

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

ANÁLISE FÍSICA DO VIOLINO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CÉSAR AUGUSTO SILVA DOS SANTOS

CUITÉ
2014

ANÁLISE FÍSICA DO VIOLINO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

ANÁLISE FÍSICA DO VIOLINO

Monografia realizada sob orientação do Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas, apresentada ao Curso de Licenciatura em Física do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, em complementação aos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física.

CÉSAR AUGUSTO SILVA DOS SANTOS



S237a Santos, César Augusto Silva dos.
Análise física do violino. / César Augusto Silva dos Santos. - Cuité: [s.n.], 2014.
96fl. : il. fig. color.

Orientador Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas.
Monografia do Curso de Licenciatura em Física.
Não disponível em CD.

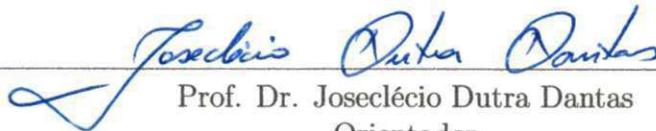
1. Física. 2. Violino - análise física. 3. Violino - história. 4. Ondas unidimensionais. 5. Ondas harmônicas. 6. Cordas vibrantes. 7. Som. 8. Figuras de Chladni. I. Dantas, Joseclécio Dutra. II. Universidade Federal de Campina Grande. III. Centro de Educação e Saúde. IV. Título

ANÁLISE FÍSICA DO VIOLINO

CÉSAR AUGUSTO SILVA DOS SANTOS

Aprovada em 03/04/2014

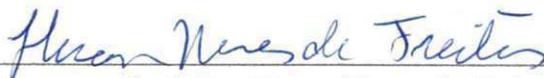
BANCA EXAMINADORA



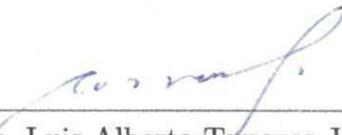
Prof. Dr. Joseclécio Dutra Dantas
Orientador



Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros
Examinador



Prof. Dr. Heron Neves de Freitas
Examinador



Prof. Dr. Luis Alberto Terrazos Javier (suplente)
Examinador

*À minha família
e amigos.*

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
BIBLIOTECA

*Se eu não fosse físico, acho que seria músico.
Eu penso em termos de músicas.
Vejo minha vida em termos de música.
(Albert Einstein)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e pela oportunidade de nascer numa família que me proporcionou crescer com dignidade. Com satisfação, manifesto minha gratidão aos meus queridos pais, *Augusto Galdino dos Santos* e *Maria Célia Pereira da Silva Santos* por quem fui ensinado a agir com honestidade e perseguir os meus objetivos. A minha noiva *Claudicely Sabino Lima* a quem também sou agradecido por seu companheirismo e paciência durante os últimos anos.

Grato também aos meus irmãos *Daniel da Silva Santos*, *Adalberto Pereira Galdino dos Santos* e *Raquel da Silva Santos*, e também a minha cunhada *Antônia Iraní Rocha dos Santos (Branca)*. Ao meu grande amigo *Adriano Ferreira Campelo* e sua esposa *Valdenilda da Silva Santos Campelo*.

Agradeço também aos meus amigos-irmãos *Acácio Silveira de Melo* e *Filipe Costa da Silva*, com os quais durante os últimos quase cinco anos estive lado a lado lutando e vencendo as nossas muitas dificuldades surgidas durante o curso. Ao professor, amigo e companheiro *Joseclécio Dutra Dantas*, pela orientação, dedicação e ensinamentos repassados. Ao amigo e companheiro *Samuel Andrade do Nascimento*.

Agradeço também à UFCG, nas pessoas dos meus professores, pela construção do pensamento e conhecimento ao qual me deram oportunidade, mas em particular aos professores *Fábio Ferreira de Medeiros* e *Pedro Chaves de Souza Segundo* pela dedicação destinada a seus alunos.

Resumo

No presente trabalho buscamos com a análise da física envolvida na construção e execução do violino, mostrar a ponte de ligação que há entre Física e Música. O violino, instrumento que tem origem italiana, surgem possivelmente no século XVI como a evolução de três outros instrumentos de cordas. Classificado como cordofone composto, possui uma caixa acústica como parte integrada ao seu corpo. Esta caixa é preferencialmente construída com madeira, devido obter-se uma melhor resposta acústica. Conhecer a estrutura de um instrumento musical é de fundamental importância na compreensão do seu processo de produção sonora. O violino por sua vez possui uma bela engenharia baseada em princípios físicos.

Dentre as propriedades do som, o timbre é a mais complexa no que diz respeito ao entendimento do seu conceito, isso devido a composição harmônica de cada nota emitida por um dado instrumento estar relacionada com as múltiplas ressonâncias durante o processo de produção sonora. Em busca de uma melhor compreensão do conceito de timbre, em particular o timbre do violino, foi feita uma análise do seu espectro sonoro quando o mesmo produzia suas quatro notas principais. Como ferramenta para realização dessa atividade foi utilizado o programa computacional Spectrogram 16.0, o qual fez a captação e análise do comportamento dos harmônicos em um intervalo de frequência previamente definido. Com o auxílio do Maple 12 (outro programa computacional) foi feita a representação e soma dos harmônicos analisados como funções de onda, obtendo-se assim uma aproximação matemática das formas de algumas das ondas produzidas pelo violino.

Baseando-se no que foi demonstrado pelo físico e músico alemão Ernst Chladni (1756–1824), foi feita análise dos modos normais de vibração de placas com geometria similar aos tampos do violino, mas de diferentes materiais. Com a formação das chamadas Figuras de Chladni, chegou-se a uma idealização do comportamento dos tampos de possíveis violinos de materiais diferentes.

Palavras-chave: Violino, Espectro sonoro, Figuras de Chladni.

Abstract

In this work, with the analysis of the physics involved in building and execution of the violin, we try to show the connecting bridge's which between Physics and Music. The violin, instrument of italian origin, it possibly arises in the sixteenth century as the evolution of three other string instruments. Classified as compound cordophone, it has a integrated soundboard as part your body; this soundboard is preferably constructed of wood, due to the fact of getting a better acoustic response. Know the structure of a musical instrument is of fundamental importance in understanding of the process of sound production. The violin has a beautiful engineering based on physical principles.

Among the sound properties, the timbre is more complex with respect to the understanding of its concept; this is due to harmonic composition of each note emitted by given instrument being related to multiple resonances during sound production. Searching for a better understanding of the concept of timbre, in particular timbre of the violin, an analysis of its acoustic spectrum was taken when it produced its four main notes. As a tool for conducting this activity the Spectrogram 16.0 software was used, which made the capture and analysis of the behavior of harmonics in a predetermined frequency range. With the aid of Maple 12 software was made representation and analyzed as the sum of harmonic wave functions, obtaining a mathematical approximation of the shapes of some waves produced by the violin.

Based on what was shown by the German physicist and musician Ernest Chladni (1756-1824), analysis of the normal modes of vibration of plates with similar geometry to the slabs

Conteúdo

Introdução	14
1 Breve Histórico	16
1.1 Um pouco da história do violino	16
1.2 Instrumentos da mesma família	22
2 Ondas	25
2.1 O que são ondas?	25
2.2 Ondas unidimensionais	27
2.2.1 Ondas harmônicas	27
2.2.2 Elementos de uma onda	28
2.2.3 Equação de uma onda unidimensional	29
2.3 A equação das cordas vibrantes	31
2.4 Interferência	34
2.4.1 Ondas que se propagam na mesma direção e mesmo sentido	34

CONTEÚDO

2.4.2	Ondas estacionárias em uma corda vibrante	37
2.5	Modos normais de uma corda	40
2.6	O som	44
2.6.1	Ondas sonoras	44
2.6.2	Velocidade de propagação de uma onda sonora	48
2.7	Propriedades do som	50
2.8	Intensidade sonora e a variação de pressão	52
2.9	A intensidade medida em decibéis	54
2.10	O fenômeno de ressonância	56
3	Instrumentos de corda: O Violino	58
3.1	Instrumentos de corda	59
3.1.1	Classificação dos instrumentos	59
3.1.2	Caixa de ressonância	59
3.1.3	A madeira	61
3.2	O Violino	63
3.2.1	Estrutura do instrumento	63
3.2.2	Propriedades acústicas	67
3.2.3	Movimento do Arco e das cordas	72

CONTEÚDO

3.2.4	Som final	74
3.2.5	O violino como ressonador de Helmholtz	75
4	Espectro sonoro e as Figuras de Chladni	79
4.1	Procedimento experimental e material	79
4.1.1	Análise do espectro sonoro	79
4.1.2	Análise das placas vibrantes	80
4.2	Resultados e discussão	81
4.2.1	Análise do espectro sonoro	81
4.2.2	A forma das ondas	87
4.2.3	Análise das placas vibrantes	89
	Considerações finais	92
	Bibliografia	93

Introdução

Os instrumentos musicais, desde os tempos mais remotos estão presentes nas civilizações. Inicialmente construídos de forma rudimentar foram aperfeiçoados com intuito de suprir as necessidades musicais que surgiram. Sabedores ou não, os mais antigos artesãos construíam e modificavam tais instrumentos cujas estruturas foram fundamentadas em princípios físicos. Compreender a estrutura e funcionamento de um instrumento musical é ver uma relação entre áreas que aparentemente são distintas, mas que estão intimamente relacionadas, Física e Música. Conceitos como som, timbre, intensidade e altura que são comumente usados na música, são explicados pela Física.

A análise física de instrumentos musicais é uma forma prazerosa de aprender e ensinar conceitos de física básica, como ondas e outros. O violino, objeto de estudo da nossa pesquisa, surgiu a cerca de meio milênio e aos poucos conquistou um lugar de prestígio entre os demais instrumentos, possuindo uma beleza estética e sonora apreciada por muitas pessoas. Em busca de conhecer os princípios de funcionamento deste instrumento, vários físicos o estudaram e também o tocaram.

Conhecer um pouco da história deste instrumento foi o ponto de partida do nosso trabalho, pois técnicas usadas pelos *luthiers* na construção de violinos no século XVII ainda não foram desvendadas. O Capítulo 1 deste trabalho trata-se de um breve histórico sobre violino, descrevendo sua suposta evolução e os seus principias construtores. Entender os conceitos e as propriedades das ondas é de fundamental importância para compreender o processo de

Introdução

produção sonora do instrumento. Pensando nisso, o Capítulo 2 aborda a física das ondas, apresentando os conceitos de uma maneira simples. Por ter cativado em alguns físicos o interesse em tocá-lo e estudá-lo algumas obras já fazem uma análise física deste instrumento. No Capítulo 3 são apresentados e discutidos os estudos e descobertas relacionados ao violino. Cativados também pela beleza sonora do instrumento, buscamos conhecer a sua composição harmônica e também o comportamento das suas placas vibrantes, o que é descrito no Capítulo 4.

Capítulo 1

Breve Histórico

Conhecer a origem e a evolução do violino é ponto de partida para melhor compreendermos tal instrumento. Neste sentido o presente capítulo é um breve resumo de alguns registros históricos do violino.

1.1 Um pouco da história do violino

Na história do violino existem algumas lacunas a serem preenchidas. Isso se deve ao fato de não haver um número considerável de informações a respeito da data exata e local de seu surgimento. No século XVI tinha-se muitas informações a respeito deste instrumento, porém, pouco ficou registrado, dificultando desta maneira uma descrição detalhada de sua origem [1]. O violino, nos seus primeiros anos de existência, gozava de um baixo prestígio perante a alta sociedade da época, sendo tocado por profissionais que ganhavam a vida com a música. Esse baixo prestígio acarretou uma escassez de registros sobre ele, dificultando dessa maneira o trabalho de historiadores em contar a sua história.

Não é possível determinar quem foi seu criador. Sabe-se, através de retratações em pinturas, como é o caso das pinturas de Gaudenzio Ferrari (c. 1480-1546), em igrejas perto de Milão (Figura 1.1) e *La Madonna degli aranci* (Figura 1.2), encontrada na igreja de São

Cristóvão em Verceli, que ele surgiu aproximadamente no começo do século XVI [1].



Figura 1.1: Detalhe do afresco *Concerto degli angeli* de Gaudenzio Ferrari, pintado em 1535.

Fonte: Referência [2].



Figura 1.2: Detalhe da pintura *La Madonna degli aranci*, de Gaudenzio Ferrari, pintada entre 1529-30. O instrumento retratado possui grandes semelhanças com o violino

Fonte: Referência [2].

Por essas famosas pinturas é possível observar a retratação deste instrumento de maneira muito similar ao que hoje conhecemos. E isso é o que nos faz acreditar que o artista retratou o instrumento já tendo conhecimento de sua existência antes de 1529-30. O fato de tais pinturas terem sido feitas próximas a Milão nos leva a acreditar que o violino tenha surgido no norte da Itália. É também na Itália onde surgem os grandes construtores de violinos. Grandes nomes como o de Andrea Amati (1505-1577), em Cremona, dando origem a dinastia Amati que

rendeu aos italianos certa fama como bons construtores de violinos. Deram continuidade aos trabalhos de Andrea Amati, seus filhos Antonio Amati (1550 - ?) e Girolamo Amati (1551-1635). Não há registros da existência de violinos em Cremona no período que antecedeu os Amati. Outro grande nome é o de Gasparo da Salò (1540-1609), em Brescia, que por muitos anos disputou o título de inventor do violino com Andrea Amati, mas descobertas de documentos em Cremona no século XX revelaram que os Amati décadas antes já construíam instrumentos.

Segundo o que é referenciado por Juarez Bergmann Filho:

"Os cidadãos de Brescia orgulhosamente honraram o mestre erguendo um monumento com a inscrição "CASPARO DA SALO INVENTORE DEL VIOLINO / 1542-1609."Muita tinta já foi desperdiçada em cima desta declaração de quem seria o inventor do violino -, com muita polêmica apoiando ou contestando tal reivindicação. A rivalidade entre Cremona e Brescia, as duas cidades mais importantes na história do violino, são as culpadas por muito destas discussões, assim como as ciumentas gerações seguintes. Um resultado positivo foi que grande parte da insurgente pesquisa trouxe à tona novos materiais. Certamente nenhuma pessoa, individualmente, possa ser considerada o inventor do violino, e o fato de que Andrea Amati era trinta ou quarenta anos mais velho que Gasparo, contrariaria a prioridade de Brescia. Isto de maneira nenhuma serve para diminuir sua genialidade, ou negar sua contribuição no desenvolvimento do violino em seu formato padrão... "

As técnicas e os minuciosos segredos desenvolvidos pelos *luthiers* sempre foram repassados para um número reduzido de pessoas, sendo na maioria das vezes transmitidos de pais para filhos. De início, os aprendizes começavam reproduzindo os modelos já desenvolvidos por seus mestres, aprendendo todas as particularidades do estilo. Após aprender, cada um começava sua busca particular por um estilo próprio, o qual carregava, na maioria das vezes, características que diferenciavam os seus instrumentos dos instrumentos dos seus mestres.

O auge da construção desse instrumento se deu com os *luthiers* Bartolomeo Giuseppe Guarneri (1698-1744), conhecido como "del Gesù" e Antonio Stradivari (1644-1737) [2], ambos

pertencentes a dinastia Amati e considerados os maiores fabricantes de instrumentos de cordas de todos os tempos. Com Stradivari o violino chegou a tal perfeição que, após ele, pouco se modificou no instrumento e os por ele construídos são verdadeiras obras de arte, de uma qualidade sonora suprema associada a uma grande beleza estética, e avaliados em verdadeiras fortunas.

Segundo o violinista inglês Nigel Kennedy –*sem um Stradivarius ninguém consegue iniciar uma carreira internacional de concertista, mas se não tiver essa carreira não consegue adquirir um Stradivarius!* [3].

As palavras desse músico nos ajudam a compreender a enorme qualidade dos instrumentos confeccionados por Antonio Stradivari. Cientistas e peritos em instrumentos tem sido tentados a desvendar os segredos dessa supremacia alcançada por esse *luthier*, sendo estudadas as propriedades físicas, químicas e anatômicas, a origem e o tratamento das madeiras usadas na construção desses instrumentos e também o verniz utilizado na pintura dos mesmos. Porém, o que tem dificultado as pesquisas é a falta de amostras desses materiais utilizados, havendo uma resistência natural por parte dos proprietários dessas preciosidades em cedê-las para estudos.

Já sabemos como o violino se desenvolveu durante os séculos que se seguiram após seu surgimento, mas como de fato foi a sua criação? Para explicar o surgimento de tal instrumento existem algumas teorias; a mais aceita por historiadores é a que não tenha havido uma criação propriamente dita e sim uma evolução a partir de outros instrumentos de cordas existentes no século XVI. O violino foi na verdade uma combinação de três outros instrumentos: a *rabeca*, a *lira da braccio* e o *fiddle* [2, 1]. Ele herdou de cada um deles características importantes, o que o transformou em um instrumento de um timbre muito apreciado.

As rabecas são instrumentos de cordas que datam de antes do século XIII. Nos modelos

mais antigos, elas possuíam o corpo em forma de uma pera partida ao meio e não tinham braço que, no caso do violino, é a parte que separa o corpo do instrumento da caixa de cravelhas. A rabeca da renascença, que possivelmente é uma ancestral do violino [Figura(1.3)], possui apenas três cordas afinadas em quintas¹: sol, ré e lá. Outra característica deste instrumento é a ausência de alma que é uma das peças fundamentais para o violino.

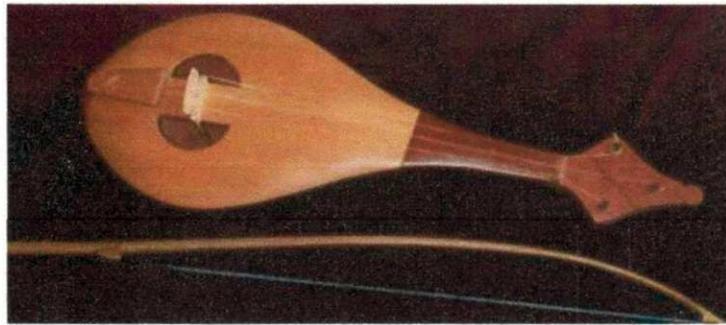


Figura 1.3: Rabeca.
Fonte: Referência [1].

Já os *fiddles* eram uma família de instrumentos de cordas geralmente tocados apoiados ao ombro e apenas alguns apoiados no queixo. Entretanto, o fiddle que é um dos três ancestrais diretos do violino é o fiddle da Renascença. Era um instrumento de cinco cordas, de corpo montado semelhantemente ao atual violino e possuía também uma alma. O que o diferencia do violino é o fato de suas cravelhas não serem colocadas dentro de uma caixa de cravelhas e, em geral, seu corpo possui formato de uma folha ou de um coração [Figura (1.4)].

A lira da braccio de 1500 possuía sete cordas, das quais duas estavam localizadas fora do espelho² [Figura (1.5)]. Suas cravelhas eram colocadas no mesmo plano do seu espelho, o qual não possuía trastes. Ela tinha aberturas no tampo superior em forma de *f* ou até mesmo *C* [1]. O seu formato se assemelha em muito ao do violino atual, tendo os tampos superiores e inferiores da caixa de ressonância conectados por faixas, e possuía também uma alma.

¹Uma quinta é um intervalo entre duas notas cujo quociente entre as respectivas frequências é igual a 3/2.

²Superfície colada sobre o braço, a qual evita o encontro das cordas com o corpo do instrumento.



Figura 1.4: *Fiddle* da renascença.
Fonte: Referência [1].



Figura 1.5: Lira da braccio.
Fonte: Referência [1].

O violino surge com a combinação de características importantes de cada um desses três instrumentos. Do *fiddle* ele herdou o braço encaixado no corpo do instrumento, facilitando dessa maneira o dedilhado; outra herança foi à alma que é peça fundamental para uma boa sonoridade. A afinação das cordas em intervalos de quintas encontrada na rabeça possibilitou uma técnica de dedilhado mais consistente; e por esta ter menos cordas, passou a ser um instrumento mais fácil de ser afinado. Já a lira da braccio deu ao violino o seu desenho típico, incluindo a parte superior, inferior e lateral. Inicialmente o violino pode ter tido apenas três cordas, sendo elas sol, ré e lá, herdadas da rabeça, e posteriormente é que foi adicionada uma quarta corda que é a mi [1, 2].

1.2 Instrumentos da mesma família

A família dos instrumentos de corda friccionados (família do violino) é composta por quatro instrumentos: o violino, a viola, o violoncelo e o contrabaixo. Já no fim do século XVI existia uma variedade de instrumentos de cordas denominados violas: Viola de Bracci, Viola Bastarda, Viola d'Amore, Viola de Gamba e outras mais. A viola que hoje conhecemos é um instrumento de quatro cordas afinadas em intervalos de quinta: dó, sol, ré e lá. Possui um timbre mais grave que o violino, pois a sua afinação é uma quinta abaixo. Ela é confundida constantemente com o violino por apresentar mesmo formato e estrutura e ser tocada na mesma posição; porém, é maior em tamanho. Somente com os luthiers da família Amati, Guarneri e Stradivari ela passou a ter forma semelhante a atual [3, 4].

O violoncelo, terceiro membro da família, também possui quatro cordas afinadas uma oitava³ a baixo em relação às cordas da viola; por isso possui um timbre mais grave. Diferentemente do violino e da viola é tocado apoiado ao chão e entre as pernas do executante. A primeira citação de que se tem conhecimento referente ao instrumento ocorreu em 1665 em sonatas italianas anônimas. O violoncelo surgiu através de um processo evolutivo da família das cordas, construído em vários tamanhos e afinado de diversas maneiras. Somente no ano de 1680 a sua forma atual foi estabelecida por Stradivari criando o que hoje conhecemos como padrão B [3, 4].

O contrabaixo acústico, ou rabecão como também é conhecido, embora seja considerado como o quarto membro da família, tem origem diferente dos demais, derivando-se das violas de gamba. Por não ter as mesmas origens que o seus irmãos ele possui proporções dissimilares em relação ao violino, viola e violoncelo. Possui quatro cordas afinadas em intervalos de quarta⁴: mi, lá, ré e sol, e em relação ao violoncelo, sua afinação também é uma quarta abaixo. O

³Uma oitava é um intervalo entre duas notas cujo quociente entre as respectivas frequências é igual a 2.

⁴Uma quarta é um intervalo entre duas notas cujo quociente entre as respectivas frequências é igual a 4/3.

rabecão é o maior e mais grave dos instrumentos que compõem a família do violino. Esses instrumentos são apresentados na Figura (1.6).



Figura 1.6: Os quatro instrumentos da família do violino, representados dimensionalmente. Da direita para a esquerda: Violino, Viola, Violoncelo e Contrabaixo.

Fonte: Referência [5].

No ano de 1957, a fabricante e pesquisadora de violinos Carleen Hutchins recebeu do compositor Henry Brant a sugestão de construir uma família de oito instrumentos de corda, os quais deveriam ter suas relações de tamanho estabelecidas por escala. Cada instrumento deveria ser afinado em meia oitava acima do seu correspondente mais grave. Foram então construídos oito instrumentos que eram desde um contrabaixo de dois metros de altura até um pequeno violino de 48 centímetros de comprimento, o qual era afinado meia oitava acima do violino normal. A construção destes instrumentos levou cerca de 10 anos, e para isso Carleen Hutchins precisou da ajuda de J. Schelleng, membro da Catgut Acoustical Society e do físico F. Saunders. Por este trabalho Carleen Hutchins recebeu um doutorado honorário e um prêmio da Acoustical Society of America [6].

Compreender a história da música e dos instrumentos musicais, é de fundamental importância para nos ajudar a entender a construção musical atual. Porém, nosso objetivo não foi relatar toda a história musical, e sim o necessário para que se torne possível compreender o surgimento e evolução do violino, que é objeto de pesquisa deste trabalho.

Capítulo 2

Ondas

As ondas, sejam elas mecânicas ou eletromagnéticas, estão presentes no dia-a-dia de cada um de nós. Desde utilização da voz até os meios de comunicação, contamos com suas aplicações. Há por isso uma necessidade em conhecer o que são e como se comportam. O presente capítulo é um breve resumo do conceito e de algumas propriedades das ondas.

2.1 O que são ondas?

Os fenômenos ondulatórios estão presentes no nosso dia-a-dia, a exemplo dos sons que ouvimos constantemente, das ondulações formadas em um recipiente com água e etc. De forma abrangente, uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida. Ao se propagar uma onda transporta energia sem que haja o transporte de matéria [7].

Observamos e produzimos vários tipos de ondas durante um único dia. Como diferenciá-las? As ondas são classificadas segundo a sua natureza em: **Eletromagnéticas** e **Mecânicas**. O que caracteriza uma onda eletromagnética é a não dependência de um meio material para que haja a sua propagação, pertencendo a essa classe a luz e as ondas de rádio, por exemplo. As ondas mecânicas por sua vez são caracterizadas pela necessidade de um meio material

para se propagarem, sendo exemplos dessa classe o som, as ondas do mar e várias outras que constantemente produzimos. Voltaremos nossa atenção a seguir à compreensão das ondas mecânicas.

Consideremos uma corda esticada com uma de suas extremidades fixa, e que na outra seja gerado um pulso que se propagará por toda a sua extensão. Essa propagação dá-se devido ao fato da oscilação inicialmente produzida ser transmitida a todas as seções seguintes da corda em tempos posteriores. Ao observar a onda produzida percebe-se que a oscilação provocada é perpendicular à direção de propagação, como é ilustrado na Figura (2.1). Ondas que apresentam tal característica são denominadas **transversais**.

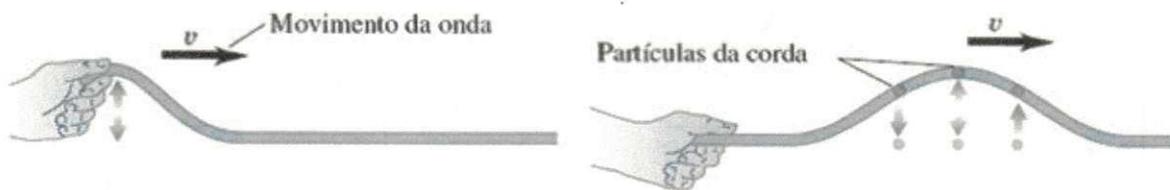


Figura 2.1: Onda em uma corda é exemplo de onda transversal.

Fonte: Referência [8].

As ondas também se propagam em meios líquidos e gasosos. Consideremos como exemplo um êmbolo (pistão) conectado a um tubo com ar, como é ilustrado na Figura (2.2). Sendo o êmbolo movimentado para a direita, gera um aumento de pressão no ar na região mais próxima a ele. Tal aumento de pressão leva à compressão das moléculas vizinhas de ar, ocasionando dessa forma a propagação de uma onda de *compressão* para a direita. Quando é movimentado para a esquerda gera uma diminuição na pressão no ar na região mais próxima a ele, ocasionando o deslocamento das moléculas de ar agora para a direita, havendo dessa maneira a propagação de uma onda de *rarefação*. Realizando seguidamente os dois movimentos, são geradas sucessivas regiões de compressão e rarefação. Cria-se então uma onda que oscilará em direção paralela à direção de propagação. Ondas que apresentam essa característica são denominadas **longitudinais**.

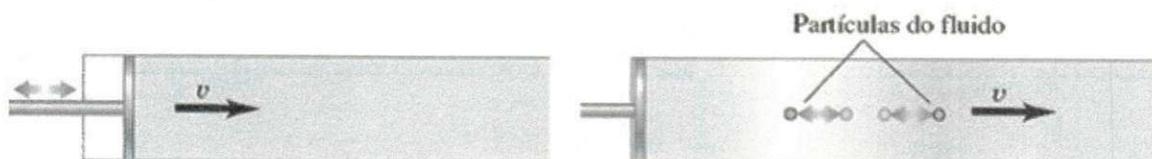


Figura 2.2: Onda em um tubo com ar é exemplo de onda longitudinal.

Fonte: Referência [8].

São ainda chamadas de ondas **progressivas** tanto as longitudinais quanto as transversais, quando se propagam de um ponto para outro. As duas ondas discutidas são classificadas como mecânicas, pois ambas necessitam de um meio material para se propagar.

2.2 Ondas unidimensionais

As ondas também são classificadas de acordo com as suas direções de propagação. Classificamos as ondas em uma corda, na superfície de um lago ou as ondas sonoras como sendo unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Dedicaremos-nos ao entendimento das ondas unidimensionais.

2.2.1 Ondas harmônicas

O perfil de uma onda em uma corda em um dado instante de tempo t é a sua forma neste instante [7], sendo representado matematicamente por uma função $y = h(x, t)$, a exemplo de uma onda do tipo descrita na (Figura 2.1), com a extremidade livre da corda em movimento harmônico simples (MHS) de amplitude A , frequência f , frequência angular $\omega = 2\pi f$, e período $T = 1/f = 2\pi/\omega$. A onda gerada por esse movimento possui perfil senoidal, e é denominada **harmônica** podendo ser representada por funções seno e cosseno. *Quando uma onda senoidal (harmônica) se propaga em um meio, cada partícula do meio executa um*

movimento harmônico simples com a mesma frequência [8].

Suponhamos uma onda harmônica sobre uma corda, cuja propagação é representada sobre o eixo x no sentido positivo. Com a propagação da onda, as sucessivas seções da corda oscilam paralelamente ao eixo y deslocando-se assim das suas posições de equilíbrio. O deslocamento y de uma seção x da corda é dado por:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t). \quad (2.1)$$

Consideremos agora uma outra onda que também se propague sobre o eixo x , porém no sentido negativo. O deslocamento y de uma seção x da corda será dado por:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t). \quad (2.2)$$

Podemos representar uma onda harmônica em uma corda ou em outro meio qualquer como:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi). \quad (2.3)$$

A Equação (2.3) é chamada **função de onda**. Por ela torna-se possível saber a forma da onda e como esta varia em qualquer instante de tempo t durante a sua propagação. A grandeza $(kx \pm \omega t + \phi)$ é chamada de **fase**, onde o ângulo ϕ é a constante de fase. A fase desempenha um papel fundamental na função de onda, determinando para qualquer x e qualquer t a parte do ciclo senoidal realizado pela onda nas posições e tempos escolhidos.

2.2.2 Elementos de uma onda

A amplitude A é o deslocamento máximo da corda em relação à posição de equilíbrio, sendo sempre uma grandeza positiva. Como já sabemos, uma onda senoidal possui um perfil

bem definido e que se repete ao longo de toda sua propagação, intercalando regiões de máxima amplitude positiva chamadas de **cristas** e regiões de máxima amplitude negativa que são os **vales**. A distância entre cada repetição do perfil da onda chama-se **comprimento de onda** do movimento ondulatório, representado por λ (lambda). O tempo necessário para que a onda percorra um comprimento de onda é um **período** (T). Já sabemos que uma onda possui velocidade definida; desta forma chega-se a:

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Utilizando $f = 1/T$, obtemos:

$$v = \lambda f. \tag{2.4}$$

O produto entre a frequência de uma onda e o seu comprimento, fornece a sua velocidade de propagação. As características físicas do meio determinam a velocidade com que uma onda se propagará no mesmo. Por essa velocidade ser constante, as grandezas λ e f devem ser inversamente proporcionais, ou seja, o aumento da frequência significa a diminuição do comprimento de onda ou vice-versa. Há também o **número de onda** representado pela constante k presente na Equação (2.3), $k = 2\pi/\lambda$.

2.2.3 Equação de uma onda unidimensional

A partir das derivadas da função de onda harmônica, pode-se associar uma equação ao seu movimento de propagação. Como a função de onda é função de duas variáveis, teremos derivadas parciais. Inicialmente vamos derivar a Equação (2.1) em relação a t , fixando então x ;

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A \sin(kx - \omega t)] = -\omega A \cos(kx - \omega t).$$

Esta derivada representa a velocidade vetorial de um elemento oscilante durante a propagação da onda. Tomando a derivada segunda de y em relação ao tempo, e novamente fixando x , obtemos a aceleração desse elemento:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}[-\omega A \cos(kx - \omega t)] = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t). \quad (2.5)$$

Mas $v = \omega/k$, de onde obtemos $\omega^2 = v^2 k^2$. Então a Equação (2.5) fica:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2 k^2 y(x, t). \quad (2.6)$$

Derivando agora y em relação x e fixando t :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A \sin(kx - \omega t)] = k A \cos(kx - \omega t).$$

Tomando a derivada segunda de y em relação x , novamente com t fixo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[k A \cos(kx - \omega t)] = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x, t). \quad (2.7)$$

Comparando as Equações (2.6) e (2.7), obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) é denominada **equação de onda**, e é de grande importância para Física. É uma Equação Diferencial Parcial homogênea de segunda ordem. Ela possui duas variáveis, uma espacial (x) e uma temporal ($t > 0$) e v é a velocidade de propagação da onda (constante positiva). Como nesta dedução partimos da função de onda harmônica, pode-se concluir que ela é uma de suas soluções.

2.3 A equação das cordas vibrantes

Cordas distendidas como as que são encontradas em instrumentos musicais (como violino, violão, guitarra,...), quando tocadas possuem vibrações transversais, e é a partir daí que iniciaremos a nossa análise. Consideremos um elemento uniforme de uma corda distendida. Quando está na sua posição de equilíbrio, a corda é mantida tensa sobre o eixo x . Ao deslocar a corda da sua posição de equilíbrio [Figura (2.3)] observamos o comportamento das forças sobre o seguimento Δs . As tensões \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 , são exercidas sobre os seus elementos vizinhos. A porção da corda à esquerda de Δs exerce sobre a porção da direita a tensão \mathbf{T}_1 . Esta é equilibrada por \mathbf{T}_2 exercida pela porção da direita sobre a da esquerda. A tensão \mathbf{T} é, constante sobre toda a corda, ou seja, $|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| = |\mathbf{T}| = T$, como consequência da uniformidade assumida em toda a corda. A resultante da tensão é nula sobre a corda quando em sua posição de equilíbrio. Porém, quando deslocada, surge uma componente na direção y . Essa componente é responsável pela restauração da corda à sua posição de equilíbrio.

Consideremos a tensão sobre a corda suficientemente grande para tornar o peso de Δs desprezível. Dessa maneira a resultante das forças que atuam sobre Δs é:

$$\sum F_x = 0 \quad (2.9)$$

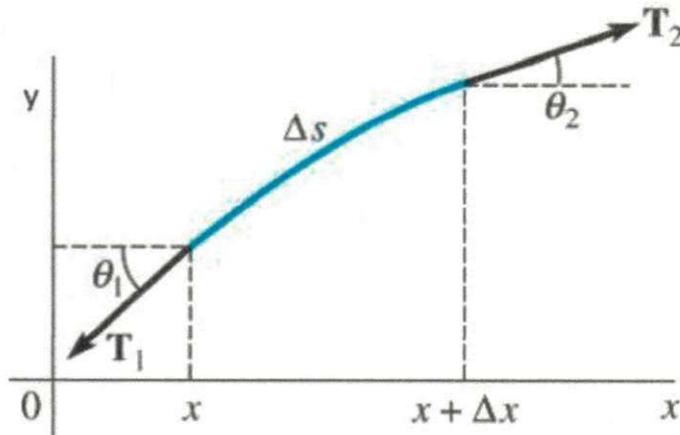


Figura 2.3: Diagrama ilustrativo do seguimento Δs de uma corda distendida. As direções das tensões \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 sobre o elemento da corda são representadas acima.

Fonte: Adaptado da referência [26].

$$\begin{aligned} \sum F_y = T_{y1} + T_{y2} &= -T \text{sen}\theta_1 + T \text{sen}\theta_2 = T(\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) \\ \sum F_y &= T(\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se observarmos, quando $\theta_1 = \theta_2$ a corda está em sua posição de equilíbrio e $\sum \mathbf{F} = 0$. Quando $\theta_1 \neq \theta_2$ a corda está fora da sua posição de equilíbrio e a resultante das forças sobre Δs é diferente de zero.

Consideremos um pequeno deslocamento da corda em relação a sua posição de equilíbrio, ou seja, $\theta_1 \ll 1$ e $\theta_2 \ll 1$ de onde podemos fazer as seguintes aproximações: $\text{sen}\theta_1 \approx \text{tg}\theta_1$ e $\text{sen}\theta_2 \approx \text{tg}\theta_2$. A tangente do ângulo formado entre a corda e o eixo x , tomando um ponto da corda como referência, representa a inclinação da corda naquele ponto. Da definição geométrica de derivada, sabe-se que: *a derivada é o coeficiente angular da reta tangente a um determinado ponto de uma curva* [9, 10]. A tangente representa a inclinação da curva em um determinado ponto; dessa maneira concluímos que:

$$\text{tg}\theta = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Mas, por aproximação

$$\text{sen}\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

a força resultante em y é, portanto,

$$\sum F_y = T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_1 \right] \quad (2.11)$$

O termo entre os colchetes representa a variação do coeficiente angular das tangentes aos pontos x e $x + \Delta x$. Se o elemento Δs é muito pequeno, ou seja, x se aproxima de $x + \Delta x$, então

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} \Delta x.$$

No limite em que $\Delta x \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \Delta x \quad (2.12)$$

Conforme Δs diminui de tamanho, ou seja, torna-se um seguimento mais pontual, esta aproximação torna-se mais exata. Substituindo a Equação (2.12) na (2.11), obtemos:

$$\sum F_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x. \quad (2.13)$$

Suponhamos que a corda possua comprimento L , massa M e densidade linear μ . O seguimento Δs , que possui comprimento Δx , deve ter massa $m = \mu \Delta x$. Aplicando a segunda lei de Newton para a componente y , temos

$$\sum F_y = m a_y \quad (2.14)$$

onde a_y é a aceleração vertical sofrida por Δs , $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Igualando as Equações (2.13) e (2.14), chegamos a

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Dividindo ambos os lados da equação por Δx e reorganizando os termos, obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.15)$$

que é a equação de onda para cordas vibrantes, onde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.16)$$

é a velocidade de propagação da onda na corda.

2.4 Interferência

O fenômeno de interferência é tipicamente ondulatório, o que significa dizer que uma grandeza física capaz de sofrer, ou produzir interferência, necessariamente comporta-se como uma onda. A interferência é então um comportamento importante das ondas. Duas ondas que se propagam em uma mesma região do espaço podem se superpor dando origem a uma nova onda.

2.4.1 Ondas que se propagam na mesma direção e mesmo sentido

Consideremos duas ondas que se propagam na mesma direção e mesmo sentido, com mesma amplitude A , mesmo comprimento λ e mesma frequência angular ω , mas com constantes de fase diferentes. As respectivas funções de onda são

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi_1)$$

e

$$y_2 = A \text{sen}(kx - \omega t + \phi_2).$$

A onda resultante será a soma das ondas que se superpõem:

$$y = y_2 + y_1 = A \text{sen}(kx - \omega t + \phi_1) + A \text{sen}(kx - \omega t + \phi_2)$$

$$y = A[\text{sen}(kx - \omega t + \phi_1) + \text{sen}(kx - \omega t + \phi_2)].$$

Aplicando a identidade matemática

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.17)$$

e fazendo $\alpha = kx - \omega t + \phi_2$ e $\beta = kx - \omega t + \phi_1$, chegamos a

$$y = 2A \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\text{sen}\left[kx - \omega t + \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right)\right] \quad (2.18)$$

A Equação (2.18) representa a onda resultante, a qual tem mesmo k , mesmo ω e que se propaga na mesma direção de y_1 e y_2 , mas que tem uma nova amplitude: $B = 2A \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$.

Temos então:

$$y = B \text{sen}\left[kx - \omega t + \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right)\right] \quad (2.19)$$

A diferença de fase entre ondas que interferem é um fator importante no comportamento da onda resultante. Seja

$$\Delta\phi = (kx - \omega t + \phi_2) - (kx - \omega t + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1$$

a diferença de fase entre y_1 e y_2 .

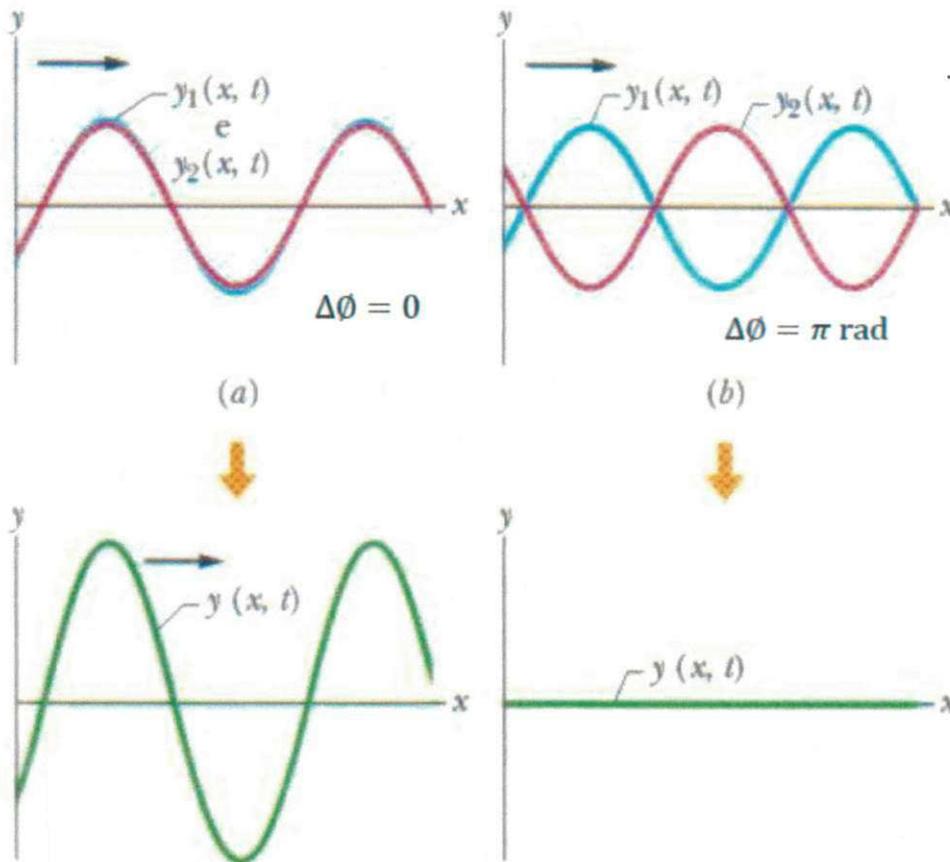


Figura 2.4: Diagrama ilustrativo da interferência construtiva (superposição crista crista, vale vale) (a) e interferência destrutiva (superposição crista vale, vale crista) (b).

Fonte: Adaptado da referência [27].

Consideremos agora o caso em que a diferença de fase entre y_1 e y_2 é igual a zero, ou seja, $\phi_1 = \phi_2$. Nesse caso, como $\Delta\phi = 0$, $\cos(\frac{\Delta\phi}{2}) = \cos 0 = 1$, e a amplitude resultante é $B = 2A \cos 0 = 2A$. Chama-se esse tipo de interferência de **interferência construtiva**. Na interferência construtiva entre y_1 e y_2 , a nova onda gerada tem como amplitude o dobro do que teria cada onda individualmente. Nesse tipo de interferência as ondas se superpõem crista com crista e vale com vale, como é ilustrado na Figura (2.4a).

Consideremos agora o caso em que a diferença de fase entre as ondas y_1 e y_2 é 180 graus, ou π rad. Nesse caso, $\cos(\frac{\Delta\phi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; então a amplitude resultante é $B = 2A \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Chama-se esse tipo de interferência de **interferência destrutiva**. Nesse tipo de interferência

as ondas se superpõem cristas com vales, como é ilustrado na Figura (2.4b). Com a diferença de fase igual a zero a onda resultante possui amplitude máxima ($2A$) e quando a diferença de fase é 180 graus ela possui amplitude mínima, igual a 0. Para outros valores da diferença de fase a amplitude resultante ficará entre 0 e $2A$.

2.4.2 Ondas estacionárias em uma corda vibrante

Suponhamos uma determinada corda orientada sobre o eixo O_x com uma de suas extremidades fixa e a outra em movimento harmônico simples (MHS). É produzida então uma onda harmônica que se propagará sobre a corda, sendo refletida ao chegar à extremidade fixa. Nessa configuração temos uma onda incidente que se propaga da esquerda para a direita (sentido $+x$) e outra onda refletida que se propaga da direita para a esquerda (sentido $-x$). Quando a onda incidente encontra com a refletida sobre a corda, ocorre o fenômeno de interferência. A interferência entre essas ondas gera uma nova onda denominada de **estacionária**.

Nas ondas estacionárias, como o próprio nome já diz, não há deslocamento e a forma da onda permanece a mesma, variando apenas a amplitude. A Figura (2.5) mostra ondas formadas em uma corda que tem a extremidade esquerda presa e extremidade direita oscilando para cima e para baixo com MHS. Nessa figura observamos que a corda parece estar subdividida em diversos segmentos.

Para representar matematicamente a forma de uma onda estacionária, vamos considerar duas ondas que se propagam em sentidos opostos e que possuem constantes de fase iguais a zero:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.20)$$

e

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t) \quad (2.21)$$

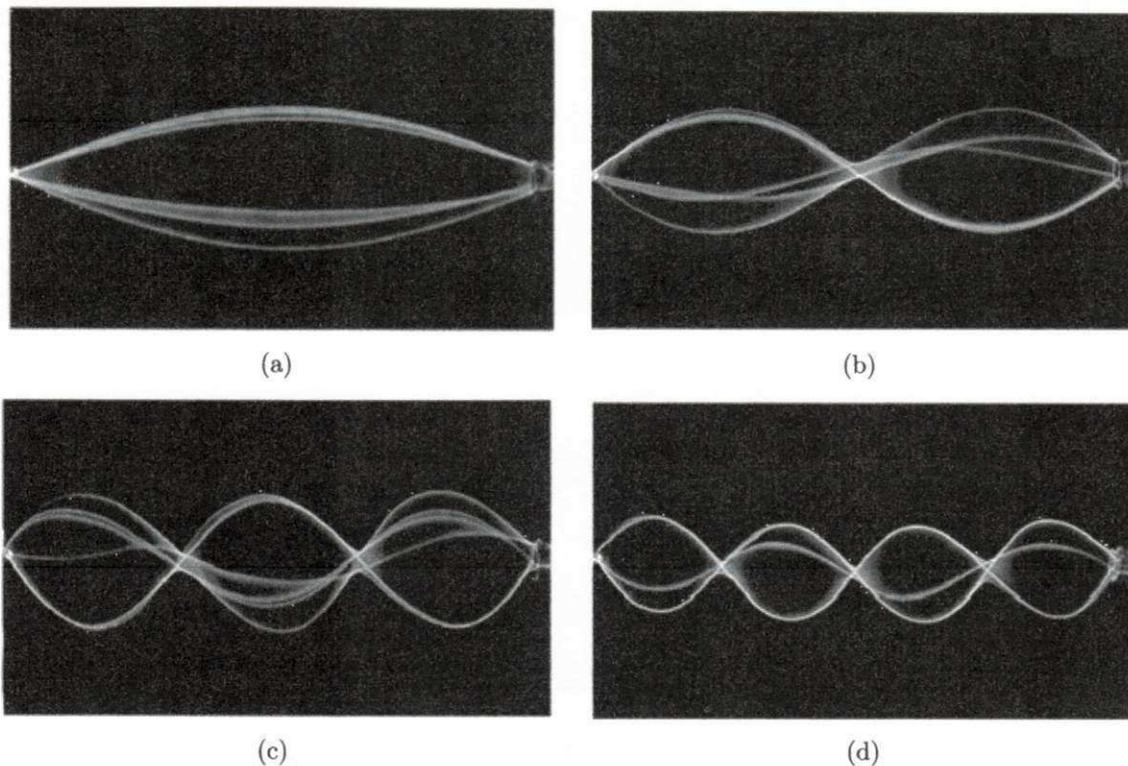


Figura 2.5: (a) A corda tem meio comprimento de onda. (b) A corda tem um comprimento de onda. (c) A corda tem um comprimento de onda e meio. (d) A corda tem dois comprimentos de onda.

Fonte: Referência [8].

A onda y_1 se propaga no sentido $+x$ do eixo O_x , enquanto que y_2 se propaga no sentido $-x$. A onda resultante y , será novamente a superposição entre y_1 e y_2 , ou seja,

$$y = y_1 + y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + A \operatorname{sen}(kx + \omega t). \quad (2.22)$$

Usando a Equação (2.17), temos

$$y = 2A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t). \quad (2.23)$$

A Equação (2.23) é a representação matemática (função de onda) da onda estacionária. Por ser um produto de uma função de x por uma função de t , não há propagação. Em uma onda estacionária os elementos da corda se movem, porém não há o deslocamento do padrão da

onda. Considerando a função de onda como $y = [2A\text{sen}(kx)] \cos(\omega t)$, podemos representar a amplitude da onda estacionária como sendo $B_{est} = 2A\text{sen}(kx)$. As posições onde a amplitude resultante é máxima positiva ou máxima negativa são denominados **ventres** ou **antinós**.

As posições de amplitude máxima são dadas pela condição de que $|\text{sen}(kx)| = 1$, ou seja

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Como $k = 2\pi/\lambda$, as posições de antinós são dadas por

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

De maneira geral, podemos representar essas posições como

$$x_n = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.24)$$

Cada ventre possui meio comprimento de onda e é indicado pela letra V, como está ilustrado na Figura (2.6).

As posições em que a amplitude resultante é igual a zero são denominadas de **nós**. Nestes pontos não há vibração alguma, ou seja, os elementos localizados nessas posições não possuem movimento. Nessas posições temos $B_{est} = 0$, $\text{sen}(kx) = 0$, ou seja,

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Novamente, como $k = 2\pi/\lambda$, as posições dos nós são dadas por

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \dots$$

De maneira geral, podemos representar essas posições como

$$x_n = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Os nós são estabelecidos a cada meio comprimento de onda e são representados pela letra N , como é ilustrado na Figura (2.6).

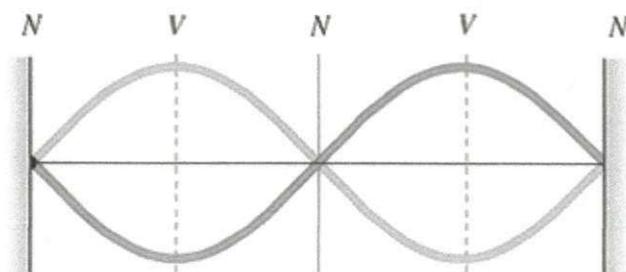


Figura 2.6: Representação dos nós N e dos ventre V em uma onda estacionária.

Fonte: Referência [8].

Uma característica importante das ondas estacionárias é que, ao contrário das ondas progressivas, elas não transmitem energia de uma extremidade da corda para a outra [8].

2.5 Modos normais de uma corda

As ondas estacionárias estão diretamente relacionadas com os instrumentos musicais de corda. Na grande maioria desses instrumentos as cordas possuem comprimento fixo L e suas extremidades também são fixas. Quando é puxada a corda de um desses instrumentos, é produzida uma onda que se propaga e reflete sucessivamente em ambas as extremidades dessa corda. As ondas refletidas produzem uma onda estacionária que dá origem a uma onda sonora que se propaga no ar com frequência determinada pelas propriedades da corda.

Por ter as duas extremidades fixas, a onda estacionária nela produzida possui nós em ambas as extremidades. Como já sabemos, a distância entre dois nós consecutivos é de meio

comprimento de onda $(\frac{\lambda}{2})$. Daí concluímos que o comprimento da corda deverá ser igual a: $(\frac{\lambda}{2}), (\frac{2\lambda}{2}), (\frac{3\lambda}{2})$; de maneira geral:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Os comprimentos de onda possíveis para tal corda são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

Só existirão ondas estacionárias em uma corda de extremidades fixas se seu comprimento de onda estiver de acordo com a Equação (2.27). É possível que existam ondas que não obedecem a essa equação, porém a interferência entre elas não produzirá ondas estacionárias. A Figura (2.7) ilustra ondas estacionárias que estão de acordo com a Equação (2.27) para valores de n iguais a 1,2,3,4 e 5.

Como já sabemos, essas ondas estacionárias devem possuir comprimentos de onda específicos (λ_n), ou seja, possuem frequências específicas (f_n). É somente para essas frequências que o fenômeno de interferência resultará em ondas estacionárias com nós e grandes antinós. Usando $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ podemos explicitar essas frequências; então obtemos

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) representa um conjunto de frequências possíveis para a formação dessas ondas. Denomina-se esse conjunto de **série harmônica**, e os seus elementos de **harmônicos**.

Para o caso em que $n = 1$ temos

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

Esse valor é chamado de **frequência fundamental** ou **primeiro harmônico**. Todos os outros elementos desta série são múltiplos inteiros da frequência fundamental.

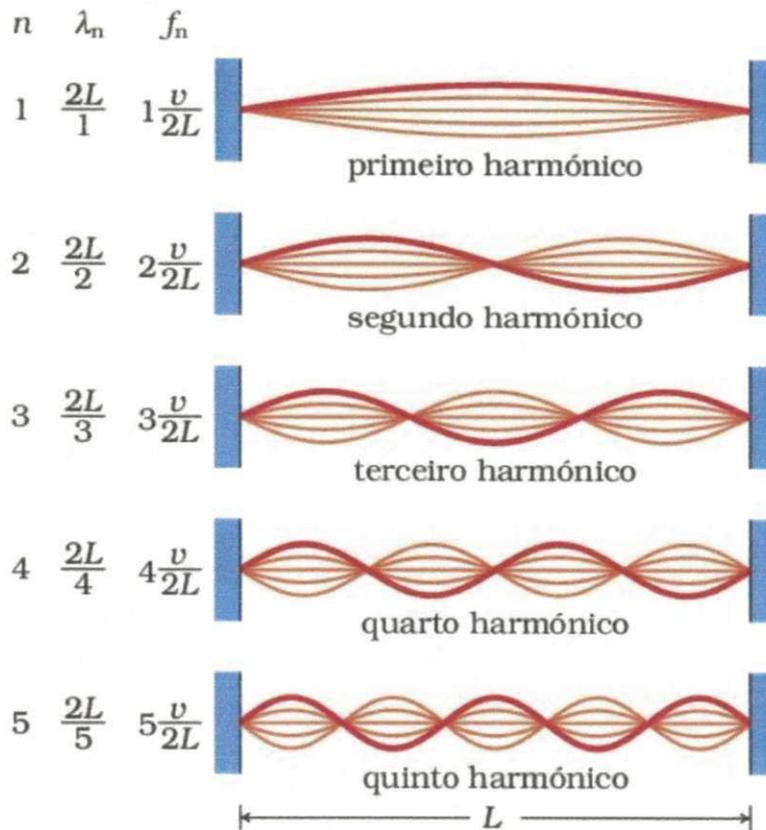


Figura 2.7: Ilustração dos cinco primeiros harmônicos (harmônico) de uma corda de comprimento L . As frequência de oscilação e o comprimento de onda para cada harmônico também são apresentados.

Fonte: Referência [25].

Considerando uma corda com extremidades fixas em $x = 0$ e $x = L$, podemos expressar a função de onda $y(x, t)$ para a onda estacionária de ordem n . Como $\omega = \omega_n = 2\pi f_n$ e $k = k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$:

$$y_n(x, t) = 2A \text{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t) \tag{2.29}$$

Quando todas as partículas de um sistema oscilante realizam movimentos senoidais com

mesma frequência, dizemos que temos um **modo normal**. Considerando que esse sistema seja uma corda de comprimento L com extremidades fixas, cada comprimento de onda dado pela Equação (2.27) é um modo normal possível que está associado a uma dada frequência. Há então infinitos modos normais, possuindo cada um deles uma configuração de vibração e uma frequência característica.

As ondas que se formam em um instrumento de cordas são um pouco mais complexas do que as que abordamos até agora. Quando é puxada a corda de um instrumento, a sua forma não é tão simples como as indicadas na Figura (2.7). O que obtemos é uma vibração onde a frequência fundamental é acompanhada de outros harmônicos sendo então a combinação de muitos modos de vibração. O som produzido por essa corda é, portanto, uma superposição de ondas sonoras harmônicas progressivas, chegando ao nosso ouvido com um tom complexo e com a frequência fundamental f_1 . A soma das funções de onda que compõem essa onda complexa é chamada de *série de Fourier*. Nomeada em homenagem a Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), a série de Fourier nos permite representar ondas periódicas complexas como a soma de ondas harmônicas (senoidais) [11].

Como foi visto anteriormente, a velocidade de propagação de uma onda em uma corda vibrante é dada pela Equação (2.16), $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. A frequência fundamental de uma corda é portanto

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.30)$$

As ondas sonoras produzidas por uma corda vibrante possuem frequência fundamental que depende das características físicas da corda. Em 1636 Marin Mersenne (1588–1648) descobriu algumas leis que são expressas na Equação (2.30) e que regem o comportamento dessas cordas. A frequência fundamental é: (i) *inversamente proporcional ao comprimento L da corda*; (ii)

proporcional à raiz quadrada da tensão; (iii) inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade linear da corda [7]. Tais resultados possuem aplicações importantes na construção dos instrumentos musicais de corda.

2.6 O som

Continuamente ouvimos sons, sejam eles produzidos por máquinas, animais ou a nossa própria voz. Mas como são produzidos os sons? Ao observarmos um corpo qualquer que esteja produzindo som é possível constatar que ele vibra. Uma fonte sonora portanto possui a capacidade de vibrar, modificando assim a pressão do ar que está a sua volta. A produção sonora está relacionada, portanto, com a velocidade com que essa pressão é modificada. O som que é produzido em uma fonte sonora tem um caminho a percorrer até chegar aos nossos ouvidos. O meio material entre os nossos ouvidos e essa fonte é de fundamental importância para que haja a propagação sonora, não havendo propagação na sua ausência (no vácuo). São as características desse meio material que determinam a velocidade de propagação do som.

O som que ouvimos chega aos nossos ouvidos como vibrações, em forma de compressões e rarefações provocadas pela variação da pressão em volta da fonte sonora. O som é uma onda cuja propagação depende do meio material, caracterizando-a assim como *onda mecânica*. O som não possui uma direção privilegiada e propaga-se em todas as direções; é então uma **onda tridimensional**.

2.6.1 Ondas sonoras

Na sua forma mais simples, as ondas sonoras são senoidais, com amplitude, frequência e comprimento de onda definidos. Como sabemos, uma onda sonora é tridimensional, mas vamos analisar aqui um caso ideal que seria ela se propagando em apenas uma direção. Vamos

UFPA BIBLIOTECA

considerar o caso descrito na seção 2.1: seja um pistão (êmbolo) em uma das extremidades de um tubo com ar movendo para frente e para trás. Este pistão move-se em movimento harmônico simples, como $\cos(\omega t)$. De acordo com o que já descrevemos, esse movimento gera uma onda longitudinal, com sucessivas compressões e rarefações do ar. Essa onda é descrita por

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t). \quad (2.31)$$

Por se tratar de uma onda longitudinal, a direção de propagação e a direção de vibração são iguais, ou seja, as distâncias x e y são paralelas. A constante A representa o deslocamento máximo de uma partícula de ar em relação a sua posição de equilíbrio após uma compressão ou rarefação e é chamada de **amplitude de deslocamento**.

Consideremos uma onda sonora em um fluido qualquer (o ar, por exemplo). Associada à produção e propagação dessa onda há uma variação de pressão, de modo que, $p(x, t)$ é a pressão do fluido na posição x e no instante de tempo t . Antes da existência de uma onda, temos uma pressão de equilíbrio no fluido, a qual chamaremos de p_e . A variação da pressão devido à onda é, portanto, $\Delta p = p(x, t) - p_e$. Se a onda for harmônica, a variação de pressão será senoidal:

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{\text{máx}} \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.32)$$

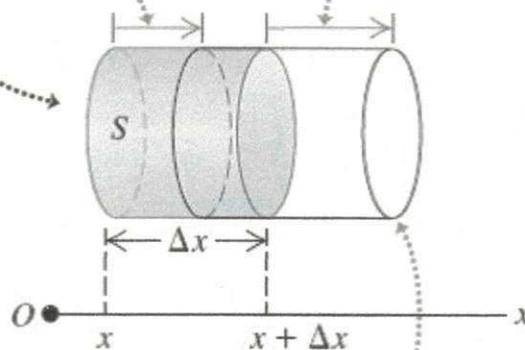
A constante $\Delta p_{\text{máx}}$ é o valor máximo da pressão para uma compressão, a qual é superior a pressão de equilíbrio. No caso de uma rarefação há uma diminuição da pressão em relação ao seu valor de equilíbrio, ou seja, $\Delta p = -\Delta p_{\text{máx}}$, o que indica que $p(x, t)$ é inferior a p_e .

Podemos então representar uma onda sonora de duas maneiras, em função do *deslocamento* $y(x, t)$ ou em função da *variação de pressão* $\Delta p(x, t)$. Vamos estabelecer agora uma relação

entre essas duas representações. Consideremos um cilindro de seção reta S em um meio onde se propaga uma onda sonora e tenha centro na direção O_x que é a direção de propagação. Quando o meio está em equilíbrio, o comprimento do cilindro é Δx e seu volume, $V = S\Delta x$. Na presença de uma onda sonora a extremidade x sofre um deslocamento $y_1 = y(x, t)$ e a extremidade $x + \Delta x$ sofre um deslocamento $y_2 = y(x + \Delta x, t)$ como mostrado na Figura (2.8).

O cilindro de fluido sem perturbações possui área da seção reta S , comprimento Δx e volume $S\Delta x$.

Uma onda sonora desloca a extremidade esquerda do cilindro em $y_1 = y(x, t)$...
 ... e a direita em $y_2 = y(x + \Delta x, t)$.



A variação no volume do cilindro de fluido sem perturbações é $S(y_2 - y_1)$.

Figura 2.8: As extremidades x e $x + \Delta x$ sofrem deslocamento durante a propagação de uma onda na direção O_x .

Fonte: Referência [8].

No caso em que $y_2 > y_1$, o volume do cilindro aumenta, acarretando uma diminuição na pressão. Se $y_2 < y_1$, o volume do cilindro diminui e a pressão aumenta. No caso em que $y_2 = y_1$, ou seja, as duas extremidades x e $x + \Delta x$ deslocam-se igualmente, não há variação de volume; conseqüentemente a pressão também não varia. Fica claro então que a variação de pressão depende da diferença entre os deslocamentos de pontos vizinhos do meio. A variação do volume do cilindro é expressa como

$$\Delta V = S(y_2 - y_1) = S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)].$$

Essa variação do volume relaciona-se com a variação de pressão por meio do módulo de compressão:

$$B = -V \frac{dp}{dV} \approx \frac{-\Delta p(x, t)}{(\Delta V/V)}.$$

Este relaciona a variação fracional no volume com a variação da pressão aplicada [11, 12, 13].

Logo,

$$\Delta p(x, t) = -B \frac{\Delta V}{V} \tag{2.33}$$

$$\Delta p(x, t) = -B \frac{S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]}{S\Delta x}$$

No limite em que $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta p(x, t) = -B \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x},$$

$$\Delta p(x, t) = -B \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}. \tag{2.34}$$

Quando $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ é positivo, o deslocamento de $x + \Delta x$ é maior que o de x , ou seja, ao aumentar o volume a pressão diminui. Partido da Equação (2.31), obtemos

$$\Delta p(x, t) = BkA \sin(kx - \omega t) \quad (2.35)$$

A variação máxima da pressão é, portanto,

$$\Delta p_{\text{máx}} = BkA, \quad (2.36)$$

que é chamada de **amplitude da pressão**.

2.6.2 Velocidade de propagação de uma onda sonora

A velocidade de propagação de uma onda sonora em um fluido se assemelha à velocidade de uma onda em uma corda. Como vimos, em uma corda vibrante, $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, onde v depende do módulo da tensão T exercida sobre a corda e da massa. Para um fluido o fator que corresponderá à tensão T sobre a corda é o módulo volumétrico B . Em uma onda sonora as compressões e rarefações ocorrem tão rapidamente que o fluxo de calor entre elementos do fluido vizinhos torna-se desprezível a ponto de ser considerado um processo adiabático. Desse modo, usaremos o módulo volumétrico adiabático $B_s = -V(dp/dV)$, onde V é o volume original e dV é uma pequena variação no volume que acompanha uma pequena variação na pressão dp . Em resumo, esse módulo volumétrico está relacionado com a resposta do fluido a uma variação de pressão. A velocidade de uma onda sonora em um fluido é dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_s}{\rho}}. \quad (2.37)$$

Vamos agora determinar o módulo volumétrico para os gases em geral, inclusive o ar. Para isso vamos considerá-los como gases ideais¹. Durante um processo adiabático sofrido por um gás ideal, há variações de pressão e volume de modo que

¹Considera-se *gás ideal*, o gás em regime de baixas densidades [7, 12].

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (2.38)$$

onde $\gamma = c_p/c_v$ é a razão dos calores específicos [7, 8, 12].

Vamos derivar a Equação (2.38) em relação ao volume:

$$\frac{d}{dV}pV^\gamma = p\gamma V^{\gamma-1} + V^\gamma \frac{dp}{dV} = 0. \quad (2.39)$$

Reagrupando os termos, obtemos

$$p\gamma V^{\gamma-1} = -V^\gamma \frac{dp}{dV}. \quad (2.40)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $V^{\gamma-1}$,

$$p\gamma = -V \frac{dp}{dV}. \quad (2.41)$$

Logo, podemos notar que o módulo volumétrico adiabático para um gás ideal é dado por

$$B_s = \gamma p. \quad (2.42)$$

A densidade de um gás ideal é dada em função do volume V , do número n de moles que ocupa esse volume e da massa molar M , $\rho = m/V = nM/V$. Substituindo esses novos valores na Equação (2.37), temos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{nM/V}},$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p V}{nM}},$$

onde $pV = nRT$ [7]. Deste modo, a velocidade de propagação do som em um gás é

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (2.43)$$

dependendo apenas da temperatura absoluta T , pois R (constante universal dos gases) e M são constantes.

As ondas sonoras também se propagam nos sólidos. Quando uma onda desse tipo se propaga em uma barra *sólida*, além das compressões na direção de propagação também há uma deformação lateral (na direção perpendicular a de propagação) da barra, o que não ocorre no caso dos fluidos. Partindo do mesmo princípio usado na dedução da Equação (2.37), concluímos que a velocidade de propagação de uma onda sonora em uma barra sólida é

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (2.44)$$

onde ρ é a densidade e Y é o módulo de Young característico de cada substância [7].

2.7 Propriedades do som

O som possui propriedades físicas que estão relacionadas diretamente com a percepção das ondas sonoras por um ouvinte. Para uma onda sonora que é emitida com uma determinada frequência, quanto maior for a variação da pressão maior será a **intensidade sonora**. A percepção dessa intensidade varia com a frequência do som ouvido e de um ouvinte para outro. É possível que um mesmo som (frequência e amplitude de pressão constantes) seja percebido com intensidades diferentes por ouvintes diferentes, pois a sensibilidade do ouvido humano a essa percepção varia de pessoa para pessoa. Para um mesmo ouvinte, sons com mesma amplitude de pressão podem apresentar intensidades sonoras diferentes, se as suas

frequências forem diferentes.

Durante todo um dia ouvimos sons que são agudos e graves. A propriedade do som que nos permite distinguir entre eles é a **altura**, a qual é determinada essencialmente pela frequência do som ouvido. Um som que possua maior frequência tem uma maior altura, ou seja, é agudo; e um som que possua menor frequência tem uma menor altura, ou seja, é grave. Amplitude de deslocamento também exerce influência sobre a altura de um dado som. De modo que, em ondas sonoras de mesma frequência e amplitudes de deslocamento diferentes, o som de maior amplitude de deslocamento é percebido mais forte, porém mais grave [8, 14].

Em geral, os sons musicais são compostos por uma frequência fundamental recheada por harmônicos superiores, formando uma *composição harmônica*. O som produzido por uma corda vibrante necessariamente tem frequência fundamental igual à da corda. Porém, como vimos anteriormente, uma corda oscila também em outras frequências que são múltiplos inteiros da fundamental. A onda sonora produzida possui a mesma quantidade de harmônicos que a corda. Caso semelhante acontece com os instrumentos de sopros. Um instrumentista ao soprar seu instrumento põe a vibrar uma colunar de ar. Semelhantemente a uma corda, essa coluna de ar possui modos de vibração próprios definidos pelo comprimento do tubo do instrumento. A onda sonora produzida por tal instrumento possui a mesma composição harmônica da coluna de ar vibrante. Consideremos instrumentos distintos emitindo a mesma nota, ou seja, mesma frequência fundamental. A Figura (2.9) representa a forma e a composição harmônica de sons de mesma frequência e mesma amplitude emitidos por instrumentos distintos.

Percebe-se que o som que cada instrumento emite mesmo que tenha mesma frequência (seja a mesma nota), possui forma distinta do outro. A Figura (2.9) mostra a composição harmônica para cada um dos quatro instrumentos ao emitirem a mesma nota que, como vemos, são diferentes. Essa propriedade é que nos possibilita distinguir entre o som emitido

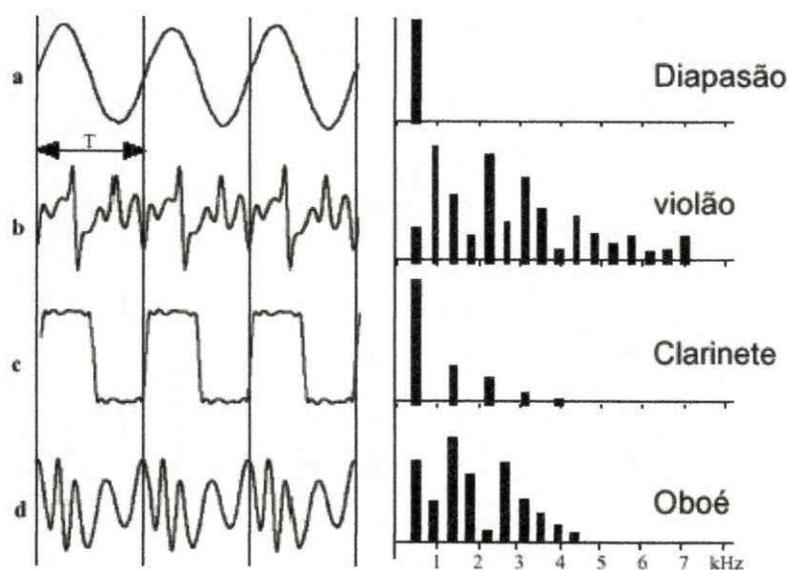


Figura 2.9: Ondas sonoras emitidas por: (a) diapasão, (b) violão, (c) clarinete e (d) oboé e as suas composições harmônicas.

Fonte: Referência [29].

por um violão ou um clarinete. Tal característica do som denomina-se **timbre** e pode ser entendida como a digital do som. Pode-se fazer uma analogia com as cores; ao misturar as cores básicas (frequências) obtém-se as mais variadas cores e tonalidades (timbres). O timbre é considerado por muitos como a cor do som [15].

Sons onde há uma combinação variada de frequências não harmônicas são denominados **rúfidos**. Nesse caso os sons produzidos não possuem uma frequência fundamental e são considerados como **não musicais**.

2.8 Intensidade sonora e a variação de pressão

As ondas sonoras assim como as demais, quando se propagam transportam energia de uma determinada região para outra do espaço. A taxa temporal média com a qual a energia é transportada por unidade de área, através de uma superfície perpendicular a

de propagação da onda, denomina-se **intensidade** I [8]. Fazendo a análise dimensional da intensidade, percebe-se que taxa temporal possui unidade de potência, ou seja, *Unidade de energia/Unidade de tempo = watts*. A intensidade é, portanto, a potência sonora por unidade de área. Em outras palavras ela representa o fluxo de energia por unidade de área. A intensidade possui dimensão de

$$I = \frac{\text{J/s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Nm/s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{ms}} \quad (2.45)$$

A intensidade está diretamente relacionada com a amplitude de deslocamento ou, no caso da onda sonora, relaciona-se com a variação máxima da pressão. Consideremos uma onda sonora que se propaga sobre o eixo O_x no sentido positivo; neste caso, $\Delta p(x, t) = BkA \text{sen}(kx - \omega t)$.

Fazendo uma análise dimensional do produto entre a variação da pressão $\Delta p(x, t)$ e a velocidade de oscilação de uma partícula $v_y(x, t)$,

$$\Delta p(x, t)v_y(x, t) = \frac{\text{N m}}{\text{m}^2 \text{ s}} = \frac{\text{N}}{\text{ms}} \quad (2.46)$$

Como ambas possuem a mesma dimensão, concluímos que se trata de uma só grandeza, de modo que

$$I = \Delta p(x, t)v_y(x, t). \quad (2.47)$$

Mas,

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \text{sen}(kx - \omega t),$$

e

$$I = [BkA \sin(kx - \omega t)][\omega A \sin(kx - \omega t)] = B\omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (2.48)$$

A função $\sin^2(kx - \omega t)$ para qualquer valor de x possui valor médio de $\frac{1}{2}$ ao longo de um período de $T = 2\pi/\omega$. A intensidade é portanto proporcional ao quadrado da amplitude:

$$I = \frac{1}{2} BkA^2. \quad (2.49)$$

Expressando I em termos da amplitude de pressão, obtemos

$$I = \frac{\omega(\Delta p_{\text{máx}})^2}{2Bk}. \quad (2.50)$$

Consideremos agora uma fonte sonora puntiforme de potência P . Ao produzir uma onda sonora, esta se propagará esfericamente, ou seja, a sua forma será uma esfera de raio r e área superficial $4\pi r^2$. A intensidade dessa onda é

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (2.51)$$

A intensidade sonora é então: diretamente proporcional à potência da fonte, $I \propto P$, e inversamente proporcional ao quadrado do raio da esfera, $I \propto 1/r^2$. Isto significa dizer que, à medida que nos distanciamos da fonte sonora, a intensidade I diminui com o quadrado da distância.

2.9 A intensidade medida em decibéis

Como já falamos anteriormente, a intensidade sonora é medida em W/m^2 , e o ouvido é sensível a um grande intervalo de intensidades. Em geral, a menor intensidade percebida pelo

ouvido humano é de 10^{-12}W/m^2 e é denominada **limiar de audição**. Existe também uma intensidade máxima suportada pelo ouvido humano, denominada **limiar de dor**. Acima de 1 W/m^2 em geral o ouvido humano não suporta.

Como podemos ver, o intervalo de audição é de fator 10^{12} , ou seja, é muito grande. Por esse motivo torna-se melhor trabalhar com uma escala logarítmica. Definimos então o **nível de intensidade sonora** de uma onda sonora:

$$\beta = (10\text{dB}) \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right). \quad (2.52)$$

Chama-se I_0 igual a 10^{-12}W/m^2 , de intensidade de referência, a qual corresponde a 0 bel, que é uma unidade que homenageia Alexander Graham Bell (1847–1922). A intensidade que corresponde a 1bel(B) é dez vezes a intensidade de referência (10^{-12}W/m^2), possuindo então 10 decibéis (dB). Em geral a unidade bel é muito grande; usa-se então para medir intensidade sonora o **decibel**.

Tabela 2.1: Fontes sonoras e seus respectivos níveis de intensidade em décibéis e em W/m^2 .

Fonte: Referência [8].

Fonte ou descrição do som	Nível de intensidade sonora, β (dB)	Intensidade $I(\text{W/m}^2)$
Avião a jato militar a 30 m de distância	140	10^2
Limiar de dor	120	1
Britadeira	95	$3,2 \times 10^{-3}$
Caminhão diesel, 10 m de distância	90	10^{-3}
Avenida de tráfego intenso	70 a 90	10^{-5} a 10^{-3}
Conversa comum	65	$3,2 \times 10^{-6}$
Automóvel silencioso	50	10^{-7}
Rádio com volume baixo	40	10^{-8}
Sussurro médio	20	10^{-11}
Ruídos de folhas	10	10^{-11}
Limiar de audição	0	10^{-12}

Na escala de decibéis, uma onda sonora de intensidade 10^{-12}W/m^2 (limiar de audição)

possui nível de intensidade igual a 0 dB. Já uma onda de intensidade 1 W/m^2 (limiar de dor) possui intensidade em decibéis igual a 120 dB. A Tabela (2.1) mostra uma relação de fontes sonoras e seus respectivos níveis de intensidade.

2.10 O fenômeno de ressonância

Um fenômeno físico de grande importância para várias áreas da física, principalmente para a Acústica é a **ressonância**. Chama-se de ressonância a facilidade que um determinado corpo apresenta em vibrar, quando na presença de um segundo corpo vibrando em frequência igual a sua frequência fundamental de vibração. *A ressonância significa uma vibração com amplitude relativamente maior que sempre aparece quando a frequência de uma força propulsora coincide de modo relativamente proeminente com uma frequência do próprio sistema sobre o qual atua* [14]. Quando esse segundo corpo oscilar com frequência exatamente igual à frequência própria do primeiro corpo, a oscilação que será forçada terá amplitude máxima.

Consideremos um tubo aberto colocado próximo a um alto-falante conectado a um amplificador, como mostrado a Figura (2.10a). Suponhamos que sejam emitidas ondas sonoras puras de frequência f que podem variar. É produzida pelo alto-falante uma força propulsora que força o ar dentro do tubo a oscilar também com frequência f . Porém essa oscilação é pequena, pois a frequência fundamental do ar é diferente de f . Variando a frequência da onda emitida de maneira que se aproxime de um dos modos normais do ar, ele entrará em ressonância passando a oscilar de acordo com a frequência emitida, aumentando significativamente a sua amplitude.

Para cada nova frequência emitida que coincida com uma das frequências de vibração do ar, ele entrará novamente em ressonância, formando assim uma **curva de ressonância**. A Figura (2.10b) mostra o comportamento da amplitude de oscilação do ar em função da

frequência emitida.

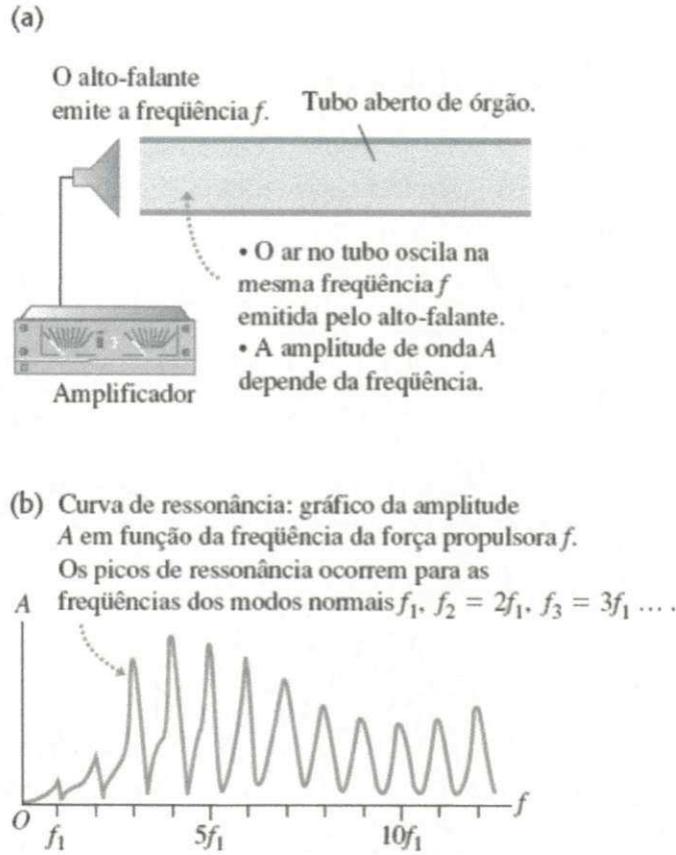


Figura 2.10: (a) Ilustração de um tubo acoplado a um alto-falante que é conectado a um amplificador. (b) Representação gráfica da curva de ressonância do ar dentro do tubo.

Fonte: Referência [8].

Capítulo 3

Instrumentos de corda: O Violino

Os instrumentos musicais, em particular os de cordas, ao contrário do que algumas pessoas imaginam, estão intimamente relacionados com a Física. Ao formato desses instrumentos e ao processo de produção sonora são associados princípios físicos. Isso tem contribuído para que cientistas se interessem pela acústica e os fabricantes desses instrumentos por ciência. O violino, por exemplo, durante os séculos tem cativado em muitos físicos o interesse em compreender a física deste instrumento. Alguns físicos como Félix Savart (1791-1841) e Hermann von Helmholtz (1821-1894), que são renomados por descobertas em outras áreas da física, deram contribuições para a compreensão das propriedades acústicas deste instrumento. Muitos outros não o estudaram, mas o tocavam, como é o caso de Albert Einstein (1879-1955) [16]. Neste capítulo vamos expor algumas propriedades físicas e a estrutura dos instrumentos musicais de corda, em particular do violino.

3.1 Instrumentos de corda

3.1.1 Classificação dos instrumentos

Os instrumentos musicais são classificados pelo sistema Hornbostel-Sachs¹ de acordo com as suas fontes primárias de produção do som. Quando a fonte primária de produção do som é uma corda vibrante, os instrumentos são chamados **cordofones**. E podem ser: *Cordofones simples* ou *Cordofones compostos*.

Cordofones simples: Sua fonte primária de produção do som é uma corda vibrante. Possuem uma caixa acústica ou de ressonância, porém a sua remoção não implica na não execução do instrumento. Como exemplo podemos citar o berimbau e os vários tipos de harpas.

Cordofones compostos: Sua fonte primária de produção do som é uma corda vibrante e possuem uma caixa acústica ou de ressonância como parte integrada ao instrumento. É nessa categoria que se enquadra a maioria dos instrumentos de cordas usados nas orquestras.

O violino e sua família são classificados pelo sistema Hornbostel-Sachs como cordofones compostos. A caixa acústica desses instrumentos representa a maior parte de seus corpos. Por isso quando removidas impossibilitam a produção sonora [17].

3.1.2 Caixa de ressonância

Intuitivamente já sabemos que nos instrumentos de cordas o som é produzido por uma corda posta em vibração. Como visto no Capítulo 2, para que uma corda produza uma onda sonora é necessário que o seu movimento desloque uma determinada massa de ar. De

¹O sistema Hornbostel-Sachs classifica os instrumentos musicais de acordo com a fonte primária de produção do som. Possui cinco grandes grupos de instrumentos classificados pelos mesmos princípios acústicos. São eles os **Idiofones**, **Membranofones**, **Cordofones**, **Aerofones** e **Eletrofones**. O sistema usa um método decimal de classificação de maneira a formar uma árvore classificatória.

maneira geral as cordas usadas nesses instrumentos são muito finas (seus diâmetros são muito menores que os comprimentos de onda das ondas nelas produzidas) e, com isso, a massa de ar deslocada por seus movimentos é muito pequena. Em outras palavras, o som é uma onda de baixa intensidade.

Porém, é comum nesses instrumentos que as vibrações produzidas pelas cordas sejam transmitidas a superfícies maiores. Com isso, há um deslocamento de uma maior massa de ar, amplificando assim o som produzido. Essas superfícies geralmente formam uma caixa denominada caixa acústica ou caixa de ressonância. A caixa acústica é, portanto, uma câmara cheia de ar de tamanho e forma que variam de instrumento para instrumento, sendo de fundamental importância aos mesmos [18].

Para compreender melhor o funcionamento de uma caixa acústica, realize a seguinte experiência: pegue uma garrafa PET com uma determinada quantidade de água, sopre em seu gargalo e observe o som produzido. Agora diminua a água dentro da garrafa, e sopre novamente. Observe que o som tornou-se mais grave do que o anterior. Isso é devido ao fato de que o ar dentro da garrafa possui modos de vibração próprios, que dependem do seu volume. No primeiro caso obtivemos um som mais agudo porque o volume de ar era menor, ou seja, as ondas geradas possuíam comprimentos de onda menores e conseqüentemente frequências maiores. No segundo caso ocorreu o inverso: dentro da garrafa há um maior volume de ar que acarretou em maiores comprimentos de onda, ou seja, frequências menores que representam sons mais graves. Podemos explicar isso através do fenômeno de ressonância. As vibrações produzidas ao soprar o gargalo da garrafa são complexas e com diversas frequências de oscilação. O ar dentro da garrafa entra em ressonância com as frequências que são iguais ou próximas das suas fundamentais. A caixa acústica possui mesmo princípio de funcionamento [18].

Em uma caixa de ressonância não é somente o ar no seu interior que contribui para a

amplificação do som. A caixa em si também entra em ressonância com as vibrações produzidas e contribui então para essa amplificação. Em todo esse processo de amplificação, as frequências que são reforçadas não são exclusivamente iguais às encontradas nas vibrações. Há, no entanto, uma faixa de frequência que é reforçada, a qual chamaremos **faixa de ressonância**, ou como chamamos no Capítulo 2, **curva de ressonância**.

Cada instrumento é capaz de produzir uma quantidade limitada de sons. Chama-se de extensão a distância entre o som (nota) mais grave e o mais agudo de um instrumento. A extensão de cada instrumento dependerá do seu tamanho, ou melhor dizendo, do tamanho da sua caixa acústica. A caixa acústica possui grande influência sobre o timbre do instrumento: uma maior caixa acústica implica em um timbre mais grave e uma menor, em um timbre mais agudo. Como vimos no exemplo da garrafa PET, um maior volume de ar reforça frequências menores e um menor volume de ar reforça frequências maiores.

Os instrumentos que compõem a família do violino são exemplos do que falamos até agora. O violino é o menor da família e cobre frequências desde 196 Hz até 3136 Hz; em seguida está a viola que cobre um intervalo de frequências de 131 Hz até 1175 Hz; o violoncelo vem em terceiro, cobrindo um intervalo de frequências de 65 Hz a 698 Hz; e por último o contrabaixo, que em tamanho é o maior dos quatro e cobre um intervalo de frequências de 41 Hz a 247 Hz. Dentre os quatro instrumentos, o violino possui a maior e mais aguda extensão, enquanto que o contrabaixo possui a menor e mais grave extensão [6, 18].

3.1.3 A madeira

A qualidade sonora de um instrumento e da sua caixa acústica depende de vários fatores, mas um dos principais é o material utilizado na sua construção. Na grande maioria, os instrumentos de cordas são feitos de madeira. Em confronto com os metais, a madeira torna-se uma melhor opção, pois mesmo possuindo cerca 1/10 a 1/20 da densidade dos metais a

velocidade de propagação do som em ambos é muito próxima [19]. Como veremos a seguir, para que um material possua uma boa resposta acústica, ele deve permitir uma boa velocidade de propagação do som e ter baixa densidade; neste sentido, as madeiras saem na frente dos metais.

Algumas propriedades acústicas são determinantes na escolha dessa madeira. Essas propriedades estão relacionadas com o seu comportamento ao vibrar. Dependem da elasticidade das suas fibras quando tensionadas ou flexionadas. Os parâmetros utilizados na escolha da madeira são: **velocidade de propagação do som, impedância acústica e coeficiente de irradiação do som** [20].

Velocidade de propagação do som

A velocidade de propagação do som na madeira é igual ao que foi visto para os sólidos no Capítulo 2:

$$v_{som} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad (3.1)$$

onde Y é o módulo de Young, o qual representa a elasticidade da madeira, e ρ é a sua densidade. Há uma diferença na elasticidade das madeiras conforme as direções, sendo na direção transversal cerca de 1/20 a 1/10 da direção longitudinal. A velocidade de propagação do som depende diretamente dessa elasticidade. Concluimos então que a velocidade é menor na direção transversal, ou seja, na direção perpendicular às fibras da madeira, e é cerca de 20% a 30% da velocidade na direção longitudinal [20].

Impedância acústica

Define-se como impedância acústica a propriedade de um dado material transmitir com maior ou menor facilidade as ondas sonoras. É representada pela letra z , sendo igual ao produto entre a velocidade de propagação do som e a densidade do material, que no caso em

questão é a madeira [20, 21]. Temos então

$$z = v_{som}\rho. \quad (3.2)$$

Coefficiente de irradiação do som

Em uma fonte sonora, parte das vibrações é amortecida devido à irradiação do som. O coeficiente que quantifica tal amortecimento é dado por:

$$R = \frac{v_{som}}{\rho} = \sqrt{\frac{Y}{\rho^3}}. \quad (3.3)$$

Quanto maior o valor desse coeficiente, maior será a qualidade acústica do material. Na construção de instrumentos musicais é importante que o material utilizado possua um bom coeficiente de irradiação do som. O coeficiente de irradiação do ferro por exemplo é $R = 6,51 \times 10^{-4} \text{ m}^4/\text{gs}$ e o do alumínio é $R = 1,8 \times 10^{-3} \text{ m}^4/\text{gs}$. As madeiras, devido o fato de possuírem menor densidade que os metais, possuem coeficientes de irradiação maiores do que eles [19, 20].

3.2 O Violino

3.2.1 Estrutura do instrumento

O violino é um instrumento admirado por muitas pessoas, não somente pelo seu timbre mas também pela sua forma e desenho. Seguindo aparentemente a relação matemática conhecida como "*proporção áurea*"², sua beleza atrai muitos olhares.

O instrumento possui quatro cordas afinadas em intervalos de quintas distribuídas na

²Conhecida pelos gregos como *proporção divina*, segue o princípio de que ao dividir um todo em duas partes desiguais, a razão entre o todo e a maior deve ser igual à razão entre a maior e a menor.

escala temperada³: Sol₃ (196Hz), Ré₄ (293.66Hz), Lá₄ (440Hz) e Mi₅ (659.26Hz), como é ilustrado na Figura (3.1) [6]. O sub-índice indica a oitava a qual pertence a nota. O violino possui portanto uma extensão de três oitavas e meia. Geralmente essas cordas são confeccionadas de aço e recobertas com alumínio ou prata. As cordas Sol, Ré e Lá são recobertas, e são chamadas compostas; porém a corda Mi não, sendo denominada simples. Existem cordas de outros materiais, como *tripa animal* e de *núcleo sintético*. Essa última geralmente possui o núcleo de algum tipo de nylon e é recoberta com alumínio ou prata. A tensão sobre as cordas é ajustada por cravelhas e em alguns violinos há também um sistema de micro-afinadores; mas esta é uma parte opcional no instrumento.

As extremidades das cordas são presas às cravelhas e ao *estandarte* (peça onde ficam os micro-afinadores) estando assim acopladas à caixa acústica. O responsável por tal acoplamento é o *cavelete* e é sobre ele que as cordas se apoiam, como mostra a Figura (3.2). O cavelete é de fundamental importância para o instrumento, pois é responsável por transmitir as vibrações das cordas para a caixa acústica.

A caixa acústica por sua vez possui um tampo superior e um inferior que estão ligados por ilhargas, [Figura (3.2)]. O tampo superior possui dois furos em formato de *f* que estão localizados simetricamente aos lados do cavelete, possibilitando assim o contato entre o ar encerrado dentro da caixa e o exterior. Esses furos possuem cerca de 2,5% da área total do tampo; e o tornam mais flexível na região onde se encontra o cavelete. Com isso a transmissão das vibrações ocorre mais facilmente [16] .

Como foi visto na Seção (3.1), para que uma caixa de ressonância possua uma boa resposta acústica, a madeira utilizada na sua construção deve possuir algumas propriedades, que dependem de uma boa elasticidade do material e de uma baixa densidade. O tampo superior

³A escala temperada ou cromática é construída dividindo o intervalo de uma oitava em exatamente 12 notas separadas por intervalos iguais.

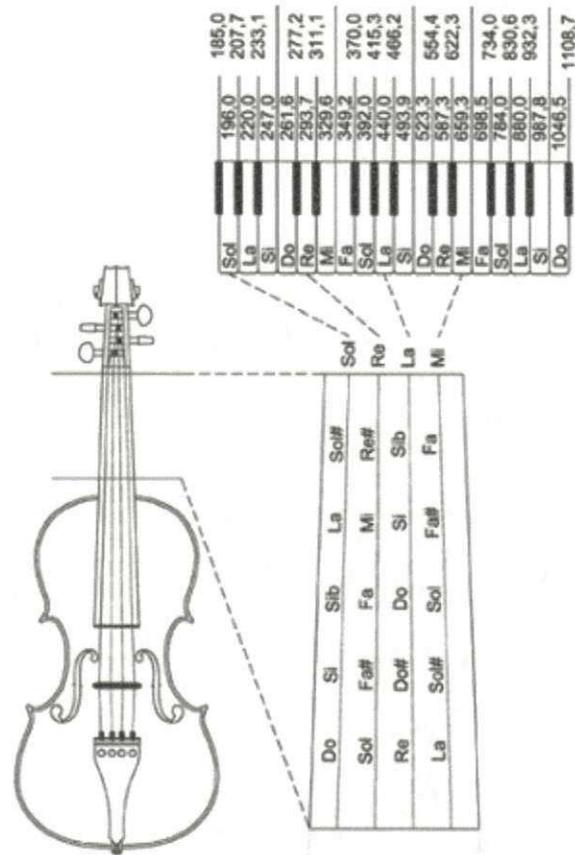


Figura 3.1: Representação de algumas notas musicais encontradas nas cordas do violino e suas respectivas frequências.

Fonte: Referência [6].

do violino é tradicionalmente feito de *abeto*⁴ que é caracterizado por sua boa elasticidade (módulo de Young $Y \sim 9$ GPa) e possui baixa densidade ($\rho \sim 0,45\text{g/cm}^3$). O tampo inferior, por sua vez, é feito de *bordo*⁵, de elasticidade (módulo de Young $Y \sim 11$ GPa) e densidade ($\rho \sim 0,6 - 0,7\text{g/cm}^3$) [6]. A velocidade de propagação do som no tampo superior é aproximadamente 4500 m/s e no tampo inferior é de 4000–4300 m/s. O tampo superior possui um coeficiente de irradiação maior e impedância acústica menor do que o tampo inferior. Isto nos leva à conclusão de que o tampo superior possui uma maior parcela de contribuição na produção sonora do instrumento.

⁴Árvore da família das coníferas, a estrutura em espiral das moléculas de celulose concedem ao abeto firmeza e resistência [6].

⁵Árvore da família das aceráceas, de boa elasticidade e maior densidade e dureza.

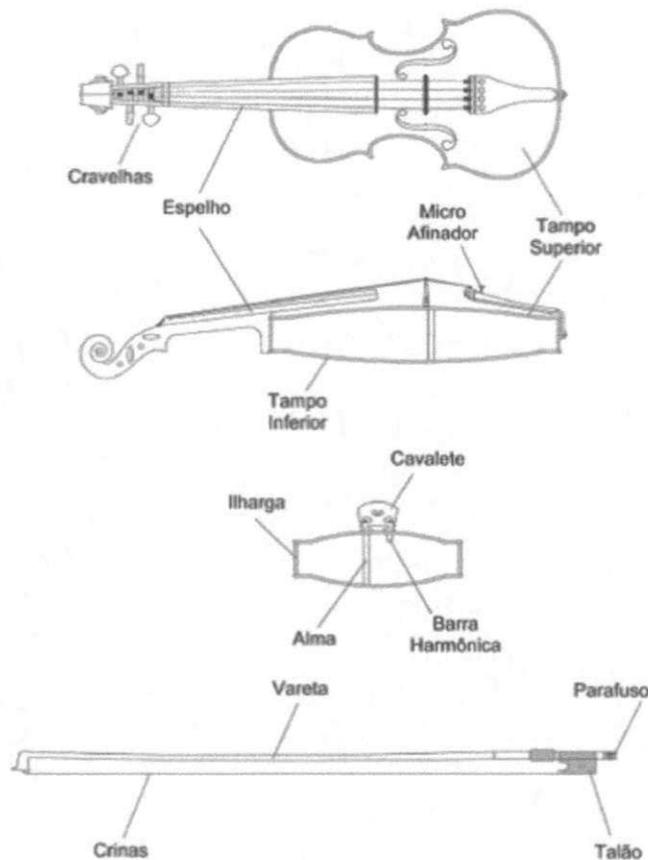


Figura 3.2: Na vista frontal do instrumento estão representados as cravelhas, o espelho que é a superfície utilizada para dedilhar o instrumento e os $f's$. Na vista lateral do instrumento estão ilustrados os tampos superior e inferior e os micro-afinadores conectados ao estandarte. No interior do instrumento encontramos a alma e barra harmônica. O arco é composto por uma vareta, a crina, o parafuso e a sua parte inferior que é chamada talão.

Fonte: Referência [6].

As cordas exercem sobre o tampo superior uma força vertical de aproximadamente 90 N, que equivale aproximadamente ao peso de uma massa de 9 kg. Para que o tampo suporte esse peso, sua forma é arqueada. No interior da caixa acústica do violino, abaixo do pé direito do cavalete (abaixo da corda Mi) existe a *alma*, peça cilíndrica de madeira posta entre os tampos. A alma serve como um pilar de sustentação, ajudando o tampo superior a suportar a força exercida pelas cordas. Porém sua importância vai muito além: ela é responsável pela comunicação vibracional entre os tampos e modifica os seus modos normais de vibração

impondo um ponto nodal⁶ nos pontos de contato [6]. Variações na sua forma e posição, por menores que sejam, modificam a sonoridade e o timbre o instrumento.

Há abaixo do pé esquerdo do cavalete (abaixo da corda Sol), e alinhada no sentido das cordas, a chamada *barra harmônica*. Ela consiste de uma ripa de madeira colada na superfície interna do tampo superior. Uma de suas funções é auxiliar na sustentação do tampo superior. Porém, assim como a alma, a barra harmônica também possui função acústica. Ela faz com que uma maior área do tampo superior oscile em fase, o que é de grande importância para os sons mais graves [6].

Uma das características da família do violino é que as cordas são friccionadas com um arco. Este arco é constituído por uma peça de madeira (vareta) longa e curva, em cujas extremidades são presos fios de crina ou rabo de cavalo. Em uma dessas extremidades há um parafuso responsável por ajustar a tensão sobre a crina, como mostra a Figura (3.2).

3.2.2 Propriedades acústicas

No Capítulo 2 estudamos a formação de ondas estacionárias em uma corda vibrante, ou seja, ondas estacionárias unidimensionais. Mas podemos também descrever ondas estacionárias bidimensionais, as quais podem ser estabelecidas em placas vibrantes. Semelhantemente ao caso das cordas vibrantes, as ondas estacionárias nessas placas também apresentam regiões de máxima (ventres) e regiões de mínima (nós) vibração. As possíveis ondas formadas em placas vibrantes apresentam frequências e, conseqüentemente, comprimentos de onda específicos, que dependem da geometria dessas placas. Cada configuração que se forma é dita *modo normal* de vibração da placa. Diferentemente das cordas vibrantes, os modos normais de uma placa em vibração não são harmônicos de uma frequência fundamental [7].

⁶Em duas dimensões, é análogo a um nó de uma onda estacionária em uma corda.

O físico e músico alemão Ernst Chladni (1756–1824), no ano de 1808 demonstrou, em Paris, um experimento que havia realizado, no qual colocava em evidência os modos normais de uma placa vibrante. Chamado de "Figuras de Chladni", o experimento consistia em depositar areia em uma placa enquanto a mesma era posta em vibração ao ser atritada por um arco de violino. Percebeu-se que para cada nova frequência que era estabelecida no movimento do arco, a areia se amontoava sobre a placa em regiões diferentes (regiões nodais), formando-se assim figuras. Na construção de instrumentos musicais de corda como violino, violão e outros, as figuras de Chladni são de grande importância. Com esse procedimento torna-se possível construir determinada peça de uma forma que apresente uma melhor resposta acústica quando inserida ao instrumento. Estas figuras fornecem, portanto um gabarito ideal na construção de alguns instrumentos musicais [6, 16, 22].

Tampos

Os tampos de um violino apresentam diversos modos normais, cada um com uma frequência de vibração diferente. Para uma boa qualidade acústica do instrumento é necessário que seus tampos livres (antes da montagem do instrumento) apresentem alguns modos normais de vibração especiais. Ao longo dos anos e com a experiência os luthiers concluíram que, para uma boa qualidade acústica do instrumento, é necessário que em seus tampos haja a formação de três modos de vibração específicos. Evidenciados através do método de Chladni, são chamados de modos 1, 2 e 5 [Figura (3.3)]. Suas frequências de vibração são diferentes para os tampos superior e inferior. No tampo superior as frequências são 80, 147 e 304 Hz, respectivamente; já no tampo inferior as mesmas configurações (modos de vibração) são formadas com as frequências 116, 167 e 349 Hz [6, 22]. Para ambos os tampos os modos 2 e 5 estão aproximadamente separados por um fator de 2, ou seja, um intervalo de uma oitava.

Mas o que estes três modos tem em especial? No tampo superior as frequências

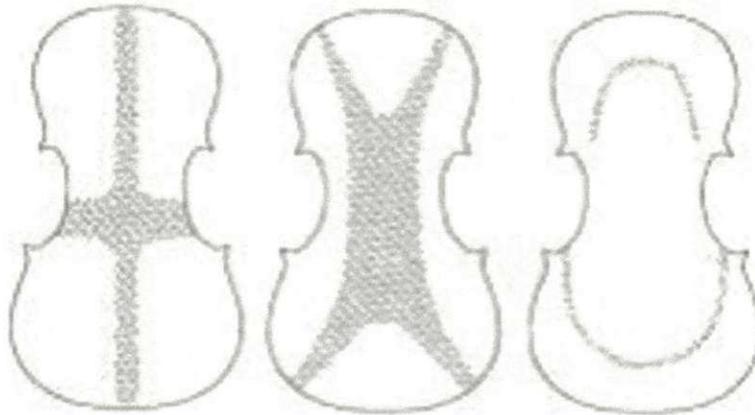


Figura 3.3: Modos normais dos tampos livres, evidenciado pelo metodo de Chladni. Da direita para a esquerda, modos 1,2 e 5.

Fonte: Referência [6].

correspondentes a esses modos formam aproximadamente uma sequência harmônica musicalmente muito importante [6]. Esses três modos propiciam aos luthiers uma espécie de mapa para entalhar os tampos. Estes são retorcidos e entalhados em locais específicos a fim de se obter a formação dos modos 1, 2 e 5.

Caixa acústica

Uma vez que os tampos estão prontos, chega-se o momento da montagem da caixa acústica. No tampo superior são perfurados os f , colada a barra harmônica, e em seguida, acontece o acoplamento dos tampos por meio das ilhargas. Há ainda o posicionamento da alma do violino. Tudo isso muda significativamente os modos de vibração antes obtidos nos tampos livres. A caixa acústica ressoará mais ou menos de acordo com as frequências a ela transmitidas. Segundo experiências, o tampo superior de um violino deve ressoar na frequência fundamental emitida pela corda Lá (440 Hz), reforçando assim significativamente o seu primeiro harmônico. O ar no interior da caixa acústica ressoa na faixa de frequência entre 270 e 290 Hz; isso reforça significativamente o primeiro harmônico da corda Ré, cuja frequência fundamental é (293,66 Hz) [6, 16].

Cavalete

O cavalete é o responsável por transmitir as vibrações das cordas para a caixa acústica. O movimento das cordas é paralelo aos tampos do violino, porém o movimento dos tampos é perpendicular às cordas. Vibrando não somente no seu plano (perpendicular aos tampos), mas também no sentido das cordas, como mostra a Figura (3.4), o cavalete transmite as vibrações ao tampo superior por meio dos seus pés. Ele é, portanto, o responsável por transformar os modos transversais das cordas em modos vibracionais para os tampos. No entanto ele possui modos de vibração próprios, e suas principais frequências de ressonância são ~ 3000 Hz e ~ 4500 Hz [6, 22]. Por vibrar melhor em determinadas frequências do que em outras, sua função acaba transcendendo a de um simples transdutor de vibrações, funcionando também como *filtro acústico* ao transmitir certas frequências melhor que outras [6, 16, 22].

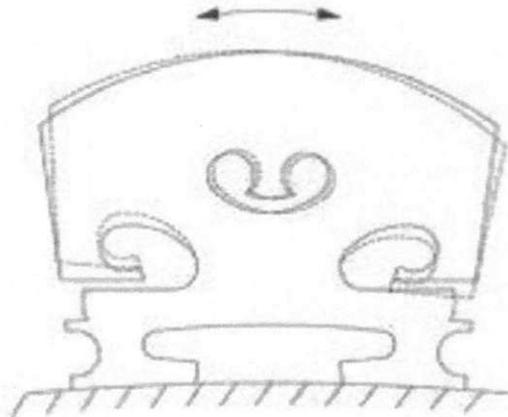


Figura 3.4: O cavalete vibra tanto perpendicularmente ao tampo como paralelo. O orifício ao centro é chamado coração e os dois ao lado chamam-se ouvidos do cavalete.

Fonte: Referência [6].

Com as experiências realizadas pelo físico japonês Matsutani, constatou-se que os modos normais dos ouvidos do cavalete reforçam o 3º harmônico (1980 Hz) da nota Mi_5 (1ª corda do violino), o 2º e o 6º harmônicos (880 Hz e 2640 Hz) da nota $Lá_4$ (2ª corda do violino). O modo normal do coração do cavalete também reforça a nota La_4 nos seus 3º e 6º harmônicos (1320 Hz e 2640 Hz) [6]. Concluímos então que o formato do cavalete contribui para a composição

harmônica do som final do instrumento. Modificações na forma do cavalete levam então a modificações no timbre do violino.

Corpo do instrumento

Cada peça do violino possui modos normais próprios, porém com os acoplamentos dessas peças durante a montagem do instrumento eles se modificam. Um exemplo são os tampos que, quando livres, apresentam alguns modos normais e devido ao seu arqueamento e acoplamento às demais peças, são modificados.

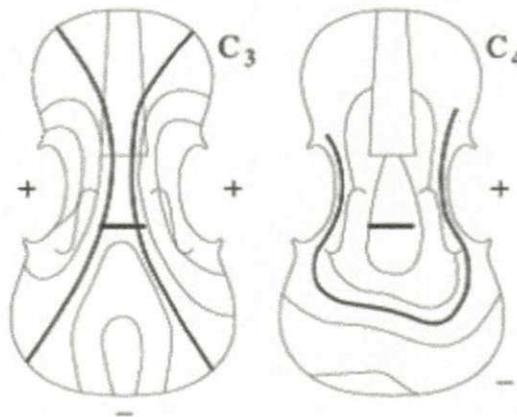


Figura 3.5: O modo C_3 apresenta uma semelhança com o modo 2 encontrado pelo método de Chladni para os tampos livres, onde as linhas mais escuras representam as linhas nodais e os sinais $+/-$ representam as direções de oscilação. O modo C_4 por sua vez se assemelha ao modo 5 dos tampos livres.

Fonte: Adaptado da referência [6].

O corpo do instrumento possui então vários modos normais, os quais são nomeados de C_1 , C_2 , C_3 ... [6, 22]. A Figura (3.5) apresenta dois desses modos, o C_3 e C_4 que mesmo após a montagem do instrumento ainda possuem uma semelhança com os modos 2 e 5 dos tampos livres.

3.2.3 Movimento do Arco e das cordas

A fonte primária de produção de som do violino são as cordas. Estas cordas podem ser postas em vibração quando percutidas, tangidas ou friccionadas. O violino é, no entanto, tocado através da fricção entre suas cordas e o arco. Somente pela palavra *fricção* já podemos associar ao movimento do arco sobre as cordas uma força de atrito. O atrito entre essas duas superfícies deve ser significativamente grande para que o movimento do arco desloque a corda da sua posição de equilíbrio. É usado para aumentar esse atrito o *breu*, que é uma resina extraída de pinheiros, o qual é passado sobre as crinas do arco antes do início da execução do instrumento. O uso do breu aumenta o atrito estático entre a corda e a crina do arco em cerca de 60 % [6].

As cordas quando friccionadas pelo arco executam um movimento prende-desliza. Ao iniciar o movimento do arco, a corda se deslocada junto com ele, isso devido ao atrito estático. O deslocamento da corda alcança o ponto em que a força de atrito estático é superada pela força restauradora (componentes das tensões sobre a corda), que tende a fazer a corda retornar para a sua posição de equilíbrio. A corda desliza então em sentido contrário ao movimento do arco. Após desprender-se e deslizar é capturada novamente; e isso se repete enquanto houver movimento do arco. Devido à fricção, formam-se na corda dois segmentos retos divididos por um ponto denominado *ponto de dobra*, o qual no início do movimento do arco está situado no ponto de contato entre a crina e a corda. Com o movimento do arco o ponto de dobra percorre toda a corda, refletindo-se nas extremidades, como é ilustrado na Figura (3.6). Devido à rapidez com que isso acontece percebemos apenas que a corda forma dois arcos parabólicos [6, 16, 22, 23].

Vimos no Capítulo 2 a forma de uma onda estacionária em uma corda vibrante quando o movimento gerador é um MHS. No caso de uma corda posta em vibração pelo movimento de um arco a onda possuirá uma forma um pouco mais complexa. O movimento de prende-

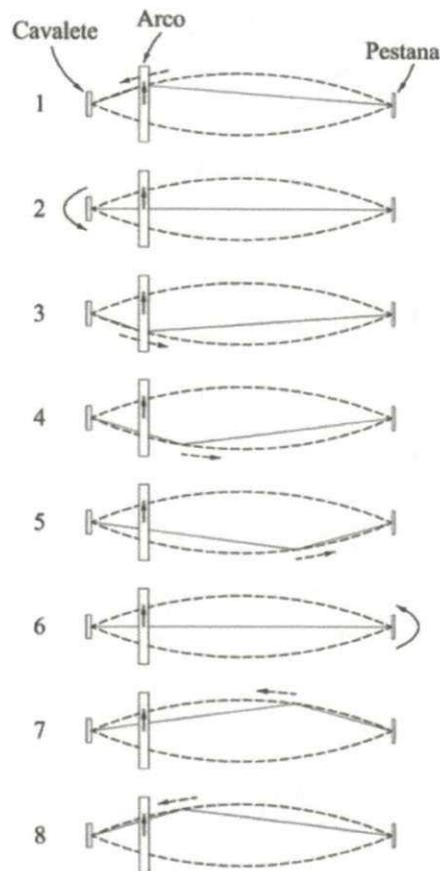


Figura 3.6: Representação do movimento do arco sobre a corda. São formados dois segmentos retos que são divididos pelo ponto de dobra; este percorre toda a corda e é refletido em suas extremidades. As linhas tracejadas representam os arcos parabólicos que são vistos.

Fonte: Referência [6].

desliza entre a corda e o arco não é harmônico, mas é periódico. A onda formada nesse caso possui um perfil **dente-de-serra**. Essa onda assim como o seu movimento gerador é periódica. Segundo a definição da série de Fourier podemos descrevê-la como uma soma de ondas senoidais (harmônicas), o que não faremos aqui. A onda em uma corda de um violino é, portanto rica em harmônicos [6, 23].

3.2.4 Som final

O som que é produzido pelo violino é o resultado de diversas ressonâncias que ocorrem por todo o instrumento. Nas cordas são produzidas devido a fricção do arco, ondas dentes-de-serra que são ricas em harmônicos. Quando transmitidas ao cavalete, que por sua vez possui seus próprios modos de vibração, este irá transmitir determinadas frequências (harmônicos das ondas) e suprimir outras.

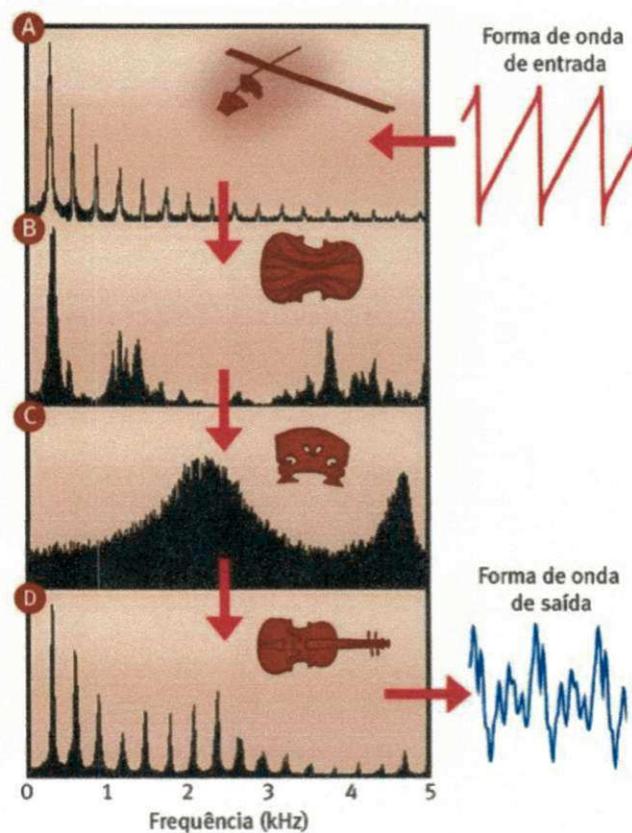


Figura 3.7: Representação do processo de produção do som no violino. Em A a onda sonora é produzida na corda, em B e em C ela sofre as múltiplas ressonâncias no corpo e cavalete do instrumento e em D é obtido o espectro sonoro e a forma da onda sonora emitida pelo violino.

Fonte: Referência [16].

Ao ser transmitidas para o corpo do instrumento, novas ressonâncias acontecem, e com isso determinados harmônicos são reforçados e outros suprimidos. Em resumo, os sons que

são produzidos pelas cordas são moldados pelos modos de vibração do corpo e cavalete do instrumento que reforçam as frequências iguais ou até mesmo próximas das suas. O resultado é um espectro sonoro com harmônicos de diferentes intensidades. Este processo é ilustrado na Figura (3.7).

3.2.5 O violino como ressonador de Helmholtz

Chama-se de ressonador de Helmholtz uma cavidade de volume V cheia de ar, a qual entra em contato com o exterior através de um gargalo de comprimento l e área de seção reta igual a A , como é ilustrado Figura (3.8). O violino é considerado um ressonador de Helmholtz, onde os seus f se comportam como gargalos e, por aproximação, são tratados como elipses de área $A = \pi ab/4$ e comprimento l' . Quando em situação de ressonância o ar passa pelo gargalo produzindo uma flutuação de pressão [6, 24], o comportamento deste sistema é análogo a um oscilador massa-mola; podemos então estudá-lo por meio de uma analogia.

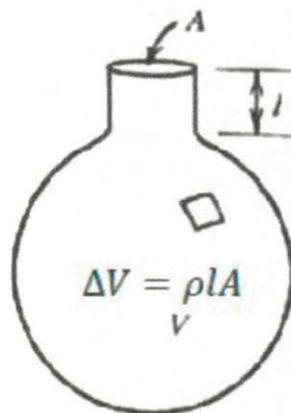


Figura 3.8: Ressonador de Helmholtz que possui um gargalo de área de seção reta igual a A e comprimento l , com cavidade de volume V e a variação do volume é $\Delta V = \rho l A$.

Fonte: Adaptado da referência [6].

O volume de ar presente no gargalo possui massa $m = \rho l A$ (ρ é a densidade do ar) e se comporta como a massa do oscilador. Devido à variação de pressão dentro da cavidade o volume de ar no seu interior se comporta como o elemento elástico desse oscilador. A pressão

no interior p_{int} do ressonador é igual à pressão atmosférica p_{atm} mais a variação de pressão Δp , devido ao movimento da massa m . A pressão no entorno da boca do gargalo (exterior da cavidade) p_{ext} é igual à pressão atmosférica p_{atm} mais uma variação de pressão devido a onda sonora resultante da cavidade $\Delta p(t)$.

Considerando a posição de equilíbrio da massa m ($x = 0$) no centro do gargalo, vamos descrever o seu movimento. Ela está sob a influência de duas forças, uma devido à diferença de pressão que há entre o interior e o exterior da cavidade $[(p_{int} - p_{ext})A]$, e uma força dissipativa (amortecimento) $F = -\beta v$, onde β é uma constante que descreve a intensidade da força e v é a velocidade com que se desloca m ; o sinal negativo indica que o sentido de F é contrário a v . A força de amortecimento possui contribuição do atrito do ar com a cavidade e da irradiação do som por ela realizada. Aplicando a segundo a lei de Newton ao sistema, temos

$$F_R = (p_{int} - p_{ext})A + F = ma$$

$$F_R = (\Delta p - \Delta p(t))A - \beta v = ma.$$

Podemos relacionar a variação de pressão Δp com a variação de volume ΔV no interior da cavidade. Como foi visto no Capítulo 2, o módulo de compressão volumétrica relaciona essas duas grandezas, $\Delta p = -B\Delta V/V$. Substituindo alguns termos e reorganizando-os, obtemos

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \frac{BA^2}{V} x = -A\Delta p(t).$$

Substituindo a massa $m = \rho l A$ e dividindo a equação por A obtemos;

$$\rho l \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{A} \frac{dx}{dt} + \frac{BA}{V} x = -\Delta p(t);$$

$$\rho l \frac{d^2 x}{dt^2} + R_A \frac{dx}{dt} + kx = -\Delta p(t). \quad (3.4)$$

Esta equação é uma **Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem** e representa o movimento de um oscilador harmônico amortecido forçado (oscilador acústico). As soluções desta equação são obtidas por meio de métodos de resolução de EDOs encontrados em livros de Física Matemática e outros. A constante $k = \frac{BA}{V}$ representa a constante elástica do oscilador e R_A é chamada de resistência acústica [6]. Na Tabela (3.1) fazemos uma analogia entre o oscilador acústico no qual consideramos $P(t) = -\Delta p(t)$ e o oscilador mecânico que é discutido em livros de Mecânica Clássica.

Tabela 3.1: Analogia entre os osciladores mecânico e acústico. Osciladores, equações, módulos da impedância e frequências de ressonância. No oscilador mecânico m é a massa, b é a constante de amortecimento e k é a constante elástica da mola. No acústico ρ é a densidade do ar, A e l são a área e o comprimento do gargalo e R_A é a resistência acústica.

Oscilador	Equação do sistema	Impedância	Freq de ressonância
Mecânico	$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$	$ Z = \sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)^2}$	$\omega^2 = \frac{k}{m}$
Acústico	$\rho l \frac{d^2 x}{dt^2} + R_A \frac{dx}{dt} + kx = P(t)$	$ Z = \sqrt{\left(\frac{\rho}{A}\right)^2 + \left(\rho l \omega - \frac{BA}{V\omega}\right)^2}$	$\omega^2 = \frac{BA}{\rho l V}$

A impedância nos sistemas mecânicos representa uma oposição ao movimento de determinada estrutura que é sujeita a uma força, ou seja, uma oposição a oscilação [21]. No oscilador acústico que descrevemos a impedância representa uma oposição a vibração do ar dentro da cavidade (caixa acústica do violino). Como foi discutido na Seção (3.1) a caixa acústica como um todo (caixa mais ar) possui uma faixa de frequências de ressonância, mas as oscilações adquirem amplitude máxima apenas nas suas frequências próprias. Com nosso oscilador, que por sua vez representa parte da caixa acústica, acontece o mesmo. Ele possui uma faixa de frequência de ressonância, mas a sua oscilação atinge amplitude máxima quando oscila na frequência apresentada na Tabela (3.1). Nessa frequência a sua impedância torna-se menor e é igual a resistência acústica $|Z| = R_A$. Isso também é válido para o oscilador mecânico. A frequência de ressonância no caso acústico é diretamente proporcional

ao módulo de compressão volumétrica B e a área A da seção reta do gargalo, e é inversamente proporcional a densidade ρ do ar que está na cavidade, ao comprimento l do gargalo e ao volume V da cavidade.

Se considerarmos a família do violino como ressonadores de Helmholtz, percebemos facilmente que a frequência de ressonância do ar no interior da caixa acústica de um violino é maior do que em um violoncelo. Pela frequência de ressonância apresentada na Tabela (3.1) constatamos que é devido a diferença de volume entre as cavidades (caixa de ressonância).

Capítulo 4

Espectro sonoro e as Figuras de Chladni

A fim de conhecer ainda mais a acústica do violino, buscamos compreender a composição harmônica do espectro sonoro das principais notas emitidas pelo instrumento. Com o auxílio de programas computacionais tornou-se possível a captação, análise e tratamento dos sons produzidos pelo violino. Buscamos ainda conhecer o comportamento acústico de placas vibrantes com mesmo formato dos tampos do violino, mas de materiais diferentes; para isso buscamos formar as Figuras de Chladni por meio de um processo de ressonância.

Neste capítulo descreveremos experimentos que foram realizados no laboratório de Física do Centro de Educação e Saúde da UFCG, Campus de Cuité e em um estúdio de gravação durante o ano de 2013.

4.1 Procedimento experimental e material

4.1.1 Análise do espectro sonoro

A análise do espectro sonoro do violino partiu da captação dos sons produzidos pelas cordas soltas quando friccionadas pelo arco; esta captação tornou-se possível com a utilização do programa Spectrogram 16.0, disponível em: <http://spectrogram.software.informer.com/16.0/>.

Responsável pela captação e decomposição do som em seus harmônicos, o programa nos forneceu imagens dos espectros sonoros em tempo real. A partir destas imagens obteve-se um conjunto de pontos que relacionam as frequências dos harmônicos presentes em cada som captado e as suas respectivas intensidades. Tornou-se possível a construção de gráficos nos quais são representados os harmônicos de cada som de acordo com a frequência e a intensidade relativa de cada um. Foram realizadas dez captações para cada corda e feita uma média dos pontos obtidos. Com a tabela de dados gerada pelo programa, que relaciona as frequências, em hertz, presentes no som com os respectivos níveis de intensidade sonora, em decibéis, foram construídos quatro gráficos que representam os harmônicos das cordas Mi, Lá, Ré e Sol. A construção dos gráficos foi realizada com o auxílio do programa Microsoft Excel 2010, a partir dos dados importados das aquisições do Spectrogram 16.0.

As captações foram feitas em um estúdio de gravação utilizando um microfone *Condensador Samson C01* de características lineares por toda a curva de resposta: 40 Hz – 18 kHz, conectado ao computador. A intenção do isolamento acústico no estúdio foi diminuir ao máximo a presença de ruídos externos que pudessem interferir no resultado das amostras. O uso de um microfone como o acima mencionado permite uma melhor captação, principalmente de frequências mais graves que normalmente não são detectadas, ou são pouco percebidas, em microfones comuns. O instrumento usado no nosso trabalho é um violino de marca *Player* de tamanho adulto 4/4, e as cordas utilizadas foram da marca *Giannini*.

4.1.2 Análise das placas vibrantes

Como foi dito no Capítulo 3, conhecer os modos normais de uma placa vibrante é de fundamental importância na construção de um instrumento musical. Pensando nisso, foram analisados os modos normais de placas semelhantes ao tampo do violino. Para expor esses modos normais utilizamos a formação das chamadas Figuras de Chladni. Foram analisadas

duas placas de diferentes materiais, sendo a placa 1 de vidro de espessura de 4 mm e a placa 2 de madeira (High Density Fiberboard-HDF) também de espessura de 4 mm. Para a formação das figuras usou-se: as placas, açúcar cristal, um alto-falante e um Gerador de Sinais Áudio de dois Canais (com frequencímetro digital), ou seja, uma fonte sonora de frequência variável. Inicialmente foi colocada a placa 1 (vidro) sobre o alto-falante o qual estava conectado ao gerador de sinais, em seguida foi depositado açúcar cristal sobre toda a placa, como mostra a Figura (4.1). Ao ligar o oscilador a placa passou a vibrar na mesma frequência da onda sonora emitida (ressonância). A frequência emitida pelo gerador passou a ser alterada com intuito de obter a formação das Figuras de Chladni, ou seja, os modos normais da placa. O intervalo de frequência analisado foi de 150 a 3200 Hz. O mesmo procedimento foi realizado novamente com a placa 2.

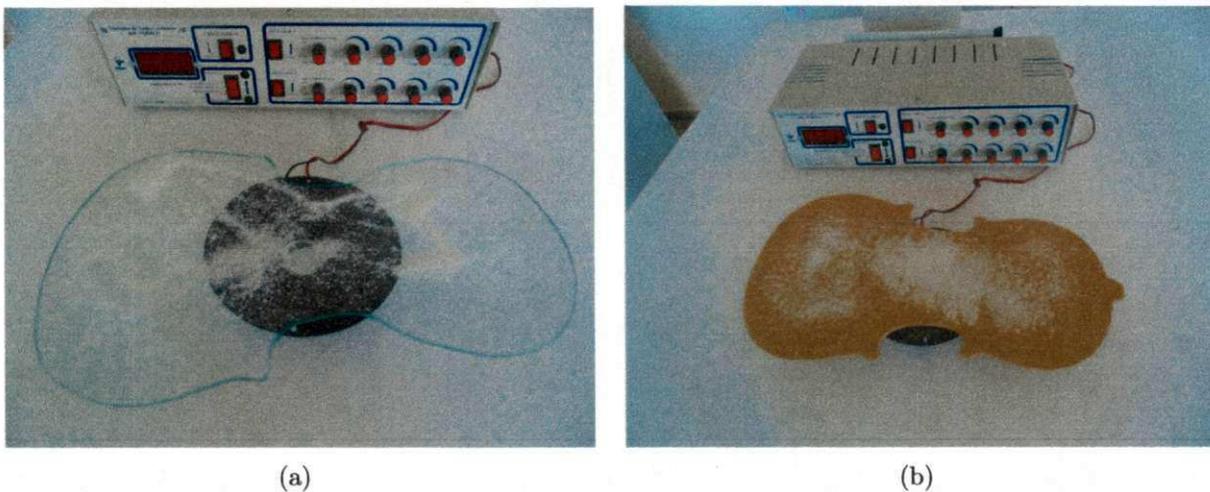


Figura 4.1: Experimento montado com a placa de (a) vidro (b) madeira.

4.2 Resultados e discussão

4.2.1 Análise do espectro sonoro

Para entendermos melhor o timbre do violino buscamos compreender a sua composição harmônica. Com a utilização do Spectrogram 16.0 tonou-se possível analisar o espectro

sonoro do instrumento. As Figuras (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) são as imagens do espectro sonoro do violino quando tocadas as cordas Mi, Lá, Ré e Sol respectivamente. O eixo horizontal representa os valores das frequências em hertz; o eixo vertical representa os níveis de intensidade sonora, em decibéis, relativos a cada frequência. É possível perceber a predominância de certas frequências representadas pelos picos. Como era esperado, tais picos coincidem com as frequências cujos valores são múltiplos inteiros da fundamental.

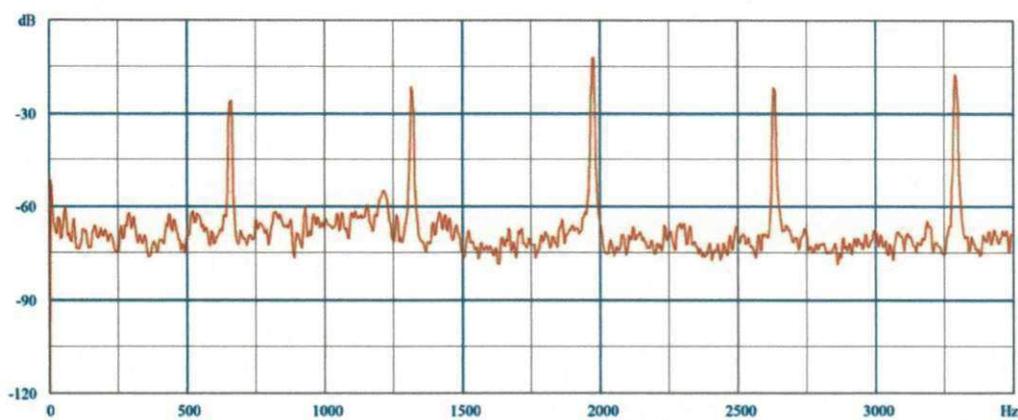


Figura 4.2: Espectro sonoro obtido ao tocar a corda Mi solta, produzindo dessa forma a nota Mi_5 (657,51 Hz).

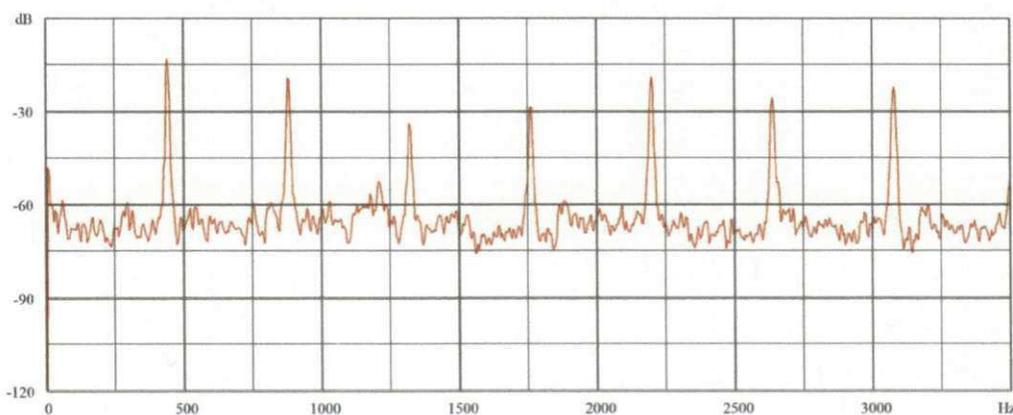


Figura 4.3: Espectro sonoro obtido ao tocar a corda Lá solta, produzindo dessa forma a nota La_4 (440 Hz).

Com os dados obtidos, tornou-se possível a construção de gráficos das frequências versus as intensidades sonoras para cada nota estudada. Para a melhor representação achou-se

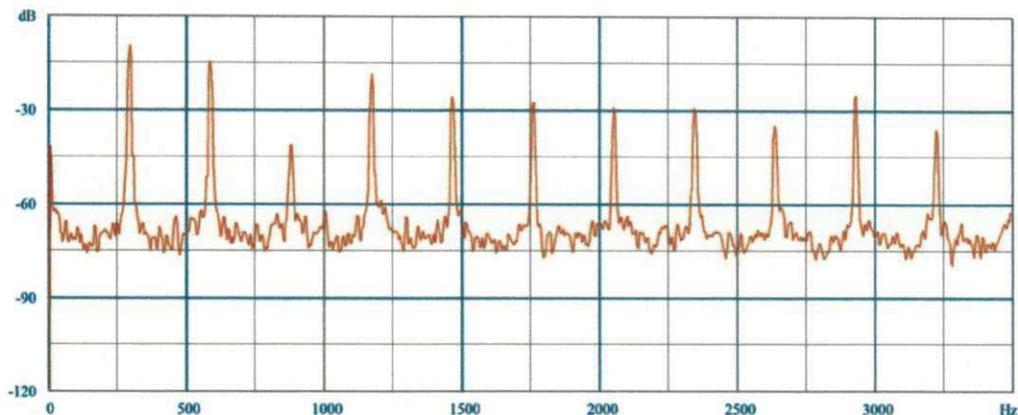


Figura 4.4: Espectro sonoro obtida ao tocar a corda Ré solta, produzindo dessa forma a nota Ré₄ (288,57 Hz).

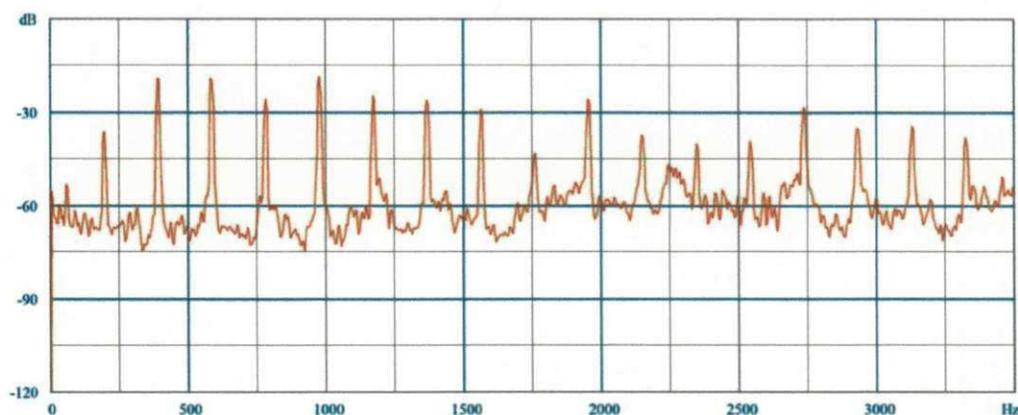


Figura 4.5: Espectro sonoro obtido ao tocar a corda Sol solta, produzindo dessa forma a nota Sol₃ (197,75 Hz).

necessário transformar as intensidades de decibéis (dB) para unidades arbitrárias (U.A). Para isso usamos a Equação (2.52),

$$\beta = (10\text{dB}) \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

e, por conveniência escolhemos $I_0=1$. Nos gráficos construídos é representado o comportamento dos harmônicos de cada nota estudada. O intervalo de frequência analisado foi de 0 a 3500 Hz. Analisando o comportamento dos espectros sonoros obtidos, percebe-se que

UNIVERSIDADE CA

dados harmônicos são mais predominantes do que outros. Em algumas notas, o fundamental aparece com mais intensidade, já em outras existe a predominância com uma maior intensidade por parte de harmônicos superiores.

O gráfico da nota Mi_5 [Figura (4.6)] tem seu harmônico fundamental centrado na frequência de 657,51 Hz que interessantemente não apresenta maior intensidade. O harmônico de maior intensidade é o terceiro, o qual está centrado na frequência 1967,29 Hz. O segundo harmônico mais presente é o quinto da série harmônica, que está centrado em uma frequência de 3288,57 Hz. E o terceiro mais presente é o fundamental.

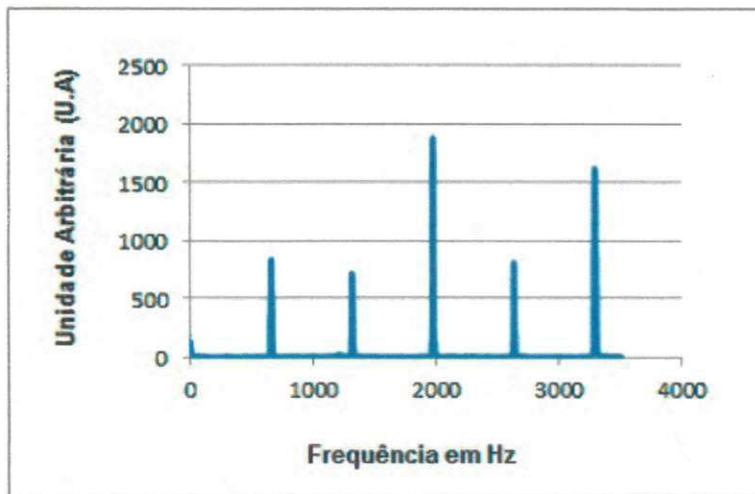


Figura 4.6: Composição harmônica da nota Mi_5 , 1ª corda do violino tocada solta.

O gráfico da nota $Lá_4$ [Figura (4.7)] tem seu harmônico fundamental centrado na frequência de 440 Hz, apresentando maior intensidade. O segundo harmônio, que tem frequência 880 Hz é o segundo mais presente, e o terceiro harmônico mais presente é o quinto, correspondendo a 2200 Hz. Os demais possuem menor intensidade.

O gráfico da nota $Ré_4$ [Figura (4.8)] tem seu harmônico fundamental centrado na frequência de 288,57 Hz, apresentando maior intensidade. O segundo harmônio, que tem frequência 581,54 Hz, é o segundo mais presente, e o terceiro harmônico mais presente é o quinto, com 1170,41 Hz. Os demais possuem menor intensidade.

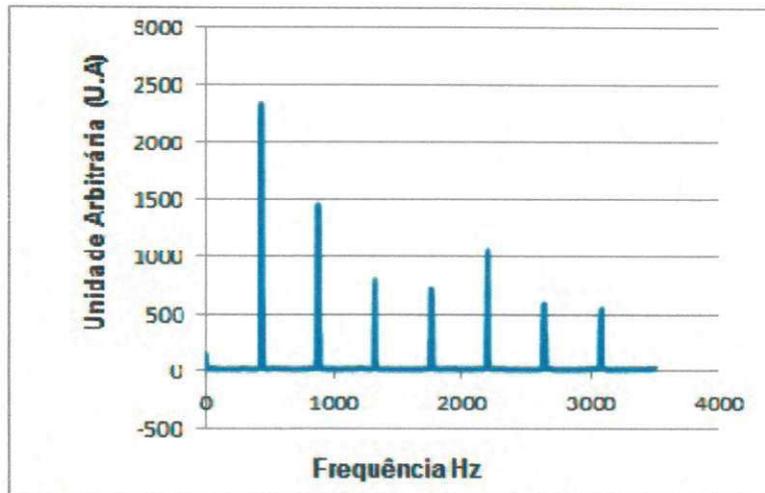


Figura 4.7: Composição harmônica da nota Lá₄, 2ª corda do violino tocada solta.

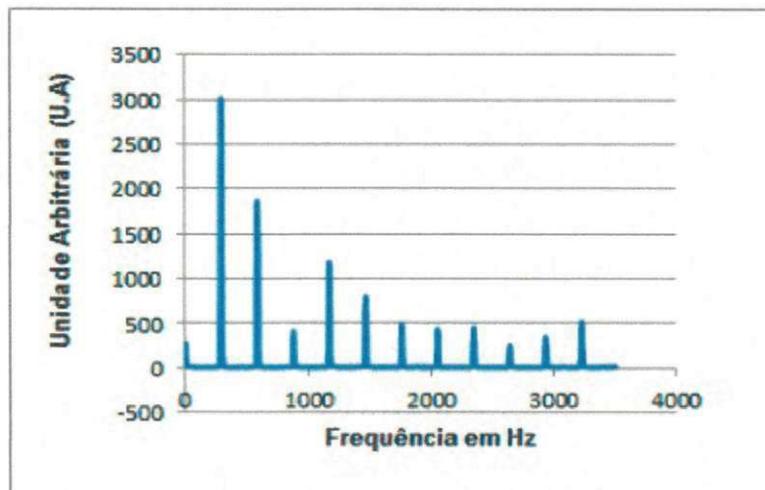


Figura 4.8: Composição harmônica da nota Ré₄, 3ª corda do violino tocada solta.

O gráfico da nota Sol₃ [Figura (4.9)] tem seu harmônico fundamental centrado na frequência de 197,75 Hz que, interessantemente, não apresenta maior intensidade. O harmônico de maior intensidade é o terceiro, que está centrado na frequência 587,4 Hz. O segundo harmônico mais presente é o quinto da série harmônica, que está centrado em uma frequência de 979,98 Hz, e o terceiro mais presente é o segundo na série harmônica, centrado na frequência 388,18 Hz. Essa nota é rica em harmônicos, porém seu harmônico fundamental centrado na frequência 197,75 Hz não é predominante quando se diz respeito às intensidades.

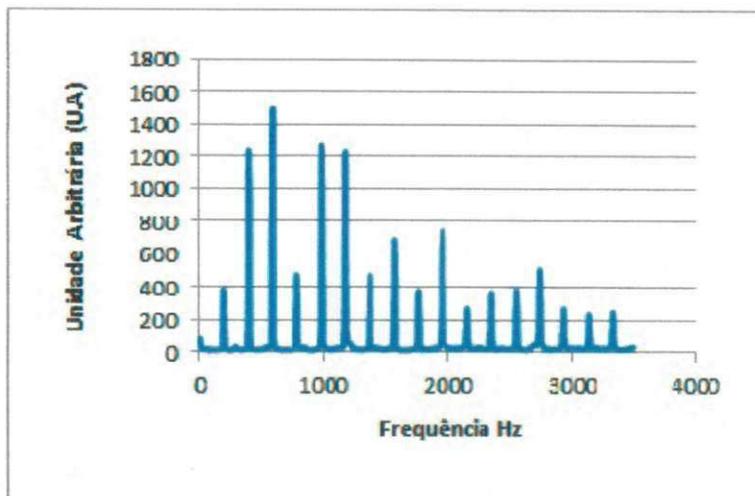


Figura 4.9: Composição harmônica da nota Sol₃, 4ª corda do violino tocada solta.

O que podemos concluir?

Nas notas Lá₄ e Ré₄ os harmônicos fundamentais são predominantes no que diz respeito à intensidade e seus harmônicos superiores estão aproximadamente nas posições esperadas pela série harmônica. As notas Mi₅ e Sol₃ não têm seus harmônicos fundamentais como predominantes ao que diz respeito à intensidade e seus harmônicos superiores também estão aproximadamente nas posições esperadas pela série harmônica. Também é notável que, quanto mais grave o som, ou seja, quanto menor a sua frequência, mais rico em harmônicos ele é no intervalo de frequências estudado.

Esperava-se que o harmônico fundamental fosse o mais presente em todas as notas analisadas, pois a frequência fundamental é quem define a nota que ouvimos, mas isso não ocorreu. Como foi dito no Capítulo 3, a frequência de ressonância do tampo superior corresponde à frequência da nota Lá₄ e a frequência de ressonância do ar encerrado dentro da caixa acústica corresponde à frequência da nota Ré₄. Esse fato deve estar possivelmente ocasionando um reforço na intensidade dos harmônicos fundamentais dessas duas notas durante o processo de produção sonora. Observando os harmônicos da nota Sol₃ percebemos que o mais presente é o terceiro, que é o Ré₅. Possivelmente essa predominância ocorre pelo

UNIVERSIDADE

fato desse harmônico ser um múltiplo inteiro da frequência de ressonância do ar encerrado pela caixa acústica. Para a nota Mi_5 foi possível constatar que o harmônico mais predominante foi o terceiro, cuja frequência corresponde aproximadamente à nota Si_6 . Ainda no Capítulo 3 vimos que a frequência de vibração dos ouvidos do cavalete reforçam justamente o terceiro harmônico da corda Mi . Nossos resultados experimentais estão, portanto, de acordo com os que são encontrados em outras literaturas.

4.2.2 A forma das ondas

Sabemos pelo que foi dito no Capítulo 2, que cada harmônico de uma corda vibrante corresponde a um modo normal de vibração da mesma. Desta maneira é possível associar a esses harmônicos funções de onda do tipo;

$$y = A \operatorname{sen}(kx \pm \omega t).$$

Por simplicidade, façamos $x = 0$, o que significa que estamos preocupados apenas com a evolução temporal da onda em um determinado ponto. A função de onda correspondente a cada harmônico é então;

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t).$$

Reescrevendo $\omega = 2\pi f$ obtemos

$$y = A \operatorname{sen}(2\pi f t). \tag{4.1}$$

Para cada harmônico descrito como função de onda pela Equação (4.1), a constante A foi obtida usando a Equação (2.49),

$$I = \frac{1}{2} BkA^2,$$

que a relaciona com as intensidades sonoras obtidas. Somando estas funções com o auxílio do programa computacional Maple 12 para cada composição harmônica analisada, obtemos as formas das ondas emitidas pelas cordas Mi, Lá, Ré e Sol que são apresentadas nas Figuras (4.10a), (4.10b), (4.10c) e (4.10d) respectivamente. No entanto, devemos salientar que estas ondas obtidas são aproximações matemáticas das ondas reais.

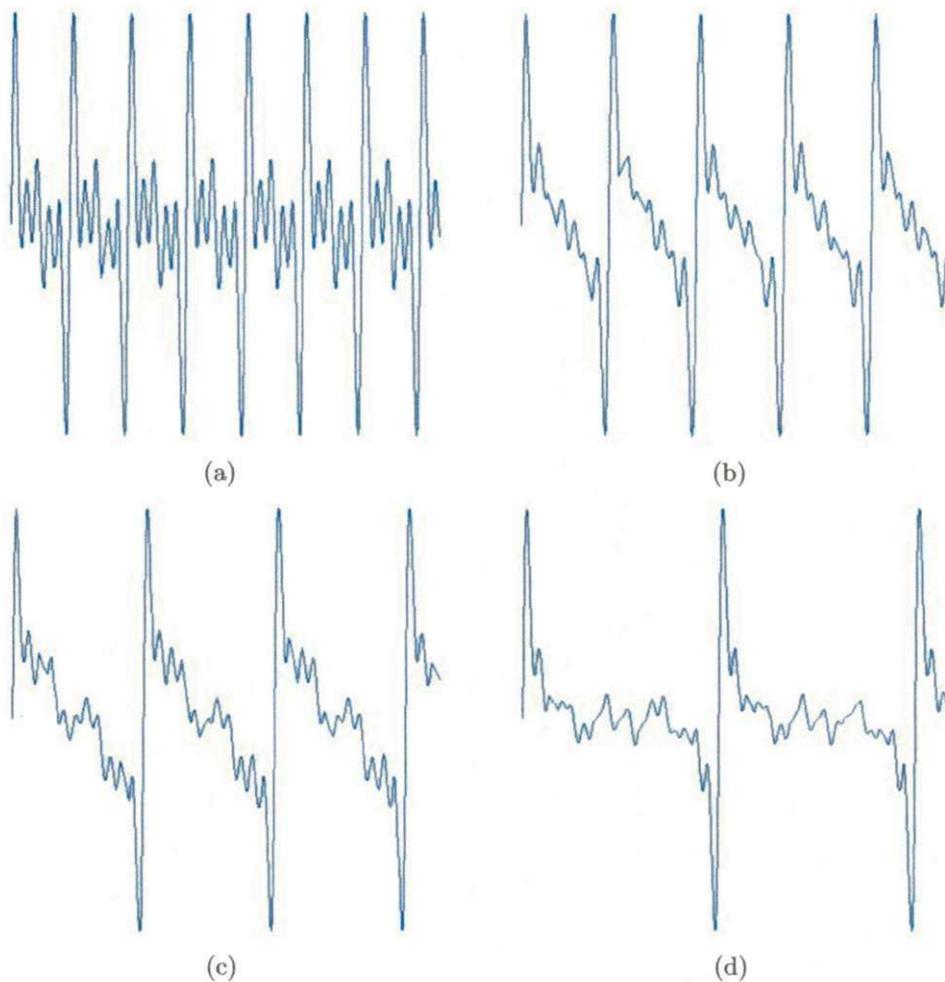


Figura 4.10: (a) Forma da onda da corda Mi. (b) Forma da onda da corda Lá. (c) Forma da onda da corda Ré. (d) Forma da onda da corda Sol.

4.2.3 Análise das placas vibrantes

Buscando idealizar o comportamento de violinos construídos com diferentes materiais, analisamos o comportamento acústico de alguns "tampos"(placas) usando a formação das Figuras de Chladni. Foram analisadas duas placas, uma de vidro e outra de madeira e determinados alguns dos seus modos de vibração.

Para a placa de vidro houve a formação das figuras nas frequências 647, 922, 1105 e 1315 Hz que são apresentadas nas Figuras (4.11a), (4.11b), (4.11c) e (4.11d) respectivamente.

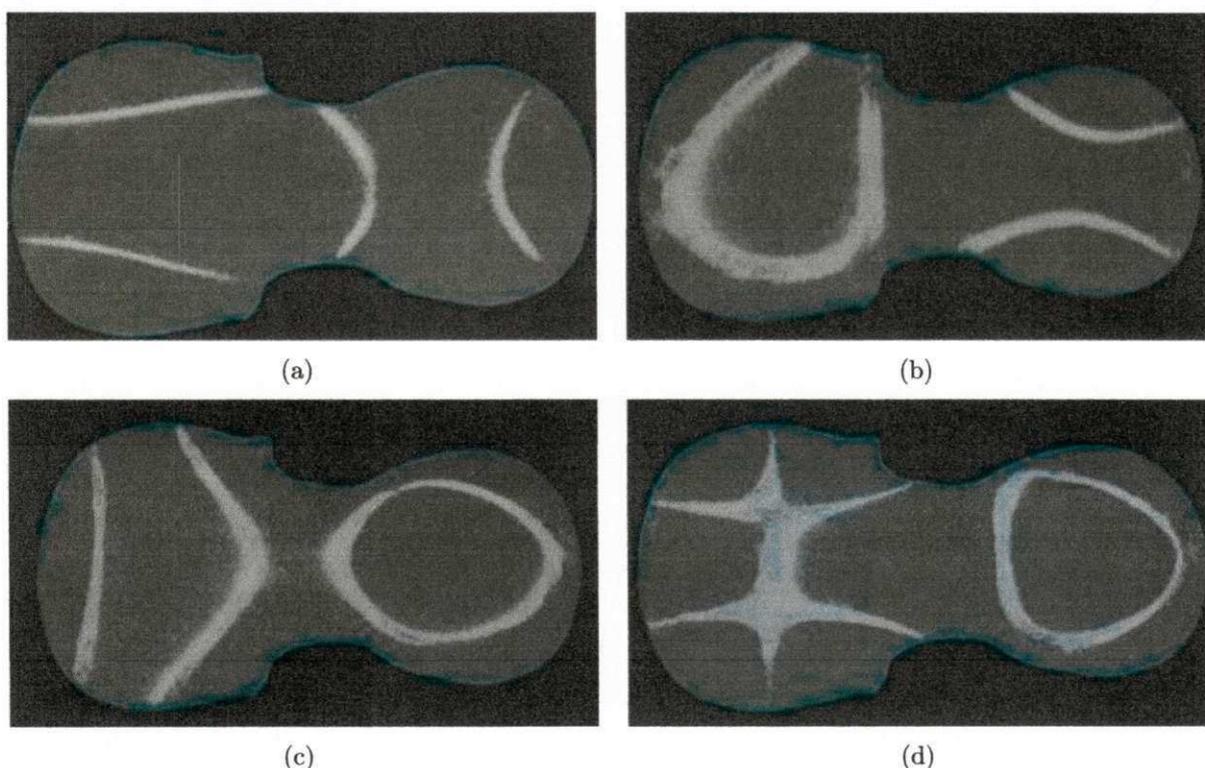


Figura 4.11: Modos de vibração da placa de vidro evidenciados; figuras formadas nas frequências (a) primeiro modo, 647 Hz (b) segundo modo, 922 Hz. (c) terceiro modo, 1105 Hz (d) quarto modo, 1315 Hz.

Para a placa de madeira houve a formação das figuras nas frequências 450 e 547 Hz, que são apresentadas nas Figuras (4.12a), (4.12b) respectivamente.

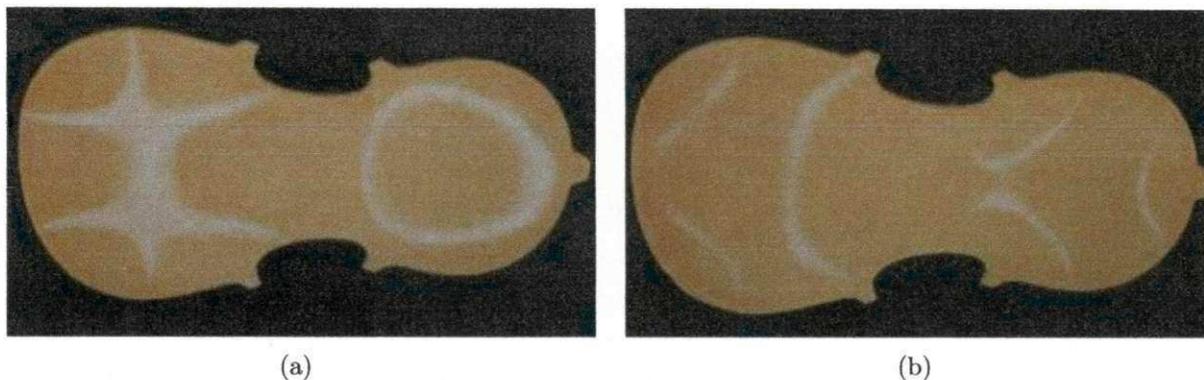


Figura 4.12: Modos de vibração da placa de madeira evidenciados; figuras formadas nas frequências (a) primeiro modo, 450 Hz (b) segundo modo, 547 Hz.

O que observamos?

Para a placa de vidro, no intervalo de frequência analisado, percebemos que o seu primeiro modo de vibração evidenciado possui frequência igual a 647 Hz, que é aproximadamente a nota $M_5 = 659,3$ Hz. Essa proximidade nos indica que em um violino de vidro este tempo provavelmente reforçará esta nota. Para a placa de madeira foi observado que o seu primeiro modo de vibração possui frequência de 450 Hz, que é aproximadamente a frequência da nota $Lá_4 = 440$ Hz. Em um violino este tempo provavelmente reforçará esta nota. No mesmo intervalo de frequência, a placa de vidro apresentou quatro modos normais de vibração enquanto que a de madeira, apenas dois. Acreditamos que este fato é devido à diferença entre as velocidades de propagação do som e as densidades em ambos os materiais, já que a geometria de ambas as placas é semelhante. Como foi mencionado no Capítulo 3, a formação das ondas estacionárias (modos normais) em placas vibrantes depende da geometria dessas placas. O quarto modo da placa de vidro [Figura (4.11d)] e o primeiro da placa de madeira [Figura (4.12a)] são idênticos; tal resultado era esperado já que as placas são semelhantes geometricamente. No entanto há uma diferença considerável entre as frequências que ambos são evidenciados. Associamos este comportamento também à diferença entre as velocidades de propagação do som nas duas placas.

Considerações finais

Este trabalho procurou mostrar a conexão entre a Física e a Música, mostrando a presença de princípios físicos durante os processos de construção e execução dos instrumentos musicais, em particular do violino. Foram ainda discutidos conceitos de física básica como o som e suas propriedades, deixando claro que estes estão diretamente relacionados com a Música. Com o estudo das ondas em cordas vibrantes percebe-se que a Física descreve a fonte primária de produção do som de todos os instrumentos de corda.

Para uma melhor compreensão do violino buscamos conhecer o seu surgimento, sua evolução e os seus principais construtores. Possuindo uma beleza estética e sonora que lhe rendeu um lugar de prestígio nas orquestras, o violino é dono de uma estrutura complexa com múltiplas ressonâncias durante o processo de produção do som. O espectro sonoro do violino devido essas diversas ressonâncias possui harmônicos mais intensos que outros.

Foi analisado o espectro sonoro de um único violino, é interessante que seja feita a análise dos espectros de outros violinos para comparar os resultados. Em relação as Figuras de Chladni, houve limitações em relação a faixa de frequência analisada; segundo o que é dito no Capítulo 3 há a possibilidade de haver modos de vibração dos tampos do violino abaixo da frequência de 150 Hz, porém o aparelho utilizado fornece frequências de 150 Hz a 3200 Hz.

A análise deste espectro e também das Figuras de Chladni presentes neste trabalho não nos trás somente informações sobre o funcionamento do violino; mostra-nos, sobretudo, uma

Considerações finais

maneira didática de se ensinar os conceitos físicos relacionados à Acústica.

Bibliografia

- [1] SOARES, Tanny de Oliveira Cittadin. *O violino: sua origem, principais construtores e uma visão contemporânea por Leandro Mombach*. Florianópolis, 2007. Monografia (Bacharelado em Música-Violino) – Departamento de Música, Universidade do Estado de Santa Catarina.
- [2] BERGMANN FILHO, Juarez. *A análise e a criação de literatura musical como ferramenta da metodologia contemporânea do ensino do violino em sua fase inicial de aprendizado*. Curitiba, 2010. Dissertação (Mestrado em Música) – Departamento de Artes, Universidade Federal do Paraná.
- [3] BRITO, Armando A. de Sousa e; BRITO, Andrea S. de Sousa e. *O Violino – A Sublimação da Madeira*. *Ciência & Tecnologia dos Materiais*, Vol. 21, n.3/4, 2009.
- [4] BOIA, Pedro dos Santos. *Construção social, materialidade e identidade na relação instrumento-instrumentista: explorando novos caminhos na Sociologia da Música*. *Revista do Departamento de Sociologia da FLUP*, Vol. XX, 2010, pág. 109–136
- [5] RENATA. *CORDAS: Uma família vibrante!* Disponível em: <<http://www.renatacortezsica.com.br/jazz/instrumentos/cordas.htm>>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2014.

Bibliografia

- [6] DONOSO, José Pedro; TANNÍUS, Alberto; GUIMARÃES, Francisco; FREITAS, Thiago Corrêa de. *A Física do Violino*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 2, 2305, (Julho) 2008.
- [7] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de Física Básica*, 4ªed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2004.
- [8] YOUNG, H. D. et al. (Sears e Zemansky). *Física II: termodinâmica e ondas*, ed.12. São Paulo: Addison Wesley, 2008.
- [9] MUNEM, Mustafa A; FOULIS, David J. *Cálculo*. v.1. Rio de Janeiro: LTC, 1982.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro : LTC, 1998, v.1.
- [11] KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999, v.2.
- [12] OLIVEIRA, Mário José de. *Termodinâmica*, 1ªed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.
- [13] KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999, v.1.
- [14] MENEZES, Flo. *A acústica musical em palavras e sons*. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2003.
- [15] GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. *Musicalizando a escola: música, conhecimento e educação*. São Paulo: Escrituras Ed., 2006.
- [16] DONOSO, José Pedro; TANNÍUS, Alberto; GUIMARÃES, Francisco; FREITAS, Thiago Corrêa de; BRUNO, Deiviti. *A Física do Violino*. Ciência Hoje, vol.45, nº 267,p 21, (janeiro/fevereiro) 2010.
- [17] MENDOZA, Román Robles. *La banda de músicos: las bellas artes musicales en el sur de Ancash*. Lima, Peru: J.John S.R. Ltda, 2000.

Bibliografia

- [18] FIGUEIREDO, Anibal; TERRAZZAN, Eduardo A. *Os sons e os instrumentos*. Revista de Ensino de Ciências, n.18, (Agosto) 1987.
- [19] SOUZA, M. R. de. *Classificação de madeiras para instrumentos musicais*. Brasília: IBDF/DEL/LPF, 1983. 3p.
- [20] CLERICA, Lisângela Flávio dos Macudos. *Utilização de Madeiras Nativas Moçambicanas na Produção de Instrumentos Musicais*. Maputo, 2009. Projeto Final (Faculdade de Agronomia e Engenharia Florestal) – Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Eduardo Mondlane.
- [21] RIPPER NETO, Arthur Palmeira. *Vibrações mecânicas*. Rio de Janeiro: E-papers, 2007.
- [22] JANSSON, E. *Acoustics for Violin and Guitar Makers* (KTH Institute, Suecia, 2002) 4^a ed. Disponível em <<http://www.speech.kth.se/publications>>. Acesso: 20 de janeiro de 2014.
- [23] PARKER, Barry. *Good Vibrations: The Physics of Music*, The Johns Hopkins University press, Baltimore, (2009).
- [24] FONTES, Niels. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFBahia), Disponível em: <<http://www.ifba.edu.br/fisica/nfl/fge2/RessonadorDeHelmholtz/>>. Acesso em: 16 de janeiro de 2014.
- [25] VILLATE, Jaime E. *Física 3*. Disponível em: <<http://def.fe.up.pt/fisica3/ondas3/index.html>> Acesso: 06 de janeiro de 2014.
- [26] MMFísica Slides, *Séries de Fourier e Equações às Derivadas Parciais*. Disponível em <http://sim.fc.ul.pt/sim_pt/MMFísica_Slides_-_bound_value> Acesso em: 05 de janeiro de 2014.

Bibliografia

- [27] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. *Fundamentos de física: termodinâmica e ondas*, Rio de Janeiro: LTC, 2001. Vol. 2.
- [28] HEWITT, P. G. *Física Conceitual*. Porto Alegre: Bookman, 2002.
- [29] NESCHLING, John. *Características do som*. Disponível em : http://conservatorio0.tripod.com/propriedades_do_som_.htm. Acesso em: 06 de janeiro de 2014.
- [30] FREDERICO, Edson. *Música:breve história*. São Paulo: Irmão Vitale, 1999.
- [31] CERQUEIRA FILHO, Ilton José de. *História da Flauta*. São Paulo: Biblioteca24horas, 2009.