontos removidos, com as constantes A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para a posição do termopar em $r=0,25R$.

Pontos removidos	$A \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\alpha \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	χ^2
00	$0,2257071645250 \times 10^{-2}$	$1,5611262 \times 10^{-7}$	$9,9443262 \times 10^{-3}$
01	$0,2257071645228 \times 10^{-2}$	$1,5611262 \times 10^{-7}$	$9,9443262 \times 10^{-3}$
02	$0,2241437140454 \times 10^{-2}$	$1,5503124 \times 10^{-7}$	$7,0249857 \times 10^{-3}$
03	$0,2222034170636 \times 10^{-2}$	$1,5368923 \times 10^{-7}$	$4,0765232 \times 10^{-3}$
04	$0,2205014044484 \times 10^{-2}$	$1,5251200 \times 10^{-7}$	$2,1273773 \times 10^{-3}$
05	$0,2191893490178 \times 10^{-2}$	$1,5160451 \times 10^{-7}$	$1,0452834 \times 10^{-3}$

Tabela 4.2 (continuação).

Pontos removidos	A (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
06	$0,2182373949025 \times 10^{-2}$	$1,5094609 \times 10^{-7}$	$4,9557217 \times 10^{-4}$
07	$0,2175692290624 \times 10^{-2}$	$1,5048394 \times 10^{-7}$	$2,3033844 \times 10^{-4}$
08	$0,2171098201238 \times 10^{-2}$	$1,5016619 \times 10^{-7}$	$1,0651306 \times 10^{-4}$
09	$0,2167985216683 \times 10^{-2}$	$1,4995088 \times 10^{-7}$	$4,9986229 \times 10^{-5}$
10	$0,2165900973991 \times 10^{-2}$	$1,4980672 \times 10^{-7}$	$2,4584109 \times 10^{-5}$
11	$0,2164521604115 \times 10^{-2}$	$1,4971131 \times 10^{-7}$	$1,3283415 \times 10^{-5}$
12	$0,2163620667933 \times 10^{-2}$	$1,4964900 \times 10^{-7}$	$8,2812603 \times 10^{-6}$
13	$0,2163042132398 \times 10^{-2}$	$1,4960898 \times 10^{-7}$	$6,0610005 \times 10^{-6}$
14	$0,2162679523829 \times 10^{-2}$	$1,4958390 \times 10^{-7}$	$5,0660728 \times 10^{-6}$
15	$0,2162460701375 \times 10^{-2}$	$1,4956876 \times 10^{-7}$	$4,6134319 \times 10^{-6}$
16	$0,2162337011447 \times 10^{-2}$	$1,4956021 \times 10^{-7}$	$4,4070975 \times 10^{-6}$
17	$0,2162275773986 \times 10^{-2}$	$1,4955597 \times 10^{-7}$	$4,3176801 \times 10^{-6}$
18	$0,2162255082774 \times 10^{-2}$	$1,4955454 \times 10^{-7}$	$4,2893816 \times 10^{-6}$
19	$0,2162260329580 \times 10^{-2}$	$1,4955489 \times 10^{-7}$	$4,2966899 \times 10^{-6}$
20	$0,2162281779148 \times 10^{-2}$	$1,4955640 \times 10^{-7}$	$4,3260943 \times 10^{-6}$
21	$0,2162313038347 \times 10^{-2}$	$1,4955856 \times 10^{-7}$	$4,3708401 \times 10^{-6}$

Os gráficos das Figuras 4.6(a) e 4.6(b) mostram o χ^2 em função do número de pontos removidos.

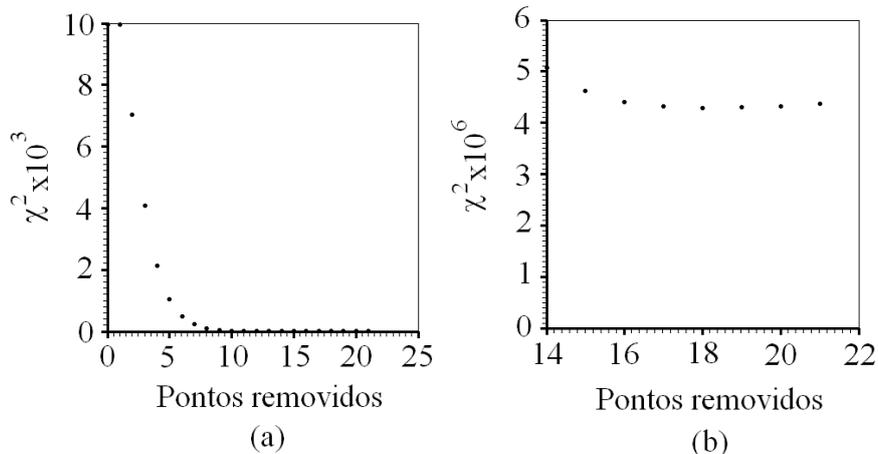


Figura 4.6 – (a) Variação do χ^2 removendo-se 21 pontos, (b) variação do χ^2 entre a remoção de 14 e 21 pontos.

Os gráficos das Figuras 4.7(a) e 4.7(b) mostram as cinéticas de penetração de calor obtidas sem o processo de otimização $\alpha = 1,5611262 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, e com a aplicação da OREP modificada $\alpha = 1,4955454 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, respectivamente.

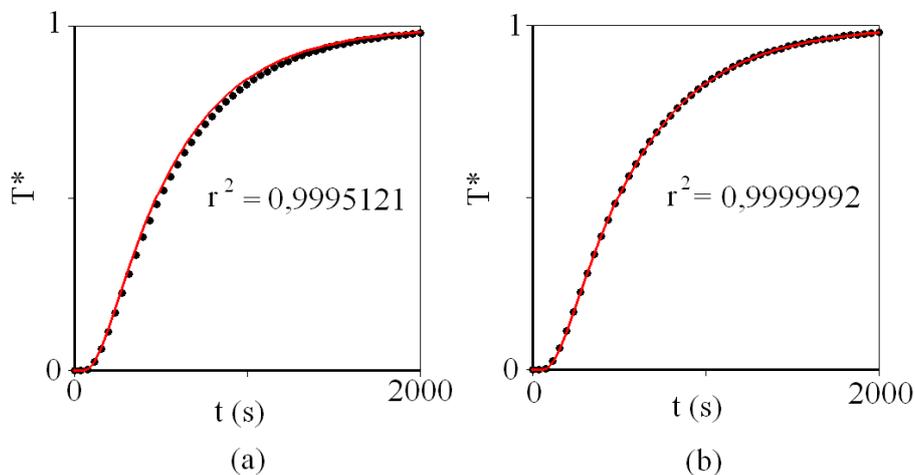


Figura 4.7 – (a) Gráfico da temperatura adimensional simulada analiticamente sem utilizar o algoritmo e (b) utilizando-se o algoritmo proposto para $r=0,25R$.

O gráfico da Figura 4.8 foi obtido com o parâmetro A dado por $A = 0,2162255082774 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

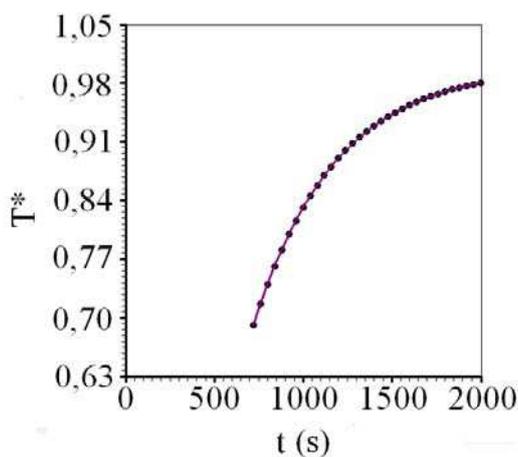


Figura 4.8 - Regressão não-linear com a remoção de 18 pontos para $r=0,25R$.

O erro de acurácia da difusividade térmica aparente $\alpha = 1,4955454 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, foi de, -0,30%. Adotando-se o nível de significância de 95,4%, a difusividade

térmica aparente pode ser escrita como $\alpha = (1,49555 \pm 0,00007) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e o erro na precisão das medidas 0,005%.

Se a OREP modificada não fosse usada $\alpha = (1,56 \pm 0,12) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro devido à acurácia seria 4,1% e o erro de precisão 8,0%.

4.1.3 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,5R$

Por simulação numérica, obtém-se a Tabela A.3, em apêndice. A partir da Tabela A.3 se obtém a Figura 4.9 que mostra o gráfico da evolução da temperatura adimensional.

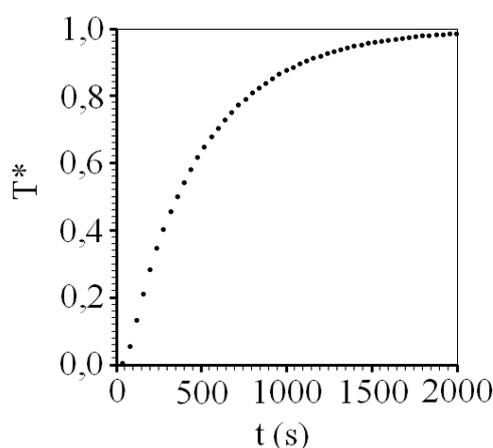


Figura 4.9 – Gráfico da temperatura adimensional simulada numericamente para $r=0,5R$.

Aplicando a OREP obtém-se a Tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para vários conjuntos de pontos com o termopar em $r=0,5R$.

Pontos removidos	$A \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\alpha \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	χ^2
00	$0,2131922503645 \times 10^{-2}$	$1,4745655 \times 10^{-7}$	$4,3856233 \times 10^{-4}$
01	$0,2131922503645 \times 10^{-2}$	$1,4745655 \times 10^{-7}$	$4,3856233 \times 10^{-4}$
02	$0,2132157476722 \times 10^{-2}$	$1,4747282 \times 10^{-7}$	$4,3013913 \times 10^{-4}$
03	$0,2135603427819 \times 10^{-2}$	$1,4771116 \times 10^{-7}$	$3,1659336 \times 10^{-4}$
04	$0,2140260500579 \times 10^{-2}$	$1,4803327 \times 10^{-7}$	$1,9226069 \times 10^{-4}$

Tabela 4.3 (continuação).

Pontos removidos	A (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
05	$0,2144654976668 \times 10^{-2}$	$1,4833721 \times 10^{-7}$	$1,0536469 \times 10^{-4}$
06	$0,2148263784005 \times 10^{-2}$	$1,4858682 \times 10^{-7}$	$5,5903220 \times 10^{-5}$
07	$0,2151044162572 \times 10^{-2}$	$1,4877912 \times 10^{-7}$	$3,1171494 \times 10^{-5}$
08	$0,2153125324294 \times 10^{-2}$	$1,4892308 \times 10^{-7}$	$2,0230576 \times 10^{-5}$
09	$0,2154668514747 \times 10^{-2}$	$1,4902982 \times 10^{-7}$	$1,6285570 \times 10^{-5}$
10	$0,2155816065009 \times 10^{-2}$	$1,4910923 \times 10^{-7}$	$1,5645875 \times 10^{-5}$
11	$0,2156679114501 \times 10^{-2}$	$1,4916887 \times 10^{-7}$	$1,6450087 \times 10^{-5}$
12	$0,2157339477969 \times 10^{-2}$	$1,4921456 \times 10^{-7}$	$1,7809749 \times 10^{-5}$
13	$0,2157855626653 \times 10^{-2}$	$1,4925024 \times 10^{-7}$	$1,9320238 \times 10^{-5}$
14	$0,2158268617645 \times 10^{-2}$	$1,4927882 \times 10^{-7}$	$2,0812809 \times 10^{-5}$
15	$0,2158607180726 \times 10^{-2}$	$1,4930222 \times 10^{-7}$	$2,2223503 \times 10^{-5}$
16	$0,2158891256021 \times 10^{-2}$	$1,4932188 \times 10^{-7}$	$2,3537928 \times 10^{-5}$
17	$0,2159134723424 \times 10^{-2}$	$1,4933872 \times 10^{-7}$	$2,4758208 \times 10^{-5}$
18	$0,2159535996354 \times 10^{-2}$	$1,4936647 \times 10^{-7}$	$2,6961097 \times 10^{-5}$
19	$0,2159705554218 \times 10^{-2}$	$1,4937821 \times 10^{-7}$	$2,7963548 \times 10^{-5}$
20	$0,2159859538142 \times 10^{-2}$	$1,4938885 \times 10^{-7}$	$2,8909335 \times 10^{-5}$

Os gráficos das Figuras 4.10(a) e 4.10(b) mostram o comportamento do χ^2 com a regressão não-linear.

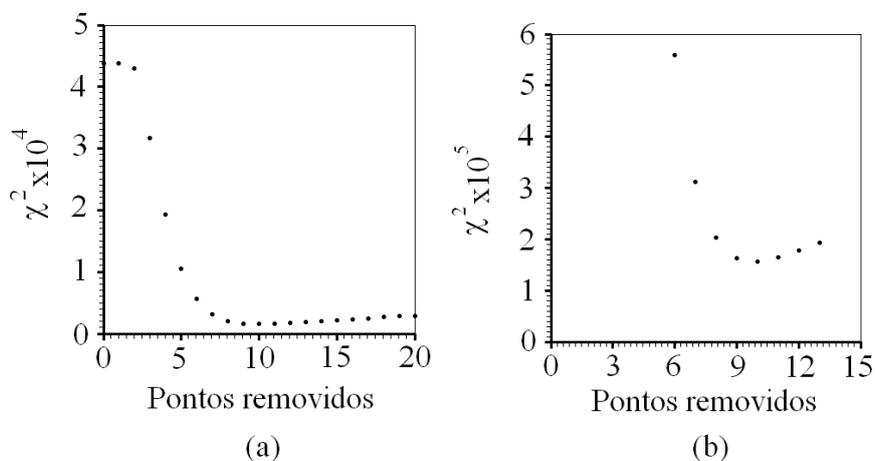


Figura 4.10 - (a) Variação do χ^2 com a remoção de vinte pontos e (b) variação do χ^2 com a remoção de 6 a 13 pontos.

Os gráficos das Figuras 4.11(a) e 4.11(b) mostram as cinéticas de penetração de calor, sem o processo de otimização $\alpha = 1,4745655 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, e com a aplicação da OREP modificada, $\alpha = 1,4910923 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, respectivamente.

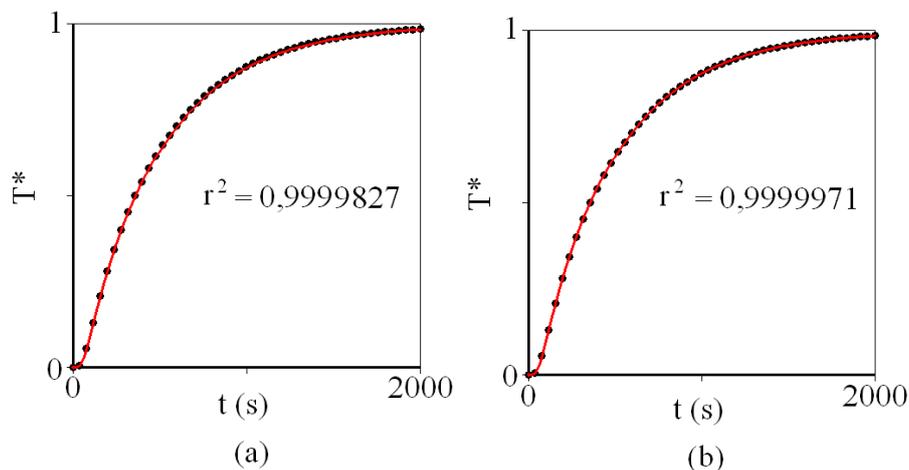


Figura 4.11 – (a) Gráfico da temperatura adimensional simulada analiticamente, sem o uso do algoritmo proposto, e (b) com o uso do algoritmo proposto, para $r=0,5R$.

O gráfico da Figura 4.12 foi obtido com o parâmetro A dado por $A = 0,2155816065009 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

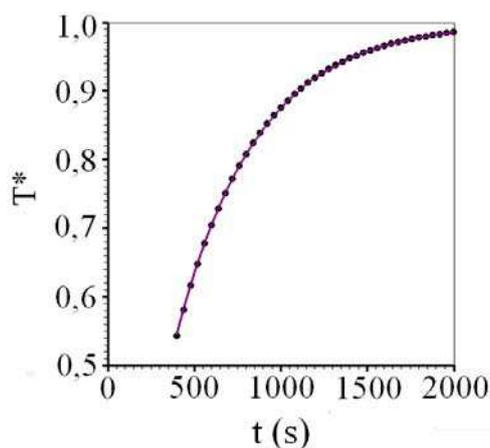


Figura 4.12 – Regressão não-linear com remoção de 10 pontos com o termopar em $r=0,5R$.

Usando o algoritmo proposto neste trabalho, a difusividade térmica aparente é $\alpha = (1,4911 \pm 0,0011) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ com 95,4% de confiança, o erro de acurácia corresponde

a 0,59% e o de precisão das medidas, 0,07%. Sem o uso do algoritmo proposto, $\alpha = (1,475 \pm 0,022) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro de acurácia seria de -1,7% e o de precisão 1,49%.

4.1.4 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,75R$

Por simulação numérica obteve-se a Tabela A.4, em apêndice. A partir da Tabela A.4 se produziu o gráfico da Figura 4.13.

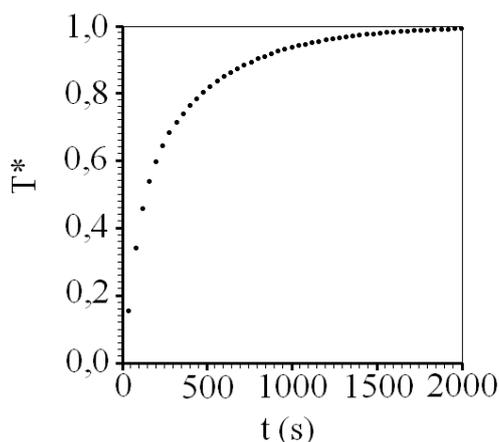


Figura 4.13 – Gráfico da temperatura adimensional simulada pelo método numérico para $r=0,75R$.

A Tabela A.4 possibilita determinar o parâmetro A , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado, Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para vários conjuntos de pontos com o termopar em $r=0,75R$.

Pontos removidos	$A \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\alpha \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	χ^2
00	$0,1986272343962 \times 10^{-2}$	$1,3738253 \times 10^{-7}$	$6,9155772 \times 10^{-3}$
01	$0,1986272343962 \times 10^{-2}$	$1,3738253 \times 10^{-7}$	$6,9155772 \times 10^{-3}$
02	$0,2013142637357 \times 10^{-2}$	$1,3924104 \times 10^{-7}$	$4,5915646 \times 10^{-3}$
03	$0,2044005778998 \times 10^{-2}$	$1,4137571 \times 10^{-7}$	$2,5516609 \times 10^{-3}$
04	$0,2071145592870 \times 10^{-2}$	$1,4325288 \times 10^{-7}$	$1,2819488 \times 10^{-3}$

Tabela 4.4 (continuação).

Pontos Removidos	A (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
05	$0,2092824937233 \times 10^{-2}$	$1,4475235 \times 10^{-7}$	$6,0103857 \times 10^{-4}$
06	$0,2109288187142 \times 10^{-2}$	$1,4589104 \times 10^{-7}$	$2,7295723 \times 10^{-4}$
07	$0,2121425430056 \times 10^{-2}$	$1,4673051 \times 10^{-7}$	$1,3197715 \times 10^{-4}$
08	$0,2130224274370 \times 10^{-2}$	$1,4733911 \times 10^{-7}$	$8,1944199 \times 10^{-5}$
09	$0,2136554549969 \times 10^{-2}$	$1,4777694 \times 10^{-7}$	$7,2566247 \times 10^{-5}$
10	$0,2141107275070 \times 10^{-2}$	$1,4809184 \times 10^{-7}$	$7,9404854 \times 10^{-5}$
11	$0,2144400656212 \times 10^{-2}$	$1,4831963 \times 10^{-7}$	$9,1368551 \times 10^{-5}$
12	$0,2146810038214 \times 10^{-2}$	$1,4848627 \times 10^{-7}$	$1,0382384 \times 10^{-4}$
13	$0,2148601261349 \times 10^{-2}$	$1,4861016 \times 10^{-7}$	$1,1510132 \times 10^{-4}$
14	$0,2149960040319 \times 10^{-2}$	$1,4870415 \times 10^{-7}$	$1,2479993 \times 10^{-4}$
15	$0,2151015060793 \times 10^{-2}$	$1,4877710 \times 10^{-7}$	$1,3300728 \times 10^{-4}$
16	$0,2151855010830 \times 10^{-2}$	$1,4883521 \times 10^{-7}$	$1,3996744 \times 10^{-4}$
17	$0,2152540970966 \times 10^{-2}$	$1,4888265 \times 10^{-7}$	$1,4592735 \times 10^{-4}$
18	$0,2153115084117 \times 10^{-2}$	$1,4892237 \times 10^{-7}$	$1,5110882 \times 10^{-4}$
19	$0,2153606481753 \times 10^{-2}$	$1,4895635 \times 10^{-7}$	$1,5567888 \times 10^{-4}$
20	$0,2154035326683 \times 10^{-2}$	$1,4898600 \times 10^{-7}$	$1,5977399 \times 10^{-4}$

Os gráficos das Figuras 4.14(a) e 4.14(b) mostram a variação do χ^2 com a remoção dos pontos.

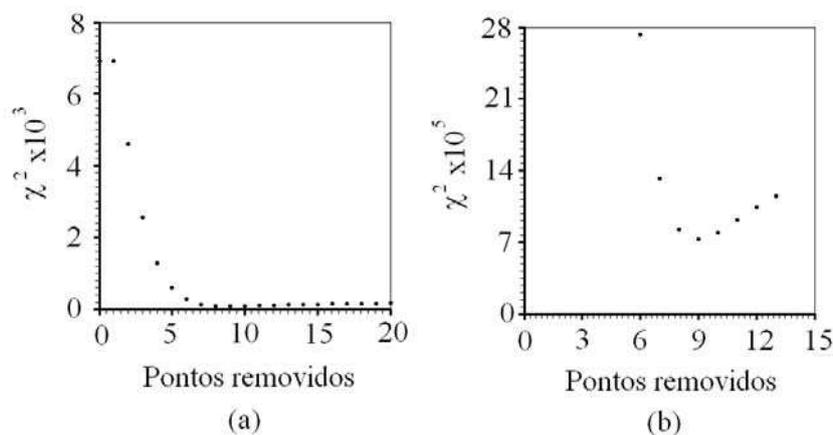


Figura 4.14 - (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) com a remoção de 6 a 13 pontos.

Os gráficos das Figuras 4.15(a) e 4.15(b) mostram a penetração do calor com $\alpha = 1,3738253 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, obtida sem a utilização da OREP modificada e com $\alpha = 1,4777694 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, usando a OREP modificada.

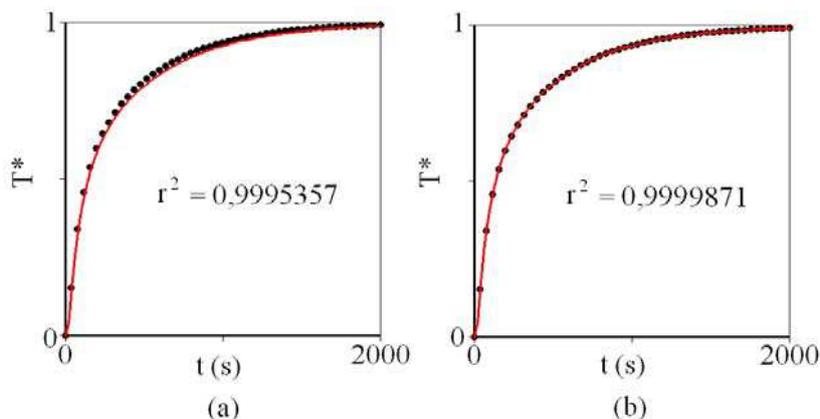


Figura 4.15 – (a) Gráfico da temperatura adimensional sem o processo de otimização e (b) com o processo de otimização proposto para $r=0,75R$.

O gráfico da Figura 4.16 foi obtido a partir do parâmetro A , $A = 0,2136554549969 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

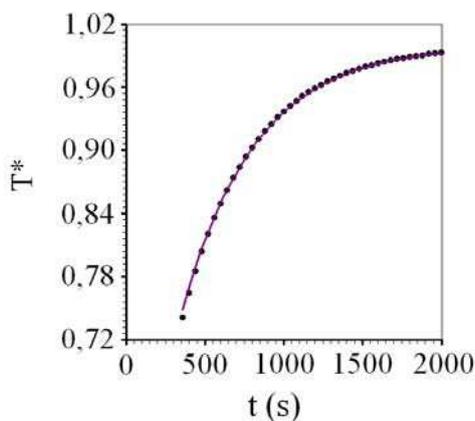


Figura 4.16 - Regressão não-linear com remoção de 9 pontos com o termopar em $r=0,75R$.

Usando a OREP modificada, a difusividade térmica aparente corresponde a $\alpha = (1,4778 \pm 0,0057) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro de acurácia foi $-1,48\%$ e o erro devido à precisão $0,39\%$. Considerando-se o conjunto inicial com 51 pontos a difusividade

térmica aparente foi $\alpha = (1,37 \pm 0,25) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro devido à acurácia -8,4% e o de precisão de 16,9%.

4.1.5 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,9R$

A simulação numérica fornece os dados da Tabela A.5, em apêndice. A partir da Tabela A.5 se plotou o gráfico da Figura 4.17.

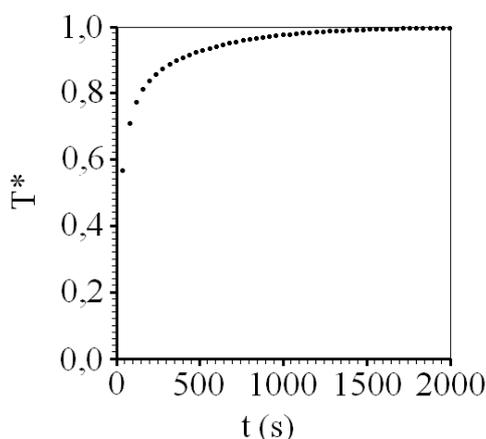


Figura 4.17 – Gráfico da temperatura adimensional para $r=0,9R$ obtida por simulação numérica.

A realização da regressão não-linear aos dados da Tabela A.5, mais a aplicação da OREP possibilita produzir a Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do qui-quadrado para vários conjuntos de pontos com o termopar em $r=0,9R$.

Pontos removidos	$A \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\alpha \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	χ^2
00	$0,1905184002627 \times 10^{-2}$	$1,3177396 \times 10^{-7}$	$2,2786523 \times 10^{-3}$
01	$0,1905184002627 \times 10^{-2}$	$1,3177396 \times 10^{-7}$	$2,2786523 \times 10^{-3}$
02	$0,1947419953345 \times 10^{-2}$	$1,3469526 \times 10^{-7}$	$1,3291136 \times 10^{-3}$
03	$0,1988921367734 \times 10^{-2}$	$1,3756573 \times 10^{-7}$	$6,8280200 \times 10^{-4}$

Tabela 4.5 (continuação).

Pontos removidos	A (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
04	$0,2024143896025 \times 10^{-2}$	$1,4000194 \times 10^{-7}$	$3,3816873 \times 10^{-4}$
05	$0,2052178977681 \times 10^{-2}$	$1,4194103 \times 10^{-7}$	$1,8758274 \times 10^{-4}$
06	$0,2073675405327 \times 10^{-2}$	$1,4342784 \times 10^{-7}$	$1,4185235 \times 10^{-4}$
07	$0,2089797607609 \times 10^{-2}$	$1,4454294 \times 10^{-7}$	$1,4537929 \times 10^{-4}$
08	$0,2101755994511 \times 10^{-2}$	$1,4537005 \times 10^{-7}$	$1,6818171 \times 10^{-4}$
09	$0,2110606457071 \times 10^{-2}$	$1,4598221 \times 10^{-7}$	$1,9583268 \times 10^{-4}$
10	$0,2117191557588 \times 10^{-2}$	$1,4643767 \times 10^{-7}$	$2,2222815 \times 10^{-4}$
11	$0,2122148278887 \times 10^{-2}$	$1,4678051 \times 10^{-7}$	$2,4532908 \times 10^{-4}$
12	$0,2125942450349 \times 10^{-2}$	$1,4704294 \times 10^{-7}$	$2,6486345 \times 10^{-4}$
13	$0,2128907406052 \times 10^{-2}$	$1,4724802 \times 10^{-7}$	$2,8123998 \times 10^{-4}$
14	$0,2131278154717 \times 10^{-2}$	$1,4741200 \times 10^{-7}$	$2,9502818 \times 10^{-4}$
15	$0,2133219546494 \times 10^{-2}$	$1,4754627 \times 10^{-7}$	$3,0677905 \times 10^{-4}$
16	$0,2134846482797 \times 10^{-2}$	$1,4765880 \times 10^{-7}$	$3,1694173 \times 10^{-4}$
17	$0,2136239267541 \times 10^{-2}$	$1,4775513 \times 10^{-7}$	$3,2586732 \times 10^{-4}$
18	$0,2137454527633 \times 10^{-2}$	$1,4775513 \times 10^{-7}$	$3,2586732 \times 10^{-4}$
19	$0,2138531907811 \times 10^{-2}$	$1,4791371 \times 10^{-7}$	$3,4102076 \times 10^{-4}$
20	$0,2139499536473 \times 10^{-2}$	$1,4798064 \times 10^{-7}$	$3,4758740 \times 10^{-4}$

O gráfico da Figura 4.18(a) (b) mostram o comportamento do χ^2 com o número de pontos removidos no processo de regressão não-linear.

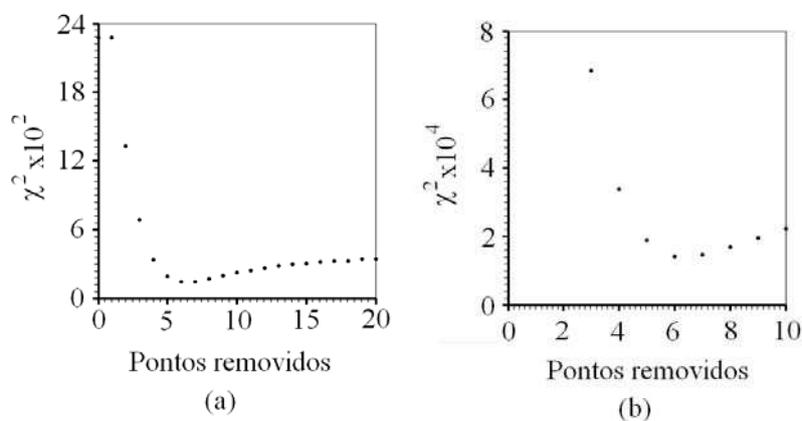


Figura 4.18 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) com a remoção entre 3 e 10 pontos.

Sem o uso da OREP modificada $\alpha = 1,3177396 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com a cinética de penetração do calor representada no gráfico da Figura 4.19(a). Usando a OREP modificada $\alpha = 1,4342784 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, a cinética de penetração de calor está representada no gráfico da Figura 4.19(b).

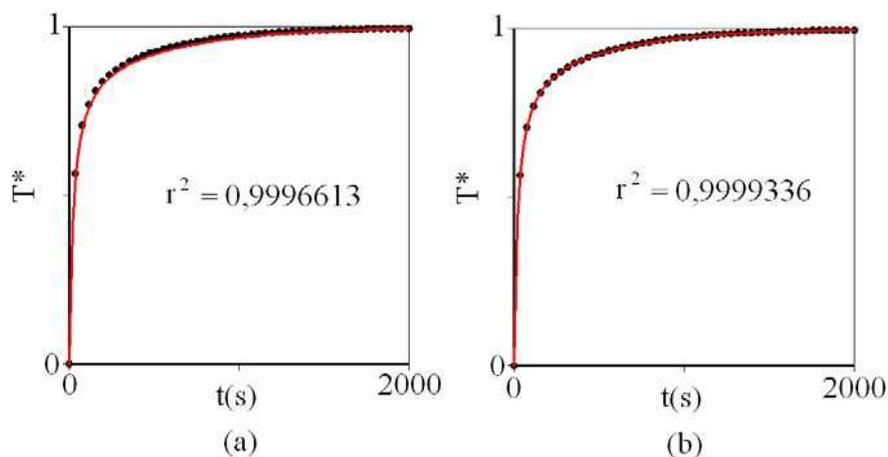


Figura 4.19 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica sem otimização e (b) com otimização para $r = 0,90R$.

O gráfico da Figura 4.20 foi obtido com o parâmetro A dado por $A = 0,2073675405327 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

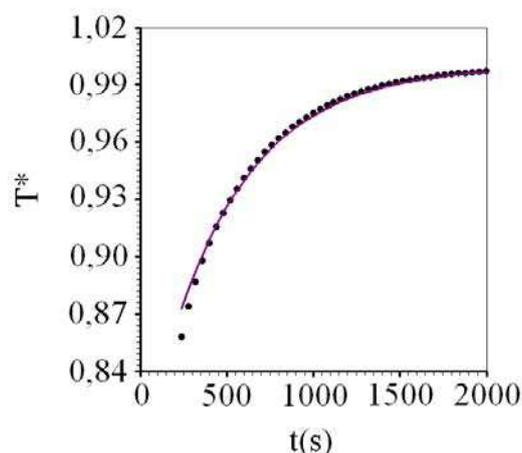


Figura 4.20 – Regressão não-linear com a remoção de 6 pontos para $r=0,9R$.

Usando a OREP modificada $\alpha = (1,434 \pm 0,025) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ o erro na precisão foi de 1,7% e devido à acurácia 4,38%. Se o algoritmo proposto não fosse usado, a

difusividade térmica aparente seria $\alpha = (1,32 \pm 0,28) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro devido à acurácia seria aproximadamente -12,1% e o devido à precisão de 21,2%.

4.1.6 Discussão sobre a penetração do calor: posições do termopar

Quando a abordagem da OREP modificada é aplicada, as simulações da penetração de calor são realizadas para todo o conjunto de dados. Assim, o teste do qui-quadrado para cada simulação só depende do valor de α , que depende do número de pontos experimentais removidos para determinar o seu valor por meio de regressão não-linear. Um estudo sobre o teste do qui-quadrado em relação ao número de pontos retirados, de acordo com o algoritmo proposto, é apresentado na Figura 4.2(a) para a posição do termopar em $r = 0$. A região onde χ^2 assume o valor mínimo é mostrado na Figura 4.2(b), o que permite concluir que a ótima remoção de pontos é igual a 14. Para esta situação, o resultado obtido por meio de regressão não-linear é mostrada na Figura 4.4.

A partir da regressão não-linear, o resultado completo para a difusividade térmica aparente é $\alpha = (1,49745 \pm 0,00033) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com 95,4% de confiança. Uma vez que o valor estipulado para a difusividade térmica aparente nas simulações numéricas foi de $1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro no resultado obtido foi de apenas -0,17%. Usando-se o valor obtido para a difusividade térmica aparente para simular a penetração do calor através da Equação (3.86), com 200 termos, o resultado é mostrado na Figura 4.3(b). Vale a pena salientar que se a Equação (3.88), com $\frac{r}{R} = 0$, por exemplo, fosse aplicada ao conjunto completo de dados, o valor obtido para a difusividade térmica aparente seria, $\alpha = 1,59703527 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ com um erro de 6,5% em vez -0,17%, que é o cometido quando se utiliza a abordagem da OREP modificada. Para se ter uma ideia do erro cometido no cálculo da difusividade térmica aparente, em função da posição r do termopar, a OREP modificada foi usada para outras posições previamente estipuladas no processo de validação. Os resultados obtidos encontram-se resumidos na Tabela. 4.6.

Tabela 4.6 - Valores da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar e os respectivos erros de acurácia.

r/R	0,0	0,25	0,5	0,75	0,9
$\alpha \times 10^7 \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	1,4974	1,4955	1,4911	1,4778	1,434
Com OREP, erro (%)	-0,17	-0,30	-0,59	-1,48	-4,38
Sem OREP, erro (%)	6,5	8,0	-1,7	-8,4	-12,1

É possível observar na Tabela 4.6 quanto a abordagem da OREP modificada melhora os resultados obtidos quando comparados com os algoritmos encontrados na literatura.

Além disto, outros indicadores estatísticos relevantes obtidos, por exemplo, para $r = 0$, como o qui-quadrado, $\chi^2 = 1,25261 \times 10^{-5}$, e o coeficiente de determinação $r^2 = 0,9999989$, permitem afirmar que o algoritmo proposto apresenta excelente desempenho na determinação da difusividade térmica aparente, permitindo descrever todo aquecimento quando a condição de contorno de Dirichlet estiver envolvida no processo de transferência de calor. Entretanto, o erro de acurácia aumenta rapidamente quando a posição do termopar se aproxima da fronteira. Desta forma, pode-se afirmar que, quanto mais próximo do centro estiver o termopar, melhores serão os resultados obtidos. A Figura 4.21 mostra o aumento do erro de acurácia como função da posição do termopar.

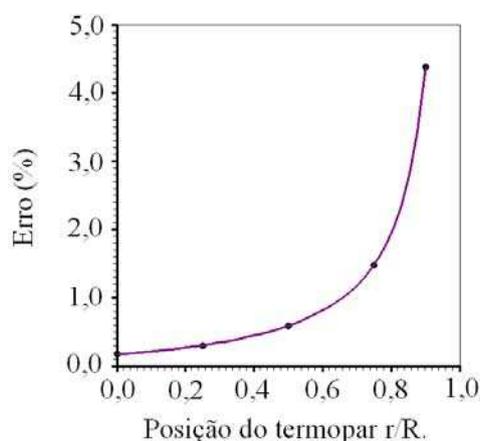


Figura 4.21 - Erro de acurácia no cálculo da difusividade térmica aparente como função da posição do termopar $\frac{r}{R}$.

Como já era esperado, a maior variação de temperatura, nos instantes iniciais do processo de aquecimento, ocorre no termopar que está mais próximo à borda do cilindro. A curva que representa a temperatura deste termopar é a que mais rapidamente se aproxima da temperatura de equilíbrio térmico, T^*_{eq} . Já a curva que representa o termopar no centro do cilindro apresenta uma variação de temperatura, no início do aquecimento, menor do que aquela que está mais próximo à fronteira, bem como um atraso para o início desta variação. O conjunto de todas as curvas que descreve a cinética de penetração do calor para várias posições do termopar pode ser observado na Figura 4.22.

Como se pode observar, a remoção de pontos experimentais foi usada apenas para determinar a difusividade térmica aparente, a partir do ajuste da Equação (3.88). A otimização dos pontos removidos foi determinada pela minimização do qui-quadrado. Por sua vez, o qui-quadrado foi calculado dos conjuntos de pontos analíticos, obtidos a partir de α , e dos conjuntos de pontos obtidos experimentalmente.

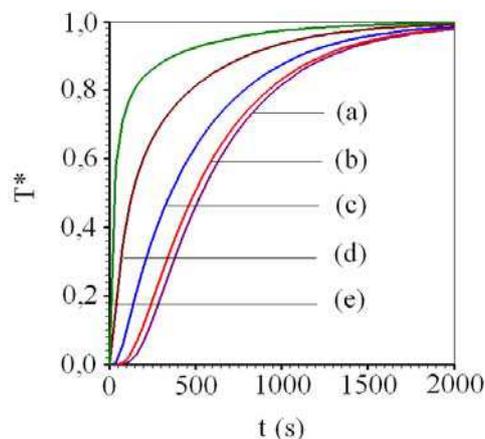


Figura 4.22 – Gráficos das temperaturas adimensionais para várias posições do termopar: a) $r=0$; b) $r=0,25R$; c) $r=0,5R$; d) $r=0,75R$; e) $r=0,9R$.

Nesta pesquisa, mostra-se como uma ideia simples melhora o cálculo da difusividade térmica aparente, mesmo utilizando-se apenas um termo da série que representa a solução analítica da equação de difusão, com a condição de contorno do primeiro tipo, mantendo-se a quantidade máxima possível de informação estatística.

4.2 Aplicação do algoritmo proposto aos dados experimentais do agar gel

Os dados sobre o aquecimento no centro do agar gel, encontram-se na Tabela A.6, em apêndice, e foram obtidos pela digitalização dos gráficos disponíveis sobre o agar gel, que se encontram no artigo de Ukrainczyk (2009), usando o programa computacional, *software xyExtract Graph Digitizer*.

Conhecido o conjunto de pontos que representa as temperaturas experimentais no centro do cilindro de agar gel, em vários instantes, foi possível, através de outro *software*, *LAB Fit Curve Fitting Software, V 7.2.48*, transformar este conjunto de pontos no gráfico da Figura 4.23.

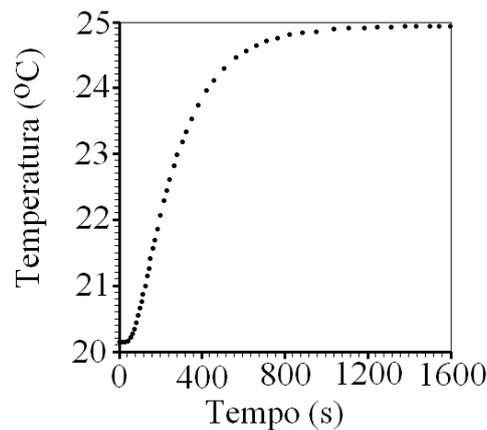


Figura 4.23 – Gráfico da temperatura obtida dos dados experimentais do aquecimento do agar gel em $r=0$.

A Equação (3.77), para $r = 0$, é escrita do seguinte modo,

$$T(0, t) = 24,93 - 7,68948 \exp(-At). \quad (4.2)$$

A realização da regressão não-linear aos dados da Tabela A.6 possibilita determinar o parâmetro A . Usando-se a Equação (3.78) se determina α , e a Equação (3.92) o χ^2 e, assim, obtém-se a Tabela 4.7.

Tabela 4.7 - Valores do parâmetro A , da difusividade térmica aparente e do χ^2 em função da remoção de pontos experimentais do agar gel.

Pontos removidos	A (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,5481831350905x10 ⁻²	1,6019358x10 ⁻⁷	1,562228
01	0,5481831350905x10 ⁻²	1,6019358x10 ⁻⁷	1,562228
02	0,5435527513446x10 ⁻²	1,5884045x10 ⁻⁷	1,332582
03	0,5374137297964x10 ⁻²	1,5704647x10 ⁻⁷	1,054093
04	0,5311707139771x10 ⁻²	1,5522210x10 ⁻⁷	0,8023044
05	0,5255767497152x10 ⁻²	1,5358739x10 ⁻⁷	0,6045696
06	0,5204504693916x10 ⁻²	1,5208937x10 ⁻⁷	0,4472912
07	0,5160915377981x10 ⁻²	1,5081557x10 ⁻⁷	0,3320902
08	0,5121485259660x10 ⁻²	1,4966332x10 ⁻⁷	0,2429541
09	0,5088264280372x10 ⁻²	1,4869251x10 ⁻⁷	0,1792206
16	0,4944139108474x10 ⁻²	1,4448079x10 ⁻⁷	2,8368359x10 ⁻²
17	0,4934637700754x10 ⁻²	1,4420314x10 ⁻⁷	2,5866967x10 ⁻²
18	0,4923190240368x10 ⁻²	1,4386862x10 ⁻⁷	2,4116248x10 ⁻²
19	0,4916025999270x10⁻²	1,4365925x10⁻⁷	2,3726504x10⁻²
20	0,4911112729345x10 ⁻²	1,4351566x10 ⁻⁷	2,3775378x10 ⁻²
21	0,4908322195984x10 ⁻²	1,4343414x10 ⁻⁷	2,3917230x10 ⁻²
22	0,4907021885348x10 ⁻²	1,4339612x10 ⁻⁷	2,4012340x10 ⁻²

A Tabela 4.7 mostra que, no processo de regressão não-linear, só depois de terem sido removidos os primeiros 19 pontos, o χ^2 apresentou seu menor valor, $\chi^2 = 2,3726504 \times 10^{-2}$. O comportamento do χ^2 , com a retirada dos pontos, é mostrado nas Figuras 4.24(a). A Figura 4.24(b) mostra a região onde o qui-quadrado assume o valor mínimo.

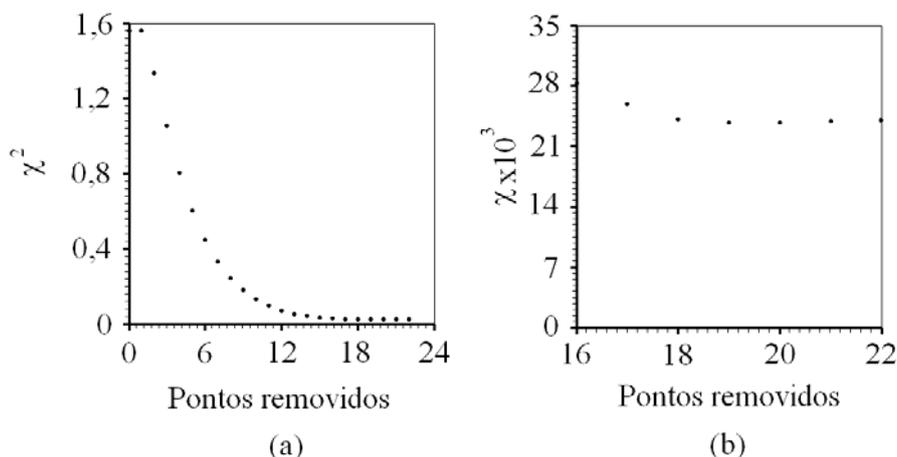


Figura 4.24 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 22 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 17 até 22 pontos.

Se não fosse realizado o processo de otimização, tomando como o valor da difusividade térmica aparente o obtido a partir da regressão não-linear do conjunto inicial de pontos, este valor seria $\alpha = 1,6019358 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. O gráfico que se obteria para a cinética de penetração do calor está representado pela Figura 4.25(a). Usando o algoritmo proposto, a difusividade térmica aparente é $\alpha = 1,4365925 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, que é a que melhor descreve analiticamente o comportamento dos pontos que representam as temperaturas obtidas experimentalmente e estão representadas na Figura 4.25(b). Na Tabela A.7 estão relacionadas às temperaturas obtidas experimentalmente e seus respectivos instantes, os valores das temperaturas analíticas nestes mesmos instantes e os erros percentuais cometidos ao calculá-las na cinética de aquecimento do agar gel.

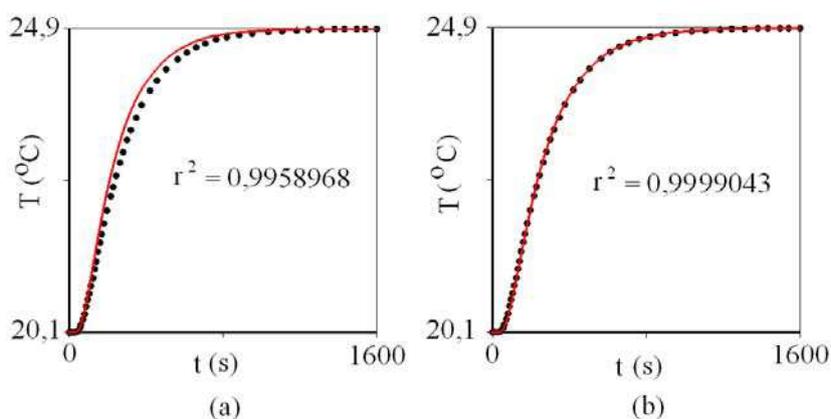


Figura 4.25 – (a) Simulação analítica da temperatura do agar gel, sem o processo de otimização e (b) com o algoritmo proposto neste trabalho para o termopar em $r=0$.

A partir do valor da difusividade térmica aparente obtida pelo método usado por Ukrainczyk (2009), $\alpha = 1,46 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e do valor obtido usando o algoritmo proposto, foi possível calcular a discrepância entre estes métodos,

$$\text{discrepância} = \frac{1,4365925 \times 10^{-7} - 1,46 \times 10^{-7}}{1,46 \times 10^{-7}} \times 100 = -1,60\%.$$

Outro parâmetro estatístico importante para avaliar o resultado obtido é a precisão das medidas realizadas. O erro, devido à precisão das medidas, no cálculo da difusividade térmica aparente cometido no processo de regressão não-linear, adotando-se o nível de significância de 95,4%, foi de 0,24%. Com este nível de significância, a difusividade térmica aparente pode ser escrita como, $\alpha = (1,4366 \pm 0,0034) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Tomando o valor do parâmetro A que se encontra na linha da Tabela 4.7, onde o qui-quadrado assume o valor mínimo foi possível obter função $T(0,t)$ que melhor representa o conjunto (t, T_{exp}) ,

$$T(0,t) = 24,93 - 7,68948 \exp(-0,004916025999270t). \quad (4.3)$$

O gráfico da Figura 4.26 foi plotado a partir da Equação (4.3) e pelo conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado. O coeficiente de determinação que informa a qualidade da regressão não-linear foi de $r^2 = 0,9999064$. Tais indicadores estatísticos, robustecem e comprovam a afirmativa de que a abordagem do algoritmo proposto apresenta excelente desempenho na determinação da difusividade térmica aparente permitindo descrever todo aquecimento quando a condição de contorno de Dirichlet estiver sendo considerada no processo de transferência de calor.

Por outro lado, fixado um tempo qualquer, a Equação (3.7) faz com que seja possível apresentar a distribuição radial de temperatura do processo de aquecimento.

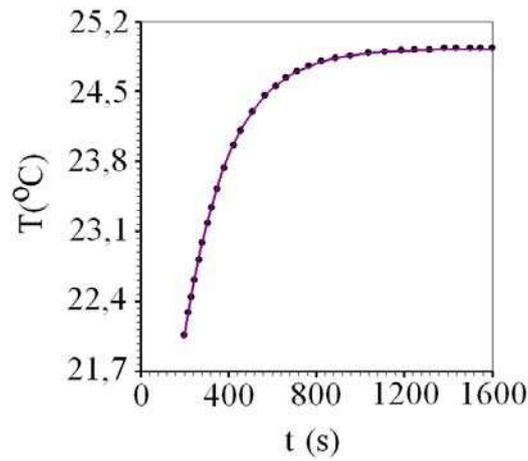


Figura 4.26 - Regressão não-linear com a remoção dos 19 primeiros pontos.

A Figura 4.27(a) mostra os círculos isotérmicos do cilindro infinito produzidos no processo de aquecimento correspondente ao instante 160 s após iniciado o processo de aquecimento. E a Figura 4.27(b) mostra a curva da temperatura a partir do centro do cilindro no mesmo instante.

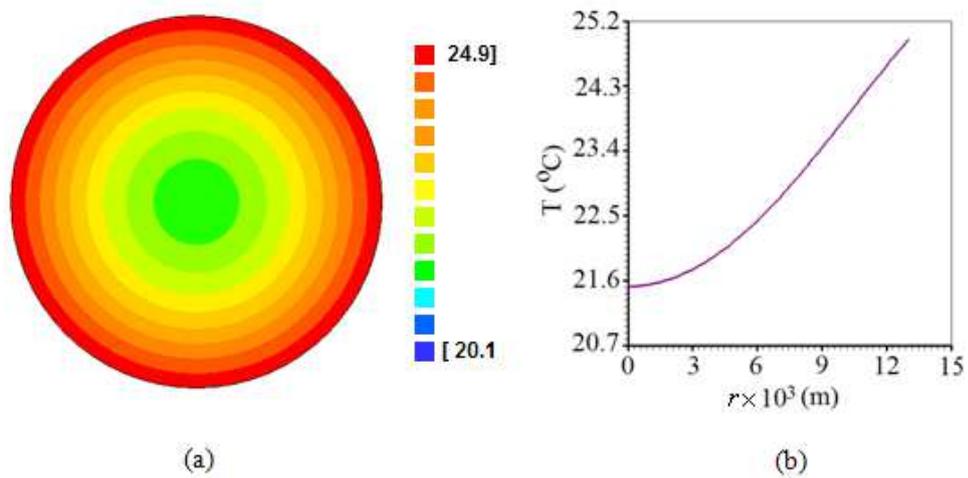


Figura 4.27 - Após 160 s do início do processo de aquecimento: (a) Contornos mostrando a distribuição de temperaturas; (b) Gráfico rxT .

4.2.1 Discussão dos resultados: agar gel

A técnica apresentada neste trabalho é útil para determinar a difusividade ou a condutividade térmica de diversos produtos, tais como purês e cremes, para os quais se dispõe de dados experimentais, (Betta et al., 2009; Mariani et al., 2009; Silva et al., 2011b). Na técnica atualmente encontrada na literatura, o logaritmo é aplicado à temperatura adimensional dada por, $(T - T_{eq}) / (T_0 - T_{eq})$ e apenas a porção linear é utilizada para determinar a difusividade térmica aparente por meio de regressão linear (Markowski et al., 2004; Panas e Sypek, 2006; Erdogdu, 2008). Neste caso, a porção linear é identificada por uma inspeção visual do gráfico obtido com a linearização, se os pontos estiverem fora do segmento de reta são descartados antes da regressão linear. Este procedimento envolve certo grau de subjetividade no que diz respeito ao número de pontos a serem removidos. Neste trabalho, o número de pontos a serem removidos não depende da inspeção visual ou da linearização. Este número é determinado por meio do algoritmo apresentado no presente trabalho que é baseado no conceito de otimização. Como pode ser observado, a remoção dos pontos experimentais é usada apenas para determinar a difusividade térmica aparente pelo ajuste da Equação (3.76) a uma parte do conjunto de dados experimentais. O número ótimo de pontos da retirada é determinado pelo teste do qui-quadrado, obtido na simulação envolvendo todo o conjunto de dados, usando a Equação (3.7) e os valores de α obtidos por regressão não-linear.

Com a aplicação da OREP modificada se obteve a difusividade térmica aparente do agar gel com uma precisão de 0,24%. Ukrainczyk (2009), usando uma solução numérica e um procedimento iterativo de otimização baseado no algoritmo de Levenberg-Marquardt, obteve a difusividade térmica aparente do agar gel, $\alpha = 1,459 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com uma precisão de 0,6% e comparou o resultado encontrado com o obtido por Lemmon et al. (2005) que foi de $\alpha = 1,444 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$; a acurácia do resultado foi de 1,0%. Comparando o valor obtido, neste trabalho para a difusividade térmica aparente do agar gel $\alpha = 1,437 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com precisão de 0,17%, com o resultado obtido por Lemmon et al. (2005), a acurácia do resultado foi de 0,48% que é menor do que a obtida por Ukrainczyk (2009). Por outro lado a Equação (3.7) permite apresentar a distribuição radial da temperatura para um tempo dado, como se pode observar na figura 4.27.

A partir dos resultados obtidos usando os dados experimentais do aquecimento do agar gel é possível afirmar que o algoritmo proposto é útil para determinar a difusividade térmica aparente quando o fenômeno físico estudado puder ser descrito através da solução analítica da equação de difusão unidimensional e com a condição de contorno do primeiro tipo.

4.3 Validação da solução analítica bidimensional

Para validar a abordagem do algoritmo proposto, OREP modificada, para a condição de contorno do primeiro tipo, aplicada a um cilindro finito, foram gerados vários conjuntos de dados para oito posições do termopar, com as temperaturas na forma adimensional. O programa utilizado para gerar estes conjuntos de dados foi testado na pesquisa desenvolvida por Silva, C. (2012). O sensor de temperatura foi colocado nas seguintes posições: 1) $r = 0$, $y = 0$; 2) $r = 0$, $y = 0,005$ m; 3) $r = 0$, $y = 0,01$ m; 4) $r = 0$, $y = 0,015$ m; 5) $r = 0,005$ m; $y = 0$; 6) $r = 0,01$ m; $y = 0$; 7) $r = 0,015$ m; $y = 0$ e 8) $r = 0,01$ m; $y = 0,01$ m.

4.3.1 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0$; $y = 0$

Simulando-se o termopar no centro do cilindro, $r=0$; $y=0$, foi gerado o primeiro conjunto de dados apresentado na Tabela A.8, em apêndice a este trabalho. A partir da Tabela A.8 foi utilizado o programa *LAB Fit Curve Fitting Software, V 7.2.48*, para gerar a Figura 4.28 das temperaturas adimensionais de aquecimento simuladas numericamente com o termopar na origem do sistema de coordenada.

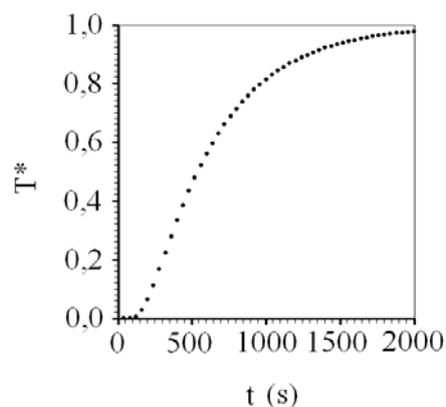


Figura 4.28 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0$.

A Equação (3.89), fazendo $r=0$; $y=0$ se determina o valor do parâmetro C , para vários conjuntos de pontos usando a função,

$$T^*(0,0,t) = 1 - 2,3969753379393 \exp(-Ct). \quad (4.4)$$

Através de regressão não-linear são obtidos os valores para o parâmetro C . A partir da Equação (3.81) se determina α , em seguida as temperaturas analíticas pela Equação (3.87) e através da Equação (3.92) o χ^2 . A Tabela 4.8 mostra os valores obtidos.

Tabela 4.8 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado, com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0$.

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,36728861934x10 ⁻²	1,7806663x10 ⁻⁷	0,1587478
01	0,36731926944x10 ⁻²	1,7808149x10 ⁻⁷	0,1588934
02	0,35554632536x10 ⁻²	1,7237380x10 ⁻⁷	0,1066966
03	0,34283062663x10 ⁻²	1,6620906x10 ⁻⁷	5,9854846x10 ⁻²
04	0,33257049013x10 ⁻²	1,6123481x10 ⁻⁷	3,0631535x10 ⁻²
05	0,32508402893x10 ⁻²	1,5760527x10 ⁻⁷	1,4913540x10 ⁻²
06	0,31984356412x10 ⁻²	1,5506461x10 ⁻⁷	7,0565450x10 ⁻³
07	0,31623756270x10 ⁻²	1,5331638x10 ⁻⁷	3,2783486x10 ⁻³
08	0,31377373006x10 ⁻²	1,5212187x10 ⁻⁷	1,5031317x10 ⁻³
09	0,31209386422x10 ⁻²	1,5130745x10 ⁻⁷	6,8241369x10 ⁻⁴
10	0,31094813429x10 ⁻²	1,5075199x10 ⁻⁷	3,0857517x10 ⁻⁴
11	0,31016543959x10 ⁻²	1,5037251x10 ⁻⁷	1,4139053x10 ⁻⁴
12	0,30962951245x10 ⁻²	1,5011270x10 ⁻⁷	6,8719935x10 ⁻⁵
13	0,30926155011x10 ⁻²	1,4993429x10 ⁻⁷	3,8652808x10 ⁻⁵
14	0,30900814307x10 ⁻²	1,4981146x10 ⁻⁷	2,7393069x10 ⁻⁵
15	0,30883305716x10 ⁻²	1,4972656x10 ⁻⁷	2,4125777x10 ⁻⁵
16	0,30871165255x10⁻²	1,4966771x10⁻⁷	2,4034243x10⁻⁵
17	0,30862713897x10 ⁻²	1,4962674x10 ⁻⁷	2,5021876x10 ⁻⁵
18	0,30856803049x10 ⁻²	1,4959808x10 ⁻⁷	2,6229603x10 ⁻⁵
19	0,30852646668x10 ⁻²	1,4957793x10 ⁻⁷	2,7329110x10 ⁻⁵
20	0,30849702927x10 ⁻²	1,4956366x10 ⁻⁷	2,8233968x10 ⁻⁵

Ao serem removidos os 16 pontos iniciais, observa-se na Tabela 4.8 que o qui-quadrado assume seu menor valor, $\chi^2 = 2,4034243 \times 10^{-5}$. Para esta situação de mínimo, a difusividade térmica aparente correspondente vale, $\alpha = 1,4966771 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. O gráfico

da Figura 4.29(a) mostra como o χ^2 varia com o número de pontos removidos. A partir da remoção do décimo ponto a variação do χ^2 fica imperceptível.

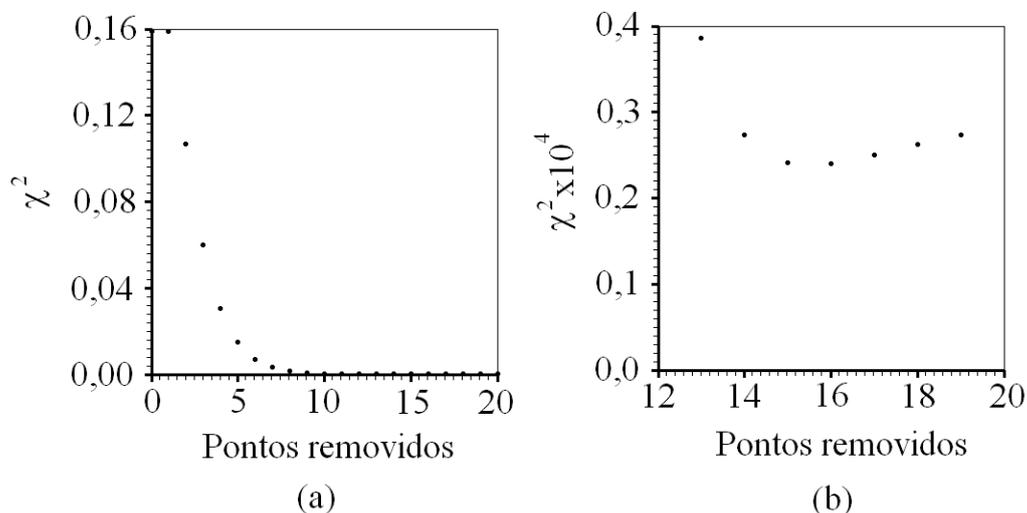


Figura 4.29 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 12 e 20 pontos.

Para tornar as pequenas variações do χ^2 perceptíveis, ampliou-se o gráfico da Figura 4.29(a) na região onde o valor do χ^2 torna-se mínimo. A Figura 4.29(b) mostra esta ampliação onde se pode observar que o menor valor do χ^2 ocorre com a remoção dos 16 primeiros pontos.

Se não fosse usado o processo de otimização, tomando como verdadeira a difusividade térmica aparente obtida a partir do conjunto inicial de pontos, esta seria $\alpha = 1,7806663 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Neste caso o gráfico que se obteria para a cinética de penetração do calor está representado na Figura 4.30(a). O gráfico representado pela Figura 4.30(b) corresponde à cinética de penetração de calor no cilindro finito para a difusividade térmica aparente, $\alpha = 1,4966771 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, obtido através do algoritmo proposto neste trabalho.

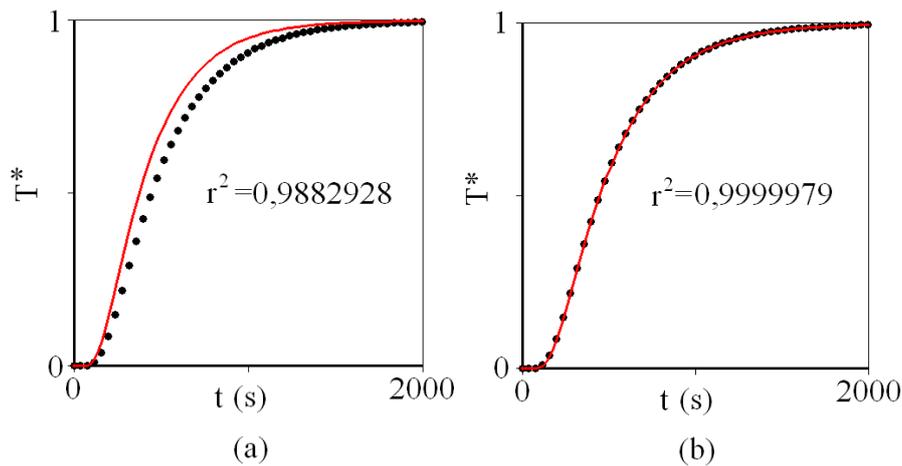


Figura 4.30 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto e (b) com a utilização do processo de otimização.

O gráfico da Figura 4.31 foi obtido a partir da Equação (4.4), com o parâmetro C dado por $C = 0,3087116525 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, e pelo conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado.

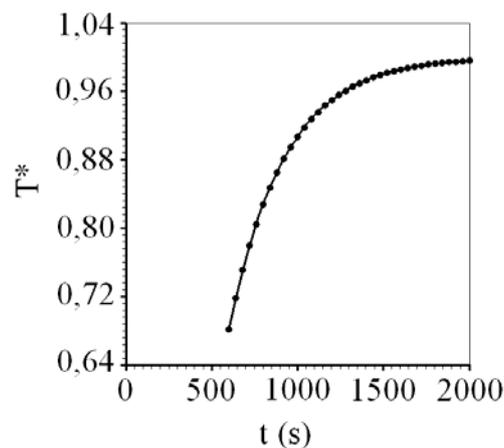


Figura 4.31 – Regressão não-linear com a remoção de 16 pontos em $r=0$; $y=0$.

O erro devido à acurácia entre o valor obtido da difusividade térmica aparente usando o algoritmo proposto, $\alpha = 1,4966771 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e o valor da difusividade térmica aparente estipulada na simulação numérica $\alpha_{num} = 1,50 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, foi de 0,22%,

$$erro = \frac{1,4966771 \times 10^{-7} - 1,50 \times 10^{-7}}{1,50 \times 10^{-7}} \times 100 = -0,22\%.$$

Se o algoritmo proposto não fosse usado, tomando o valor da difusividade térmica aparente $\alpha = 1,7806663 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ obtido com a regressão não-linear utilizando o conjunto inicial com 51 pontos, o erro devido à acurácia seria 18,71% que é um erro 85 vezes maior quando comparado com o erro de 0,22% cometido quando se usa o algoritmo proposto,

$$erro = \frac{1,7806663 \times 10^{-7} - 1,50 \times 10^{-7}}{1,50 \times 10^{-7}} \times 100 = 18,71\%.$$

Outra informação estatística importante para a análise das medidas realizadas está relacionada com a sua dispersão. Adotando-se o nível de significância de 95,4%, a difusividade térmica aparente é $\alpha = (1,49668 \pm 0,00045) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. O erro devido à precisão foi de 0,03%. Considerando-se o conjunto com todos os 51 pontos, a difusividade térmica aparente, com o mesmo nível de confiança, seria $\alpha = (1,78 \pm 0,28) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, com erro devido à precisão de 15,7%.

4.3.2 Resultados obtidos para a posição $r = 0$; $y = 0,005 \text{ m}$

A partir da simulação numérica foi gerada a Tabela A.9, em apêndice, e a Figura 4.32.

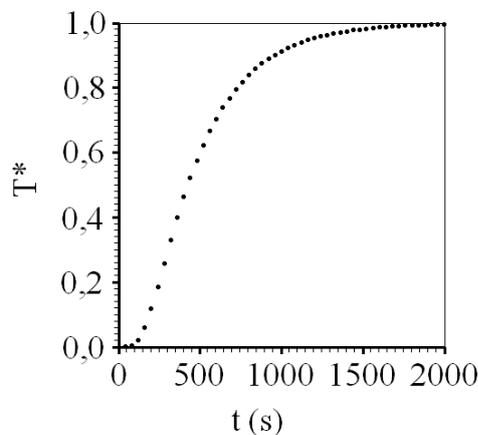


Figura 4.32 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura em $r = 0$; $y = 0,005 \text{ m}$.

A regressão não-linear aos dados da Tabela A.9 produziu a Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Valores de C , de α e do χ^2 obtidos por regressão não-linear com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,005$ m.

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,35290458261x10 ⁻²	1,7109305x10 ⁻⁷	9,0528227x10 ⁻²
01	0,35290458261x10 ⁻²	1,7109305x10 ⁻⁷	9,0528227x10 ⁻²
02	0,34371391959x10 ⁻²	1,6663729x10 ⁻⁷	5,9578400x10 ⁻²
03	0,33375386111x10 ⁻²	1,6180852x10 ⁻⁷	3,2346845x10 ⁻²
04	0,32578406798x10 ⁻²	1,5794465x10 ⁻⁷	1,5955422x10 ⁻²
05	0,32004884862x10 ⁻²	1,5516413x10 ⁻⁷	7,4910740x10 ⁻³
06	0,31609514184x10 ⁻²	1,5324733x10 ⁻⁷	3,4245639x10 ⁻³
07	0,31342108397x10 ⁻²	1,5195090x10 ⁻⁷	1,5429126x10 ⁻³
08	0,31162821097x10 ⁻²	1,5108169x10 ⁻⁷	6,9026358x10 ⁻⁴
09	0,31043131365x10 ⁻²	1,5050142x10 ⁻⁷	3,0884723x10 ⁻⁴
10	0,30963438656x10 ⁻²	1,5011507x10 ⁻⁷	1,3983312x10 ⁻⁴
11	0,30910504913x10 ⁻²	1,4985844x10 ⁻⁷	6,5553999x10 ⁻⁵
12	0,30875456424x10 ⁻²	1,4968852x10 ⁻⁷	3,3200908x10 ⁻⁵
13	0,30852360878x10 ⁻²	1,4957654x10 ⁻⁷	1,9244155x10 ⁻⁵
14	0,30837255315x10 ⁻²	1,4950331x10 ⁻⁷	1,3294192x10 ⁻⁵
15	0,30827490683x10 ⁻²	1,4945596x10 ⁻⁷	1,0787491x10 ⁻⁵
16	0,30821292916x10 ⁻²	1,4942593x10 ⁻⁷	9,7435468x10 ⁻⁶
17	0,30817473566x10 ⁻²	1,4940740x10 ⁻⁷	9,3117651x10 ⁻⁶
18	0,30815234947x10 ⁻²	1,4939656x10 ⁻⁷	9,1341499x10 ⁻⁶
19	0,30814040457x10 ⁻²	1,4939076x10 ⁻⁷	9,0603226x10 ⁻⁶
20	0,30813530092x10 ⁻²	1,4938828x10 ⁻⁷	9,0349686x10 ⁻⁶
21	0,30813462100x10⁻²	1,4938794x10⁻⁷	9,0312697x10⁻⁶
22	0,30813670797x10 ⁻²	1,4938897x10 ⁻⁷	9,0420208x10 ⁻⁶
23	0,30814047253x10 ⁻²	1,4939080x10 ⁻⁷	9,0618869x10 ⁻⁶
24	0,30814516151x10 ⁻²	1,4939306x10 ⁻⁷	9,0882331x10 ⁻⁶

O gráfico da Figura 4.33(a) mostra como o χ^2 varia no processo de regressão não-linear. Para tornar perceptíveis as variações do qui-quadrado na região onde seu valor é mínimo, foi feita nesta região, uma ampliação como mostra o gráfico da Figura 4.33(b)

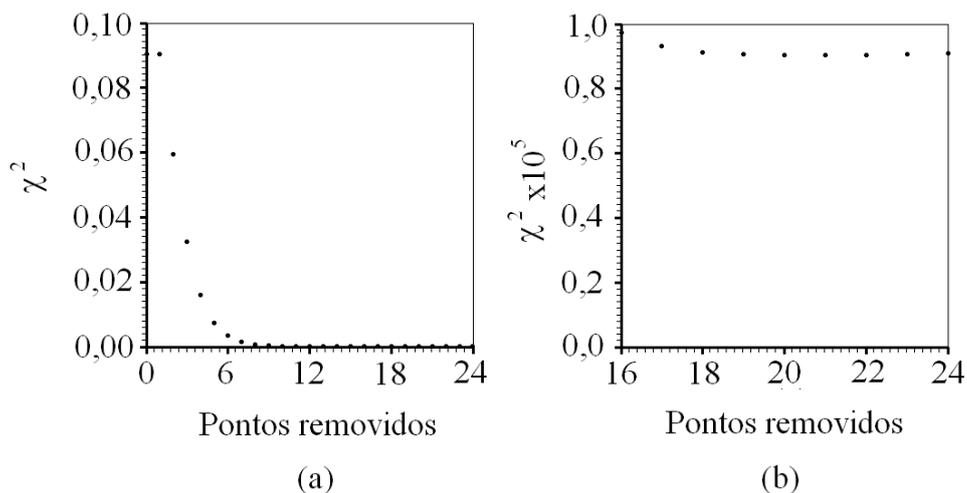


Figura 4.33 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 24 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 16 a 24 pontos.

Os gráficos das Figuras 4.34(a) e 4.34(b) mostram a cinética de penetração de calor, sem e com o processo de otimização respectivamente.

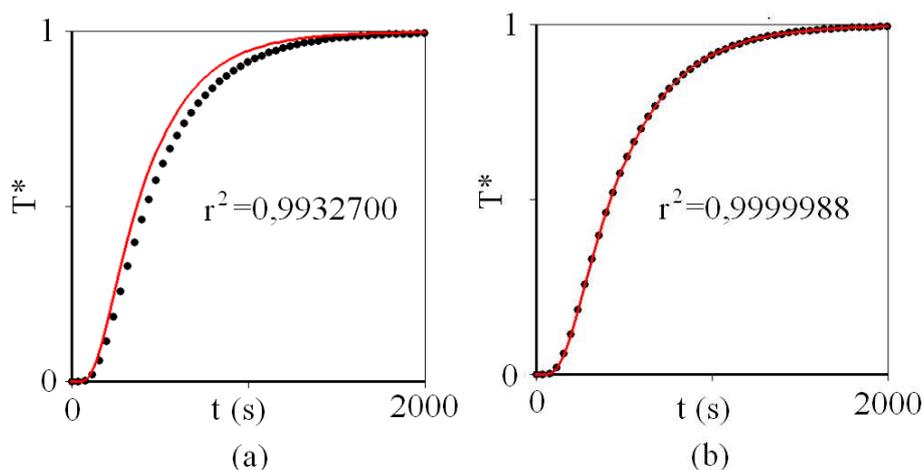


Figura 4.34 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o valor da difusividade térmica aparente obtido por regressão não-linear do conjunto inicial e (b) usando o algoritmo proposto em $r=0; y=0,005$ m.

O gráfico da Figura 4.35 mostra o conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado, com coeficiente de determinação $r^2 = 0,9999893$.

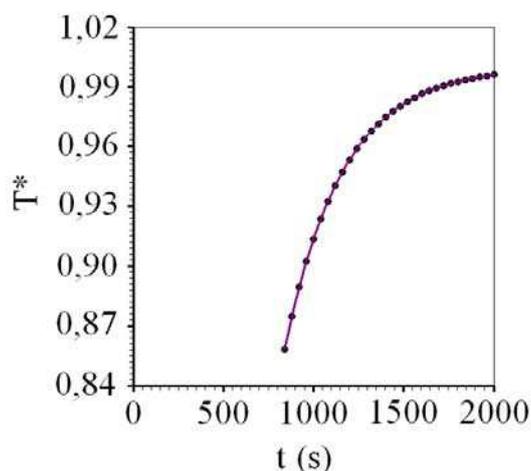


Figura 4.35 – Regressão não-linear com a remoção do vigésimo primeiro ponto para $r=0; y=0,005$ m.

Com o uso da OREP modificada, a difusividade térmica aparente vale $\alpha = (1,49388 \pm 0,00004) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro devido à acurácia $-0,41\%$ e o devido à precisão das medidas $0,003\%$. Sem o uso do algoritmo proposto, $\alpha = (1,71 \pm 0,24) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro devido à acurácia $14,1\%$ e o devido à precisão $14,0\%$.

4.3.3 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0; y = 0,01$ m

Por simulação numérica foi gerada a Tabela A.10, em apêndice, e a Figura 4.36.

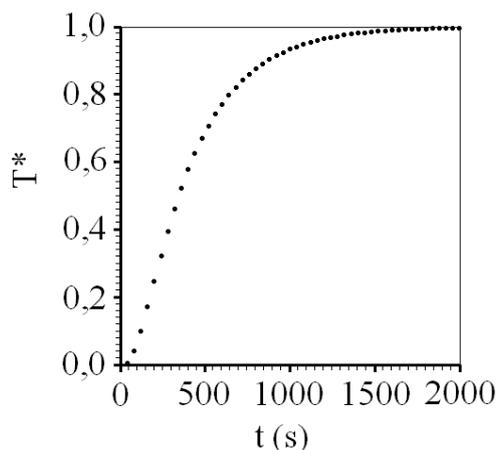


Figura 4.36 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0; y=0,01$ m.

Usando-se o algoritmo proposto neste trabalho, obtém-se os valores de C , α e χ^2 apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Valores para o parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,01$ m.

Ponto removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,32057175121x10 ⁻²	1,5541765x10 ⁻⁷	6,9963466x10 ⁻³
01	0,32057175121x10 ⁻²	1,5541765x10 ⁻⁷	6,9963466x10 ⁻³
02	0,31693516504x10 ⁻²	1,5365458x10 ⁻⁷	3,8455173x10 ⁻³
03	0,31328800526x10 ⁻²	1,5188638x10 ⁻⁷	1,5972147x10 ⁻³
04	0,31058205431x10 ⁻²	1,5057451x10 ⁻⁷	5,4851029x10 ⁻⁴
05	0,30884692408x10 ⁻²	1,4973328x10 ⁻⁷	1,6481486x10 ⁻⁴
06	0,30783918892x10 ⁻²	1,4924471x10 ⁻⁷	4,8334699x10 ⁻⁵
07	0,30730646444x10 ⁻²	1,4898644x10 ⁻⁷	1,8846147x10 ⁻⁵
08	0,30706115051x10 ⁻²	1,4886751x10 ⁻⁷	1,2794839x10 ⁻⁵
09	0,30698042918x10⁻²	1,4882838x10⁻⁷	1,1845553x10⁻⁵
10	0,30698886748x10 ⁻²	1,4883247x10 ⁻⁷	1,1921379x10 ⁻⁵
11	0,30704196769x10 ⁻²	1,4885822x10 ⁻⁷	1,2522678x10 ⁻⁵
12	0,30711435669x10 ⁻²	1,4889331x10 ⁻⁷	1,3702720x10 ⁻⁵
13	0,30719211884x10 ⁻²	1,4893101x10 ⁻⁷	1,5433816x10 ⁻⁵

Os gráficos das Figuras 4.37(a) e 4.37(b) mostram o comportamento do χ^2 .

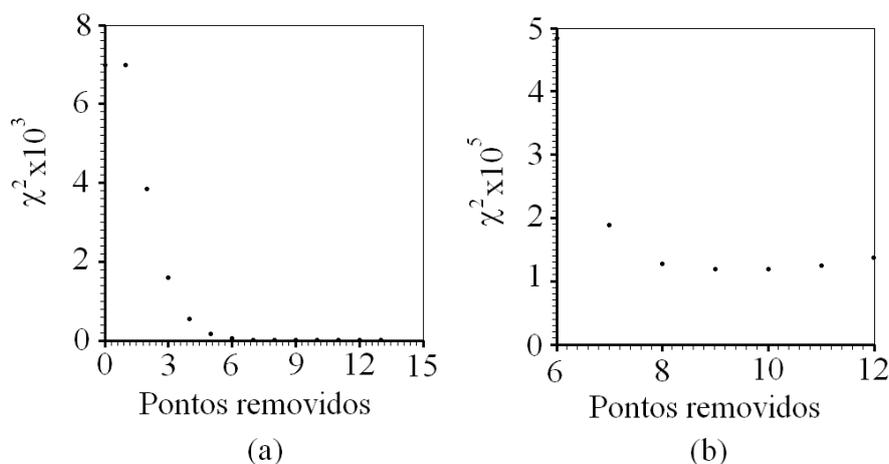


Figura 4.37 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 15 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 6 a 12 pontos.

Sem o processo de otimização, o gráfico da Figura 4.38(a) mostra a cinética de penetração do calor para $\alpha = 1,5541765 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e o coeficiente de determinação $r^2 = 0,9994454$. Com o processo de otimização, o gráfico da Figura 4.38(b) corresponde à cinética de penetração de calor para $\alpha = 1,4882838 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ com o coeficiente de determinação $r^2 = 0,9999983$.

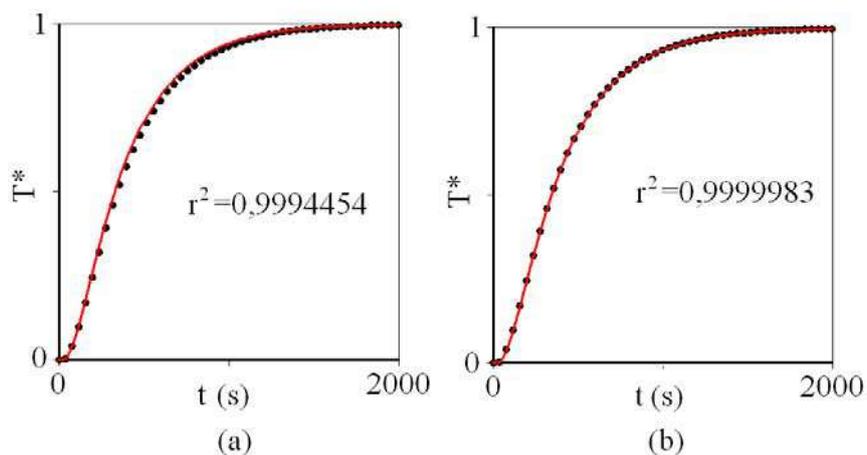


Figura 4.38 – (a) Gráfico da temperatura adimensional simulada analiticamente usando a difusividade térmica aparente obtida com a regressão não-linear de todos os pontos e (b) usando o algoritmo proposto com o termopar em $r=0$; $y=0,01 \text{ m}$.

O gráfico da Figura 4.39 foi obtido com o parâmetro C dado por $C = 0,30698042918 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e o coeficiente de determinação dado por $r^2 = 0,9999968$.

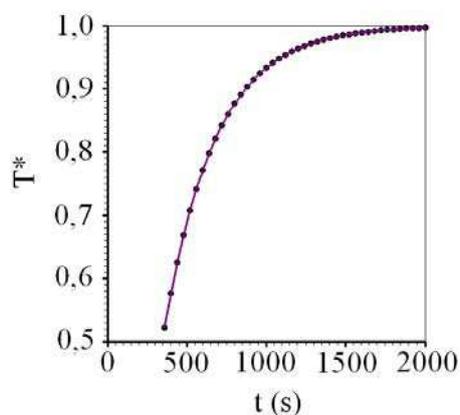


Figura 4.39 – Regressão não-linear com a remoção dos nove primeiros pontos para $r=0$; $y=0,01 \text{ m}$.

Usando o algoritmo proposto, $\alpha = (1,48828 \pm 0,00061) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ o erro devido à acurácia, $-0,78\%$, e o devido à precisão, $0,04\%$. Sem o uso do algoritmo proposto $\alpha = (1,55 \pm 0,12) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro de acurácia, $3,6\%$ e o devido à precisão $7,74\%$.

4.3.4 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0$; $y = 0,015 \text{ m}$

Por simulação numérica se obteve a Tabela A.11, em apêndice, e o gráfico da Figura 4.40.

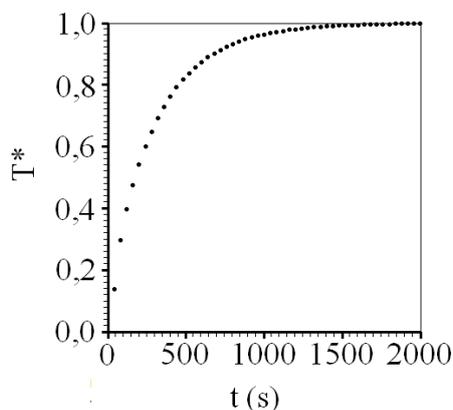


Figura 4.40 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0$, $y = 0,015 \text{ m}$.

Os valores de C , α , e do χ^2 são mostrados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,015 \text{ m}$.

Pontos removidos	$C \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\alpha \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	χ^2
00	$0,28683578901 \times 10^{-2}$	$1,3906198 \times 10^{-7}$	$4,8382836 \times 10^{-3}$
01	$0,28683578901 \times 10^{-2}$	$1,3906198 \times 10^{-7}$	$4,8382836 \times 10^{-3}$
02	$0,28959082953 \times 10^{-2}$	$1,4039766 \times 10^{-7}$	$3,3313390 \times 10^{-3}$
03	$0,29226829214 \times 10^{-2}$	$1,4169574 \times 10^{-7}$	$2,1634607 \times 10^{-3}$
04	$0,29459610715 \times 10^{-2}$	$1,4282429 \times 10^{-7}$	$1,3767225 \times 10^{-3}$
05	$0,29666617557 \times 10^{-2}$	$1,4382789 \times 10^{-7}$	$8,4955111 \times 10^{-4}$

Tabela 4.11 (continuação).

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
06	0,29849233136x10 ⁻²	1,4471324x10 ⁻⁷	5,1517953x10 ⁻⁴
07	0,30005920589x10 ⁻²	1,4547288x10 ⁻⁷	3,2332633x10 ⁻⁴
08	0,30136644158x10 ⁻²	1,4610664x10 ⁻⁷	2,2888347x10 ⁻⁴
09	0,30243336560x10⁻²	1,4662390x10⁻⁷	1,9519069x10⁻⁴
10	0,30329162237x10 ⁻²	1,4704000x10 ⁻⁷	1,9593588x10 ⁻⁴
11	0,30397641927x10 ⁻²	1,4737201x10 ⁻⁷	2,1412065x10 ⁻⁴
12	0,30452121902x10 ⁻²	1,4763613x10 ⁻⁷	2,3962288x10 ⁻⁴
13	0,30495523996x10 ⁻²	1,4784655x10 ⁻⁷	2,6687680x10 ⁻⁴
14	0,30530266325x10 ⁻²	1,4801499x10 ⁻⁷	2,9310369x10 ⁻⁴

Os gráficos das Figuras 4.41(a) e 4.41(b) mostram como o χ^2 varia com o número de pontos removidos.

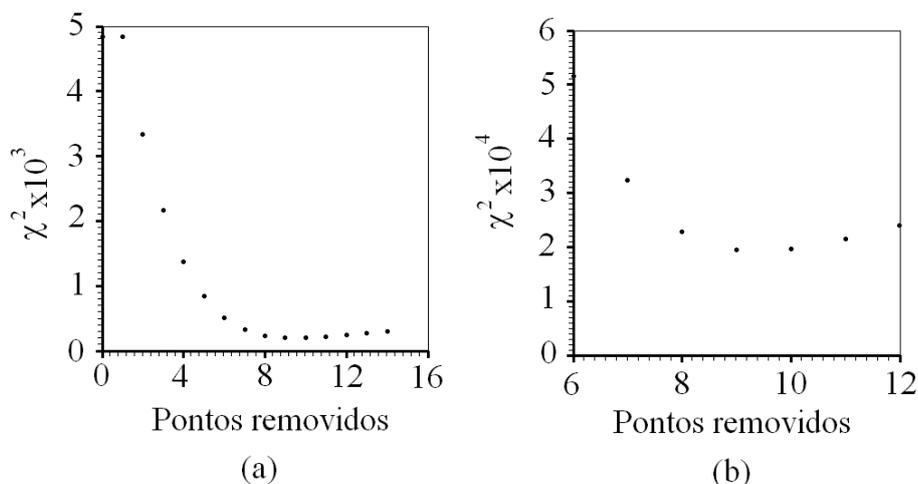


Figura 4.41 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 14 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 7 e 12 pontos.

Sem o processo de otimização, $\alpha = 1,3906198 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e a cinética de penetração dado pela Figura 4.42(a). A Figura 4.42(b) corresponde a $\alpha = 1,4662390 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, obtido através do algoritmo proposto neste trabalho.

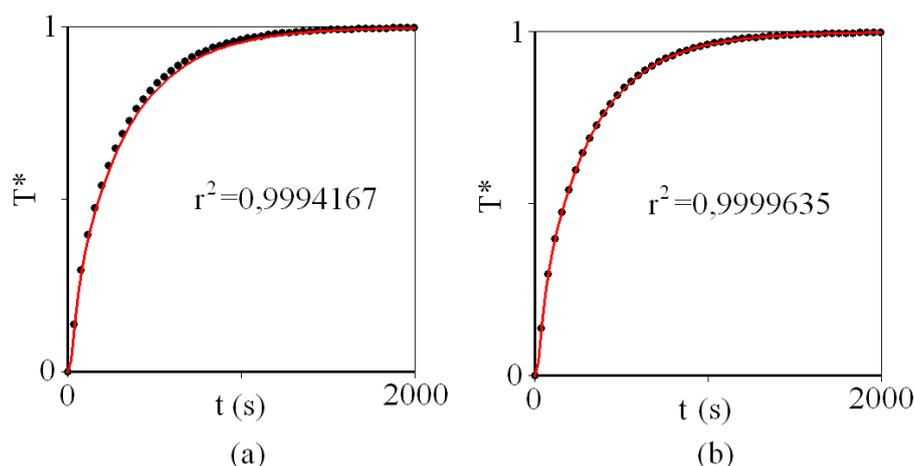


Figura 4.42 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r = 0$; $y = 0,015$ m sem utilizar o processo de otimização proposto e (b) utilizando o algoritmo proposto neste trabalho.

O gráfico da Figura 4.43 foi obtido com $C = 0,30243336560 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.

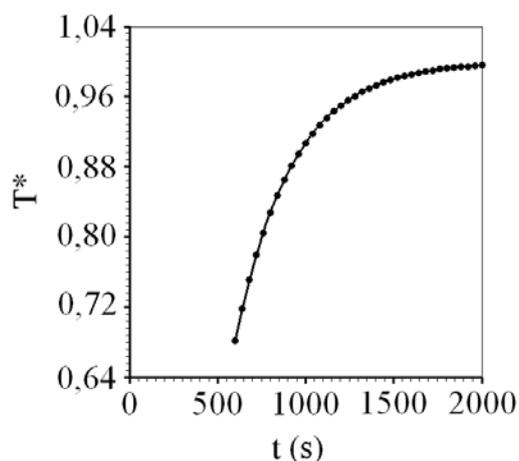


Figura 4.43 – Regressão não-linear com a remoção de 9 pontos em $r = 0$; $y = 0,015$ m.

Com o uso da OREP modificada, a difusividade térmica aparente vale $\alpha = (1,4662 \pm 0,0057) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, o erro devido à acurácia 2,25% e o de precisão das medidas 0,39%. Sem o uso do algoritmo proposto, $\alpha = (1,39 \pm 0,10) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, o erro devido à acurácia 7,3% e o devido à precisão 7,2%.

4.3.5 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,25R$; $y = 0$

Por simulação numérica foi gerada a Tabela A.12 em apêndice, e o gráfico da Figura 4.44.

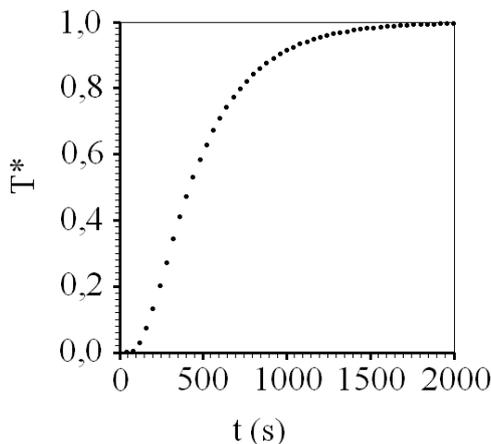


Figura 4.44 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,25R$; $y = 0$.

Os valores de C , α , e o χ^2 se encontram na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Valores de C , α e χ^2 com o termopar em $r=0,25R$; $y=0$.

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	$0,35371800965 \times 10^{-2}$	$1,7148741 \times 10^{-7}$	$8,9350045 \times 10^{-2}$
01	$0,35371800965 \times 10^{-2}$	$1,7148741 \times 10^{-7}$	$8,9350045 \times 10^{-2}$
02	$0,34466252091 \times 10^{-2}$	$1,6709720 \times 10^{-7}$	$5,9590410 \times 10^{-2}$
03	$0,33488941246 \times 10^{-2}$	$1,6235906 \times 10^{-7}$	$3,3282075 \times 10^{-2}$
04	$0,32701822150 \times 10^{-2}$	$1,5854299 \times 10^{-7}$	$1,7090779 \times 10^{-2}$
05	$0,32125422877 \times 10^{-2}$	$1,5574852 \times 10^{-7}$	$8,4023541 \times 10^{-3}$
06	$0,31719239277 \times 10^{-2}$	$1,5377930 \times 10^{-7}$	$4,0325695 \times 10^{-3}$
07	$0,31437748894 \times 10^{-2}$	$1,5241457 \times 10^{-7}$	$1,9080336 \times 10^{-3}$
08	$0,31244171834 \times 10^{-2}$	$1,5147610 \times 10^{-7}$	$8,9516479 \times 10^{-4}$
09	$0,31111498995 \times 10^{-2}$	$1,5083288 \times 10^{-7}$	$4,1817539 \times 10^{-4}$
10	$0,31020684797 \times 10^{-2}$	$1,5039259 \times 10^{-7}$	$1,9561229 \times 10^{-4}$
11	$0,30958545641 \times 10^{-2}$	$1,5009134 \times 10^{-7}$	$9,2676943 \times 10^{-5}$
12	$0,30916032832 \times 10^{-2}$	$1,4988522 \times 10^{-7}$	$4,5572389 \times 10^{-5}$
13	$0,30886958970 \times 10^{-2}$	$1,4974428 \times 10^{-7}$	$2,4343022 \times 10^{-5}$
14	$0,30867096446 \times 10^{-2}$	$1,4964797 \times 10^{-7}$	$1,4988756 \times 10^{-5}$
15	$0,30853555619 \times 10^{-2}$	$1,4958233 \times 10^{-7}$	$1,1016376 \times 10^{-5}$

Tabela 4.12 (continuação).

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
16	0,30844357478x10 ⁻²	1,4953774x10 ⁻⁷	9,4327870x10 ⁻⁶
17	0,30838145731x10 ⁻²	1,4950763x10 ⁻⁷	8,8726665x10 ⁻⁶
18	0,30833987063x10⁻²	1,4948746x10⁻⁷	8,7285680x10⁻⁶
19	0,30831240004x10 ⁻²	1,4947415x10 ⁻⁷	8,7356675x10 ⁻⁶
20	0,30829461049x10 ⁻²	1,4946552x10 ⁻⁷	8,7806247x10 ⁻⁶
21	0,30828344073x10 ⁻²	1,4946011x10 ⁻⁷	8,8293227x10 ⁻⁶
22	0,30827675726x10 ⁻²	1,4945687x10 ⁻⁷	8,8642228x10 ⁻⁶
23	0,30827308413x10 ⁻²	1,4945508x10 ⁻⁷	8,8840652x10 ⁻⁶

Os gráficos das Figuras 4.45(a) e 4.45(b) mostram como o χ^2 varia com o número de pontos removidos.

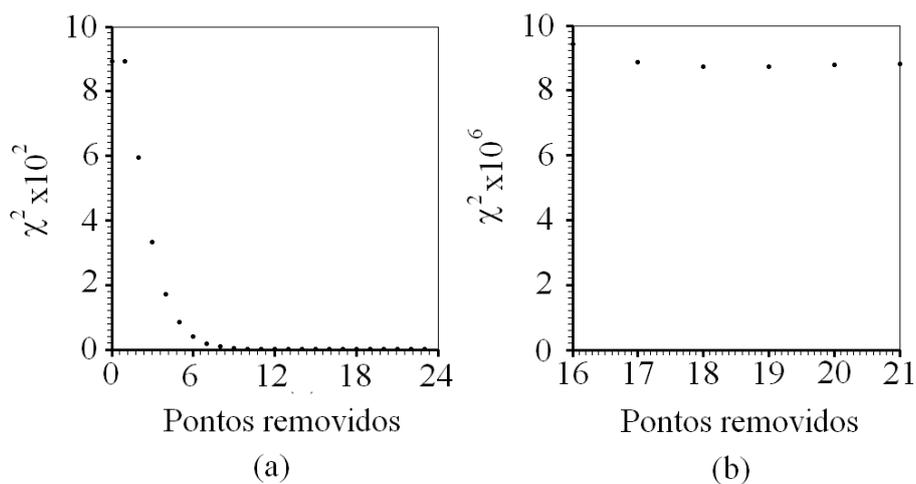


Figura 4.45 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 24 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 17 e 21 pontos.

Se não fosse usada a OREP modificada $\alpha = 1,7148741x10^{-7}$ m²s⁻¹, e a cinética de penetração do calor dado pelo gráfico da Figura 4.46(a). A Figura 4.46(b) corresponde à cinética de penetração de calor com $\alpha = 1,4948746x10^{-7}$ m²s⁻¹, obtida através da OREP modificada.

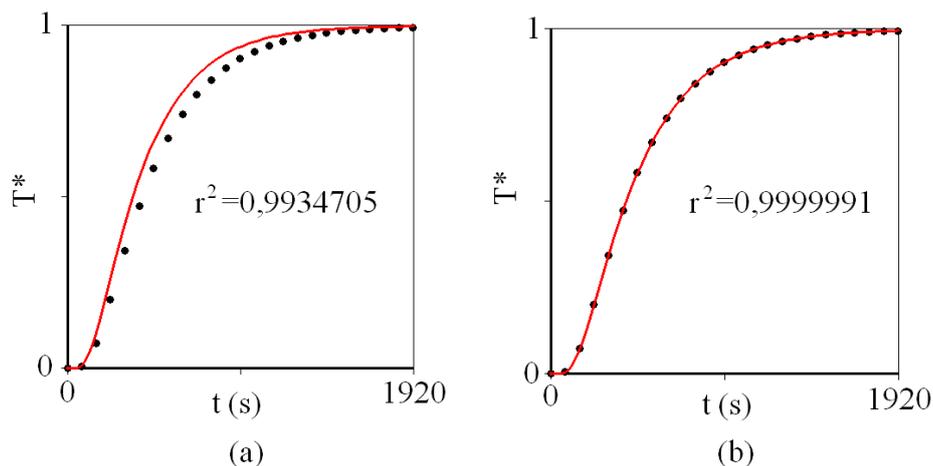


Figura 4.46 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0,25R$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto neste trabalho e (b) utilizando o algoritmo proposto neste trabalho.

A Figura 4.47 foi obtida a partir do parâmetro C dado por, $C = 0,30833987063 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

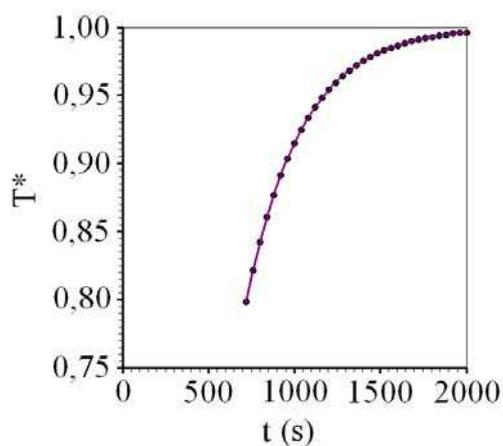


Figura 4.47 – Regressão não-linear com a remoção de 18 pontos em $r=0,25R$; $y=0$.

Usando o algoritmo proposto, $\alpha = (1,49487 \pm 0,00014) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ o erro devido à acurácia, 0,34% e o devido à precisão, 0,01%. Sem o algoritmo proposto, $\alpha = (1,71 \pm 0,23) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, o erro devido à acurácia 14,32% e o devido à precisão 13,4%.

4.3.6 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,5R$; $y = 0$

Por simulação numérica se obtém os dados da Tabela A.13 em apêndice. A partir da Tabela A.13 foi gerada a Figura 4.48.

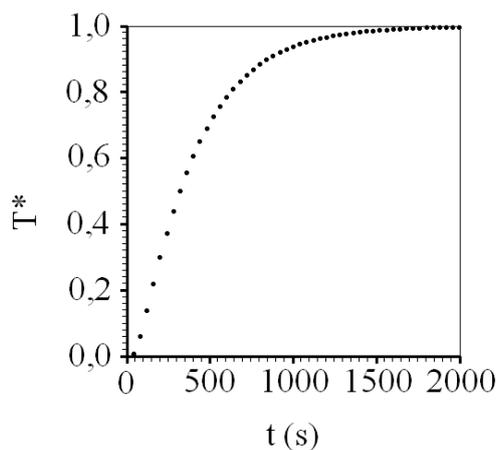


Figura 4.48 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,5R$; $y = 0$.

Tabela 4.13 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R$; $y=0$.

Pontos removidos	C (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
00	$0,32272117659 \times 10^{-2}$	$1,5645972 \times 10^{-7}$	$7,5221499 \times 10^{-3}$
01	$0,32272117659 \times 10^{-2}$	$1,5645972 \times 10^{-7}$	$7,5221499 \times 10^{-3}$
02	$0,31973606763 \times 10^{-2}$	$1,5501250 \times 10^{-7}$	$4,9273479 \times 10^{-3}$
03	$0,31682889052 \times 10^{-2}$	$1,5360305 \times 10^{-7}$	$2,9021727 \times 10^{-3}$
04	$0,31446965668 \times 10^{-2}$	$1,5245926 \times 10^{-7}$	$1,6376143 \times 10^{-3}$
05	$0,31265844808 \times 10^{-2}$	$1,5158116 \times 10^{-7}$	$9,0520491 \times 10^{-4}$
06	$0,31130997608 \times 10^{-2}$	$1,5092742 \times 10^{-7}$	$4,9806183 \times 10^{-4}$
07	$0,31032511293 \times 10^{-2}$	$1,5044994 \times 10^{-7}$	$2,7670650 \times 10^{-4}$
08	$0,30961508001 \times 10^{-2}$	$1,5010569 \times 10^{-7}$	$1,5751978 \times 10^{-4}$
09	$0,30910821514 \times 10^{-2}$	$1,4985997 \times 10^{-7}$	$9,3376024 \times 10^{-5}$
10	$0,30874955009 \times 10^{-2}$	$1,4968607 \times 10^{-7}$	$5,8595513 \times 10^{-5}$
11	$0,30849806083 \times 10^{-2}$	$1,4956416 \times 10^{-7}$	$3,9489572 \times 10^{-5}$
12	$0,30832362436 \times 10^{-2}$	$1,4947959 \times 10^{-7}$	$2,8796143 \times 10^{-5}$
13	$0,30820433176 \times 10^{-2}$	$1,4942175 \times 10^{-7}$	$2,2697954 \times 10^{-5}$
14	$0,30812433768 \times 10^{-2}$	$1,4938297 \times 10^{-7}$	$1,9160962 \times 10^{-5}$
15	$0,30807221019 \times 10^{-2}$	$1,4935770 \times 10^{-7}$	$1,7095552 \times 10^{-5}$

Tabela 4.13 (continuação).

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
16	0,30803974953x10 ⁻²	1,4934196x10 ⁻⁷	1,5903619x10 ⁻⁵
17	0,30802107284x10 ⁻²	1,4933291x10 ⁻⁷	1,5252104x10 ⁻⁵
18	0,30801198395x10 ⁻²	1,4932850x10 ⁻⁷	1,4944096x10 ⁻⁵
19	0,30800946695x10⁻²	1,4932728x10⁻⁷	1,4860051x10⁻⁵
20	0,30801138074x10 ⁻²	1,4932820x10 ⁻⁷	1,4923031x10 ⁻⁵
21	0,30801619493x10 ⁻²	1,4933055x10 ⁻⁷	1,5086915x10 ⁻⁵
22	0,30802281699x10 ⁻²	1,4933374x10 ⁻⁷	1,5311931x10 ⁻⁵
23	0,30803050436x10 ⁻²	1,4933747x10 ⁻⁷	1,5577203x10 ⁻⁵
24	0,30803872359x10 ⁻²	1,4934146x10 ⁻⁷	1,5867043x10 ⁻⁵
25	0,30804710074x10 ⁻²	1,4934552x10 ⁻⁷	1,6167956x10 ⁻⁵

Os gráficos das Figuras 4.49(a) e 4.49(b) mostram como o χ^2 varia com o número de pontos removidos.

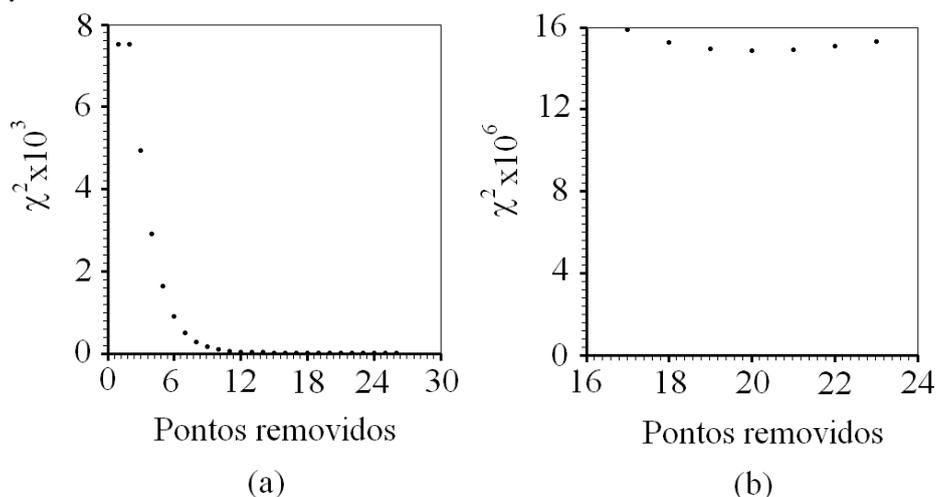


Figura 4.49 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 26 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 17 e 24 pontos.

Se não fosse usada a OREP modificada, $\alpha = 1,5645972 \times 10^{-7}$ m²s⁻¹ com a cinética de penetração do calor representada pelo gráfico da Figura 4.50(a). A Figura 4.50(b) corresponde à cinética de penetração de calor para $\alpha = 1,4932728 \times 10^{-7}$ m²s⁻¹, obtido através aplicação da OREP modificada.

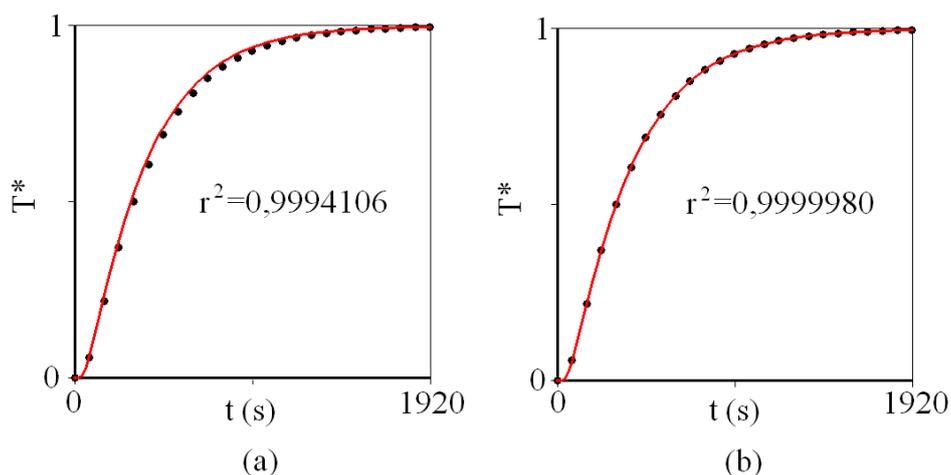


Figura 4.50 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0,5R$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto neste trabalho e (b) utilizando o processo de otimização.

O gráfico da Figura 4.51 foi plotado com $C = 0,30800946695 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado.

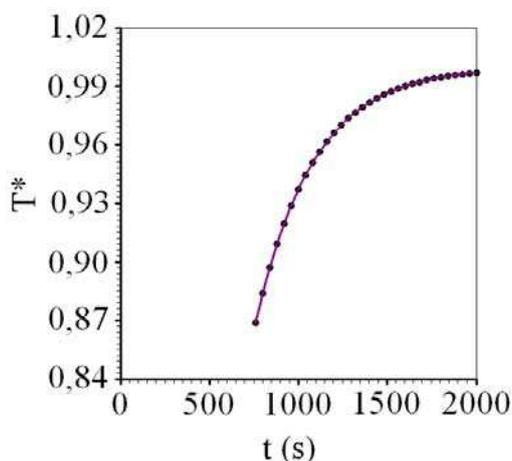


Figura 4.51 – Regressão não-linear com a remoção de 19 pontos em $r = 0,5R$ e $y = 0$.

Usando o algoritmo proposto, $\alpha = (1,49327 \pm 0,00003) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ o erro devido à acurácia é -0,45% e o devido à precisão 0,002%. Sem o algoritmo proposto, $\alpha = (1,56 \pm 0,10) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, o erro devido à acurácia é 4,31% e o devido à precisão 6,4%.

4.3.7 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,75R$; $y = 0$

Por simulação numérica foi gerada a Tabela A.14 em apêndice a este trabalho, e o gráfico da Figura 4.52.

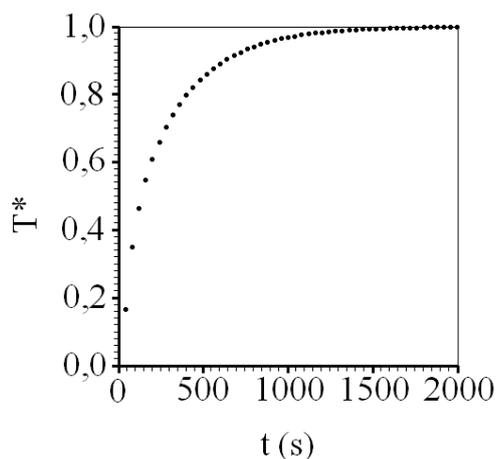


Figura 4.52 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,75R$; $y = 0$.

Os valores de C , α e χ^2 são mostrados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0,75R$; $y=0$.

Pontos removidos	C (s^{-1})	α (m^2s^{-1})	χ^2
00	$0,29038036376 \times 10^{-2}$	$1,4078044 \times 10^{-7}$	$3,0614615 \times 10^{-3}$
01	$0,29038036376 \times 10^{-2}$	$1,4078044 \times 10^{-7}$	$3,0614615 \times 10^{-3}$
02	$0,29473783517 \times 10^{-2}$	$1,4289301 \times 10^{-7}$	$1,4964384 \times 10^{-3}$
03	$0,29877013473 \times 10^{-2}$	$1,4484793 \times 10^{-7}$	$5,7179003 \times 10^{-4}$
04	$0,30167121739 \times 10^{-2}$	$1,4625441 \times 10^{-7}$	$2,0093186 \times 10^{-4}$
05	$0,30361080802 \times 10^{-2}$	$1,4719474 \times 10^{-7}$	$8,4511375 \times 10^{-5}$
06	$0,30487147806 \times 10^{-2}$	$1,4780593 \times 10^{-7}$	$6,3685504 \times 10^{-5}$
07	$0,30568070892 \times 10^{-2}$	$1,4819825 \times 10^{-7}$	$7,2645860 \times 10^{-5}$
08	$0,30619820666 \times 10^{-2}$	$1,4844916 \times 10^{-7}$	$8,7411601 \times 10^{-5}$
09	$0,30653084251 \times 10^{-2}$	$1,4861041 \times 10^{-7}$	$1,0059367 \times 10^{-4}$
10	$0,30674823810 \times 10^{-2}$	$1,4871583 \times 10^{-7}$	$1,1076086 \times 10^{-4}$
11	$0,30689480857 \times 10^{-2}$	$1,4878688 \times 10^{-7}$	$1,1830968 \times 10^{-4}$
12	$0,30699837001 \times 10^{-2}$	$1,4883709 \times 10^{-7}$	$1,2397331 \times 10^{-4}$

Os gráficos das Figuras 4.53(a) e 4.53(b) mostram como o χ^2 varia com o número de pontos removidos.

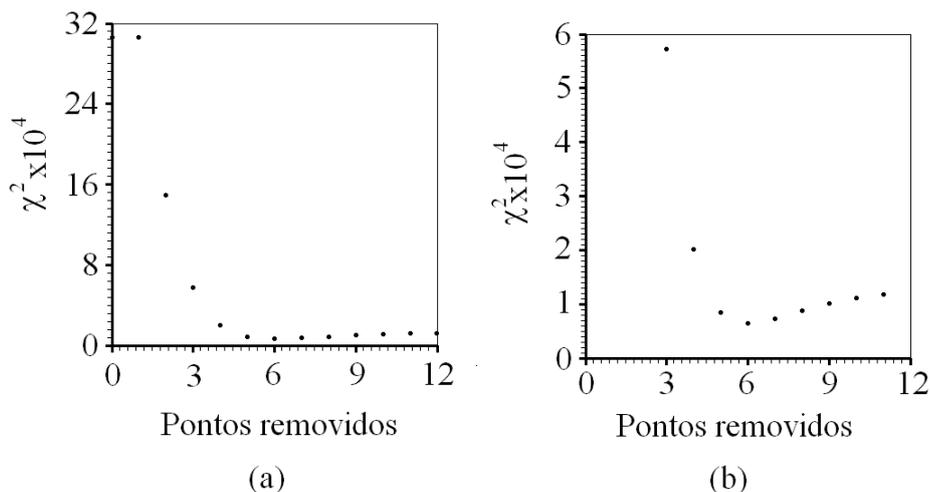


Figura 4.53 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 12 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 3 e 11 pontos.

Se não fosse usado o processo de otimização, $\alpha = 1,4078044 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e a Figura 4.54(a) representa a cinética de penetração do calor. A Figura 4.54(b) corresponde à cinética de penetração de calor para $\alpha = 1,4780593 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ obtido através do algoritmo proposto neste trabalho.

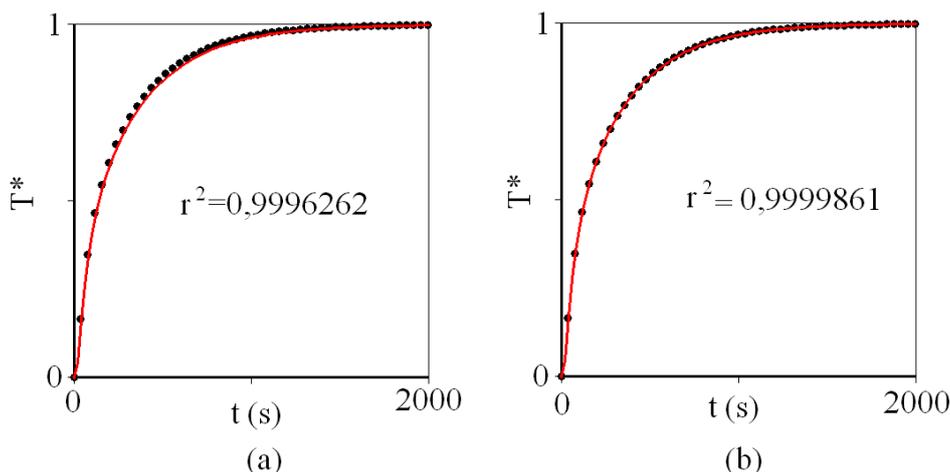


Figura 4.54 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r=0,75R$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização proposto neste trabalho e (b) utilizando o algoritmo proposto neste trabalho.

O gráfico da Figura 4.55 foi obtido com o parâmetro C dado por, $C = 0,30487147806 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado.

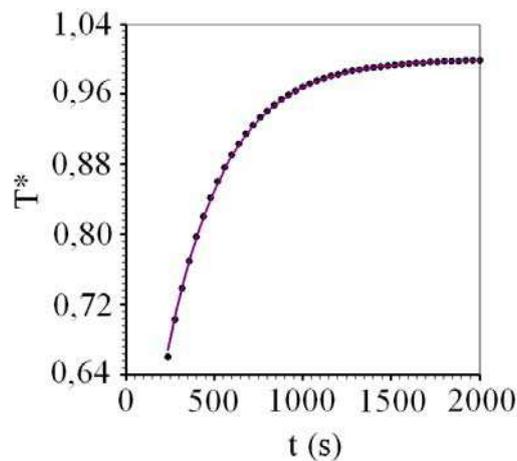


Figura 4.55 – Regressão não-linear com a remoção de 6 pontos em $r = 0,75R$; $y = 0$.

Usando o algoritmo proposto, $\alpha = (1,4781 \pm 0,0052) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ o erro devido à acurácia -1,46% e o devido à precisão 0,35%. Sem o algoritmo proposto, $\alpha = (1,41 \pm 0,16) \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, o erro devido à acurácia 6,1% e o devido à precisão 14%.

4.3.8 Simulação da penetração do calor para a posição $r = 0,5R$; $y = 0,01 \text{ m}$

A simulação numérica produz a Tabela A.15 em apêndice. A partir da Tabela A.15 foi gerado o gráfico da Figura 4.56.

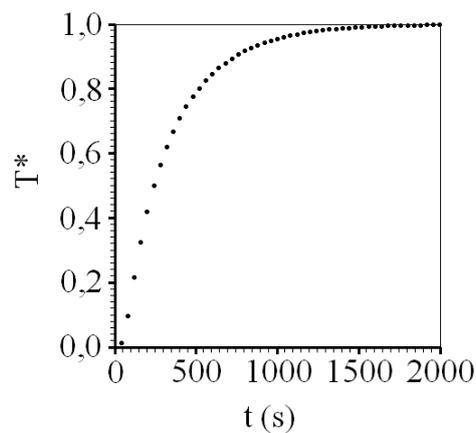


Figura 4.56 – Gráfico da temperatura adimensional obtida a partir da simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r = 0,5R$; $y = 0,01 \text{ m}$.

Os valores de C , α e χ^2 foram determinados e são mostrados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Valores para parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R$; $y=0,01$ m.

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,28521410449x10 ⁻²	1,3827577x10 ⁻⁷	1,1895281x10 ⁻²
01	0,28521410449x10 ⁻²	1,3827577x10 ⁻⁷	1,1895281x10 ⁻²
02	0,28686210696x10 ⁻²	1,3907474x10 ⁻⁷	9,9678533x10 ⁻³
03	0,29017962658x10 ⁻²	1,4068313x10 ⁻⁷	6,6442424x10 ⁻³
04	0,29380827586x10 ⁻²	1,4244233x10 ⁻⁷	3,8247705x10 ⁻³
05	0,29700698639x10 ⁻²	1,4399312x10 ⁻⁷	2,0115259x10 ⁻³
06	0,29956381454x10 ⁻²	1,4523270x10 ⁻⁷	9,9457009x10 ⁻⁴
07	0,30151040076x10 ⁻²	1,4617643x10 ⁻⁷	4,6831448x10 ⁻⁴
08	0,30295735312x10 ⁻²	1,4687794x10 ⁻⁷	2,1202130x10 ⁻⁴
09	0,30402233049x10 ⁻²	1,4739426x10 ⁻⁷	9,5278097x10 ⁻⁵
10	0,30480520750x10 ⁻²	1,4777380x10 ⁻⁷	4,7715374x10 ⁻⁵
11	0,30538331958x10⁻²	1,4805408x10⁻⁷	3,3149186x10⁻⁵
12	0,30581394522x10 ⁻²	1,4826286x10 ⁻⁷	3,3552649x10 ⁻⁵
13	0,30613852916x10 ⁻²	1,4842023x10 ⁻⁷	4,0164978x10 ⁻⁵
14	0,30638672562x10 ⁻²	1,4854055x10 ⁻⁷	4,8858794x10 ⁻⁵
15	0,30657962975x10 ⁻²	1,4863407x10 ⁻⁷	5,7785815x10 ⁻⁵
16	0,30673220927x10 ⁻²	1,4870804x10 ⁻⁷	6,6188462x10 ⁻⁵

Os gráficos das Figuras 4.57(a) e 4.57(b) mostram como o χ^2 varia com o número de pontos removidos.

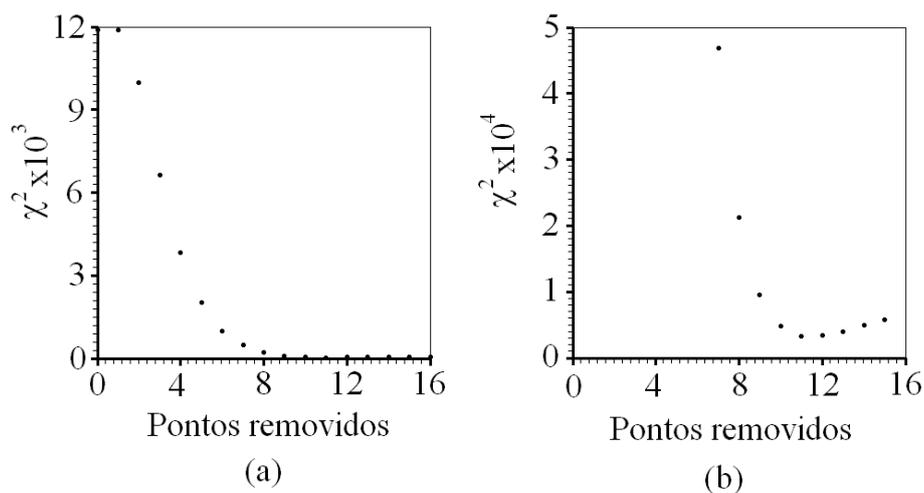


Figura 4.57 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 15 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 7 e 15 pontos.

Sem o processo de otimização $\alpha = 1,3827577 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e o gráfico para a cinética de penetração do calor é mostrado na Figura 4.58(a). A Figura 4.58(b) corresponde à cinética de penetração de calor para $\alpha = 1,4805408 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, obtido através do algoritmo proposto neste trabalho.

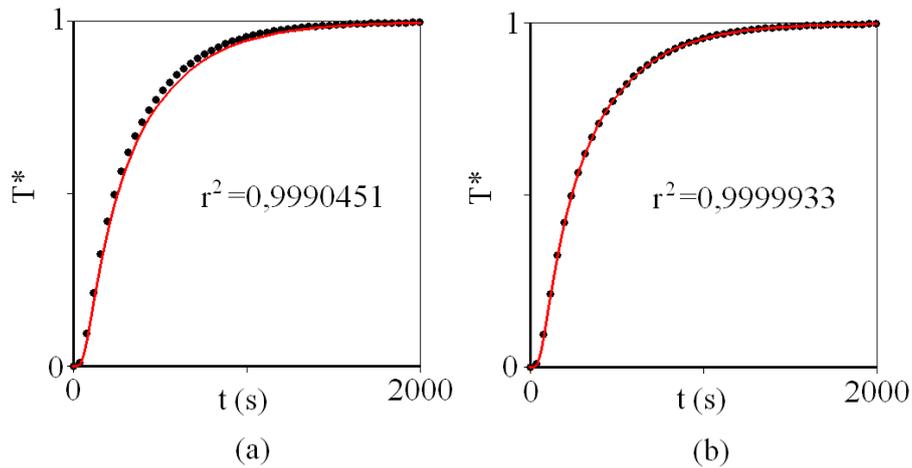


Figura 4.58 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica com o sensor em $r = 0,5R$; $y = 0,01 \text{ m}$, sem utilizar o processo de otimização e (b) utilizando o algoritmo proposto.

O gráfico da Figura 4.59 foi obtido com o parâmetro C dado por $C = 0,30538331958 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e pelo conjunto de pontos que minimizou o χ^2 .

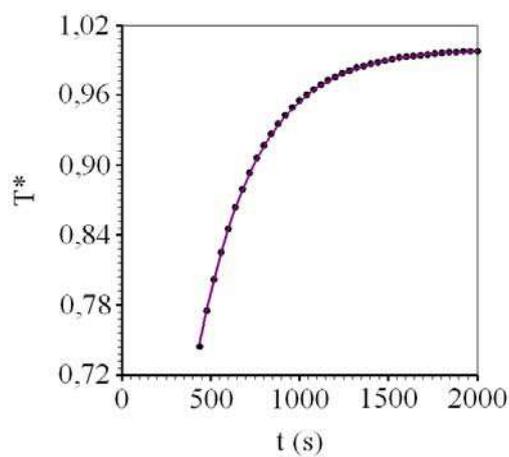


Figura 4.59 – Regressão não-linear com a remoção de 11 pontos, $r = 0,5R$; $y = 0,01 \text{ m}$.

Usando o algoritmo proposto, $\alpha = (1,4805 \pm 0,0026) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ o erro devido à acurácia 1,3% e o devido à precisão 0,18%. Sem o algoritmo proposto, $\alpha = (1,383 \pm 0,065) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, o erro devido à acurácia 7,8% e o devido à precisão 4,7%.

4.3.9 Discussão: simulação da penetração de calor para o cilindro finito

A superposição dos gráficos, para várias posições do termopar, mostra a influência da área lateral e das áreas superior e inferior do cilindro na penetração do calor. As Figuras 4.60(a) e 4.60(b) mostram as curvas de penetração de calor quando o sensor de temperatura é deslocado do centro para a fronteira lateral e do centro para a fronteira superior do cilindro.

A Figura 4.60(a) mostra a cinética de penetração do calor para várias posições do sensor a partir do centro até próximo à fronteira, quando o sensor é deslocado ao longo do raio do cilindro finito. A curva (1) representa a cinética de penetração de calor no centro geométrico do cilindro e é a curva que apresenta o maior fator de atraso. A curva (2) mostra a penetração de calor para o sensor colocado em um quarto do raio; A curva (3) descreve a cinética de penetração do calor na metade do raio e a curva (4) representa a penetração de calor para o sensor colocado a três quartos do raio. A curva (4) apresenta de forma mais acentuada o efeito da penetração do calor devido à proximidade com a área lateral do cilindro, que para este caso é o dobro da área da base. Para esta curva não há fator de atraso, a variação de temperatura ocorre no instante em que o cilindro é colocado em contato com a fonte de aquecimento, confirmando a hipótese inicial da condição de contorno, deste problema, ser do primeiro tipo.

Figura 4.60 (b) mostra a cinética de penetração do calor para várias posições do sensor ao longo do eixo do cilindro finito. A curva (1') representa a cinética de penetração de calor no centro geométrico do cilindro. A curva (2') mostra a penetração de calor para o sensor colocado no eixo do cilindro a um quarto da meia altura do cilindro. A curva (3') descreve a cinética de penetração do calor na metade da meia altura do eixo e a (4') a três quartos da meia altura. A curva (4') apresenta de forma

mais acentuada o efeito da penetração do calor através da área superior do cilindro que é o que caracteriza o cilindro finito.

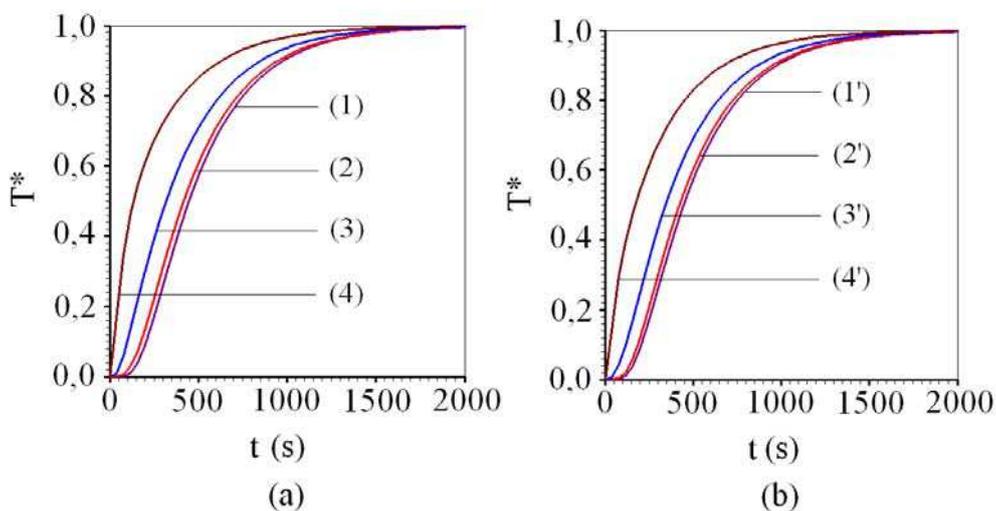


Figura 4.60 – Gráficos das temperaturas adimensionais para as seguintes posições do termopar: (a) do centro para a fronteira ao longo do raio do cilindro; (1) $r=0$; (2) $r=0,25R$; (3) $r=0,5R$ e (4) $r=0,75R$; (b) do centro para a fronteira ao longo do eixo do cilindro; (1') $y=0$; (2') $y=0,005$ m; (3') $y=0,01$ m e (4') $y=0,015$ m.

A Tabela 4.16 apresenta os resultados obtidos na determinação da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar, a partir do centro, ao longo do eixo do cilindro finito e seus respectivos erros de acurácia.

Tabela 4.16 - Valores da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar no eixo do cilindro finito, $r=0$, e os respectivos erros de acurácia.

$\frac{y}{L/2}$	0,0	0,25	0,5	0,75
$\alpha \times 10^7$ (m^2s^{-1})	1,49668	1,49388	1,48828	1,4662
Com OREP, erro (%)	0,22	0,41	0,78	2,25
Sem OREP, erro (%)	18,71	14,1	3,6	7,3

A Figura 4.61 representa graficamente os erros percentuais como indicado na Tabela 4.16.

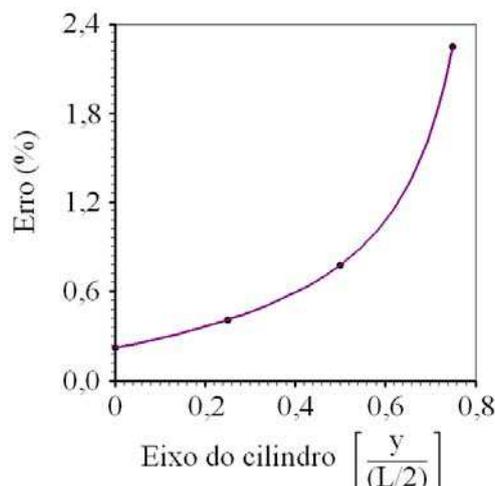


Figura 4.61 – Gráfico do erro percentual quando o termopar é deslocado do centro para a fronteira, ao longo do eixo y adimensional.

Os valores para as difusividades térmicas aparentes apresentadas na Tabela 4.16 são aceitáveis principalmente para $y < \frac{1}{2} \frac{L}{2}$. O resultado apresentado é particularmente bom, para o termopar colocado no centro do cilindro $r = 0$; $y = 0$. O erro de acurácia deste resultado foi de 0,22% e o de precisão 0,03%. Além disto, outros indicadores estatísticos relevantes como o qui-quadrado, $\chi^2 = 2,4034243 \times 10^{-5}$, e o coeficiente de determinação, $r^2 = 0,9999979$, permitem afirmar que o algoritmo proposto apresenta excelente desempenho na determinação da difusividade térmica aparente, permitindo descrever todo aquecimento quando a condição de contorno de Dirichlet estiver envolvida no processo de transferência de calor. Entretanto, o erro de acurácia aumenta rapidamente quando a posição do termopar se aproxima da fronteira superior do cilindro finito e por simetria da inferior. Desta forma, pode-se afirmar que quanto mais próximo do centro estiver o termopar, melhores serão os resultados obtidos.

Observa-se também que o erro na determinação da difusividade térmica aparente aumenta quando o termopar é deslocado do centro do cilindro para sua fronteira lateral, na direção radial, mantendo $y = 0$. A Tabela 4.17 mostra os erros cometidos para quatro novas posições do termopar.

Tabela 4.17 - Valores da difusividade térmica aparente para várias posições do termopar a partir do centro do cilindro finito, $y=0$, ao longo da direção radial e os respectivos erros de acurácia.

r/R	0,0	0,25	0,5	0,75
$\alpha \times 10^7 \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$	1,49668	1,49487	1,49327	1,4781
Com OREP, erro (%)	0,22	0,34	0,45	1,46
Sem OREP, erro (%)	18,71	14,32	4,31	6,1

Os valores para as difusividades térmicas aparentes apresentadas na Tabela 4.17 são aceitáveis principalmente para $r \leq 0,5R$ com o erro de acurácia menor do que 0,5%. Os resultados apresentados nas Tabelas 4.16 e 4.17 são bastante semelhantes com relação ao erro de acurácia. Nas duas situações os erros devido à acurácia aumentam rapidamente com o afastamento do centro geométrico do cilindro finito, sendo que o erro cresce mais rapidamente se o deslocamento for ao longo do eixo do cilindro.

O gráfico da Figura 4.62 mostra o aumento do erro percentual quando o termopar é deslocado do centro para a fronteira do cilindro finito ao longo de seu raio e corresponde a representação gráfica da Tabela 4.17.

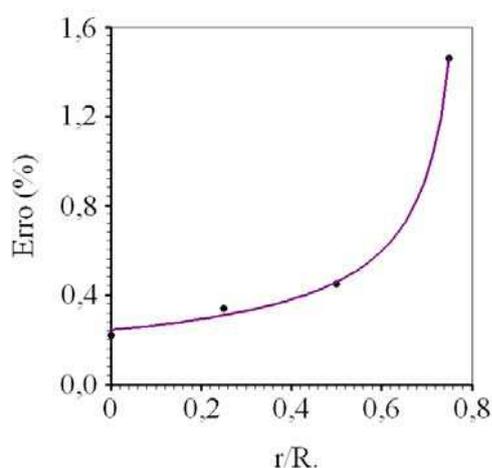


Figura 4.62 – Gráfico do erro percentual quando o termopar é deslocado do centro para a fronteira, ao longo do raio r adimensional.

4.4 A aplicação do algoritmo proposto à experiência de Betta et al. (2009)

Serão utilizados os dados disponíveis em Betta et al. (2009) sobre a penetração de calor em purê de tomate e creme custard para avaliar a eficiência do algoritmo proposto neste trabalho, OREP modificada, ao estimar a difusividade térmica aparente dos referidos produtos.

Conhecido o conjunto de pontos que representa as temperaturas experimentais no centro do cilindro, em vários instantes, foi possível, através de outro *software*, *LAB Fit Curve Fitting Software, V 7.2.48* transformar, este conjunto de pontos, num gráfico que o represente no eixo cartesiano.

4.4.1 Aplicação do algoritmo ao purê de tomate

A partir do gráfico disponível no artigo de Betta et al. (2009) sobre o aquecimento do purê de tomate foi possível, a partir de sua digitalização, obter a Tabela A.16, em anexo a este trabalho, e a partir desta, plotar o gráfico da Figura 4.63.

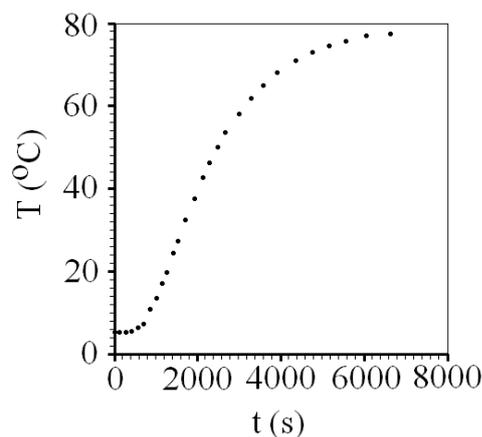


Figura 4.63 – Aquecimento do purê de tomate obtido dos dados experimentais de Betta et al. (2009).

A equação (3.80) fazendo $r=0$; $y=0$ se determina os valores do parâmetro C ,

$$T(0,0,t) = 80,0 - 152,5694069944 \exp(-Ct). \quad (4.5)$$

A partir da Equação (3.81) se determina α , e através da Equação (3.92) o χ^2 . A Tabela 4.18 mostra os valores obtidos.

Tabela 4.18 – Valores para o parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado para o aquecimento do purê de tomate com o termopar em $r=0$; $y=0$.

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,82554483540x10 ⁻³	1,9442210x10 ⁻⁷	1875,998
01	0,82554483530x10 ⁻³	1,9442210x10 ⁻⁷	1875,998
02	0,80421535774x10 ⁻³	1,8939886x10 ⁻⁷	1546,951
05	0,72645233566x10 ⁻³	1,7108506x10 ⁻⁷	561,1268
06	0,70856723064x10 ⁻³	1,6687298x10 ⁻⁷	393,3541
07	0,69490772458x10 ⁻³	1,6365607x10 ⁻⁷	283,2346
08	0,68499464522x10 ⁻³	1,6132147x10 ⁻⁷	213,8376
09	0,67633095965x10 ⁻³	1,5928110x10 ⁻⁷	160,8595
10	0,66947748561x10 ⁻³	1,5766706x10 ⁻⁷	124,2540
11	0,66431966519x10 ⁻³	1,5645234x10 ⁻⁷	99,90961
12	0,65949922351x10 ⁻³	1,5531710x10 ⁻⁷	79,72066
13	0,65567464042x10 ⁻³	1,5441638x10 ⁻⁷	65,50768
14	0,65418630699x10 ⁻³	1,5406586x10 ⁻⁷	60,41608
15	0,65240689642x10 ⁻³	1,5364679x10 ⁻⁷	54,65608
16	0,65107155258x10 ⁻³	1,5333232x10 ⁻⁷	50,56956
17	0,65004433077x10 ⁻³	1,5309041x10 ⁻⁷	47,56469
18	0,64843605936x10 ⁻³	1,5271165x10 ⁻⁷	43,10394
19	0,64842996520x10⁻³	1,5271020x10⁻⁷	43,08741
20	0,64857969930x10 ⁻³	1,5274546x10 ⁻⁷	43,48988
21	0,64862275367x10 ⁻³	1,5275560x10 ⁻⁷	43,60640

Ao serem removidos os 19 pontos iniciais, observa-se na Tabela 4.18, que o qui-quadrado assume seu menor valor, $\chi^2 = 43,08741$. Para esta situação de mínimo, a difusividade térmica aparente correspondente vale $\alpha = 1,5271020 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

O gráfico da Figura 4.64(a) apresenta a variação do χ^2 com o número de pontos removidos. Depois de serem removidos 18 pontos a variação de χ^2 fica imperceptível e o valor do qui-quadrado deixa de ser inteligível.

Para tornar as pequenas variações do χ^2 perceptíveis, ampliou-se o gráfico da Figura 4.64(a) na região onde o valor do χ^2 torna-se mínimo. A Figura 4.64(b) mostra esta ampliação onde se pode observar que o menor valor do χ^2 ocorre com a remoção dos 19 primeiros pontos.

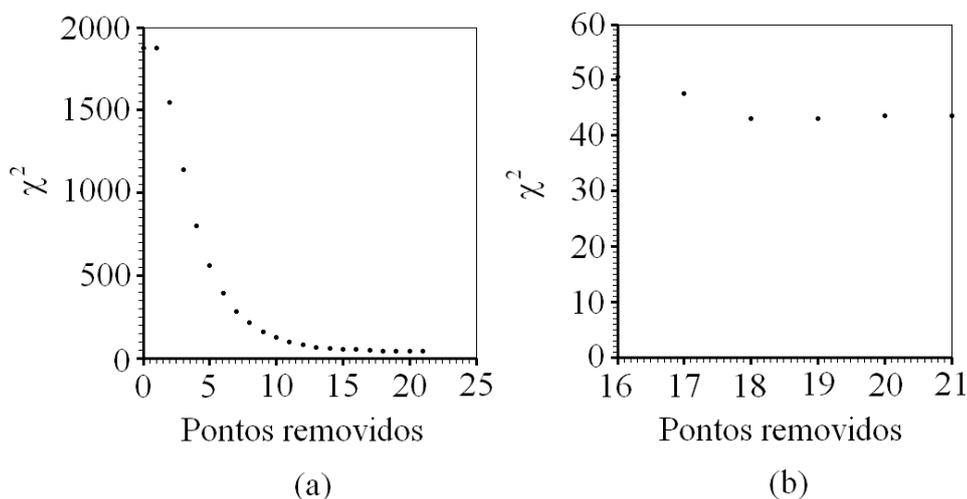


Figura 4.64 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 21 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 16 e 21 pontos.

Se não fosse usado o processo de otimização, tomando como verdadeira a difusividade térmica aparente obtida a partir do conjunto inicial de pontos a difusividade térmica aparente calculada seria $\alpha = 1,9442210 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Neste caso o gráfico que se obteria para a cinética de penetração do calor é representado na Figura 4.65(a), com coeficiente de determinação $r^2 = 0,9730148$.

O gráfico representado pela Figura 4.65(b) corresponde à cinética de penetração de calor no cilindro finito para a difusividade térmica aparente $\alpha = 1,5271020 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, obtido através do algoritmo proposto neste trabalho. O coeficiente de determinação obtido foi de $r^2 = 0,9990639$.

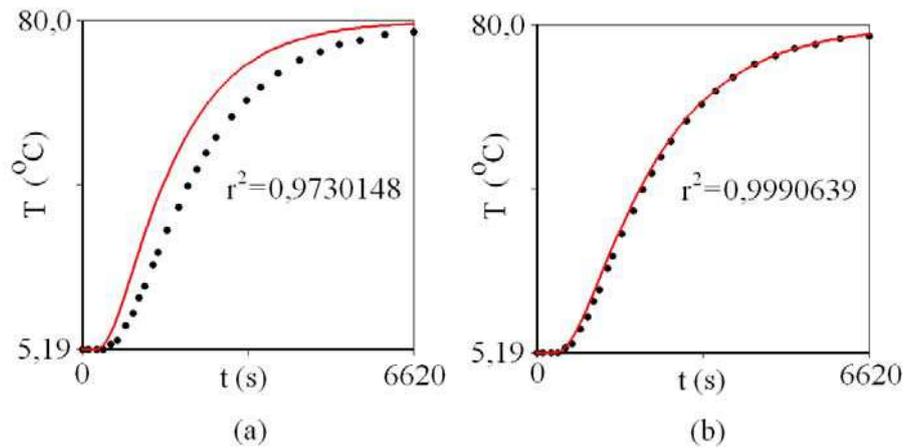


Figura 4.65 – (a) Gráfico da temperatura adimensional obtida por simulação analítica para o purê de tomate com o sensor em $r=0; y=0$ sem utilizar o processo de otimização e (b) utilizando o processo de otimização proposto neste trabalho.

O gráfico da Figura 4.66 foi obtido a partir da Equação (4.5), com o parâmetro C dado por $C = 0,64842996520 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, e pelo conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado.

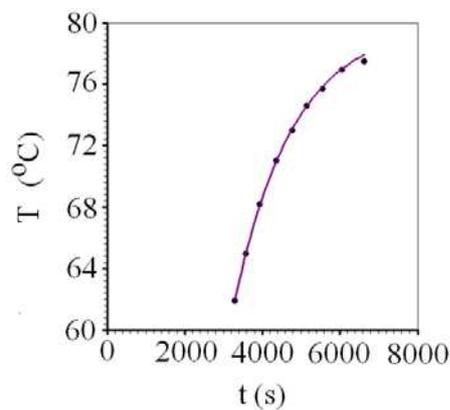


Figura 4.66 – Regressão não-linear com a remoção de 19 pontos em $r=0; y=0$.

A partir da Equação (3.22) é possível apresentar a distribuição radial de temperatura do processo de aquecimento para a difusão de calor bidimensional do cilindro finito.

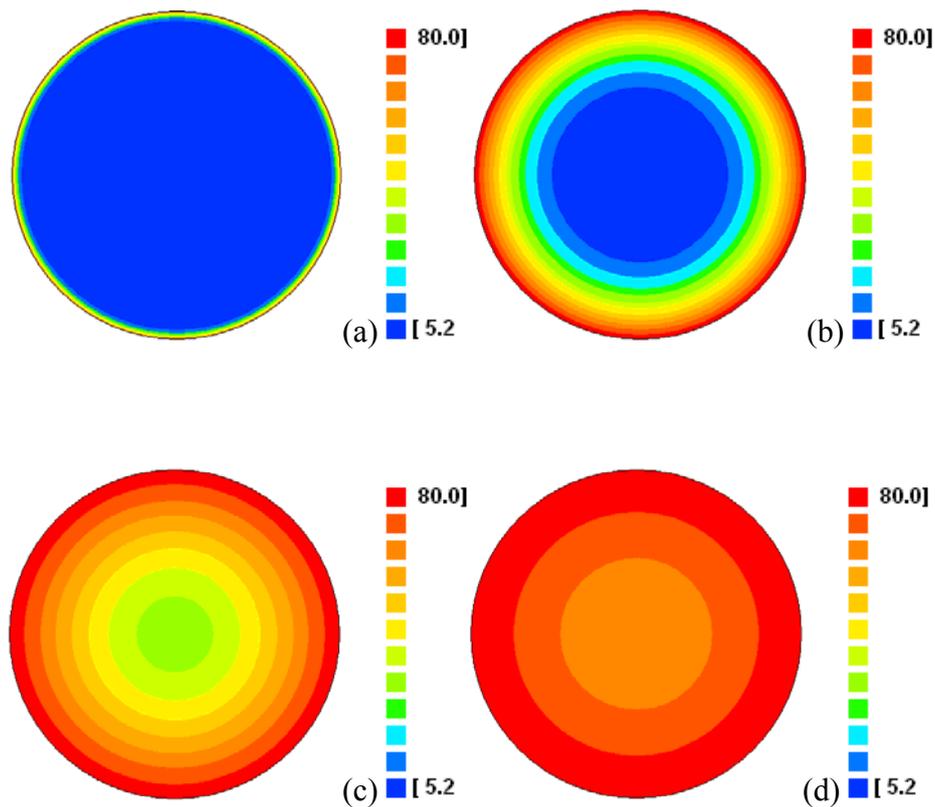


Figura 4.67 – Figuras de contornos mostrando o perfil da temperatura na região central do cilindro para, (a) 0,1% do tempo total de aquecimento; (b) 5% do tempo total de aquecimento; (c) 25% do tempo total e (d) 50% do tempo de aquecimento.

As Figuras 4.67(a), 4.67(b), 4.67(c) e 4.67(d) mostram os círculos isotérmicos produzidos no processo de aquecimento do purê de tomate, concêntricos ao centro do cilindro, $r=0$; $y=0$ para vários instantes do processo de transferência de calor: (a) 0,1% do tempo total de aquecimento ou 6,62 s; (b) 5% do tempo total de aquecimento ou 331,2 s (c) 25% do tempo total de aquecimento ou 1656 s e (d) 50% do tempo total de aquecimento ou 3312 s após iniciado o processo de aquecimento.

A Figura 4.67(a) mostra que, nos instantes iniciais de aquecimento, apenas a fronteira do cilindro atinge a temperatura do banho térmico. Todo o interior encontra-se na temperatura inicial, o que indica que a condição de contorno do primeiro tipo é aplicável ao fenômeno estudado. As demais figuras mostram a distribuição de temperatura no cilindro finito e os respectivos instantes.

É também possível, usando a Equação (3.22), fixar um tempo qualquer e encontrar a distribuição de temperatura nos planos perpendiculares ao eixo do cilindro. As Figuras 4.68(a), 4.68(b), 4.68(c) e 4.68(d) mostram os círculos isotérmicos para quatro planos perpendiculares ao eixo do cilindro, no instante $2,65 \times 10^3$ s após iniciado o processo de aquecimento do purê de tomate. Pode-se observar nas Figuras 4.68(a), 4.68(b), 4.68(c) e 4.68(d) que quanto mais próximo do centro, menos aquecido se encontra a região em torno do eixo do cilindro. A Figura 4.68(a) mostra as isoterms do plano que passa mais próximo ao centro do cilindro. À medida que os planos se afastam do centro do cilindro, a temperatura do eixo aumenta e a diferença da temperatura entre o eixo e a borda do plano diminui. Até que, em $y = L/2$, na borda superior do cilindro, todos os pontos deste plano, encontram-se na mesma temperatura, em equilíbrio térmico com o meio externo. Devido à simetria o mesmo efeito ocorre se os planos analisados estiverem na parte inferior do cilindro.

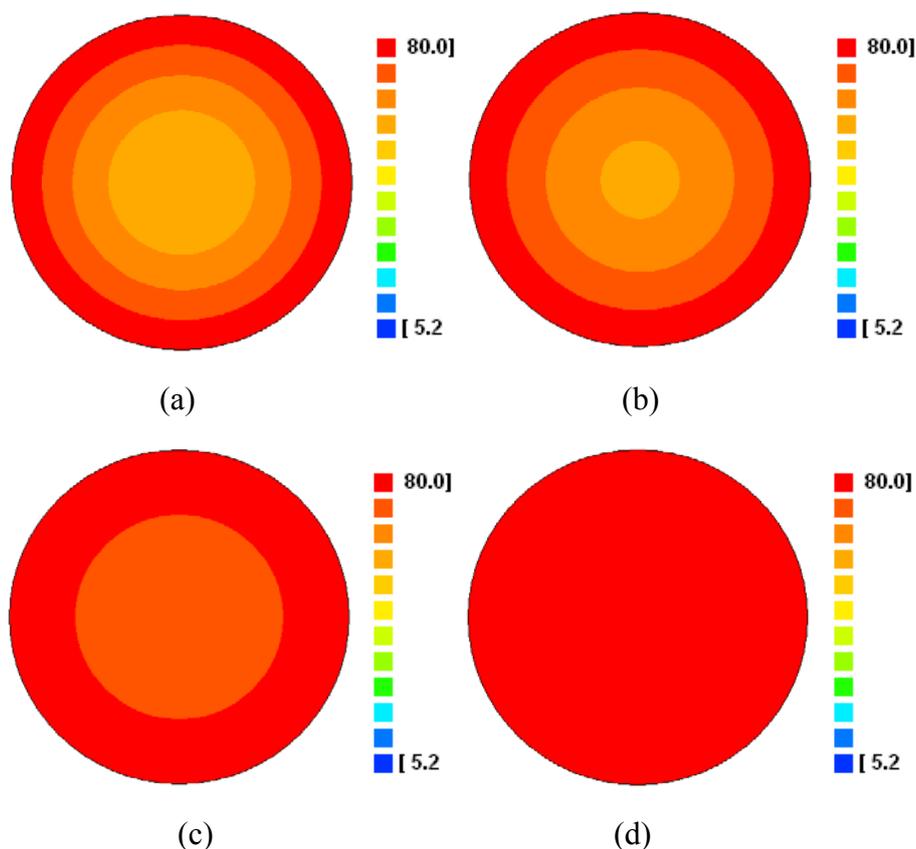


Figura 4.68 - Distribuição da temperatura no instante $2,65 \times 10^3$ s, em quatro planos que cortam o eixo do cilindro em: (a) $y = 0,25L/2$; b) $y = 0,5L/2$; c) $y = 0,75L/2$ e d) $y = L/2$.

A discrepância entre os valores da difusividade térmica aparente encontrado usando o algoritmo proposto, $\alpha = 1,5271020 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, e o proposto por Betta et al. (2009), $\alpha = 1,5421 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, foi de $-0,97\%$,

$$\text{discrepância} = \frac{1,5271 \times 10^{-7} - 1,5421 \times 10^{-7}}{1,5421 \times 10^{-7}} \times 100 = -0,97\%.$$

Adotando-se o nível de significância de 95,4%, a difusividade térmica aparente pode ser escrita como, $\alpha = (1,5271 \pm 0,0015) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. O erro devido à precisão foi de 0,10%. Sem o uso do algoritmo proposto, usando o mesmo nível de confiança, a difusividade térmica aparente seria estimada em, $\alpha = (1,944 \pm 0,094) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ o erro de precisão das medidas seria 4,83% e a discrepância seria da ordem de 26%.

4.4.2 Aplicação do algoritmo ao creme custard

A partir do gráfico disponível no artigo de Betta et al. (2009) sobre o aquecimento do creme custard foi possível se obter os dados da Tabela A.17 e plotar o gráfico da Figura 4.69.

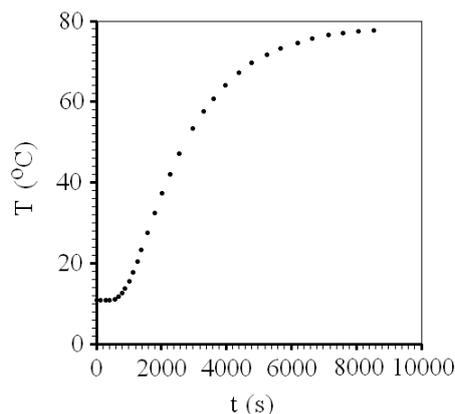


Figura 4.69 – Gráfico da temperatura de aquecimento do creme custard obtido dos dados experimentais de Betta et al. (2009).

Fazendo $r=0$; $y=0$ na equação (3.80) se determina o parâmetro C , para vários conjuntos de pontos usando a função,

$$T(0,0,t) = 80,0 - 141,14709844937 \exp(-Ct) \quad (4.6)$$

Através de regressão não-linear, os valores para o parâmetro C , para α e para o χ^2 são obtidos e encontram-se enumerados na Tabela 4.19.

Tabela 4.19 – Valores para o parâmetro C , a difusividade térmica aparente e o qui-quadrado para o aquecimento do creme custard com o termopar em $r=0$; $y=0$.

Pontos removidos	C (s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	χ^2
00	0,76918025857x10 ⁻³	1,8774384x10 ⁻⁷	2035,123
01	0,76918025857x10 ⁻³	1,8774384x10 ⁻⁷	2035,123
02	0,74849317538x10 ⁻³	1,8269448x10 ⁻⁷	1719,925
03	0,72019445271x10 ⁻³	1,7578724x10 ⁻⁷	1317,907
04	0,69312998502x10 ⁻³	1,6918125x10 ⁻⁷	969,8282
05	0,67006738740x10 ⁻³	1,6355207x10 ⁻⁷	705,7620
06	0,65031987072x10 ⁻³	1,5873204x10 ⁻⁷	506,7821
07	0,63362932475x10 ⁻³	1,5465817x10 ⁻⁷	360,4342
08	0,61852806802x10 ⁻³	1,5097220x10 ⁻⁷	247,0195
09	0,60616061607x10 ⁻³	1,4795351x10 ⁻⁷	168,7596
10	0,59539996299x10 ⁻³	1,4532701x10 ⁻⁷	112,1949
11	0,58594472535x10 ⁻³	1,4301916x10 ⁻⁷	71,92162
12	0,57732096942x10 ⁻³	1,4091425x10 ⁻⁷	43,32348
13	0,57014465520x10 ⁻³	1,3916264x10 ⁻⁷	25,74041
14	0,56411818847x10 ⁻³	1,3769167x10 ⁻⁷	15,52696
15	0,55899557754x10 ⁻³	1,3644133x10 ⁻⁷	10,23349
16	0,55419991448x10⁻³	1,3527080x10⁻⁷	8,190420
17	0,54958664207x10 ⁻³	1,3414477x10 ⁻⁷	8,960938
18	0,54608530188x10 ⁻³	1,3329014x10 ⁻⁷	11,38353
19	0,54303050111x10 ⁻³	1,3254453x10 ⁻⁷	14,82182
20	0,53969350122x10 ⁻³	1,3173002x10 ⁻⁷	20,01703

Ao serem removidos os 16 pontos iniciais, observa-se na Tabela 4.19 que o qui-quadrado assume seu menor valor, $\chi^2 = 8,190420$. Para esta situação de mínimo, a difusividade térmica aparente correspondente vale, $\alpha = 1,3527080 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

O gráfico da Figura 4.70(a) mostra como o χ^2 varia com o número de pontos removidos.

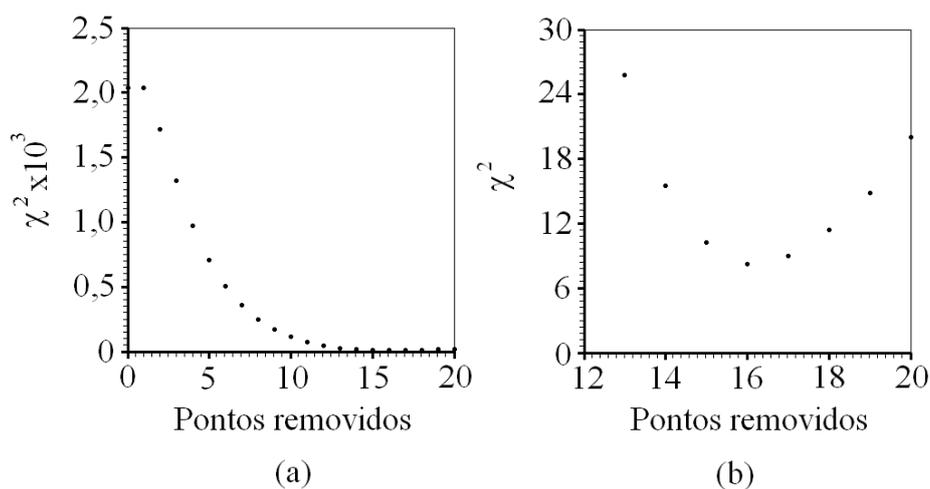


Figura 4.70 – (a) Variação do χ^2 com a remoção de 20 pontos e (b) variação do χ^2 entre a remoção de 13 e 20 pontos.

Depois de serem removidos 15 pontos a variação de χ^2 fica imperceptível. Para tornar as pequenas variações do χ^2 perceptíveis, ampliou-se o gráfico representado na Figura 4.70(a) na região onde o valor do χ^2 torna-se mínimo. A Figura 4.70(b) mostra esta ampliação onde se pode observar que o menor valor do χ^2 ocorre com a remoção dos 16 primeiros pontos.

Se não fosse usado o processo de otimização, tomando como verdadeira a difusividade térmica aparente obtida a partir do conjunto inicial de pontos esta seria $\alpha = 1,8774384 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Neste caso, os valores das temperaturas obtidas por simulação seria bem maiores do que as obtidas experimentalmente e o gráfico que se obteria para a cinética de penetração do calor é representado na Figura 4.71(a), com coeficiente de determinação $r^2 = 0,9714991$. O gráfico representado pela Figura 4.71(b) corresponde à cinética de penetração de calor no cilindro finito para a difusividade térmica aparente de $\alpha = 1,3527080 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, obtido através do algoritmo proposto neste trabalho com coeficiente de determinação $r^2 = 0,9998274$.

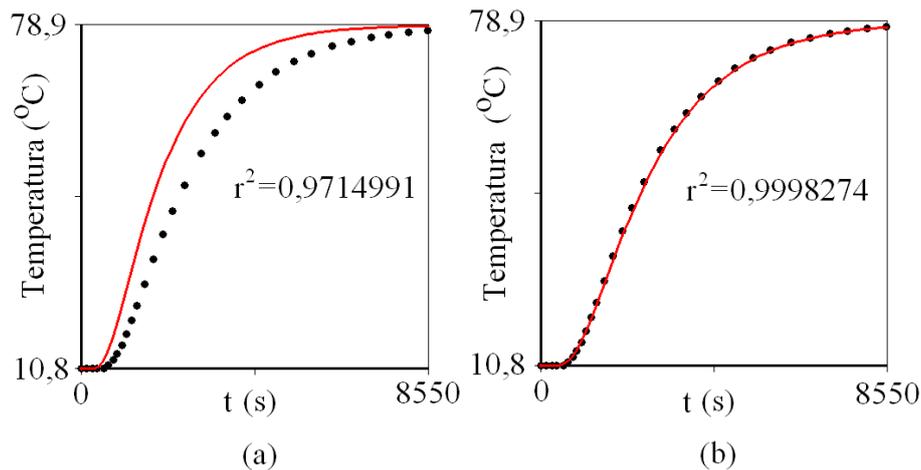


Figura 4.71 – (a) Gráfico da temperatura obtida por simulação analítica para o creme custard com o sensor em $r=0$; $y=0$ sem utilizar o processo de otimização e (b) utilizando o processo de otimização proposto.

O gráfico da Figura 4.72 foi obtido a partir da Equação (4.6), com o parâmetro C dado por $C = 0,55149991448 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, e pelo conjunto de pontos que minimizou o qui-quadrado.

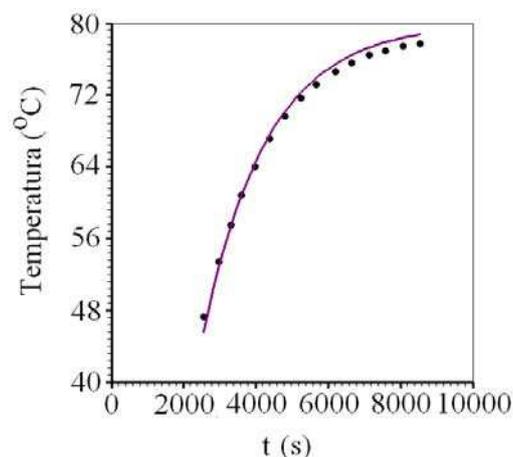


Figura 4.72 – Regressão não-linear com a remoção de 16 pontos em $r=0$; $y=0$.

Fixado um plano qualquer paralelo ao raio do cilindro finito, a Equação (3.22) possibilita apresentar a distribuição radial de temperatura para a difusão de calor bidimensional, para vários instantes do processo de aquecimento.

As Figuras 4.73(a), 4.73(b), 4.73(c) e 4.73(d) mostram os círculos isotérmicos produzidos no processo de aquecimento do creme custard no plano perpendicular ao eixo passando pelo centro do cilindro, $r = 0$; $y = 0$, nos seguintes instantes (a) 0,1% do tempo total de aquecimento, 8,55 s; (b) 5% do tempo total de aquecimento, 427,6 s, (c) 25% do tempo total de aquecimento, 2138 s e (d) 50% do tempo total de aquecimento, 4276 s após iniciado o processo de aquecimento.

A Figura 4.73(a) mostra que, no início do processo, apenas a fronteira do cilindro atinge rapidamente a temperatura do banho térmico. Todo o interior do cilindro encontra-se ainda na temperatura inicial, o que indica que a condição de contorno do primeiro tipo se aplica bem ao fenômeno estudado. A Figura 4.73(b) mostra que passados 427,6 s a região mais interna do cilindro, $r < \frac{R}{2}$, permanece com a temperatura inicial. As demais figuras mostram a distribuição de temperatura no cilindro finito e os respectivos instantes.

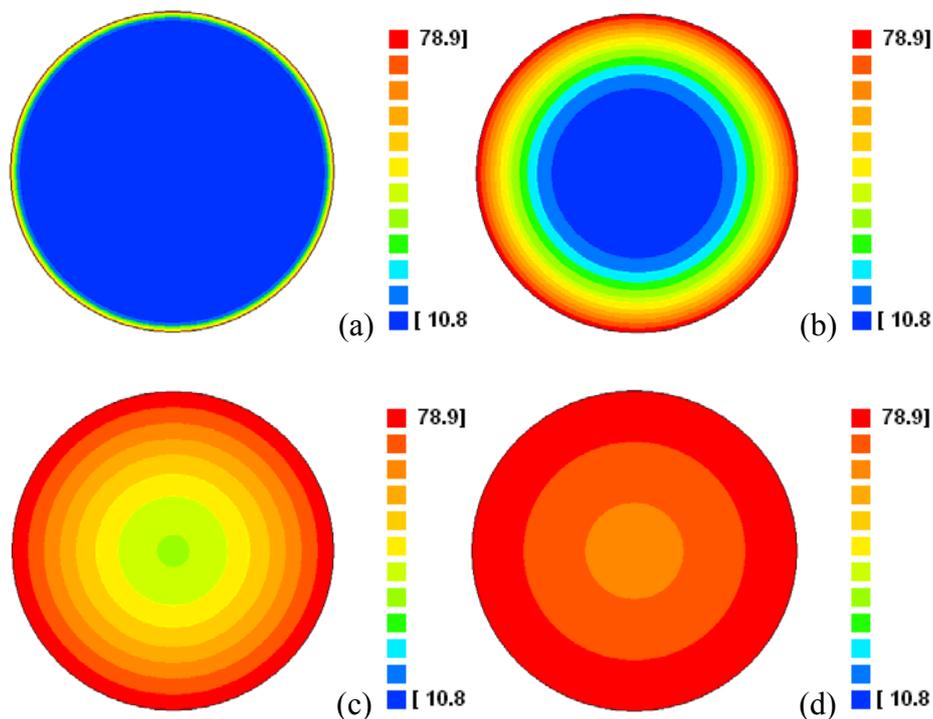


Figura 4.73 - Figuras de contornos mostrando o perfil da temperatura na região central do cilindro para, (a) 0,1% do tempo total de aquecimento; (b) 5% do tempo total de aquecimento; (c) 25% do tempo total e (d) 50% do tempo de aquecimento.

As Figuras 4.74(a), 4.74(b) 4.74(c) e 4.74(d) mostram a distribuição de temperatura para o creme custard depois de transcorrido 40% do tempo total de aquecimento, que corresponde ao instante $1,78 \times 10^3$ s após iniciado o processo de transferência de calor, nos mesmos planos perpendiculares ao eixo do cilindro que foram mostrados para o purê de tomate.

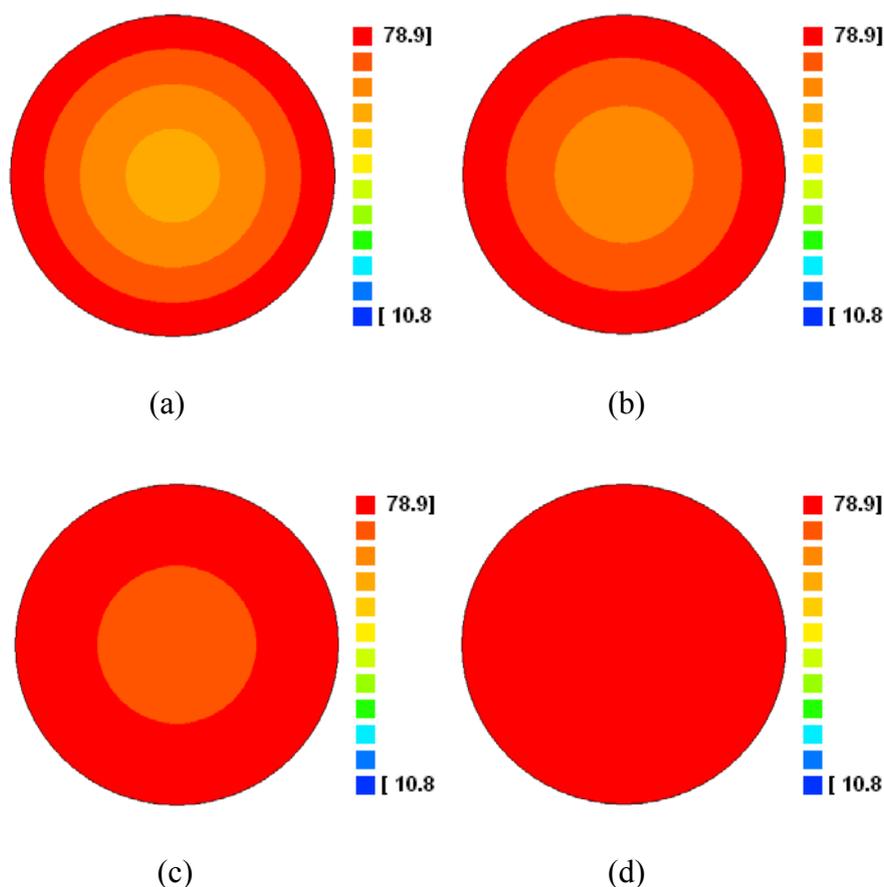


Figura 4.74 – Isotermas do creme custard, no instante 712 s concêntricas aos seguintes pontos: a) $(0; 0,25L/2)$; b) $(0; 0,5L/2)$ c) $(0; 0,75L/2)$ e d) $(0; L/2)$.

Observa-se nas Figuras 4.74(a), 4.74(b) 4.74(c) e 4.74(d), para o creme custard, o mesmo fenômeno que já havia sido observado para o purê de tomate nas Figuras 4.68(a), 4.68(b), 4.68(c), e 4.68(d): o eixo do cilindro fica mais quente e a temperatura mais uniforme nos planos mais próximos à borda superior do cilindro.

A discrepância encontrada entre o valor da difusividade térmica aparente usando o algoritmo proposto, $\alpha = 1,3527080 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e o valor da difusividade térmica aparente estimado por Betta et al. (2009), $\alpha = 1,3559 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, foi de $-0,24\%$,

$$\text{discrepância} = \frac{1,3527080 \times 10^{-7} - 1,3559 \times 10^{-7}}{1,3559 \times 10^{-7}} \times 100 = -0,24\%.$$

Outra informação estatística importante para a análise das medidas realizadas está relacionada com a sua dispersão. Adotando-se o nível de significância de 95,4%, a difusividade térmica aparente pode ser escrita como, $\alpha = (1,3527 \pm 0,0041) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. O erro devido à precisão foi de 0,30%.

Sem o uso do algoritmo proposto, considerando-se o conjunto com todos os 31 pontos a difusividade térmica aparente seria $\alpha = (1,877 \pm 0,087) \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e a discrepância aumentaria para 38,5%.

4.5 Principais resultados obtidos com as ferramentas analíticas desenvolvidas

As ferramentas propostas neste trabalho foram validadas tomando como parâmetro a simulação numérica com uma difusividade térmica aparente pré-estabelecida, para o caso estudado, $\alpha = 1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Após a validação destas ferramentas, elas foram aplicadas aos dados experimentais para serem comparados com outros métodos usados para determinar, os mesmos parâmetros termo-físicos, a partir dos mesmos dados. A Tabela 4.20 apresenta os resultados obtidos, pelo método desenvolvido neste trabalho, para o agar gel, o purê de tomate e o creme custard e os parâmetros estatísticos: coeficiente de determinação, qui-quadrado e a discrepância entre as medidas; .

Tabela 4.20 – Difusividade térmica aparente, coeficiente de determinação e o qui-quadrado do agar gel, purê de tomate e creme custard obtidos pelo algoritmo proposto neste trabalho.

Produto	Tipo de simulação	α (m ² s ⁻¹)	r^2	χ^2	Discrepância
agar gel	1D	1,4365925.x10 ⁻⁷	0,9999043	2,3726504.x10 ⁻²	1,6
purê de tomate	2D	1,5271020.x10 ⁻⁷	0,9990639	43,08741	0,97
Creme custard	2D	1,3527080.x10 ⁻⁷	0,9998274	8,190420	0,24

Os valores obtidos para as difusividades térmicas aparentes usando a OREP modificada permitem uma simulação eficiente da temperatura para todos os produtos testados. A análise estatística mostra que não há diferenças significativas entre os valores obtidos pela simulação, usando o método proposto e os encontrados na literatura.

Parte B – Solução Numérica

O *software Finite Cylinder First Kind* produzido nesta pesquisa, código N1 em apêndice, teve como origem o *software Finite Cylinder Third Kind* desenvolvido no trabalho de doutorado por Silva, C. (2012) que foi adaptado para simular a transferência de calor usando a condição de contorno do primeiro tipo. Com a implementação das modificações, foi possível aplicar a simulação produzida pelo novo *software* nos processos de transferência de calor de produtos pastosos contidos em recipientes cilíndricos. Esta simulação tem aplicação prática nos processos de pasteurização de alguns produtos alimentícios, como cremes e patês.

4.6 Solução numérica e a interface gráfica do software

A tela principal do *software* que usa a solução numérica da equação de difusão aplicada ao cilindro finito, para a condição de contorno do primeiro tipo, tem o aspecto mostrado na figura 4.75.

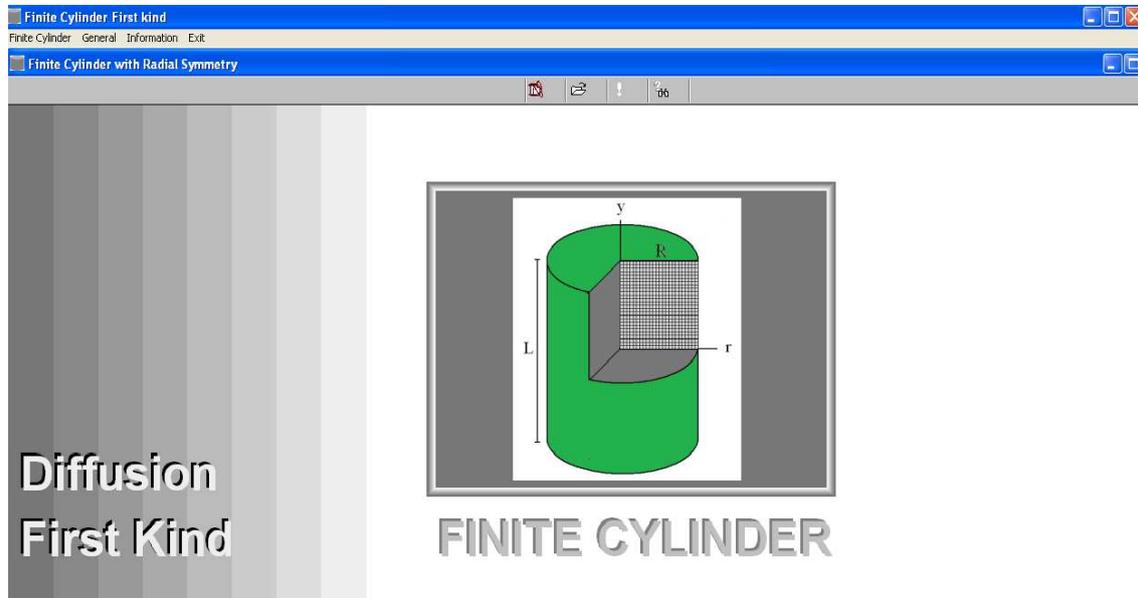


Figura 4.75 - Tela principal do *software* *Finite Cylinder First Kind* desenvolvido para simular a transferência de calor com condição de contorno do primeiro tipo.

A interface gráfica do *software* foi desenvolvida com o propósito de torná-lo o mais simples possível, para que qualquer usuário, mesmo inexperiente, possa usá-lo. Os menus da interface gráfica serão apresentados a seguir.

4.6.1 Menus e caixas de diálogos

Ao clicar no menu “*Finite Cylinder First Kind*” o usuário tem várias caixas de diálogos que podem ser usadas para se comunicar com *software*, Figura 4.76.

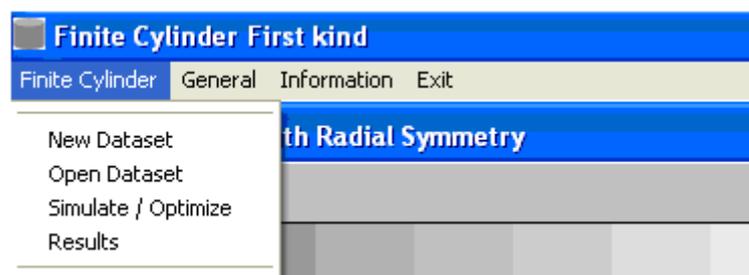


Figura 4.76 - Menu “*Finite Cylinder*”.

O primeiro item da caixa de diálogos “*New Dataset*” é usado para informar um novo conjunto de dados. Estes dados serão usados para a simulação ou otimização e tem o aspecto mostrado na Figura 4.77.

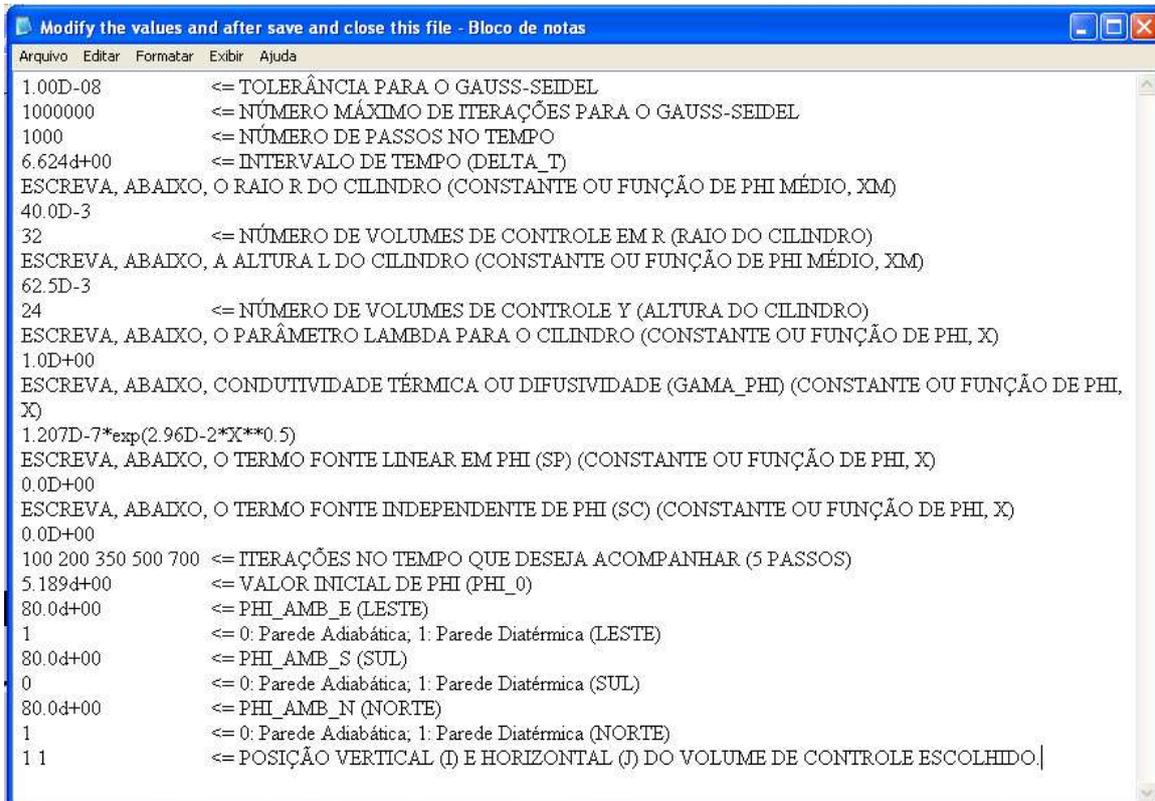


Figura 4.77 - Arquivo com dados que serão informados pelo usuário.

Após a informação do novo conjunto de dados, contido no arquivo da Figura 4.77, é preciso salvá-lo. Para realizar a simulação ou otimização referente a estes dados, basta clicar na opção *Simulate/Optimize*. Ao iniciar a simulação o usuário é informado, a cada instante, sobre as modificações sofridas pelos valores iniciais das constantes, as variações do qui-quadrado, o número de iterações processadas pelo programa. Depois de cada simulação, o usuário é informado, através de uma caixa de mensagem, do tempo utilizado para realizá-la, Figura 4.78. Ao clicar em “*Ok*” o *software* apresenta a pasta *Results* que dá acesso a todos os arquivos gerados durante a simulação.

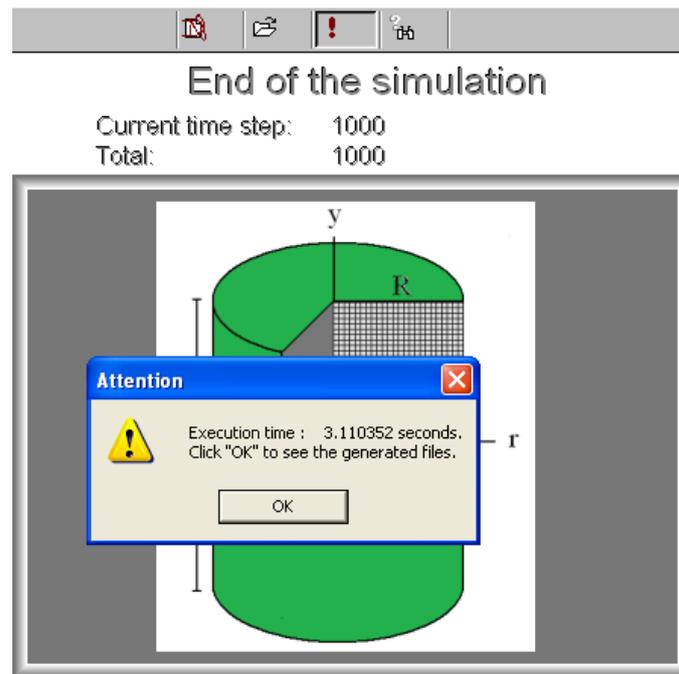


Figura 4.78 - Caixa de mensagem informando o tempo gasto na simulação.

O segundo menu do *software* é o “*General*”. Ao clicar neste menu são abertos quatro itens, como mostra a Figura 4.79.

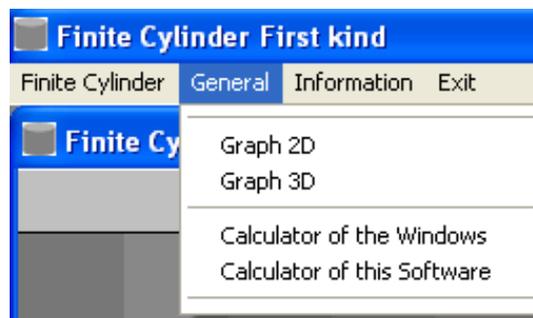


Figura 4.79 - Menu General.

O primeiro item deste menu é “*Graph 2D*”; ao clicar neste item é apresentada uma caixa de diálogo onde se escolhe a cor da linha do gráfico, a função e o domínio da mesma. É possível nomear os eixos e dá um título ao gráfico. Ao clicar “*Ok*” um gráfico bidimensional é produzido. A Figura 4.80 mostra esta caixa de diálogos com os recursos para produzir gráficos em duas dimensões.

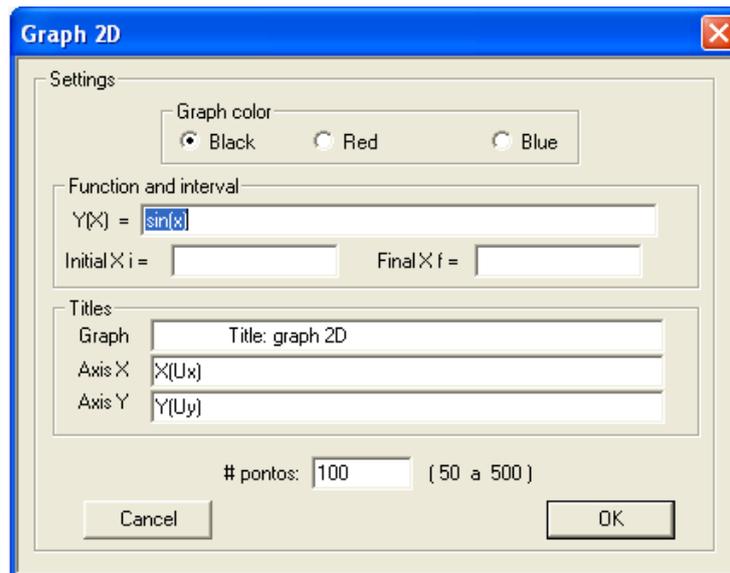


Figura 4.80 - Caixa de diálogo para a aquisição dos dados para o gráfico 2D.

O segundo item do menu “*General*” é o “*Graph 3D*” que, de forma semelhante ao “*Graph 2D*”, produz gráficos tridimensionais. A caixa de diálogo pode ser visualizada na Figura 4.81.

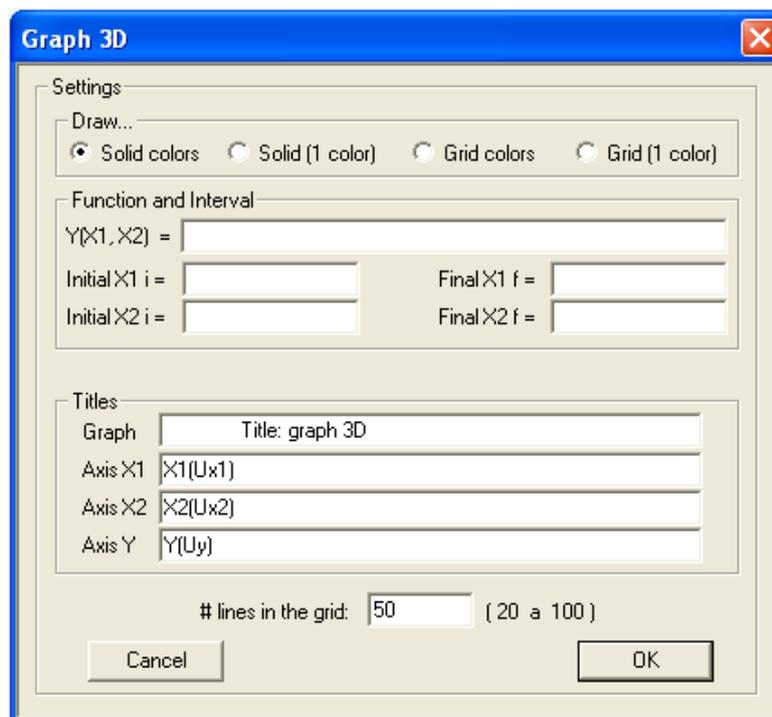


Figura 4.81 - Caixa de diálogo do graph 3D.

O menu “*Information*” abre os itens - *Help*; *Home Page*; *Send E-mail* e *About* - como mostrado na Figura 4.82.

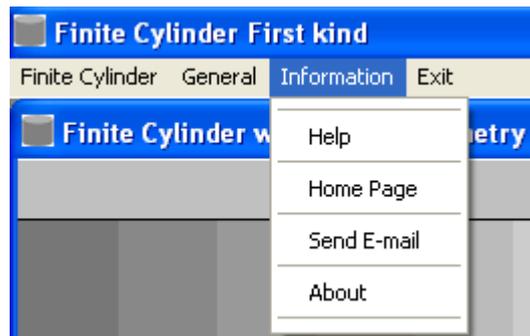


Figura 4.82 - Itens do menu “Information”.

No primeiro item do menu, “*Help*”, são obtidas informações de ajuda sobre a utilização do *software*. No segundo item, “*Home Page*”, o usuário acessa o *site* do *software*, que será criado. No terceiro item existe a opção do envio de e-mail para o autor e no último se obtém as informações gerais sobre o *software*.

No menu “*Exit*” o usuário tem a opção de fechar o *software*. A Figura 4.83 mostra a visualização do referido menu.

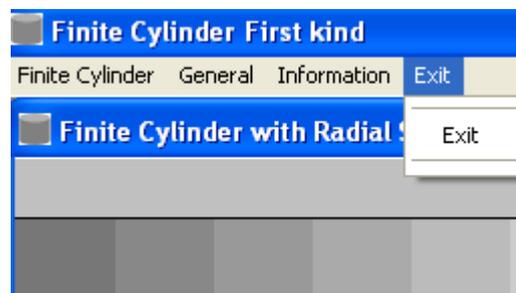


Figura 4.83 - Menu “Exit” do *software* Finite Cylinder First Kind.

4.6.2 Arquivos gerados pela simulação numérica

Para cada simulação solicitada pelo usuário, o *software* gera os seguintes arquivos:

- Average value.txt - Apresenta os resultados obtidos para a temperatura média, \bar{T} , ao longo do tempo;
- Chosen node.txt - Apresenta os resultados obtidos para a temperatura T no volume de controle escolhido pelo usuário, ao longo do tempo;

- Grid.txt - Apresenta as coordenadas (r, y) das intersecções das linhas na malha retangular que gera o cilindro;
- Maxmin.txt - Apresenta os valores máximos e mínimos de T obtidos no processo de simulação;
- North-east.txt; North-west.txt; South-east.txt; South-west.txt - Apresenta os resultados obtidos para os valores das temperaturas T nos volumes de controle nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste ao longo do tempo;
- T0.txt; T1.txt; T2.txt; T3.txt; T4.txt; T5.txt e T6.txt - Apresenta o valor de T para cada volume de controle da malha, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Radial chosen 0.txt; Radial chosen 1.txt; Radial chosen 2.txt; Radial chosen 3.txt; Radial chosen 4.txt; Radial chosen 5.txt; Radial chosen 6.txt - Apresenta o valor de T em cada volume de controle escolhido pelo usuário, ao longo do raio, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhido pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Radial inferior 0.txt; Radial inferior 1.txt; Radial inferior 2.txt; Radial inferior 3.txt; Radial inferior 4.txt; Radial inferior 5.txt; Radial inferior 6.txt - Apresenta o valor de T em cada volume de controle ao longo do raio na posição inferior do cilindro, nos seguintes instantes (a) inicial (0), (b) escolhido pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Radial superior 0.txt; Radial superior 1.txt; Radial superior 2.txt; Radial superior 3.txt; Radial superior 4.txt; Radial superior 5.txt; Radial superior 6.txt - Apresenta o valor de T em cada volume de controle ao longo do raio na posição superior do cilindro, nos seguintes instantes (a) inicial (0), (b) escolhido pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);

- Gama_phi 0.txt; Gama_phi 1.txt; Gama_phi 2.txt; Gama_phi 3.txt; Gama_phi 4.txt; Gama_phi 5.txt; Gama_phi 6.txt – Apresenta o valor de Γ^Φ nas interfaces de cada volume de controle, nos seguintes instantes: (a) inicial (0), (b) escolhidos pelo usuário (1, 2, 3, 4 e 5) e (c) final (6);
- Dimensions.txt - Apresenta as dimensões do cilindro a cada instante;
- Dataset.txt - Apresenta o conjunto de dados utilizados na simulação.

4.7 Solução numérica para o cilindro finito: testes de coerência

A Figura 4.84 apresenta uma pequena malha retangular, onde estão representados os volumes de controle.

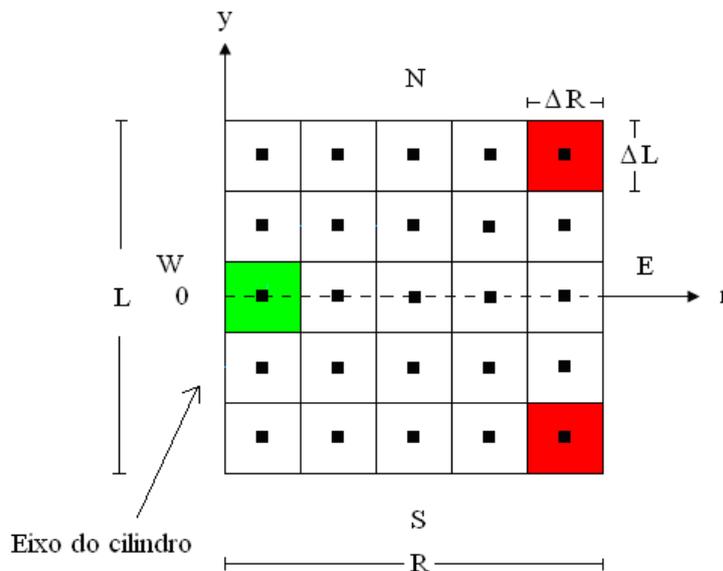


Figura 4.84 - Malha representando 5x5 volumes de controle do cilindro finito, com destaque para os volumes de controle nordeste, sudeste e central.

Há três volumes de controle em destaque: os volumes de controle nordeste e sudeste, em vermelho, que devem apresentar as maiores variações de temperatura no início do processo de aquecimento; e o volume de controle do centro do cilindro, em

verde, que deve sempre apresentar a menor temperatura no processo de aquecimento, até se igualar à temperatura dos outros volumes de controle, quando atingir o equilíbrio térmico.

O plano, onde se encontra a malha, foi formado a partir do eixo longitudinal do cilindro, representado pela letra “y” e pelo eixo radial “r” perpendicular a “y”. O ponto de intersecção dos dois eixos corresponde ao centro do cilindro. Desta forma, o plano formado está limitado entre $\pm \frac{L}{2}$ no eixo “y” e entre 0 e R no eixo “r”, onde L é o comprimento e R o raio do cilindro. Nesta análise será considerado que as propriedades termo-físicas e o volume do cilindro sejam constantes, que não haja fontes de calor no sistema e que a condição de contorno seja a do primeiro tipo.

Os dois eixos usados para formar o plano são também eixos de simetria para o processo de transferência de calor. Por esta razão, representam-se apenas os volumes de controle e as temperaturas a leste do eixo “y”, já que o plano a oeste de “y” corresponde a sua contraparte em ordem reversa das temperaturas que estão no lado leste. Ou seja, o eixo “y” funciona como se fosse um espelho projetando no lado oeste (segundo e terceiro quadrantes), as temperaturas do lado leste (primeiro e quarto quadrantes). Por esta razão, as temperaturas a oeste do eixo “y”, não precisam ser calculadas.

O eixo “r” exibe simetria semelhante à apresentada pelo eixo “y”. Todas as temperaturas a norte de “r” tem sua contraparte no lado sul do eixo “r”. Se fossem usadas as simetrias dos dois eixos, calculadas as temperaturas do primeiro quadrante, seria possível, sem fazer nenhum cálculo a mais, apenas usando argumentos de simetria, apresentar as temperaturas dos demais quadrantes. Entretanto, neste teste, será usada apenas a simetria axial ou do eixo “y”. A simetria radial será usada para testar as temperaturas obtidas pelo programa desenvolvido. Desta forma, espera-se que as temperaturas dos volumes de controle diametralmente opostos, em relação ao eixo r, devam, na simulação, apresentar exatamente as mesmas temperaturas.

Os volumes de controle nordeste e sudeste, representados na Figura 4.84 em vermelho, devem apresentar, na simulação, as maiores temperaturas na fase transiente do processo de aquecimento, pois são os únicos volumes de controle que têm dois de

seus lados em contato com o meio externo - fonte do aquecimento. Do lado oeste “W” não há fonte de calor aquecendo o sistema, pois como já fora dito anteriormente, a fronteira oeste corresponde ao eixo do cilindro.

As temperaturas simuladas devem aumentar, em cada linha, à medida que os volumes de controle se afastem do eixo do cilindro. Em cada coluna, as temperaturas devem diminuir à medida que o volume de controle se aproxime do eixo radial que passa pelo centro do cilindro. A linha que começa no centro geométrico do cilindro deve apresentar sempre as menores temperaturas das respectivas colunas a que pertencem. Desta forma pode-se concluir que, na fase transiente, a menor temperatura da malha se encontra sempre no volume de controle que estiver na posição correspondente ao centro geométrico do cilindro. Na Figura 4.84 este volume de controle está representado pela cor verde clara.

A Figura 4.85 apresenta os resultados da simulação feita pelo *software* desenvolvido nesta pesquisa, aplicada a uma substância qualquer, em estado sólido ou pastoso com difusividade térmica aparente constante e igual a $\alpha = 2,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com forma ou contida num recipiente cilíndrico de raio $R = 100 \text{ mm}$ e comprimento, $L = 200 \text{ mm}$.

73,82611	76,12725	80,84847	87,83545	96,12701
44,63068	49,55185	59,60255	74,39227	91,85831
37,11452	42,72243	54,15949	70,95977	90,77085
44,63068	49,55185	59,60255	74,39227	91,85831
73,82611	76,12725	80,84847	87,83545	96,12701

Figura 4.85 - Temperaturas dos pontos nodais dos vinte e cinco volumes de controle representados na Figura 4.84, no instante 60 s do início do processo de aquecimento.

O sistema se encontra inicialmente a $T_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ e é submetido a um banho térmico à temperatura $T_{eq} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. O raio e o comprimento foram divididos, cada um,

em cinco partes, produzindo uma malha com 25 volumes de controle. O passo de tempo utilizado foi de 3,0 s. Após 20 passos de tempo ou 60 s do início do processo de aquecimento foi produzido pelo *software Finite Cylinder First Kind*, as temperaturas de cada ponto nodal dos elementos da malha, como mostra a Figura 4.85.

Pode-se concluir deste conjunto de temperaturas, que ele é coerente com o campo de temperatura que se deseja obter e com as simetrias que envolvem o processo de transferência de calor por difusão, pois:

- As temperaturas aumentam em todas as linhas de oeste para leste;
- As maiores temperaturas observadas se encontram nos volumes de controle que tem a maior área de contato com o meio externo: nordeste e sudeste;
- Nas colunas as temperaturas diminuem até encontrarem a terceira linha da Figura 4.85 que coincide com o eixo “r” que passa pelo centro do cilindro;
- A terceira linha da Figura 4.85 funciona como um espelho refletindo as duas primeiras linhas que estão a norte, nas duas últimas, a sul;
- A menor temperatura encontra-se no elemento (3,1) da Figura 4.85, que corresponde à temperatura do centro do cilindro.

Desta forma não se pode afirmar, *a priori*, que a simulação produziu um campo de temperaturas errado devido a uma incoerência inesperada. Do teste de coerência se conclui que é possível que a simulação produzida pelo *software* desenvolvido nesta pesquisa esteja correta. Para se ter esta certeza é necessário que se faça a validação do *software Finite Cylinder First Kind* a partir de outro que já tenha sido validado.

4.8 Validação com a solução analítica: parâmetros termo-físicos constantes

Apesar de os testes de coerência não indicarem nenhuma incongruência nos resultados obtidos, não se pode, ainda, afirmar que estes resultados são verdadeiros. A validação dos resultados obtidos pelo *software* usando a solução numérica ora desenvolvido será feita por comparação com os resultados obtidos pelo *software* que usou a solução analítica e já foi validado, seções 4.31 a 4.38. Para testar o novo *software* que usa um método numérico para resolver a equação de difusão de calor, serão usados quatro conjuntos de dados, (t, T^*) em quatro pontos diferentes, simulados pelo *software* que usa a solução analítica. A partir da comparação dos dois resultados, pode-se concluir sobre a validade do *Software Finite Cylinder First Kind* que usa a solução numérica.

É bom salientar que nos dois métodos há limitações na precisão dos resultados. Na solução analítica o somatório infinito foi truncado no ducentésimo termo. Na solução numérica da equação de difusão as temperaturas são conhecidas em apenas alguns pontos da malha, chamados de pontos nodais. Devido a este fato, quanto maior o número de volumes de controle utilizados nas simulações menor será o erro na localização do ponto que se deseja obter a evolução da temperatura. Mesmo assim, não se elimina por completo os erros na localização destes pontos. Por exemplo, para simular a temperatura no centro do cilindro $(0,0)$, utiliza-se o ponto nodal mais próximo localizado em $\left(\frac{\Delta R}{2}, 0\right)$, como pode ser observado na Figura 4.84. Os resultados obtidos pelos dois métodos são mostrados e comparados através das figuras que se seguem.

4.8.1 Validação da solução numérica para a posição $r = 0$; $y = 0$

A Figura 4.86(a) mostra a evolução da temperatura no centro do cilindro obtida pelo *software* que usa a solução analítica e a Figura 4.86(b) mostra a evolução da temperatura adimensional obtida pelo *Software Finite Cylinder First Kind* que usa a solução numérica. Para obter a Figura 4.86(b), foi usada uma malha com 71 volumes de controle ao longo do raio e 71 volumes de controle ao longo do comprimento do cilindro.

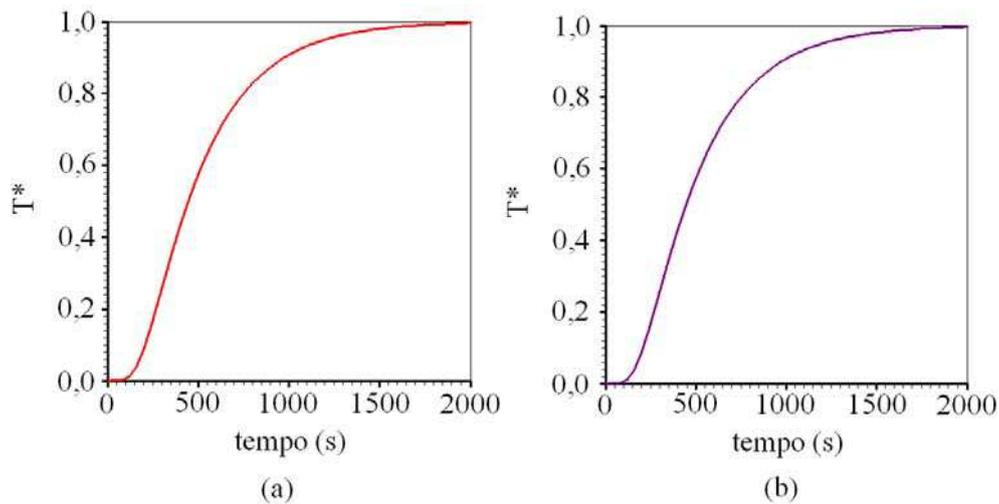


Figura 4.86 – Gráfico da temperatura adimensional com o termopar na posição $r=0$; $y=0$ obtida por (a) simulação analítica e (b) simulação numérica.

A Figura 4.87 apresenta a superposição das Figuras 4.86(a) e 4.86(b) e evidencia quão coincidentes são as duas soluções para a evolução das temperaturas adimensionais no centro do cilindro. Tanto a obtida pelo *software* que usa a solução analítica, quanto a obtida pelo *Software Finite Cylinder First Kind* que usa a solução numérica da equação de difusão, apresentam resultados tão próximos uma da outra que não é possível distingui-las visualmente.

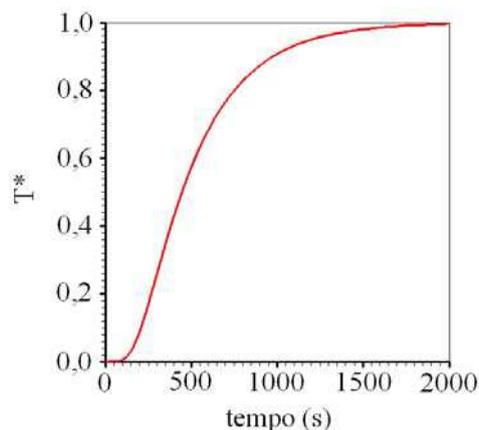


Figura 4.87 – Gráficos das temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0$; $y=0$, obtidas por simulação analítica e pelo *Software Finite Cylinder First Kind*, uma sobreposta a outra.

4.8.2 Validação da solução numérica para a posição $r = 0$; $y = 0,015$ m

Os gráficos das Figuras 4.88(a) e 4.88(b) mostram as evoluções das temperaturas adimensionais no interior do cilindro com o termopar em $(0;0,015)$, a partir do *software* que usa, (a) a solução analítica e pelo (b) *Software Finite Cylinder First Kind* usando uma malha com 120 volumes de controle ao longo do raio e 120 volumes de controle ao longo do comprimento.

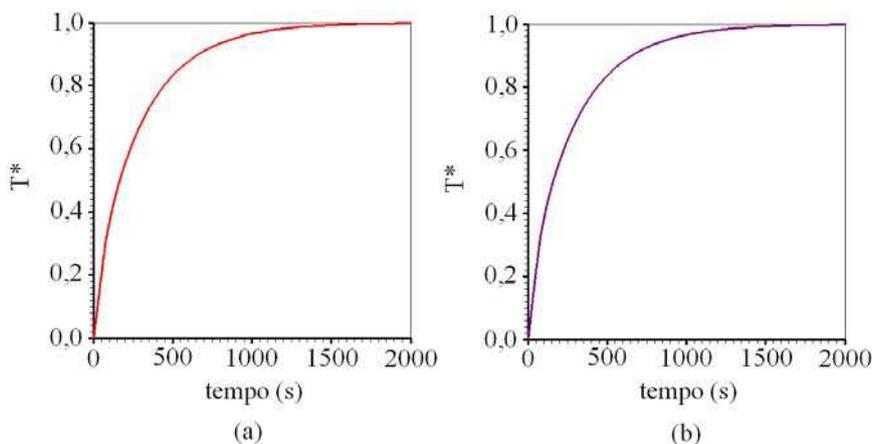


Figura 4.88 – Temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0$; $y=0,015$ m obtidos por (a) simulação analítica e pelo (b) *Software Finite Cylinder First Kind*.

A Figura 4.89 mostra o resultado da superposição das Figuras 4.88(a) e 4.88(b). E, mais uma vez fica claro a concordância entre os resultados dos dois *softwares* na simulação das temperaturas adimensionais.

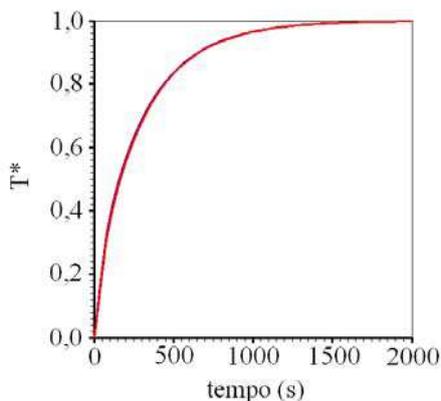


Figura 4.89 – Temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0$; $y=0,015$ m obtida pelo *software* que usa a solução analítica e pelo *software Finite Cylinder First Kind*, uma sobreposta a outra.

4.8.3 Validação da solução numérica para a posição $r = 0,015$ m; $y = 0$

A Figura 4.90(a) apresenta a evolução da temperatura adimensional a partir do *software* que usa a solução analítica. A Figura 4.90(b) apresenta o resultado obtido pelo *Software Finite Cylinder First Kind* usando uma malha com 120 volumes de controle ao longo do raio e 120 volumes de controle ao longo do comprimento do cilindro.

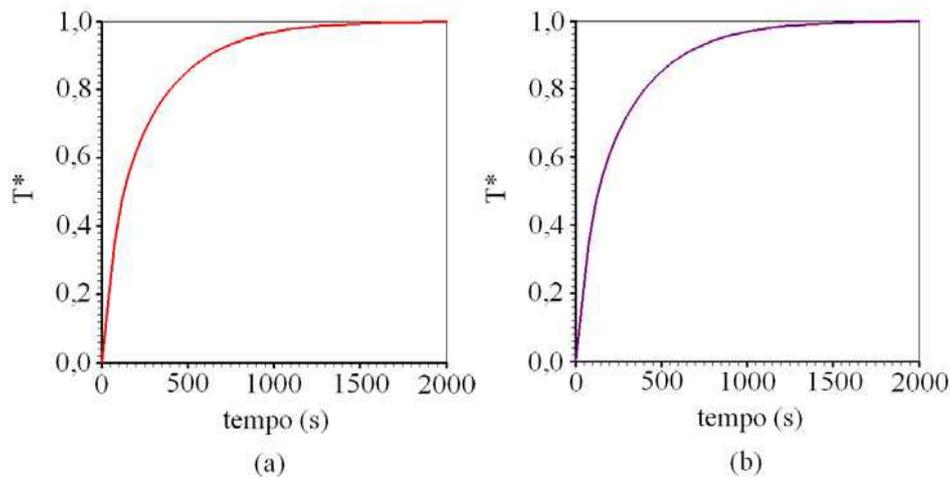


Figura 4.90 – Gráficos das temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0,015$ m; $y=0$ obtida por (a) simulação analítica e (b) simulação numérica.

A superposição das Figuras 4.90(a) e 4.90(b) produziu o gráfico da Figura 4.91 que mostra que o *software* que usa a solução analítica valida a solução obtida pelo *Software Finite Cylinder First Kind* que usa método numérico na solução da equação de difusão para o cilindro finito.

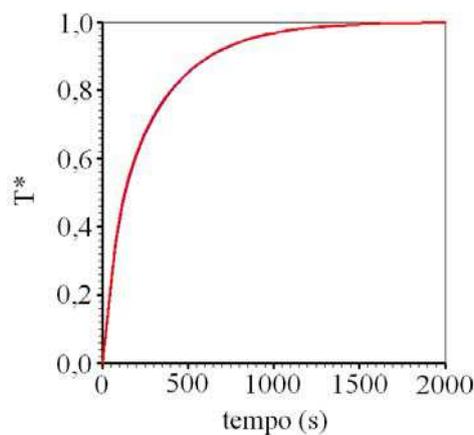


Figura 4.91 – Gráficos da temperatura adimensional com o termopar na posição $r=0,015$ m; $y=0$ obtidas por simulação analítica e numérica uma sobreposta a outra.

4.8.4 Validação da solução numérica para a posição $r = 0,01$ m; $y = 0,01$ m

O último ponto escolhido para validar o *software* que usa a solução numérica da equação de difusão foi o centro do semi-plano usado para representar os volumes de controle, $\left(\frac{R}{2}; \frac{1}{2} \frac{L}{2}\right)$. A Figura 4.92(b) apresenta o resultado obtido pelo *Software Finite Cylinder First Kind* usando a mesma malha da seção 4.8.3, 120 volumes de controle ao longo do raio e 120 volumes de controle ao longo do comprimento do cilindro.

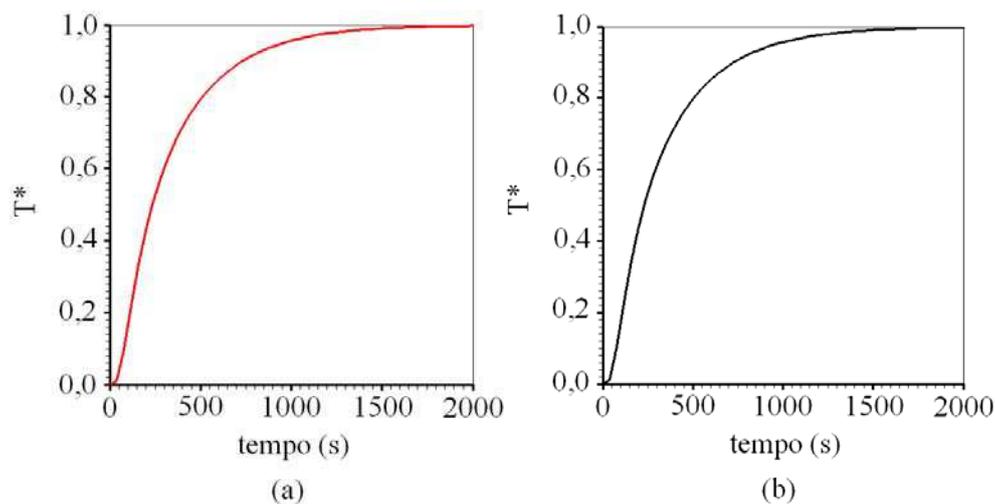


Figura 4.92 – Gráficos das temperaturas adimensionais com o termopar na posição $r=0,01$ m; $y=0,01$ m obtida por (a) simulação analítica e pelo (b) *Software Finite Cylinder First Kind*.

As Figuras 4.92(a) e 4.92(b) mostram os resultados obtidos pelos dois *softwares*, o que usa o método analítico e o que usa o numérico para encontrar a solução da equação de difusão, respectivamente.

A superposição das duas soluções pode ser observada na Figura 4.93. A solução apresentada pelo *Software Finite Cylinder First Kind* que usa o método numérico é tão próxima da solução do *software* que usa o método analítico, que as duas figuras, na escala usual, são indistinguíveis.

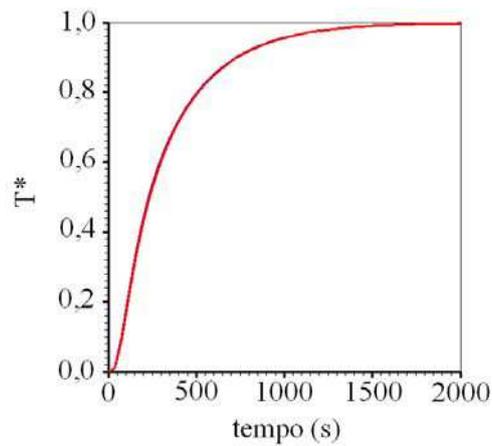


Figura 4.93 - Temperaturas adimensionais com o termopar na posição, $r=0,01$ m; $y=0,01$ m obtidas por simulação analítica e numérica, uma sobreposta a outra.

Pode-se concluir a partir de uma rápida inspeção nas Figuras 4.87, 4.89, 4.91 e 4.93, que há uma excelente concordância entre a solução apresentado pelo *software Finite Cylinder First Kind* para a cinética de penetração de calor, desenvolvida nesta pesquisa, e o *software* que usa a solução analítica da equação de difusão, já validada nas seções (4.3.1 a 4.3.8) deste trabalho. Desta forma pode-se afirmar que o *software Finite Cylinder First Kind* também é válido e pode ser aplicado nos processos de transferência de calor para produtos pastosos contidos em recipientes cilíndricos.

4.8.5 Discussão sobre a penetração do calor: posições do termopar

Para as quatro posições do sensor de temperatura escolhidas para análise da validação, foi observado que o *Software Finite Cylinder First Kind* apresenta um resultado tão próximo ao do *Software* que usa a solução analítica, considerado verdadeiro, que não é possível distinguir os gráficos das temperaturas quando eles são superpostos um ao outro. Desta forma pode-se concluir que *Software Finite Cylinder First Kind* proposto e desenvolvido nesta pesquisa apresenta resultados corretos para a distribuição de temperaturas nas posições testadas.

4.9 Software Finite Cylinder First Kind: difusividade térmica constante e variável

O *software Finite Cylinder First Kind* permite que se estime qual a melhor função, $\alpha(T)$, dentre vinte funções disponibilizadas pelo *software*, para a difusividade térmica aparente, num determinado intervalo de temperatura. Devido a esta facilidade, estimou-se a melhor função para descrever a difusividade térmica aparente do purê de tomate e do creme custard no intervalo de temperatura considerado pela experiência de Betta et al., (2009). A difusividade térmica aparente para o agar gel foi considerada constante devido a pequena variação de temperatura sofrida pela substância durante o aquecimento.

4.10 Aplicação do software numérico às experiências de Betta et al. (2009)

Nas experiências de Betta et al., (2009), já descritas detalhadamente na seção 4.4, foram estimadas as difusividades térmicas aparentes do purê de tomate e do creme custard, contidos em recipientes metálicos com geometria cilíndrica. Nesse trabalho, as difusividades térmicas aparentes destes produtos foram consideradas constantes. Na seção seguinte, será mostrado, passo a passo, como estimar difusividade térmica aparente, tanto constante quanto variável com a temperatura local, do purê de tomate usando a interface gráfica do *Software Finite Cylinder First Kind*.

4.10.1 Aplicação do software numérico ao purê de tomate: difusividade térmica aparente constante

Ao clicar no executável do programa *Finite Cylinder First Kind* aparece a tela da Figura 4.75. Em seguida, clique no menu *Finite Cylinder* como mostra a Figura 4.76 e depois na opção *New Dataset*. Após o clique em *New Dataset* aparece a caixa de diálogo *Attention* informando que após as modificações sugeridas pelo usuário é preciso salvá-las. Ao clicar *Ok* aparece a Figura 4.94.

A Figura 4.94 mostra as informações necessárias que devem ser prestadas pelo usuário para que o *software* simule ou otimize a difusividade térmica aparente constante ou variável de qualquer produto pastoso, contido em recipiente cilíndrico, ou em estado sólido, com geometria cilíndrica. Na primeira linha o usuário informa a tolerância do Gauss-Seidel. A segunda linha complementa a primeira. Se a condição do Gauss-Seidel não for atingida, o programa deve passar para o próximo passo quando atingir o número máximo de iterações indicado.

```

1.00D-08      <= TOLERÂNCIA PARA O GAUSS-SEIDEL
1000000      <= NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES PARA O GAUSS-SEIDEL
2000         <= NÚMERO DE PASSOS NO TEMPO
3.312d+00    <= INTERVALO DE TEMPO (DELTA_T)
ESCREVA, ABAIXO, O RAIO R DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
40.0D-3
32           <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM R (RAIO DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, A ALTURA L DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
62.5D-3
24          <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O PARÂMETRO LAMBDA PARA O CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.0D+00
ESCREVA ABAIXO, CONDUTTIVIDADE TÉRMICA / DIFUSIVIDADE (GAMA_PHI) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.48x10-7
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE LINEAR EM PHI (SP) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0D+00
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE INDEPENDENTE DE PHI (SC) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0D+00
200 400 700 1000 1400    <= ITERAÇÕES NO TEMPO QUE DESEJA ACOMPANHAR (5 PASSOS)
5.189d+00    <= VALOR INICIAL DE PHI (PHI_0)
80.0d+00     <= PHI_AMB_E (LESTE)
1           <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (LESTE)
80.0d+00     <= PHI_AMB_S (SUL)
0           <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (SUL)
80.0d+00     <= PHI_AMB_N (NORTE)
1           <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (NORTE)
1 1         <= POSIÇÃO VERTICAL (I) E HORIZONTAL (J) DO VOLUME DE CONTROLE.

```

Figura 4.94 - Arquivo com os dados sobre o purê de tomate informado pelo usuário.

Na terceira se informa o número de passos que o programa deve executar. Neste caso foi de 2000 passos perfazendo um tempo total de 6624 s, uma vez que na linha seguinte é informado o intervalo de tempo de cada passo, que foi estipulado em 3,312 s.

A quinta linha pede que seja informado o raio do cilindro (m) e na sexta, o número de volumes de controle ao longo do raio. A sétima linha pede que seja informada a altura do cilindro. Mas, neste caso, o que o autor informou foi a meia altura

do cilindro, para que fosse explorada a simetria radial. Na oitava, informa-se o número de volumes de controle ao longo da meia altura.

Na nona, informa-se o valor de λ . E, na seguinte, informa-se a função que melhor representa a variação da difusividade térmica do produto, no intervalo de temperatura pesquisado. A décima primeira linha pede informação sobre o termo fonte linear que neste caso é zero e, na linha seguinte, sobre o termo fonte independente da temperatura que também é zero.

Na décima terceira linha o programa pede que se informe os instantes de tempo que devem ser apresentados os resultados sobre a cinética da penetração do calor, sendo no máximo cinco instantes. A décima quarta linha pede informação sobre a temperatura inicial do sistema. A décima quinta, sobre a temperatura do meio externo a leste do sistema em estudo. A décima sexta linha pede informação sobre a propriedade do material, quanto à possibilidade da transferência do calor, que separa o sistema do meio externo pelo lado leste. O programa só permite duas possibilidades: ou a interface do sistema é perfeitamente transparente ao calor (1) ou perfeitamente isolante (0). Nas duas linhas seguintes, estas mesmas informações são prestadas para o lado sul e norte. O *software* está programado para usar a simetria axial não permitindo fluxo de calor pelo lado oeste do sistema.

A última linha, vigésima primeira, pede que seja informado para qual volume de controle se deseja informação sobre a evolução da temperatura do sistema. No caso estudado, foi informado 11, que corresponde ao volume de controle da primeira linha e primeira coluna, que corresponde ao volume de controle localizado no centro do cilindro.

Depois de ter clicado no menu *Finite Cylinder*, na aba *New Dataset* e ter colocados todas estas informações no bloco de notas, Figura 4.94, o passo seguinte é clicar novamente no menu *Finite Cylinder* e em seguida clicar na opção *Simulate/Optimize*.

Uma nova janela se abre e o usuário tem duas opções a seguir: (a) encontrar uma função que melhor se adapte a difusividade térmica do produto ou (b) já achou e quer simular a função encontrada. Como mostra a Figura 4.95.

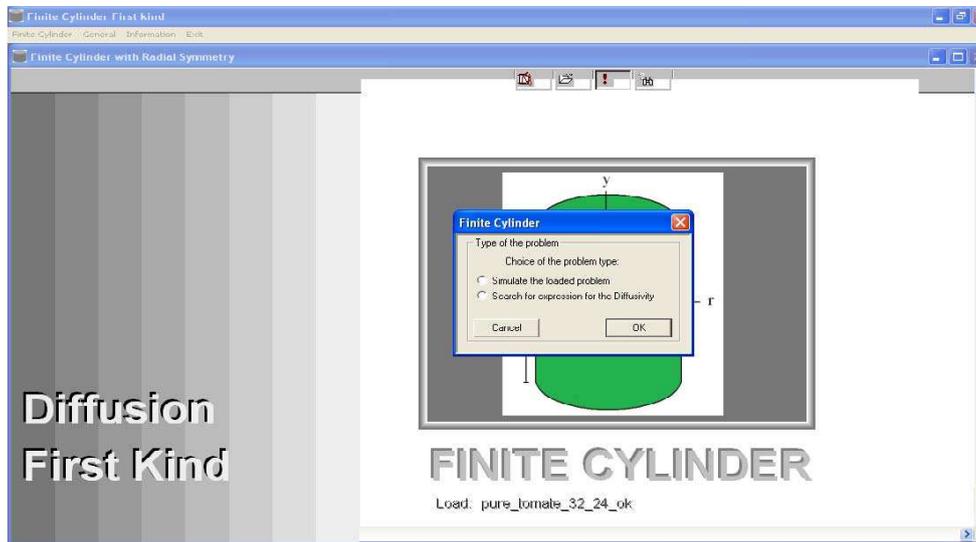


Figura 4.95 – Informar se procura uma função para a difusividade térmica ou se quer simular uma função já encontrada.

Caso a alternativa escolhida seja a letra (a) então o *software* apresenta outra caixa de diálogo para que seja informada qual das funções apresentadas se deseja otimizar, vide Figura 4.96.

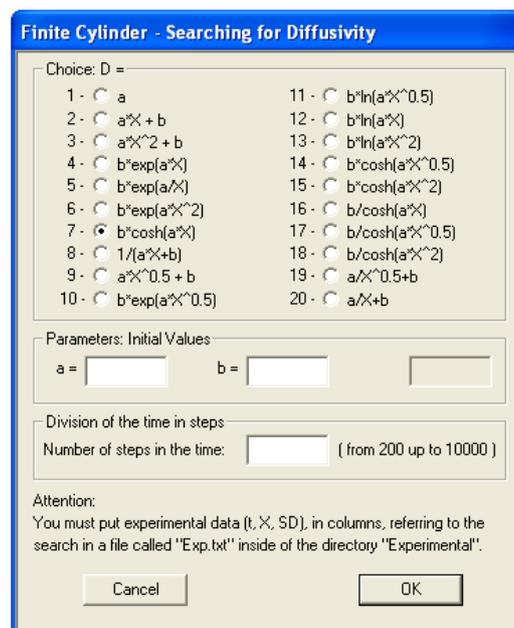


Figura 4.96 – Mostra as vinte funções disponíveis no *software*.

Escolhida uma das funções apresentadas, exceto a primeira, é preciso estimar dois valores iniciais: a e b e, em seguida, quantos passos de tempo o *software* deve operar para atingir o regime estacionário. Caso o usuário opte pela primeira alternativa - difusividade térmica aparente constante – será preciso estimar apenas um coeficiente que, para um grande número de produtos, no sistema MKS, é da ordem de 10^{-7} . Concluída a otimização, o *software* apresenta o melhor valor para os coeficientes a e b .

Nesta pesquisa, a equação de difusão foi resolvida com o objetivo de se estudar a cinética de penetração de calor de produtos alimentícios pastosos inseridos em recipientes cilíndricos, considerando as seguintes simplificações: $\lambda = 1$, $\Gamma^\Phi = \alpha = k/(\rho c_p)$, e $\Phi = T$. Um estudo sobre malhas de refinamento indicou que a malha com 32x24 elementos, como mostrada na Figura 4.97(a), é apropriada para a solução numérica da equação de difusão, principalmente, quando se deseja explorar as simetrias envolvidas na geometria em estudo. No processo de otimização o tempo foi dividido em 2000 passos, com o objetivo de garantir um adequado refinamento para a solução numérica da equação de difusão.

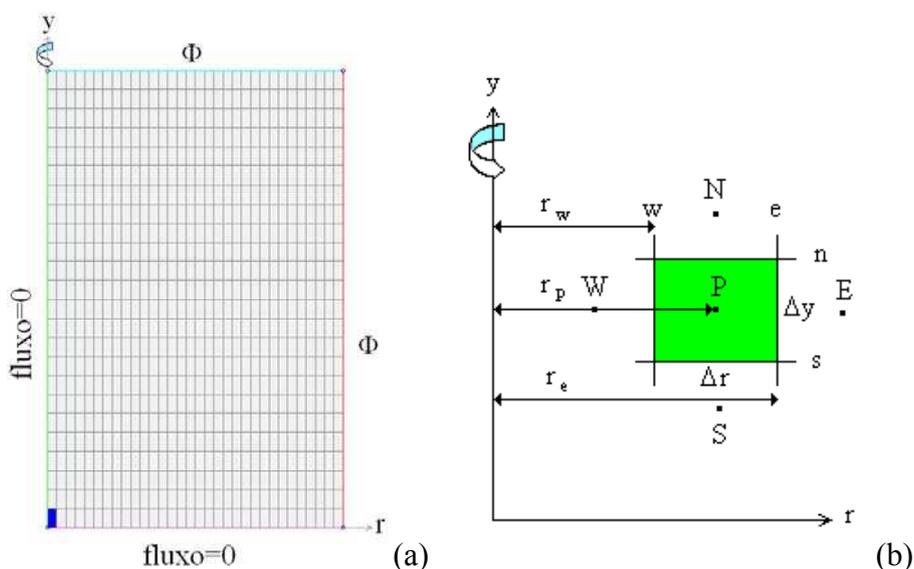


Figura 4.97 – (a) Malha com 32x24 elementos utilizada nesta pesquisa, (b) Área geratriz do volume de controle destacando o ponto nodal P e seus vizinhos W, E, S e N.

É fácil encontrar, na literatura, artigos que consideram constantes as difusividades térmicas aparentes dos produtos pesquisados (Carciofi et al., 2002; Carbonera et al., 2003; Markowski, et al., 2004; Glavina et al., 2006; Plazl et al., 2006; Bãiri et al., 2007; Huang, 2007; Betta et al., 2009; Ukrainczyk, 2009).

Nesses casos, o termo da equação de difusão onde se encontra a difusividade térmica aparente, pode ser escrito como, $\alpha \nabla^2 T$. Neste trabalho foi considerada esta possibilidade. A Figura 4.98 mostra o resultado da cinética de aquecimento no centro do cilindro finito quando se considera constante a difusividade térmica aparente do purê de tomate. Para a função constante, a difusividade térmica aparente obtida pela otimização foi de $\alpha = 1,4762 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, o qui-quadrado $\chi^2 = 14,27$ e o coeficiente de determinação $r^2 = 0,999612$.

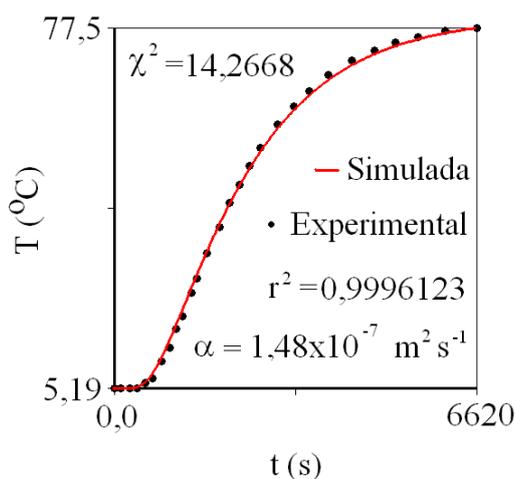


Figura 4.98 – Gráfico da cinética da penetração do calor no purê de tomate supondo constante a difusividade térmica aparente.

O resultado obtido nesta pesquisa concorda com o obtido por Betta et al. (2009) com uma diferença de aproximadamente 4%. É possível que esta diferença entre os resultados seja devida ou ao critério de convergência ou da malha de refinamento. Uma observação na Figura 4.98, mostra que com estes indicadores estatísticos, é possível concluir, como razoáveis, os resultados para a cinética de penetração de calor considerando constante o valor da difusividade térmica aparente. No início do processo de aquecimento as temperaturas simuladas pelo *software* são maiores do que as obtidas

experimentalmente e no final do processo de aquecimento as temperaturas simuladas pelo *software* se tornam menores do que as obtidas experimentalmente. Definindo-se o erro experimental da *i*-ésima temperatura como, $E_i = T_i^{\text{exp}} - T_i^{\text{sim}}$, pode-se observar o gráfico dos erros em função da temperatura experimental como mostrado na Figura 4.99.

Apesar de o erro médio ter sido de apenas $-0,0316\text{ }^{\circ}\text{C}$, a Figura 4.99 indica que há uma forte correlação, $r_{xy} = 0,7037$, entre os erros e a temperatura experimental. Devido a esta correlação foi possível ajustar, com certo sucesso, os erros experimentais, a uma curva de um polinômio de terceiro grau, como pode ser observado na Figura 4.99(b). O coeficiente de determinação entre a temperatura obtida experimentalmente e a obtida por simulação numérica foi de, $r_{yy}^2 = 0,9204$.

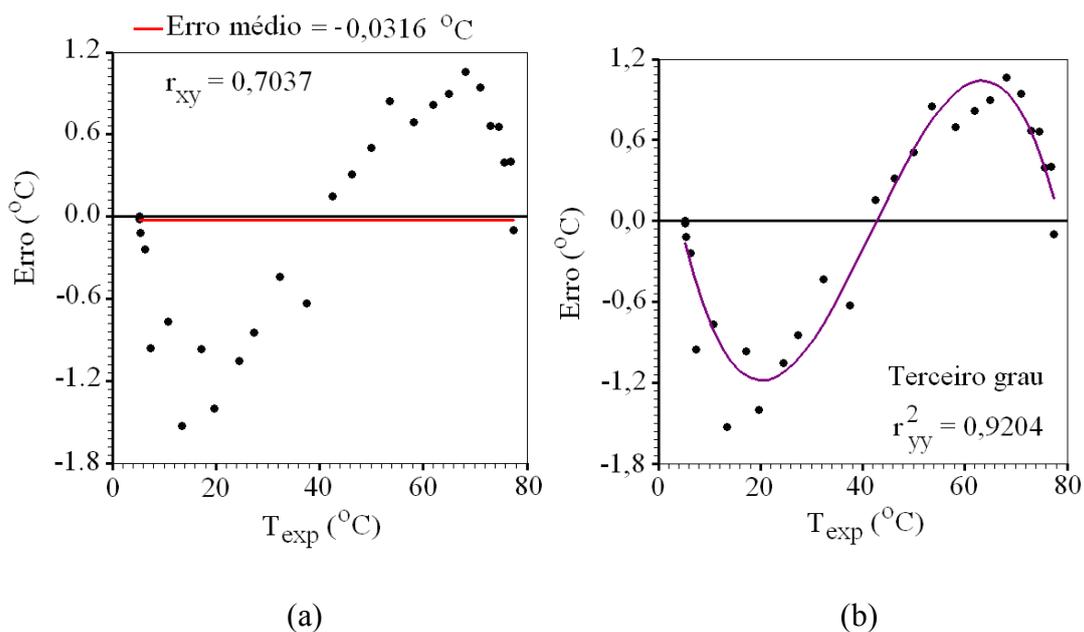


Figura 4.99 – (a) Erros da temperatura experimental para a difusividade térmica constante do purê de tomate, em destaque o erro médio e (b) o ajuste de uma curva polinomial aos erros experimentais.

Devido a esta última observação, apesar do resultado aparentemente bom para a cinética de aquecimento, é possível adotar outro modelo para a difusividade térmica.

Betta et al., (2009) relata que a temperatura na fronteira era medida durante todo tratamento e os valores obtidos eram constantes e igual a 80,0 °C. Mas se a condição de equilíbrio na fronteira é adequado para descrever a penetração de calor em alimentos enlatados, o que está errado? Por que há uma forte correlação entre os erros e as temperaturas experimentais? Considerar a difusividade térmica aparente como uma função da temperatura local melhoraria os resultados?

4.10.2 Aplicação do software numérico ao purê de tomate: difusividade térmica aparente variável

É bom lembrar que o aquecimento do purê de tomate ocorre entre as temperaturas 5,2 e 80,0 °C. De acordo com vários autores, (Ansari et al., 2007; Oke et al., 2007; Kurozawa et al., 2008; Singhal et al., 2008), é razoável assumir, para esta variação de temperatura, que a difusividade térmica aparente seja função da temperatura local. No caso em análise, os dados experimentais estão no estado transiente do processo de aquecimento e a difusividade térmica aparente deve ser relacionada à temperatura local, do interior do produto. A difusividade térmica aparente é sensível aos efeitos de possíveis variações do calor específico, da densidade do produto e, conseqüentemente da dilatação térmica. Uma vez que simplificações foram feitas, $\lambda = 1$ e $\Gamma^\Phi = \alpha = k/(\rho c_p)$, e estas simplificações envolvem grandezas termo-físicas como o calor específico a pressão constante e a densidade do produto, que claramente variam com a dilatação térmica. Por isto, é preciso considerar que uma função para a difusividade térmica aparente dependente da temperatura local $\alpha(T)$, seja uma opção para melhorar os resultados obtidos na seção anterior.

Por outro lado, é bom observar que a Equação (3.11) foi escrita e discretizada pressupondo a possibilidade de $\Gamma^\Phi = \alpha$ ser variável. Devido a este fato, foram realizadas otimizações para a cinética de penetração do calor no centro do cilindro usando várias expressões crescentes para a difusividade térmica aparente, como função da temperatura local.

A Tabela 4.21 apresenta as funções classificadas por ordem crescente do valor obtido para o qui-quadrado.

Tabela 4.21 – Apresenta os valores de a e b das funções da difusividade térmica aparente do purê de tomate, do qui-quadrado e do coeficiente de determinação.

Classificação	Função	A	b (m ² s ⁻¹)	χ^2	r ²
1	$be^{aT^{1/2}}$	2,8203180x10⁻²	1,2187117x10⁻⁷	1,113602	0,9999466
2	$aT + b$	3,2646358x10 ⁻¹⁰	1,3191038x10 ⁻⁷	1,180268	0,9999444
3	$b \cosh(aT^{1/2})$	6,9128491x10 ⁻²	1,3208933x10 ⁻⁷	1,192933	0,9999440
4	be^{aT}	2,2231317x10 ⁻³	1,3252037x10 ⁻⁷	1,217937	0,9999426
5	$b \cosh(aT)$	7,0202267x10 ⁻³	1,3830555x10 ⁻⁷	1,796459	0,9999161
6	be^{aT^2}	2,3986193x10 ⁻⁵	1,3824453x10 ⁻⁷	1,851566	0,9999139
7	$be^{a/T}$	-2,184847	1,5671067x10 ⁻⁷	2,786657	0,9998645

O gráfico da Figura 4.100 mostra o comportamento das funções que apresentaram os três melhores resultados para a difusividade térmica aparente do purê de tomate.

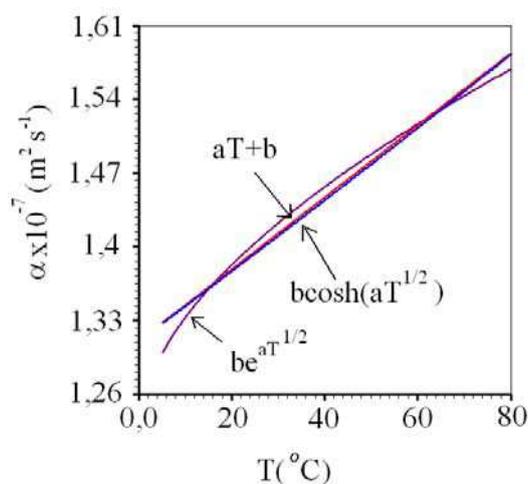


Figura 4.100 – Gráfico das três melhores funções para a difusividade térmica aparente do purê de tomate dentre as funções testadas.

O gráfico da Figura 4.101 mostra a evolução da temperatura no centro do cilindro do purê de tomate simulada numericamente através da função $be^{aT^{1/2}}$ (linha contínua vermelha).

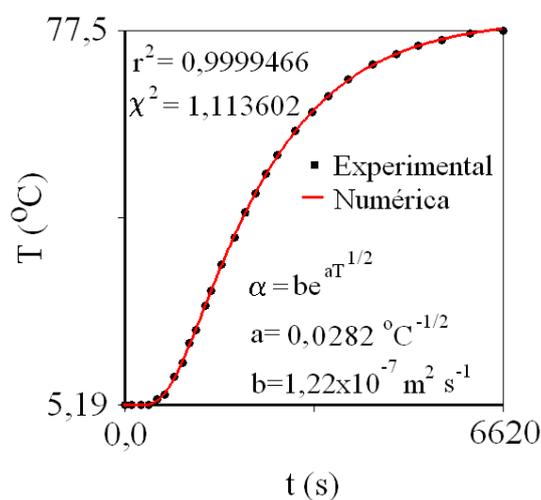


Figura 4.101 – Gráfico representando a penetração de calor a partir da simulação numérica e os pontos obtidos experimentalmente para a temperatura do purê de tomate no centro do cilindro finito.

Como pode ser observado tanto da Figura 4.101 quanto da Tabela 4.21, os indicadores estatísticos para a difusividade térmica aparente do purê de tomate quando expressa pela função $\alpha(T) = be^{aT^{1/2}}$ são muito melhores do que aqueles obtidos quando se considerou constante a difusividade térmica aparente. O qui-quadrado diminuiu 13 vezes enquanto o coeficiente de determinação aumentou de 0,999612 para 0,999947.

A Figura 4.102(a) mostra como ficou a distribuição de erros depois que a difusividade térmica aparente de purê de tomate foi considerada variável com a temperatura local: os erros variam de -0,506 até 0,381 °C, com coeficiente de correlação de $r_{xy} = -0,212$, sendo o erro médio -0,0102 °C.

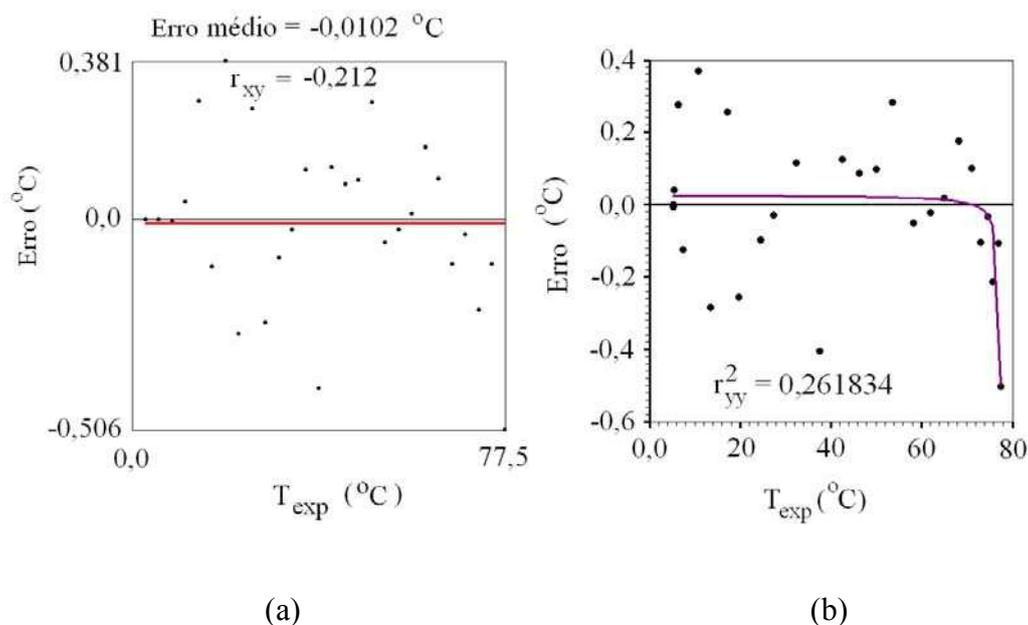


Figura 4.102 – (a) Gráfico da distribuição de erros considerando a difusividade térmica aparente do purê de tomate como função da temperatura local, (b) Ajuste de uma curva tangente aos erros experimentais.

A comparação dos dois resultados evidencia o quanto melhora os indicadores estatísticos, quando se considera a difusividade térmica aparente variável com a temperatura local para o purê de tomate. A distribuição dos erros que variava de -1,8 a 1,2 °C com distribuição tendenciosa, $r_{xy} = 0,7037$, Figura 4.99(a), é agora distribuída mais aleatoriamente, $r_{xy} = -0,212$, sendo menor a amplitude dos erros, entre -0,506 e 0,381 °C, e o erro médio diminuiu de -0,0316 para -0,0102 °C, como mostra a Figura 4.102(a). Como os erros estão mais aleatórios, é mais difícil encontrar uma curva que se ajuste a eles. A Figura 4.102(b) mostra a curva $y(x) = A \tan(Bx + C) + D$, que é a que melhor se ajustou aos erros experimentais, com coeficiente de determinação de $r_{yy}^2 = 0,2618$. Este resultado é bem menor do que o coeficiente de correlação $r_{yy}^2 = 0,9204$ obtido para o ajuste da curva aos erros experimentais quando se considerava a difusividade constante, Figura 4.99(b).

A difusividade térmica aparente do purê de tomate dada pela função $\alpha(T) = be^{aT^{1/2}}$ e a difusividade média desta função entre as temperaturas 5,19 e 77,5 °C são mostradas na Figura 4.103.

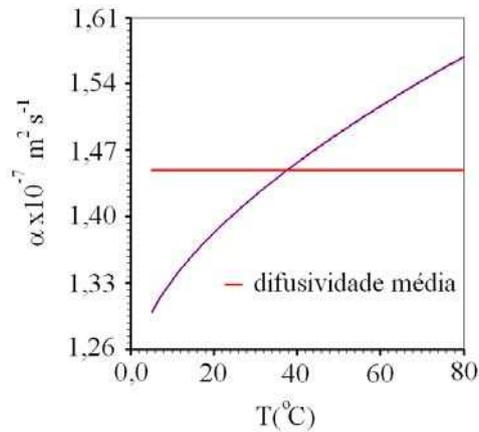


Figura 4.103 – Função difusividade térmica aparente do purê de tomate entre 5,2 e 80 °C e a difusividade térmica média.

Observa-se que há concordância entre os valores obtidos para a difusividade térmica constante, $\alpha = 1,48 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, e a média da difusividade térmica variável com a temperatura local, $\alpha = 1,45 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

O programa desenvolvido permite ainda mostrar a cinética de penetração de calor através das curvas isotérmicas. Estas curvas são mostradas, Figura 4.104, para quatro instantes diferentes, para o cilindro de purê de tomate num plano paralelo ao eixo do cilindro.

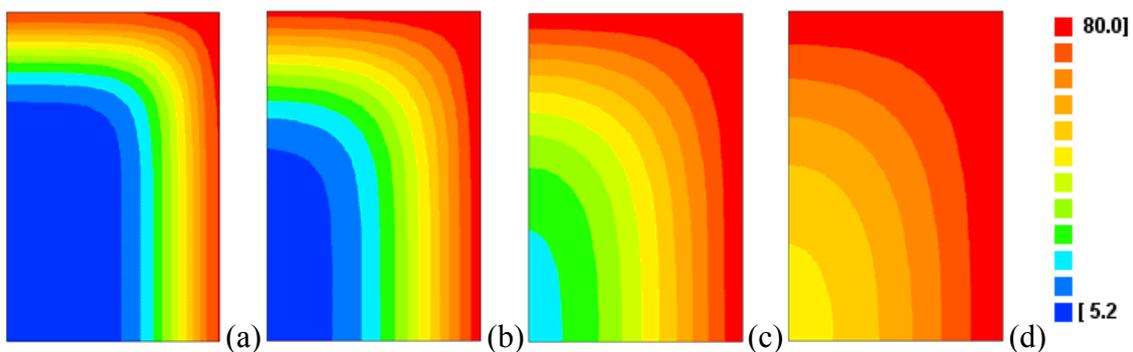


Figura 4.104 – Contornos das isotermas representando a distribuição das temperaturas do purê de tomate nos instantes: (a) 5,5 min; (b) 11,0 min; (c) 22,0 min; (d) 38,6 min.

4.10.3 Aplicação do software numérico ao creme custard: difusividade térmica aparente constante

O conjunto de dados informado ao *software* no estudo da penetração do calor para o creme custard pode ser observado na Figura 4.105 apresentada a seguir.

```

1.00D-08      <= TOLERÂNCIA PARA O GAUSS-SEIDEL
1000000      <= NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES PARA O GAUSS-SEIDEL
1000         <= NÚMERO DE PASSOS NO TEMPO
6.624d+00    <= INTERVALO DE TEMPO (DELTA_T)
ESCREVA, ABAIXO, O RAIOS DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
42.5D-3
32           <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM R (RAIO DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, A ALTURA L DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
52.5D-3
24           <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O PARÂMETRO LAMBDA PARA O CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.0D+00
ESCREVA, ABAIXO, CONDUTIVIDADE TÉRMICA OU DIFUSIVIDADE (GAMA_PHI) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.4016607D-7*exp(-0.7505612/X)
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE LINEAR EM PHI (SP) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0D+00
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE INDEPENDENTE DE PHI (SC) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0D+00
100 200 350 500 700 <= ITERAÇÕES NO TEMPO QUE DESEJA ACOMPANHAR (5 PASSOS)
10.8d+00      <= VALOR INICIAL DE PHI (PHI_0)
80.0d+00      <= PHI_AMB_E (LESTE)
1             <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (LESTE)
80.0d+00      <= PHI_AMB_S (SUL)
0            <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (SUL)
80.0d+00      <= PHI_AMB_N (NORTE)
1            <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (NORTE)
1 1          <= POSIÇÃO VERTICAL (I) E HORIZONTAL (J) DO VOLUME DE CONTROLE ESCOLHIDO.

```

Figura 4.105 – Dados para a simulação da penetração de calor para o creme custard.

O mesmo procedimento usado para simular a evolução da temperatura no centro do cilindro para o purê de tomate foi usado para simular a evolução da temperatura do ponto central do creme custard.

A Figura 4.106 apresenta a evolução da temperatura no centro do cilindro, obtida a partir dos dados experimentais (pontos pretos) e, pelo *software* numérico desenvolvido nesta pesquisa, considerando a difusividade térmica aparente constante (linha contínua vermelha).

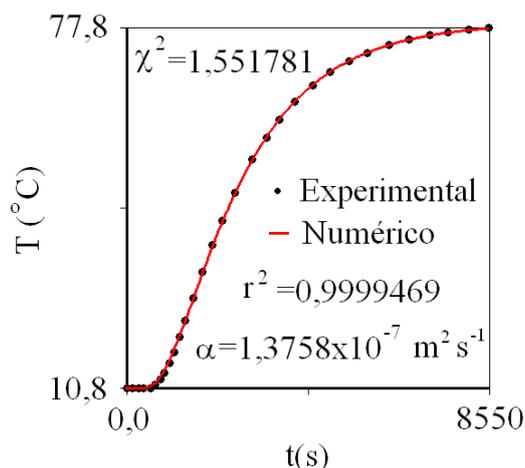


Figura 4.106 – Gráfico representando a penetração de calor a partir da simulação numérica e os pontos obtidos experimentalmente para o creme custard em $r=0; y=0$.

1

Para a função constante, a difusividade térmica aparente obtida pela otimização foi de $\alpha = 1,38 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com $\chi^2 = 1,552$ e $r^2 = 0,999947$. A diferença entre o resultado obtido nesta pesquisa e o obtido por Betta et al. (2009) é de 2,2%.

A Figura 4.107(a) mostra o erro médio cometido ao se simular a temperatura no centro do creme custard e o coeficiente de correlação entre os erros e as temperaturas experimentais, $r_{xy} = 0,44714$. Esta correlação é bastante forte, indicando que os erros encontrados não são devido apenas a aleatoriedade das medidas.

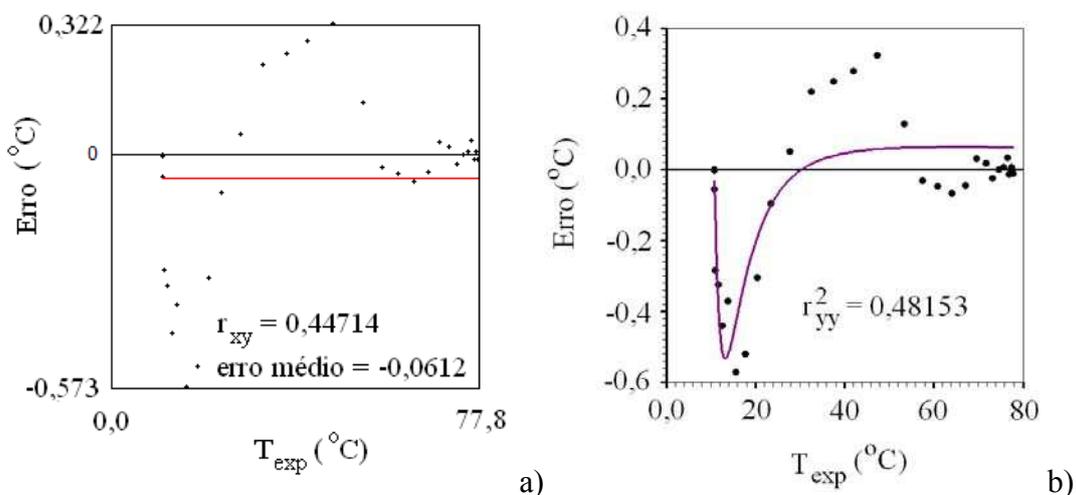


Figura 4.107 – (a) Distribuição de erros considerando constante a difusividade térmica do creme custard e (b) ajuste de uma curva cossenoidal aos erros experimentais.

Apesar de o erro médio ter sido de apenas $-0,0612$ °C, a Figura 4.107(a) mostra, também, que há forte correlação, $r_{xy} = 0,44714$, entre os erros e a temperatura experimental. Devido a esta correlação foi possível ajustar, com relativo sucesso, os erros experimentais à curva, $y(x) = Ax^B + C \exp(D/x)$, com coeficiente de determinação, $r_{yy}^2 = 0,48153$. Apesar de os resultados para o creme custard, considerando a difusividade térmica constante, serem melhores do que os obtidos para o purê de tomate, mesmo assim, se observa certa tendência nos erros, com relação à temperatura experimental. Resta então saber: se a difusividade térmica aparente for considerada função da temperatura local os resultados obtidos melhorariam?

4.10.4 Aplicação do software numérico ao creme custard: difusividade térmica aparente variável

A Tabela 4.22 apresenta a classificação em ordem crescente do qui-quadrado das sete funções otimizadas pelo *software Finite Cylinder First Kind* para simular a difusividade térmica aparente em função da temperatura local do creme custard.

Tabela 4.22 - Apresenta os valores de a e b da função difusividade térmica aparente do creme custard, o qui-quadrado e o coeficiente de determinação.

Função	a	b (m^2s^{-1})	χ^2	r^2
$be^{a/T}$	-0,7505612	1,4016607x10⁻⁷	0,9380277	0,9999602
$be^{aT^{1/2}}$	4,8218211x10 ⁻³	1,3309568x10 ⁻⁷	1,264012	0,9999478
$b \cosh(aT^{1/2})$	2,6890038x10 ⁻²	1,3516012x10 ⁻⁷	1,338461	0,9999446
$aT + b$	4,9747401x10 ⁻¹¹	1,351236810 ⁻⁷	1,338520	0,9999446
be^{aT}	3,5863451x10 ⁻⁴	1,3516294x10 ⁻⁷	1,339980	0,9999446
$b \cosh(aT)$	2,3718288x10 ⁻³	1,3651665x10 ⁻⁷	1,432204	0,9999424
be^{aT^2}	2,7523060x10 ⁻⁶	1,3653700x10 ⁻⁷	1,432296	0,9999425

O gráfico da Figura 4.108 mostra como varia, com a temperatura local, as três melhores funções que descreveram a difusividade térmica aparente do creme custard.

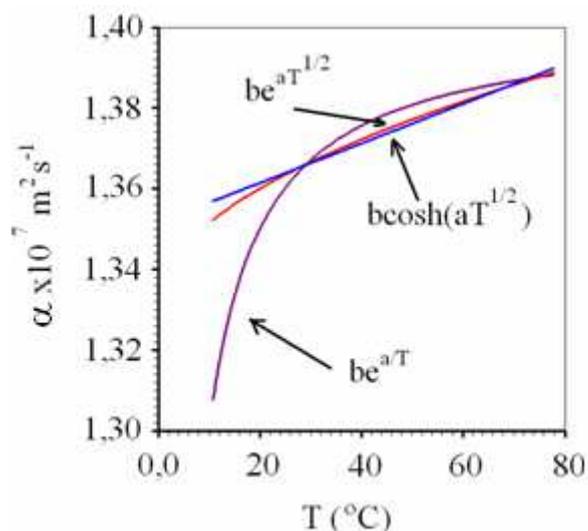


Figura 4.108 – As três melhores funções para a difusividade térmica do creme custard.

O gráfico da Figura 4.109 é a que melhor representa a cinética da penetração do calor, considerando a difusividade térmica aparente do creme custard em função da temperatura local.

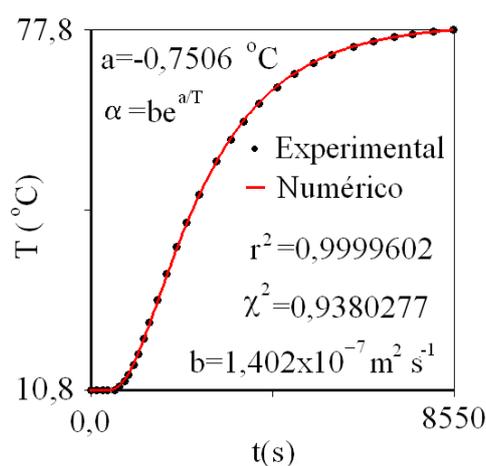


Figura 4.109 – Gráfico da penetração de calor no centro do cilindro do creme custard considerando a difusividade térmica variável, obtida por simulação numérica e a partir dos dados experimentais.

Como pode ser observado tanto na Figura 4.109 quanto na Tabela 4.22, os indicadores estatísticos para a difusividade térmica aparente do creme custard quando expressada pela função temperatura local $\alpha(T) = be^{a/T}$, são melhores do que aqueles obtidos quando se considerou constante a difusividade térmica aparente. O qui-quadrado diminuiu de 1,551781 para 0,938028; enquanto o coeficiente de determinação aumentou de 0,9999469 para 0,9999602. Para o creme custard, as melhorias nos resultados não foram tão significativas como no purê de tomate. A Figura 4.110 mostra os indicadores estatísticos dos erros cometidos quando se considera a difusividade térmica aparente variável com a temperatura local.

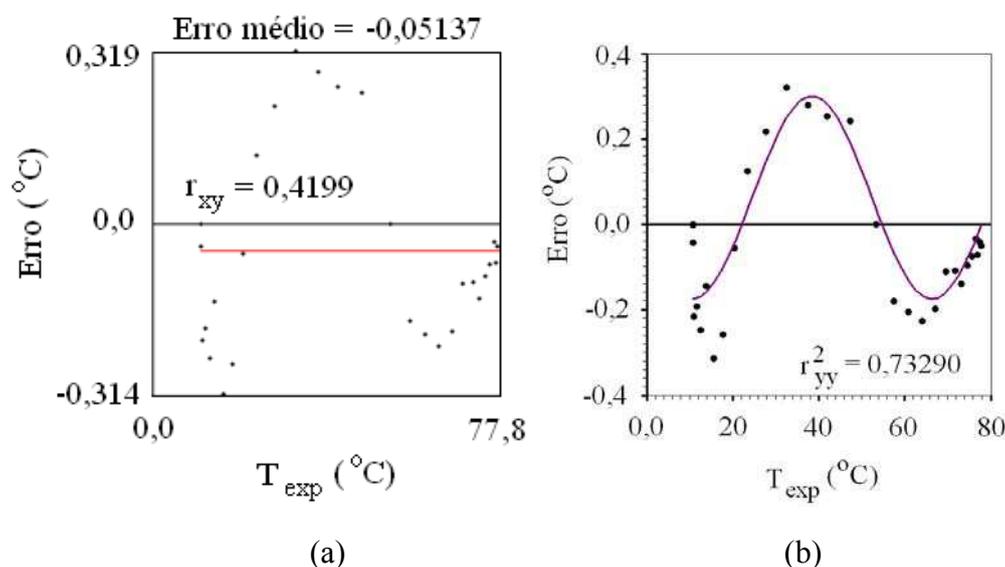


Figura 4.110 - (a) Gráfico da distribuição de erros considerando a difusividade térmica do creme custard como função da temperatura local e (b) ajuste de uma curva cossenoidal aos erros da temperatura experimentais.

Quando se considerava a difusividade térmica aparente constante, Figura 4.107(a), os erros variavam de -0,573 a 0,322 °C com distribuição tendenciosa dada pela correlação, $r_{xy} = 0,44714$. Com a difusividade térmica aparente variável com a temperatura local, a distribuição dos erros é um pouco mais aleatória, $r_{xy} = 0,4199$ e com amplitude menor, variando entre -0,314 e 0,319 °C. O erro médio diminuiu de -0,0612 para -0,0514, como pode ser visto na Figura 4.110(a) e a curva que melhor se ajusta a estes erros, $y(x) = A\cos(Bx + C) + D$, no gráfico da Figura 4.110(b) com coeficiente de determinação de $r^2_{yy} = 0,73290$.

A Figura 4.111 mostra como a difusividade térmica do creme custard varia com a temperatura local.

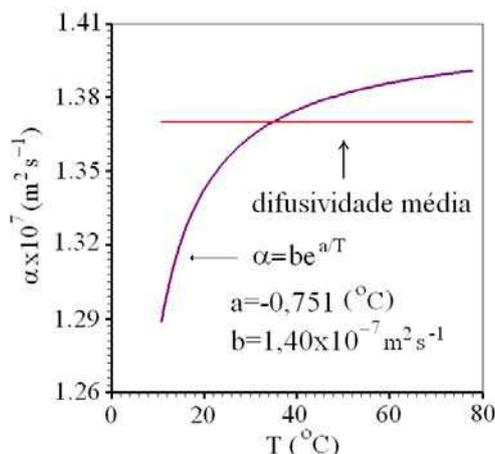


Figura 4.111 - Função difusividade térmica aparente do creme custard entre 10,82 e 80 °C, e a difusividade térmica média.

Se a difusividade térmica aparente do creme custard for descrita pela função número 1 da Tabela 4.22, esta variará entre $1,29$ e $1,39 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ quando a temperatura variar de $10,8$ e $77,8$ °C. Um exame nas Figuras 4.106 e 4.111 permite observar que há concordância entre os valores obtidos para a difusividade térmica aparente constante $1,37 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e a média da difusividade térmica aparente variável, $1,37 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

O programa desenvolvido permite ainda mostrar a cinética de penetração de calor através das curvas isotérmicas. Estas curvas são mostradas, na Figura 4.112, para quatro instantes diferentes, num plano formado pelo raio e o eixo do cilindro.

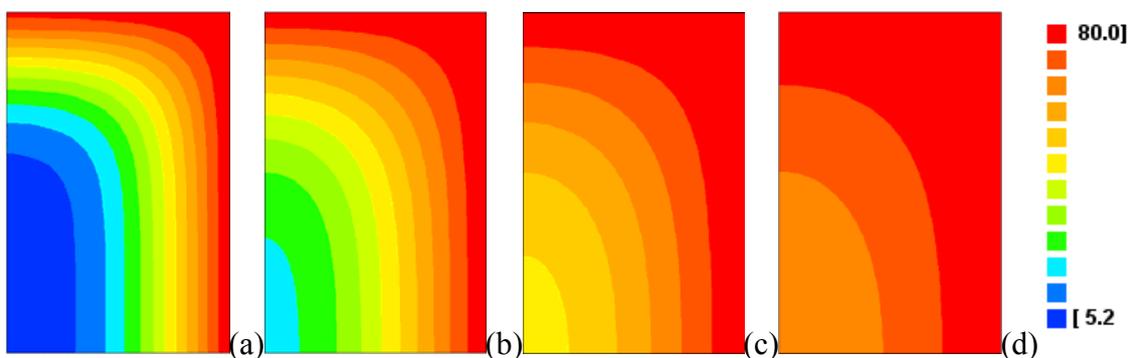


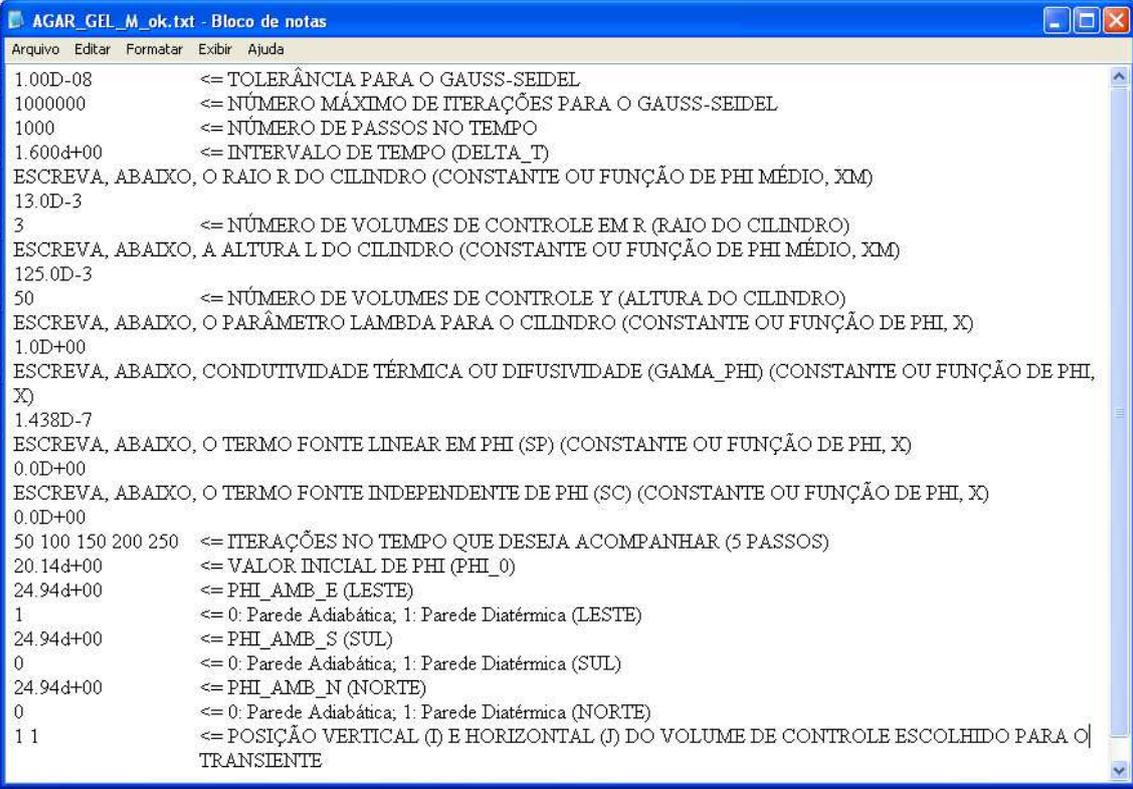
Figura 4.112 – Contornos das isotermas representando a distribuição das temperaturas no interior do creme custard: (a) 14,3 min; (b) 28,5 min; (c) 71,26 min; (d) 99,76 min.

4.11 Aplicação do software numérico à experiência de Ukrainczyk (2009)

Ukrainczyk (2009) calculou a difusividade térmica de três substâncias, agar gel, glicerol e areia de ottawa usando um cilindro infinito. Neste trabalho serão utilizados apenas os dados referentes ao agar gel obtido por Ukrainczyk (2009). O *software Finite Cylinder First Kind* foi usado numa situação limite quando o cilindro utilizado é muito longo, $L \gg R$, e pode ser considerado infinito.

4.11.1 Aplicação do software numérico: agar gel

O conjunto de dados informado ao *software* no estudo da penetração do calor para o agar gel é mostrado na Figura 4.113. Uma das principais modificações implementadas para a penetração do calor no agar gel é a informação que implica no fluxo zero de calor (parede adiabática) na região norte, parte superior do cilindro.



```

1.00D-08      <= TOLERÂNCIA PARA O GAUSS-SEIDEL
1000000      <= NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES PARA O GAUSS-SEIDEL
1000         <= NÚMERO DE PASSOS NO TEMPO
1.600d+00    <= INTERVALO DE TEMPO (DELTA_T)
ESCREVA, ABAIXO, O RAIIO R DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
13.0D-3
3           <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM R (RAIO DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, A ALTURA L DO CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI MÉDIO, XM)
125.0D-3
50          <= NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE Y (ALTURA DO CILINDRO)
ESCREVA, ABAIXO, O PARÂMETRO LAMBDA PARA O CILINDRO (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.0D+00
ESCREVA, ABAIXO, CONDUTTIVIDADE TÉRMICA OU DIFUSIVIDADE (GAMA_PHI) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
1.438D-7
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE LINEAR EM PHI (SP) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0D+00
ESCREVA, ABAIXO, O TERMO FONTE INDEPENDENTE DE PHI (SC) (CONSTANTE OU FUNÇÃO DE PHI, X)
0.0D+00
50 100 150 200 250 <= ITERAÇÕES NO TEMPO QUE DESEJA ACOMPANHAR (5 PASSOS)
20.14d+00    <= VALOR INICIAL DE PHI (PHI_0)
24.94d+00    <= PHI_AMB_E (LESTE)
1           <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (LESTE)
24.94d+00    <= PHI_AMB_S (SUL)
0           <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (SUL)
24.94d+00    <= PHI_AMB_N (NORTE)
0           <= 0: Parede Adiabática; 1: Parede Diatérmica (NORTE)
1 1         <= POSIÇÃO VERTICAL (I) E HORIZONTAL (J) DO VOLUME DE CONTROLE ESCOLHIDO PARA O
TRANSIENTE
  
```

Figura 4. 113 - Dados para a simulação da penetração de calor para o agar gel.

A simulação para a cinética de penetração de calor no cilindro infinito foi realizada considerando constante a difusividade térmica aparente do agar gel. Esta imposição foi admitida devido à pequena variação da temperatura, $\Delta T = 4,8 \text{ }^\circ\text{C}$, experimentada pelo agar gel no processo de aquecimento.

Apesar de o *software Finite Cylinder First Kind* ter sido concebido para cilindros finitos, é possível, com uma pequena modificação, simular a penetração de calor para cilindros infinitos. Para isto basta que ao preencher o conjunto de dados usados para a simulação, se informe que a fronteira norte do sistema é adiabática. Desta forma, se impõe a condição de fluxo zero para esta fronteira. Como o fluxo de calor já é zero a oeste e a sul, devido às condições de simetria, resta apenas a fronteira leste para que seja processadas as trocas de calor entre o sistema e sua vizinhança.

A Figura 4.114 apresenta a simulação numérica da cinética de penetração de calor para o agar gel em um cilindro infinito, com a difusividade térmica aparente constante, $\alpha = 1,4375 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, no centro do cilindro, $r = 0$, obtida pelo *software Finite Cylinder First Kind* e a cinética da penetração de calor obtida a partir dos dados experimentais. Os indicadores estatísticos mostram quão coincidentes são a simulação da penetração de calor e os dados obtidos experimentalmente.

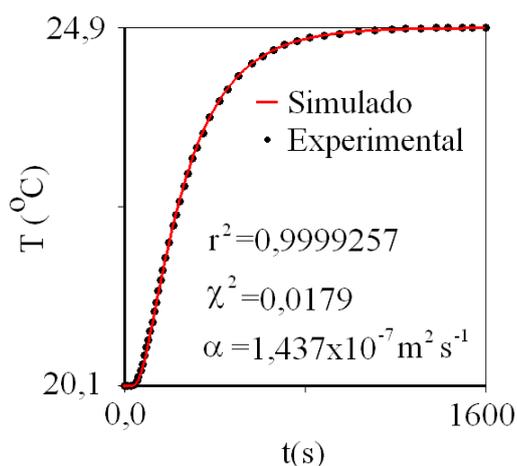


Figura 4.114 - Gráfico da penetração do calor unidimensional no agar gel simulado a partir do *software Finite Cylinder First Kind* com difusividade térmica aparente constante, em $r=0$, e a partir dos dados experimentais.

O erro médio entre as temperaturas obtidas por simulação e as obtidas experimentalmente, para o agar gel, foi de apenas 0,003 °C, observa-se na Figura 4.115(a) que a correlação entre os erros e a temperatura experimental é de $r_{xy} = -0,5148$. A Figura 4.115(b) mostra a curva que melhor se ajustou a distribuição de erros, $y(x) = A \sin(Bx + C)$ com coeficiente de determinação, $r_{yy}^2 = 0,347547$.

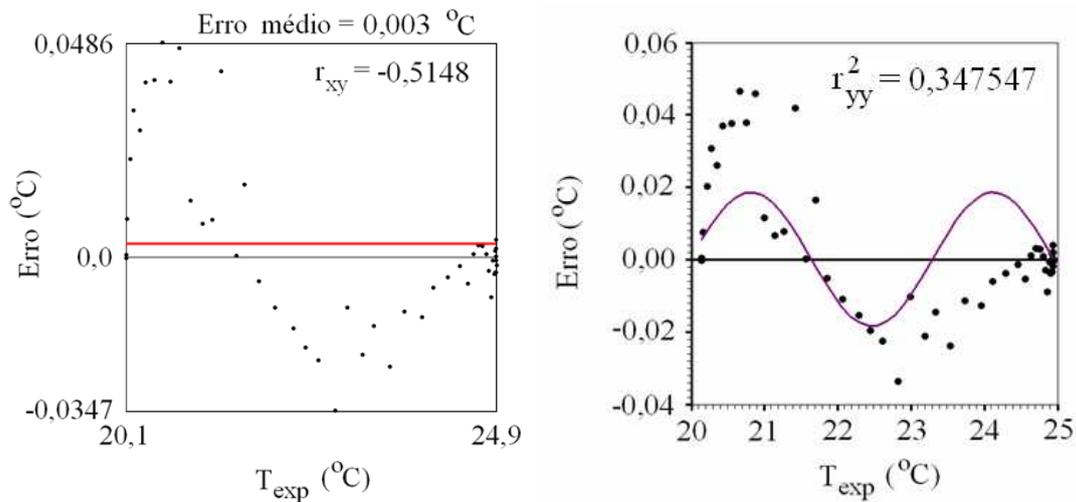


Figura 4.115 - (a) Erros da temperatura experimental para a difusividade térmica constante do agar gel, em destaque o erro médio e (b) Ajuste de uma curva senoidal aos erros experimentais.

Pode ser observado na Figura 4.116 os contornos das isotermas para o agar gel em quatro instantes do processo de aquecimento. As curvas isotérmicas que caracterizavam o estado transiente de temperatura, em duas dimensões, para o cilindro finito, não aparecem mais. Para o cilindro infinito as curvas se transformam em retas paralelas ao eixo. O gradiente de temperatura, em qualquer ponto do cilindro infinito, é uma reta na direção radial, não apresenta variação de direção, mas seu módulo aumenta com o aumento de r , para um instante qualquer no estado transiente. Qualquer deslocamento na direção do eixo do cilindro não apresenta variação de temperatura, corresponde a deslocamentos sobre superfícies isotérmicas.

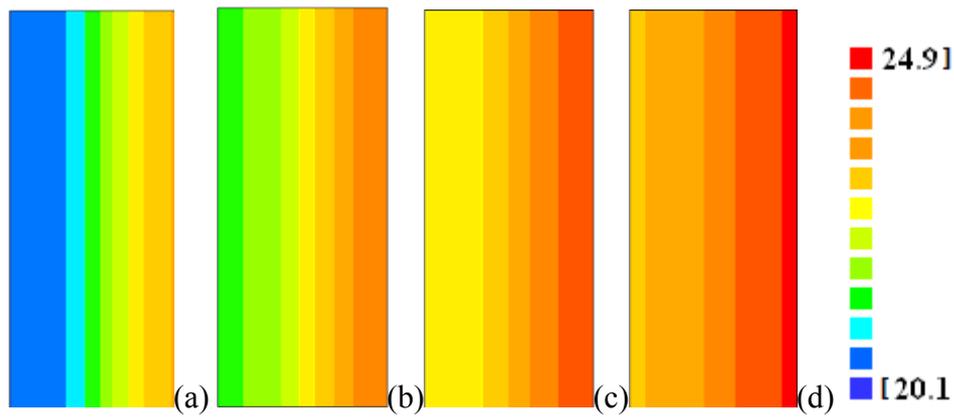


Figura 4.116 – Figuras isotérmicas representando a distribuição das temperaturas no interior do agar gel nos instantes: (a) 1,33 min; (b) 2,67 min; (c) 4 min; (d) 5,33 min.

4.12 Comparação entre os resultados analíticos e numéricos

Observou-se, em todas as situações analisadas, que os indicadores estatísticos melhoraram quando se usou o método numérico em comparação com o analítico. Para o purê de tomate foi obtido o valor de 43,09 para o qui-quadrado quando se usou o método analítico. Enquanto que o mesmo indicador estatístico passou para 14,27 quando se usou o método numérico, considerando a difusividade térmica constante. Quando se compara o método analítico com o numérico usando difusividade variável a melhora nos índices estatísticos é surpreendente: o qui-quadrado diminui mais de 38 vezes passando para 1,11, ressaltando a importância da difusividade térmica variável com a temperatura local quando o purê de tomate é submetido a uma grande variação de temperatura. Em proporções menores, o mesmo fenômeno ocorre para os índices estatísticos do creme custard. Para o agar gel não foi considerado a difusividade térmica variável com a temperatura local devido a pequena variação do tratamento térmico. No entanto, o qui-quadrado obtido pelo método analítico, 0,024, que é muito bom, fica ainda melhor, quando se usa o método numérico, 0,018. A Tabela 4.23 apresenta estes indicadores estatísticos os produtos analisados.

Tabela 4.23 – Indicadores estatísticos obtidos pela método analítico, numérico com difusividade constante e numérico com difusividade variável.

	Analítico, $\alpha = c$		Numérico, $\alpha = c$		Numérico $\alpha = \alpha(T)$	
	χ^2	r^2	χ^2	r^2	χ^2	r^2
Purê de tomate	43,09	0,999064	14,27	0,999612	1,11	0,999947
Creme custard	8,19	0,999827	1,55	0,999947	0,938	0,999960
Agar gel	0,0237	0,999904	0,0179	0,999926	-	-

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões já obtidas na pesquisa ora desenvolvida, bem como sugestões para trabalhos futuros.

5.1 Conclusões

A partir dos resultados obtidos tanto nos testes de consistência e validação quanto nas aplicações a dados experimentais disponíveis na literatura, é possível apresentar algumas conclusões que serão enumeradas a seguir.

5.1.1 Ferramentas analíticas

- As ferramentas analíticas desenvolvidas – algoritmo de otimização e solução analítica – foram validadas a partir de vários conjuntos de dados obtidos por simulação numérica, através de um *software* disponível na literatura. Os resultados obtidos com o uso do algoritmo proposto para o cálculo da difusividade térmica aparente foram compatíveis com o valor pré-estabelecido para este parâmetro, através do qual os dados foram gerados por simulação numérica na região mais central do cilindro.
- Como contribuição deste trabalho, as ferramentas analíticas desenvolvidas foram bem sucedidas na descrição do processo de difusão de calor para a condição de contorno do primeiro tipo. Os resultados obtidos foram corroborados por dados experimentais disponíveis na literatura.

5.1.2 Solução analítica para o cilindro infinito

- Pode-se concluir que a validação do algoritmo de otimização apresenta resultados aceitáveis para o cilindro infinito na região onde a razão $\frac{r}{R} < 0,5$.
- Um resultado particularmente bom é obtido para o termopar colocado no eixo do cilindro, em $r = 0$.
- A discrepância no cálculo da difusividade térmica aparente para o agar gel, usando o algoritmo proposto neste trabalho quando comparado com a difusividade térmica aparente para o agar gel obtido pelo método usado por Ukrainczyk (2009) foi de 1,6%. Este resultado fortalece a ideia da aplicabilidade do método desenvolvido neste trabalho para os problemas de penetração de calor em produtos pastosos, em recipientes cilíndricos e com condição de contorno do primeiro tipo.
- O algoritmo proposto produziu bons resultados quando aplicado aos dados do agar gel usado por Ukrainczyk (2009). Os indicadores estatísticos para a difusividade térmica aparente obtida através da OREP modificada, erros de precisão e acurácia foram de 0,17 e 0,48% respectivamente. Enquanto que os resultados obtidos por Ukrainczyk (2009) usando algoritmo de otimização baseado em Levenberg-Marquardt foram de 0,6 e 1,0%. Isto significa que a OREP modificada apresenta resultados equivalentes àqueles obtidos por métodos sofisticados. E, além disto, com o algoritmo proposto é possível descrever em detalhes toda cinética da penetração de calor.
- Finalmente, pode-se responder à pergunta que deu origem a este trabalho. A abordagem da OREP apresentado por Silva et al. (2012) para a condição de contorno do terceiro tipo, com as modificações propostas nesta pesquisa, permite determinar a difusividade térmica aparente com erros aceitáveis, quando

a transferência de calor se dá por condução e é governada pela condição de contorno do primeiro tipo.

5.1.3 Solução analítica para o cilindro finito

- Os resultados da validação do algoritmo proposto para o cilindro finito são particularmente bons para a região central do cilindro finito, $r \leq 0,25R$ e $y \leq 0,25\frac{L}{2}$.
- O erro de acurácia cresce substancialmente quando a região estudada se aproxima das fronteiras do cilindro finito.
- A discrepância entre o método proposto neste trabalho e o utilizado por Betta et al. (2009) no cálculo da difusividade térmica aparente do purê de tomate, com o termopar no centro do cilindro finito, foi menor do que 1%. Este resultado sugere fortemente que o algoritmo proposto pode ser aplicado para produtos pastosos inseridos em recipientes metálicos com geometria cilíndrica.
- Para o creme custard a discrepância observada entre o método usado neste trabalho para o cálculo da difusividade térmica aparente, com o termopar no centro do cilindro, comparado com o método usado por Betta et al. (2009) foi menor do que 0,5%. Este segundo resultado corrobora, mais uma vez, que o algoritmo proposto pode ser aplicado para produtos pastosos inseridos em recipientes metálicos com geometria cilíndrica.

5.1.4 Solução numérica: cilindro finito e infinito, difusividade térmica constante

- O *software Finite Cylinder First Kind* estimou a difusividade térmica do purê de tomate com uma discrepância de 4% com relação ao resultado obtido por Beta et al. (2009) o que mostra que o algoritmo desenvolvido nesta pesquisa apresenta resultados corretos quando comparados com outros métodos disponíveis na literatura.
- Apesar de o erro médio para o purê de tomate ter sido próximo a zero, entretanto há uma forte correlação entre os erros e a temperatura experimental. A distribuição tendenciosa dos erros sugere uma possível dependência da difusividade térmica do purê de tomate com a temperatura local.
- O *software* desenvolvido nesta pesquisa estimou a difusividade térmica aparente do creme custard com uma discrepância de aproximadamente 2% com relação ao resultado obtido por Betta et al. (2009), o que mostra a eficiência do algoritmo proposto na estimativa da difusividade térmica.
- Apesar de o erro médio para o creme custard ter sido muito próximo a zero, há uma forte correlação entre os erros e a temperatura experimental. Indicando uma possível dependência da difusividade térmica com a temperatura local.
- O *software Finite Cylinder First Kind* estimou a difusividade aparente do agar gel com indicadores estatísticos excepcionalmente bons, com qui-quadrado próximo a zero.

5.1.5 Solução numérica: cilindro finito com difusividade térmica aparente variável

- O *software Finite Cylinder First Kind* estimou que a melhor função para representar a difusividade térmica variável do purê de tomate é crescente com a temperatura local, do tipo $\alpha(T) = be^{aT^{1/2}}$.

- Houve sensível melhora nos parâmetros estatísticos quando se considera a difusividade térmica aparente do purê de tomate variável. O qui-quadrado diminuiu treze vezes, o coeficiente de correlação dos erros das temperaturas experimentais diminuiu tornando-os mais aleatório e, o coeficiente de determinação aumentou.
- A discrepância entre a média da difusividade térmica aparente do purê de tomate e a estimativa feita pelo algoritmo proposto por Betta et al. (2009) foi de 5,84%.
- O *software Finite Cylinder First Kind* estimou que a melhor função para a difusividade térmica aparente do creme custard é uma função crescente com a temperatura local, do tipo: $\alpha(T) = be^{a/T}$. Os indicadores estatísticos melhoraram quando comparados com os obtidos considerando a difusividade térmica aparente constante, mas não foram tão significativos como no caso do purê de tomate.
- O indicador estatístico qui-quadrado apresenta seu menor valor para o purê de tomate e o creme custard quando se considera variável a difusividade térmica aparente. Betta et al. (2009) considerou a penetração de calor apenas com a difusividade térmica aparente constante.

5.2 Sugestões para futuros trabalhos de pesquisa

- Aplicar o algoritmo desenvolvido para outros produtos alimentícios no estado pastoso.
- Aplicar o algoritmo desenvolvido a produtos alimentícios no estado líquido.

- Aplicar do algoritmo desenvolvido considerando a mudança de fase líquido-gaseiforme.
- Aplicar a metodologia proposta para produtos acondicionados em recipientes metálicos com outras geometrias.
- Aplicar a metodologia proposta para produtos acondicionados em recipientes não metálicos, o que implica em condição de contorno variável.

CAPÍTULO 6

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMENDOLA, M.; QUEIROZ, M. R. Mathematical methodologies for calculating the mass diffusion coefficient of bananas during drying. **Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental**. v. 11, p. 623-627, 2007

AMENDOLA, M.; DUSSÁN-SARRIA, S.; RABELLO, A. A. Determinação do coeficiente convectivo de transferência de calor de figos submetidos ao resfriamento rápido. **Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental**. v. 2, p. 176-182, 2009.

ANSARI, F. A., ABBAS, K. A., MATHASHIM, D., SAPUAN, S. M. Effect of skin removal from spherical fruits and vegetables. **American Journal of Food Technology**, v. 2, p. 295-300, 2007.

ARFKEN, G. B. e WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists**. 3. ed. San Diego, CA; Elsevier Academic Press, 2005.

ARROYO, C. CONDÓN, S. PAGAN, R. Thermobacteriological characterization of *Enterobacter sakazakii*. **International journal of food microbiology**, v. 136, p. 110-118, 2009.

BAÏRI, A.; LARAQI, N. Diagrams for fast transient conduction in sphere and long cylinder subject to sudden and violent thermal effects on its surface. **Applied Thermal Engineering**. v. 23, p. 1373-1390, 2003.

BAÏRI, A.; LARAQI, N.; MARÍA, J. M. G. Determination of thermal diffusivity of foods using 1D Fourier cylindrical solution. **Journal of Food Engineering** v. 78, p. 669-675, 2007.

BALL, C. **Thermal process time for canned foods**, v. 7 Bulletin 37 National Research Council, Washington, DC, 1923.

BALL, C. O.; OLSON, F. C. W. **Sterilization in food technology. Theory, Practice and Calculation**. McGraw Hill Book Co., New York. 1957.

BETTA, G.; RINALDI, M.; BARBANTI, D.; MASSINI, R. A quick method for thermal diffusivity estimation: application to several foods. **Journal of Food Engineering** v. 91, p. 34-41, 2009.

BEVINGTON, P. R., ROBINSON, D. K., **Data reduction and error analysis for the physical sciences**; 2nd edition WCB/McGraw-Hill, Boston, 1992.

BEZYMA, L. A.; KUTOVOY, V. A Vacuum drying and hybrid technologies. **Stewart Post – harvest Rev.** v. 4, p. 6-13, 2005.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport phenomena**. 2. Ed. Madison, John Wiley e Sons, Inc. 2002.

BHOWMILK, S. R. e HAYAKAWA, K. I. A new method for determining the apparent thermal diffusivity of thermally conductive food. **Journal of Food Science**, v. 44, p. 469-474, 1979.

BUCKENHSKES, H., GIERSCHNER, K., HAMMES, W. P., Theory and Praxis der Pasteurisation. **Die Industrielle Obst- und Gemseverwertung**, 9, Braunschweig, 1998.

BUTKOV, E.; **Física matemática**. Rio de janeiro, RJ, Guanabara Dois, 1983.

CAMPAÑONE, L. A.; GINER, S. A.; MASCHERONI, R. H.; Generalized model for the simulation of food refrigeration. Development and validation of the predictive numerical method. **International Journal of Refrigeration**. v. 25, p. 975-894, 2002.

CARBONERA, L.; CARCIOFI, B. M.; HUBER, E.; LAURINDO, J. B. Determinação experimental da difusividade térmica de uma massa de tomate comercial. **Brazilian Journal of Food Technology**, v. 6, n. 2, p. 285-290, 2003.

CARCIOFI, B. A. M.; FAISTEL, JONHY; ARAGÃO, G. M. F.; LAURINDO, J. B. Determination of thermal diffusivity of mortadella using actual cooking process data. **Journal of Food Engineering**, v. 55, p. 89-94, 2002.

CARMO, J. E. F., LIMA, A. G. B. Drying of lentil including shrinkage: a numerical simulation, **Drying Technology**. v. 23, p. 1977-1992, 2005.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Heat and mass transfer**. McGraw-Hill, 2000.

CHANDRA, P. K. et SINGH, R. P. **Applied numerical methods for food and agricultural engineers**. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.

CHOI, Y.; OKOS, M. R. The thermal properties of tomato juice concentrates. **Transactions of ASAE**, v. 26, p. 305-311, 1983a.

CHOI, Y.; OKOS, M. R. The thermal properties of liquid foods-review. II. **Proceedings of the winter meeting of the American society of agricultural engineers**. Paper n. 83-6516, Chicago, 1983b.

COLLET, L. S. F. C. A.; SHIGEOKA, D. S.; BADOLATO, G. G.; TADINI, C. C. A kinetic study on pectinesterase inactivation during continuous pasteurization of orange juice. **Journal of Food Engineering** v. 69, p. 125-129, 2005.

CRANK, J. **The mathematics of diffusion**, Clarendon Press, Oxford, UK, v. 412, p. 1992.

CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society** v. 43, p. 50-67, 1947.

DENYS, S.; PIETERS, J. G.; DEWETTINCK, K. Computational fluid dynamics analysis of combined conductive and convective heat transfer in model eggs. **Journal of Food Engineering**, v. 63, p. 281-290, 2004.

DINCER, I. Simplified solution for temperature distributions of spherical and cylindrical products during rapid air cooling. **Energy Convers. Manag.**, v. 36, n. 12, p. 1175-1184, 1995a.

DINCER, I. Cooling parameters and film conductances of spherical products cooled in airflow, **Applied Energy**, v. 50, p. 269-280, 1995b.

DINCER, I. Determination of thermal diffusivities of cylindrical bodies being cooled. **International Communications in Heat Mass Transfer**, v. 23, p. 713-720, 1996.

DINCER, I.; DOST, S. New correlations for heat transfer coefficients during direct cooling of products. **International Journal of energy research**, v. 20, p. 587-594, 1996.

DOSTIE, M. SEGUIN, J. N., MATURE, D., TON-THAT, Q. A., CHATINGY, R. **Preliminary measurements on the drying of thick porous material by combinations of intermittent infrared and continuous convection heating**. A. S. Mujumdar & M. A. Roques Editores Drying 89 New York: Hemisphere, 1989.

ERDOGDU F A review on simultaneous determination of thermal diffusivity and heat transfer coefficient. **Journal of Food Engineering** v. 86, p. 453-459, 2008.

FALCONE, P., ANESE, M., SEVERINI, C., MASSINI, R., Estrapolazione di simulazioni di laboratorio alle condizioni di sterilizzazione termica per prodotti alimentari confezionati. **Industrie Alimentari**, v. 38, p. 129-135, 1999.

FAO, Faostat agriculture data. Disponível no site <http://faostat.fao.org/faostat/collections> 2003.

FARID, M.; GHANI, A. G. A.; A new computational technique for the estimation of sterilization time in canned food. **Chemical Engineering Process**, v. 43, p. 523-531, 2004.

FELLOWS, P. J., **Food processing technology principles and practice** 2^a ed. Cambridge, Woodhead Publishing Limited, 2000.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The feynman lectures on physics**. 6^a ed. Stanford, CA. Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

GASTÓN, A. L., ABALONE, R. M., GINER, S. A., Wheat drying kinetics. Diffusivities for sphere and ellipsoid by finite elements. **Journal of Food Engineering**, v. 52, p. 313-322, 2002.

GHANI, A. G. A.; FARID, M. M.; CHEN, X. D.; RICHARDS, P. Numerical simulation of natural convection heating of canned food by computational fluid dynamics. **Journal of Food Engineering**, v. 41, p. 55-64, 1999.

GHANI, A. G. A.; FARID, M. M.; CHEN, X. D.; RICHARDS, P. Thermal sterilization of canned food in a 3-D pouch using computational fluid dynamics. **Journal of Food Engineering**, v. 48, p. 147-156, 2001.

GLAVINA, M. Y.; SCALA, K. C. di; ANSORENA, R.; VALE, C. E. del. Estimation of thermal diffusivity of foods using transfer functions. **Science @direct**, v. 39, p. 455-459, 2006.

GRABOWSKI, S., MARCOTTE, M., RAMASWAMY, H. S. Drying of fruits, vegetables, and spices. **Handbook of Postharvest Technology: Cereals, Fruits, Vegetables, Tea, and Spices**. Ed. Marcel Dekker, New York, chapter 23, p 653-695, 2003.

GUT, J. A. W., PINTO, J. M. Selecting optimal configurations for multisection plate heat exchangers in pasteurization processes. **Industrial and Engineering Chemistry Research**, v. 42, p. 6112-6124, 2003.

HANSEN, P. F., HANSEN, J., HOUGAARD, K., PEDERSEN, E. J. Thermal properties of hardening cement paste, in: Proceedings of RILEM **International conference on concrete at early age, RILEM**, Paris, p. 23-36, 1982.

HAYES, C. H. F.; Thermal diffusivity of papaya fruit (*carica papaya* L., var. Solo) **Journal of Food Science**, v. 49, p. 1219-1221, 1984.

HAUKE, G. **An introduction to fluid mechanics and transport phenomena**. Zaragoza: Springer, p. 293, 2008.

HELDMAN, D. R.; LUND, D. B. Handbook of Food Engineering. Dekker, p. 277-315, 1992.

HOLDSWORTH, S. D.; **Thermal processing of packaged foods**. 1st edition, London, Chapman & Hall, 1997.

HOU, H.; SINGH, R. K.; MURIANA, P. M.; STADELMAN, W. J. Pasteurization of intact Shell eggs. **Food Microbiology**, v. 13, p. 93-101, 1996.

HUANG, L. Computer simulation of heat transfer during in-package pasteurization of beef frankfurters by hot water immersion. **Journal of Food Engineering**, v. 80, p. 839-849, 2007.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor e massa**. Rio de Janeiro: LTC – Livro Técnico e Científico Editora S. A. 445 p. 1992.

JARAMILLO-FLORES, M. E.; HERNANDEZ-SANCHEZ, H.; Thermal diffusivity of soursop (*Annona muricata L*) pulp. **Journal of Food Engineering** v. 46 p. 139-143, 2000.

JAY, J. M. High temperature food preservation and characteristics of thermophilic microorganisms, **Modern food microbiology**, 4th ed. Chapman & Hall, New York, p. 335-355; 1992.

JIA, C.; YANG, W.; SIEGENMORGEN, T. J.; CNOSSEN, A. G. **Development of computer simulation software for single grain kernel drying, tempering and stress analysis**, in: Proceedings of the ASAE Annual International Meeting, Sacramento, California, USA. ASAE, paper number 01-3010, 2001.

JOVETTA, M. P.; AUGUSTO, P. E. D.; TRIBST, A. A. L.; CONTI, M. J. CRISTIANINI, M. Thermal inactivation of *alicyclobacillus acidoterrestris* in a model food. **International Journal of Food Engineering**, v. 7, article 4, 2011.

KAHVECI, K.; CIHAN, A.; ECE, M. C. Liquid diffusion model for drying a stack of rough rice. **International Journal of Energy Research**, v. 27, p. 1131-1143, 2003.

KAZUHIKO, I. T. O.; CHUNG, S. H. Drying of agricultural products using long wave infrared radiation. **Journal of Soc. Agri. Struc. Japan**, v. 26, p. 89-96, 1995.

KELLY, A. L.; O'SHEA, N. **Pasteurizers: Design and operation.** In: Roginski, H.; FUQUAY, J. W.; FOX, P. F. eds. Encyclopedia of dairy science. London, U. K.; Academic Press, p. 2237-2244, 2002.

KENNEDY, J.; BLAIR, I. S.; McDOWELL, D. A.; BOLTON, D. J. An investigation of the thermal inactivation of *Staphylococcus aureus* and the potential for increased thermotolerance as a result of chilled storage. **Journal of Applied Microbiology**, v. 99, p. 1229-1235, 2005.

KIZILTAŞ, S.; ERDOĞDU, F.; PALAZOĞLU, K. Simulation of heat transfer for solid-liquid food mixtures in cans and model validation under pasteurization conditions. **Journal of Food Engineering**, v. 97, p. 449-456, 2010.

KLAUS, A. **Every Child a Lion: The origins of maternal and infant health policy in the United State and France, 1890-1920.** Ithaca, NY; Cornell University Press, 1993.

KUROZAWA, L.E., PARK, K.J., HUBINGER, M.D., MURR, F.E.X., AZOUBEL, P.M. Thermal conductivity and thermal diffusivity of papaya (*Carica papaya* L.) and cashew apple (*Anacardium occidentale* L.). **Brazilian Journal Food Technology**, v. 11, p. 78-85. 2008.

LAU, M. H; TANG, J. Pasteurization of pickled asparagus using 915 MHz microwaves. **Journal of Food Engineering**, v. 51, p. 283-290, 2002.

LEMMON, E. W., McLINDEN, M. O., FRIEND, D.G., In: P. J. Linstrom, W.G. Mallard (Eds.), **Thermophysical Properties of Fluid Systems in NIST Chemistry WebBook**, NIST Standard Reference Database Number 69, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899. <<http://webbook.nist.gov>>. 2005.

LEVENBERG, K. A method for the solution of certain problems in least squares, **Q. Appl. Math.** v. 2, p. 164-168, 1944.

LEVINSON, H. S.; HYATT, M. T. Effect of sporulation medium on heat resistance, chemical composition, and germination of *Bacillus megaterium* spores. **Journal of Bacteriology**, v. 85, p. 876-886, 1964.

LEWIS, M.; HEPPELL, N. **Continuous thermal processing of foods – Pasteurization and UHT sterilization**. Gaithersburg, Maryland; Aspen Publishers, Inc. 2000.

LI, Z.; KOBAYASHI, N.; HASATANI, M. Modeling of diffusion in ellipsoidal solids: a comparative study, **Drying Technology**. v. 22, p. 649-675, 2004.

LIMA, A. G. B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana**. 244 p. Tese de doutorado em engenharia mecânica. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil, 1999.

LUIKOV, A. V. **Analytical heat diffusion theory**. Academic Press, Inc. Ltda., London, 685 p. 1968.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro, LTC Editora S. A. 2004.

MAYOR, L. SERENO, A. M., Modeling shrinkage during convective drying of food materials: a review, **Journal of Food Engineering**, v. 61, p. 373-386, 2004.

MAÑAS, P.; PAGÁN, R.; RASO, J.; CONDÓN, S. Predicting thermal inactivation in media of different pH of salmonella grown at different temperatures. **Science @direct** v. 87, p. 45-53, 2003.

MARCOTTE, M.; ALI, R. T. YOUSEF, K. Thermophysical properties of processed meat and poultry products. **International Journal of Food Engineering** v. 88, p. 315-322, 2008.

MARECHAL, J. L. Determination simulance de la diffusivite et la conductivite thermique du beton pedant son hydratation, **Essais Mes.** v. 306, p. 95-96, 1973.

MARIANI, V. C., LIMA, A. G. B., COELHO, L. S. Apparent thermal diffusivity estimation of the banana during drying using inverse method. **Journal of Food Engineering**, v. 85, p. 569-579, 2008.

MARIANI, V. C., AMARANTE, A. C. C.; COELHO, L. S. Estimation of apparence thermal conductivity of carrot purée during freezing using inverse problem. **International Journal of Food Science and Technology**, v. 44, p. 1292-1303, 2009.

MARKOWSKI, M.; BIALOBRZEWSKI, I.; CIERACH, M.; PAULO, A. Determination of thermal diffusivity of lyoner type sausages during water bath cooking and cooling. **Journal of Food Engineering** v. 65, p. 591-598, 2004.

MASAMURA, A.; SADO, H.; HONDA, T.; SHIMIZU, H.; NABETANI, H.; NAKAJUMA, M. Drying of potato by far infrared radiation. **Nippon Shokuhin Kogyo Gakaishi**, v. 35, p. 309-314, 1988.

McGLYNN, W. G.; DAVIS, D. R.; HONARMAND, F. Gluconic acid influences texture and color of canned asparagus. **Journal of Food Science**, v. 58, p. 614-615, 1993.

MERCALI, G. D., SARKIS, J. R., JAESCHKE, D. P., TESSARO, I. C., MARCZAK, L. D. F., Physical Properties of Acerola and Blueberry Pulps. **Journal of Food Engineering** v. 106, p. 238-289, 2011.

MIHOUBI, D.; ZAGROUBA, F.; BEN A. M.; BELLAGI, A.; Drying of clay. I. Material Characteristics, **Drying Technology**, v. 20, p. 465-487, 2002.

MIHOUBI, D.; TIMOUMI, S.; ZAGROUBA, F.; Modeling of convective drying of carrot slices with IR heat source. **Chemical Engineering and Processing** v. 65 p. 808-815, 2009.

MITCHELL, F. G. **Cooling of horticultural commodities**. In: KADER, A. A. Postharvest technology of horticultural crops. 3^o ed. Division of Agriculture and Natural Resources, Davis; University of California, n. 3311, 295 p. 2002.

MITRA, K.; KUMAR, S.; VEDAVARZ, A.; MOALLEMI, M. K.; Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. **Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME**. v. 117, p. 568-573, 1995.

MONGPRENEET, S., ABE, T., TSURUSAKI, T. Accelerated drying of welsh onion by far infrared radiation under vacuum conditions. **Journal of Food Engineering**, v. 55, p. 147-156, 2002.

NASCIMENTO, J. J. S. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos paralelepípedos. Estudo de caso: secagem de materiais cerâmicos**. 181 p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil, 2002.

NEGI, P. S., ROY, S. K. Effect of low-cost storage and packging on quality and nutritive value of fresh and dehydrated carrots. **Journal of the Science of food agriculture**, v. 80, p. 2169-2175, 2000.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica – fluidos, oscilações, ondas e calor** 3. ed. São Paulo, Edgard Blücher, 2002.

OHLSSON, T. Temperature dependence of sensory quality changes during thermal processing. **Journal of Food Science**, v. 45, p. 836-847, 1980.

OKE, M.O., AWONORIN, S.O., SANNI, L.O., AKANBI, C.T., ABIOYE, A.O. Determination of some selected engineering properties of sweet potato cuts as function of the temperature. **Journal of Food Technology**, v. 5, p. 66-70; 2007.

ORSAT, V., CHANGRUE, V., RAGHAVAN, G. S. V. Microwave drying of fruits and vegetables. **Stewart Post-Harvest Rev.** v. 6, p. 4-6, 2006.

PANAS A. J.; SYPEK J. Validation of the thermal diffusivity from modified monotonic heating regime procedure. **International Journal of Thermophysics** v. 27, p. 1844-1858, 2006.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow.** New York, Hemisphere Publishing Corporation, 197 p. 1980.

PLAZL, I.; LAKNER, M.; KOLOINI, T. Modeling of temperature distributions in canned tomato based dip during industrial pasteurization. **Journal of Food Engineering** v. 75 p. 400-406, 2006.

PRAKASHA, S. JHAB, S. K. DATTA, N. Performance evaluation of blanched carrots dried by three different driers, **Journal of Food Engineering** v. 62, p. 305-313, 2004.

RICHARDSON, L., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. **Philosophical Transactions of the Royal Society A** v. 210, p. 307-357, 1910.

RICHTMYER, R., MORTON, K., **Difference methods for initial-value problems.** Interscience Publisher, Wiley, New York, 2^o edição, 1997.

RINALDI, M. **Thermal diffusivity in foods experimental estimation and its use in conductive heat exchange simulation**, Ph. D. Thesis, Università degli Studi di Parma, 2005.

RINALDI, M.; CHIAVARO, E.; MASSINI, R. Apparent thermal diffusivity estimation for the heat transfer modelling of pork loin under air/steam cooking treatments. **International Journal of Food Science and Technology**, v. 45, p. 1909-1917, 2010.

RINALDI, M.; CHIAVARO, E.; GOZZI, E.; MASSINI, R. Simulation and experimental validation of simultaneous heat and mass transfer for cooking process of mortadella bologna PGI. **International Journal of Food Science and Technology** v. 46, p. 586-593, 2011.

RIVERO, U. W., NEIDA-ARAGÓN, G., ALFARO, I. D., GONZÁLES, M. J. Thermal diffusivity of citrus fruits. **Ciencias y Técnica Agriculture Citrus Fruit**, v. 2, p. 69-75, 1979.

RUIZ-LÓPEZ, I. I., GARCÍA-ALVARADO, M. A. Analytical solution for food-drying kinetics considering shrinkage and variable diffusivity. **Journal of Food Engineering** v. 79, p. 208-216, 2007.

SABLANI, S. S. Drying of fruits and vegetables: retention of nutritional/functional quality. **Drying Technol.** V. 24, p. 428-432. 2006.

SAGAR V. R.; SURESH, K. P. Recent advances in drying and dehydration of fruits and vegetables: a review. **J. Food Sci. Technol**, v. 47, p. 15-26. 2010.

SHARMA, G. P.; VERMA, R. C.; PATHARE, P. B.; Thin-Layer infrared radiation drying of onion slices. **Journal of Food Engineering**, v. 67, p. 361-366; 2005.

SILVA, C. M. D. P. S. e **Ferramentas analíticas e numéricas para a descrição da secagem de sólidos na forma de cilindros e elipsóides**. 254 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande-PB, 2012.

SILVA, W. P. da **Transporte difusivo em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas**. 263 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Brasil. 2007.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. e; SILVA, D. D. P. S. e; SILVA, C. D. P. S. e; Numerical simulation of the water diffusion in cylindrical solids. **International Journal of Food Engineering**, v. 4, article 6, 2008.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. **Lab fit curve fitting software**, V.7.2.46; on line, disponível em www.labfit.net. 2009a.

SILVA, W. P. da; SILVA, C. M. D. P. S. SILVA, D. D. P. S.; SILVA C. D. P. S. e NASCIMENTO, P. L.; Influence of the geometry on the numerical simulation of isothermal drying kinetics of bananas. **World Applied Sciences Journal** v. 7, p. 846-855, 2009b.

SILVA, W. P. **Discretizações em fenômenos de transporte computacional, cursos 1 e 2**. Apresentações em PowerPoint, online, disponível no endereço eletrônico: <http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/TCMFC.htm>. 2009c.

SILVA, W. P.; PRECKER, J. W.; SILVA, D. D. P. S.; SILVA C. D. P. S.; LIMA, A. G. B. Numerical simulation of diffusive processes in solids of revolution via the finite volume method and generalized coordinates, **Int. J. Heat Mass Transfer** v. 52, p. 4976-4985, 2009d.

SILVA, W. P. da; SILVA, C. M. D. P. S. e; SILVA, D. D. P. S. e; NEVES, G. A.; LIMA, A. G. B. de; Mass and heat transfer study in solids of revolution via numerical simulations using finite volume method and generalized coordinates for the Cauchy boundary condition. **International Journal of Heat Transfer**, v. 53, p.1183-1194, 2010a.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S; FARIAS, V. S. de O; SILVA, D. D. P. S. e; Calculation of the convective heat transfer coefficient and cooling kinetics of an individual fig fruit. **Heat Mass Transfer**, v. 46, p.371-380, DOI. 10, 1007/S00231-010-0577-7 2010b.

SILVA, W. P. e SILVA, C. M. D. P. S. *xyExtract Graph Digitizer* (<http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/indexxyExtract.htm>), 2011a.

SILVA, W. P. da; SILVA, C. M. D. P. S. e; NASCIMENTO, P. L. do; CARMO, J. E. F.; SILVA, D. D. P. S. e; Influence of the geometry on the numerical simulation of the cooling kinetics of cucumbers. **Spanish Journal of Agricultural Research** v. 9, p. 242-251, 2011b.

SILVA, W. P. da; CARMO, J. E. F. do; SILVA, C. M. D. P. S. e; ARAGÃO, R. F. A. Determination of convective heat transfer coefficient during cooling of an individual strawberry fruit using different methods. **International Review of Chemical Engineering** v. 3, n. 2, p. 233-239, 2011c.

SILVA, W. P., SILVA, C.D.P.S., GAMA, F.J.A.; An improved technique for determining transport parameters in cooling processes. **Journal of Food Engineering**, v. 111, p. 394-402, 2012.

SIMPSON, R.; CORTÉS, C. An inverse method to estimate thermophysical properties of food at freezing temperatures: apparent volumetric specific heat. **Journal of Food Engineering**, v. 64, p. 89-96, 2004.

SINGHAL, D.K., SINGH, U., SINGH, A.K. Effective thermal diffusivity of perishable produce as a function of temperature by transient method. **Indian Journal of Pure and Applied Physics**, v. 46, p. 862-865; 2008.

SINGH, R. P. **Heating and cooling processes for foods**. R. D. Heldman, & D. B. Lund (Eds.), Handbook of food engineering. New York, Marcel Dekker. 1992.

STEPHANOPOULOS, G. **Chemical process control: An introduction to theory and practica**. Englewood Cliffs, NJ 07632, USA Prentice-Hall 1984.

STUMBO, C. R. **Thermobacteriology in food processing**. New York Academic Press, 1965.

STUMBO, C. R.; PUROHIT, K. S.; RAMAKRISHNA, T. V. Thermal process lethality guide for low-acid foods in metal containers. **Journal of Food Science**, v. 40, p. 1316-1323, 1975.

SUN, Da-Wen **Thermal food processing – New Technologies and quality issues**. 2^o edição, CRC Press Nova York, 2012.

SWEAT, V. E. Experimental values of thermal conductivity of selected fruits and vegetables. **Journal of Food Science**, v. 39, p. 1080-1083, 1974.

SWEAT, V. E. **Thermal properties of foods, Engineering Properties of Foods**, p 49-87, M. A. Rao & S. S. H. Rizvi, Marcel Dekker Inc. 1986.

TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis**. Sausalito, California. University Science Book, 2nd edition, 1997.

TAVMAN, I. H.; TAVMAN, S.; EVCIN, S.; Measurement of thermal diffusivity of granular food materials, **Int. Commun. Heat Mass Transfer** v. 24, p. 945-953, 1997.

TIJSKENS, L. M. M., SCHIJVENS, E. P .H. M., BIEKMAN, E. S. A. Modeling the change in color of broccoli and green beans during blanching. **Innovative Food Science and Emerging Technologies**, v. 2, p. 303-313, 2001.

TIPLER, P. **Física**, 3ª Ed. Rio de Janeiro, RJ. Guanabara Dois, 1995.

TOGRUL, H. Suitable drying model for infrared drying of carrot. **Journal of Food Engineering** v. 77 p.610-619, 2006.

UKRAINCZYK, N. Thermal diffusivity estimation using numerical inverse solution for 1D heat conduction. **International Journal of Heat and Mass Transfer** v. 52 p. 5675-5681, 2009.

WANG, L.; SUN, D. W. Rapid cooling of porous and moisture foods by using vacuum cooling technology. **Trends in Food Science and Technology**, v. 12, p. 174-184, 2001.

WILBEY, R. A. **Pasteurization of foods: principles of pasteurization** Encyclopedia of food science, food technology and nutrition. p. 3437-3441, Academic Press, 1993.

WOLF, J. **Discarding nature's plan: A social history of infant feeding in Chicago, 1892-1938** – PhD diss., University of Illinois at Chicago, 1998.

WOODFIELD, P. L.; MONDE, M.; MITSUTAKE, Y. On estimating thermal diffusivity using analytical inverse solution for unsteady one-dimensional heat conduction. **International Journal of Heat and Mass Transfer** v. 50, p. 1202-1205, 2007.

WU, G.; YANG, W.; JIA, C. A three-dimensional numerical simulation of transient heat and mass transfer inside a single rice kernel during the drying process. **Biosystems Engineering**, v. 87, n. 2, p. 191-299, 2004.

APÊNDICES

Tabela A.1 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$.

t (s)	T*		t (s)	T*
0,0000000	0,0000000		998,0000	0,8152039
38,00000	$1,9607078 \times 10^{-6}$		1038,000	0,8305232
78,00000	$6,7358743 \times 10^{-4}$		1078,000	0,8445737
118,0000	$7,9163248 \times 10^{-3}$		1118,000	0,8574599
158,0000	$2,9530793 \times 10^{-2}$		1158,000	0,8692783
198,0000	$6,6246100 \times 10^{-2}$		1198,000	0,8801169
238,0000	0,1139452		1238,000	0,8900571
278,0000	0,1678451		1278,000	0,8991732
318,0000	0,2241696		1318,000	0,9075335
358,0000	0,2803581		1358,000	0,9152007
398,0000	0,3348228		1398,000	0,9222321
438,0000	0,3866562		1438,000	0,9286805
478,0000	0,4353968		1478,000	0,9345942
518,0000	0,4808647		1518,000	0,9400176
558,0000	0,5230525		1558,000	0,9449912
598,0000	0,5620540		1598,000	0,9495525
638,0000	0,5980203		1638,000	0,9537355
678,0000	0,6311307		1678,000	0,9575717
718,0000	0,6615761		1718,000	0,9610898
758,0000	0,6895482		1758,000	0,9643162
798,0000	0,7152335		1798,000	0,9672751
838,0000	0,7388098		1838,000	0,9699886
878,0000	0,7604443		1878,000	0,9724771
918,0000	0,7802933		1918,000	0,9747593
958,0000	0,7985018		1958,000	0,9768522
			1998,000	0,9787716

Tabela A.2 - Temperaturas adimensionais em vários instantes diferentes geradas por simulação numérica em $r=0,25R$.

t (s)	T*		t (s)	T*
0,000000	0,000000		998,0000	0,8312055
38,00000	$7,6000106 \times 10^{-5}$		1038,000	0,8451995
78,00000	$4,7447793 \times 10^{-3}$		1078,000	0,8580340
118,0000	$2,5480649 \times 10^{-2}$		1118,000	0,8698048
158,0000	$6,3360311 \times 10^{-2}$		1158,000	0,8805999
198,0000	0,1126831		1198,000	0,8905001
238,0000	0,1679110		1238,000	0,8995795
278,0000	0,2251313		1278,000	0,9079061
318,0000	0,2818559		1318,000	0,9155424
358,0000	0,3366027		1358,000	0,9225454
398,0000	0,3885519		1398,000	0,9289678
438,0000	0,4373045		1438,000	0,9348577
478,0000	0,4827225		1478,000	0,9402593
518,0000	0,5248253		1518,000	0,9452129
558,0000	0,5637239		1558,000	0,9497558
598,0000	0,5995797		1598,000	0,9539220
638,0000	0,6325786		1638,000	0,9577428
678,0000	0,6629153		1678,000	0,9612467
718,0000	0,6907836		1718,000	0,9644601
758,0000	0,7163711		1758,000	0,9674070
798,0000	0,7398559		1798,000	0,9701096
838,0000	0,7614056		1838,000	0,9725881
878,0000	0,7811761		1878,000	0,9748610
918,0000	0,7993122		1918,000	0,9769455
958,0000	0,8159475		1958,000	0,9788572
			1998,000	0,9806103

Tabela A.3 - Temperaturas adimensionais desde o instante inicial até 2000 s usando simulação numérica, $r=0,5R$.

t (s)	T*		t (s)	T*
0,000000	0,0000000		998,0000	0,8756341
38,00000	$5,6525189 \times 10^{-3}$		1038,000	0,8859470
78,00000	$5,5392969 \times 10^{-2}$		1078,000	0,8954045
118,0000	0,1317141		1118,000	0,9040778
158,0000	0,2092514		1158,000	0,9120317
198,0000	0,2805650		1198,000	0,9193260
238,0000	0,3446055		1238,000	0,9260155
278,0000	0,4019835		1278,000	0,9321502
318,0000	0,4535818		1318,000	0,9377763
358,0000	0,5001974		1358,000	0,9429359
398,0000	0,5424814		1398,000	0,9476676
438,0000	0,5809566		1438,000	0,9520069
478,0000	0,6160468		1478,000	0,9559865
518,0000	0,6481029		1518,000	0,9596360
558,0000	0,6774213		1558,000	0,9629830
598,0000	0,7042580		1598,000	0,9660524
638,0000	0,7288372		1638,000	0,9688673
678,0000	0,7513577		1678,000	0,9714488
718,0000	0,7719978		1718,000	0,9738162
758,0000	0,7909181		1758,000	0,9759874
798,0000	0,8082643		1798,000	0,9779785
838,0000	0,8241687		1838,000	0,9798045
878,0000	0,8387522		1878,000	0,9814790
918,0000	0,8521251		1918,000	0,9830148
958,0000	0,8643883		1958,000	0,9844232
			1998,000	0,9857148

Tabela A.4 - Temperaturas adimensionais em $r=0,75R$, usando simulação numérica.

t (s)	T*		t (s)	T*
0,000000	0,0000000		998,0000	0,9369048
38,00000	0,1543248		1038,000	0,9421381
78,00000	0,3416504		1078,000	0,9469369
118,0000	0,4593136		1118,000	0,9513375
158,0000	0,5396422		1158,000	0,9553729
198,0000	0,5988596		1198,000	0,9590735
238,0000	0,6450025		1238,000	0,9624673
278,0000	0,6824652		1278,000	0,9655796
318,0000	0,7138460		1318,000	0,9684337
358,0000	0,7407690		1358,000	0,9710512
398,0000	0,7642914		1398,000	0,9734516
438,0000	0,7851241		1438,000	0,9756531
478,0000	0,8037604		1478,000	0,9776719
518,0000	0,8205534		1518,000	0,9795233
558,0000	0,8357644		1558,000	0,9812212
598,0000	0,8495936		1598,000	0,9827783
638,0000	0,8621994		1638,000	0,9842063
678,0000	0,8737111		1678,000	0,9855160
718,0000	0,8842372		1718,000	0,9867169
758,0000	0,8938708		1758,000	0,9878184
798,0000	0,9026929		1798,000	0,9888284
838,0000	0,9107755		1838,000	0,9897548
878,0000	0,9181828		1878,000	0,9906043
918,0000	0,9249727		1918,000	0,9913834
958,0000	0,9311975		1958,000	0,9920979
			1998,000	0,9927531

Tabela A.5 – Dados sobre a simulação numérica da penetração do calor para $r=0,9R$.

t (s)	T*		t (s)	T*
0,000000	0,0000000		998,0000	0,9752985
38,00000	0,5674116		1038,000	0,9773474
78,00000	0,7079517		1078,000	0,9792262
118,0000	0,7720988		1118,000	0,9809490
158,0000	0,8109279		1158,000	0,9825289
198,0000	0,8377767		1198,000	0,9839777
238,0000	0,8578695		1238,000	0,9853064
278,0000	0,8737297		1278,000	0,9865248
318,0000	0,8867431		1318,000	0,9876422
358,0000	0,8977360		1358,000	0,9886669
398,0000	0,9072295		1398,000	0,9896066
438,0000	0,9155653		1438,000	0,9904684
478,0000	0,9229753		1478,000	0,9912588
518,0000	0,9296221		1518,000	0,9919836
558,0000	0,9356231		1558,000	0,9926483
598,0000	0,9410664		1598,000	0,9932579
638,0000	0,9460201		1638,000	0,9938170
678,0000	0,9505386		1678,000	0,9943297
718,0000	0,9546670		1718,000	0,9947999
758,0000	0,9584433		1758,000	0,9952310
798,0000	0,9619001		1798,000	0,9956264
838,0000	0,9650663		1838,000	0,9959891
878,0000	0,9679674		1878,000	0,9963217
918,0000	0,9706264		1918,000	0,9966267
958,0000	0,9730638		1958,000	0,9969064
			1998,000	0,9971629

Tabela A.6 - Dados da temperatura ($^{\circ}\text{C}$) no centro do cilindro obtidos experimentalmente para o agar gel, Ukrainczyk (2009).

t (s)	T_{exp} ($^{\circ}\text{C}$)		t (s)	T_{exp} ($^{\circ}\text{C}$)
0,000000	$0,201404 \times 10^2$		$0,303185 \times 10^3$	$0,231857 \times 10^2$
$0,152866 \times 10^2$	$0,201404 \times 10^2$		$0,321019 \times 10^3$	$0,233369 \times 10^2$
$0,280255 \times 10^2$	$0,201404 \times 10^2$		$0,349045 \times 10^3$	$0,235313 \times 10^2$
$0,433121 \times 10^2$	$0,201620 \times 10^2$		$0,379618 \times 10^3$	$0,237365 \times 10^2$
$0,560510 \times 10^2$	$0,202160 \times 10^2$		$0,422930 \times 10^3$	$0,239633 \times 10^2$
$0,636943 \times 10^2$	$0,202700 \times 10^2$		$0,456051 \times 10^3$	$0,241145 \times 10^2$
$0,738854 \times 10^2$	$0,203456 \times 10^2$		$0,507006 \times 10^3$	$0,242981 \times 10^2$
$0,815287 \times 10^2$	$0,204320 \times 10^2$		$0,565605 \times 10^3$	$0,244600 \times 10^2$
$0,917197 \times 10^2$	$0,205508 \times 10^2$		$0,614013 \times 10^3$	$0,245572 \times 10^2$
$0,993631 \times 10^2$	$0,206587 \times 10^2$		$0,662420 \times 10^3$	$0,246436 \times 10^2$
$0,107006 \times 10^3$	$0,207559 \times 10^2$		$0,710828 \times 10^3$	$0,247084 \times 10^2$
$0,114650 \times 10^3$	$0,208747 \times 10^2$		$0,764331 \times 10^3$	$0,247624 \times 10^2$
$0,124841 \times 10^3$	$0,209935 \times 10^2$		$0,822930 \times 10^3$	$0,248056 \times 10^2$
$0,135032 \times 10^3$	$0,211447 \times 10^2$		$0,886624 \times 10^3$	$0,248380 \times 10^2$
$0,142675 \times 10^3$	$0,212635 \times 10^2$		$0,952866 \times 10^3$	$0,248596 \times 10^2$
$0,150318 \times 10^3$	$0,214147 \times 10^2$		$0,103694 \times 10^4$	$0,248920 \times 10^2$
$0,163057 \times 10^3$	$0,215659 \times 10^2$		$0,110828 \times 10^4$	$0,249028 \times 10^2$
$0,170701 \times 10^3$	$0,216955 \times 10^2$		$0,118471 \times 10^4$	$0,249136 \times 10^2$
$0,183439 \times 10^3$	$0,218575 \times 10^2$		$0,124586 \times 10^4$	$0,249244 \times 10^2$
$0,198726 \times 10^3$	$0,220626 \times 10^2$		$0,131465 \times 10^4$	$0,249244 \times 10^2$
$0,216561 \times 10^3$	$0,222894 \times 10^2$		$0,138089 \times 10^4$	$0,249352 \times 10^2$
$0,229299 \times 10^3$	$0,224406 \times 10^2$		$0,143439 \times 10^4$	$0,249352 \times 10^2$
$0,244586 \times 10^3$	$0,226134 \times 10^2$		$0,149809 \times 10^4$	$0,249352 \times 10^2$
$0,264968 \times 10^3$	$0,228186 \times 10^2$		$0,154395 \times 10^4$	$0,249352 \times 10^2$
$0,280255 \times 10^3$	$0,229914 \times 10^2$		$0,160000 \times 10^4$	$0,249352 \times 10^2$

Tabela A.7 - Temperaturas do aquecimento do agar gel obtidas experimentalmente, analiticamente e o erro percentual para $r=0$.

t (s)	T_{exp} (°C)	T_{ana} (°C)	erro (%)
0,00000	20,14040	20,14000	$1,9887551 \times 10^{-3}$
15,28660	20,14040	20,14000	$1,9792847 \times 10^{-3}$
28,02550	20,14040	20,14025	$7,1973988 \times 10^{-4}$
43,31210	20,16200	20,15032	$5,7933751 \times 10^{-2}$
56,05100	20,21600	20,18801	$1,384375 \times 10^{-1}$
63,69430	20,27000	20,22976	$1,984979 \times 10^{-1}$
73,88540	20,34560	20,30880	$1,808857 \times 10^{-1}$
81,52870	20,43200	20,38415	$2,341805 \times 10^{-1}$
91,71970	20,55080	20,50253	$2,348685 \times 10^{-1}$
99,36310	20,65870	20,60205	$2,742194 \times 10^{-1}$
107,0060	20,75590	20,70850	$2,283481 \times 10^{-1}$
114,6500	20,87470	20,82008	$2,616783 \times 10^{-1}$
124,8410	20,99350	20,97402	$9,2771269 \times 10^{-2}$
135,0320	21,14470	21,13106	$6,4487249 \times 10^{-2}$
142,6750	21,26350	21,24936	$6,6504024 \times 10^{-2}$
150,3180	21,41470	21,36718	$2,219200 \times 10^{-1}$
163,0570	21,56590	21,56076	$2,3826489 \times 10^{-2}$
170,7010	21,69550	21,67447	$9,6934512 \times 10^{-2}$
183,4390	21,85750	21,85877	$-5,7942560 \times 10^{-2}$
198,7260	22,06260	22,07015	$-3,4243509 \times 10^{-2}$
216,5610	22,28940	22,30209	$-5,6939613 \times 10^{-2}$
229,2990	22,44060	22,45778	$-7,6546893 \times 10^{-2}$
244,5860	22,61340	22,63372	$-8,9845307 \times 10^{-2}$
264,9680	22,81860	22,85035	$-1,391397 \times 10^{-1}$
280,2550	22,99140	23,00000	$-3,7406314 \times 10^{-2}$
303,1850	23,18570	23,20522	$-8,4197216 \times 10^{-2}$
321,0190	23,33690	23,35001	$-5,6190073 \times 10^{-2}$
349,0450	23,53130	23,55383	$-9,5726915 \times 10^{-2}$
379,6180	23,73650	23,74669	$-4,2941760 \times 10^{-2}$

Tabela A.7 (continuação).

t (s)	T_{exp} (°C)	T_{ana} (°C)	erro (%)
422,9300	23,96330	23,97505	$-4,9022295 \times 10^{-2}$
456,0510	24,11450	24,11976	$-2,1830359 \times 10^{-2}$
507,0060	24,29810	24,30121	$-1,2810850 \times 10^{-2}$
565,6050	24,46000	24,46085	$-3,4622357 \times 10^{-3}$
614,0130	24,55720	24,56216	$-2,0194104 \times 10^{-2}$
662,4200	24,64360	24,64205	$6,2924023 \times 10^{-3}$
710,8280	24,70840	24,70505	$1,3563045 \times 10^{-2}$
764,3310	24,76240	24,75930	$1,2509023 \times 10^{-2}$
822,9300	24,80560	24,80446	$4,5904438 \times 10^{-3}$
886,6240	24,83800	24,84084	$-1,1449621 \times 10^{-2}$
952,8660	24,85960	24,86836	$-3,5247389 \times 10^{-2}$
1036,940	24,89200	24,89258	$-2,3293989 \times 10^{-3}$
1108,280	24,90280	24,90659	$-1,5211118 \times 10^{-2}$
1184,710	24,91360	24,91704	$-1,3788191 \times 10^{-2}$
1245,860	24,92440	24,92299	$5,6552240 \times 10^{-3}$
1314,650	24,92440	24,92786	$-1,3897005 \times 10^{-2}$
1380,890	24,93520	24,93123	$1,5910380 \times 10^{-2}$
1434,390	24,93520	24,93326	$7,7945567 \times 10^{-3}$
1498,090	24,93520	24,93507	$5,3544552 \times 10^{-4}$
1543,950	24,93520	24,93606	$-3,4574480 \times 10^{-3}$
1600,000	24,93520	24,93701	$-7,2514620 \times 10^{-3}$

Tabela A.8 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica, para o cilindro finito, com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0$.

t (s)	T^*		t (s)	T^*
0,00000	0,00000		1000,000	0,9066882
40,00000	$3,6596255 \times 10^{-6}$		1040,000	0,9175110
80,00000	$9,6516527 \times 10^{-4}$		1080,000	0,9270799
120,0000	$1,0662134 \times 10^{-2}$		1120,000	0,9355397
160,0000	$3,9099537 \times 10^{-2}$		1160,000	0,9430185
200,0000	$8,7186784 \times 10^{-2}$		1200,000	0,9496298
240,0000	0,1493359		1240,000	0,9554743
280,0000	0,2188751		1280,000	0,9606405
320,0000	0,2904585		1320,000	0,9652074
360,0000	0,3604824		1360,000	0,9692443
400,0000	0,4267901		1400,000	0,9728127
440,0000	0,4882517		1440,000	0,9759669
480,0000	0,5444093		1480,000	0,9787551
520,0000	0,5952193		1520,000	0,9812196
560,0000	0,6408793		1560,000	0,9833982
600,0000	0,6817166		1600,000	0,9853239
640,0000	0,7181183		1640,000	0,9870260
680,0000	0,7504893		1680,000	0,9885306
720,0000	0,7792271		1720,000	0,9898606
760,0000	0,8047088		1760,000	0,9910362
800,0000	0,8272836		1800,000	0,9920754
840,0000	0,8472708		1840,000	0,9929939
880,0000	0,8649589		1880,000	0,9938058
920,0000	0,8806075		1920,000	0,9945235
960,0000	0,8944483		1960,000	0,9951579
			2000,000	0,9957186

Tabela A.9 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,005$ m.

t (s)	T^*		t (s)	T^*
0,0000000	0,0000000		1000,000	0,9134999
40,00000	$5,3261796 \times 10^{-5}$		1040,000	0,9235351
80,00000	$3,2820066 \times 10^{-3}$		1080,000	0,9324068
120,0000	$2,0959113 \times 10^{-2}$		1120,000	0,9402497
160,0000	$6,0098313 \times 10^{-2}$		1160,000	0,9471827
200,0000	0,1174376		1200,000	0,9533114
240,0000	0,1856553		1240,000	0,9587290
280,0000	0,2581221		1280,000	0,9635178
320,0000	0,3302049		1320,000	0,9677510
360,0000	0,3990862		1360,000	0,9714928
400,0000	0,4632542		1400,000	0,9748004
440,0000	0,5220457		1440,000	0,9777241
480,0000	0,5753167		1480,000	0,9803085
520,0000	0,6232233		1520,000	0,9825929
560,0000	0,6660835		1560,000	0,9846121
600,0000	0,7042919		1600,000	0,9863970
640,0000	0,7382683		1640,000	0,9879747
680,0000	0,7684286		1680,000	0,9893693
720,0000	0,7951685		1720,000	0,9906021
760,0000	0,8188552		1760,000	0,9916917
800,0000	0,8398244		1800,000	0,9926549
840,0000	0,8583800		1840,000	0,9935063
880,0000	0,8747945		1880,000	0,9942588
920,0000	0,8893119		1920,000	0,9949240
960,0000	0,9021493		1960,000	0,9955120
			2000,000	0,9960318

Tabela A.10 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,01$ m.

t (s)	T^*		t (s)	T^*
0,000000	0,000000		1000,000	0,9334713
40,00000	$4,6512038 \times 10^{-3}$		1040,000	0,9411943
80,00000	$4,0752284 \times 10^{-2}$		1080,000	0,9480203
120,0000	$9,9897519 \times 10^{-2}$		1120,000	0,9540536
160,0000	0,1705976		1160,000	0,9593863
200,0000	0,2464753		1200,000	0,9640998
240,0000	0,3223071		1240,000	0,9682661
280,0000	0,3945888		1280,000	0,9719488
320,0000	0,4614686		1320,000	0,9752039
360,0000	0,5222322		1360,000	0,9780812
400,0000	0,5768288		1400,000	0,9806245
440,0000	0,6255534		1440,000	0,9828725
480,0000	0,6688589		1480,000	0,9848597
520,0000	0,7072524		1520,000	0,9866161
560,0000	0,7412406		1560,000	0,9881688
600,0000	0,7713026		1600,000	0,9895411
640,0000	0,7978792		1640,000	0,9907542
680,0000	0,8213680		1680,000	0,9918265
720,0000	0,8421255		1720,000	0,9927743
760,0000	0,8604683		1760,000	0,9936121
800,0000	0,8766774		1800,000	0,9943527
840,0000	0,8910012		1840,000	0,9950073
880,0000	0,9036596		1880,000	0,9955859
920,0000	0,9148465		1920,000	0,9960973
960,0000	0,9247332		1960,000	0,9965494
			2000,000	0,9969491

Tabela A.11 - Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0$; $y=0,015$ m.

t (s)	T		t (s)	T
0,000000	0,0000000		1000,000	0,9635867
40,00000	0,1389714		1040,000	0,9678164
80,00000	0,2954335		1080,000	0,9715539
120,0000	0,3980752		1120,000	0,9748567
160,0000	0,4763013		1160,000	0,9777758
200,0000	0,5420204		1200,000	0,9803556
240,0000	0,5990231		1240,000	0,9826357
280,0000	0,6487372		1280,000	0,9846510
320,0000	0,6920580		1320,000	0,9864323
360,0000	0,7297733		1360,000	0,9880068
400,0000	0,7626157		1400,000	0,9893985
440,0000	0,7912481		1440,000	0,9906286
480,0000	0,8162516		1480,000	0,9917159
520,0000	0,8381262		1520,000	0,9926770
560,0000	0,8572974		1560,000	0,9935265
600,0000	0,8741261		1600,000	0,9942775
640,0000	0,8889188		1640,000	0,9949412
680,0000	0,9019370		1680,000	0,9955279
720,0000	0,9134043		1720,000	0,9960465
760,0000	0,9235132		1760,000	0,9965050
800,0000	0,9324300		1800,000	0,9969102
840,0000	0,9402990		1840,000	0,9972683
880,0000	0,9472460		1880,000	0,9975849
920,0000	0,9533808		1920,000	0,9978648
960,0000	0,9587995		1960,000	0,9981121
			2000,000	0,9983308

Tabela A.12 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,25R$; $y=0$ m.

t (s)	T		t (s)	T
0,00000	0,000000		1000,000	0,9147682
40,00000	$1,0742841 \times 10^{-4}$		1040,000	0,9246544
80,00000	$5,4994207 \times 10^{-3}$		1080,000	0,9333950
120,0000	$2,9002154 \times 10^{-2}$		1120,000	0,9411224
160,0000	$7,3357545 \times 10^{-2}$		1160,000	0,9479536
200,0000	0,1331289		1200,000	0,9539925
240,0000	0,2014964		1240,000	0,9593307
280,0000	0,2728610		1280,000	0,9640496
320,0000	0,3433416		1320,000	0,9682209
360,0000	0,4105380		1360,000	0,9719082
400,0000	0,4731328		1400,000	0,9751675
440,0000	0,5305347		1440,000	0,9780485
480,0000	0,5826113		1480,000	0,9805952
520,0000	0,6295041		1520,000	0,9828463
560,0000	0,6715075		1560,000	0,9848362
600,0000	0,7089914		1600,000	0,9865950
640,0000	0,7423532		1640,000	0,9881498
680,0000	0,7719899		1680,000	0,9895241
720,0000	0,7982813		1720,000	0,9907388
760,0000	0,8215821		1760,000	0,9918126
800,0000	0,8422177		1800,000	0,9927617
840,0000	0,8604836		1840,000	0,9936007
880,0000	0,8766458		1880,000	0,9943423
920,0000	0,8909427		1920,000	0,9949979
960,0000	0,9035870		1960,000	0,9955773
			2000,000	0,9960895

Tabela A.13 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R$; $y=0$.

t (s)	T		t (s)	T
0,000000	0,000000		1000,000	0,9372021
40,00000	$6,8978304 \times 10^{-3}$		1040,000	0,9444873
80,00000	$5,9044357 \times 10^{-2}$		1080,000	0,9509279
120,0000	0,1374157		1120,000	0,9566215
160,0000	0,2194498		1160,000	0,9616547
200,0000	0,2982464		1200,000	0,9661040
240,0000	0,3717245		1240,000	0,9700370
280,0000	0,4392123		1280,000	0,9735137
320,0000	0,5005937		1320,000	0,9765869
360,0000	0,5560326		1360,000	0,9793035
400,0000	0,6058458		1400,000	0,9817048
440,0000	0,6504297		1440,000	0,9838274
480,0000	0,6902151		1480,000	0,9857036
520,0000	0,7256384		1520,000	0,9873621
560,0000	0,7571237		1560,000	0,9888282
600,0000	0,7850718		1600,000	0,9901240
640,0000	0,8098552		1640,000	0,9912695
680,0000	0,8318153		1680,000	0,9922819
720,0000	0,8512625		1720,000	0,9931769
760,0000	0,8684766		1760,000	0,9939680
800,0000	0,8837089		1800,000	0,9946673
840,0000	0,8971841		1840,000	0,9952854
880,0000	0,9091024		1880,000	0,9958317
920,0000	0,9196422		1920,000	0,9963147
960,0000	0,9289619		1960,000	0,9967416
			2000,000	0,9971189

Tabela A.14 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,75R$; $y=0$.

t (s)	T		t (s)	T
0,00000	0,0000000		1000,000	0,9681405
40,00000	0,1658462		1040,000	0,9718370
80,00000	0,3489434		1080,000	0,9751049
120,0000	0,4650876		1120,000	0,9779935
160,0000	0,5467263		1160,000	0,9805471
200,0000	0,6093458		1200,000	0,9828043
240,0000	0,6600458		1240,000	0,9847996
280,0000	0,7024357		1280,000	0,9865634
320,0000	0,7385824		1320,000	0,9881225
360,0000	0,7697962		1360,000	0,9895006
400,0000	0,7969748		1400,000	0,9907188
440,0000	0,8207706		1440,000	0,9917956
480,0000	0,8416808		1480,000	0,9927474
520,0000	0,8600992		1520,000	0,9935888
560,0000	0,8763477		1560,000	0,9943325
600,0000	0,8906956		1600,000	0,9949899
640,0000	0,9033727		1640,000	0,9955710
680,0000	0,9145774		1680,000	0,9960846
720,0000	0,9244824		1720,000	0,9965386
760,0000	0,9332394		1760,000	0,9969400
800,0000	0,9409817		1800,000	0,9972947
840,0000	0,9478267		1840,000	0,9976082
880,0000	0,9538786		1880,000	0,9978855
920,0000	0,9592289		1920,000	0,9981304
960,0000	0,9639589		1960,000	0,9983470
			2000,000	0,9985384

Tabela A.15 – Temperaturas adimensionais geradas por simulação numérica com o sensor de temperatura colocado em $r=0,5R$; $y=0,01$ m.

t (s)	T		t (s)	T
0,000000	0,000000		1000,000	0,9552268
40,00000	$1,1483833 \times 10^{-2}$		1040,000	0,9604254
80,00000	$9,6190028 \times 10^{-2}$		1080,000	0,9650198
120,0000	0,2147197		1120,000	0,9690804
160,0000	0,3258495		1160,000	0,9726692
200,0000	0,4204312		1200,000	0,9758414
240,0000	0,4993173		1240,000	0,9786451
280,0000	0,5652747		1280,000	0,9811234
320,0000	0,6209125		1320,000	0,9833139
360,0000	0,6682994		1360,000	0,9852502
400,0000	0,7090044		1400,000	0,9869617
440,0000	0,7442131		1440,000	0,9884744
480,0000	0,7748333		1480,000	0,9898117
520,0000	0,8015734		1520,000	0,9909936
560,0000	0,8249981		1560,000	0,9920384
600,0000	0,8455665		1600,000	0,9929619
640,0000	0,8636581		1640,000	0,9937782
680,0000	0,8795916		1680,000	0,9944998
720,0000	0,8936379		1720,000	0,9951376
760,0000	0,9060292		1760,000	0,9957014
800,0000	0,9169660		1800,000	0,9961997
840,0000	0,9266230		1840,000	0,9966403
880,0000	0,9351522		1880,000	0,9970296
920,0000	0,9426870		1920,000	0,9973738
960,0000	0,9493442		1960,000	0,9976780
			2000,000	0,9979469

Tabela A.16 – Tabela de aquecimento do purê de tomate obtida experimentalmente por Betta et al. (2009).

t (s)	T(°C)		t (s)	T(°C)
0,0000	5,189		2118,60	42,58
123,96	5,189		2287,20	46,16
281,70	5,189		2478,60	49,92
416,88	5,368		2670,60	53,50
574,62	6,383		2997,00	58,15
698,40	7,336		3290,40	61,91
867,60	10,76		3571,80	64,95
1014,00	13,42		3921,00	68,17
1138,20	17,14		4349,40	71,03
1251,00	19,68		4766,40	73,00
1419,60	24,51		5149,20	74,61
1521,00	27,38		5554,80	75,69
1701,60	32,39		6048,00	76,94
1926,60	37,57		6624,00	77,48

Tabela A.17 - Tabela de aquecimento do creme custard obtida experimentalmente por
Betta et al. (2009).

t (s)	T(°C)		t (s)	T(°C)
0,0000	10,82		2257	42,00
130,2	10,82		2547	47,22
289,4	10,82		2966	53,43
405,1	10,82		3299	57,51
564,3	10,98		3603	60,78
680,1	11,63		3965	64,04
795,8	12,61		4384	67,14
882,6	13,76		4789	69,59
1013	15,55		5252	71,71
1129	17,67		5672	73,18
1259	20,45		6193	74,65
1389	23,39		6656	75,63
1577	27,63		7148	76,45
1794	32,53		7582	76,94
2026	37,43		8074	77,43
			8551	77,76

Código B1 – Código para obter as raízes de uma função pelo método da bissecção

```
PROGRAM Bisecacao
IMPLICIT NONE
REAL F
REAL tol
REAL a,b,z
INTEGER nummax,cont

WRITE(*,*)"Introduza o numero maximo de interações:"
READ(*,*) nummax
WRITE(*,*)"Introduza a tolerância:"
READ(*,*) tol
WRITE(*,*)"Introduza o intervalo:"
WRITE(*,*)"INICIO:"
READ(*,*) a
WRITE(*,*)"FIM"
READ(*,*) b
IF ((a.GT.b).OR.(F(a).EQ.0).OR.(F(b).EQ.0)) THEN
    STOP 'Intervalo Incorreto'
ENDIF
! COMPROVAMOS QUE EXISTE AO MENOS UM ZERO NESTE INTERVALO
IF ((F(a)*F(b)).LE.0) THEN
    WRITE(*,*)"Comprovacao correta"
ELSE
    STOP 'Comprovacao incorreta.NAO EXISTEM ZEROS NO INTERVALO'
ENDIF
```

```
cont=0
DO WHILE(cont.NE.nummax)
    cont=cont+1
    z=(a+b)/2

    IF (F(a)*F(z).LT.0) THEN
        b=z
    ELSE
        a=z
    ENDIF

    IF ((b-a).LT.tol) THEN
        WRITE(*,*)"Resultado Aproximado: ",z
        STOP
    ENDIF

    WRITE(*,*)"Resultado Parcial: ",z
ENDDO

WRITE(*,*)"Resultado Final: ",z
STOP
END

FUNCTION F(X)
F=x**2-8
END
```

Código A1 - Código analítico da equação de difusão para o cilindro infinito.

```

PROGRAM Temperatura
IMPLICIT NONE
REAL F, An, EQUACAO_SOMATORIO, Teq, Too, R
REAL t,subTotal,dadoZERO,alfa,Un, chi_sq, posi,A,A0,u1,A1,B
INTEGER contador, zeros, i, N_P_Exp

Real Raiz

Real t1

Real T_Exp

Real T_Ana

common Raiz(200)

common t1(100)

common T_exp(100)

common T_Ana(100)

!-----
zeros = 200

!-----

!Teq = 1.0

!Too = 0.0

!R = 0.02e+00

!-----

Teq = 24.94

Too = 20.14

R = 0.013e+00

!alfa = 1.435679E-07

posi = 0.0*R

```

```

N_P_Exp = 50
A0=0.4907276818110E-02
u1=2.404826
alfa=A0*R*R/(u1*u1)
!-----
!Leitura do arquivo de dados
!-----
open(unit = 5, file = 'Exp.txt')
do i = 1, N_P_Exp
read(5,*) t1(i), T_exp(i)
end do
close(5)
!-----
!Estabelece as 200 primeiras raízes
!-----
call Raizes
!-----
!WRITE(*,*)"A=",Teq
!WRITE(*,*)"A0=",A0
!WRITE(*,*)"u1=",u1
!WRITE(*,*)"A1= ",An(Raiz(1)),"B=",An(Raiz(1))*4.8
write(*,*)"alfa=",alfa
open(unit = 10, file = 'Resultados.txt') !Colocar os resultados neste arquivo
open(unit = 20, file = 'Graph.txt') !t1 e T_Ana
chi_sq = 0.0
!Varredura de todos os tempos e cálculo do chi-square
!-----

```

```

do i = 1, N_P_Exp
!Cálculo da temperatura para um dado tempo t1(i)
!-----
subTotal = 0.0
DO contador = 1, zeros, 1
Un = Raiz(contador)
subTotal = subTotal + An(Un) * F(Un * posi / R) * exp( -Un * Un * alfa * t1(i) / (R *
R) )
END DO
if(i == 1) then
T_Ana(i) = too !Para o tempo igual a zero, o cálculo dá tem erro grande, mas já se sabe
o valor: too
else
T_Ana(i) = Teq - (Teq - Too) * subTotal
end if
!-----
!Fim do cálculo da temperatura para um dado tempo t1(i)
!WRITE(10,*) t1(i), T_Exp(i), T_Ana(i), T_Exp(i) - T_Ana(i)

write(20,*) t1(i), T_Ana(i)
chi_sq = chi_sq + (T_Exp(i) - T_Ana(i)) ** 2
end do
!-----
!Fim da varredura de todos os tempos e cálculo do chi-square
WRITE(10,*) alfa,chi_sq
close(10)
close(20)
!-----

```

```

open(unit = 5, file = 'Exp.txt')
do i = 1, N_P_Exp
read(5,*) t1(i), T_exp(i)
end do
close(5)

!-----

open(unit = 15, file = 'alfa_qui.txt')
write(15,*)alfa,chi_sq
close(15)

!-----

write(*,*) "chi_sq=",chi_sq
!WRITE(*,*)"A2= ",An(Raiz(2))
!WRITE(*,*)"A1= ",An(Raiz(1))

STOP

END

!-----

FUNCTION F(X)
Use dfport
F = besj0(X)
END

!-----

FUNCTION An(Un)
Use dfport
An = 2.0 / ( Un * besj1(Un) )
END FUNCTION

!-----

```

subroutine Raizes

Real Raiz

Real t1

Real T_Exp

Real T_Ana

common Raiz(200)

common t1(100)

common T_exp(100)

common T_Ana(100)

Raiz(1) = 2.404826 Raiz(2) = 5.520078 Raiz(3) = 8.653728 Raiz(4) = 11.79153
 Raiz(5) = 14.93092 Raiz(6) = 18.07106 Raiz(7) = 21.21164 Raiz(8) = 24.35247
 Raiz(9) = 27.49348 Raiz(10) = 30.63461 Raiz(11) = 33.77582 Raiz(12) = 36.91710
 Raiz(13) = 40.05843 Raiz(14) = 43.19979 Raiz(15) = 46.34119 Raiz(16) = 49.48261
 Raiz(17) = 52.62405 Raiz(18) = 55.76551 Raiz(19) = 58.90698 Raiz(20) = 62.04847
 Raiz(21) = 65.18997 Raiz(22) = 68.33147 Raiz(23) = 71.47298 Raiz(24) = 74.61450
 Raiz(25) = 77.75603 Raiz(26) = 80.89755 Raiz(27) = 84.03909 Raiz(28) = 87.18063
 Raiz(29) = 90.32217 Raiz(30) = 93.46371 Raiz(31) = 96.60527 Raiz(32) = 99.74683
 Raiz(33) = 102.8884 Raiz(34) = 106.0299 Raiz(35) = 109.1715 Raiz(36) = 112.3130
 Raiz(37) = 115.4546 Raiz(38) = 118.5962 Raiz(39) = 121.7377 Raiz(40) = 124.8793
 Raiz(41) = 128.0209 Raiz(42) = 131.1624 Raiz(43) = 134.3040 Raiz(44) = 137.4456
 Raiz(45) = 140.5872 Raiz(46) = 143.7287 Raiz(47) = 146.8703 Raiz(48) = 150.0119
 Raiz(49) = 153.1535 Raiz(50) = 156.2950 Raiz(51) = 159.4366 Raiz(52) = 162.5782
 Raiz(53) = 165.7198 Raiz(54) = 168.8614 Raiz(55) = 172.0029 Raiz(56) = 175.1445
 Raiz(57) = 178.2861 Raiz(58) = 181.4277 Raiz(59) = 184.5692 Raiz(60) = 187.7108
 Raiz(61) = 190.8524 Raiz(62) = 193.9940 Raiz(63) = 197.1356 Raiz(64) = 200.2772
 Raiz(65) = 203.4187 Raiz(66) = 206.5603 Raiz(67) = 209.7019 Raiz(68) = 212.8435
 Raiz(69) = 215.9851 Raiz(70) = 219.1266 Raiz(71) = 222.2682 Raiz(72) = 225.4098

Raiz(73) = 228.5514 Raiz(74) = 231.6930 Raiz(75) = 234.8346 Raiz(76) = 237.9762
Raiz(77) = 241.1178 Raiz(78) = 244.2593 Raiz(79) = 247.4009 Raiz(80) = 250.5425
Raiz(81) = 253.6841 Raiz(82) = 256.8257 Raiz(83) = 259.9673 Raiz(84) = 263.1089
Raiz(85) = 266.2504 Raiz(86) = 269.3920 Raiz(87) = 272.5336 Raiz(88) = 275.6752
Raiz(89) = 278.8168 Raiz(90) = 281.9584 Raiz(91) = 285.1000 Raiz(92) = 288.2416
Raiz(93) = 291.3831 Raiz(94) = 294.5247 Raiz(95) = 297.6663 Raiz(96) = 300.8079
Raiz(97) = 303.9495 Raiz(98) = 307.0911 Raiz(99) = 310.2327 Raiz(100) = 313.3743
Raiz(101) = 316.5159 Raiz(102) = 319.6575 Raiz(103) = 322.7990 Raiz(104) = 325.9406
Raiz(105) = 329.0822 Raiz(106) = 332.2238 Raiz(107) = 335.3654 Raiz(108) = 338.5070
Raiz(109) = 341.6486 Raiz(110) = 344.7902 Raiz(111) = 347.9318 Raiz(112) = 351.0734
Raiz(113) = 354.2149 Raiz(114) = 357.3565 Raiz(115) = 360.4981 Raiz(116) = 363.6397
Raiz(117) = 366.7813 Raiz(118) = 369.9229 Raiz(119) = 373.0645 Raiz(120) = 376.2061
Raiz(121) = 379.3477 Raiz(122) = 382.4893 Raiz(123) = 385.6308 Raiz(124) = 388.7724
Raiz(125) = 391.9140 Raiz(126) = 395.0556 Raiz(127) = 398.1972 Raiz(128) = 401.3387
Raiz(129) = 404.4803 Raiz(130) = 407.6219 Raiz(131) = 410.7635 Raiz(132) = 413.9052
Raiz(133) = 417.0468 Raiz(134) = 420.1883 Raiz(135) = 423.3299 Raiz(136) = 426.4715
Raiz(137) = 429.6131 Raiz(138) = 432.7547 Raiz(139) = 435.8962 Raiz(140) = 439.0378
Raiz(141) = 442.1794 Raiz(142) = 445.3210 Raiz(143) = 448.4626 Raiz(144) = 451.6042
Raiz(145) = 454.7458 Raiz(146) = 457.8874 Raiz(147) = 461.0290 Raiz(148) = 464.1706
Raiz(149) = 467.3122 Raiz(150) = 470.4537 Raiz(151) = 473.5953 Raiz(152) = 476.7369
Raiz(153) = 479.8785 Raiz(154) = 483.0201 Raiz(155) = 486.1617 Raiz(156) = 489.3033
Raiz(157) = 492.4449 Raiz(158) = 495.5865 Raiz(159) = 498.7281 Raiz(160) = 501.8697
Raiz(161) = 505.0113 Raiz(162) = 508.1528 Raiz(163) = 511.2944 Raiz(164) = 514.4360
Raiz(165) = 517.5776 Raiz(166) = 520.7192 Raiz(167) = 523.8608 Raiz(168) = 527.0024
Raiz(169) = 530.1440 Raiz(170) = 533.2856 Raiz(171) = 536.4271 Raiz(172) = 539.5687
Raiz(173) = 542.7103 Raiz(174) = 545.8519 Raiz(175) = 548.9935 Raiz(176) = 552.1351
Raiz(177) = 555.2767 Raiz(178) = 558.4183 Raiz(179) = 561.5599 Raiz(180) = 564.7015

Raiz(181) = 567.8431Raiz(182) = 570.9847Raiz(183) = 574.1262Raiz(184) = 577.2678
Raiz(185) = 580.4094Raiz(186) = 583.5510Raiz(187) = 586.6926Raiz(188) = 589.8342
Raiz(189) = 592.9758Raiz(190) = 596.1174Raiz(191) = 599.2590Raiz(192) = 602.4006
Raiz(193) = 605.5422Raiz(194) = 608.6838Raiz(195) = 611.8253Raiz(196) = 614.9669
Raiz(197) = 618.1085Raiz(198) = 621.2501Raiz(199) = 624.3917Raiz(200) = 627.5333

return

end subroutine

!-----

Código A2 – Código analítico da equação de difusão para o cilindro finito.

```

PROGRAM Temperatura
IMPLICIT NONE
REAL F, An, EQUACAO_SOMATORIO, Teq, Too, R, m, exponencial
REAL T,subTotal,dadoZERO,alfa,Un, chi_sq, posi,A,A0,u1,A1,B, Um, An2, L, y,u2
INTEGER contador, contador2, zeros, i, N_P_Exp

Real Raiz, Cosseno

Real t1

Real T_Exp

Real T_Ana

common Raiz(200)

common Cosseno(200)

common t1(100)

common T_exp(100)

common T_Ana(100)

!-----
zeros = 200
!-----
!-----

Teq = 1.0
Too = 0.0
R = 0.02
y =0.00
L = 0.04
!R=0,02
!Teq = 24.94

```

```

!Too = 20.14

!R = 0.013e+00

!alfa = 1.435679E-07

posi = 0.0

N_P_Exp = 50

A0=0.30871165255E-02

u1=2.404826

u2=1.570796

alfa=A0*R*R*L*L/(u1*u1*L*L+4*R*R*u2*u2)

!Leitura do arquivo de dados

!-----

open(unit = 5, file = 'Exp.txt')

do i = 1, 2

read(5,*) t1(i), T_exp(i)

end do

close(5)

!-----

!Estabelece as 200 primeiras raízes

!-----

call RaizesEcosenos

!-----

write(*,*)"alfa=",alfa

open(unit = 10, file = 'Resultados.txt') !Colocar os resultados neste arquivo

open(unit = 20, file = 'Graph.txt') !t1 e T_Ana

chi_sq = 0.0

!-----

```

```

do i = 1, N_P_Exp
!Cálculo da temperatura para um dado tempo t1(i)
!-----
subTotal = 0.0

do contador2 = 1, zeros, 1
    Un = Raiz(contador2)
    do contador = 1, zeros, 1
        Um = Cosseno(contador)
        exponencial = exp( - ((Un**2)/(R**2)) + ((Um**2)/((L/2)**2))*alfa*t )

        subTotal = subTotal + An(Un) * An2(contador, Um) * F(Un * posi / R) *
cos(Um * (y/(L/2)))*exponencial
    end do
end do

if(i == 1) then
T_Ana(i) = too
else
T_Ana(i) = Teq - (Teq - Too) * subTotal
end if
!-----
!Fim do cálculo da temperatura para um dado tempo t1(i)
!write(*,*)"chi = ",chi_sq
WRITE(10,*) t1(i), T_Ana(i),T_Exp(i) !, T_Ana(i), T_Exp(i) - T_Ana(i)
write(20,*) t1(i), T_Ana(i)
chi_sq = chi_sq + (T_Exp(i) - T_Ana(i)) ** 2
end do
!-----

```

```

close(10)
close(20)
!-----
write(*,*) "chi_sq=",chi_sq
!WRITE(*,*)"A2= ",An(Raiz(2))
!WRITE(*,*)"A1= ",An(Raiz(1))
STOP
END
!-----
FUNCTION F(X)
Use dfport
F = besj0(X)
END
!-----
FUNCTION An(Un)
Use dfport
An = 2.0 / ( Un * besj1(Un) )
END FUNCTION
!-----
FUNCTION An2(m, Um)
Use dfport
An2 = Um *(2.0 / Um)!((-1)**(m+1)) * (2.0 / Um)
END FUNCTION

```

Código N1 – Código numérico do Finite Cylinder First Kind - principal.

Program principal

Use borders

!-----CONSTANTES-----

parameter tempo = 0.025

parameter instantes =1

parameter raio = 0.013

parameter nParticoes =101

parameter L = 0.25 !

parameter temperaturaInicial = 20.14e-0 !purê de tomate, 5.189. creme_custard, 10.8;

parameter precisao = 1e-9 !para o cálculo de refinamento

parameter tnn = 24.93

parameter tne = 24.93

parameter tee = 24.93

parameter tse = 24.93

parameter tss = 24.93

parameter tsw = 0.0

parameter tnw = 0.0

!-----VARIAVEIS-----

Real, dimension(nParticoes,nParticoes) :: temperaturas, temperaturasTemp, y1,
c,m11,m12,alfa

Real :: sp, sc, lambda, lambda0, rp, tempotranscorrido

Real :: somaTotal, diferenca

Real :: deltaR

Integer :: X,Y,i, linhaVerificacao, colunaVerificacao

type(deltas) :: delta

```

type(gamas) :: gama
!-----ARMAZENA VALORES NA temperaturas DE TEMPERATURA--
do X = 1, nParticoes
do Y = 1, nParticoes
temperaturas(X,Y) = temperaturaInicial
end do
end do
!-----
sp = 0.0
sc = 0.0
lambda = 1.0 !densidade vezes calor específico à pressão constante
lambda0 = 1.0
deltaR = raio / nParticoes
deltaT = tempo / instantes
somaTotal = 0.0
!-----
delta%Y = L / nParticoes
delta%T = deltaT
!-----
gama%E = 1.46e-7  !purê de tomate,1.5271e-7; creme custard 1.3527080e-7
gama%W = 1.46e-7
gama%S = 1.46e-7 !
gama%N = 1.46e-7
!-----cáculo-----
!C = 6.4847e-04
!alfa=1.5e-7
!m11=2.404826

```

```

!m12=1.5707963
!alfa=C/((m11**2/raio**2)+(m12**2/(L/2)**2)) !alfa
!y1=(L/(nParticoes))
!write(*,*)'alfa=',alfa
!-----
!Para gravar as temperaturas no instante t
open(unit = 8, file = 'Agar_gel_101_0.025.txt')
open(unit = 9, file = 'resultadosRefinamentos.txt')
!Leitura do arquivo de dados
do i = 0, 1600
    temperaturasTemp = temperaturas
    temperaturas(nParticoes,1) = Nordeste(lambda, lambda0, deltaR,
nParticoes*deltaR - (deltaR/2), gama, delta, sp, sc, temperaturas,tne, nParticoes,1,
nParticoes)
    !sudeste
    temperaturas(nParticoes,nParticoes) = Sudeste(lambda, lambda0, deltaR,
nParticoes*deltaR - (deltaR/2), gama, delta, sp, sc, temperaturas,tse,Tss,
nParticoes,nParticoes, nParticoes)
    !sudoeste
    temperaturas(1,nParticoes) = Sudoeste(lambda, lambda0, deltaR, deltaR/2,
gama, delta, sp, sc, temperaturas,tss, 1,nParticoes, nParticoes)
    !noroeste
    temperaturas(1,1) = Noroeste(lambda, lambda0, deltaR, deltaR/2, gama, delta,
sp, sc, temperaturas, tnn, 1, 1, nParticoes)
    !Para os elementos de controle que se encontram ao norte e ao sul.
    do X = 1 , nParticoes-2
        rp = (nParticoes-x)*deltaR - (deltaR/2)
        !Norte
        temperaturas(nParticoes-x, 1) = Norte(lambda, lambda0, deltaR, rp,
gama, delta, sp, sc, temperaturas,tnn, nParticoes-x, 1, nParticoes)

```

```

!Sul
    temperaturas(nParticoes-x, nParticoes) = Sul(lambda, lambda0, deltaR,
rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, tss, nParticoes-x, nParticoes, nParticoes)
end do

!Elementos de controle do leste
do X = 1 , nParticoes-2
    rp = nParticoes*deltaR - (deltaR/2)
    !Leste-ok
    temperaturas(nParticoes, nParticoes-x) = Leste(lambda, lambda0, deltaR,
rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,tee, nParticoes, nParticoes-x, nParticoes)
end do

!Elementos de controle do oeste
do X = 1 , nParticoes-2
    rp = deltaR - (deltaR/2)
    temperaturas(1, nParticoes-x) = Oeste(lambda, lambda0, deltaR, rp,
gama, delta, sp, sc, temperaturas, 1, nParticoes-x, nParticoes)
end do

!Elementos de controle do interior.
do X = 1, nParticoes-2
    do Y = 1, nParticoes-2
        rp = (nParticoes-x)*deltaR - (deltaR/2)
        temperaturas(nParticoes-X, nParticoes-Y) = Interior(lambda,
lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, nParticoes-X, nParticoes-Y,
nParticoes)
    end do
end do

end do

tempotranscorrido=i*deltaT

!INICIO CALCULOS REFINAMENTO

tempAntesRef = temperaturas(nParticoes,1)

```

```

r = 1

do

    temperaturas(nParticoes,1) = Nordeste_Refinamento(lambda,
lambda0, deltaR, nParticoes*deltaR - (deltaR/2), gama, delta, sp, sc,
temperaturas,temperaturasTemp, tne, nParticoes,1, nParticoes)

    temperaturas(nParticoes,nParticoes) = Sudeste_Refinamento(lambda,
lambda0, deltaR, nParticoes*deltaR - (deltaR/2), gama, delta, sp, sc,
temperaturas,temperaturasTemp,tse,Tss, nParticoes,nParticoes, nParticoes)

    temperaturas(1,nParticoes) = Sudoeste_Refinamento(lambda, lambda0,
deltaR, deltaR/2, gama, delta, sp, sc, temperaturas,temperaturasTemp,tss, 1,nParticoes,
nParticoes)

    temperaturas(1,1) = Noroeste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR,
deltaR/2, gama, delta, sp, sc, temperaturas, temperaturasTemp,tnn, 1, 1, nParticoes)

    !Para os elementos de controle que se encontram ao norte e ao sul.

    do X = 1 , nParticoes-2

        rp = (nParticoes-x)*deltaR - (deltaR/2)

        !Norte

        temperaturas(nParticoes-x, 1) = Norte_Refinamento(lambda,
lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,temperaturasTemp,tnn,
nParticoes-x, 1, nParticoes)

        !Sul

        temperaturas(nParticoes-x, nParticoes) =
Sul_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,
temperaturasTemp,tss, nParticoes-x, nParticoes, nParticoes)

    end do

    !Elementos de controle do leste

    do X = 1 , nParticoes-2

        rp = nParticoes*deltaR - (deltaR/2)

        !Leste

        temperaturas(nParticoes, nParticoes-x) =
Leste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc,
temperaturas,temperaturasTemp,tee, nParticoes, nParticoes-x, nParticoes)

```

```

end do

!Elementos de controle do oeste

do X = 1 , nParticoes-2

    rp = deltaR - (deltaR/2)

    temperaturas(1, nParticoes-x) = Oeste_Refinamento(lambda,
lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, temperaturasTemp,1, nParticoes-
x, nParticoes)

end do

!Elementos de controle do interior.

do X = 1, nParticoes-2

    do Y = 1, nParticoes-2

        rp = (nParticoes-x)*deltaR - (deltaR/2)

        !Interior

        temperaturas(nParticoes-X, nParticoes-Y) =
Interior_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,
temperaturasTemp, nParticoes-X, nParticoes-Y, nParticoes)

    end do

end do

if (abs(temperaturas(nParticoes,1) - tempAntesRef) < precisao) then

!    write (8,*) i,tempotrancorrido

        exit

    else

        tempAntesRef = temperaturas(nParticoes,1)

    end if

    r = r + 1

end do

end do

stop

End program principal

```

Código N1 – Código numérico do Finite Cylinder First Kind - borders.

Module borders

Use functions

! (x) - Norte

! (x) - Sul

! (x) - Leste

! (x) - Oeste

! (x) - Norteste

! (x) - Sudeste

! (x) - Noroeste

! (x) - Sudoeste

CONTAINS

!-----

REAL Function Leste(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, Tee,X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc, Tee

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_, As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = 2.0 * A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)

As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)

An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

```

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X, Y), Ae*Tee, 0.0)

Leste = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) +
As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

END Function Leste

!-----!

REAL Function Leste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc,
temperaturas,temperaturasTemp, Tee,X, Y, nParticoes)

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc, Tee

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp

INTEGER   :: X, Y

type(gamas)  :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = 2.0 * A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)

As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)

An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X, Y), Ae*Tee,
0.0)

Leste_Refinamento = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1)
+ As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

END Function Leste_Refinamento

```

!-----!

REAL Function Sul(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,tss, X, Y, nParticoes)

```

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc,tss
REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas
INTEGER :: X, Y
type(gamas) :: gama
type(deltas) :: delta
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_ ,aux

```

!*****!

```

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)
As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)!OK
An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, 2.0*As)
b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X , Y), 2.0*As*tss,
0.0)

Sul = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) +
Ae*temperaturas(X + 1, Y) + b_)/Ap_
END Function Sul

```

!-----!

REAL Function Sul_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,temperaturasTemp,tss, X, Y, nParticoes)

```

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc,tss
REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp
INTEGER   :: X, Y
type(gamas) :: gama
type(deltas) :: delta
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_ ,aux

```

!*****

$$Ae = A(rp + \text{delta}R/2, \text{gama}\%E, \text{delta}\%Y, \text{delta}R)$$

$$Aw = A(rp - \text{delta}R/2, \text{gama}\%W, \text{delta}\%Y, \text{delta}R)$$

$$As = A(rp, \text{gama}\%S, \text{delta}R, \text{delta}\%Y)!OK$$

$$An = A(rp, \text{gama}\%N, \text{delta}R, \text{delta}\%Y)$$

$$Ap_ = Ap(\text{lambda}, \text{delta}, \text{delta}R, rp, \text{gama}, sp, An, Ae, Aw, 2.0*As)$$

$$b_ = B(\text{lambda}0, rp, \text{delta}, \text{delta}R, \text{gama}, sc, \text{temperaturasTemp}(X, Y), 2.0*As*tss, 0.0)$$

$$\text{Sul_Refinamento} = (Aw*\text{temperaturas}(X - 1, Y) + An*\text{temperaturas}(X, Y - 1) + Ae*\text{temperaturas}(X + 1, Y) + b_)/Ap_$$

END Function Sul_Refinamento

!-----

REAL Function Oeste(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_, As, Ae, Aw, b_

$$Ae = A(rp + \text{delta}R/2, \text{gama}\%E, \text{delta}\%Y, \text{delta}R)$$

$$As = A(rp, \text{gama}\%S, \text{delta}R, \text{delta}\%Y)$$

$$An = A(rp, \text{gama}\%N, \text{delta}R, \text{delta}\%Y)$$

$$Aw = A(rp - \text{delta}R/2, \text{gama}\%W, \text{delta}\%Y, \text{delta}R)$$

$$Ap_ = Ap(\text{lambda}, \text{delta}, \text{delta}R, rp, \text{gama}, sp, An, Ae, 0.0*Aw, As)$$

$$b_ = B(\text{lambda}0, rp, \text{delta}, \text{delta}R, \text{gama}, sc, \text{temperaturas}(X, Y), 0.0, 0.0)$$

Oeste = (Ae*temperaturas(X + 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) +
As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

END Function Oeste

!-----!

REAL Function Oeste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc,
temperaturas, temperaturasTemp,X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)

An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)

!An, Ae, Aw, As

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, 0.0*Aw, As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X , Y), 0.0,
0.0)

Oeste_Refinamento = (Ae*temperaturas(X + 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1)
+ As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

END Function Oeste_Refinamento

!-----!

REAL Function Norte(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, tnn, X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc, tnn

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)

As = A(rp, gama%S, deltaR , delta%Y) !As = A(rp, gama%S, deltaR * rp, delta%Y)

An = 2.0* A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X , Y), tnn*An, 0.0)!ok 29_01

Norte = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + Ae*temperaturas(X + 1, Y) + As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

END Function Norte

!-----!

REAL Function Norte_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, temperaturasTemp, tnn, X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc, tnn

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas, temperaturasTemp

```

INTEGER      :: X, Y
type(gamas)  :: gama
type(deltas) :: delta
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)
As = A(rp, gama%S, deltaR , delta%Y)   !As = A(rp, gama%S, deltaR * rp,
delta%Y)
An = 2.0* A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)
b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X , Y),
tnn*An, 0.0)!ok 29_01

Norte_Refinamento = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + Ae*temperaturas(X + 1, Y)
+ As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

END Function Norte_Refinamento

!-----

REAL Function Sudeste(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc,
temperaturas,Tse,Tss, X, Y, nParticoes)

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc,Tse,Tss

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas

INTEGER    :: X, Y

type(gamas)  :: gama

type(deltas) :: delta

```

```

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)
As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, 2.0*Ae, Aw, 2.0*As)
b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X , Y), 2.0*Ae*Tse,
2.0*As*Tss)

Sudeste = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) + b_)/Ap_
END Function Sudeste

!-----!

REAL Function Sudeste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp,
sc, temperaturas, temperaturasTemp,Tse,Tss, X, Y, nParticoes)

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc,Tse,Tss
REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp
INTEGER   :: X, Y
type(gamas)  :: gama
type(deltas) :: delta
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)
As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

```

```

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, 2.0*Ae, Aw, 2.0*As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X , Y),
2.0*Ae*Tse, 2.0*As*Tss)

Sudeste_Refinamento = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y -
1) + b_)/Ap_

END Function Sudeste_Refinamento

```

!-----!

```

REAL Function Nordeste(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc,
temperaturas,Tne, X, Y, nParticoes)

```

```

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc,Tne
REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas
INTEGER   :: X, Y
type(gamas)  :: gama
type(deltas) :: delta

```

```

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

```

!*****

```

Ae = 2.0 * A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)
As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
An = 2.0* A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
!An = 2 * rp * gama%N * (deltaR/delta%Y)

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)      !mudou
agora

```

```

    b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X , Y),
An*Tne,Ae*Tne) !ok 29_01

```

```

    Nordeste = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + As*temperaturas(X, Y + 1) + b_)/Ap_

```

```

END Function Nordeste

```

```

!-----!

```

```

REAL Function Nordeste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp,
sc, temperaturas, temperaturasTemp,Tne, X, Y, nParticoes)

```

```

    REAL :: lambda, lambda0, sp, sc,Tne

```

```

    REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas, temperaturasTemp

```

```

    INTEGER :: X, Y

```

```

    type(gamas) :: gama

```

```

    type(deltas) :: delta

```

```

    real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

```

```

!*****

```

```

    Ae = 2.0 * A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

```

```

    Aw =  A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)

```

```

    As =  A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)

```

```

    An = 2.0* A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

```

```

    Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As) !mudou agora

```

```

    b_ =  B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X , Y),
An*Tne,Ae*Tne) !ok 29_01

```

```

    Nordeste_Refinamento = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + As*temperaturas(X, Y
+ 1) + b_)/Ap_

```

```

END Function Nordeste_Refinamento

```

```

!-----!

```

REAL Function Noroeste(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,tnn, X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc,tnn

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)

An =2.0* A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

!Write(*,*)'An=',An

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, 0.0, As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X , Y), tnn*An, 0.0)!

Noroeste = (Ae*temperaturas(X + 1, Y) + As*temperaturas(X , Y+1) + b_)/Ap_

END Function Noroeste

!-----!

REAL Function Noroeste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,temperaturasTemp,tnn, X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc,tnn

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

```

type(deltas) :: delta
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae =  A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
As =  A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
An =2.0*   A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
Ap_ =  Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, 0.0, As)
b_ =   B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X , Y),
tnn*An, 0.0)!

Noroeste_Refinamento = (Ae*temperaturas(X + 1, Y) + As*temperaturas(X ,
Y+1) + b_)/Ap_

END Function Noroeste_Refinamento

!-----!

REAL Function Sudoeste(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc,
temperaturas,Tss, X, Y, nParticoes)

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc,rp, Tss

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas

INTEGER    :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

```

```

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
As =2.0* A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, 0.0, As)
b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X, Y), 0.0,As*Tss )

Sudoeste = (Ae*temperaturas(X + 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) +
b_)/Ap_
END Function Sudoeste

!-----!

REAL Function Sudoeste_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp,
sc, temperaturas,temperaturasTemp,Tss, X, Y, nParticoes)

REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc,rp, Tss
REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp
INTEGER   :: X, Y
type(gamas)  :: gama
type(deltas) :: delta
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
As =2.0* A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, 0.0, As)
b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X, Y),
0.0,As*Tss )

```

```
Sudoeste_Refinamento = (Ae*temperaturas(X + 1, Y) + An*temperaturas(X, Y
- 1) + b_)/Ap_
```

```
END Function Sudoeste_Refinamento
```

```
!-----!
```

```
REAL Function Interior(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas,
X, Y, nParticoes)
```

```
REAL      :: lambda, lambda0, sp, sc
```

```
REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas
```

```
INTEGER    :: X, Y
```

```
type(gamas)  :: gama
```

```
type(deltas) :: delta
```

```
real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_
```

```
!*****
```

```
Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)
```

```
Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)
```

```
As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)
```

```
An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)
```

```
Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)
```

```
b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturas(X , Y), 0.0, 0.0)
```

```
Interior = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) +
As*temperaturas(X, Y + 1) + Ae*temperaturas(X + 1, Y) +b_)/Ap_
```

```
END Function Interior
```

REAL Function Interior_Refinamento(lambda, lambda0, deltaR, rp, gama, delta, sp, sc, temperaturas, temperaturasTemp,X, Y, nParticoes)

REAL :: lambda, lambda0, sp, sc

REAL, dimension(nParticoes, nParticoes) :: temperaturas,temperaturasTemp

INTEGER :: X, Y

type(gamas) :: gama

type(deltas) :: delta

real An, Ap_ , As, Ae, Aw, b_

!*****

Ae = A(rp + deltaR/2, gama%E, delta%Y, deltaR)

Aw = A(rp - deltaR/2, gama%W, delta%Y, deltaR)

As = A(rp, gama%S, deltaR, delta%Y)

An = A(rp, gama%N, deltaR, delta%Y)

Ap_ = Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)

b_ = B(lambda0, rp, delta, deltaR, gama, sc, temperaturasTemp(X , Y), 0.0, 0.0)

Interior_Refinamento = (Aw*temperaturas(X - 1, Y) + An*temperaturas(X, Y - 1) + As*temperaturas(X, Y + 1) + Ae*temperaturas(X + 1, Y) +b_)/Ap_

END Function Interior_Refinamento

End Module borders

Código N1 – Código numérico do Finite Cylinder First Kind - functions

```

Module functions
IMPLICIT NONE

type deltas
real :: Y
real :: T
end type deltas

type gamas
real :: E
real :: W
real :: S
real :: N
end type gamas

type points
real :: E
real :: S
real :: N
real :: W
real :: P
end type points

CONTAINS

!-----!

REAL FUNCTION Ap(lambda, delta, deltaR, rp, gama, sp, An, Ae, Aw, As)

IMPLICIT NONE

REAL :: lambda, sp, An, Ae, Aw, As, deltaR, rp
type(deltas) :: delta

```

```

type(gamas) :: gama
real parte1, parte2

parte1 = (lambda*rp * deltaR) * (delta%Y / delta%T)
parte2 = sp * rp * deltaR * delta%Y
Ap = parte1 + An + As + Ae + Aw - parte2
END FUNCTION Ap

!-----!

REAL FUNCTION A(r, gama, deltaA, deltaB)
IMPLICIT NONE
REAL :: r, gama, deltaA, deltaB
A = r * gama * (deltaA / deltaB)
END FUNCTION A

!-----!

REAL Function B(lambda, rp, delta, deltaR, gama, sC, temperaturaPontual, fronteira1,
fronteira2 )
IMPLICIT NONE
REAL :: lambda, rp, sC, fronteira1, fronteira2, temperaturaPontual, deltaR
type(deltas) :: delta
type(gamas) :: gama
real parte1, parte3
parte1 = lambda * rp * deltaR * (delta%Y / delta%T) * temperaturaPontual
parte3 = sC * rp * deltaR * delta%Y
B = parte1 + fronteira1 + fronteira2 + parte3
End FUNCTION B
End Module functions

```